Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

Лекционные курсы НОЦ

Выпуск 1

Издание выходит с 2006 года

Е. М. Чирка

Римановы поверхности

МИАН

Москва
2006

УДК 517.5
ББК (В)22.16
Л43

Л43 **Лекционные курсы НОЦ** / Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (МИАН). — М.: МИАН, 2006. Вып. 1: Римановы поверхности / Чирка Е. М. — 106 с.

ISBN 5-98419-011-7

Серия “Лекционные курсы НОЦ” — рецензируемое продолжающееся издание Математического института им. В. А. Стеклова РАН. В серии “Лекционные курсы НОЦ” публикуются материалы специальных курсов, прочитанных в Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук в рамках программы Научно-образовательный центр МИАН.

Настоящая брошюра содержит полугодовой курс Е. М. Чирки “Римановы поверхности”, прочитанный в осеннем семестре 2005 года.

ISBN 5-98419-011-7

Оглавление

Предисловие 5

Алгебраические кривые (введение) **7**

Лекция 1. Аналитическое продолжение – Римановы области – Алгебраические функции – Подготовительная теорема Вейерштрасса – Локальная параметризация 7

Лекция 2. Особые точки – Разрешение особенностей – Поведение в ∞ – Проекции – Формула Римана–Гурвица 15

Топология поверхностей и дифференциальные формы **23**

Лекция 3. Гладкие многообразия – Векторные поля – Дифференциальные формы – Цепи и интегрирование – Лемма Пуанкаре – Когомологии де Рама . 23

Лекция 4. Хирургия ориентированной поверхности – Потоки – Регуляризация – d-проблема на ориентируемой поверхности 31

Комплексные структуры на поверхности **43**

Лекция 5. Римановы поверхности – Комплексные структуры – Почти комплексные структуры – Уравнение Бельтрами и голоморфные диски – Операторы Коши–Грина 43

Лекция 6. Лемма Вейля – Теорема единственности – Уравнение голоморфных дисков – Существование голоморфных дисков – Комплексные структуры и метрики 52

Вокруг оператора $\bar\partial$ **57**

Лекция 7. $\bar\partial$ на потоках – Вычеты мероморфных форм – Дивизоры мероморфных функций и форм – $\bar\partial$-проблема на плоскости 57

Лекция 8. Когомологии Дольбо в потоках – Замкнутость образа $\bar\partial$ – Двойственность Серра – Расслоения и формы – Потоки и расслоения 65

Лекция 9. Разложения Ходжа – $\partial\bar{\partial}$-проблема – Дубли и функции Грина – Теорема Римана – Задача Миттаг-Леффлера для форм – Задача Миттаг-Леффлера для функций 73

Дивизоры мероморфных функций **81**

Лекция 10. Дивизоры – Теорема Римана–Роха – Задача Вейерштрасса – Решётки периодов и многообразия Якоби – Теорема Якоби 81

Лекция 11. Расслоения и дивизоры – Дивизоры и расслоения – Классы Черна – Риман–Рох для расслоений – Вложения в $\mathbb{P}_n$ – И опять алгебраические кривые 90

Контрольная работа 103

Список литературы **105**

Предисловие

Это записки лекций, прочитанных осенью 2005 г. в научно-образовательном центре при Математическом институте им. В. А. Стеклова. Основной целью спецкурса было изложение с возможно полными доказательствами традиционных начал теории римановых поверхностей единым методом $\bar{\partial}$-проблемы из теории функций многих комплексных переменных. По существу, из многомерного комплексного анализа взято и доказательство существования комплексной структуры на ориентированной поверхности с фиксированной римановой метрикой (этому посвящены лекции 5, 6, которые при беглом чтении можно опустить; в дальнейшем используются только элементарные свойства оператора Коши – Грина (л. 5.5) и лемма Вейля (л. 6.1)).

Римановы поверхности часто представляются как поверхности в аффинном или проективном комплексном пространстве, поэтому многие переменные появляются уже в первых двух лекциях, посвящённых алгебраическим кривым. Переходя к абстрактным римановым поверхностям, мы осваиваем (в лекциях 3, 4) технику d-проблемы на языке потоков де Рама, одновременно подготавливая решение $\bar{\partial}$-проблемы и разрабатывая технику переходов геометрия–анализ при помощи потоков. Теория потоков (де Рама), в отличие от теории распределений, не получила широкого распространения в обычном анализе, но в многомерном комплексном анализе она давно и прочно обосновалась. Одной из целей спецкурса было показать, насколько естественна и успешна эта техника уже в одномерном случае римановых поверхностей.

Я по возможности избегал чрезмерной абстракции и потому отказался от языка теории пучков, когомологий Чеха, точных последовательностей и т.п. Кажущаяся простота и очевидная эффективность этого подхода (написал точную последовательность и – ура!) во-первых, требует много формальной “абстрактной чепухи”, а во-вторых, оставляет в тени суть большинства основных проблем. Для римановых поверхностей достаточно локально свободных пучков, т.е. расслоений, но и они вошли в курс в основном чтобы продемонстрировать естественные общие формы ряда теорем (двойственность Серра, теорема Римана – Роха и др.); впрочем, разделы о расслоениях не используются в остальной части курса.

Какая предполагалась подготовка слушателей? Прежде всего, это университетский курс ТФКП (не весь и не сразу). Общее знакомство с многообразиями и дифференциальными формами. Кое-что их функционального анализа (теорема Хана–Банаха). Из алгебры – знакомство с алгеброй многочленов и теоремой о симметрических многочленах. Ну и некоторое представление о расслоениях из дифференциальной геометрии.

Об источниках. Самой близкой по стилю подачи материала для меня была обзорная статья В. В. Шокурова [Шо], затем книжка Б. А. Дубровина [Д]. Доказательства во второй части курса сверялись по книгам Форстера [Ф] и (частично) Гриффитса–Харриса [ГХ]. Большую помощь оказали мне записки лекций по римановым поверхностям С. Ю. Немировского, которые он читал в МНУ; в частности, у него заимствована основная идея доказательства замкнутости образа оператора $\bar{\partial}$, часть задач и примеров.

Этот курс всего лишь вводный. Вне его остаются: универсальные накрытия, гиперболическая геометрия, клейновы группы – квазиконформные отображения, модули римановых поверхностей, в частности, пространства Тейхмюллера – слоения и динамика на римановой поверхности – краевые задачи – автоморфные функции, тета-функции и приложения (и много ещё чего). По каждой из этих тем можно читать годовой спецкурс. Так что мы только подошли к перекрёстку больших дорог, а дальше – богатый выбор.

Алгебраические кривые (введение)

Лекция 1

Аналитическое продолжение – Римановы области – Алгебраические функции – Подготовительная теорема Вейерштрасса – Локальная параметризация

1. Аналитическое продолжение. Голоморфные функции в области $D \subset \mathbb{C}$ на плоскости $\mathbb{C}$ комплексного переменного $z = x + iy$ – это функции, которые в окрестности каждой точки $a \in D$ разлагаются в равномерно сходящиеся степенные ряды, $\sum_0^\infty c_k(z-a)^k$. (Эквивалентное определение: это непрерывно дифференцируемые функции f в D, удовлетворяющие уравнению $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, где $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\big)$ (условие Коши–Римана).) Степенной ряд голоморфной функции может сходиться в некотором круге K, выходящем за пределы области D. Если при этом $D \cap K$ несвязно, то значения суммы ряда и значения разлагаемой функции в одной из компонент $D \cap K$ могут отличаться. Например, функция $\sqrt{z}$ определена условием $|\arg\sqrt{z}| < \pi/2$ и голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, комплексной плоскости с разрезом по отрицательной

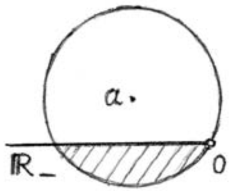

Рис. 1.

полуоси, а её ряд Тейлора в точке $a = -1 + i\varepsilon,\ \ 0 < \varepsilon < 1$, сходится в круге $K\colon |z-a|^2 < 1 + \varepsilon^2$, пересекающем нижнюю полуплоскость Π_-, причём значения суммы степенного ряда и самой функции в $\Pi_- \cap K$ отличаются знаком.

Сумму степенного ряда можно далее переразлагать в ряд Тейлора в любой точке круга сходимости; область сходимости нового ряда может при этом опять расшириться и в результате мы получаем нечто маловразумительное, что называется “многозначной аналитической функцией” (непонятно где определённой и непонятно где какие значения принимающей). Это понятие можно формально-строго определить, но оставаясь на плоскости $\mathbb{C}$, понять его природу довольно сложно.

Наглядный переход от функций к их “графикам” в $\mathbb{C}^2_{z,w}$ в ряде случаев помогает увидеть нюансы описанного выше процесса аналитического продолжения. Например, графики обратных функций, типа $\sqrt{z}$, $\operatorname{Ln} z$, – это поверхности в $\mathbb{C}^2$, которые являются графиками однозначных функций (в наших случаях $z = w^2$ и $z = e^w$) над (соответствующими областями в) $\mathbb{C}_w$. Функции вида $z^{p/q}$, p, q целые взаимно простые, лучше описываются своими вполне обозримыми “графиками” $w^q = z^p$ в $\mathbb{C}^2$. Но уже z^α с иррациональным показателем $\alpha > 0$ показывает, что такое наглядное описание не всегда работает: множество $\{(z, z^\alpha)\}$ заполняет всюду плотно вещественную гиперповерхность $|w| = |z|^\alpha$ и нетрудно придумать аналитическую функцию, “график” которой будет всюду плотным подмножеством $\mathbb{C}^2$, чего уж тут наглядного…

2. Римановы области. Замечательная идея Римана – представлять многозначные аналитические функции как обычные голоморфные функции, только определённые не в областях плоскости $\mathbb{C}$, а (в общем) в областях, расположенных “над” $\mathbb{C}$, которые при проектировании в $\mathbb{C}$ могут частично перекрываться. В современной терминологии, область над $\mathbb{C}$ или, по-другому, *риманова область* – это пара (M, π), где M – комплексное одномерное многообразие и $\pi\colon M \to \mathbb{C}$ – локально взаимно-однозначное голоморфное отображение (проекция), т.е. для всякой $a \in M$ есть окрестность $U \ni a$ в M такая, что $\pi(U) = D$ – круг в $\mathbb{C}$ и $\pi\colon U \to D$ – биголоморфное ($1 : 1$ и в обе стороны голоморфное) отображение.

Функция f на таком многообразии голоморфна тогда и только тогда, когда для каждой такой U $\;f \circ \pi^{-1} \in \mathcal{O}(D = \pi(U))$ (знаком $\mathcal{O}$ мы здесь и далее обозначаем голоморфные функции). Если M – лишь топологическое многообразие и π – локальный гомеоморфизм, то на M естественно определяется комплексная структура с координатными картами (U, π); функции замены координат, $\pi(U \cap V) \ni z \mapsto z \in \pi(U \cap V)$ (тождественные), конечно же, голоморфны.

Примеры. 1. M – "график" $w = \operatorname{Ln} z$ (многообразие $z = e^w$ в $\mathbb{C}^2$), $\pi\colon (z, w) \mapsto z \in \mathbb{C} \setminus 0$. $z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}$ – голоморфная функция на M (равная $e^{\alpha w}|_M$).

2. $M\colon w^2 = z^3$ над $\mathbb{C} \setminus 0$. Функция $\sqrt{z} = w/z$ голоморфна на M.

Упражнение. Любая функция, голоморфная на этой римановой области M, однозначно представляется в виде $f = h_1(z) + w\, h_2(z)|_M$, где $h_j \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus 0)$.

3. Алгебраические функции. Непрерывная функция f, определённая в некоторой области D комплексной плоскости, называется *алгебраической*, если она в этой области удовлетворяет алгебраическому уравнению $P(z, f(z)) \equiv a_0(z) f(z)^n + a_1(z) f(z)^{n-1} + \dots + a_n(z) = 0$, где $a_j(z)$ – многочлены от $z \in \mathbb{C}$, $a_0 \not\equiv 0$. Такая f обязательно голоморфна в D и аналитически продолжаема "почти по любому" пути в комплексной плоскости, но, как правило, аналитическое продолжение такой функции многозначно. Если $P = P_1^{k_1} \dots P_m^{k_m}$ – раложение на неприводимые (далее неразложимые, непостоянные) множители-многочлены от z, w, то для некоторого ν $P_\nu(z, f(z)) = 0$ на непустом открытом подмножестве в D, из чего (по теореме единственности в ТФКП) следует, что $P_\nu(z, f(z)) \equiv 0$ в D. Это свойство, очевидно, сохраняется и при аналитическом продолжении, поэтому в определении алгебраической функции многочлен P можно считать неприводимым (что мы и предполагаем в дальнейшем).

"График" алгебраической функции f – это поверхность S: $P(z, w) = 0$ в $\mathbb{C}^2$ (полнее, её замыкание в $(\mathbb{P}_1)^2$, где $\mathbb{P}_1 = \mathbb{C} \cup \infty$ – сфера Римана), $P(z, w)$ – неприводимый многочлен; такие поверхности называются *алгебраическими кривыми* (в $\mathbb{C}^2$ или $(\mathbb{P}_1)^2$).

Над точками $z \in \mathbb{C}$, в которых $a_0(z) \neq 0$, многочлен P по w имеет n корней (с учётом кратностей). Если $a_0(z) \to 0$ при подходе к $z_0 \in \mathbb{C}$, то часть корней стремится к ∞ в $(\mathbb{P}_1)_w$ и тогда (z_0, ∞) принадлежит замыканию S. При $z = \infty$ многочлен P в общем не определён, но S имеет не более чем n предельных точек на сфере $\infty \times \mathbb{P}_1$ (см. уравнение S в координатах (ζ, w), $\zeta = 1/z$).

Функции вида $P(z, w) \equiv w^n + a_1(z) w^{n-1} + \dots + a_n(z)$, где a_j голоморфны в области $D \subset \mathbb{C}$, называются *многочленами Вейерштрасса* в $D \times \mathbb{C}$ (бытует также название *псевдополиномы* Вейерштрасса). Для всякой $z \in D$, такая функция имеет ровно n нулей в плоскости $\mathbb{C}_w$ (с учётом кратностей) и проекция множества её нулей $Z_P\colon P(z,w)=0$ в D *собственная* (т.е. для всякого компакта $K\subset D$ его прообраз $Z_P\cap(K\times\mathbb{C})$ – тоже компакт, корни над компактами в D не уходят на ∞).

4. Подготовительная теорема Вейерштрасса. *Пусть* $f(z,w)$ *– голоморфная функция в окрестности начала координат в* $\mathbb{C}^2$, $f(0,0)=0$, *но* $f(0,w)\not\equiv 0$, *и пусть* $k<\infty$ *– кратность нуля* $f(0,w)$ *при* $w=0$. *Тогда существует многочлен Вейерштрасса* $P(z,w)=w^k+a_1(z)w^{k-1}+\dots+a_k(z)$ *с* a_j, *голоморфными в окрестности* $0\in\mathbb{C}_z$, *такой, что* $f=gP$, *где функция* $g(z,w)$ *голоморфна в окрестности* $(0,0)$ *и* $g(0,0)\neq 0$.

Другими словами, множество нулей практически произвольной голоморфной функции локально устроено как множество нулей некоторого многочлена Вейерштрасса – очень удобное представление!

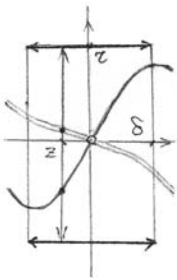

Рис. 2.

$\lhd$ По условию, существует $r>0$ такое, что $w=0$ – единственный нуль $f(0,w)$ в круге $|w|\leqslant r$ (теорема единственности, ТФКП). $\Longrightarrow$ Существует $\delta>0$ такое, что $f\neq 0$ при $|z|<\delta$, $|w|=r$. $\Longrightarrow$ (принцип аргумента, ТФКП) для всякого z, $|z|<\delta$, $f(z,\cdot)$ имеет ровно k нулей (с учётом кратностей) при $|w|<r$. Нумеруем эти нули: $w_1(z),\dots,w_k(z)$ (порядок произвольный) и составляем симметрические суммы $s_\nu(z):=\sum_1^k w_j(z)^\nu$. По формуле логарифмического вычета (ТФКП)

$$s_\nu(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\eta|=r}\eta^\nu\,\frac{f'_w(z,\eta)}{f(z,\eta)}\,d\eta,$$

– голоморфная (однозначная!) функция в круге $|z|<\delta$. Положим $P(z,w):=\Pi_1^k(w-w_j(z))$ и запишем его как многочлен от w.

По формулам Виета, коэффициенты $a_j(z)$ этого многочлена являются симметрическими функциями от $\{w_j(z)\}$, а по теореме о симметрических многочленах эти коэффициенты суть многочлены от s_ν, $\nu = 1, \ldots, k$, (формулы Ньютона, см., например, [К]). $\Longrightarrow$ $a_j(z)$ – голоморфные функции в круге $|z| < \delta$. Функция $g := f/P$ голоморфна по w, $|w| < r$ (по теореме об устранимой особенности, ТФКП). $\Longrightarrow$ она голоморфна и по z, w при $|z| < \delta$, $|w| < r$: интегральная формула Коши (ТФКП) по переменной w для $g(z, w)$ по окружности $|w| = r$ даёт функцию, которая очевидно голоморфна по совокупности переменных z, w. $\rhd$

Следствие. *Если $f(0,0) = 0$, но $f'_w(0,0) \neq 0$, то в окрестности $(0,0)$ множество нулей Z_f есть голоморфный график, $Z_f : w = h(z)$, h голоморфна в окрестности 0 в $\mathbb{C}_z$.*

$\lhd$ $k = 1$. $\rhd$

5. Локальная параметризация.

Предложение 1. *D – круг $|z| < r$, $P(z, w)$ – неприводимый многочлен Вейерштрасса степени k в $D \times \mathbb{C}$, причём $P(0, w) = w^k$ и начало координат – единственная точка в $D \times \mathbb{C}$, в которой $P = P'_w = 0$. $\Longrightarrow$ существует голоморфное $1 : 1$ отображение $\zeta \mapsto (\zeta^k, h(\zeta))$ круга $|\zeta| < r^{1/k}$ на Z_P (голоморфная параметризация). В частности, множество $Z_P \setminus (0,0)$ связно.*

$\lhd$ Пусть S – связная компонента $Z_P \setminus (0,0)$. Фиксируем $a \in D \setminus 0$. По условию, все нули $P(a, w)$ простые (кратности 1) $\Longrightarrow$ (след. (4)) существует $\delta > 0$ такое, что $S \cap \{|z - a| < \delta\}$ – объединение $s \leqslant k$ попарно не пересекающихся голоморфных графиков, $w = h_j(z)$, $j = 1, \ldots, s$. $\Longrightarrow$ $P_a(z, w) := \Pi_1^s(w - h_j(z))$ – многочлен Вейерштрасса в $U_a = \{|z - a| < \delta\} \times \mathbb{C}$ и $Z_{P_a} = S \cap U_a \Longrightarrow Z_{P_a} = Z_{P_b}$ в $U_a \cap U_b$. Но два многочлена Вейерштрасса с одинаковым множеством (простых) нулей совпадают $\Longrightarrow$ (P_a) образуют единый многочлен Вейерштрасса $\widetilde{P}$ над $(D \setminus 0) \times \mathbb{C}$ такой, что $Z_{\widetilde{P}} = S$. Так как $P(0, w) = w^k$, то все нули $P(a, w)$ стремятся к 0 при $a \to 0$. $\Longrightarrow$ (формулы Виета) коэффициенты $\widetilde{P}$ стремятся к 0 при $a \to 0$. $\Longrightarrow$ (по теореме об устранимой особенности, ТФКП) они голоморфно продолжаются в 0. $\Longrightarrow$ $\widetilde{P}$ – многочлен Вейерштрасса в $D \times \mathbb{C}$, он делит P и $P/\widetilde{P}$ – тоже многочлен Вейерштрасса (или $\equiv 1$) в $D \times \mathbb{C}$. Но P неприводим, $\Longrightarrow \widetilde{P} = P \Longrightarrow Z_P \setminus (0,0) = S$ связно и $s = k$.

Пусть $a \in D \setminus \mathbb{R}_-$. Согласно след. (4) всякая функция h_j аналитически продолжается по любому пути в $D \setminus \mathbb{R}_-$. Так как $D \setminus \mathbb{R}_-$ односвязна, то (по теореме о монодромии, ТФКП) эти продолжения дают однозначную аналитическую (=голоморфную) функцию в $D \setminus \mathbb{R}_-$ и, таким образом, $Z_P \cap ((D \setminus \mathbb{R}_-) \times \mathbb{C})$ состоит из k попарно не пересекающихся голоморфных графиков S_j: $w = h_j(z)$, $j = 1, \ldots, k$ (сохраним обозначения). Перенумеруем $S_2, \ldots, S_k$ так, чтобы предельные значения h_j на $\mathbb{R}_-$ со стороны верхней полуплоскости, h_j^+, совпадали с предельными значениями h_{j+1} со стороны нижней полуплоскости, h_{j+1}^-, $j < k$; тогда h_k^+ совпадает с h_1^- (единственная оставшаяся возможность: над каждой точкой из $D \cap (\mathbb{R}_- \setminus 0)$ множество Z_P состоит из k голоморфных графиков, никаких разрывов нет).

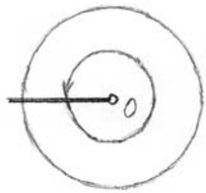

Рис. 3.

Определим функцию $\arg(z^{1/k})$ на S_j равной $\frac{1}{k}(\arg z + 2\pi(j-1))$, где $|\arg z| < \pi$ в $D \setminus \mathbb{R}_-$. Эта функция определена на $\bigcup S_j = Z_P \setminus (\mathbb{R}_- \times \mathbb{C})$ и, по построению, непрерывно продолжатся на $Z_P \setminus (0,0)$. $\Longrightarrow$ Функция $\zeta := |z|^{1/k} \exp(i \arg(z^{1/k})) = z^{1/k}$ определена и голоморфна на $Z_P \setminus (0,0)$ и $z = \zeta^k$. Положим $h(\zeta) = h_j(\zeta^k)$ в секторе $|\arg z + \pi - j\pi/k| < \pi/k$, $j = 1, \ldots, k$. Согласно нумерации S_j функция h непрерывно продолжается в круг $|\zeta| < r^{1/k}$, и переход из сектора в сектор является аналитическим продолжением $\Longrightarrow h$ голоморфна в $0 < |\zeta| < r^{1/k}$ $\Longrightarrow h \in \mathcal{O}(|\zeta| < r^{1/k})$ по теореме об устранимой особенности.

Отображение $\zeta \to (\zeta^k, h(\zeta))$, по построению, взаимно однозначно. $\triangleright$

Пример. $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ различны, круги D_j с центрами c_j не пересекаются. $\Longrightarrow$ $P(z,w) = w^k - \Pi(z - c_j)$ удовлетворяет условиям предложения 1 в каждой области $D_j \times \mathbb{C} \Longrightarrow$ голоморфная параметризация $Z_P \cap (D_j \times \mathbb{C})$ имеет вид $z = c_j + \zeta^k$, $w = h_j(\zeta)$, и в этом конкретном примере функции h_j находятся явно: $h_j(\zeta) = \zeta(\Pi_{l\neq j}(c_j - c_l + \zeta^k))^{1/k}$. Так по теории. С другой стороны, $(\partial P/\partial z)(c_j, 0) \neq 0 \implies$ по теореме о неявной функции Z_P в окрестности $(c_j, 0)$ есть голоморфный график $z = \phi(w)$, $\implies$ в качестве голоморфного параметра на Z_P в окрестности $(c_j, 0)$ можно (в чём-то проще) брать и $\zeta = w$.

Локальная параметризация $\zeta \mapsto (\zeta^k, h(\zeta))$ даёт разложение в ряд Тейлора $h(\zeta) = \sum_0^\infty c_\nu \zeta^\nu$, сходящийся в окрестности 0. Так как $\zeta = z^{1/k}$, то, подставляя (исключая ζ), получаем $w = \sum_0^\infty c_\nu z^{\nu/k}$, так называемый *ряд Пиюзо.* (Значение $z^{1/k}$ во всех слагаемых ряда одно и то же!) Его удобнее свернуть до $w = \sum_0^{k-1} b_j(z)\, z^{j/k}$, где $b_j \in \mathcal{O}(0)$ (голоморфны в окрестности 0).

Пример. $Z\colon w^2 - 2zw - z = 0 \implies w = z + \sqrt{z^2+z} = z + \sqrt{z}\sqrt{1+z} \implies b_0 = z,\ \ b_1 = \sqrt{1+z}$ в окрестности $(0, 0)$.

* * * * *

Упражнения.

1. Многообразие M: $w^2 = z^3$, $z \neq 0$, в $\mathbb{C}^2_{z,w}$ является областью над $\mathbb{C}$. Показать, что всякая голоморфная функция $f\colon M \to \mathbb{C}$ единственным образом представляется в виде $h_0(z) + h_1(z)\, w|_M$, $h_j \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus 0)$.

$*$ h_1, h_2 в этом представлении являются целыми функциями тогда и только тогда, когда f непрерывно продолжается в $(0, 0)$ и $|f(z, w) - f(0, 0)| = o(|z^{1/2}|)$ при $M \ni (z, w) \to (0, 0)$.

2. Любой многочлен $P(z, w)$ $\mathbb{C}$-линейным преобразованием $\mathbb{C}^2$ приводится к виду многочлена Вейерштрасса $w^n + \cdots$, коэффициенты которого – многочлены от z степени $\leqslant n$.

3. $P(z, w)$ – многочлен Вейерштрасса, коэффициенты которого – многочлены степени $\leqslant m \implies$ множество его нулей Z_P лежит в области $|w| < C(1 + |z|^m)$ с некоторой константой C.

Если $P(z, w) = w^n + a_1(z)w^{n-1} + \cdots$ – многочлен Вейерштрасса с целыми коэффициентами такой, что Z_P лежит в области $|w| < C(1 + |z|^m)$, то $a_j(z)$ – многочлен степени $\leqslant jm$, $j = 1, \ldots, n$.

4. Многочлен $P(z, w)$ представляется в виде $P_1 \cdot P_2$, где P_j – многочлены Вейерштрасса с целыми ($\in \mathcal{O}(\mathbb{C})$) коэффициентами. $\implies P_1$, P_2 – многочлены (по z, w).

5. $D = \mathbb{C} \setminus E$, E замкнутое, дискретное, $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus E)$ удовлетворяет уравнению $P(z, f(z)) = 0$ в D, $P(z, w) = \sum_0^n a_j(z) w^j$ – многочлен

от z, w. $\Longrightarrow f$ – рациональная функция. Если к тому же $a_0 \equiv \mathrm{const} \neq 0$, то $f(z)$ – многочлен.

6. $Z\colon w^2 = z^3 + z^4$. Найти голоморфную параметризацию $Z \cap \{|z| < r\}$ вида $\zeta \mapsto (\zeta^k, h(\zeta))$ и указать максимальное возможное r.

7. Функцию w на поверхности $w^2 = z^3 + z^4$ записать в виде ряда Пиюзо по дробным степеням z a) в окрестности $0 \in \mathbb{C}_z$, b) в окрестности $-1 \in \mathbb{C}_z$.

8. $Z \subset \mathbb{C}^2_{z,w}$ – образ $\mathbb{C}_\zeta$ при отображении a) $\zeta \mapsto (\zeta^2, \zeta^3 + \zeta^4)$, b) $\zeta \mapsto (\sin\zeta, 1 - \cos\zeta)$.

Найти многочлен $P(z, w)$ минимальной степени такой, что $Z = Z_P$.

9. Найти замыкание образа голоморфной кривой $\zeta \mapsto (e^\zeta, e^{\alpha\zeta})$, $\alpha > 0$, в $\mathbb{C}^2$.

10. Найти рациональную параметризацию (рациональное $1:1$ отображение $\mathbb{C} \setminus E$, E дискретное) алгебраической кривой $Z\colon w^2 = z^2 - 1$ в $\mathbb{C}^2$.

11. Известно, что $Z\colon w^2 = \Pi_1^n (z - c_j)$, c_j различны, – образ голоморфного отображения $\mathbb{C}_\zeta \to \mathbb{C}^2_{z,w}$.

a) Если это отображение полиномиальное, то $n = 1$.

$*$b) Если целое, то $n \leqslant 2$ (пример с $n = 2$!).

$*$c) Если Z – образ некоторой области $D \subset \mathbb{C}$ при рациональном отображении, то $n \leqslant 2$.

Лекция 2

Особые точки – Разрешение особенностей – Поведение в ∞ – Проекции – Формула Римана–Гурвица

6. Особые точки.

Предложение 2. *$P(z,w)$ – неприводимый многочлен Вейерштрасса в области $D\times\mathbb{C}$ $\Longrightarrow$*

1) *множество $\sigma\colon P=P'_w=0$ дискретное (локально конечное) в $D\times\mathbb{C}$.*
2) *$Z_P\setminus\sigma$ – связное комплексное многообразие.*

Точки множества σ называются *критическими точками* проекции множества Z_P в $\mathbb{C}_z$. В окрестности такой точки Z_P вполне может быть гладким многообразием, просто в ней $dz|_{Z_P}=0$.

$\lhd$ Индукция по k, степени P. При $k=1$ утверждение верно (Z_P – голоморфный график, σ пусто).

$P'_w = k\,Q_1^{k_1}\cdots Q_m^{k_m}$, Q_ν – неприводимые многочлены Вейерштрасса в $D\times\mathbb{C}$ степеней $<k$. Предположим, что утверждение 1) неверно $\Longrightarrow \exists\ \nu$: $Z_P\cap Z_{Q_\nu}$ имеет предельную точку $(a,b)\in D\times\mathbb{C}$; можем считать $(a,b)=(0,0)$, обозначаем это Q_ν через Q и полагаем σ': $Q=Q'_w=0$. По предположению индукции множество σ' дискретно, а $Z_Q\setminus\sigma'$ – связное комплексное многообразие. По подготовительной теореме Вейерштрасса существует бикруг $U\times V$ с центром в $(0,0)$ и многочлен Вейерштрасса $R(z,w)$ в $U\times\mathbb{C}$ такой, что $Q=g\,R$ в $U\times V$, где g голоморфна и нигде в $U\times V$ не равна нулю. Пусть $R=R_1^{l_1}\cdots R_s^{l_s}$ – разложение на неприводимые множители в $U\times\mathbb{C}$. Так как $(0,0)$ – предельная точка для $Z_P\cap Z_R$, то $\exists\ \nu$ такое, что $(0,0)$ – предельная точка для $Z_P\cap Z_{R_\nu}$. По предложению 1 Z_{R_ν} голоморфно параметризуется: $z=\zeta^l$, $w=h(\zeta)$. Функция $P(\zeta^l,h(\zeta))$ голоморфна в окрестности 0 в $\mathbb{C}_\zeta$ и $\zeta=0$ – предельная точка множества её нулей $\Longrightarrow$ (теорема единственности, ТФКП) эта функция $\equiv 0 \Longrightarrow P\equiv 0$ на $Z_{R_\nu} \Longrightarrow P=0$ на непустом открытом подмножестве связного комплексного многообразия $Z_Q\setminus\sigma'$. По теореме единственности $P\equiv 0$ на Z_Q (σ' дискретно). Так как $\forall\, z\in D$ порядки нулей $Q(z,\cdot)$ строго меньше порядков нулей $P(z,\cdot)$, то это значит, что Q делит P и P/Q – многочлен Вейерштрасса, не константа. Но это противоречит неприводимости P, $\Longrightarrow$ утверждение 1) верно, σ дискретно $\Longrightarrow z(\sigma)\subset\mathbb{C}_z$ тоже дискретно, в D.

Пусть S – связная компонента $Z_P \cap \{z \notin z(\sigma)\}$. Согласно след. (4), $\forall a \in D \setminus z(\sigma) \exists$ окрестность D_a такая, что $S \cap (D_a \times \mathbb{C})$ – объединение $\leqslant k$ голоморфных графиков $\Longrightarrow$ это есть множество нулей многочлена Вейерштрасса P_a, которые вместе ($a \in D \setminus z(\sigma)$) образуют единый многочлен Вейерштрасса $\widetilde{P}$ в $(D \setminus z(\sigma)) \times \mathbb{C}$ такой, что $Z_{\widetilde{P}} = S$ (см. доказательство предложения 1). Так как $z(\sigma)$ – дискретное множество, $Z_P \supset Z_{\widetilde{P}}$ и проекция Z_P в D собственная, то $\widetilde{P}$ продолжается до многочлена Вейерштрасса в $D \times \mathbb{C}$ и делит там P (в классе многочленов Вейерштрасса). Так как P неприводим, то отсюда следует, что $\widetilde{P} = P \Longrightarrow Z_P \setminus z^{-1}(z(\sigma)) = S$ связно. Множество $z^{-1}(z(\sigma)) \cap Z_P$ дискретное. По принципу аргумента (по переменному w) Z_P не имеет изолированных точек $\Longrightarrow Z_P \setminus \sigma$ тоже связно. $\rhd$

Пусть теперь S: $P(z, w) = 0$ – алгебраическая кривая в $\mathbb{C}^2$, P – неприводимый многочлен (от z, w). В точке, где $P'_w \neq 0$, множество S локально является голоморфным графиком над областью в $\mathbb{C}_z$ (след. (4)), в точке, где $P'_z \neq 0$, – голоморфным графиком над областью в $\mathbb{C}_w$. Точки множества $\operatorname{sng} S := S \cap \{P'_z = P'_w = 0\}$ называются *особыми* точками кривой S, а остальные, из $\operatorname{reg} S := S \setminus \operatorname{sng} S$ – *регулярными.*

Следствие. *$P(z, w)$ – неприводимый многочлен, $S = Z_P \Longrightarrow$ множество $\operatorname{sng} S$ конечное, а $\operatorname{reg} S$ – связное комплексное многообразие.*

$\lhd$ k – степень P по совокупности переменных $\Longrightarrow \exists\,\mathbb{C}$-линейное преобразование $\mathbb{C}^2$, после которого $\partial^k P/\partial z^k \equiv k! \equiv \partial^k P/\partial w^k$ (лёгкое упражнение). $\Longrightarrow P$ – многочлен Вейерштрасса и по z и по $w \Longrightarrow$ (предложение 2) $\operatorname{sng} S$ – дискретное множество и $\operatorname{reg} S$ – связно. (∞, ∞) – единственная предельная точка для S в $(\mathbb{P}_1)^2 \setminus \mathbb{C}^2$. Вне $(\mathbb{P}_1 \times 0) \cup (0 \times \mathbb{P}_1)$ множество $S \cup (\infty, \infty)$ определяется полиномиальным уравнением $\zeta^k \eta^k P(1/\zeta, 1/\eta) = 0$, где $\zeta = 1/z$, $\eta = 1/w$. Так как $\operatorname{reg} S$ связно, то это – алгебраическая кривая (неприводимая) в $\mathbb{C}^2_{\zeta,\eta} \Longrightarrow$ множество её особых точек тоже дискретно $\Longrightarrow \operatorname{sng} S$ не имеет предельных точек на компакте $S \cup (\infty, \infty) \Longrightarrow \operatorname{sng} S$ – конечное множество. $\rhd$

Пример (гиперэллиптические кривые). S: $w^2 = p(z)$, $p = \Pi_1^n (z - c_j) \Longrightarrow \operatorname{sng} S = S \cap \{p' = 0,\ w = 0\} = \{(c_j, 0)$: c_j – корень p кратности $> 1\}$. $\operatorname{sng} S = \varnothing \Longleftrightarrow$ все корни p простые (пока всё в $\mathbb{C}^2_{z,w}$).

7. Разрешение особенностей. S – алгебраическая кривая, $(0,0)$ – её особая точка $\Longrightarrow \exists\, \delta, r > 0$ такие, что $(0,0)$ – единственная особенность S в U: $|z| < \delta,\ \ |w| < r$ и S не пересекает $\{|z| < \delta,\ \ |w| = r\}$ (см. доказательство теоремы Вейерштрасса, лекция 1(4)). S_j – связная компонента $S \cap U \setminus (0,0) \Longrightarrow S_j \cup (0,0)$ голоморфно параметризуется кругом, $\zeta \mapsto (\zeta^{k_j}, h_j(\zeta))$. Такие особенности всех S_j одновременно "раскручиваются" введением дополнительного переменного и поднятием $\mathbb{C}^2$ в $\mathbb{C}^3_{z,w,\zeta}$ графиком Γ: $\zeta^K = z$ ($K =$ н.о.к. чисел k_j). При этом S_j поднимается на множество $\widetilde{S}_j \subset \Gamma$, $\widetilde{S}_j$: $z = \zeta^K$, $w = h_j(\zeta^{K/k_j}) =: \tilde{h}_j(\zeta)$. Так как ранг якобиевой матрицы функций, определяющих $\widetilde{S}_j$, очевидно, равен 2, то (теорема о неявной функции) никаких особенностей поверхность $\widetilde{S}_j$ не имеет.

Остаётся общая точка $(0,0,0) \in \bigcap \widetilde{S}_j$. "Расклейка листов" производится введением ещё дополнительных переменных. Для $j \neq l$ положим $\tilde{\eta} = (2w - \tilde{h}_j(\zeta) - \tilde{h}_l(\zeta))/(\tilde{h}_j(\zeta) - \tilde{h}_l(\zeta))$. $\Longrightarrow \tilde{\eta}|\widetilde{S}_j \equiv 1$, $\tilde{\eta}|\widetilde{S}_l \equiv -1$. Пусть $H_j = \tilde{h}_j + o(\zeta^N)$ – многочлены Тейлора для h_j достаточно высокой степени N. Тогда соответствующее отношение имеет пределы ± 1 в $(0,0,0)$ вдоль $\widetilde{S}_j$, $\widetilde{S}_l$, соответственно. Поднимаем всю картину в $\mathbb{C}^4_{z,w,\zeta,\eta}$, на график

$$\widetilde{\Gamma}\colon (z,w,\zeta) \in \Gamma, \quad (H_j(\zeta) - H_l(\zeta))\eta = 2w - H_j(\zeta) - H_l(\zeta).$$

$\Longrightarrow$ поднятия $\widetilde{S}_j$, $\widetilde{S}_l$ на $\widetilde{\Gamma}$ уже не пересекаются. После конечного числа таких "разрешений" мы получаем алгебраическую кривую в $\mathbb{C}^n$, без особенностей над $U \subset \mathbb{C}^2_{z,w}$, проекция которой в $\mathbb{C}^2_{z,w}$ взаимно-однозначна над $S \cap U \setminus (0,0)$.

Так мы избавимся от одной особенности, потом от другой, и т.д. Так как число особых точек S конечно, то в конце концов мы получим поверхность (алгебраическую кривую) без особенностей $\widetilde{S} \subset \mathbb{C}^N$, которая проектируется на $S \subset \mathbb{C}^2_{z,w}$, причём над $\operatorname{reg} S$ эта проекция взаимно-однозначна. Построенная таким образом кривая $\widetilde{S}$ называется *нормализацией* кривой S.

Эту процедуру можно распространить и на замыкание S в $(\mathbb{P}_1)^2$; результатом будет алгебраическая кривая без особенностей в $(\mathbb{P}_1)^N$, нормализация замыкания S.

8. Поведение в ∞. Исследуем подробнее поведение алгебраических кривых в бесконечности, при различных пополнениях $\mathbb{C}^2$.

Простейшим пополнением $\mathbb{C}^2$ до компактного комплексного многообразия является $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1 = (\mathbb{P}_1)^2$. "Бесконечно удалённые" точки в нём образуют две сферы Римана, $\infty \times \mathbb{P}_1$ и $\mathbb{P}_1 \times \infty$, пересекающиеся в точке (∞, ∞). Это многообразие покрывается четырьмя аффинными картами: $\mathbb{C}^2_{z,w}$, $\mathbb{C} \times (\mathbb{P}_1 \setminus 0)$ с координатами $z, \eta = 1/w$, $(\mathbb{P}_1 \setminus 0)) \times \mathbb{C}$ с координатами $\zeta = 1/z, w$ и $(\mathbb{P}_1 \setminus 0) \times (\mathbb{P}_1 \setminus 0)$ с координатами $\zeta = 1/z$, $\eta = 1/w$. Замены координат, очевидно, голоморфные, $(\mathbb{P}_1)^2$ – компактное комплексное многообразие.

Как ведут себя алгебраические кривые в бесконечности в $(\mathbb{P}_1)^2$, посмотрим на примере.

Пример. $S\colon w^2 = p(z)$, $p(z) = \Pi_1^n(z - c_j)$, все нули простые $\Longrightarrow$ (см. (6)) в $\mathbb{C}^2_{z,w}$ особых точек нет. $\overline{S} = S \cup (\infty, \infty)$, $\overline{S}$ в аффинной окрестности (∞, ∞) задаётся уравнением $\eta^2 = \zeta^n / \Pi(1 - c_j\zeta)$.

$n = 2k \Longrightarrow \overline{S} \cap U = S_+ \cup S_-$, $S_\pm \colon \eta = \pm\zeta^k / (\Pi(1 - c_j\zeta))^{1/2}$ в малой окрестности $U \ni (\infty, \infty)$, кривая приводима.

$n = 2k + 1 \Longrightarrow$ в малой окрестности $U \ni (\infty, \infty)$ кривая $\overline{S} \cap U$ неприводима и голоморфно параметризуется: $\zeta = \tau^2$, $\eta = \tau^n / (\Pi(1 - c_j\tau^2))^{1/2}$.

Прежде чем вводить комплексное проективное пространство, рассмотрим сначала более наглядный пример вещественной проективной плоскости. $\mathbb{RP}_2$ можно рассматривать как круг на евклидовой плоскости, у которого отождествлены диаметрально противоположные точки границы. Это, конечно, наглядно, но для работы не очень (как тут увидеть, что это многообразие, что оно неориентируемо, что окружность, соответствующая границе круга, ничего в нём не ограничивает – и т.п.). Более конструктивно следующее представление: в $\mathbb{R}^3_x$, $x = (x_0, x_1, x_2)$, рассмотрим отношение эквивалентности $x \sim tx$, $\forall t \in \mathbb{R} \setminus 0$. Тогда $\mathbb{RP}_2$ можно рассматривать как фактор $(\mathbb{R}^3 \setminus 0)/\sim$ с естественной “проекцией” $\pi\colon \mathbb{R}^3 \setminus 0 \to \mathbb{RP}_2$, $x \mapsto [x_0, x_1, x_3]$, класс эквивалентности. Сужение $\pi | S^2 \to \mathbb{RP}_2$ является, очевидно, двулистным накрытием, которое и определяет на $\mathbb{RP}_2$ структуру $\mathbb{R}$-аналитического компактного многообразия.

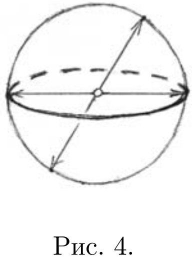

Рис. 4.

Перейдём теперь к комплексному случаю. В $\mathbb{C}^3 \setminus 0$ с точками (векторами) $z = (z_0, z_1, z_2)$ введём отношение эквивалентности $z \sim \lambda z, \ \ \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus 0$, и через $[z_0, z_1, z_2]$ обозначим такой класс эквивалентности (используются и другие обозначения: $(z_0 : z_1 : z_2)$ и т.п.). По определению, $(\mathbb{C}^3 \setminus 0)/\sim \ =: \mathbb{CP}_2$, двумерное комплексное проективное пространство (в алгебраической геометрии его чаще называют проективной плоскостью); всюду в дальнейшем мы его обозначаем просто $\mathbb{P}_2$. Естественная проекция $\pi\colon (z_0, z_1, z_2) \mapsto [z_0, z_1, z_2]$ определяет покрытие $\mathbb{P}_2 = \bigcup (U_j \colon z_j \neq 0)$. Координаты (z_0, z_1, z_2) в $\mathbb{C}^3$ называют *однородными координатами* соответствующих точек $[z_0, z_1, z_2]$ в $\mathbb{P}_2$. Множество $U_0\colon z_0 \neq 0$ состоит из точек (классов) $[z_0, z_1, z_2] = [1, z, w]$, где $z = z_1/z_0, \ \ w = z_2/z_0 \Longrightarrow U_0 \approx \mathbb{C}^2_{z,w}$, аффинная карта. Аналогично с U_j, причём аффинные координаты в U_j связаны с z, w дробно-линейными соотношениями $\Longrightarrow \mathbb{P}_2$ – комплексное многообразие. Сужение $\pi | S^5 \to \mathbb{P}_2$ (отображение Хопфа) сюръективно (на) $\Longrightarrow$ многообразие $\mathbb{P}_2$ компактное.

Обычно $\mathbb{C}^2$ как подмножество $\mathbb{P}_2$ отождествляется с $U_0\colon z_0 \neq 0$ $\Longrightarrow \mathbb{P}_2 \setminus \mathbb{C}^2 =: \infty = \{[0, z_1, z_2]\} \approx \mathbb{P}_1$, “сфера Римана на бесконечности”.

Любой многочлен $P(z, w)$ можно разложить на однородные слагаемые, $P = Q_n + \cdots + Q_0$, где Q_j есть сумма всех мономов из P суммарной (по z, w) степени j и $n = \deg P$. $\Longrightarrow P\bigl(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\bigr) = \sum_0^n z_0^{-j} Q_j(z_1, z_2) \equiv z_0^{-n} Q(z_0, z_1, z_2)$. Многочлен Q назовём *проективизацией* многочлена P (“гомогенизация” как-то не звучит). У этих многочленов одинаковые множества нулей в аффинной части, $Z_P = Z_Q \cap \mathbb{C}^2$ (множество Z_Q: $Q(z_0, z_1, z_2) = 0$ корректно определено в $\mathbb{P}_2$, хотя Q и не является функцией в $\mathbb{P}_2$). $Z_Q \cap (\mathbb{P}_2 \setminus \mathbb{C}^2) = \{[0, z_1, z_2]\colon Q(0, z_1, z_2) \equiv Q_n(z_1, z_2) = 0\}$. Однородный многочлен Q_n разлагается на линейные множители, например, $Q_n(0, w) \not\equiv 0 \Longrightarrow Q_n(z, w) = c\,\Pi_1^n (w - c_j z)$. Так как $n = \deg P$, то $Q_n \not\equiv 0$ и, значит, это множество на бесконечности состоит не более чем из n точек. Так как Z_Q не имеет изолированных точек (подходящий принцип аргумента), то отсюда мы получаем

Предложение 3. *Замыкание множества Z_P в $\mathbb{P}_2$ равно $Z_P \cup (Z_{Q_n} \setminus \mathbb{C}^2)$, а множество предельных точек на бесконечности есть $\{z_0 = 0,\ Q_n(z_1, z_2) = 0\}$.*

Пример. $P = w^2 - p(z), \ \ p = \Pi_1^n (z - c_j), \ \ n > 2, \ \Longrightarrow Q = z_0^{n-2} z_2^2 - z_1^n - \cdots - (-1)^n c_1 \cdots c_n z_0^n \Longrightarrow Z_Q \cap \infty = [0, 0, 1]$. Локальные координаты в окрестности $[0,0,1]$ – это $(\tilde z_0,\tilde z_1) = (z_0/z_2, z_1/z_2)$. $Q(\tilde z_0,\tilde z_1,1) = \tilde z_0^{n-2} - \tilde z_1^n + (\sum c_j)\tilde z_0\tilde z_1^{n-1} - \cdots \Longrightarrow \tilde z_0 = o(\tilde z_1)$ на $Z_Q \Longrightarrow$ градиент определяющей функции равен $((n-2)\tilde z_0^{n-3}, 0) + O(\tilde z_1^{n-1}) \Longrightarrow$ при $n = 3$ это точка регулярная (неособая), а при $n > 3$ – особая.

9. Проекции. В $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ естественно выделяются координатные проекции, например, $(z,w) \mapsto z$. С ними связано понятие многочленов Вейерштрасса и всё, что было в лекции 1.

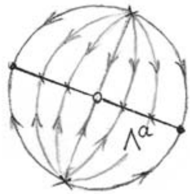

Рис. 5.

В $\mathbb{P}_2$, $[0,a,1]$ – общая предельная точка на бесконечности для аффинных комплексных прямых $L_b^a : z = aw + b$. Комплексная прямая $\Lambda^a : w + \bar a z = 0$ им всем ортогональна и её (единственная) предельная точка в ∞ есть $[0,1,-\bar a] \neq [0,a,1]$. Проекция $\mathbb{P}_2$ из точки $[0,a,1]$ на сферу $\overline{\Lambda^a} \approx \mathbb{P}_1$ определяется условием $L_b^a \to L_b^a \cap \Lambda^a$, $\infty \to [0,1,-\bar a]$. При $a = 0$ в аффинной части это всё та же проекция $(z,w) \mapsto z$.

$S\colon Q(z_0,z_1,z_2) = 0$ – алгебраическая кривая в $\mathbb{P}_2$ такая, что $[0,0,1] \notin S \Longrightarrow$ (принцип аргумента) число нулей $Q|L_b^0$ с учётом кратностей равно $n = \deg Q \Longrightarrow Z_Q$ вместе с проекцией в $\overline{\mathbb{C}}_z \approx \mathbb{P}_1$ является “разветвлённым n-листным накрытием”; при этом $S \cap \mathbb{C}^2_{z,w}\colon w^n + a_1(z)w^{n-1} + \cdots + a_n(z) = 0$, $\deg a_j \leqslant j$.

10. Формула Римана–Гурвица. M – топологическое многообразие (например, $\mathbb{R}^n, \mathbb{P}_2$ и т.п.). На его подмножествах наследуется относительная топология (открытыми считаются пересечения с открытыми подмножествами M). Треугольником (2-мерным симплексом) в M назовем гомеоморфный образ T обычного замкнутого евклидова треугольника. Множество $X \subset M$ называется *триангулируемым*, если существует локально конечная система треугольников (T_j) такая, что $X = \bigcup T_j$ и любые два из этих треугольников либо не пересекаются, либо пересекаются только по одной стороне, либо только по одной вершине. Стороны будем называть одномерными симплексами триангуляции (T_j), а вершины – нульмерными. Разбивая треугольники на меньшие, в вершины (некоторой) триангуляции X можно включить любое наперёд заданное дискретное множество точек. Триангуляция X конечная, если число треугольников в ней конечно. В таком случае можно определить *эйлерову характеристику* $\chi(X) := h_0 - h_1 + h_2$, где h_ν – число симплексов размерности ν, входящих в триангуляцию X. (В общем случае эта величина определена для любого подмножества $X' \subset X$, состоящего из конечного числа симплексов триангуляции.)

Факт (комбинаторная топология). *$\chi(X)$ не зависит от триангуляции множества X.*

$\#$ означает число точек множества. Отображение $\pi\colon X \to Y$
конечное, если $\exists\, N \in \mathbb{R}$: $\#\pi^{-1}(a) \leqslant N \quad \forall\, a \in Y$,
собственное, если $\pi^{-1}(K)$ – компакт для всякого компакта $K \subset Y$,
открытое, если $\pi(U)$ открыто (в Y) для всякого открытого $U \subset X$.

Теорема. *$\pi\colon X \to Y$ – конечное, собственное, открытое отображение подмножеств топологических многообразий, причём Y конечно триангулируемо, $\#\pi^{-1}(a) \equiv n$ для всех $a \in Y \setminus A$, где $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$, точки a_j попарно различны и $\#\pi^{-1}(a_j) = n_j$. $\Longrightarrow$ X тоже конечно триангулируемо и $\chi(X) = n \cdot (\chi(Y) - m) + n_1 + \cdots + n_m$.*

$\lhd$ Доказывать, по существу, нечего, всё упрятано в определения. Из условия несложно выводится, что $\pi|X \setminus \tilde{A} \to Y \setminus A$, где $\tilde{A} := \pi^{-1}(A)$, – накрытие, точнее, “над” каждым треугольником в фиксированной триангуляции $Y \setminus A$, включающей в качестве вершин все $a_j \in A$, имеется ровно n треугольников в $X \setminus \tilde{A}$ с попарно не пересекающимися замыканиями (в $X \setminus \tilde{A}$) $\Longrightarrow \chi(X \setminus \tilde{A}) = n \cdot (\chi(Y) - m)$ и остаётся заметить, что к h_0 в определении $\chi(X)$ надо добавить $\#\tilde{A} = n_1 + \cdots + n_m$. $\rhd$

Упражнения.

1. $S\colon P(z,w)=0$, P – неприводимый многочлен, $(0,0)$ – особая точка S, причём $S\cap U$ неприводимо и $\operatorname{sng} S\cap U=(0,0)$ для некоторого бикруга U. $\Longrightarrow \exists$ комплексная прямая $L\colon az+bw=0$, касательная к S в $(0,0)$ в том смысле, что $\operatorname{dist}((z,w),L)=o(|(z,w)|)$ при $S\ni(z,w)\to(0,0)$.

2. $S\colon w^2=p(z)$, $p=\Pi_1^m(z-c_j)^{k_j}$, c_j различные, $k_j\in\mathbb{N}$. Найти все неприводимые особые точки S (т.е. такие, что $S\cap U$ неприводимо для некоторых сколь угодно малых окрестностей) и найти касательные прямые к S в этих точках (см. упражнение 1)

3. Найти особые точки кривой $S\colon P=0$ в $\mathbb{C}^2_{z,w}$ и кривую $\widetilde{S}\colon P_1=P_2=0$ в $\mathbb{C}^3_{z,w,\eta}$ без особых точек, проекция которой в $\mathbb{C}^2_{z,w}$ совпадает с S и $1:1$ над $\operatorname{reg} S$, для случаев, когда $P(z,w)=$
a) $w^2-z^2-z^3$ (декартов лист), b) w^2-zw-z^3, c) $w^2-z^2(z-1)^3$.

4. $S\colon w^2=z^k-1$, $\overline{S}_1$ – замыкание в $\mathbb{P}_1\times\mathbb{P}_1$, $\overline{S}_2$ – в $\mathbb{P}_2$. Описать точки в $\overline{S}_j\setminus S$ (регулярные – особые, приводимые – неприводимые), $k=1,2,3$.

5. $Q(z_0,z_1,z_2)$ – проективизация неприводимого многочлена $P(z,w)$. Доказать, что особые точки Z_Q в $\mathbb{P}_2$ определяются системой однородных уравнений $Q=Q'_{z_0}=Q'_{z_1}=Q'_{z_2}=0$.

6. Кривые Ферма $F_n\colon z_1^n+z_2^n=z_0^n$, $n\in\mathbb{N}$, не имеют особенностей в $\mathbb{P}_2$ (упражнение 5). Найти все комплексные прямые $L\subset\mathbb{C}^2$, замыкания которых в $\mathbb{P}_2$ касаются F_n в точках из $F_n\setminus\mathbb{C}^2$.

7. Кривая F_2 в $\mathbb{P}_2$ гомеоморфна сфере; построить этот гомеоморфизм.

8. Замыкание в $\mathbb{P}_2$ алгебраической кривой $w^2=z(z^2-1)$ гомеоморфно тору $(*)$, а замыкание кривой $w^2=z^4-1$ не гомеоморфно тору. Почему?

9. “Гипербола” $S\colon zw=1$ и прямая $z=0$ касаются в точке $[.,.,.]\in\mathbb{P}_2$, а S и прямая $z=c\neq 0$, параллельная $z=0$, там не касаются. Почему?

10. $P=w^2-p(z)$, $\deg p=n$; S – замыкание Z_P в $\mathbb{P}_2$. Найти эйлерову характеристику S, когда все нули p простые. В каких пределах лежит $\chi(S)$ без условия простоты нулей? Пример на каждое возможное значение.

11. Посчитать эйлерову характеристику кривой Ферма F_n в $\mathbb{P}_2$.

12.* Комплексное многообразие $(\mathbb{P}_1)^2$ нельзя покрыть тремя координатными картами.

Топология поверхностей и дифференциальные формы

Лекция 3

Гладкие многообразия – Векторные поля – Дифференциальные формы – Цепи и интегрирование – Лемма Пуанкаре – Когомологии де Рама

1. Гладкие многообразия. M – хаусдорфово топологическое пространство. n-мерная карта на M – это пара (U,x), где U – открытое подмножество в M и $x\colon U \to D \subset \mathbb{R}^n$ – гомеоморфизм на открытое множество $D \subset \mathbb{R}^n$. n-мерное (топологическое) многообразие – это просто M с набором n-мерных карт (U_α, x^α), покрывающих M $(M = \bigcup U_\alpha)$.

$x^\alpha = (x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha)$ – локальные координаты (в U_α), $x^\beta \circ (x^\alpha)^{-1}$: $x^\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to x^\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ – отображения перехода (замены координат). Многообразие M принадлежит классу C^k, $k \leqslant \infty$, если все отображения перехода (определённые в соответствующих областях в $\mathbb{R}^n$) являются отображениями класса C^k. Если модельные области в $\mathbb{R}^n$ заменить на области в $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ и потребовать, чтобы отображения переходов были голоморфными, то в результате получаем *комплексное многообразие* комплексной размерности n.

Функции класса $C^k(M)$ – это отображения $f\colon M \to \mathbb{C}$ такие, что $f|_{U_\alpha} \circ (x_\alpha)^{-1} \in C^k(x^\alpha(U_\alpha))$ для всех карт. $\phi\colon M \to N$ – отображение класса C^k, если $\phi^* f := f \circ \phi \in C^k(M)$, $\forall\, f \in C^k(N)$.

Набор $\{(U_\alpha, x^\alpha)\}$, определяющий структуру C^k-многообразия на M, называется атласом (класса C^k). $k \geqslant 1 \implies$ определены якобианы $\det \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta}$ (на $U_\alpha \cap U_\beta$). Атлас ориентирован, если все эти якобианы положительны. M с таким выделенным атласом называется *ориентированным* (и ориентируемым, если такой атлас существует, но не указан).

Всюду в дальнейшем предполагается, что все многообразия M счётно-компактные, т.е. $M = \cup_1^\infty K_j$, K_j – компакты.

Теорема Уитни. *Всякое счётно-компактное n-мерное многообразие M класса C^k, $k \geqslant 1$, допускает C^k-вложение $\phi\colon M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ ($M \to \phi(M)$ $1:1$ и ранг $= n$ всюду на M), причём такое, что $\phi(M)$ – замкнутое (в $\mathbb{R}^{2n+1}$) подмногообразие класса C^ω (вещественно-аналитическое), в частности, C^∞.*

Всюду в дальнейшем мы будем работать с *гладкими* многообразиями, т.е. многообразиями класса C^∞.

2. Векторные поля. Векторное поле v на гладком многообразии M – это оператор дифференцирования $v\colon C^k(M) \to C^{k-1}(M)$, который в координатной карте (U,x) имеет вид $v = \sum a_j \frac{\partial}{\partial x_j}$, $a_j \in C^{k-1}(U)$. $\Longrightarrow$ в $(\widetilde{U},\tilde{x})$, $v = \sum \tilde{a}_\nu \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_\nu} = \sum\bigl(\sum_j a_j \frac{\partial \tilde{x}_\nu}{\partial x_j}\bigr)\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_\nu}$ – правило преобразования коэффициентов векторного поля при замене координат.

Локально такие поля, как видим, существуют. Глобально их можно строить при помощи разбиения единицы, предполагая, что гладкий атлас образует локально конечное покрытие (это всегда можно сделать, измельчая карты и часть из них выбрасывая). Разбиение единицы для такого атласа – это набор (λ_α), $\lambda_\alpha \in C^\infty(M)$, $\lambda_\alpha = 0$ вне U_α, $\lambda_\alpha \geqslant 0$ и $\sum \lambda_\alpha \equiv 1$. Если v_α – поля в координатных окрестностях, то $v = \sum \lambda_\alpha v_\alpha$ – поле на всём M (слагаемые считаются равными нулю там, где $\lambda_\alpha = 0$).

Касательный вектор к M в точке a – это значение векторного поля v в точке a, т.е. функционал $f \mapsto v(f)(a)$. T_aM, векторное пространство таких функционалов, называется касательным пространством к M в точке a. Оно, очевидно, порождено функционалами $\frac{\partial}{\partial x}|_a$ и, значит, является $\mathbb{R}$-линейным пространством размерности n. $TM = \bigsqcup T_aM$ – касательное расслоение. $TM|_{(U,x)} \approx U \times \mathbb{R}^n$ $\bigl(\sum c_j \frac{\partial}{\partial x_j}|_x \mapsto (x; c_1, \dots, c_n)\bigr)$ – координатные карты на нём, превращающие TM в гладкое многообразие с гладкой проекцией $TM \to M$, $T_aM \mapsto a$.

3. Дифференциальные формы. Дифференциал функции $f \in C^{k\geqslant 1}(M)$ – это линейный оператор на векторных полях, $(df)(v) := v(f) \in C^{k-1}(M)$ (если $v \in C^{k-1}(M)$). Локально, $v = \sum c_j \frac{\partial}{\partial x_j}$, $dx_\nu\bigl(\frac{\partial}{\partial x_j}\bigr) = \delta_{j\nu} \Longrightarrow v(f) = \sum c_j f'_{x_j} = \bigl(\sum f'_{x_\nu}\, dx_\nu\bigr)(v) \Longrightarrow df = \sum f'_{x_\nu}\, dx_\nu$.

Дифференциальная 1-форма $\alpha := \sum a_j\, df_j$, $f_j \in C^k$, $a_j \in C^{k-1}$. По определению, $\alpha(v) = \sum a_j v(f_j) \in C^{k-1}$ (как и v). В координатной карте (U,x) базисными 1-формами являются дифференциалы $dx_j \Longrightarrow$ $\alpha = \sum c_j\, dx_j \Longrightarrow$ в $(\widetilde{U},\tilde{x})$, $\alpha = \sum\bigl(\sum_j c_j \frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_\nu}\bigr)\, d\tilde{x}_\nu$ – правило замены коэффициентов 1-формы при замене координат.

α, β – 1-формы. $\alpha\wedge\beta$ – билинейный кососимметричный оператор на векторных полях, $(\alpha\wedge\beta)(u,v) := \det\begin{pmatrix}\alpha(u) & \alpha(v)\\ \beta(u) & \beta(v)\end{pmatrix} \Longrightarrow \beta\wedge\alpha = -\alpha\wedge\beta$, $\alpha\wedge\alpha = 0$. Дифференциальная 2-форма – это, по определению, оператор вида $\phi = \sum c_{jl}\, \alpha_j \wedge \alpha_l$; в карте (U,x), $\phi = \sum_{j<l} c_{jl}\, dx_j \wedge dx_l$.

Оператор d определён выше для функций $f \in C^{k\geqslant 1}(M)$. Для 1-форм $\alpha = \sum c_j\, df_j$ полагаем $d\alpha := \sum dc_j \wedge df_j$ ($\Longrightarrow d(df) = 0$). Если $\dim M = 2$, то по определению $d\phi := 0$ для всякой 2-формы.

Формы высших степеней на поверхностях равны нулю, поэтому мы не рассматриваем общую теорию дифференциальных форм, ограничиваясь степенями $\leqslant 2$. Гладкие формы степени p ($\leqslant 2$) на M образуют линейное пространство, которое мы обозначаем через $\Lambda^p(M)$; при $p = 0$ это просто $C^\infty(M)$.

4. Цепи и интегрирование. Сингулярный p-симплекс в гладком многообразии M – это образ стандартного замкнутого p-мерного симплекса в $\mathbb{R}^p$ при гладком отображении его в M вместе с параметризацией. (Образ как множество при этом может быть весьма безобразным, сингулярным, но присутствует параметризация).

Скажем, 0-симплекс – это точка в M (никакой параметризации нет), 1-симплекс – это гладкий путь, 2-симплекс – параметризованный гладкий образ треугольника $T \subset \mathbb{R}^2$.

Два (сингулярных) p-симплекса считаем равными, если один получается из другого композицией с некоторым диффеоморфизмом стандартного p-симплекса (это как переход от путей к кривым).

p-цепь (сингулярная цепь размерности p) в M – это конечная целочисленная линейная комбинация $\sigma = \sum n_j[T_j]$, где $[T_j]$ – сингулярные p-симплексы в M и $n_j \in \mathbb{Z}$. Цепь назовём приведённой, если все её симплексы различны (т.е. коэффициенты при равных сложены). Цепь равна 0, если после приведения все её коэффициенты равны нулю.

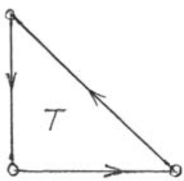

Рис. 6.

Примером естественно возникающей цепи является ориентированная граница $[\partial T]$ стандартного симплекса в $\mathbb{R}^p$. На рис. 6 приведена граница треугольника $T \subset \mathbb{R}^2$ как 1-цепь в $\mathbb{R}^2$ (отображения отрезка $[0,1]$ в стороны треугольника тут можно брать линейными). Мы будем иметь дело только с цепями размерностей $\leqslant 2$.

Граница p-цепи $\sum n_j[T_j]$ – это $(p-1)$-цепь $\partial\big(\sum n_j[T_j]\big) := \sum n_j[\partial T_j]$, где ∂T_j – образ относительно отображения T_j границы ∂T стандартного симплекса в $\mathbb{R}^2$ (гладкий образ цепи, конечно же, – тоже цепь).

Например,

$p = 0$: $\partial\big(\sum n_j[a_j]\big) := 0$;

$p = 1$: $\partial\big(\sum n_j[\gamma_j] := \sum n_j \partial[\gamma_j]\big) := \sum n_j([b_j] - [a_j])$, $a_j, b_j \in M$ – начало и конец пути γ_j.

Гладкая 2-мерная ориентированная поверхность (M, bM) с ориентированным краем и с компактным замыканием допускает конечную триангуляцию, которая превращает её в 2-мерную цепь с коэффициентами 1 при всех 2-симплексах триангуляции (считаем, что при отображениях треугольника в симплексы триангуляции $M \cup bM$ ориентация сохраняется).

Цепь σ называется *циклом*, если $\partial\sigma = 0$ и *границей*, если она имеет вид $\partial\sigma$. Циклы и границы образуют линейные пространства над кольцом $\mathbb{Z}$. Легко видеть, что $\partial^2 = 0$, $\partial(\partial\sigma) = 0$ (это достаточно проверить для стандартного симплекса в $\mathbb{R}^p$), поэтому границы тоже являются циклами.

p-мерная группа гомологий многообразия M, $H_p(M, \mathbb{Z})$ – это фактор-группа (p-циклы)/(p-границы), с отождествлением $\sigma_1 \sim \sigma_2$, если $\sigma_1 - \sigma_2 = \partial\sigma$ для некоторой $(p+1)$-цепи σ.

Пример. $p = 0$. 0-граница – это цепь вида $\sum m_j([b_j] - [a_j])$, где a_j, b_j – начало и конец некоторого пути γ_j на M. Пусть M_ν – связные компоненты M. 0-цепь $\sum n_j[c_j]$ является границей $\iff \sum_{c_j \in M_\nu} n_j = 0$ $\forall\, \nu \implies H_0(M, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^N$, если число компонент равно N (в общем это $\bigoplus_\nu \mathbb{Z}$).

Определим теперь интеграл от дифференциальной p-формы по q-цепи. По определению, он равен нулю, если $q \neq p$. Далее,

$p = 0$, $\sigma = \sum n_j[a_j]$, f – функция (0-форма) $\implies \int_\sigma f := \sum n_j f(a_j)$.

$p = 1$, $\sigma = \sum n_j[\gamma_j]$, $\gamma_j : [0,1] \to M$; $\alpha = \sum c_\nu df_\nu \implies$

$\int_\sigma \alpha := \sum_{j,\nu} n_j \int_0^1 (c_\nu \circ \gamma_j)\, d(f_\nu \circ \gamma_j) = \sum_j n_j \int_0^1 (\gamma_j^* \alpha)$.

$p = 2$, $\sigma = \sum n_j[T_j]$, $T_j : T \to M$, ϕ – 2-форма на $M \implies \int_\sigma \phi := \sum n_j \int_T (T_j^* \phi)$.

Больше нам не понадобится (принцип понятен).

Формула Стокса. $\int_{\partial\sigma} \psi = \int_\sigma d\psi$, $\forall \sigma, \phi \in C^1$.

В частности, $\int_{bM} \psi = \int_M d\psi$ для компактной ориентированной поверхности с (согласованно ориентированным) краем.

5. Лемма Пуанкаре. *В звёздной области $D \subset \mathbb{R}^n$ всякая замкнутая p-форма $(p > 0)$ точна.*

(α замкнута, если $d\alpha = 0$ и точна, если $= d\beta$.)

◁ Доказательство проведём для случая $n = 2$, $p = 1$ ($p = 2$ см. ниже). $\alpha = a\,dx + b\,dy$, $d\alpha = 0$ ($b'_x = a'_y$). Считая центр звёздности в $(0,0)$, положим $f(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} \alpha$ (интеграл по отрезку).

$$\left(\int_{(0,0)}^{(x+\Delta x,y)} - \int_{(0,0)}^{(x,y)}\right)\alpha = \int_{\partial T}\alpha + \int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)}\alpha = (a(x,y) + o(1))\,\Delta x,$$

где T – треугольник с вершинами $(0,0), (x,y), (x+\Delta x, dy)$; интеграл по его границе равен нулю по формуле Стокса. $\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = a$; аналогично $\frac{\partial f}{\partial y} = b \Longrightarrow df = \alpha$. ▷

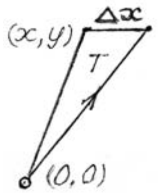

Рис. 7.

Замечание. Если α ограничена и D строго звёздная с гладкой границей, то $f \in C(\overline{D}) \cap C^1(D)$.

Лемма. $D \subset \mathbb{C}$, $a \in C^1(D) \Longrightarrow \exists\, b \in C^1(D)\colon \frac{\partial b}{\partial \bar z} = a$.

Здесь и далее $\frac{\partial}{\partial \bar z} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$.

◁ Напомним формулу Коши–Грина из ТФКП: если функция ϕ непрерывно дифференцирума и имеет компактный носитель (класс $C^1_c(\mathbb{C})$), то

$$\phi(z) = -\frac{1}{\pi}\int \frac{\partial\phi}{\partial\bar\zeta}\frac{dS_\zeta}{\zeta - z},$$

где $dS_\zeta := d\xi \wedge d\eta = \frac{i}{2} d\zeta \wedge d\bar\zeta$, если $\zeta = \xi + i\eta$.

1. Разберём сначала случай, когда D ограничена и a ограничена. Положим $b(z) := -\frac{1}{\pi}\int_D \frac{a(\zeta)\,dS_\zeta}{\zeta - z}$. Так как $a \in C^1(D)$, то легко проверяется что функция b непрерывна в $\overline{D}$, дифференцируема в D и голоморфна в $\mathbb{P}_1 \setminus \overline{D}$. Далее, $\forall \phi \in C^1_c(D)$,

$$\int_D \frac{\partial b}{\partial \bar z}\,\phi\, dS_z = -\int_D b\,\frac{\partial \phi}{\partial \bar z}\,dS_z = \int_D a\left(\frac{1}{\pi}\int_D \frac{\partial\phi}{\partial\bar z}\frac{dS_z}{\zeta - z}\right) dS_\zeta = \int_D a\phi\, dS_\zeta$$

$\Longrightarrow b'_{\bar z} = a$

2. Общий случай. Представим $D = \bigcup_0^\infty D_\nu$, $\overline{D}_\nu$ – компакт в $D_{\nu+1}$, $D \setminus D_\nu$ не имеют компактных связных компонент. $b_\nu(z) :=$

$-\frac{1}{\pi}\int_{D_\nu}\frac{a(\zeta)\,dS_\zeta}{\zeta-z} \Longrightarrow \frac{\partial b_\nu}{\partial\bar z} = a$ в D_ν и $=0$ вне $\overline{D}_\nu \Longrightarrow b_{\nu+1}-b_\nu =:$ $h_\nu \in \mathcal{O}(D_\nu) \Longrightarrow$ (теорема Рунге, ТФКП) $\exists\ \tilde h_\nu \in \mathcal{O}(D)$ такие, что $|\tilde h_\nu - h_\nu| < 2^{-\nu}$ в $\overline{D}_{\nu-1}$. Положим $b := b_1+(h_1-\tilde h_1)+\cdots+(h_\nu-\tilde h_\nu)+\cdots =$ $b_\nu - \tilde h_1 - \cdots - \tilde h_{\nu-1} + (h_\nu - \tilde h_\nu) + \cdots \Longrightarrow b \in C^1(D)$ и $b'_{\bar z} = a$ в D. $\rhd$

Следствие. *В любой области $D \subset \mathbb{R}^2$ всякая гладкая 2-форма точна.*

$\lhd\ \phi = a\,dx\wedge dy = \frac{i}{2}a\,dz\wedge d\bar z$. $a = b'_{\bar z}$, $db = b'_z\,dz + b'_{\bar z}\,d\bar z \Longrightarrow db\wedge dz =$ $b'_{\bar z}\,d\bar z\wedge dz \Longrightarrow \phi = d(\frac{1}{2i}b\,dz)$. $\rhd$

6. Когомологии де Рама. Так как $d^2 = 0$ (см. (2)), то на гладком многообразии M можно определить векторные пространства (группы когомологий де Рама)

$$H^p_{DR}(M) := (\text{замкнутые } p\text{-формы})/(\text{точные } p\text{-формы}),$$

фактор по отношению эквивалентности $\phi_1 \sim \phi_2$, если $\phi_1 - \phi_2 = d\psi$.

Чтобы подчеркнуть коэффициенты, мы будем обозначать через $H^p(M,\mathbb{C})$ и $H^p(M,\mathbb{R})$ группы де Рама для комплексных и вещественных форм, соответственно; это обозначение не противоречит другим известным теориям когомологий (сингулярным, клеточным, Чеха), поскольку для многообразий все они совпадают.

$p=0$. Единственная точная форма здесь 0 (так удобно). Замкнутые 0-формы – это локально постоянные функции.

$\Longrightarrow H^0(M,\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^N$, где N – число связных компонент M (аналогично, для $H^0(M,\mathbb{R})$).

В частности, D – область в $\mathbb{R}^2 \Longrightarrow H^0(D,\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. Из следствия (5) в этом случае $H^2(D,\mathbb{C}) = 0$.

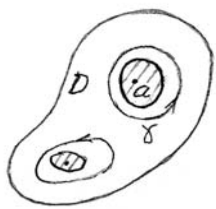

Рис. 8.

Лемма. *Для ограниченной $(m+1)$-связной области $D \subset \mathbb{C}$ $H^1(D,\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^m$.*

$\lhd$ Замкнутая 1-форма α в D точна тогда и только тогда, когда $\int_\gamma \alpha = 0$ для всякого замкнутого пути γ в D (см. доказательство леммы Пуанкаре). Базис в $H_1(D,\mathbb{Z})$ задают 1-циклы $[\gamma_j]$ вокруг “дырок”, компактных компонент $\mathbb{C} \setminus D$, такие, что $\Delta_{\gamma_j} \arg(z - a_\nu) = 2\pi\,\delta_{j\nu}$, $a_\nu \in \nu$-й дырке. $\int_{\gamma_j} df = 0, \quad \forall f \in C^1(D) \Longrightarrow$ отображение $[\alpha] \mapsto \bigl(\int_{\gamma_1} \alpha, \dots, \int_{\gamma_m} \alpha\bigr) \in \mathbb{C}^m$, где $[\alpha]$ – класс α в $H^1(M, \mathbb{C})$, является вложением. С другой стороны, $\forall (c_1, \dots, c_m) \in \mathbb{C}^m$ форма $\alpha = \frac{1}{2\pi i}\bigl(\sum \frac{c_j}{z-a_j}\bigr)\,dz$ в качестве указанных периодов имеет $(c_1, \dots, c_m) \Longrightarrow$ это отображение *на* $\mathbb{C}^m$, изоморфизм. $\triangleright$

* * * * *

Упражнения.

Всюду ниже M – гладкое многообразие размерности n.

1. u, v – векторные поля класса $C^{k\geqslant 1}$ на $M \Longrightarrow [u, v]\colon f \mapsto u(v(f)) - v(u(f)),\ f \in C^\infty(M)$, – тоже векторное поле (скобка Пуассона полей u, v) гладкости C^{k-1}.

2. u, v – векторные поля и α – 1-форма (все класса $C^{k\geqslant 1}$) на M. Доказать тождество $(d\alpha)(u, v) = u(\alpha(v)) - v(\alpha(u)) - \alpha([u, v])$.

3. M ориентируемо тогда и только тогда, когда существует n-форма ω, нигде на M не равная нулю. Доказать для $n = 2$.

4. $\phi\colon M \to N$ – гладкое отображение гладких многообразий, $\phi^* f := f \circ \phi$ для $f \in C^{k\geqslant 1}(N)$, $(\phi_* v)(f) := v(\phi^* f)$ для полей v на M, наконец, $(\phi^*\alpha)(v) := \alpha(\phi_* v)$ для 1-форм α на N. Доказать, что $\phi^* d = d\,\phi^*$, т.е. $\phi^*(df) = d(\phi^* f)$ и $\phi^*(d\alpha) = d(\phi^*\alpha)$.

5. M – триангулированная поверхность (поверхность $\sim \dim M = 2$), на рёбрах триангуляции фиксированы некоторые ориентации (направления). Доказать, что всякая 0-цепь на M гомологична 0-цепи, состоящей из вершин триангуляции. Вывести отсюда, что всякий 1-цикл на M гомологичен 1-циклу, состоящему из рёбер триангуляции (с подходящими коэффициентами).

6. Окружность S^1 – это 1-цикл на плоскости $\mathbb{C}$ ($[0, 1] \ni t \mapsto e^{2\pi i t} \in S^1$). Доказать, что всякий цикл на триангулируемой поверхности гомологичен циклу вида $\sum n_j [\gamma_j]$, где $\gamma_j\colon S^1 \to M$.

7. Всякая простая замкнутая кривая γ (гомеоморфный образ S^1) на ориентируемой поверхности M двусторонняя, т.е. $\exists$ связная окрестность $U \supset \gamma$ такая, что $U \setminus \gamma$ не связно (можно считать, что γ гладкая).

8. D – замкнутая область в $\mathbb{C}$ с фиксированной триангуляцией, D° – внутренность D, $\gamma\colon S^1 \to D^\circ$ – гладкое отображение такое, что $\gamma(S^1)$ содержится в объединении рёбер триангуляции. Для всякого треугольника T_j триангуляции положим $n_j := \frac{1}{2\pi}\,\Delta_\gamma \arg(z - a_j),\quad a_j \in T_j^\circ$, и

определим 2-цепь $\sigma := \sum n_j[T_j]$. Доказать, что 1-цикл $[\gamma]$ гомологичен нулю (является границей) тогда и только тогда, когда $\operatorname{supp}\sigma \cap D^\circ$ – компакт; при этом $\gamma = \partial\sigma$.

9. 1-цикл γ в области $D \subset \mathbb{C}$ является границей тогда и только тогда, когда $\int_\gamma \alpha = 0$ для всякой гладкой замкнутой 1-формы α в D.

10. Замкнутая 1-форма α на поверхности M точна тогда и только тогда, когда

a) $\int_\gamma \alpha = 0$ для всякого 1-цикла γ на M,

b) $\int_M \alpha \wedge \beta = 0$ для любой замкнутой 1-формы β с компактным носителем.

11. D – область в $\mathbb{R}^2$. Доказать, что всякая гладкая 2-форма ϕ в D точна ($= d\psi$), не используя ТФКП.

Лекция 4

Хирургия ориентированной поверхности – Потоки – Регуляризация – d-проблема на ориентируемой поверхности

7. Хирургия ориентированной поверхности. M – счётно-компактная поверхность. Функция исчерпания – это гладкое собственное отображение $\rho\colon M \to \mathbb{R}$, т.е. множества $\{\rho \leqslant R\}$ компактны (или пустые) для всех $R \in \mathbb{R}$. Если поверхность собственным образом вложена в $\mathbb{R}^N$ (а это всегда можно сделать по теореме Уитни), то в качестве исчерпания можно взять функцию $|x|^2$. $\rho \in C^\infty(M) \Longrightarrow$ (теорема Сарда) для почти каждого R, Γ_R: $\rho = R$ – гладкая кривая и $df \neq 0$ в точках Γ_R. Фиксировав последовательность $M_\nu : \rho \leqslant R_\nu \uparrow \infty$, мы получаем исчерпание поверхности M более обозримыми поверхностями с краем. M – поверхность с краем, если она вложена в бóльшую поверхность $\widetilde{M}$ так, что замыкание M – компакт, а граница $\overline{M} \setminus M$ есть конечный набор попарно не пересекающихся гладких простых замкнутых кривых (окружностей) на $\widetilde{M}$. Предполагая $\widetilde{M}$ ориентированной, эти окружности можно ориентировать *согласованно* с ориентацией M: если в локальной карте $(U,(x,y))$ на $\widetilde{M}$ поверхность M выделяется условием $y > 0$, то положительной на этой части края считается ориентация $\frac{\partial}{\partial x}$ (как $\mathbb{R}$ относительно верхней полуплоскости). Так ориентированную границу обозначим через bM; таким образом, у нас ориентированная поверхность с краем – это согласованно ориентированная пара (M, bM), причём $M \cup bM$ – компакт.

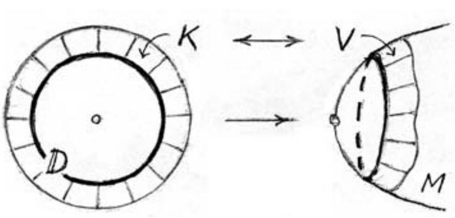

Рис. 9.

Возле каждой компоненты края такой поверхности есть “воротник” V – окрестность, диффеоморфная кольцу K: $1 - \varepsilon \lesssim |z| \leqslant 1$ в единичном круге $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ (если M выделяется в $\widetilde{M}$

уравнением $\rho < 0$ с $d\rho \neq 0$ в точках края bM, то для построения таких воротничков можно использовать линии градиента и уровни функции ρ как прообразы радиусов и окружностей в круге $\mathbb{D}$). После этого можно "заклеить дырку", соответствующую компоненте края, по построенному воротнику: отождествляя сначала $V \ni x \sim z(x) \in K$, а затем факторизуя по этому отождествлению, мы получаем гладкую ориентированную поверхность $M' = (M \sqcup \mathbb{D})/\sim$ уже с ме́ньшим числом компонент края. Проделав такую заклейку всех дыр, получим самую простую компактную поверхность $\widetilde{M}$, содержащую нашу поверхность с краем.

Важный и очень нетривиальный факт из дифференциальной топологии заключается в том, что всякая гладкая компактная ориентируемая поверхность диффеоморфна сфере с конечным числом "ручек" в $\mathbb{R}^3$ (см., например, [ДНФ], [Х]). Таким образом, всякая ориентирумая поверхность с краем диффеоморфна сфере $\mathbb{R}^3$ с g ручками и m дырками (с гладкими краями).

Род поверхности (по Риману) – это максимальное число простых замкнутых попарно не пересекающихся кривых γ_j на M таких, что $M \setminus \bigcup \gamma_j$ связно. $\Longrightarrow$ в описанной выше реализации в $\mathbb{R}^3$ род поверхности есть g, число ручек (дырки на род не влияют). Конечно, всё это надо доказывать, но мы принимает как известные факты. Пару (g, m), где – g род и m – число компонент границы, назовём *типом* поверхности M; таким образом, поверхности одинакового типа диффеоморфны.

Для анализа на поверхности этого представления маловато, хорошо бы все "выпрямить", положить на плоскость. Простейшая "развёртка" получается разрезанием ручек: после удаления окружностей-разрезов оставшееся множество диффеоморфно области с гладкой границей в плоскости $\mathbb{C}$, причем каждому разрезу соответствуют две компоненты границы этой области и обратное отображение из области на поверхность продолжается до гладкого отображения замыкания (с нигде не равным нулю дифференциалом). Таким образом, результат простой развёртки есть (диффеоморфен) круг(у) с $2g - 1 + m$ дырками.

Далее можно разрезать эту область в $\mathbb{C}$, добиваясь односвязности (полная развёртка). На рис. 11, 12 показана полная развёртка тора ($g = 1$) и кренделя ($g = 2$). Аналогично, общая компактная поверхность рода g развёртыватся в $4g$-угольник $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$. Если есть дырки c_j, то (см. рис. 13) на-

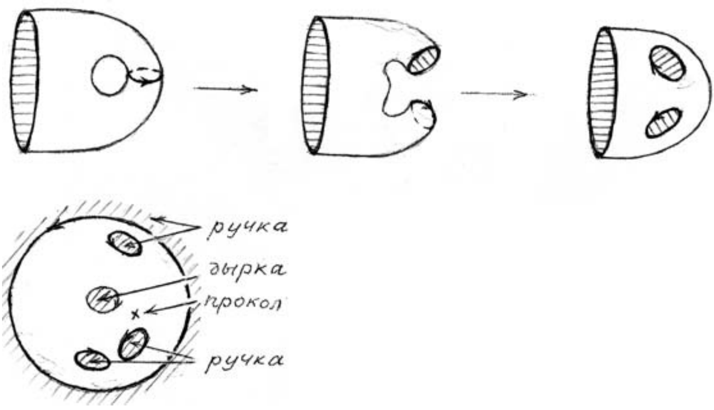

Рис. 10. Развертка ручки. Результат развертки всех g ручек ($+m$ дырок или проколов) – круг с $2g-1+m$ дырками-проколами

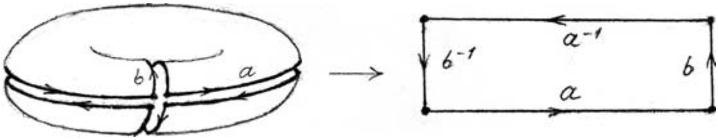

Рис. 11. Полная развертка тора

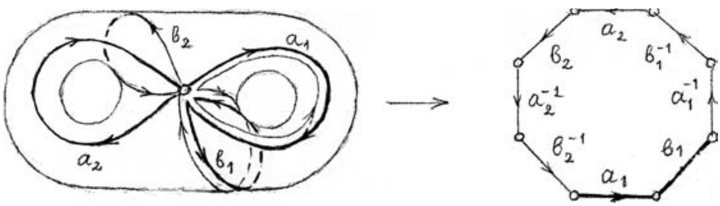

Рис. 12. Полная разверка кренделя

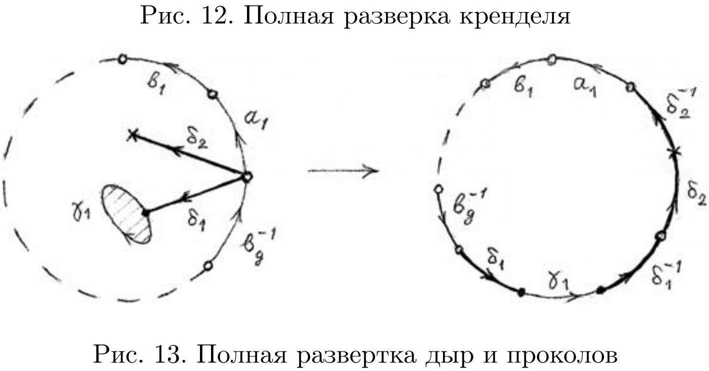

Рис. 13. Полная развертка дыр и проколов

до ещё сделать к ним разрезы δ_j из фиксированной базовой точки на внешней границе и к описанной выше границе добавить (справа) цепочку из $\delta_j c_j \delta_j^{-1}$ (порядок зависит от разрезов δ_j). Кроме дыр, на M можно отметить ("проколоть") несколько точек; с топологической точки зрения это те же дыры и при развёртке до этих проколов надо провести такие же разрезы δ_j (и в цепочке появятся пары $\delta_j \delta_j^{-1}$).

Используя полную развёртку, нетрудно подсчитать, что эйлерова характеристика ориентированной поверхности M конечного типа (g, m) равна $\chi(M) = 2 - 2g - m$.

8. Потоки. M – гладкое n-мерное многообразие. $\Lambda_c^q(M)$ – пространство гладких дифференциальных q-форм с компактными носителями (носитель ϕ, обозначение $\operatorname{supp}\phi$, есть замыкание множества, где $\phi \neq 0$). Топологию в этом пространстве определим следующим образом: $\phi_j \to \phi$, если существует компакт $K \subset M$, содержащий носители всех ϕ_j, и $\phi_j \to \phi$ равномерно на K, вместе с частными производными всех порядков (относительно координат на картах, покрывающих K). Λ_c^q в теории потоков выступает как пространство "пробных" (test-) форм, для которых потоки будут двойственными объектами.

Поток размерности q (=степени $p = n - q$) на M есть непрерывный линейный функционал на $\Lambda_c^q(M)$; линейное пространство всех таких потоков обозначим через $\Lambda'^p(M)$. (Можно рассматривать потоки, не специфицируя степени, полагая $T(\phi) = 0$, если T степени p, ϕ степени q и $p \neq n - q$.) Топология в $\Lambda'^p(M)$ самая простая, поточечная: $T_j \to T$, если $T_j(\phi) \to T(\phi)$, $\forall$ пробной формы ϕ. Совсем не очевидно, что

Пространство $\Lambda'^p(M)$ полно и рефлексивно, т.е. сопряжённое к нему пространство есть $(\Lambda'^p(M))^* = \Lambda_c^{n-p}(M)$.

Это теорема де Рама [Р], из функционального анализа (вполне доступная).

Поток T равен нулю на открытом множестве $U \subset M$, если $T(\phi) = 0$ для всякой $\phi \in \Lambda_c^q(M)$ с носителем в U; носитель потока, $\operatorname{supp} T$, – это наименьшее замкнутое множество, вне которого он равен нулю.

Примеры. Локально интегрируемая функция, $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(M)$, определяет поток $[f]$ степени 0, $[f](\phi) := \int_M f\phi$.

Дифференциальная форма ψ степени p с локально-интегрируемыми коэффициентами определяет поток степени p по формуле $[\psi](\phi) := \int_M \psi \wedge \phi$ (отсюда взято понятие степени потока).

q-цепь σ определяет поток размерности q (степени $n-q$) по формуле $[\sigma](\phi) := \int_\sigma \phi$ (отсюда – понятие размерности потока).

Кусочно-непрерывная функция f на (носителе) цепи σ дополняет последний пример потоками $f[\sigma]\colon \phi \mapsto \int_\sigma f\phi$.

Таким образом, потоки объединяют в себе и формы и цепи, и анализ и геометрию.

Оператор d на потоках определяется по двойственности: $T \in \Lambda'^p \implies (dT)(\phi) := (-1)^{p-1}T(d\phi) \implies dT \in \Lambda'^{p+1}$. Формула Стокса в этой терминологии почти тавтологична: $d[\sigma] = (-1)^{n-q-1}[\partial\sigma]$, дифференциал (анализ) с точностью до знака есть граница (геометрия); в частности, для ориентируемой поверхности с краем, $d[M] = -[bM]$.

Поток T называется *замкнутым*, если $dT = 0$, и *точным*, если $T = dS$ для некоторого потока S. Так как $d^2 = 0$ для форм, то, из определения, это же верно и для потоков, $d(dT) = 0$ и мы можем определить фактор-пространство

$$\widetilde{H}^p(M,\mathbb{C}) = (\text{замкнутые потоки степени } p)/(\text{точные потоки}).$$

9. Регуляризация. Сначала на плоскости. Фиксируем некоторую функцию $\lambda \in C^\infty(\mathbb{C})$, зависящую только от $|z|$, неотрицательную, равную нулю при $|z| > 1$ и с единичной массой, $\int \lambda\, dx \wedge dy = 1$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ положим $\lambda_\varepsilon(z) := \frac{1}{\varepsilon^2}\lambda\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)$ и для функций $f \in C(\mathbb{C})$ определим (ε-)*регуляризацию*

$$\begin{aligned} f^\varepsilon(z) &:= \int f(z+\varepsilon\eta)\lambda(\eta)\, dS_\eta = \int f(z+\zeta)\lambda_\varepsilon(\zeta)\, dS_\zeta \\ &= \int f(\zeta)\lambda_\varepsilon(\zeta - z)\, dS_\zeta, \end{aligned}$$

где $dS_\zeta := d\xi \wedge d\eta$, если $\zeta = \xi + i\eta$. Интегрирование идёт по кругам радиусов $< \varepsilon$, поэтому носитель f^ε лежит в ε-окрестности носителя f. Из последнего представления видно, что $f^\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{C})$, а из первого ясно, что $f^\varepsilon \to f$ при $\varepsilon \to 0$ и что $D(f^\varepsilon) = (Df)^\varepsilon$ для частных производных D, если функция f непрерывно дифференцируема; в частности, если $f \in \Lambda^0_c(\mathbb{C})$ (гладкая функция с компактным носителем) то $f^\varepsilon \to f$ в топологии пространства $\Lambda^0_c(\mathbb{C})$.

Для дифференциальных форм в $\mathbb{C}$ регуляризацию определим покоэффициентно $\implies$ те же свойства, в частности, $\phi^\varepsilon \to \phi$

в $\Lambda^q_c(\mathbb{C})$, если $\phi \in \Lambda^q_c(\mathbb{C})$ и $d(\phi^\varepsilon) = (d\phi)^\varepsilon$. Но тут есть и кое-что новое, а именно, если форма замкнута, $d\phi = 0$, то разность $(\phi - \phi^\varepsilon)$ – точная форма $d\psi$, причём ψ равна нулю вне ε-окрестности носителя ϕ.

В самом деле, пусть $\phi = f\,dz + h\,d\bar z$ замкнута, т.е. $f_{\bar z} = h_z$, и

$$(A_\varepsilon \phi)(z) := \int \biggl(\int_0^1 [\zeta f(z+t\zeta) + \bar\zeta h(z+t\zeta)]\,dt \biggr) dS^\varepsilon_\zeta,$$

где $dS^\varepsilon_\zeta := \lambda_\varepsilon(\zeta)\,d\xi \wedge d\eta$. Эта функция, очевидно, равна нулю вне ε-окрестности носителя ϕ. Так как $h_z = f_{\bar z}$, то

$$\frac{\partial (A_\varepsilon\phi)}{\partial z}(z) = \int \biggl(\int_0^1 \frac{d}{dt} f(z+t\zeta)\,dt \biggr)\, dS^\varepsilon_\zeta = (f^\varepsilon - f)(z).$$

Аналогично, $\partial(A_\varepsilon\phi)/\partial\bar z = h^\varepsilon - h$ и, значит, $d(A_\varepsilon\phi) = \phi^\varepsilon - \phi$.

Для форм второй степени $\phi = a\,dz \wedge d\bar z$ это же равенство выполняется (легко проверить) с формой

$$\begin{aligned} A_\varepsilon\phi = \biggl(\int \biggl(\int_0^1 \zeta\, a(z+t\zeta)\,dt \biggr)\, dS^\varepsilon_\zeta \biggr)\, d\bar z \\ - \biggl(\int \biggl(\int_0^1 \bar\zeta\, a(z+t\zeta)\,dt \biggr) dS^\varepsilon_\zeta \biggr)\, dz, \end{aligned}$$

тоже сосредоточенной в ε-окрестности носителя ϕ.

Регуляризация потоков определяется по двойственности, $T^\varepsilon(\phi) := T(\phi^\varepsilon)$. Ясно, что носитель T^ε также лежит в ε-окрестности носителя T, что $T^\varepsilon \to T$ при $\varepsilon \to 0$ в топологии $\Lambda'^p(\mathbb{C})$ и что $d(T^\varepsilon) = (dT)^\varepsilon$. Так же полагая $(A_\varepsilon T)(\phi) := T(A_\varepsilon\phi)$, мы получаем, что поток $A_\varepsilon T$ сосредоточен в ε-окрестности потока T и для T замкнутого (это условие актуально лишь для степени $p = 1$, так как у нас всегда будут $n = 2$) имеет место равенство $T^\varepsilon - T = d(A_\varepsilon T)$.

Покажем, наконец, что $T^\varepsilon \in \Lambda^p(\mathbb{C})$, на примере потоков типа $(0, 1)$ (для остальных аналогично); бистепень потока определяется тоже по двойственности: $T^{0,1}(\phi) := T(\phi^{1,0})$, $T^{1,0}(\phi) := T(\phi^{0,1})$.

Для $\phi = h\,dz$, $\phi^\varepsilon = \bigl(\int h(\zeta)\lambda_\varepsilon(\zeta - z)\,dS_\zeta\bigr)\,dz$. Поэтому

$$\begin{aligned} T^\varepsilon(\phi) = T(\phi^\varepsilon) &= \int h(\zeta) T_z(\lambda_\varepsilon(\zeta - z)\,dz)\,dS_\zeta \\ &= \frac{1}{2i} \int (T_z(\lambda_\varepsilon(\zeta - z)\,dz))\,d\bar\zeta \wedge h\,d\zeta \end{aligned}$$

(здесь индекс указывает, что T действует по z, остальные переменные – как параметры). Ключевое второе равенство следует из того, что поток – линейный непрерывный функционал, и потому он перестановочен с интегралом Римана. Таким образом, T^ε как функционал на $\Lambda_c^{1,0}(\mathbb{C})$ (т.е. как поток) совпадает с (представляется) $(0,1)$-формой $\frac{1}{2i}(T_\zeta(\lambda_\varepsilon(z-\zeta)\,d\zeta))\,d\bar{z}$ из $\Lambda^{0,1}(\mathbb{C})$. Аналогично, для $T \in \Lambda'^2(\mathbb{C})$ поток T^ε совпадает с гладкой 2-формой $(T_\zeta(\lambda_\varepsilon(z-\zeta)))\,dx \wedge dy$.

Чтобы определить регуляризацию на произвольной р.п., удобно определить её сначала в единичном круге $\mathbb{D}$, используя подходящий диффеоморфизм $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, например, такой, что $\arg f(z) = \arg z$, а модуль $|f(z)| = |z|$ при $|z| < 1/3$, $|f(z)| = e^{1/(1-|z|)}$ при $|z| > 2/3$ и в целом монотонный. Регуляризацию форм в круге определим так: сначала выйдем на плоскость, усредним там и вернёмся назад, т.е. это операция $\phi \mapsto \phi_{\mathbb{D}}^\varepsilon := f^*((f_*\phi)^\varepsilon)$. Если ϕ определена в окрестности $\overline{\mathbb{D}}$, то вне $\mathbb{D}$ положим $\phi_{\mathbb{D}}^\varepsilon = \phi$. Ввиду экспоненциального роста $|f|$ возле $\partial\mathbb{D}$, гладкие формы в окрестности $\overline{\mathbb{D}}$ после такой операции остаются гладкими (там же). Так как $f^*d = d\,f^*$ то замкнутость форм при этом тоже сохраняется.

Пусть теперь M – произвольная р.п. и (U_j, z_j) – координатные окрестности такие, что $z_j(U_j) \supset \overline{\mathbb{D}}$ и $z_j^{-1}(\mathbb{D})$ тоже покрывают M. Используя координаты, усредним сначала формы и потоки в U_1 с параметром ε_1 (ничего не меняя вне $z_1^{-1}(\mathbb{D})$), результат усредним в U_2 с параметром ε_2 – и т.д. На любом компакте $K \subset M$ эта процедура закончится через конечное число шагов, а параметры $\varepsilon_j > 0$ можно брать произвольно. Таким образом, по схеме де Рама из [Р] для римановых поверхностей (а больше нам и не надо) доказана следующая

Теорема (де Рам). *M – гладкое многообразие с фиксированной метрикой $\Longrightarrow$ $\forall\varepsilon > 0$ в пространстве потоков $\Lambda'(M)$ существует линейный непрерывный оператор регуляризации $T \mapsto T^\varepsilon$ со следующими свойствами*:

1. *$T \in \Lambda'^p \Longrightarrow T^\varepsilon \in \Lambda^p$, гладкая p-форма.*
2. *Носитель T^ε лежит в ε-окрестности носителя T.*
3. *$T^\varepsilon \to T$ в топологии Λ' при $\varepsilon \to 0$.*
4. *$d(T^\varepsilon) = (dT)^\varepsilon$.*
5. *$dT = 0 \Longrightarrow T - T^\varepsilon = dS_\varepsilon$, причём носитель потока S_ε лежит в ε-окрестности носителя T.*

Следствие. $\widetilde{H}^p(M,\mathbb{C}) = H^p(M,\mathbb{C})$ $(= H^p_{DR}(M))$.

10. d-проблема на ориентируемой поверхности. M – гладкая поверхность, ориентированная, компактная или с краем. Решаем на M "d-проблему", которая для $p=1$ заключается в нахождении гладкой функции f, удовлетворяющей уравнению $df=\alpha$ с гладкой правой частью, $\alpha\in\Lambda^1$, и необходимым условием $d\alpha=0$ (поскольку $d(df)=0$).

Пробуем решить эту проблему при помощи полной развёртки. Пусть γ_j – циклы-разрезы на M, исходящие из одной базовой точки $\circ$, или компоненты края с разрезами из отмеченной точки (как в (7)) и $\rho\colon M\setminus\Gamma\to\mathbb{D}$ – отображение развёртки, где Γ – объединение всех разрезов и края. Отображение ρ можно выбрать гладким, причём так, что обратное к нему непрерывно на $\overline{\mathbb{D}}$, гладко в $\mathbb{D}$ и кусочно гладко на $\partial\mathbb{D}=S^1$. Форма $\tilde\alpha := (\rho^{-1})^*\alpha$ замкнутая и гладкая в $\mathbb{D}$, непрерывная на $\overline{\mathbb{D}} \Longrightarrow \tilde\alpha = d\tilde f$, $\tilde f$ гладкая в $\mathbb{D}$, непрерывная в $\overline{\mathbb{D}} \Longrightarrow f := \tilde f\circ\rho$ – гладкая на $M\setminus\Gamma$ и такая, что там $\alpha = df$. Но что происходит на Γ?

В общем случае, функция f разрывна (по Γ), но непрерывно продолжается на каждую $\gamma_j\setminus\circ$ с каждой стороны этой кривой. Посмотрим, что это значит с точки зрения потоков. Пусть ϕ – гладкая 1-форма на M, равная нулю в окрестности края $\Longrightarrow$

$$\int_M f\,d\phi = -\int_M \alpha\wedge\phi + \int_{\partial(M\setminus\Gamma)} f\phi = -\int_M \alpha\wedge\phi + \sum\int_{\gamma_j} f_j^{\pm}\phi,$$

где $f_j^{\pm} = f_j^+ - f_j^-$, скачки предельных значений функции на γ_j. В терминах потоков, это означает, что $[\alpha]-d[f] = \sum f_j^{\pm}[\gamma_j]$. $\Longrightarrow$ поток в правой части замкнут, т.е. $\sum\int_{\gamma_j} f_j^{\pm}\,dh = 0$ $\forall h\in\Lambda^0_c(M) \Longrightarrow$ $\int_{\gamma_j} f_j^{\pm}\,dh = 0$ $\forall j$ и всех $h\in\Lambda^0_c(M)$, равных 0 в окрестности базовой точки $\circ \Longrightarrow f_j^{\pm}\equiv c_j$, const $\Longrightarrow [\alpha]\sim\sum c_j[\gamma_j]$ (разность этих двух потоков точна).

$\Gamma\cap M$ – это канонические циклы a_ν, b_ν, соответствующие ручкам (см. (7)), и разрезы δ_ν от базовой точки $\circ$ до компонент края. Потоки $[a_\nu]$, $[b_\nu]$ замкнуты на M (формула Стокса), а δ_ν – нет (один конец δ_ν – это точка $\circ\in M$). Так как поток $\sum c_j[\gamma_j]$ замкнут, то значит

$$\sum\{c_j : \gamma_j = \text{ некоторому}\,\delta_\nu\} = 0 \qquad (*)$$

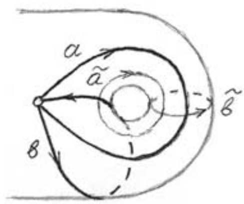

Рис. 14.

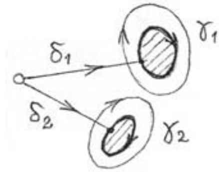

Рис. 15.

(в частности, если $m = 1$, то коэффициент при единственном разрезе δ равен нулю).

Так как b_j и некоторые $\tilde{a}_j \sim a_j$ (гомологичные) пересекаются трансверсально, то

$$\int_{b_j} [\tilde{a}_\nu]^\varepsilon = -\int_{a_\nu} [\tilde{b}_j]^\varepsilon = -\delta_{j\nu}, \quad \text{а} \quad \int_{b_j} [\tilde{b}_\nu]^\varepsilon = \int_{a_j} [a_\nu]^\varepsilon = 0,$$

если $\varepsilon > 0$ достаточно мало (см. упражнение 8 и картину в локальных координатах в кольцах вокруг $\tilde{a}_\nu$, $\tilde{b}_\nu$). Так как $[\tilde{a}_\nu]^\varepsilon$, $[\tilde{b}_\nu]^\varepsilon$ – замкнутые формы из $\Lambda^1_c(M)$, то это значит, что замкнутые формы $[a_\nu]$, $[b_\nu]$ *не* точны и любая их ненулевая линейная комбинация (с коэффициентами из $\mathbb{C}$) тоже *не* точна.

Если γ_j – компоненты края (куда идут соответствующие разрезы δ_j из базовой точки $\circ$), то, аналогично, $\int_{\delta_j} [\tilde{\gamma}_\nu]^\varepsilon = \delta_{j\nu}$, $\int_{a_j} [\tilde{\gamma}_\nu]^\varepsilon = \int_{b_j} [\tilde{\gamma}_\nu]^\varepsilon = 0. \Longrightarrow$ Поток $\sum c_j[\gamma_j]$ на M замкнут $\forall\, c_j \in \mathbb{C}$, удовлетворяющих условию $(*)$, но точен тогда и только тогда, когда *все* $c_j = 0$.

Мы говорим, что M – поверхность конечного типа, если она либо компактна, либо представима в виде возрастающей последовательности поверхностей с краем $M_\nu \subset M$ таких, что $\chi(M_\nu) \geqslant -N > -\infty$. Переходя к подпоследовательности, можно считать тогда, что род g одинаков (равен роду M) и число компонент у границ одно и то же ($= m$), если ν достаточно большое. Пару (g, m) называем *типом* поверхности M.

Теорема. *M – гладкая ориентируемая поверхность конечного типа (g, m), α – гладкая 1-форма на M. Уравнение $df = \alpha$ разрешимо с $f \in C^\infty(M)$ тогда и только тогда, когда $d\alpha = 0$ и $\int_{\gamma_j} \alpha = 0$, $j = 1, \ldots, 2g{+}m$, где γ_j – канонические разрезы ручек и компоненты края поверхностей M_ν при достаточно большом ν.*

$H^1(M,\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{2g}$, *если* M *компактна и* $H^1(M,\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{2g+m-1}$, *если* $m > 0$.

$\lhd$ Условия, очевидно, необходимые (формула Стокса). Пусть α удовлетворяет указанным условиям. Тогда, по доказанному выше, для каждого ν существует гладкая функция f_ν на M_ν такая, что там $df_\nu = \alpha$. Нормируем её условием $f_\nu(\circ) = 0,\ \ \circ \in M$. Тогда, так как $f_{\nu+1} - f_\nu \equiv \text{const}$ на M_ν, то $f_\nu(z)$ не зависит от ν для $z \in M_j$, $j \leqslant \nu$, и значит, это одна единая функция $f \in C^\infty(M)$.

Для замкнутой 1-формы α на M обозначим через $[\alpha] \in H^1(M,\mathbb{C})$ её класс когомологий де Рама. Если $\beta \in [\alpha]$, то $\int_\gamma \alpha = \int_\gamma \beta$ для всякого 1-цикла γ на M (по формуле Стокса) и, значит, определено отображение $[\alpha] \mapsto \big(\int_{\gamma_1}\alpha, \ldots, \int_{\gamma_{2g+m}}\alpha\big) \in \mathbb{C}^{2g+m}$. По доказанному выше, таким образом получаются все $(c_1, \ldots, c_{2g+m}) \in \mathbb{C}^{2g+m}$, удовлетворяющие единственному $\mathbb{C}$-линейному соотношению $(*)$, пустому, если $m = 0$. $\rhd$

Замечание. Уравнение $df = \alpha$ разрешимо в окрестности каждой точки и разность двух различных решений есть локально-постоянная функция. Поэтому если это уравнение разрешимо хотя бы в потоках, то решение всё равно будет гладким.

* * * * *

Упражнения.

1. K – компакт на поверхности M и $\widehat{K}$ – объединение K и всех связных компонент $M \setminus K$ с компактными замыканиями. Доказать, что $\widehat{K}$ – тоже компакт.

2. Доказать формулу из (7) для эйлеровой характеристики сферы с g ручками и m дырками (или проколами), используя полную развёртку.

3. ψ – распределение в $\mathbb{R}^2$ (т.е. линейный непрерывный функционал на “пробных” функциях, $\Lambda^0_c(\mathbb{R}^2)$). Какова его степень как потока? Чему равен дифференциал этого потока?

4. ψ_1, ψ_2 – распределения в $\mathbb{R}^2$. Определим поток $T = \psi_1\,dx + \psi_2\,dy$ степени 1, полагая $T(\alpha = a_1dx + a_2dy) := \psi_1(a_2) - \psi_2(a_1),\ \ \alpha \in \Lambda^1_c(\mathbb{R}^2)$. Доказать, что всякий поток степени 1 в $\mathbb{R}^2$ представляется в таком виде, а всякий поток степени 2 – в виде $T = \psi\,dx \wedge dy\ \ (T(h) := \psi(h))$. А как связаны с распределениями потоки степени 0?

5. $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2,\ \ t \mapsto (x(t), y(t))$, – путь класса C^1, $\ [\gamma](\alpha) := \int_\gamma \alpha$ – поток в $\mathbb{R}^2$ степени 1. Записать $[\gamma]$ в виде обобщённой формы (как

в упражнении 4). Найти коэффициенты ψ_1, ψ_2 для путей $x(t) = t$, $y(t) = 0$ и $x(t) = \cos(2\pi t)$, $y(t) = \sin(2\pi t)$ (тут проще полярные координаты).

6. Область $D \subset \mathbb{R}^2$ задаётся неравенством $\rho < 0$, где $\rho \in C^1(\mathbb{R}^2)$ и $d\rho \neq 0$ в точках ∂D. Доказать, что поток $d\,[D]$ представляется в виде $\mu\, d\rho$, где μ – мера на ∂D. Какая?

7. $f\colon M \to N$ – собственное отображение гладких многообразий, T – поток на M. Определим поток f_*T на N условием $(f_*T)(\phi) := T(f^*\phi)$. Для ситуаций $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $T = [\{f < 0\}]$ и $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $T = [(-\infty, 0]]$ описать потоки f_*T и $f_*(dT)$.

8. Гладкие пути $\gamma_1, \gamma_2\colon [-1,1] \to \mathbb{C}$ пересекаются только в $0 = \gamma_j(0)$, причём их касательные $\gamma_1'(0)$, $\gamma_2'(0)$ образуют положительно ориентированный базис в $\mathbb{C}$. Доказать, что $\int_{\gamma_1} [\gamma_2]^\varepsilon = 1$ при всех малых ε. (Начать со случая осей координат.)

9. $M = \bigcup M_\nu$, все M_ν связные, $M_\nu \subset M_{\nu+1}$; α – 1-форма на M, точная на каждом $M_\nu \Longrightarrow \alpha$ точна на M, а условие $M_\nu \subset M_{\nu+1}$ нельзя ослабить до $\bigcap M_\nu \neq \varnothing$.

10. Доказать, что $H^0(\mathbb{P}_1, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C} \simeq H^2(\mathbb{P}_1, \mathbb{C})$, а $H^1(\mathbb{P}_1, \mathbb{C}) = 0$. Для замкнутой 1-формы α на $\mathbb{P}_1$ найти первообразную (формулой). Привести пример вещественной гладкой 2-формы на $\mathbb{P}_1$, нигде не равной нулю. Точна ли она?

11. $\gamma\colon S^1 \to \mathbb{C}$ – гладкий путь-вложение, ψ – кусочно-непрерывная 1-форма на $\gamma(S^1)$. Если $\int_\gamma \psi = 0$, то существует непрерывная функция f на $\gamma(S^1)$ такая, что $d(f[\gamma]) = \psi \wedge [\gamma]$ (по определению, $(\psi \wedge [\gamma])(h) = -\int_\gamma h\psi$). Если же $\int_\gamma \psi \neq 0$, то поток $\psi \wedge [\gamma]$ не представляется в виде dT, где T – поток в $\mathbb{C}$ с компактным носителем.

12.* Доказать, что поток T степени 2 на связной компактной ориентированной поверхности M является точным ($= dS$) тогда и только тогда, когда $T(1) = 0$. В частности, $H^2(M, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$. Указать гладкую 2-форму, класс которой (в H^2) отличен от нуля.

13. Доказать, что $H^2(M, \mathbb{C}) = 0$ для ориентируемой поверхности с непустым краем bM, при условии, что M связна ($M \cup bM$ – компакт). $*$ $H^2(M, \mathbb{C}) = 0$ для всякой ориентируемой некомпактной поверхности.

14. Гладкие комплексные функции на многообразии M, нигде не равные нулю, образуют группу по умножению $C^\infty_*(M)$, а функции вида e^h, $h \in C^\infty(M)$, составляют в ней подгруппу exp. Положим $H^1(M,\mathbb{Z}) := C^\infty_*(M)/\exp$ (факторгруппа). Для ориентируемого многообразия M доказать:

a) отображение $f \mapsto \frac{df}{2\pi f}$ индуцирует гомоморфизм $\iota\colon H^1(M,\mathbb{Z}) \to H^1(M,\mathbb{C})$,

b) гомоморфизм ι является вложением,

c) класс эквивалентности замкнутой 1-формы α содержится в образе $H^1(M,\mathbb{Z})$ тогда и только тогда, когда все периоды α целочисленны, т.е. $\int_\gamma \alpha \in \mathbb{Z}$ для всякого (целочисленного) 1-цикла γ.

Комплексные структуры на поверхности

Лекция 5

Римановы поверхности – Комплексные структуры – Почти комплексные структуры – Уравнение Бельтрами и голоморфные диски – Операторы Коши–Грина

1. Римановы поверхности. *Риманова поверхность* (р.п.) – это, по определению, *связное* комплексное одномерное многообразие. Это значит, что на M определён некоторый атлас комплексных одномерных карт, $M = \bigcup U_j$, $z_j \colon U_j \to \mathbb{C}$, с голоморфными функциями переходов $z_j \circ z_k^{-1}$ (определёнными в соответствующих областях $z_k(U_j \cap U_k) \subset \mathbb{C}$).

Примеры. $\mathbb{P}_1 = U_0 \cup U_1$, $U_0 = \mathbb{C}$, $U_1 = (\mathbb{C} \setminus 0) \cup \infty$, $z_0 = z$, $z_1 = 1/z$.

$M \colon F(z,w) = 0$ в области $D \subset \mathbb{C}^2$, F голоморфна, $dF \neq 0$. На открытом множестве $M \cap \{F'_w \neq 0\}$ функция $z|_M$ является локальной координатой и это множество покрывается картами (U_j, z). Аналогично, $M \cap \{F'_z \neq 0\}$ покрывается картами (V_l, w) и функции перехода голоморфны, так как $(F'_z\, dz + F'_w\, dw)|_M = 0$.

Голоморфные функции, $f \in \mathcal{O}(M)$, на р.п. – это функции, голоморфные относительно локальных координат, т.е. $f \circ z_j^{-1} \in \mathcal{O}(z_j(U_j) \subset \mathbb{C})$ $\forall j$. Мероморфные функции $f \in \mathcal{M}(M)$ определяются тоже через локальные координаты, это такие функции, что $f = h_j/g_j$, $h_j, g_j \in \mathcal{O}(U_j)$, $g_j \not\equiv 0$, $\forall j$. Отображение $f \colon M \to N$ римановых поверхностей называется голоморфным, если оно голоморфно относительно всех (голоморфных) карт на образе и прообразе, т.е. $w_\nu \circ f \circ z_j^{-1} \in \mathcal{O}$ там, где это определено. $\Longrightarrow$ голоморфные функции на M – это голоморфные отображения $f \colon M \to \mathbb{C}$, а мероморфные функции – это *голоморфные* отображения $f \colon M \to \mathbb{P}_1$ в сферу Римана.

Если $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$ – две координатные функции на р.п. M, то $\det \frac{\partial(x',y')}{\partial(x,y)} = \left|\frac{dz'}{dz}\right|^2 > 0 \Longrightarrow$ на M всегда есть каноническая ориентация: для голоморфной координаты $z = x + iy$

пара вещественных координат (x, y) считается положительно ориентированной. В частности, если (λ_j) – разбиение единицы, подчинённое локально конечному координатному покрытию, то $\omega = \sum \lambda_j \, dx_j \wedge dy_j$ – глобальная форма площади на M.

2. Комплексные структуры. Дифференциальная 1-форма на M относительно локальной координаты z представляется в виде $\alpha = a\,dz + b\,d\bar{z}$. Формы вида $a\,dz$ называются формами *типа* (*бистепени*) $(1,0)$, а $b\,d\bar{z}$ – формами типа $(0,1)$; таким образом, мы имеем разложение на *биоднородные компоненты*, $\alpha = \alpha^{1,0} + \alpha^{0,1}$. Так как функции переходов голоморфны, то это разложение не зависит от выбора координат, т.е. биоднородные слагаемые $\alpha^{1,0}$, $\alpha^{0,1}$ – глобально определённые 1-формы на M, того же класса гладкости, что и α, равные нулю всюду, где $\alpha = 0$.

Преобразование координат $z \mapsto i\,z$ индуцирует отображение $\alpha \mapsto i\,(a\,dz - b\,d\bar{z}) = i\,\alpha^{1,0} - i\,\alpha^{0,1} =: J\alpha$, очевидно, не зависящее от выбора координат, причём $J^2 = -\mathbb{I}$, где $\mathbb{I}$ – тождественный (единичный) оператор. Так как $J(\alpha^{1,0}) = i\,\alpha^{1,0}$, $J(\alpha^{0,1}) = -i\,\alpha^{0,1}$, то разложение по бистепеням $\Lambda^1 = \Lambda^{1,0} \oplus \Lambda^{0,1}$ – это разложение на собственные подпространства оператора J (в каждом слое комплексного кокасательного расслоения $(TM)^*_{\mathbb{C}}$).

На касательном расслоении TM оператор J определяется по двойственности: $\alpha(Jv) := (J\alpha)(v)$ для всякого поля v на M. В локальных координатах $z = x + iy$ возьмём $v = \frac{\partial}{\partial x} \Longrightarrow dz(Jv) = i\,dz\big(\frac{\partial}{\partial x}\big) = i = dz\big(\frac{\partial}{\partial y}\big) \Longrightarrow$

$$J\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad J\frac{\partial}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}$$

$\Longrightarrow$ матрица оператора J относительно базиса $\big(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\big)$ есть $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (координаты полей относительно этого базиса записываем в виде столбцов). Оператор J (как бы “умножение на i” в слоях касательного расслоения) называется *комплексной структурой* на M. Как видим, на р.п. эта структура порождена локальными голоморфными координатами.

Гладкое отображение $f\colon M \to M'$ римановых поверхностей голоморфно тогда и только тогда, когда прообраз каждой локальной координаты z' на M' является голоморфной функцией в соответствующей области в M. Отсюда очевидно следует, что f голоморфно тогда и только тогда, когда оно сохраняет бистепени дифференциальных 1-форм, $f^*\alpha^{p,q} \in \Lambda^{p,q}(M)$, $\forall \alpha^{p,q} \in \Lambda^{p,q}(M')$, $p+q=1$.

Для гладкой функции $f\colon M \to \mathbb{C}$, разложение по бистепеням даёт представление $df = \partial f + \bar\partial f$, где $\partial f = (df)^{1,0}$ и $\bar\partial f = (df)^{0,1}$; функция f голоморфна в некоторой области на M, если там $\bar\partial f = 0$ (условие Коши–Римана).

Для 1-форм α полагаем, по определению, $\partial\alpha := d(\alpha^{0,1})$, $\bar\partial\alpha := d(\alpha^{1,0})$ (это годится только в случае $\dim_{\mathbb{C}} M = 1$, поскольку тут нет ненулевых форм бистепеней $(2,0)$ и $(0,2)$ и 2-формы – это то же, что формы бистепени $(1,1)$ – локально это $a\,dz \wedge d\bar z$). 1-форма α на р.п. M называется *голоморфной*, если она имеет бистепень $(1,0)$ и замкнута, т.е. $d\alpha = 0$ (или, что то же, $\bar\partial\alpha = 0$). Локально, это формы вида $\alpha = h\,dz$, $h \in \mathcal{O}$. Линейное пространство форм, голоморфных на всей поверхности M обозначается обычно через $\Omega^1(M)$.

Форма $\phi = \phi^{p,q}$, $p+q \leqslant 1$, называется *$\bar\partial$-замкнутой*, если $\bar\partial\phi = 0$ (так как на поверхности нет ненулевых дифференциальных форм степени $\geqslant 3$, то всякая 2-форма на р.п. и d-замкнута и $\bar\partial$-замкнута – по определению); ϕ называется *$\bar\partial$-точной*, если $p+q \geqslant 1$ и $\phi = \bar\partial\psi$ для некоторой формы ψ (и тут договариваемся, что единственная точная или $\bar\partial$-точная функция – это $\equiv 0$). Так как $\bar\partial\alpha^{0,1} = 0$ (на р.п. нет ненулевых форм бистепени $(0,2)$), то $\bar\partial(\bar\partial f) = 0$ для всякой гладкой функции f, короче, на р.п. $(\bar\partial)^2 = 0$ (это свойство выполняется и на любом комплексном многообразии). Таким образом, $\bar\partial$-точные формы образуют подпространства $\bar\partial$-замкнутых форм и мы можем определить фактор-пространства

$$H^{p,q}(M) := (\bar\partial\text{-замкнутые } (p,q)\text{-формы})/(\bar\partial\text{-точные}),$$

когомологии Дольбо комплексного многообразия M.

На римановой поверхности, как легко видно из определений, имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} H^{0,0}(M) &= \mathcal{O}(M), & H^{1,0}(M) &= \Omega^1(M),\\ H^{0,1}(M) &= \Lambda^{0,1}/\bar\partial\Lambda^0, & H^{1,1}(M) &= \Lambda^2/\bar\partial\Lambda^1 \end{aligned}$$

и больше ничего (ненулевого) нет.

3. Почти комплексные структуры. M – гладкая поверхность. Непрерывный линейный оператор $J\colon T_aM \to T_aM$, $a \in M$, такой, что $J^2 = -\mathbb{I}$, называется *почти комплексной структурой* на M. Непрерывность и, более общо, условие $J \in C^k$ и т.п. означает, что $Jv \in C^k(M)$ для всякого гладкого векторного поля v на M.

Утверждение. *Если на поверхности M есть (непрерывная) почти комплексная структура, то M ориентируема.*

$\lhd$ $(U,(x,y))$ – гладкая карта на M. Условие $dx \wedge dy\,(v, Jv) > 0$, $v \neq 0$, не зависит от выборя поля v: если $u = av + bJv$ – другое поле, то $Ju = aJv - bv$ и, значит, $dx \wedge dy\,(u, Ju) = (a^2+b^2)\,dx \wedge dy\,(v, Jv)$. Якобиан перехода двух таких карт, очевидно, положителен, $\Longrightarrow$ они образуют ориентированный атлас (задающий "положительную" ориентацию M относительно структуры J). $\rhd$

Оператор J по двойственности (как в (2)) переносится на формы и определяет соответствующее разложение по бистепеням дифференциальных 1-форм, $\Lambda^1 = \Lambda_J^{1,0} \oplus \Lambda_J^{0,1}$. Слои слагаемых в каждом слое $(T_aM)^*_{\mathbb{C}}$ комплексного кокасательного расслоения – это собственные подпространства оператора J, соответствующие собственным значениям $\pm i$, в частности, $J\Lambda_J^{1,0} = i\Lambda_J^{1,0}$ и $J\Lambda_J^{0,1} = -i\Lambda_J^{0,1}$.

f – гладкая функция $\Longrightarrow df \in \Lambda^1 \Longrightarrow$ разложение по бистепеням даёт $df = \partial_J f + \bar\partial_J f$, где $\partial_J f := (df)_J^{1,0}$ и $\bar\partial_J f := (df)_J^{0,1}$. По определению, функция $f \in \mathcal{O}_J$, *J-голоморфна* (в некоторой области на M), если там $\bar\partial_J f = 0$ (условие Коши–Римана). Это формальное определение; далеко не тривиальный вопрос о существовании непостоянных голоморфных функций в областях почти комплексной поверхности будет решён лишь в следующей лекции.

Используя координаты из положительно ориентированного атласа и соответствующее разбиение единицы, можем образовать глобальную форму площади $\omega = \sum \lambda_j\, dx_j \wedge dy_j$ с $\omega(v, Jv) > 0$ для $v \neq 0$, а по ω можно построить симметрическую билинейную положительно определённую форму $\rho(u,v) = \omega(u, Jv) + \omega(v, Ju)$, т.е. *риманову метрику* на M, для которой $\rho(v, Jv) \equiv 0$, т.е. оператор J ортогонален относительно этой метрики. Пары v, Jv, $v \neq 0$, образуют положительно ориентированные базисы, поэтому если ρ' – другая риманова метрика на M с этим свойством, то в каждой точке M они пропорциональны, $\rho' = \lambda\rho$, $\lambda > 0$. Такие метрики называются *конформно эквивалентными*, следовательно J-ортогональная метрика на (M, J) определена однозначно с точностью до конформной эквивалентности и называется *конформной* римановой метрикой на (M, J).

Почти комплексные структуры и метрики на ориентированной поверхности тесно связаны. Выше показано, как по (гладкой) почти комплексной структуре строится класс конформно эквивалентных метрик. Обратно, если ρ – риманова метрика на поверхности с фиксированной ориентацией, то оператор J можно определить как "поворот на $\pi/2$ в положительном направлении", т.е. $\rho(v, Jv) = 0$ и пара v, Jv положительно ориентирована. По построению, оператор J ортогонален относительно метрики ρ (а значит, и относительно всех метрик, конформно ей эквивалентных).

В локальных (положительно ориентированных) координатах метрике ρ соответствует квадратичная форма $a\,dx^2 + 2b\,dx\,dy + c\,dy^2$ и скалярное произведение касательных векторов $\rho(u, v) = (u_1, u_2)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ (базис $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$). Координаты (x, y) называются *изотермическими* (для ρ), если соответствующая квадратичная форма равна $\lambda(dx^2 + dy^2)$, $\lambda > 0$. На римановой поверхности с комплексной структурой J и голоморфными локальными координатами z изотермическими вещественными координатами для J-ортогональной метрики будут, очевидно, $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. На почти комплексной поверхности с J-ортогональной метрикой ρ для каждой точки локальные координаты можно, очевидно, выбрать так, чтобы $\rho \sim \lambda\,(dx^2 + dy^2)$ в одной этой точке, но как их выбрать, чтобы это выполнялось в окрестности? Этот вопрос тесно связан с существованием непостоянных J-голоморфных функций, к которому мы и переходим.

4. Уравнение Бельтрами и голоморфные диски. (M, J) – почти комплексная поверхность. В окрестности произвольной фиксированной точки $\circ \in M$ гладкую координату z можно, очевидно, выбрать так, что dz в самой точке $\circ$ есть форма типа $(1,0)_J$. В окрестности $\circ$ разложение по бистепеням даёт $dz = \alpha + \bar\beta$, где α, β – формы типа $(1,0)_J$. Так как слои $T^{1,0}_J(M)$ комплексно-одномерные, то $\beta = \mu\,\bar\alpha$ с некоторой гладкой функцией μ, $\mu(0) = 0$. Отсюда, $dz = \alpha + \mu\,\bar\alpha$, $d\bar z = \bar\mu\,\alpha + \bar\alpha$ и для любой дифференцируемой функции f в окрестности $\circ$ мы имеем $df = (f_z + \bar\mu\, f_{\bar z})\,\alpha + (f_{\bar z} + \mu\, f_z)\,\bar\alpha = \partial_J f + \bar\partial_J f$ (здесь и далее мы не пишем штрихи при производных). Таким образом, условие

Коши–Римана $\bar\partial_J f = 0$ для J-голоморфных функций в окрестности $\circ$ переписывается в виде *уравнения Бельтрами* $f_{\bar z} + \mu\, f_z = 0$. Так как $\mu(\circ) = 0$, то $|\mu| < 1$ в окрестности $\circ$; после замены $z = \varepsilon\tilde z$ можно считать, что μ и её частные производные до нужного порядка относительно локальных координат сколь угодно малы.

Наряду с J-голоморфными функциями (отображениями из областей на M в комплексную плоскость), удобно работать и с обратными J-голоморфными отображениями, скажем, из единичного круга в M; такие отображения называются *голоморфными дисками* на (M, J). При условии невырожденности, такой диск задаёт голоморфную параметризацию образа, а обратное отображение в круг будет локальной J-голоморфной координатой. Таким образом, задачи нахождения локальных J-голоморфных координат и невырожденных J-голоморфных дисков (проходящих через заданную точку в M) эквивалентны.

Итак, $\mathbb{D}$ – единичный круг на плоскости $\mathbb{C}_\zeta$ со стандартной комплексной структурой J_{st}, которая однозначно определяется тем, что $d\zeta$ – форма типа $(1,0) = (1,0)_{J_{\mathrm{st}}}$. Отображение $\phi\colon \mathbb{D} \to M$ класса C^1 является J-голоморфным (точнее (J_{st}, J)-голоморфным, но мы не указываем стандартную структуру), тогда и только тогда, когда $\phi^*\Lambda^{1,0}_J(M) \subset \Lambda^{1,0}(\mathbb{D})$. Мы смотрим диски через фиксированную точку, $\phi(0) = \circ$, в окрестности которой уже есть выбранная выше комплексная координата z. Так как мы изучаем локальную задачу, то можно на время забыть о поверхностях и рассматривать просто отображения $(\mathbb{D}, J_{\mathrm{st}}) \to (\mathbb{C}_z, J)$, где структура J определена условием $dz = \alpha + \mu\,\bar\alpha$, $\alpha \in \Lambda^{1,0}_J$. Итак, $\zeta \mapsto z = z(\zeta)$, $z(0) = 0$. Так как $\alpha = (dz - \mu\, d\bar z)/(1 - |\mu|^2)$, то условие J-голоморфности означает, что форма $z^*(dz - \mu\, d\bar z) = (z_\zeta - \mu\,\bar z_\zeta)\, d\zeta + (z_{\bar\zeta} - \mu\,\bar z_{\bar\zeta})\, d\bar\zeta$ имеет тип $(1,0)$ в $\mathbb{D}$, т.е. коэффициент при $d\bar\zeta$ должен равняться нулю. Так как $(\bar z)_{\bar\zeta} = \overline{z_\zeta}$, то это условие переписывается в виде *уравнения голоморфных дисков* $z_{\bar\zeta} = \mu(z)\,\overline{z_\zeta}$. Сразу подчеркнём, что это уравнение нелинейное – коэффициент μ сам является функцией от искомой функции $z(\zeta)$. Тем не менее, в чём-то это уравнение проще, чем уравнение Бельтрами, и именно его мы будем изучать на предмет существования невырожденных решений.

5. Операторы Коши–Грина. Напомним ещё раз формулу из ТФКП: если функция ϕ на комплексной плоскости непрерывно дифференцируема и имеет компактный носитель, то $\phi(z) =$

$-\frac{1}{\pi}\int\frac{\phi_{\bar\zeta}(\zeta)\,dS_\zeta}{\zeta-z}$ (интеграл по всей плоскости, а на самом деле лишь по носителю ϕ; $dS_\zeta = d\xi\wedge d\eta = \frac{i}{2}d\zeta\wedge d\bar\zeta$ – форма евклидовой площади в $\mathbb{C}_\zeta$).

Для любой области $D\subset\mathbb{C}$ и любой функции $f\in L^p(D)$, $p>2$, определим $P_D f$ как функцию $P_D f(z) := -\frac{1}{\pi}\int_D\frac{f(\zeta)\,dS_\zeta}{\zeta-z}$ (условие $p>2$ гарантирует интегрируемость), и положим $Pf(z) := -\frac{1}{\pi}\int f(\zeta)(\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta})\,dS_\zeta$.

Формулу Коши–Грина можно записать в виде $P_{\mathbb{C}}\frac{\partial\phi}{\partial\bar z}=\phi$ т.е. $P_{\mathbb{C}}\frac{\partial}{\partial\bar z}=\mathbb{I}$, тождественный (единичный) оператор на пространстве $C^1_c(\mathbb{C})$. Если $\psi\in C^1_c(\mathbb{C})$ и $f\in L^p(\mathbb{C})$, то

$$-\int(P_{\mathbb{C}}f)\frac{\partial\psi}{\partial\bar z}\,dS_z=\int f(\zeta)\Big(\frac{1}{\pi}\int\frac{\psi_{\bar z}\,dS_z}{\zeta-z}\Big)\,dS_\zeta=\int f\psi\,dS_\zeta,$$

т.е. $\frac{\partial}{\partial\bar z}(P_{\mathbb{C}}f)=f$ в обощённом смысле. В частности, $\frac{\partial}{\partial\bar z}P_{\mathbb{C}}=\mathbb{I}$ на пространстве $C^1_c(\mathbb{C})$, т.е. $P_{\mathbb{C}}$ – левый и правый обратный оператор для оператора Коши–Римана $\frac{\partial}{\partial\bar z}$. Так как P отличается от $P_{\mathbb{C}}$ лишь на константу, то P – тоже правый обратный для $\frac{\partial}{\partial\bar z}$.

Ещё одно важное свойство оператора $P_{\mathbb{C}}$ на $C^k_c(\mathbb{C})$, перестановочность с дифференцированием, следует из равенства $P_{\mathbb{C}}f(z)=-\frac{1}{\pi}\int f(\zeta+z)\zeta^{-1}\,dS_\zeta$. Операторы Коши–Грина P_D, P улучшают гладкость практически на 1; в полном объёме мы это доказывать не будем (см. [B]), нам достаточно следующих оценок.

Лемма. 1) $f\in C(\overline{\mathbb{D}})\Longrightarrow|P_{\mathbb{D}}f(z)|\leqslant\frac{8\|f\|_\infty}{1+|z|}$, $z\in\mathbb{C}$,

2) $f\in L^p(\mathbb{C}), p>2,\Longrightarrow|Pf(z_1)-Pf(z_2)|\leqslant C_p\|f\|_p|z_1-z_2|^{1-2/p}$,
3) $f\in C^\alpha(\mathbb{D}), \alpha>0,\Longrightarrow P_{\mathbb{D}}f\in C^1(\mathbb{D}), \|P_{\mathbb{D}}f\|_{C^1}\leqslant C(\alpha)\|f\|_{C^\alpha}$.

Здесь $\|\cdot\|_p$ – норма в $L^p(\mathbb{C})$, $p\leqslant\infty$, и $\|f\|_{C^\alpha}:=\|f\|_\infty+\sup_{\mathbb{D}}\frac{|f(z_1)-f(z_2)|}{|z_1-z_2|^\alpha}$, $0<\alpha\leqslant1$.

$\lhd$ 1) Простое упражнение.

2) По неравенству Коши–Буняковского, с $1/p+1/q=1$, получаем

$$|Pf(z)|\leqslant|z|\,\|f\|_p\Big(\int\frac{dS_\zeta}{|(\zeta-z)\zeta|^q}\Big)^{1/q}$$
$$=|z|^{(2/q)-1}\|f\|_p\Big(\int\frac{dS_\eta}{|(\eta-1)\eta|^q}\Big)^{1/q}.$$

Применяя это к функции $f(z+z_2)$ в точке z_1-z_2, получаем указанное условие Гёльдера.

3) Воспользуемся тем, что $-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}}\frac{dS_\zeta}{\zeta-z}\equiv\bar z,\ z\in\mathbb{D}$ (легко следует из обобщённой формулы Коши, ТФКП; можно и проще). Для $z\in\mathbb{D}$ и малых Δz вычисляем

$$P_{\mathbb{D}}f(z+\Delta z)-P_{\mathbb{D}}f(z)=-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\frac{\Delta z\,dS_\zeta}{\zeta-z-\Delta z}+f(z)\,\Delta\bar z$$

$$\Longrightarrow\qquad \frac{\partial P_{\mathbb{D}}f}{\partial x}(z)=-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}}\frac{f(\zeta)-f(z)}{(\zeta-z)^2}\,dS_\zeta+f(z),$$

$$\frac{\partial P_{\mathbb{D}}f}{\partial y}(z)=-\frac{i}{\pi}\int_{\mathbb{D}}\frac{f(\zeta)-f(z)}{(\zeta-z)^2}dS_\zeta-if(z);$$

для формальных производных по z, $\bar z$ выражения попроще:

$$\frac{\partial P_{\mathbb{D}}f}{\partial z}(z)=-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}}\frac{f(\zeta)-f(z)}{(\zeta-z)^2}\,dS_\zeta,\qquad \frac{\partial P_{\mathbb{D}}f}{\partial\bar z}(z)=f(z),\quad z\in\mathbb{D}.$$

Остальное очевидно. $\triangleright$

* * * * *

Упражнения.

1. Бесконечно удалённая сфера $\mathbb{P}_2\setminus\mathbb{C}^2$ – риманова поверхность. Покрыть её двумя картами с голоморфной функцией перехода.

2. На сфере Римана $\mathbb{P}_1$ нет голоморфных форм $\not\equiv 0$ $(\Omega^1(\mathbb{P}_1)=0)$.

3. Комплексное поле вида $h_j\,dz_j$, $h_j\in\mathcal{O}(U_j)$, в координатных окрестностях называется голоморфным. Описать все голоморфные векторные поля на сфере Римана. Какова размерность пространства этих полей? Каковы голоморфные векторные поля на торе?

4. Замыкание в $\mathbb{P}_2$ поверхности $S\colon w^2=z^3-1$ есть р.п. На ней есть голоморфная форма, нигде не равная нулю. Доказать это, явно выписав форму. Какие ещё голоморфные формы есть на $\overline{S}$?

5. $H^{1,1}(\mathbb{C})=0$, $H^{1,1}(\mathbb{P}_1)\cong\mathbb{C}$.

6. $H^{0,1}(\mathbb{P}_1)=0$, $H^{1,0}(\mathbb{P}_1)=0$.

7. (M,J) – почти комплексное многообразие, $\alpha\in\Lambda^1(M)$. Проверить, что $\alpha^{1,0}=\frac{1}{2}(\alpha-iJ\alpha)$, $\alpha^{0,1}=\frac{1}{2}(\alpha+iJ\alpha)$. Что это даёт для df, $f\in\Lambda^0(M)$?

8. Всякое вещественное векторное поле на почти комплексном многообразии (M,J) имеет вид $v=\operatorname{Re}Z$, где Z – комплексное поле типа $(1,0)_J$, т.е. $JZ=iZ$. Выразить Z через v и Jv.

9. Описать все вещественные квадратные матрицы J такие, что $J^2=-\mathbb{I}$.

10. На почти комплексной поверхности (M, J) гладкая функция f такова, что $\alpha := df + \mu\, d\bar{f} \in \Lambda^{1,0}(M)$ и функция $|\mu| < 1$. Найти $\partial_J f$ и $\bar{\partial}_J f$ (α и μ даны).

11. $M\colon t = x^2 + y^2$ – поверхность в $\mathbb{R}^3_{x,y,t}$, ориентированная так, что проекция в $\mathbb{R}^2_{x,y}$ сохраняет ориентацию. J – комплексная структура на M, ортогональная относительно евклидовой метрики в $\mathbb{R}^3$ и положительно ориентированная. Поле $v = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$ в $\mathbb{R}^3$ касательно к M. Выписать поле Jv на M.

12*. $f \in C^\alpha(\overline{\mathbb{D}} \subset \mathbb{C})$, $0 < \alpha < 1$, $\Longrightarrow P_{\mathbb{D}} f \in C^{1,\alpha}(\mathbb{C})$, т.е. (первые частные производные) $\in C^\alpha(\mathbb{C})$.

13. $f \in C(D \subset \mathbb{C})$ – обобщённое решение в D уравнения $f_{\bar{z}} = \mu\, \overline{f_z}$, $\mu \in C^{1,\alpha}(D)$ с некоторым $\alpha > 0$, $|\mu| < 1$. Доказать, что $f \in C^1(D)$ и f – обычное решение этого уравнения.

14*. То же для уравнения $f_{\bar{z}} = \mu f_z$.

Лекция 6

Лемма Вейля – Теорема единственности – Уравнение голоморфных дисков – Существование голоморфных дисков – Комплексные структуры и метрики

6. Лемма Вейля. $u \in C(D \subset \mathbb{R}^n)$, $\Delta = \sum_1^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$, $\Delta u = 0$ *в обобщённом смысле* $\Longrightarrow u \in C^\infty(D)$ *и* $\Delta u = 0$ *в обычном смысле* (*т.е.* u *– гармоническая функция*).

$\lhd$ Регуляризация

$$u^\varepsilon(x) = \int u(x + \varepsilon\eta)\lambda(\eta)\, d\eta = \int u(\xi)\lambda_\varepsilon(\xi - x)\, d\xi$$

(см. лекцию 4(9)) определена и гладкая в $D_\varepsilon = \{x \in D\colon \operatorname{dist}(x, \partial D) > \varepsilon\}$ и там $\Delta u^\varepsilon(x) = \int u(\xi)\Delta_x\lambda_\varepsilon(\xi - x)\, d\xi$. Но $\Delta_x\lambda_\varepsilon(\xi - x) = \Delta_\xi\lambda_\varepsilon(\xi - x) \Longrightarrow$ по условию на u, $\Delta u^\varepsilon \equiv 0$ в D_ε, т.е. u^ε – гармоническая функция в D_ε. Так как $u(x+\varepsilon\eta) = u(x) + o_\varepsilon(1)$ с $o_\varepsilon(1) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно на компактах $K \subset D$, то $u^\varepsilon \rightrightarrows u$ на компактах $K \subset D$ при $\varepsilon \to 0 \Longrightarrow u$ – гармоническая функция в D. [В любом шаре $B \Subset D$, $u^\varepsilon(x) = \int_{\partial B} u^\varepsilon(\xi)\mathcal{P}_B(\xi, x)\, d\xi$, где $\mathcal{P}_B$ – ядро Пуассона для B, гармоническое по $x \in B$ $\forall \xi \in \partial B$. В пределе эта же формула справедлива и для $u \Longrightarrow u$ гармоническая в B.]$\rhd$

Следствие. $f \in C(D \subset \mathbb{C})$, $f_{\bar z} = 0$ *в* D *в обобщённом смысле* $\Longrightarrow f \in \mathcal{O}(D)$.

$\lhd$ $\Delta f = 4f_{\bar z z} = 0$ в обобщённом смысле $\Longrightarrow f \in C^\infty(D)$ по лемме Вейля и, значит, $f_{\bar z} = 0$. $\rhd$

7. Теорема единственности. $f \in C^1(\mathbb{C})$, $f(\infty) = 0$ (lim) *и* $|f_{\bar z}| \leqslant A|f|$ *всюду, с некоторой* $A \in C_c(\mathbb{C}) \Longrightarrow f \equiv 0$.

$\lhd$ $f_{\bar z} = a\, f$, $a \in L_c^\infty(\mathbb{C})$ ($a := 0$ там, где $f = 0$). $\hat a := P_{\mathbb{C}} a \Longrightarrow (\hat a)_{\bar z} = a$ в обобщённом смысле (см. (5)). $F := f\, e^{-\hat a} \Longrightarrow F_{\bar z} = e^{-\hat a}(f_{\bar z} - fa) = 0$ в обобщённом смысле, $\Longrightarrow F \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ (лемма Вейля). Так как $\hat a(\infty) = 0$, то $F(\infty) = 0 \Longrightarrow F \equiv 0$ (принцип максимума, ТФКП) $\Longrightarrow f \equiv 0$. $\rhd$

Следствие. $f \in C(\mathbb{C})$, $f(\infty) = 0$ (lim), $f_{\bar z} = af + b\bar f$ *в обобщённом смысле*, $a, b \in C_c^\alpha(\mathbb{C})$ *с некоторым* $\alpha > 0$. $\Longrightarrow f \equiv 0$.

$\lhd$ $(f - P_{\mathbb{C}}(af + b\bar f))_{\bar z} = f_{\bar z} - af - b\bar f = 0 \Longrightarrow f - P_{\mathbb{C}}(af + b\bar f) \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ (лемма Вейля). Эта функция равна нулю в $\infty \Longrightarrow \equiv 0 \Longrightarrow$

$f \equiv P_{\mathbb{C}}(af + b\bar{f})$. По условию, $af + b\bar{f} \in C_c(\mathbb{C}) \Longrightarrow f \in C^\alpha(\mathbb{C})$ (лемма (5)) $\Longrightarrow af + b\bar{f} \in C_c^\alpha(\mathbb{C}) \Longrightarrow f \in C^1(\mathbb{C})$ (лемма (5)) $\Longrightarrow$ (по теореме выше) $f \equiv 0$. $\rhd$

8. Уравнение голоморфных дисков. В окрестности начала координат в $\mathbb{C}_\zeta$ решаем уравнение голоморфных дисков (лекция 5(4)) $z_{\bar\zeta} = \mu(z)\,\overline{z_\zeta}$, $z(0) = 0$, где $\mu(z)$ – гладкая функция в окрестности 0 на $\mathbb{C}_z$, $\mu(0) = 0$. Сделав замену $z = \varepsilon\tilde{z}$, можем считать, что μ и её частные производные первого и второго порядков определены и $\ll 1$ в единичном круге $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}_z$. Заменяя μ на $\lambda\mu$, где $\lambda = 1$ в окрестности 0, гладкая, $\lambda = 0$ вне $\frac{1}{2}\,\mathbb{D}$, можем считать также, что $\mu(z) = 0$ при $|z| > 1/2$.

После такой подготовки будем решать уравнение дисков на всей плоскости $\mathbb{C}_\zeta$. Формально (= в обобщённом смысле) продифференцируем его по ζ. С учётом соотношений типа $\bar{z}_\zeta = \overline{z_{\bar\zeta}}$, $\bar{z}_{\zeta\bar\zeta} = \overline{z_{\zeta\bar\zeta}}$, получаем

$$z_{\zeta\bar\zeta} - \mu\,\overline{z_{\zeta\bar\zeta}} = \overline{z_\zeta}(\mu_z z_\zeta + \mu_{\bar z}\bar\mu\, z_\zeta) = (\mu_z + \bar\mu\,\mu_{\bar z})|z_\zeta|^2.$$

Берём комплексное сопряжение

$$-\bar\mu\, z_{\zeta\bar\zeta} + \overline{z_{\zeta\bar\zeta}} = \bar{b}|z_\zeta|^2,$$

с $b := \mu_z + \bar\mu\,\mu_{\bar z}$ и из этих двух соотношений получаем уравнение

$$z_{\zeta\bar\zeta} = a(z)|z_\zeta|^2, \qquad (**)$$

которому удовлетворяет (в обобщённом смысле) любое решение уравнения дисков. Здесь $a = \frac{b+\mu\,\bar b}{1-|\mu|^2}$, $\|a\|_{C^1} \ll 1$, $a = 0$ при $|z| > 1/2$.

Обратно, пусть $z(\zeta) \in C^1(\mathbb{C})$ – решение уравнения $(**)$ в $\mathbb{C}_\zeta$ такое, что $z_\zeta \in C^1(\mathbb{C})$, $z(\infty) = 0$, $z_{\bar\zeta}(\infty) = 0$ (lim). Тогда

$$\begin{aligned}
&z_{\zeta\bar\zeta} - \mu\,\overline{z_{\zeta\bar\zeta}} = (a - \mu\,\bar a)|z_\zeta|^2 = b|z_\zeta|^2 \Longrightarrow \\
&(z_{\bar\zeta} - \mu\,\overline{z_\zeta})_\zeta + \overline{z_\zeta}\mu(z)_\zeta = \overline{z_\zeta}(\mu_z z_\zeta + \bar\mu\,\mu_{\bar z}\, z_\zeta) \Longrightarrow \\
&(z_{\bar\zeta} - \mu\,\overline{z_\zeta})_\zeta = -\overline{z_\zeta}\mu_{\bar z}\,(\bar{z}_\zeta - \bar\mu\, z_\zeta).
\end{aligned}$$

Обозначая здесь $f := \bar{z}_\zeta - \bar\mu\, z_\zeta$, получаем, что $f_{\bar\zeta} = A\bar{f}$, $A \in C_c^1(\mathbb{C})$, $f(\infty) = 0$ (так как $\mu(z(\zeta)) = 0$ в окрестности ∞) $\Longrightarrow f \equiv 0$ (см. (7)) $\Longrightarrow z(\zeta)$ – решение уравнения дисков.

Итак, мы показали, что решение уравнения дисков сводится к решению уравнения $(**)$ с определённым условием на гладкость и поведение в бесконечности.

9. Существование голоморфных дисков. Решаем $(**)$ с условием $z(0) = 0$, но $z_\zeta(0) \neq 0$ (чтобы диск был невырожденным в 0). Замечаем, что это на самом деле уравнение на $z_\zeta =: \phi$, а именно, $\phi_{\bar z} = a(z)|\phi|^2$. Будем искать z в виде $z(\zeta) = \zeta + \overline{P(\bar\phi - 1)}$, предполагая, что $\phi - 1 \in L^3(\mathbb{C})$; тогда, действительно, $z_\zeta = \phi$ (что следует из свойства $(P\psi)_{\bar\zeta} = \psi$, см. (5)). Таким образом, обозначая $A(\phi) := a(\zeta + \overline{P(\bar\phi - 1)})\,|\phi|^2$, мы приходим к нелинейному уравнению на функцию ϕ:

$$\phi_{\bar\zeta} = A(\phi). \tag{$\star$}$$

Сначала решаем $(\star)$ в классе функций $\phi \in C(\mathbb{C})$, таких, что $|\phi(\zeta) - 1| < \varepsilon/(1 + |\zeta|)$ (и значит, $\phi - 1 \in L^3(\mathbb{C})$), параметр ε выберем дальше. Так как $|P(\bar\phi - 1)| \leqslant C_3 8\varepsilon|\zeta|^{1/3}$ (см. (5)), то $|\zeta + \overline{P(\bar\phi - 1)}| > \frac{1}{2}$ при $|\zeta| > 1$, если $C_3 8\varepsilon < \frac{1}{2} \Longrightarrow A(\phi(\zeta)) = 0$ при $\zeta \notin \mathbb{D}$. Фиксируем такое $\varepsilon,\ 0 < \varepsilon < 1$. Так как функцию $a(z)$ можно считать как угодно малой вместе с производными, то далее можно считать, что $|A(\phi)| < \varepsilon/8$ и $\|A(\phi) - A(\psi)\|_\infty \leqslant \frac{1}{2}\|\phi - \psi\|_\infty$ в нашем классе.

После такой подготовки уравнение $(\star)$ можно решать обычным методом последовательных приближений:

$$\phi_1 \equiv 1, \quad \phi_{n+1} = 1 + P_{\mathbb{D}}(A(\phi_n)),$$

Последовательность не выходит из описанного выше класса ϕ (см. (5)). Из той же оценки в (5) получаем

$$\|\phi_{n+1} - \phi_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{2}\|\phi_n - \phi_{n-1}\|_\infty \leqslant \dots \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}\|\phi_2 - \phi_1\|_\infty.$$
$$\Longrightarrow \exists \lim \phi_n =: \phi \in C(\mathbb{C}),\ |\phi(\zeta) - 1| \leqslant \varepsilon/(1 + |\zeta|),\ |A(\phi)| \leqslant \varepsilon/8.$$

Таким образом, $\phi = 1 + P_{\mathbb{D}}(A(\phi)) \Longrightarrow \phi_{\bar\zeta} = A(\phi)$, решение уравнения $(\star)$ в обобщённом смысле. Покажем, что на самом деле это обычное решение, пользуясь тем, что оператор $P_{\mathbb{D}}$ улучшает гладкость (лемма (5)):

$$\phi \in C(\mathbb{C}) \Longrightarrow A(\phi) \in C_c(\mathbb{C}) \Longrightarrow$$
$$\phi \in C^\alpha(\mathbb{C}),\ \alpha > 0,\ \Longrightarrow A(\phi) \in C^\alpha_c(\mathbb{C}) \Longrightarrow \phi \in C^1(\mathbb{C}).$$

Итак, уравнение $(\star)$ решено, $\Longrightarrow z(\zeta) = \zeta + \overline{P(\bar\phi - 1)}$ есть решение уравнения $(**)$, $z_\zeta = \phi \in C^1(\mathbb{C})$, $z(\infty) = \infty$. Дифференцируя

$P(\bar{\phi}-1)$ под знаком интеграла, получаем, что $z(\zeta) \in C^1(\mathbb{C})$:

$$z_{\bar\zeta} = -\frac{1}{\pi}\int \phi_{\bar\zeta}(\eta+\zeta)\frac{dS_\eta}{\bar\eta} = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} \frac{\phi_{\bar\eta}(\eta)\, dS_\eta}{\bar\eta-\bar\zeta}.$$

$\Longrightarrow$ $z(\zeta)$ – искомое решение уравнения голоморфных дисков, $z(0)=0$, невырожденное в 0, поскольку $|z_\zeta(0)| = |\phi(0)| \geqslant 1-\varepsilon > 0$. Таким образом, доказана

Теорема. *Всякая связная почти комплексная поверхность* (M, J) (*со структурой* J *класса* C^2) *является римановой поверхностью с* J*-голоморфными локальными координатами.*

Замечание. Условие $J \in C^2$ несущественно, утверждение справедливо для любой гёльдеровой структуры на поверхности. Однако, при $\dim_{\mathbb{R}} > 2$ оно *не* верно, и гладкость тут не при чём: далеко не всякое гладкое почти комплексное многообразие (даже с $\mathbb{R}$-аналитической структурой J) является комплексным.

10. Комплексные структуры и метрики. Сколько различных комплексных структур J может быть на гладкой поверхности M? В (3) мы выяснили этот вопрос для почти комплексных структур, а теперь видим, что для поверхностей слово "почти" можно опустить. Фиксировав на M ориентацию (=фиксировав 2-форму ω без нулей), мы получаем, согласно (3), следующее:

Теорема. *На любой гладкой ориентированной поверхности* M *имеется* $1:1$ *соответствие классов конформно эквивалентных римановых метрик* $[\rho]$ *и комплексных структур* J, *а именно,* $[\rho] \to J =$ *поворот на* $\frac{\pi}{2}$ (*углы относительно* ρ) *в положительном* (*дана ориентация*!) *направлении.*

* * * * *

Упражнения.

1. Используя оператор регуляризации $u \mapsto u^\varepsilon$, доказать правило Лейбница: если $u, v \in L^\infty(G \subset \mathbb{R}^n)$, а $Du, Dv \in L^1(G)$, где D – некоторая частная производная, то $D(uv) = uDv + vDu$ в смысле обобщённых функций.

2. $f \in C(\mathbb{C})$, $f(\infty) = 0$ (lim), $f_{\bar z} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$ и $|f_{\bar z}| \leqslant A|f|$, где $A \in L^p(\mathbb{C})$ с некоторым $p > 2$. Доказать, что $f \equiv 0$.

3. $z\colon \mathbb{C}_\zeta \to \mathbb{C}_z$ – отображение класса C^1, удовлетворяющее уравнению $z_{\bar\zeta} = \mu(z)\overline{z_\zeta}$ с $\mu \in C_c(\mathbb{C})$, $|\mu| < 1$, и такое, что $z(\zeta) - \zeta = O(1)$ при $\zeta \to \infty$. Доказать, что $z(\zeta)$ взаимно однозначно и $\zeta(z)$ – тоже класса C^1. Какому уравнению удовлетворяет $\zeta(z)$?

4.* Почти комплексная структура J в $\mathbb{C}^2_{z,w}$ определена базисом $(1,0)_J$-форм: dz и $dw + \overline{w}\, d\bar z$. Доказать, что любая J-голоморфная функция в выпуклой окрестности $(0,0)$ не зависит от w.

5. Определим на $\mathbb{C}$ почти комплексную структуру J, беря в качестве $(1,0)_J$-базиса форму $dz - \frac{z^2}{2+|z|^2}\, d\bar z$. Проверить, что отображение $\mathbb{D} \to \mathbb{C}$, $\zeta \mapsto z = \zeta/\sqrt{1-|\zeta|^2}$, является голоморфным $1:1$ отображением единичного круга $\mathbb{D}$ со стандартной комплексной структурой J_{st} на $(\mathbb{C}, J)$. Найти прообраз евклидовой площади $dx \wedge dy$ и образ евклидовой площади $d\xi \wedge d\eta$ при этом отображении.

6. $1:1$ отображение $\zeta \mapsto z = \zeta\sqrt{1+|\zeta|^{-2}}$ проколотого круга $\mathbb{D} \setminus 0$ на кольцо $K\colon 1 < |z| < \sqrt{2}$ переводит J_{st} в комплексную структуру J на K. Найти базисную $(1,0)_J$-форму на (K, J) и прообраз евклидовой площади $dx \wedge dy$ при этом отображении.

7. Комплексная структура J на $\mathbb{C}$ определена $(1,0)_J$-формой $dz + \mu\, d\bar z$, $|\mu| < 1$. Найти соответствующее базисное (комплексное) поле типа $(1,0)_J$ (линейную комбинацию $\partial/\partial z$, $\partial/\partial \bar z$). Выписать матрицу оператора $J\colon T\mathbb{C} \to T\mathbb{C}$ относительно базиса $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ при условии, что функция μ вещественная.

8. При тех же условиях найти риманову метрику на $\mathbb{C}$, $\rho(u,v)$, относительно которой J – ортогональный оператор.

9. Метрика ρ на $\mathbb{C}$ задана квадратичной формой $dx^2 + dx\,dy + dy^2$. Выписать оператор $J\colon T\mathbb{C} \to T\mathbb{C}$ соответствующей комплексной структуры (ориентация стандартная).

10. При том же условии выписать базисное комплексное $(1,0)_J$-поле и базисную $(1,0)_J$-форму.

11. $M\colon t = x^2 + y^2$ – поверхность в $\mathbb{R}^3_{x,y,t}$, J – как в упражнении 5.11. Найти глобальную J-голоморфную координату на M, т.е. $1:1$ J-голоморфное отображение (M, J) на $(\mathbb{C}, J_{\mathrm{st}})$ (тут удобно работать в полярных координатах на плоскости $\mathbb{R}^2_{x,y}$).

12*. ρ_1, ρ_2 – римановы метрики на $\mathbb{P}_1 \implies \exists$ диффеоморфизм $f\colon \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ такой, что $\forall$ полей u, v на $\mathbb{P}_1$ из $\rho_1(u,v) = 0$ следует, что $\rho_2(f_*u, f_*v) = 0$.

Вокруг оператора $\bar\partial$

Лекция 7

$\bar\partial$ на потоках – Вычеты мероморфных форм – Дивизоры мероморфных функций и форм – $\bar\partial$-проблема на плоскости

1. $\bar\partial$ на потоках. $\Lambda^p_c(M)$ – гладкие p-формы с компактными носителями на поверхности M (топология как в лекции 4(8)). $\Lambda'^p(M) := (\Lambda^{2-p}_c(M))^*$ – пространство потоков степени $p = 0, 1, 2$. В частности, $\Lambda'^0 = (\Lambda^2_c)^*$ – "обобщённые функции", например, функции $f \in L^1_{\text{loc}}(M)$ $(\phi \mapsto \int_M f\phi)$; $\Lambda'^2 = (C^\infty_c)^*$ – распределения, например, $[a]$, δ-функция в точке $a \in M$ $\;(h \mapsto h(a))$.

Самое интересное здесь пространство $\Lambda'^1 = (\Lambda^1_c)^*$, с разложением по бистепеням $T = T^{1,0} + T^{0,1}$, где $T^{1,0}(\alpha) := T(\alpha^{0,1})$, $T^{0,1}(\alpha) := T(\alpha^{1,0})$.

Напомним оператор дифференцирования: $T \in \Lambda'^p \Longrightarrow dT := (-1)^{p-1} T d$ (см. лекцию 4(8)) и по аналогии определим

$$\bar\partial T := (-1)^{p-1} T \bar\partial, \qquad p < 2,$$

и нуль для $p = 2$ (напоминаем, что у нас $\dim_{\mathbb{R}} M = 2$).

Посмотрим, как это выражается через d и разложение по бистепеням.

$p = 0$: $(\bar\partial f)(\phi) = -f(\bar\partial\phi) = -f(d(\phi^{1,0})) = (df)(\phi^{1,0}) \Longrightarrow \bar\partial f = (df)^{0,1}$ – в точности как для функций.

$p = 1$: $(\bar\partial T)(h) = T(\bar\partial h) = T((dh)^{0,1}) = T^{1,0}(dh) = d(T^{1,0})(h) \Longrightarrow \bar\partial T = d(T^{1,0})$, в точности, как для 1-форм.

Пример. Область $D \subset M$, $\;\partial D =: \gamma$ – кусочно-гладкая, ориентированная согласованно с D,

$f \in C^1(\overline{D}) \Longrightarrow$

$$\bar\partial(f[D])(\phi) = d(f[D])(\phi^{1,0}) = -\int_D f\, d\phi^{1,0} = \int_D df \wedge \phi^{1,0} - \int_\gamma f\phi^{1,0}$$

$$= \int_D \bar\partial f \wedge \phi - (f\gamma^{1,0})(\phi) \Longrightarrow \bar\partial(f[D]) = [D]\bar\partial f - f\gamma^{0,1},$$

в частности, $\gamma^{0,1} = -\bar\partial[D]$ и последнее представление есть просто формула Лейбница дифференцирования произведения (хотя у нас тут потоки, а не гладкие функции).

$f \in \mathcal{O}(D) \cap C(\overline{D}) \Longrightarrow \bar\partial(f[D]) = -f\gamma^{0,1}$, граничные значения голоморфной функции ("геометрический" множитель $-\gamma^{0,1}$ для данной области фиксирован). Последняя формула замечательна тем, что левая часть в ней определена для весьма широких классов функций (например, для голоморфных функций любого степенного роста возле границы, самый простой здесь класс $L^1(D)$); тем самым граничные значения (правая часть) можно считать равными левой части *по определению*! Но в ТФКП и рядом вы ничего не найдёте о граничных значениях функций из этих классов, хотя вот же оно определение…

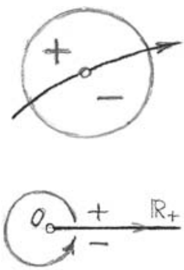

Рис. 16.

Из этого примера естественно получаем формулу для кусочно-голоморфных функций. γ – кусочно-гладкая кривая на M без самопересечений, $f \in \mathcal{O}(M \setminus \gamma)$ ограничена $\Longrightarrow \bar\partial[f] = -f^{\pm}\gamma^{0,1}$, $f^{\pm} = f^+ - f^-$, скачок предельных значений f с разных сторон γ (предельные значения ограниченной голоморфной функции с каждой стороны существуют почти всюду на γ и образуют функцию класса $L^\infty(\gamma)$ – ТФКП).

Посмотрим на примере, что же это за зверь $\gamma^{0,1}$?

Пример. $M = \mathbb{C}$, $\gamma = \mathbb{R}_+$, $f = \frac{1}{2\pi i}\ln z \Longrightarrow f^{\pm} \equiv -1 \Longrightarrow \bar\partial[f] = \mathbb{R}_+^{0,1}$. $\phi = a\,dx + b\,dy \Longrightarrow \phi^{1,0} = \frac{1}{2}(a - ib)\,dz \Longrightarrow \mathbb{R}_+^{0,1}(\phi) = \frac{1}{2}\int_0^\infty (a(x) - ib(x))\,dx$. Вот так аккуратно надо обращаться с этим объектом.

Аналогично голоморфным функциям, можно смотреть граничные значения голоморфных форм. Скажем, D – как выше, $\alpha \in \Omega^1(\overline{D}) \Longrightarrow \bar\partial([D]\alpha) = \gamma^{0,1} \wedge \alpha = [\gamma] \wedge \alpha$ (так как $\alpha = \alpha^{1,0}$, то $\gamma^{1,0} \wedge \alpha = 0$, ненулевых форм типа $(2,0)$ на р.п. не бывает).

2. Вычеты мероморфных форм (вспомним ТФКП). Мероморфная форма ϕ на римановой поверхности M – это поточечный оператор на векторных полях со значениями в сфере Римана $\mathbb{P}_1 = \mathbb{C} \cup \infty$, который в координатных окрестностях (U_j, z_j) представляется в виде $\phi = f_j\,dz_j$, где $f_j \in \mathcal{M}(U_j)$ – мероморфные функции в U_j. Линейное пространство всех мероморфных форм на M обозначаем через $\mathcal{M}^1(M)$. Форма, тождественно равная нулю, в ряде задач исключается, поэтому удобно ввести также множество $\mathcal{M}^1_*(M) = \mathcal{M}^1(M) \setminus 0$.

Полюса формы ϕ образуют дискретное (локально-конечное) подмножество в M (равное объединению полюсов всех f_j).

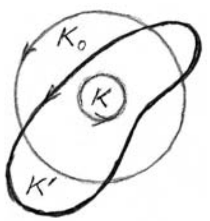

Рис. 17.

Пусть $a \in M$ и γ – граница замкнутого координатного круга K с центром a, в котором ϕ не имеет полюсов, за исключением, быть может самой точки $a \Longrightarrow \phi \in \Omega^1(K \setminus a) \Longrightarrow \int_\gamma \phi$, по формуле Стокса, не зависит от радиуса $K \Longrightarrow$ по той же формуле, он не зависит и от выбора координаты (если K' – такой же круг относительно другой координаты, а K настолько мал, что лежит внутри K', то $\int_{\gamma'} \phi = \int_\gamma \phi$ по формуле Стокса в $K' \setminus K$). Таким образом, корректно (независимо от координат) определена величина

$$\operatorname{res}_a \phi := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \phi,$$

которая называется *вычетом* мероморфной формы ϕ в точке a. Если a – не полюс, то $\phi \in \Omega^1(K)$ и, значит, вычет равен нулю (опять же по формуле Стокса). Отметим, что понятие вычета мероморфной функции f, которое фигурирует в ТФКП, не вполне корректно, потому как оно не инвариантно даже относительно линейной замены координат; на самом деле там речь идёт о вычете мероморфной формы $f\,dz$ и противоречий не возникает, поскольку координата z в курсе ТФКП всё время предполагается фиксированной.

Теорема (о сумме вычетов). *D – область с кусочно-гладкой согласованно ориентированной границей на римановой поверхности M, $\phi \in \mathcal{M}^1(M)$ не имеет полюсов на $\partial D \Longrightarrow \int_{\partial D} \phi = 2\pi i \sum_{a\in D} \operatorname{res}_a \phi$.*

$\lhd$ $K_j \subset D$ – замкнутые попарно не пересекающиеся координатные круги с центрами в полюсах ϕ. Формула Стокса в $D \setminus \bigcup K_j$. $\rhd$

Следствие ("о полной сумме вычетов"). *M – компактная риманова поверхность, $\phi \in \mathcal{M}^1(M) \Longrightarrow \sum_{a\in M} \operatorname{res}_a \phi = 0$.*

Предложение. *ϕ – мероморфная форма на римановой поверхности M, все полюса ϕ простые $\Longrightarrow \bar\partial\phi = 2\pi i \sum_{a\in M} (\operatorname{res}_a \phi)[a]$ в смысле потоков.*

Напоминаем, что $[a] \in \Lambda'^2(M)$ – это δ-функция в точке $a \in M$; сумма справа локально конечная, так как множество полюсов ϕ дискретно.

$\lhd$ (U, z) – координатная окрестность с центром в полюсе a формы $\phi \Longrightarrow$ там $\phi = f\frac{dz}{z}$, $f \in \mathcal{O}(U) \Longrightarrow$

$$
\begin{aligned}
(\bar\partial\phi)(h) &= \int f\frac{dz}{z} \wedge \bar\partial h \\
&= \int (fh)_{\bar z} \frac{1}{z} dz \wedge d\bar z = 2\pi i f(0)h(0), \quad \forall h \in \Lambda^0_c(U)
\end{aligned}
$$

(последнее равенство – формула Коши–Грина). Остаётся заметить, что $f(0) = \operatorname{res}_a \phi$. $\rhd$

3. Дивизоры мероморфных функций и форм. Функция $f \in \mathcal{M}_*(M) = \mathcal{M}(M) \setminus 0$, $a \in M$, z – локальная координата с центром $a \Longrightarrow f = z^k h$, $h \in \mathcal{O}(U_a \ni a)$, $h(a) \neq 0$. Число k, очевидно, не зависит от выбора (голоморфной) координаты и называется *кратностью* мероморфной функции f в точке a, обозначаем $\operatorname{mult}_a f$.

$k > 0$, если $f(a) = 0$, $k < 0$, если a – полюс, $f(a) = \infty$; $k = 0$ – когда ни то, ни сё. (Обычно полюс кратности k называют полюсом *порядка* $|k|$.)

Дивизором мероморфной функции $f \in \mathcal{M}_*$ называется обычно формальная сумма $(f) := \sum_{a\in M} (\operatorname{mult}_a f)\,[a]$, но мы её рассматриваем не формально, а как поток степени 2 на M (можно и по-другому – как локально-конечную 0-цепь, но для нас рабочим будет язык потоков). Число $\sum_{a\in M} \operatorname{mult}_a f =: \deg(f)$ называется *степенью* дивизора (f) функции f.

Аналогично, для мероморфных форм: $\phi \in \mathcal{M}^1_*(M) \implies \phi = z^k h\, dz$ в U_a, число k не зависит от координат и называется кратностью формы ϕ в точке a, обозначаем $\operatorname{mult}_a \phi$. Дивизор $(\phi) := \sum_{a\in M} (\operatorname{mult}_a \phi)[a]$ и степень $\deg(\phi) := \sum_{a\in M} \operatorname{mult}_a \phi$.

Вернёмся к функциям. В малой координатной окрестности с центром в точке $a \in M$ имеем представление $f = z^k h,\ \ h(0) \neq 0, \infty \implies \frac{df}{f} = k\frac{dz}{z} + \frac{dh}{h}$, последняя форма голоморфна в окрестности a. $\implies \operatorname{mult}_a f = \operatorname{res}_a \frac{df}{f}$ и по теореме о полной сумме вычетов получается:

Теорема. *M – компактная риманова поверхность, $f \in \mathcal{M}_*(M) \implies \deg(f) = \sum_{a\in M} \operatorname{mult}_a f = 0$, т.е. степень дивизора любой мероморфной функции равна нулю.*

Следствие (равнораспределение значений). *M – компактная риманова поверхность, $f \in \mathcal{M}(M)$, $f \not\equiv \mathrm{const} \implies \forall c \in \mathbb{P}_1$ число точек на M, в которых $f = c$, с учётом кратностей, не зависит от c (и называется* степенью *голоморфного отображения $f\colon M \to \mathbb{P}_1$).*

$$\lhd \sum_{f(a)=c} \operatorname{mult}_a(f-c) = -\sum_{f(b)-c=\infty} \operatorname{mult}_b(f-c) = -\sum_{f(b)=\infty} \operatorname{mult}_b f. \rhd$$

Вернёмся ещё раз к представлению в координатной окрестности точки $a \in M$: $f = z^k h,\ \ \frac{df}{f} = k\frac{dz}{z} + \frac{dh}{h}$ и применим к этому оператор $\bar\partial$. По предложению (2), получаем $\bar\partial\frac{\partial f}{f} = k\bar\partial\frac{dz}{z} = k2\pi i[a]$; суммируем по всем точкам и в результате:

Теорема (формула Пуанкаре–Лелона). *M – произвольная риманова поверхность, $f \in \mathcal{M}_*(M) \implies$*

$$(f) = \frac{i}{\pi}\,\partial\bar\partial \log|f|.$$

Итог последних двух пунктов – сведение задач о существовании специальных мероморфных форм и функций к разрешимости уравнений в частных производных:

Найти мероморфную форму с заданными полюсами и вычетами = решить $\bar\partial$-проблему

$$\bar\partial\phi = 2\pi i \sum c_j[a_j], \qquad c_j \in \mathbb{C}.$$

Найти мероморфную функцию с данным дивизором = решить $\partial\bar\partial$-проблему

$$\frac{i}{\pi}\,\partial\bar\partial\log|f| = \sum n_j[a_j], \qquad n_j \in \mathbb{Z}.$$

4. $\bar\partial$-проблема на плоскости. В лекции 5(5) показано, что оператор Коши–Грина $P_{\mathbb{C}}$ решает $\frac{\partial}{\partial\bar z}$-проблему для гладких функций с компактными носителями (этот класс мы обозначаем через $\Lambda^0_c(\mathbb{C})$, единым образом с формами). Точнее, в этом классе $P_{\mathbb{C}}\frac{\partial}{\partial\bar z} = \frac{\partial}{\partial\bar z}P_{\mathbb{C}} = \mathbb{I}$, тождественный оператор.

Обобщим это на формы с компактными носителями. Полагаем, по определению, $P_{\mathbb{C}}\Lambda^{1,0}_c(\mathbb{C}) := 0$.

$\phi \in \Lambda^{0,1}_c(\mathbb{C}) \Longrightarrow \phi = h\,d\bar z$ и мы, по определению, полагаем $P_{\mathbb{C}}\phi := P_{\mathbb{C}}h$. Тогда $P_{\mathbb{C}}\bar\partial f = P_{\mathbb{C}}(f_{\bar z}\,d\bar z) := P_{\mathbb{C}}f_{\bar z} = f \Longrightarrow P_{\mathbb{C}}\bar\partial = \mathbb{I}$ в классе $\Lambda^0_c(\mathbb{C})$.

$\psi \in \Lambda^2_c(\mathbb{C}) \Longrightarrow \psi = h\,dz\wedge d\bar z$ и, по определению, $P_{\mathbb{C}}\psi := -(P_{\mathbb{C}}h)\,dz$. Опять, $P_{\mathbb{C}}\bar\partial\phi = P_{\mathbb{C}}\,d\phi^{1,0} = P_{\mathbb{C}}\,d(h\,dz) = P_{\mathbb{C}}(h_{\bar z}\,d\bar z\wedge dz) := (P_{\mathbb{C}}h_{\bar z})\,dz = \phi^{1,0} \Longrightarrow P_{\mathbb{C}}\bar\partial = \mathbb{I}$ и в классе $\Lambda^{1,0}_c(\mathbb{C})$.

Перенесём эти определения на потоки (по двойственности). На классах Λ'^0 и $\Lambda'^{1,0}$ полагаем, по определению, $P_{\mathbb{C}}\Lambda'^0 = P_{\mathbb{C}}\Lambda'^{1,0} = 0$.

Далее, по бистепеням, для потоков с компактными носителями (нам этого будет достаточно).

$T \in \Lambda'^{0,1}_c(\mathbb{C}) \Longrightarrow P_{\mathbb{C}}T := -TP_{\mathbb{C}} \in \Lambda'^0(\mathbb{C})$, с носителем не обязательно компактным, $\Longrightarrow \bar\partial P_{\mathbb{C}}T \in \Lambda'^{0,1}$ и

$$(\bar\partial P_{\mathbb{C}}T)(\phi) = (\bar\partial P_{\mathbb{C}}T)(\phi^{1,0}) = -(P_{\mathbb{C}}T)(d\phi^{1,0}) := T(P_{\mathbb{C}}\bar\partial\phi) = T\phi$$

т.е. $\bar\partial P = \mathbb{I}$ в классе $\Lambda'^{0,1}_c$.

$T \in \Lambda'^2_c \Longrightarrow P_{\mathbb{C}}T := TP_{\mathbb{C}} \in \Lambda'^{1,0}$ (так как $P_{\mathbb{C}}\Lambda^{1,0} := 0$) и

$(\bar\partial P_{\mathbb{C}}T)(h) = (P_{\mathbb{C}}T)(\bar\partial h) := T(P_{\mathbb{C}}\bar\partial h) = T(h)$, т.е. опять $\bar\partial P_{\mathbb{C}} = \mathbb{I}$.

Предложение. *Уравнение $\bar\partial S = T$ в потоках на плоскости $\mathbb{C}$, с $T \in \Lambda'^{0,1}_c(\mathbb{C})$ или $\in \Lambda'^2_c(\mathbb{C})$ решается оператором $P_{\mathbb{C}}$,*

$S = P_{\mathbb{C}}T$. *Это решение имеет компактный носитель тогда и только тогда, когда* $T\left(\frac{dz}{z-a}\right) = 0$, *соответственно* $T\left(\frac{1}{z-a}\right) = 0$, *для всех* a *в окрестности* ∞ $(|a| \gg 1)$.

$\lhd$ Первая часть доказана выше. Что касается компактности носителя:

$$(P_{\mathbb{C}}T^2)(\phi) = T^2\left(-\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\phi(\zeta)\wedge d\zeta}{\zeta - z}\right)$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int T^2\left(\frac{1}{z-\zeta}\right)\phi(\zeta)\wedge d\zeta,$$

так как T^2 – линейный непрерывный функционал. Если $|\zeta| \gg 1$ на $\operatorname{supp}\phi$, то справа стоит $0 \Longrightarrow$ (по определению, лекция 4(8)) $P_{\mathbb{C}}T^2 = 0$ в $\{|z| > R\}$, $R \gg 1$.

Для потоков $T^{0,1}$ – такое же рассуждение. $\rhd$

Отметим, что регуляризация потоков на плоскости перестановочна с $\bar\partial$ (см. лекцию 4(9)) и мы имеем следующий вариант теоремы де Рама из лекции 4:

Следствие. $T \in \Lambda_c'^{p,q}(\mathbb{C})$, $q > 0$, $T = 0$ *при* $|z| > R \Longrightarrow T - T^\varepsilon = \bar\partial S_\varepsilon$, *где* S_ε *– поток с носителем в круге* $|z| \leqslant R + \varepsilon$.

$\lhd$ Поток $T - T^\varepsilon$ имеет компактный носитель, поэтому определён поток $S_\varepsilon := P_{\mathbb{C}}(T - T^\varepsilon)$, для которого, согласно предложению, $\bar\partial S_\varepsilon = T - T^\varepsilon$.

О носителе: $T \in \Lambda_c'^{0,1}(\mathbb{C})$, $\psi = h\,dz\wedge d\bar z \Longrightarrow S_\varepsilon(\psi) = (T - T^\varepsilon)((-P_{\mathbb{C}}h)\,dz) = T(((P_{\mathbb{C}}h)^\varepsilon - P_{\mathbb{C}}h)\,dz)$. Если $h = 0$ в окрестности $|z| \leqslant R + \varepsilon$, то $P_{\mathbb{C}}h \in \mathcal{O}(|z| \leqslant R + \varepsilon) \Longrightarrow (P_{\mathbb{C}}h)^\varepsilon = P_{\mathbb{C}}h$ в окрестности $|z| \leqslant R$ по теореме о среднем из ТФКП (напомним, что усредняющая функция λ в определении регуляризации, лекция 4(9), зависит только от $|z|$ и $\int \lambda\,dS_z = 1$) $\Longrightarrow S_\varepsilon(\psi) = 0$.

Аналогично для потоков $T \in \Lambda_c'^{2}(\mathbb{C})$ (только там появятся голоморфные формы вместо голоморфных функций, но теорема о среднем та же). $\rhd$

* * * * *

Упражнения.

1. $\phi \in \mathcal{M}_*(M)$, $\lambda \in C_c^1(M)$, $\lambda = 1$ в окрестности полюсов $\phi \Longrightarrow \int_M \bar\partial\lambda\wedge\phi = 2\pi i\sum_{a\in M}\operatorname{res}_a\phi$.

2. Функция u на р.п. гармоническая (т.е. $\partial\bar\partial u = 0$) $\Longleftrightarrow$ форма ∂u голоморфна. На односвязной р.п. всякая вещественная гармоническая функция есть вещественная часть некоторой голоморфной функции.

3. u, v – вещественные гармонические функции на р.п. такие, что $u + iv \in \mathcal{O}(M)$. Проверить равенство $dv = d^c u$, где $d^c := i(\bar\partial - \partial)$. Доказать, что для $u \not\equiv c$ (c – константа) множество $\{u = c\}$ не может содержать замкнутой кривой.

4. Пространство голоморфных форм на компактной р.п. рода g конечномерно ($\dim_{\mathbb{C}} \Omega^1(M) \leqslant 2g$).

5. На компактной р.п. M $\deg(\phi) := \sum_{a\in M} \operatorname{mult}_a \phi$ не зависит от $\phi \in \mathcal{M}^1_*(M)$.

6. Замыкание M в $\mathbb{P}_2$ поверхности $\{w^2 = \prod_0^{2g}(z - c_j)\} \subset \mathbb{C}^2$, c_j различны, $c_0 = 0$, есть компактная р.п., на которой функция z мероморфна. Указать локальные голоморфные координаты в окрестности каждой точки M. Выписать дивизоры функций z и w на M.

7. Выписать базис голоморфных форм на р.п. M из упражнения 6.

8. Там же, посчитать вычеты формы dz; выписать дивизоры форм dz и dw и найти их степени.

9. То же (что в упражнении 8) на поверхности $z_0^n + z_1^n + z_2^n = 0$, $z = z_1/z_0$, $w = z_2/z_0$ в $\mathbb{P}_2$.

10. Доказать лемму Дольбо для потоков: уравнение $\bar\partial S = T \in \Lambda'^{p,1}(\mathbb{D})$ имеет решение в круге $\theta\mathbb{D}$, $\forall\, 0 < \theta < 1$. То же для $\theta = 1$.

11. γ – гладкая замкнутая кривая на компактной р.п., не гомологичная нулю $\Longrightarrow$ не существует ограниченной голоморфной функции f на $M \setminus \gamma$, скачок которой на γ равен 1. А что если $\gamma \sim 0$?

12. р.п. M такова, что существует голоморфное вложение $f\colon \mathbb{C} \hookrightarrow M$.

a) M компактна $\Longrightarrow$ M биголоморфно эквивалентна $\mathbb{P}_1$.

b) M не компактна $\Longrightarrow$ $M = f(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$.

13.* То же (кроме $M = f(\mathbb{C})$) при условии существования непостоянного голоморфного отображения $f\colon \mathbb{C} \to M$.

Лекция 8

Когомологии Дольбо в потоках – Замкнутость образа $\bar\partial$ – Двойственность Серра – Расслоения и формы – Потоки и расслоения

5. Когомологии Дольбо в потоках. Поток T на комплексном многообразии M называется $\bar\partial$-замкнутым, если $\bar\partial T = 0$ (такие потоки составляют ядро $\ker\bar\partial$ оператора $\bar\partial$). Поток T называется $\bar\partial$-точным, если $T = \bar\partial S$ для некоторого потока S. Так как $\bar\partial^2 = 0$ на формах ($(\bar\partial)^2\phi^{p,q} = (d^2\phi^{p,q})^{p,q+2} = 0$), то это же верно и на потоках, и потому можно определить факторпространства

$$H'^{p,q}(M) := (\bar\partial\text{-замкнутые потоки бистепени } (p,q))/(\bar\partial\text{-точные}),$$

которые называются когомологиями Дольбо (в потоках) многообразия M. Аналогично определяются когомологии Дольбо с компактными носителями,

$$H_c'^{p,q}(M) := (\ker\bar\partial)\cap\Lambda_c'^{p,q}(M)/\bar\partial\Lambda_c'^{p,q-1}$$

и для гладких форм, соответственно, $H_c^{p,q}$.

Теорема Дольбо. *На любом комплексном многообразии $H'^{p,q} = H^{p,q}$ и $H_c'^{p,q} = H_c^{p,q}$. Точнее, для всякого потока T и всякой окрестности $U\supset\operatorname{supp}T$ существует гладкая форма $\widetilde T$ с носителем в U такая, что $T-\widetilde T = \bar\partial S$, причём $\operatorname{supp}S\subset U$ и S – гладкая форма, если T – гладкая форма.*

$\lhd$ (для римановых поверхностей). (U_j) – локально-конечное координатное покрытие дисками, столь мелкое, что $\overline{U_j}\subset U$, если $U_j\cap\operatorname{supp}T$ непусто. (λ_j) – соответствующее разбиение единицы, $z_j\colon U_j\to\mathbb{D}\subset\mathbb{C}$ голоморфно, $1:1$.

$T_j = (z_j)_*(\lambda_j T)$ – поток в плоскости $\mathbb{C}$ с носителем в круге $\mathbb{D}$ ($T_j(\phi) := T(\lambda_j z_j^*\phi)$ для тест-форм ϕ в $\mathbb{C}$). Подберём $\varepsilon_j > 0$ столь малыми, что регуляризации $T_j^{\varepsilon_j}$ сосредоточены в $\mathbb{D}$; тогда $T_j - T_j^{\varepsilon_j} = \bar\partial S_j'$ причём $\operatorname{supp}S_j'\in\mathbb{D}$ (см. лекцию 7(4)).

Форма $\widetilde T_j := z_j^*(T_j^{\varepsilon_j})$ в U_j и равная нулю вне U_j, гладкая на всей M, $\lambda_j T - \widetilde T_j = \bar\partial(S_j := z_j^* S_j')$ причём носители $\widetilde T_j, S_j$ лежат в U_j. Поэтому $\widetilde T := \sum_j \widetilde T_j$ – гладкая форма на M с носителем в U и $T - \widetilde T = \bar\partial(S := \sum S_j)$, $\operatorname{supp}S\subset U$.

Остаётся доказать утверждение о гладкости. Пусть сначала $\phi \in \Lambda^{0,1}$ и $\phi = \bar\partial S$ в смысле потоков. В окрестности произвольной точки $a \in M$ существует гладкая функция f такая, что там $\phi = \bar\partial f$ (например, $f = P_{\mathbb{C}}(\lambda\phi)$, где гладкая функция λ сосредоточена в координатной окрестности a, $\lambda = 1$ в меньшей окрестности a). $\Longrightarrow \bar\partial(S - f) = 0$ в окрестности $a \Longrightarrow S = f + h$, h голоморфна в окрестности a (по лемме Вейля) $\Longrightarrow S$ как поток сопадает с гладкой функцией.

Пусть теперь $\psi \in \Lambda^2$. $\Longrightarrow \psi = \bar\partial\phi$ в окрестности a ($\phi = P_{\mathbb{C}}(\lambda\psi)$) $\Longrightarrow$ там $\bar\partial(S - \phi) = 0$, $S - \phi \in \Lambda'^{1,0} \Longrightarrow S - \phi =: \alpha$ – голоморфная форма в окрестности a (опять по лемме Вейля) $\Longrightarrow S = \phi + \alpha$ – гладкая форма. $\rhd$

Замечание. Во второй части доказано, что *на римановой поверхности* всякий поток S, решающий уравнение $\bar\partial S = \phi$ с гладкой правой частью ϕ, сам тоже гладкий. На комплексном многообразии размерности $\dim_{\mathbb{C}} > 1$ это верно только для $q = 1$; для $q > 1$ далеко не все решения гладкие.

6. Замкнутость образа $\bar\partial$. Смотрим образ оператора $\bar\partial\colon \Lambda^{p,0}_c \to \Lambda^{p,1}_c$ на римановой поверхности M. Пусть (U_j, z_j) – координатные карты, образующие локально конечное покрытие M, причём $\overline{U}_j$ – компакты и $z_j\colon U_j \to \mathbb{D}$ – голоморфные, $1:1$. Пусть (e_j) – соответствующее разбиение единицы, $\lambda_j := \sqrt{e_j}$ и P_j – оператор Коши–Грина в (U_j, z_j) (см. лекцию 7(4)). Положим $P\phi := \sum_j \lambda_j P_j(\lambda_j\phi)$, тогда $P\phi \in \Lambda^{p,0}_c$, $\forall\, \phi \in \Lambda^{p,1}_c$.

Лемма. *$P\bar\partial = \mathbb{I} - R$, где R – компактный оператор: из всякой равномерно ограниченной последовательности (ϕ_ν), $\|\phi_\nu\|_{C(M)} \leqslant A < \infty$, (на M фиксирована некоторая метрика) с носителями в фиксированном компакте $K \Subset M$ можно выделить подпоследовательность $(\phi_{\nu'})$ такую, что последовательность $(R\phi_{\nu'})$ сходится равномерно на M.*

$\lhd$ $P\bar\partial\phi = \sum \lambda_j P_j(\lambda_j\bar\partial\phi) = \sum \lambda_j P_j(\bar\partial(\lambda_j\phi)) - \sum \lambda_j P_j(\bar\partial\lambda_j \wedge \phi)$. Первая сумма справа равна ϕ ($P_j\bar\partial = \mathbb{I}$ в $\Lambda^{p,1}_c(U_j)$, см. лекцию 7(4)), вторую сумму обозначим через $R\phi$.

Если $|\phi_\nu| \leqslant A$, то $P_j((\bar\partial\lambda_j) \wedge \phi_\nu)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $1/2$ (например) и константой $\leqslant CA$ (см. лекцию 5) $\Longrightarrow$ семейство $(R\phi_\nu)$ равностепенно непрерывно (и равномерно ограничено) $\Longrightarrow$ по теореме Арцела – Асколи, оно содержит равномерно сходящуюся подпоследовательность. $\rhd$

Предложение. *Образ* $\operatorname{im}(\bar\partial\colon \Lambda_c^{p,0} \to \Lambda_c^{p,1})$ *на римановой поверхности* M *замкнут в топологии* $\Lambda_c^{p,1}(M)$.

$\lhd$ Пусть последовательность $\bar\partial\phi_\nu$ сходится к некоторой форме $\psi \not\equiv 0$ в топологии $\Lambda_c^{p,1}$; нам надо показать, что $\psi = \bar\partial\phi$ для некоторой $\phi \in \Lambda_c^{p,0}$.

Сходимость в $\Lambda_c^{p,1}$ означает, в частности, что существует компакт $K \Subset M$ такой, что все $\phi_\nu = 0$ вне K. Согласно лемме, $\phi_\nu = P\bar\partial\phi_\nu + R\phi_\nu$. Если все $|\phi_\nu| \leqslant A$ на M, то, переходя к подпоследовательности, можно считать, что $R\phi_\nu \rightrightarrows r$, а тогда и $\phi_\nu \rightrightarrows P\psi + r =: \phi$, форма с компактным носителем. Оператор $\bar\partial$ на потоках непрерывен, поэтому $\bar\partial\phi = \lim\bar\partial\phi_\nu = \psi$. Согласно (5), $\phi \in \Lambda_c^{p,0}$.

Предположим теперь, что $\|\phi_\nu\| =: A_\nu \to \infty$ и M не компакт. Опять можем считать, что $R(\phi_\nu/A_\nu) \rightrightarrows r$. Так как $P\bar\partial(\phi_\nu/A_\nu) \to 0$, то $\phi_\nu/A_\nu \rightrightarrows r \Longrightarrow \bar\partial\phi_\nu/A_\nu \to \bar\partial r$ в смысле потоков $\Longrightarrow \bar\partial r = 0 \Longrightarrow r \in (\mathcal{O}$ или $\Omega^1)(M)$ по лемме Вейля. Но r имеет компактный носитель $\Longrightarrow r \equiv 0$ и мы получаем противоречие с тем, что $\phi_\nu/A_\nu \rightrightarrows r$, но $\|\phi_\nu/A_\nu\|_{C(M)} = 1$.

Пусть теперь M – компакт. Формы ϕ_ν можно заменить на $\tilde\phi_\nu = \phi_\nu - \alpha_\nu$, где $\bar\partial\alpha_\nu = 0$ и $\|\phi_\nu - \alpha_\nu\|_{C(M)} \leqslant 2\inf\{\|\phi_\nu - \alpha\|_{C(M)} \colon \bar\partial\alpha = 0\}$. Если и теперь предположить, что $\tilde A_\nu \to \infty$, то, по подпоследовательности, $\tilde\phi_\nu/\tilde A_\nu \rightrightarrows r \Longrightarrow \bar\partial r = 0$ в смысле потоков $\Longrightarrow$ по лемме Вейля, форма r гладкая и $\bar\partial r = 0$. Но тогда, согласно выбору α_ν, $\inf\{\|\tilde\phi_\nu/\tilde A_\nu - \alpha\| \colon \bar\partial\alpha = 0\} \geqslant 1/2$ и, значит, эта последовательность не может сходиться к r, $\bar\partial r = 0$. Опять противоречие. $\rhd$

7. Двойственность Серра. Небольшое отступление в область функционального анализа.

$A\colon L_1 \to L_2$ – линейное непрерывное отображение (оператор) линейных топологических пространств, $\operatorname{im} A := A(L_1)$, $\ker A := \{v_1 \colon Av_1 = 0\}$, $\operatorname{coker} A := L_2/\operatorname{im} A$. L_j^* – сопряжённые пространства (линейные непрерывные функции (функционалы) на L_j) $A^*\colon L_2^* \to L_1^*$ – сопряжённый оператор, $(A^* f_2)(v_1) := f_2(Av_1)$ (A^* линейный, непрерывный, что легко проверяется).

Лемма. *Если* $\operatorname{im} A$ *замкнут* (*в* L_2), *то* $\ker(A^*) \cong (\operatorname{coker} A)^*$. *Если к тому же пространство* L_2 *локально выпуклое*, *то* $\operatorname{im} A^*$ *тоже замкнут* (*в* L_1^*).

(Здесь и далее $\cong$ означает изоморфизм, т.е. линейный гомеоморфизм.)

$\lhd$ $f \in \ker A^* \Longrightarrow f(Av_1) \equiv 0$ на L_1, т.е. $f|_{\operatorname{im} A} = 0$. Поэтому если $[v_2]$ – класс эквивалентности из $L_2/\operatorname{im} A$, то корректно определён функционал $\tilde f([v_2]) := f(v_2)$ и мы получаем отображение (линейное непрерывное) $f \mapsto \tilde f$, $\ker A^* \to (\operatorname{coker} A)^*$. Оно $1:1$, так как любому $\tilde f \in (L_2/\operatorname{im} A)^*$ соответствует $f \in L_2^*$, $f(v_2) := \tilde f([v_2])$, $f|_{\operatorname{im} A} = 0$.

Вторая часть: $f_1 = A^* f_2$ для некоторого $f_2 \in L_2^*$, $v_1 \in \ker A \Longrightarrow f_1(v_1) = (A^* f_2)(v_1) = f_2(Av_1) = 0 \Longrightarrow \operatorname{im} A^*|_{\ker A} = 0$. Обратно, пусть $f_1 \in L_1^*$, $f_1|_{\ker A} = 0$, тогда ему однозначно соответствует функционал $\tilde f_1$ на $\operatorname{im} A$, $\tilde f_1(Av_1) := f_1(v_1)$. Если пространство L_2 локально выпуклое, то, по теореме Хана–Банаха, существует функционал $f_2 \in L_2^*$ такой, что $f_2 = \tilde f_1$ на $\operatorname{im} A$, т.е. $f_2(Av_1) = f_1(v_1) \Longrightarrow f_1 = A^* f_2$ и таким образом мы показали, что $\operatorname{im} A^* = \{f_1 \colon f_1|_{\ker A} = 0\}$, а это, очевидно, замкнутое подпространство в L_1^*. $\rhd$

В качестве A возьмём оператор $\bar\partial \colon \Lambda_c^{1-p,0} \to \Lambda_c^{1-p,1}$; сопряжённым к нему, A^*, будет $\bar\partial' := (-1)^{p-1}\bar\partial$, $\bar\partial' \colon \Lambda'^{p,0} \to \Lambda'^{p,1}$. Пространство потоков рефлексивно (см. лекцию 4(8)), $(\Lambda')^* = \Lambda_c$, $(\Lambda_c)^* =: \Lambda'$, и поэтому также $\bar\partial = (\bar\partial')^*$.

Теорема. *На любой римановой поверхности M*

$$H_c^{1,1}(M) \cong (\mathcal{O}(M))^* \quad \text{и} \quad H_c^{0,1}(M) \cong (\Omega^1(M))^*.$$

На некомпактной римановой поверхности

$$H^{1,1}(M) = H^{0,1}(M) = 0.$$

$\lhd$ $\ker \bar\partial'|\Lambda'^{0,0} = \mathcal{O}(M)$ по лемме Вейля, $\operatorname{coker}(\bar\partial \colon \Lambda_c^{1,0} \to \Lambda_c^{1,1}) = H_c^{1,1}$ – отсюда, согласно лемме, первое равенство.

$\ker \bar\partial'|\Lambda'^{1,0} = \Omega^1(M)$ опять по лемме Вейля, $\operatorname{coker}(\bar\partial \colon \Lambda_c^{0,0} \to \Lambda_c^{0,1}) = H_c^{0,1}$ – и отсюда второе равенство.

Образ $\operatorname{im}(\bar\partial' \colon \Lambda'^{p,0} \to \Lambda'^{p,1})$ замкнут (все пространства здесь локально выпуклые) $\Longrightarrow \ker \bar\partial = (\operatorname{coker} \bar\partial')^*$ по лемме. На некомпактной р.п. M $\ker \bar\partial|\Lambda_c^{p,0} = \{h \in \mathcal{O}(M)$ $(p=0)$ или $\Omega^1(M)$ $(p=1)$: $h = 0$ вне некоторого компакта$\} = 0$ по теореме единственности. $\rhd$

Следствие. *На компактной римановой поверхности $H^{1,1} \cong \mathbb{C}$ и $H^{0,1} \cong (\Omega^1)^*$. Точнее, уравнение $\bar\partial S = T \in \Lambda'^{p,1}$*

при $p = 1$ разрешимо $\Longleftrightarrow$ $T(1) = 0$;

при $p = 0$ разрешимо $\Longleftrightarrow T(\alpha) = 0 \ \forall \alpha \in \Omega^1$.

8. Расслоения и формы со значениями в сечениях. M, $\mathcal{L}$ – комплексные многообразия, $\mathcal{L} \xrightarrow{\pi} M$ – голоморфное отображение (“проекция”) со следующими свойствами: существует открытое покрытие $M = \bigcup U_j$ и биголоморфные отображения $\phi_j \colon \pi^{-1}(U_j) \to U_j \times \mathbb{C}^r_{w_j}$ такие, что если $U_j \times \mathbb{C}^r \xrightarrow{\pi_1} U_j$ – обычная проекция, то $\pi = \pi_1 \circ \phi_j$. (Если (U_j, z_j) – координатные карты, то в таком случае $(\pi^{-1}(U_j), (z_j, w_j))$ – координатные карты на $\mathcal{L}$.)

$\mathcal{L}$ – *голоморфное векторное расслоение* ранга r над M, если замены “вертикальных” координат-столбцов w_j имеют вид $w_k = g_{kj}(p)\, w_j,\quad p \in U_j \cap U_k$, где g_{kj} – матрицы $r \times r$ с элементами, голоморфными в $U_j \cap U_k$. (Тогда, очевидно, $g_{kj} g_{jk} = \mathbb{I}$, $g_{kj} g_{jl} g_{lk} = \mathbb{I}$.) Указанное покрытие (U_j) назовём тривиализующим для расслоения $\mathcal{L}$, а набор (U_j, ϕ_j) – локальной тривиализацией $\mathcal{L}$.

Таким образом слои $\mathcal{L}_p := \pi^{-1}(p),\ \ p \in M$, расслоения $\mathcal{L}$ имеют структуру r-мерного комплексного линейного пространства, но координатные функции в нём определены не однозначно, а только после выбора тривиализующей окрестности в базе и тривиализующего отображения в слое, а при переходе к другой тривиализации меняются линейно.

(Гладкие, непрерывные и т.п. расслоения определяются так же, только надо всюду заменить голоморфность на гладкость, непрерывность и т.п.)

Точки $\mathcal{L}$ с локальными координатами $(z_j, 0)$ образуют *нулевое сечение* расслоения $\mathcal{L}$, которое биголоморфно проектируется на M. В общем же, сечение $s \colon U \to \mathcal{L}$ над открытым множеством $U \subset M$ (непрерывное, гладкое, голоморфное, мероморфное и т.п.) – это такое отображение, что $(\pi \circ s)(p) \equiv p$ в U. Координатное представление: $s = \{s_j\},\quad s_j \colon U_j \to \mathbb{C}^r_{w_j}$ такие, что $s_k = g_{kj}\, s_j$ в $U_j \cap U_k$. Сечения можно умножать на функции (в базе M) и складывать. Гладкие сечения образуют линейное пространство $\Lambda^0_{\mathcal{L}}(M)$, голоморфные сечения – пространство $\mathcal{O}_{\mathcal{L}}(M)$, гладкие сечения с компактными носителями – пространство $\Lambda^0_{c,\mathcal{L}}(M)$, с топологией, как в $\Lambda^0_c(M)$. *Кратность* мероморфного сечения $s = \{s_j\}$ в точке $p \in U_j$ – это кратность мероморфной вектор-функции s_j в точке p, т.е. минимум кратностей компонент $s_{j1}, \ldots, s_{jr}$. *Дивизор* мероморфного сечения, $(s) := \sum_{p \in M} (\mathrm{mult}_p\, s)[p]$, как и для функций.

Обычная 1-форма на M – это линейный оператор $\phi(v) \colon M \to \mathbb{C}$, поточечный в том смысле, что $(\phi(v))(p) = 0$, если $v(p) = 0$.

1-форма со значениями (“с коэффициентами”) в $\mathcal{L}$ – это поточечный линейный оператор $\phi\colon v \mapsto s$, сечение $\mathcal{L}$. Форма гладкая, если для любого гладкого поля v сечение $\phi(v)$ тоже гладкое. Координатное представление: $\phi = \{\phi_j\}$, ϕ_j – обычные векторные 1-формы (т.е. $\phi_j(v)\colon U_j \to \mathbb{C}^r$ – вектор-функции) такие, что $\phi_k = g_{kj}\,\phi_j$ в $U_j \cap U_k$. $\Lambda^1_{\mathcal{L}}(M)$ – линейное пространство гладких 1-форм на M со значениями в расслоении $\mathcal{L}$, $\Lambda^1_{c,\mathcal{L}}(M)$ – гладкие $\mathcal{L}$-значные формы с компактными носителями (и с топологией, как в $\Lambda^1_c(M)$).

M – комплексное многообразие $\Longrightarrow \phi_j = \phi_j^{1,0} + \phi_j^{0,1}$, $\phi_k^{1,0} = g_{kj}\,\phi_j^{1,0}$ и т.д. $\Longrightarrow \phi = \phi^{1,0} + \phi^{0,1}$, слагаемые – тоже формы из $\Lambda^1_{\mathcal{L}}$, как и ϕ.

Обычная 2-форма на M – это поточечный кососимметрический билинейный оператор на векторных полях, $\psi(u,v)\colon M \to \mathbb{C}$, функция. 2-форма со значениями (“с коэффициентами”) в $\mathcal{L}$ – это поточечный кососимметрический билинейный оператор $\psi\colon (u,v) \mapsto s$, сечение $\mathcal{L}$. Координатное представление: $\psi = \{\psi_j\}$, ψ_j – векторные 2-формы в U_j, $\psi_k = g_{kj}\,\psi_j$, и т.д.

M – риманова поверхность. Оператор $\bar\partial\colon \Lambda^0_{\mathcal{L}} \to \Lambda^{0,1}_{\mathcal{L}}$, $\Lambda^{1,0}_{\mathcal{L}} \to \Lambda^2_{\mathcal{L}}$ определён корректно, так как $\bar\partial\, g_{kj} \equiv 0$. $\ker\bar\partial|\Lambda^0_{\mathcal{L}}(M) = \mathcal{O}_{\mathcal{L}}(M)$ – глобальные голоморфные сечения $\mathcal{L}$, $\ker\bar\partial|\Lambda^{1,0}_{\mathcal{L}}(M)$ – голоморфные 1-формы на M со значениями в $\mathcal{L}$. Стандартные теоремы единственности в этих классах – как для обычных голоморфных (очевидно из координатных представлений).

$\bar\partial^2 = 0$ (это локальное свойство) $\Longrightarrow$ корректно определены факторпространства

$$H^{p,q}_{\mathcal{L}} = (\Lambda^{p,q}_{\mathcal{L}} \cap \ker\bar\partial)/\bar\partial\Lambda^{p,q-1}_{\mathcal{L}} \quad \text{и} \quad H^{p,q}_{c,\mathcal{L}} = (\Lambda^{p,q}_{c,\mathcal{L}} \cap \ker\bar\partial)/\bar\partial\Lambda^{p,q-1}_{c,\mathcal{L}},$$

когомологии Дольбо с коэффициентами в $\mathcal{L}$.

9. Потоки и расслоения. $\mathcal{L} \xrightarrow{\pi} M$ – голоморфное расслоение, $\mathcal{L}^* \to M$ – двойственное расслоение (слои $\mathcal{L}^*_p := (\mathcal{L}_p)^*$, $\mathbb{C}$-линейные функции, $l(w) = \sum_1^r l_\nu w_\nu$, на $\mathcal{L}_p \cong \mathbb{C}^r$, матрицы перехода $g^*_{kj} := (g^{-1}_{kj})^\top$), где $\top$ означает транспонирование.

$\Lambda^{n-p,n-q}_{c,\mathcal{L}}(M)$ – пространство тест-форм бистепени $(n-p, n-q)$, $n = \dim_{\mathbb{C}} M$, топология, как без $\mathcal{L}$. Потоки бистепени (p,q) со значениями в $\mathcal{L}^*$ – это непрерывные линейные функционалы на этом пространстве тест-форм; их объединение – пространство

${\Lambda'_{\mathcal{L}^*}}^{p,q}(M)$ (с топологией поточечной сходимости). Мотивировка: если $\phi \in \Lambda^{n-p,n-q}_{c,\Lambda}$ и $\psi \in \Lambda^{p,q}_{\mathcal{L}^*}$, то локальные представления $\phi = \sum \phi_{IJ}\, dz_I \wedge d\bar z_J$, $\psi = \sum \psi_{KL}\, dz_K \wedge d\bar z_L$ позволяют построить обычную $2n$-форму $\psi\wedge\phi$ на M, если считать $\psi_{KL}\cdot\phi_{IJ} := \psi_{KL}(\phi_{IJ})$ (в каждой точке $h \in M$ – значение линейной функции ψ_{KL} на векторе ϕ_{IJ}, при $m = 1$ – обычное произведение комплексных чисел). $\Longrightarrow$ форма ψ (даже если $\psi \in L^1_{\mathrm{loc}}$) определяет поток $[\psi]$ со значениями в $\mathcal{L}^*$, $[\psi](\phi) := \int_M \psi \wedge \phi$.

Оператор $\bar\partial$ на потоках – как обычно, $\bar\partial T := (-1)^{p-1} T\bar\partial$, $\Longrightarrow \bar\partial^2 = 0$ и корректно определены когомологии ${H'_{\mathcal{L}^*}}^{p,q}$, ${H'_{c,\mathcal{L}^*}}^{p,q}$. Теорема Дольбо (5), с дословно тем же доказательством для римановой поверхности, распространяется на когомологии со значениями в расслоениях: ${H'_{\mathcal{L}^*}}^{p,q} = H^{p,q}_{\mathcal{L}^*}$, ${H'_{c,\mathcal{L}^*}}^{p,q} = H^{p,q}_{c,\mathcal{L}^*}$. Замкнутость образа $\bar\partial$ доказывается тоже дословно, как в (6), только надо предполагать, что на M и $\mathcal{L}$ фиксированы некоторые метрики (на $\mathcal{L}$ – билинейная в слоях). В результате получаем двойственные отображения линейных топологических пространств

$$\Lambda^{1-p,0}_{c,\mathcal{L}} \xrightarrow{\bar\partial} \Lambda^{1-p,1}_{c,\mathcal{L}},$$
$${\Lambda'_{\mathcal{L}^*}}^{p,1} \xleftarrow{\bar\partial'} {\Lambda'_{\mathcal{L}^*}}^{p,0},$$

причём образы обоих отображений замкнуты (как в (6,7)). Отсюда

Теорема (двойственность Серра). *На любой римановой поверхности M, для любого голоморфного векторного расслоения $\mathcal{L}$ имеют место изоморфизмы*

$$(\mathcal{O}_{\mathcal{L}^*}(M))^* \cong H^{1,1}_{c,\mathcal{L}}(M) \quad \textit{и} \quad (\Omega^1_{\mathcal{L}^*}(M))^* \cong H^{0,1}_{c,\mathcal{L}}(M).$$

На некомпактной римановой поверхности

$$H^{0,1}_{\mathcal{L}}(M) = H^{1,1}_{\mathcal{L}}(M) = 0.$$

(Здесь $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^*$ всюду можно поменять местами, так как $(\mathcal{L}^*)^* = \mathcal{L}$.)

Упражнения.

1. Уравнение $d^c S = T \in \Lambda'^2(M)$ на компактной р.п. M разрешимо $\iff$ $T(1) = 0$, а на некомпактной M разрешимо всегда.

2. T – поток бистепени $(p, 1)$ с компактным носителем K на р.п. M, $T(h) = 0\ \ \forall\, h \in \Lambda^{1-p,0}(M)$ такой, что $\bar\partial h = 0 \Longrightarrow$

a) $T = \bar\partial S$, где S – поток типа $(p, 0)$ с компактным носителем,

b) $S = 0$ вне компакта $\widehat{K} = K \cup$ (все компоненты $M \setminus K$ с компактными замыканиями).

3*. Используя теорему Хана–Банаха и двойственность Серра (7), доказать теорему Рунге: D – область на р.п. M такая, что $M \setminus D$ не имеет компактных компонент $\Longrightarrow \forall\, h \in \mathcal{O}(D)$ найдётся последовательность $h_\nu \in \mathcal{O}(M)$, сходящаяся к h равномерно на всяком компакте $K \subset D$ (т.е. $\mathcal{O}(M)$ плотно в $\mathcal{O}(D)$ в топологии равномерной сходимости на компактах).

4. То же с Ω^1 вместо $\mathcal{O}$ (на M фиксирована некоторая метрика).

5. (U_j, z_j) – голоморфные карты, покрывающие р.п. M, $\mathcal{L}$ – комплексное многообразие, которое получается из $\bigsqcup(U_j \times \mathbb{C}_{w_j})$ отождествлением $(p, w_k) = \bigl(p, \frac{dz_j}{dz_k}(p) w_j\bigr)\ \ \forall\, p \in U_j \cap U_k \Longrightarrow \mathcal{L}$ биголоморфно эквивалентно “голоморфному кокасательному расслоению” $T^{1,0}M$. Что здесь $\mathcal{O}_{\mathcal{L}}(M)$?

6. То же, с отождествлениями $(p, w_k) = \bigl(p, \frac{dz_k}{dz_j}(p) w_j\bigr)$. Что здесь $\mathcal{O}_{\mathcal{L}}(M)$?

Лекция 9

Разложения Ходжа – $\partial\bar\partial$-проблема – Дубли и функции Грина – Теорема Римана – Задача Миттаг-Леффлера для форм – Задача Миттаг-Леффлера для функций

10. Разложения Ходжа. M – компактная р.п. рода g, $\alpha \in \Omega^1(M)$, $\alpha \not\equiv 0 \Longrightarrow \alpha \notin d\Lambda^0$ (первообразная должна быть непостоянной голоморфной функцией, а таких на M нет) $\Longrightarrow \Omega^1 = \Omega^1(M)$ вкладывается в $H^1(M,\mathbb{C})$ ($\alpha \to [\alpha]$, свой класс эквивалентности в H^1, причём в каждом классе – не более одной голоморфной формы). $\Longrightarrow$ $\mathrm{Harm} := \Omega^1 \oplus \overline{\Omega^1}$ вкладывется в $H^1(M,\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{2g}$ (см. лекцию 4) $\Longrightarrow \dim_{\mathbb{C}} \Omega^1(M) \leqslant g$, в частности, это конечномерное пространство.

Теорема. *На компактной римановой поверхности,*

$$\Lambda^{1,0} = \Omega^1 \oplus \partial\Lambda^0, \quad \Lambda^{0,1} = \overline{\Omega^1} \oplus \bar\partial\Lambda^0, \quad \Lambda^1 = d\Lambda^0 \oplus d^c\Lambda^0 \oplus \mathrm{Harm}$$

и, аналогично, для потоков:

$$\Lambda'^{1,0} = \Omega^1 \oplus \partial\Lambda'^0, \quad \Lambda'^{0,1} = \overline{\Omega^1} \oplus \bar\partial\Lambda'^0, \quad \Lambda'^1 = d\Lambda'^0 \oplus d^c\Lambda'^0 \oplus \mathrm{Harm}\,.$$

$\lhd$ $(\phi,\psi) := -i\int_M \phi\wedge\bar\psi$ – эрмитово скалярное произведение на $\Lambda^{0,1}$, $(\phi,\phi) > 0$, если $\phi \neq 0$. Подпространство $\overline{\Omega^1} \subset \Lambda^{0,1}$ конечномерное $\Longrightarrow \Lambda^{0,1} = \overline{\Omega^1} \oplus (\overline{\Omega^1})^\perp$.

Посмотрим это ортогональное дополнение. $\phi \in (\overline{\Omega^1})^\perp \sim \int \phi \wedge \alpha = 0 \quad \forall \alpha \in \Omega^1$. В терминах потоков, это означает: $\phi \in \Lambda^{0,1} \cong (\Lambda'^{1,0})^*$ и $\phi|_{\Omega^1} = 0$ для $\Omega^1 = \ker\bar\partial'|\Lambda'^{1,0}$. Согласно (7) в таком случае $\phi \in \operatorname{im}\bar\partial|\Lambda^0$, т.е. $\phi = \bar\partial h$ для некоторой функции $h \in \Lambda^0$.

Таким образом, мы доказали, что $\Lambda^{0,1} = \overline{\Omega^1} \oplus \bar\partial\Lambda^0$. Из этого, очевидно, $\Lambda^{1,0} = \Omega^1 \oplus \partial\Lambda^0$, $\Longrightarrow \Lambda^1 = \partial\Lambda^0 \oplus \bar\partial\Lambda^0 \oplus \mathrm{Harm} = d\Lambda^0 \oplus d^c\Lambda^0 \oplus \mathrm{Harm}$.

Разложения для потоков очевидным образом получаются из этих, леммы Вейля и двойственности Серра (7). $\rhd$

Следствие. $H^1(\,\cdot,\mathbb{C}) = \mathrm{Harm} = \Omega^1 \oplus \overline{\Omega^1}$, $H^{0,1} = \overline{\Omega^1}$.

$\lhd$ $f \in \Lambda^0$, $dd^cf = 0 \Longrightarrow f$ – гармоническая функция на $M \Longrightarrow$ константа (по принципу максимума) $\Longrightarrow$ если $d^cf \not\equiv 0$, то $dd^cf \not\equiv 0$. $\Longrightarrow$ в разложении Ходжа для замкнутых 1-форм нет d^c-точных слагаемых, т.е. $\{\phi \in \Lambda^1 : d\phi = 0\} = d\Lambda^0 \oplus \mathrm{Harm}$, и первое утверждение вытекает из определения когомологий де Рама.

(Мы пишем здесь равенство, которое означает, что каждый класс этих когомологий де Рама содержит ровно одну гармоническую форму.)

Второе – из теоремы и определения когомологий Дольбо. (Здесь равенство означает, что в каждом классе этих когомологий Дольбо лежит ровно одна антиголоморфная форма.) $\triangleright$

Следствие (Риман). $\dim_{\mathbb{C}} \Omega^1(M) = g$, *род* M.

11. $\partial\bar\partial$-проблема. Предложение. *M – компактная риманова поверхность, T – поток степени 2 на M такой, что $T(1) = 0 \Longrightarrow \exists$ поток S степени 0 такой, что $T = 2i\,\partial\bar\partial S = dd^c S$, причём S вещественный ($S = \overline{S}$), если T вещественный, гладкий во всякой области $U \subset M$, в которой T гладкий. Если $\widetilde{S}$ – другое решение, $dd^c\widetilde{S} = T$, то $\widetilde{S} = S + \mathrm{const}$.*

$\triangleleft$ $T(1) = 0$, $\dim_{\mathbb{C}}(H^2(M,\mathbb{C}) = H^{1,1}(M)) = 1$ (см. след. (7)). $\Longrightarrow T = d\phi^1$, где $\phi^1 = df + d^cS + h$ (разложение Ходжа), $\Longrightarrow T = dd^cS$; существование доказано.

О единственности: $dd^c(\widetilde{S} - S) = 0 \Longrightarrow \widetilde{S} - S$ – гармоническая функция (лемма Вейля) $\Longrightarrow$ константа, ввиду компактности M.

Если T вещественный, то $\overline{S}$ – тоже решение, $(S-\overline{S})/2$ – мнимая константа, которую можно вычесть из потока S и сделать его вещественным. Если T – гладкая форма в координатной окрестности U точки $a \in M$ и функция $\lambda \in \Lambda^0_c(U)$ равна 1 в окрестности a, то существует решение уравнения $dd^cu = \lambda T$ в U, которое задаётся свёрткой с фундаментальным решением уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^2$ и потому гладкое; так как разность любых двух локальных решений в окрестности a есть гармоническая функция, то S – гладкая функция в окрестности a. $\triangleright$

Следствие. *M – односвязная компактная риманова поверхность $\Longrightarrow M$ биголоморфно эквивалентна $\mathbb{P}_1$, сфере Римана.*

$\triangleleft$ Фиксируем произвольные две точки $a \neq b$ на M и положим $T := [b] - [a]$. Пусть z_a – голоморфная координата с центром в точке a. По формуле Пуанкаре–Лелона (лекция 7), $[a] = \frac{i}{\pi}\partial\bar\partial \ln|z_a| = \frac{1}{2\pi}dd^c \ln|z_a|$. Аналогично, $[b] = \frac{1}{2\pi}dd^c \ln|z_b|$. По доказанному выше, $T = \frac{1}{2\pi}dd^cu$, u вещественный поток степени 0 $\Longrightarrow u$ – гармоническая функция в $M \setminus \{a,b\}$. В окрестности a $dd^c(u + \ln|z_a|) = 0$ в смысле потоков $\Longrightarrow u = -\ln|z_a| + O(1)$ (это $O(1)$ – гармоническая функция в окрестности a по лемме Вейля).

Аналогично, $u = \ln|z_b| + O(1)$ в окрестности $b \Longrightarrow \exists$ точка $\circ \in M$ такая, что $u(\circ) = 0$.

Форма ∂u голоморфна в $M \setminus \{a, b\}$, а функция $\int_\circ^p \partial u$ определена на $M \setminus \{a, b\}$ однозначно по модулю πi (любой замкнутый путь на $M \setminus \{a, b\}$ гомологичен целочисленной линейной комбинации простых циклов вокруг точек a и b и, например,

$$\int_{|z_a|=r} \partial u = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|z_a|=\varepsilon} (-\frac{dz_a}{2z_a}) = -\pi i).$$

Поэтому функция $f(p) = \exp\bigl(-2\int_\circ^p \partial u\bigr)$ однозначна на $M \setminus \{a, b\}$, не имеет там нулей и голоморфна (см. в локальных координатах в окрестности p).

Так как

$$|f(p)| = \exp\biggl(-\int_\circ^p (\partial u + \bar\partial u)\biggr) = \exp\biggl(-\int_\circ^p du\biggr) = \exp(-u(p)),$$

то $|f| = e^{O(1)}|z_a|$ в окрестности a и $|f| = e^{O(1)}1/|z_b|$ в окрестности b. $\Longrightarrow f \in \mathcal{M}(M)$, $f\colon M \to \mathbb{P}_1$ – голоморфное отображение, причём b – единственный полюс f, 1-го порядка $\Longrightarrow f$ – взаимно однозначное отображение (по теореме о равнораспределении значений, лекция 7). $\Longrightarrow$ биголоморфизм. $\rhd$

12. Дубли и функции Грина. M – риманова поверхность с гладким, согласованно ориентированным краем bM ($M \cup bM$ – компакт). M^- – та же M, но с противоположной ориентацией. Если (U, z) – голоморфная карта на M и U^- – та же U, но с противоположной ориентацией, то будем считать $(U^-, \bar z)$ голоморфной картой на M^-; таким образом M^- тоже превращается в рима-

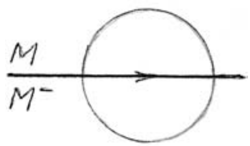

Рис. 18.

нову поверхность. Множество $\widetilde{M} = M \cup bM \sqcup M^-$ естественно наделяется структурой компактной римановой поверхности, карты которой в точках bM устроены, как показано на рис. 18: если z – конформное отображение “полуокрестности” $U^+ \subset M$ краевой точки на полукруг в верхней полуплоскости и $\sigma\colon p \to p^-$ – тождественное отображение, то $\overline{z \circ \sigma}$ – конформное отображение $U^- \subset M^-$ на симметричный полукруг в нижней полуплоскости; легко видеть, что все указанные карты голоморфно согласованы. Поверхность $\widetilde{M}$ называется *дублем* р.п. M. Отображение $\sigma\colon p \to p^- \to p$ является антиголоморфной инволюцией дубля ($\sigma\colon \mathcal{O} \to \bar{\mathcal{O}},\ \ \sigma^2 = \mathbb{I}$), оставляющей неподвижными все точки на bM.

Предложение. *Для произвольной точки $\circ \in M$ римановой поверхности с краем существует непрерывная функция $G(p,\circ) \geqslant 0$ на $(M \setminus \circ) \cup bM$, гармоническая на $M \setminus \circ$, $= 0$ на bM и такая, что $G(p,\circ) + \ln|z(p)|$ ограничена в проколотой окрестности $\circ$ (z – локальная координата с центром $\circ$).*

(По определению $G(\,\cdot\,,\circ)$ называется *функцией Грина* р.п. M с полюсом в $\circ$.)

$\lhd$ Фиксируем точку $a \in bM$ и рассмотрим поток $T = [\circ^-] - [\circ]$ на дубле $\widetilde{M}$. Согласно (11), $T = \frac{1}{2\pi} dd^c\, u$ для некоторой функции u такой, что $u(a) = 0$. Функция u гармоническая на $\widetilde{M} \setminus \{\circ, \circ^-\}$, $u + \ln|z|$ ограничена в (проколотой) окрестности $\circ$, $u - \ln|z^-|$ ограничена возле $\circ^-$.

Так как инволюция σ антиголоморфна, то функция $u \circ \sigma$ тоже гармоническая на $\widetilde{M} \setminus \{\circ, \circ^-\}$ и в особых точках имеет логарифмические особенности противоположного знака относительно u. Поэтому функция $u + u \circ \sigma$ гармоническая на всей р.п. $\widetilde{M} \implies\ \equiv \text{const} \implies\ \equiv 0$, будучи равной нулю в точке a, $\implies u|_{bM} \equiv 0$.

По принципу максимума, $u > 0$ на $M \implies$ Функция $G(\,\cdot\,,\circ) := u|_{M \cup bM}$ обладает всеми указанными свойствами. $\rhd$

13. Теорема Римана. *Всякая некомпактная односвязная риманова поверхность биголоморфно эквивалентна кругу $\mathbb{D}$ или плоскости $\mathbb{C}$.*

$\lhd$ Разберём сначала случай, когда M – р.п. с гладким краем, $M \cup bM$ – компакт. Построим тогда на дубле $\widetilde{M}$ функцию u, как в доказательстве предложения и положим $f(p) := \exp(-2\int_a^p \partial u)$.

Тогда $f\colon \widetilde{M} \to \mathbb{P}_1$ – биголоморфизм (см. (11)), $f(\circ) = 0$, $|f(p)| = e^{-u(p)} = 1$ $\forall p \in bM \Longrightarrow f\colon M \to \mathbb{D}$ – биголоморфизм.

В общем случае представим M как возрастающую последовательность относительно компакных поверхностей с краями, $M = \bigcup M_\nu$, и построим, как выше, биголоморфные отображения $f_\nu\colon M_\nu \to r_\nu\mathbb{D}$, нормированные так, что $f_\nu(\circ) = 0$ и $\frac{df_\nu}{dz}(\circ) = 1$ (z – фиксированная локальная координата с центром $\circ$). Из леммы Шварца легко следует, что r_ν возрастают с ростом ν.

Предположим сначала, что $r_\nu \to r < \infty$. Тогда, по принципу компактности (ТФКП), переходя к подпоследовательности, можно считать, что f_ν сходятся равномерно на компактных подмножествах к некоторой голоморфной функции f. Из теоремы Гурвица (ТФКП) следует, что f взаимно однозначно отображает M на область $f(M) \subset r\mathbb{D}$ ($f \not\equiv \mathrm{const}$, так как $f'(\circ) = 1$). Опять можно считать, что последовательность $f \circ f_\nu^{-1}\colon r_\nu\mathbb{D} \to r\mathbb{D}$ сходится к голоморфной функции $h\colon r\mathbb{D} \to r\mathbb{D}$. Так как $h'(0) = 1$ то, по лемме Шварца (случай равенства) $h(z) \equiv z$, в частности, h принимает все значения из круга $r\mathbb{D}$. По теореме Гурвица $\forall a \in r\mathbb{D}$ найдётся $\nu(a)$ такой, что $a \in f \circ f_\nu^{-1}(r_\nu\mathbb{D})$ при $\nu > \nu(a)$. $\Longrightarrow a \in f(M) \Longrightarrow f(M) = r\mathbb{D}$ и $f\colon M \to r\mathbb{D}$ – биголоморфизм.

Теперь разберём случай $r_\nu \to \infty$. $\forall j$, $\nu > j$, функция $h_{j\nu} := f_\nu \circ f_j^{-1}$ голоморфна и однолистна (= разные значения в разных точках) в круге $r_j\mathbb{D}$, причём $h'_{j\nu}(0) = 1$. По теореме Кёбе (продвинутая ТФКП; простое доказательство см. у Голузина [Г]), $|h_{j\nu}(z)| \geqslant r_j/4$ при $|z| = r_j$ (каждая $h_{j\nu}$ равномерно ограничена,

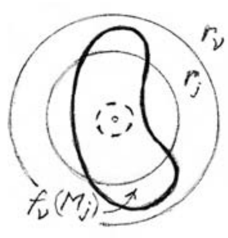

Рис. 19.

угловые предельные значения на границе существуют почти всюду). $\Longrightarrow$ по принципу максимума в круге $r_j\mathbb{D}$, $|z/h_{j\nu}(z)| \leqslant 4$, для всех ν. По принципу компактности, переходя к подпоследовательности (по ν), можно считать, что $\exists \lim_\nu z/h_{j\nu}(z) \in \mathcal{O}(r_j\mathbb{D})$, функция, нигде в $r_j\mathbb{D}$ не равная нулю по теореме Гурвица. $\Longrightarrow$ $\exists \lim_\nu h_{j\nu} =: h_j$, причём (опять Гурвиц) h_j – тоже однолистная функция. Так как $h_{j\nu} \circ f_j = f_\nu|_{M_j}$, то мы показали, что $\exists \lim_\nu f_\nu|_{M_j} = h_j \circ f_j$. Теперь, устремляя $j \to \infty$, диагональным процессом получаем подпоследовательность f_ν, равномерно сходящуюся на каждой M_j к предельной функции $f \in \mathcal{O}(M)$, причём $f\colon M \to f(M) \in \mathbb{C}$ взаимно-однозначно. Так как $f|_{M_j} = h_j \circ f_j$, то $f(M) \supset h_j(r_j\mathbb{D}) \supset \frac{1}{4}r_j\mathbb{D}$, $\forall j$, по теореме Кёбе и потому $f(M) = \mathbb{C}$. $\triangleright$

Неудивительно, что эта теорема доказывалась ещё лет 50 после Римана – комплексный анализ в те времена был недостаточно развит; точку здесь поставили Каратеодори и Кёбе в 1912 г.

14. Задача Миттаг-Леффлера для форм: *Даны: локально конечное открытое покрытие $M = \cup U_j$ и формы $\phi_j \in \mathcal{M}^1(U_j)$ такие, что $\phi_j - \phi_k \in \Omega^1(U_j \cap U_k)$. Найти форму $\phi \in \mathcal{M}^1(M)$ с “главными частями” ϕ_j в U_j, т.е. такую, что $\phi - \phi_j \in \Omega^1(U_j)$ $\forall j$.*

Полагая $\phi - \phi_j =: \alpha_j$, эту задачу можно переформулировать так: найти $\alpha_j \in \Omega^1(U_j)$ такие, что $\alpha_j - \alpha_k = \phi_k - \phi_j$ в $U_j \cap U_k$ (тогда $\phi := \phi_j + \alpha_j$ в U_j будет решением исходной задачи).

Предложение. *На некомпактной римановой поверхности любая задача Миттаг-Леффлера для форм имеет решение.*

На компактной римановой поверхности указанная задача разрешима тогда и только тогда, когда $\sum_j \sum_{a\in U_j} \operatorname{res}_a \phi_j = 0$.

$\triangleleft$ Пусть (λ_j) – гладкое разбиение единицы, соответствующее покрытию (U_j). Гладкие формы $\tilde\alpha_j := \sum_\nu \lambda_\nu(\phi_\nu - \phi_j)$ удовлетворяют условию $\tilde\alpha_j - \tilde\alpha_k = \sum_\nu \lambda_\nu(\phi_k - \phi_j) = \phi_k - \phi_j$, но не являются голоморфными,

$$\bar\partial\tilde\alpha_j = \sum_\nu \bar\partial\lambda_\nu \wedge (\phi_\nu - \phi_j) = \sum_\nu \bar\partial\lambda_\nu \wedge \phi_\nu =: \psi \in \Lambda^2(M).$$

Если M не компактна, то $\psi = \bar\partial\beta$ для некоторой $\beta \in \Lambda^{1,0}(M)$. Если M компактна, то $\psi = \bar\partial\beta$ тогда и только тогда, когда $0 = \psi(1) = \sum_\nu \int_M \bar\partial\lambda_\nu \wedge \phi_\nu = \sum_\nu \sum_{a\in U_\nu} \operatorname{res}_a \phi_\nu$ (см. упражнение 7.1).

Полагаем $\alpha_j := \tilde\alpha_j - \beta$. $\Longrightarrow$ $\bar\partial\alpha_j = 0$ в U_j и $\alpha_j - \alpha_k = \phi_k - \phi_j$ в $U_j \cap U_k \Longrightarrow \phi := (\phi_j + \alpha_j$ в $U_j) \in \mathcal{M}^1(M)$ – решение задачи. $\triangleright$

Следствие. *На произвольной р.п. всякая мероморфная форма $\phi \in \mathcal{M}^1(M)$ представляется в виде $\phi_3 + \phi_2$, где ϕ_3 имеет только простые полюса (или $\equiv 0$), а вычеты ϕ_2 во всех точках равны нулю.*

$\lhd$ Локально такие ϕ_3 существуют и образуют данные задачи Миттаг-Леффлера для форм. Так как для компактной M, $\sum \operatorname{res}_a \phi = 0$, то эта задача в любом случае разрешима и даёт форму $\phi_3 \in \mathcal{M}^1(M)$ с простыми полюсами только и с вычетами такими же, как у ϕ. $\rhd$

Такая странная индексация вызвана традицией. Мероморфные формы на р.п. часто называют *абелевыми дифференциалами* и делят на три "рода":

1-го рода – это голоморфные формы,

2-го рода – мероморфные формы с нулевыми вычетами,

3-го рода – мероморфные формы с простыми полюсами.

15. Задача Миттаг-Леффлера для функций: *Даны дискретное множество* $(p_j) \in M$, (U_j, z_j) *– карты с центрами* p_j *и* $f_j = \sum_1^{n_j} \frac{c_{j\nu}}{z_j^\nu}$, *"главные части" лорановских разложений. Найти функцию* $f \in \mathcal{M}(M)$ *с этими главными частями, т.е. такую, что* $f - f_j \in \mathcal{O}(U_j)$, $\forall j$.

Предложение. *На некомпактной римановой поверхности задача Миттаг-Леффлера для функций всегда разрешима.*

На компактной римановой поверхности указанная задача разрешима тогда и только тогда, когда $\sum_j res_{a_j}(f_j\alpha) = 0$, $\forall \alpha \in \Omega^1(M)$.

$\lhd$ Можно считать, что окрестности U_j для разных j не пересекаются. Добавляя к ним $U_0 = M \setminus (a_j)$, получаем покрытие M. Ищем функции $h_j \in \mathcal{O}(U_j)$ такие, что $h_j - h_k = f_k - f_j$ на $U_j \cap U_k$. Как и выше, сначала находим гладкие кандидатуры $\tilde h_j := \sum_\nu \lambda_\nu(f_\nu - f_j)$ с $\bar\partial \tilde h_j = \sum_\nu \bar\partial\lambda_\nu(f_\nu - f_j) =: \phi \in \Lambda^{0,1}(M)$ и, решая $\bar\partial$-проблему $\bar\partial h = \phi$, подправляем их до $h_j := \tilde h_j - h$. Условие разрешимости $\bar\partial$-проблемы в компактном случае (лекция 8(7)) как раз и выписано в формулировке. Остальное – как выше. $\rhd$

Условие разрешимости на поверхности рода g – это g однородных линейных уравнений на коэффициенты главных частей $c_{j\nu}$. $\Longrightarrow$ если их число $\sum n_j > g$, то для некоторых $(c_{j\nu}) \neq 0$ решение существует, т.е. существует непостоянная $f \in \mathcal{M}(M)$ с полюсами порядков $\leqslant n_j$ в p_j, а в остальном голоморфная.

Следствие. *На компактной р.п. рода g существует непостоянная мероморфная функция с единственным полюсом порядка $\leqslant g+1$ в заданной точке и непостоянная мероморфная функция с простыми полюсами в некоторых из $g+1$ заданных точках, а в остальном голоморфная.*

Упражнения.

M – компактная риманова поверхность рода g, J – оператор комплексной структуры на M.

1. 1-форма α голоморфна $\Longleftrightarrow$ α гармоническая и $J\alpha = i\alpha$.

2. Для всякой гармонической формы ϕ форма $\alpha = \phi - iJ\phi$ голоморфна.

3. 1-форма ϕ на M гармоническая $\Longleftrightarrow$ $d\phi = d^c\phi = 0$.

4. Для всякого 1-цикла Γ на M существует единственная гармоническая форма h такая, что $\int_\Gamma \phi = \int_M h \wedge \phi$ $\forall\, d$-замкнутой $\phi \in \Lambda^1(M)$; эта h обязательно вещественна.

5. Если 1-циклы Γ_1, Γ_2 не пересекаются, то соответствующие им h_1, h_2 ортогональны, $\int_M h_1 \wedge h_2 = 0$, и если $h_j = \operatorname{Re} \alpha_j$, $\alpha_j \in \Omega^1(M)$, то $\int_M \alpha_1 \wedge \overline{\alpha_2} = 0$.

6. $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_g$ – попарно не пересекающиеся 1-циклы, классы которых в $H_1(M, \mathbb{R})$ линейно независимы. $\alpha \in \Omega^1(M)$, $\int_{\Gamma_j} \alpha = 0$, $\forall\, j \Longrightarrow \alpha = 0$.

7. $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{2g}$ – базис 1-циклов на $M \Longrightarrow \exists$ базис вещественных гармонических форм $h_1, \ldots, h_{2g}$ такой, что $\int_{\Gamma_j} h_k = \delta_{jk}$.

8. Решить задачу 6.12.

9. $g > 0 \Longrightarrow \exists$ попарно различные точки $p_1, \ldots, p_g \in M$ такие, что если $\alpha \in \Omega^1(M)$ и $\alpha = 0$ во всех p_j, то $\alpha \equiv 0$.

10. $g > 0 \Longrightarrow$ на M нет точек, в которых все голоморфные формы равны нулю. (А для $g = 0$?)

11. $p_1, \ldots, p_g \in M$ – произвольные (не обязательно разные), z_j – координаты в окрестностях p_j, $\alpha(p_j) := (\alpha/dz_j)(p_j)$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_g$ – базис в $\Omega^1(M)$. Доказать существование $p'_1, \ldots, p'_g \in M$, сколь угодно близких к соответствующим $p_1, \ldots, p_g$, таких, что $\det(\alpha_k(p'_j)) \neq 0$.

12. $g > 0 \Longrightarrow \exists$ попарно различные $p_1, \ldots, p_g \in M$ такие, что на M нет мероморфных функций, у которых все полюса простые и содержатся во множестве $\{p_1, \ldots, p_g\}$.

13. $\exists$ мероморфная функция на M, принимающая заданные значения на данном конечном множестве точек.

14. $d\mathcal{M} := \{df \colon f \in \mathcal{M}(M)\}$, $\Omega_2 := \{\phi \in \mathcal{M}^1(M) \colon \operatorname{res}_a \phi = 0, \forall a \in M\} \Longrightarrow d\mathcal{M} \subset \Omega_2$. Доказать:

a) $g \leqslant \dim_{\mathbb{C}} \Omega_2/d\mathcal{M} \leqslant 2g$,

b) $\dim_{\mathbb{C}} \Omega_2/d\mathcal{M} = 2g$.

Дивизоры мероморфных функций

Лекция 10

Дивизоры – Теорема Римана–Роха – Задача Вейерштрасса – Решётки периодов и многообразия Якоби – Теорема Якоби

1. Дивизоры. Дивизоры на римановой поверхности можно рассматривать как формальные локально конечные суммы $D = \sum n_j[p_j], \;\; p_j \in M, \;\; n_j \in \mathbb{Z}$ (так они традиционно и рассматриваются) или как целочисленные потоки степени 2, как мы это делали выше. Дивизоры D_1, D_2 считаются *эквивалентными*, если существует функция $f \in \mathcal{M}_*(M)$ такая, что $D_1 - D_2 = (f)$, дивизор f.

Пример. $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{M}^1_*(M) \Longrightarrow (\phi_1) - (\phi_2) = (\phi_1/\phi_2), \;\; \phi_1/\phi_2 = f \in \mathcal{M}_*(M)$. Этот класс эквивалентности $\mathbb{K} = \mathbb{K}_M$ называется *каноническим классом* поверхности M.

Дивизор D называется *положительным*, обозначение $D \geqslant 0$, если все коэффициенты $n_j \geqslant 0$. Всякий дивизор представляется в виде разности положительных, $D = D_+ - D_-$, причём если $\sum n_j[p_j]$ приведена (т.е. все p_j различны) то можно считать, что носители D_+ и D_- (т.е. множества точек, где они отличны от нуля) не пересекаются. Такое разложение назовём приведённым и всюду будем предполагать, что дивизор приведён и разложение тоже.

На множестве дивизоров определена естественная линейная функция $\deg D := \sum n_j$, постоянная на классах в случае компактных р.п., так как тогда $\deg(f) = 0, \;\; \forall\; f \in \mathcal{M}_*(M)$ (лекция 7(3)). Степень канонического дивизора посчитаем в следующем разделе.

С каждым дивизором D на M естественно связывается линейное пространство $\mathcal{O}_D := 0 \cup \{f \in \mathcal{M}_*(M)\colon (f) + D \geqslant 0\}$. Если $D = D_+ - D_-$ – приведённое разложение на положительные дивизоры, то для функций класса $\mathcal{O}_D$

в точках носителя D_+ *допускаются* полюса порядка $\leqslant n_j$,
в точках носителя D_- *обязательны* нули порядка $\geqslant |n_j|$.

Размерность (над $\mathbb{C}$) пространства $\mathcal{O}_D$ традиционно обозначается через $l(D)$.

Пример. M компактная. $\deg D < 0 \Longrightarrow \deg((f) + D) = 0 + \deg D < 0 \;\; \forall\, f \in \mathcal{M}_*(M) \Longrightarrow l(D) = 0$.

$D = 0 \Longrightarrow \mathcal{O}_D = \mathbb{C},\;\; l(D) = 1$.

Лемма. $D_1 \sim D_2 \Longrightarrow l(D_1) = l(D_2)$.

$l(D) > 0 \iff D$ – *“эффективный” дивизор, т.е.* D *эквивалентен положительному дивизору.*

$\lhd$ Первое очевидно: если $D_2 = (f) + D_1$, то $\mathcal{O}_{D_2} = \{f_1 f\colon f_1 \in \mathcal{O}_{D_1}\}$.

Вторoе: Если $D \geqslant 0$, то $l(D) > 0$, поскольку $\mathcal{O}_D$ содержит константы. Если $D + (f) \geqslant 0$ для некоторой $f \in \mathcal{M}_*(M)$, то $\mathcal{O}_D$ содержит одномерное пространство функций вида $cf,\;\; c \in \mathbb{C}$.

С другой стороны, если $l(D) > 0$, то существует ненулевая $f \in \mathcal{O}_D$. Если $f \equiv \mathrm{const}$, то в приведённом разложении $D = D_+ - D_-$ дивизор D_- обязан быть нулевым (нулей у f нет). Если $f \not\equiv \mathrm{const}$, то $(f) + D \geqslant 0$ по определению $\mathcal{O}_D$, т.е. опять D эквивалентен положительному дивизору. $\rhd$

2. Теорема Римана – Роха. M – компактная риманова поверхность, $\{p_1, \ldots, p_d\}$ – конечное подмножество M, z_j – локальная координата с центром p_j, $f_j = c_j/z_j$, $j = 1, \ldots, d$. Ищем мероморфную функцию на M с такими главными частями. Согласно лекции 9 необходимым и достаточным условием разрешимости этой задачи является выполнение линейных условий $\sum_1^d c_j \operatorname{res}_{p_j} \frac{\alpha_k}{z_j} = 0$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_g$ – базис в $\Omega^1 = \Omega^1(M)$. (При $g = 0$ никаких условий нет, задача всегда разрешима, поэтому далее считаем, что M имеет род $g > 0$.) Обозначая $\alpha(p_j) := (\alpha/dz_j)(p_j)$, условия разрешимости перепишем в виде системы g линейных однородных уравнений на коэффициенты c_j, $\sum_1^d c_j \alpha_k(p_j) = 0$. Размерность пространства решений этой системы равна $d - r$, где $r = \operatorname{rk}(\alpha_k(p_j))$ – ранг матрицы, и мы использовали уже в лекции 9, что $d - r \geqslant d - g$. Теперь проанализируем это подробнее (сначала в предположении, что $D = \sum_1^d [p_j]$, т.е. данные Миттаг-Леффлера с простыми полюсами).

Обозначим через C столбец из c_j. Тогда $C \mapsto (\alpha_k(p_j)) \cdot C$ – отображение на r-мерное подпространство, $\mathbb{C}^d \to L^r \subset \mathbb{C}^g$. $\Longrightarrow$ $\exists$ обратимая $g \times g$ матрица A такая, что $A\, L^r = \mathbb{C}^r$, координатное подпространство $\{c_j = 0,\;\; \forall j > r\}$. Это значит, что если вместо базиса $\{\alpha_k\}$ рассмотреть базис

$$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_g\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_g\end{pmatrix}$$

то для него $\beta_k(p_j) = 0,\ \ k > r$, т.е. все строки матрицы $(\beta_k(p_j))$ с номерами $k > r$ равны нулю.

Обозначим $i(D) := g - r$. Это максимальное число линейно независимых $\alpha \in \Omega^1$ таких, что $\alpha(p_j) = 0,\ \ j = 1, \dots, d$. Такие α образуют линейное пространство $\Omega^1_{-D} := 0 \cup \{\alpha \in \Omega^1_*(M)\colon (\alpha) - D \geqslant 0\}$. Таким образом, $i(D) = \dim_{\mathbb{C}} \Omega^1_{-D}$. Ненулевые решения разбираемой нами линейной системы уравнений взаимно однозначно соответствуют непостоянным мероморфным функциям класса $\mathcal{O}_D$. Поэтому $\dim \mathcal{O}_D = d - r + 1$, размерность пространства решений системы + константы (пока $D \geqslant 0$). Так как $d - r = d - g + i(D)$ и $d = \deg D$, то мы таким образом получаем первый вариант *формулы Римана–Роха*:

$$\dim \mathcal{O}_D - \dim \Omega^1_{-D} = \deg D - g + 1.$$

Пока что она доказана для простых положительных дивизоров $D = \sum_1^d [p_j]$, но условие простоты здесь не существенно: в задаче Миттаг-Леффлера (для функций) с полюсами произвольных порядков n_j в общем надо рассматривать не матрицу $(\alpha_k(p_j))$, а матрицу, в которой, для каждого j стоит n_j столбцов $\alpha_k(p_j), \alpha'_k(p_j), \dots, \alpha_k^{(n_j-1)}(p_j)$ (производные по z_j), и надо просто повторить вышеприведённые рассуждения.

Проанализируем, что такое Ω^1_{-D}. Фиксируя ненулевую голоморфную форму α_0 с (положительным) дивизором $\mathbb{K}_0$, находим, что Ω^1 состоит из форм вида $\frac{\alpha}{\alpha_0}\alpha_0$ и, значит, $\alpha \in \Omega^1_{-D} \Longleftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha_0} \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}_0 - D}$. Следовательно, $\dim \Omega^1_{-D} = l(\mathbb{K}_0 - D) = l(\mathbb{K} - D)$, и мы получаем второй вариант формулы Римана–Роха:

$$l(D) - l(\mathbb{K} - D) = \deg D - g + 1.$$

Согласно лемме это доказано для произвольного эффективного (эквивалентного положительному) дивизора, а значит, и для любого дивизора с $l(D) > 0$. $\Longrightarrow l(\mathbb{K}_0 - D) - l(D) = \deg(\mathbb{K}_0 - D) - g + 1$, если $l(\mathbb{K}_0 - D) > 0$. Применим это к дивизору $D = 0$, когда обе формулы верны, поскольку $\mathbb{K}_0 \geqslant 0$. Складывая их, получаем формулу для степени канонического дивизора:

$$\deg \mathbb{K} = 2g - 2.$$

С учётом этого формулу Римана–Роха можно записать симметрично:

$$l(D) - \frac{1}{2}\deg D = l(\mathbb{K} - D) - \frac{1}{2}\deg(\mathbb{K} - D),$$

из чего следует, что она доказана для всех D таких, что $l(D) > 0$ или $l(\mathbb{K} - D) > 0$. Остаётся проверить, что она верна и в случае $l(D) = l(\mathbb{K} - D) = 0$, т.е. что в этом случае выполняется равенство $\deg D = g - 1$.

Допустим, $d := \deg D \geqslant g$. $D = D_+ - D_- \Longrightarrow d = d_+ - d_-$. По доказанному, $l(D_+) \geqslant d_+ - g + 1 = d - d_- - g + 1 \geqslant 1 - d_-$. Пусть $f_1, \ldots, f_{d_+}$ – базис $\mathcal{O}_{D_+}$. Условия $c_1 f_1^{(k)}(q) + \cdots + c_{d_+} f_{d_+}^{(k)}(q) = 0$, $0 \leqslant k \leqslant \operatorname{mult}_q D_- - 1$, в точке $q \in \operatorname{supp} D_-$ по всем таким q вместе дают d_- однородных уравнений на $c_1, \ldots, c_{d_+}$. Так как $d_+ \geqslant g + d_-$, то (при $g > 0$) существует решение $(c_j) \neq 0$, $\Longrightarrow$ соответствующая функция $f = c_1 f_1 + \cdots + c_{d_+} f_{d_+}$ равна нулю на носителе D_- с учётом кратностей. $\Longrightarrow$ $(f) + D_+ - D_- \geqslant 0$ (так как $f_j \in \mathcal{O}_{D_+}$) $\Longrightarrow l(D) > 0$. – Противоречие.

Если же $\deg D < g - 1$, то $\deg(\mathbb{K} - D) \geqslant g$ и тоже противоречие.

Таким образом, формула Римана–Роха доказана для поверхностей рода $g > 0$. Для сферы она эквивалентна очевидному утверждению, что размерность пространства многочленов степени $\leqslant d$ равна числу коэффициентов, $d + 1$; простое доказательство эквивалентности оставляем как упражнение.

Следствие (Неравенство Римана). *$l(D) \geqslant \deg D - g + 1$, при $\deg D > 2g - 2$ – равенство.*

(Если $\deg D > 2g - 2$, то $\deg(\mathbb{K} - D) < 0$ и, значит, $l(\mathbb{K} - D) = 0$.)

Следствие. *$g = 0 \Longrightarrow M \cong \mathbb{P}_1$ (биголоморфны).*

$g \leqslant 2 \Longrightarrow$ существует двулистное голоморфное отображение $M \to \mathbb{P}_1$ (т.е. M – гиперэллиптическая р.п.).

$\triangleleft$ При $g = 0$ берём $D = [p]$; тогда $l(D) \geqslant 2$ и, значит, существует мероморфная функция f с единственным, причём простым, полюсом в точке $p \Longrightarrow f \colon M \to \mathbb{P}_1$ биголоморфно (мы это уже проходили в лекции 9).

$g = 1$, $D = [p_1] + [p_2] \Longrightarrow l(D) \geqslant 2$ и непостоянная функция $f \in \mathcal{O}_D$ осуществляет двулистное (разветвлённое) накрытие $f\colon M \to \mathbb{P}_1$.

$g = 2 \Longrightarrow \dim \Omega^1 = 2$; α_1, α_2 – базис $\Longrightarrow \deg(\alpha_j) = 2g - 2 = 2$, т.е. α_j имеет два нуля (с кратностями) $\Longrightarrow$ мероморфная функция α_1/α_2 осуществляет двулистное накрытие $M \to \mathbb{P}_1$. $\rhd$

3. Задача Вейерштрасса: *Дан дивизор D. Найти функцию $f \in \mathcal{M}_*(M)$ с этим дивизором, $(f) = D$.*

Теорема. *На некомпактной римановой поверхности задача Вейерштрасса всегда разрешима, т.е. любой дивизор является дивизором некоторой мероморфной функции.*

$\lhd$ $D = \sum n_j[p_j] \in \Lambda'^2(M)$, ищем $f \in \mathcal{M}_*(M)$, решение уравнения Пуанкаре–Лелона $\frac{i}{\pi}\partial\bar\partial \ln|f| = D$ (лекция 7). Проведём гладкий путь γ_j из p_j в "бесконечность", так что $d[\gamma_j] = -[p_j]$ (лекция 4). Разложим по бистепеням: $[\gamma_j] = \gamma_j^{1,0} + \gamma_j^{0,1} = 2\operatorname{Re}\gamma_j^{0,1}$. Согласно лекции 8(7) $\exists$ $h \in \Lambda'^0$ такая, что $\frac{i}{2\pi}\bar\partial h = -\sum n_j \gamma_j^{0,1}$. $\Longrightarrow$ $h \in \mathcal{O}(M \setminus \bigcup \gamma_j)$ и скачок предельных значений h на γ_j, $h_j^{\pm} = 2\pi i n_j$ (см. лекцию 7). $\Longrightarrow$ В координатной окрестности (U_j, z_j) с центром p_j, $h = n_j \ln z_j + h_j$, $h_j \in \mathcal{O}(U_j)$. Поэтому у функции $f = e^h$ скачков нет, $f \in \mathcal{M}_*(M)$ и $(f) = D$. $\rhd$

На компактной р.п. есть необходимое условие $\deg D = 0$ для дивизоров мероморфных функций (лекция 7). При $g = 0$ оно и достаточно, но в общем возникают препятствия…

Теорема Абеля. *Дивизор D степени 0 на компактной римановой поверхности M является дивизором некоторой мероморфной функции тогда и только тогда, когда существует 1-цепь σ на M такая, что $D = d[\sigma]$ и $\int_\sigma \alpha = 0$ $\forall\, \alpha \in \Omega^1(M)$.*

(Эквивалентная формулировка: $D = \sum([p_j] - [q_j])$ – дивизор мероморфной функции $\Longleftrightarrow$ $\exists$ гладкие пути γ_j из q_j в p_j такие, что $\sum_j \int_{\gamma_j} \alpha = 0$ $\forall\, \alpha \in \Omega^1(M)$.)

$\lhd$ То же, только уравнение $\frac{i}{2\pi}\bar\partial h = -\sum \gamma_j^{0,1}$ разрешимо тогда и только тогда, когда поток справа обращается в нуль на всех голоморфных формах (лекция 8). $\rhd$

4. Решётки периодов и многообразия Якоби. M – компактная р.п. рода $g > 0$, $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{2g}$ – базис 1-циклов со связным $M \setminus \bigcup \Gamma_j$ (лекция 4), $\alpha_1, \dots, \alpha_g$ – базис $\Omega^1(M)$. $\Longrightarrow$ векторы

$\left(\int_{\Gamma_k}\alpha_1,\ldots,\int_{\Gamma_k}\alpha_g\right)\in\mathbb{C}^g$, $k=1,\ldots,2g$, $\mathbb{R}$-линейно независимы (простое упражнение 10.8). $\Longrightarrow$ Целочисленные линейные комбинации этих векторов образуют дискретную решётку $\Pi\subset\mathbb{C}^g$, в частности, существует окрестность $\mathcal{U}\ni 0$ в $\mathbb{C}^g$ такая, что $\Pi\cap\mathcal{U}=0$ (упражнение 10.9). $\Longrightarrow$ Фактор $\mathbb{C}^g/\Pi =: \operatorname{Jac}M$ – компактное комплексное многообразие (тор, $\dim_{\mathbb{C}}=g$), которое называется *многообразием Якоби* р.п. M.

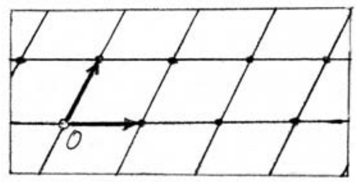

Рис. 20.

Предложение. *Для произвольной фиксированной точки $q\in M$ отображение*

$$M\ni p\mapsto\left(\int_q^p\alpha_1,\ldots,\int_q^p\alpha_g\right)\ \mathrm{mod}\ \Pi\in\operatorname{Jac}M$$

является голоморфным вложением.

$\lhd$ $\left(\int_q^p\alpha_k=\int_q^{p'}\alpha_k\right)_{k=1}^g$ mod Π $\Longleftrightarrow$ $\exists$ 1-цепь σ такая, что $d[\sigma]=[p]-[p']$ и $\int_\sigma\alpha_k=0,\ \forall\,k\Longrightarrow$ (теорема Абеля) $\exists\ f\in\mathcal{M}(M)$ с единственным простым полюсом в точке p. $\Longrightarrow f\colon M\to\mathbb{P}_1$ – биголоморфизм и $g=0$, в противоречии с предположением, что $g>0$.

z – локальная координата с центром p. Матрица Якоби соответствующего отображения из M в $\mathbb{C}^g$ (без mod Π) в этой точке легко считается (дифференцирование по верхнему пределу) и равна $(\alpha_1/dz,\ldots,\alpha_g/dz)(p)\neq 0$ (упражнение 9.10). $\rhd$

Следствие. *Всякая компактная риманова поверхность рода $g=1$ биголоморфно эквивалентна некоторому тору $\mathbb{C}/\Pi$.*

5. Теорема Якоби. *M – компактная риманова поверхность рода $g > 0$, $q_1, \ldots, q_g \in M$ – фиксированные точки (не обязательно различные) и $\alpha_1, \ldots, \alpha_g$ – базис в $\Omega^1(M)$. $\Longrightarrow \forall (c_1, \ldots, c_g) \in \mathbb{C}^g$ $\exists$ точки $p_1, \ldots, p_g \in M$ и пути γ_j из q_j в p_j, соответственно, такие, что $\sum_j \int_{\gamma_j} \alpha_k = c_k$, $k = 1, \ldots, g$.*

$\lhd$ Существование таких (p_j) для любых (c_k) эквивалентно тому, что отображение $M^g \ni (p_j) \mapsto \big(\sum_j \int_{\gamma_j} \alpha_k\big) \bmod \Pi \in \operatorname{Jac} M$, с произвольными γ_j, стартующими из q_j, сюръективно.

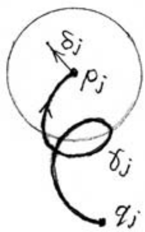

Рис. 21.

В координатных окрестностях (U_j, z_j) поизвольно выбранных точек $p_j \in M$, $\alpha_k = (\alpha_k(p_j) + o(1))\, dz_j$ и значит, $\frac{1}{\Delta z_j} \int_{\delta_j} \alpha \to \alpha_k(p_j)$ при $\Delta z_j \to 0$, если δ_j – путь в U_j из p_j (соответствующей $z_j = 0$) в точку с координатой Δz_j. $\Longrightarrow$ Указанное отображение $M^g \to \operatorname{Jac} M$ голоморфно и матрица Якоби соответствующего отображения $M^g \to \mathbb{C}^g$ в точке $(p_1, \ldots, p_g)$ равна $(\alpha_k(p_j))$. Так как $\det(\alpha_k(p_j)) \not\equiv 0$ на M^g (см. упражнение 9.11), то $\mathbb{C}$-размерность образа при отображении $M^g \to \operatorname{Jac} M$ равна g. Так как многообразия M^g и $\operatorname{Jac} M$ компактны, то это отображение собственное. По теореме Реммерта из многомерного комплексного анализа (см., например, [Ч]), образом M^g должно быть всё $\operatorname{Jac} M$. $\rhd$

О единственности. Если $(p_j), (p'_j) \in M^g$ дают один и тот же набор $(c_k) \in \mathbb{C}^g$ то по теореме Абеля $\exists\, f \in \mathcal{M}_*(M)$ с дивизором $(f) = \sum([p'_j] - [p_j])$. Если $(f) \neq 0$ (т.е. (p'_j) не является перестановкой набора (p_j)) и $D := \sum [p_j]$, то $\mathcal{O}_D$ содержит константы и функцию $f \not\equiv \text{const} \Longrightarrow$ неравенство Римана (2) для D строгое ($>$). Такие дивизоры (со строгим неравенством Римана) называются *специальными.* Согласно (2) они характеризуются тем, что $\dim \Omega^1_{-D} > 0$, т.е. существует $\alpha \in \Omega^1(M) \setminus 0$ такая, что $\alpha(p_j) = 0$

$\forall\, j$. Множество таких $(p_j) \in M^g$ нигде не плотно (см. упражнение 9.11), следовательно, для "общих" $(c_k) \in \mathbb{C}^g$ дивизор $\sum[p_j]$ определён однозначно.

На первый взгляд, теорема Якоби носит отрицательный характер: любой набор $(c_k) \in \mathbb{C}^g$ является препятствием в теореме Абеля. "Положительное" её содержание заключается в фиксированном числе g: если $D_+ = \sum_1^d [p_j]$ и $d > g$, то для построения мероморфной функции с дивизором $D = D_+ - D_-$, дивизор $D_- = \sum_1^d [q_j]$ фиксирован жёстко, $d-g$ точек $p_j,\;\; j = g+1, \ldots, d$, можно задать произвольно; теорема Якоби гарантирует, что существуют ещё g каких-то точек $p_j,\;\; j = 1, \ldots, g$, компенсирующих этот произвол (так, что D является дивизором некоторой мероморфной функции). Весьма трансцендентная задача локализации этих неопределённых g точек, тем более их явное нахождение, по существу и составляет содержание так называемой *проблемы обращения Якоби* (хотя в ряде текстов теорема Якоби подаётся как решение проблемы обращения). Тем не менее, если d много больше g, то указанная неопределённость в ряде задач или контролируется или бывает не очень существенна...

* * * * *

Упражнения.

M – компактная риманова поверхность рода g.

1. Дивизор $D \geqslant 0 \Longrightarrow \exists\, \alpha \in \Omega^1(M)$ такая, что носители дивизоров (α) и D не пересекаются.

$p_1, p_2, \ldots$ – произвольная последовательность точек на $M \Longrightarrow \exists\, \alpha \in \Omega^1(M)$ такая, что $\alpha|_{p_j} \neq 0\;\; \forall j$.

2. Привести пример канонического дивизора на $\mathbb{P}_1$.

3. $f\colon \widetilde{M} \to M$ – голоморфное n-листное отображение, W_f – дивизор df (относительно локальных координат) [= дивизор ветвления отображения f]. Доказать формулу Римана–Гурвица: $\tilde{g} = ng + \frac{1}{2}\deg W_f - n + 1$.

4. $f\colon M \to \mathbb{P}_1$ – мероморфная функция, W_f – её дивизор ветвления $\Longrightarrow \mathbb{K}_M = f^*(\mathbb{K}_{\mathbb{P}_1}) + W_f$ (соотношение канонических дивизоров). Вывести отсюда формулу для $\deg \mathbb{K}_M$.

5. Как выглядят формула Римана–Роха и задача Вейерштрасса для $\mathbb{P}_1$? Доказать и решить.

6. A – фиксированный дивизор степени $g \Longrightarrow$ всякий дивизор D степени 0 имеет вид $D = B - A + (f)$, где $B \geqslant 0$ и $f \in \mathcal{M}_*(M)$.

7. Кривая $S_n\colon z_0^n + z_1^n + z_2^n = 0$ в $\mathbb{P}_2$ при $n \geqslant 4$ не является гиперэллиптической римановой поверхностью, т.е. не существует 2-листного голоморфного отображения $S_n \to \mathbb{P}_1$.

8. $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{2g}$ – базис целочисленных 1-циклов на M, $\alpha_1, \dots, \alpha_g$ – базис в $\Omega^1(M) \Longrightarrow$ векторы $\left(\int_{\Gamma_k} \alpha_1, \dots, \int_{\Gamma_k} \alpha_g\right)$, $k = 1, \dots, 2g$, $\mathbb{R}$-линейно независимы.

9. (продолжение) Существует окрестность начала координат в $\mathbb{C}^g$, не содержащая никаких целочисленных линейных комбинаций векторов $\left(\int_{\Gamma_k} \alpha_1, \dots, \int_{\Gamma_k} \alpha_g\right)$, кроме 0.

10. Многообразия Якоби, построенные по различным базисам $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{2g}$; $\alpha_1, \dots, \alpha_g$ и $\Gamma'_1, \dots, \Gamma'_{2g}$; $\alpha'_1, \dots, \alpha'_g$, биголоморфно эквивалентны.

Точка $p \in M$ называется *точкой Вейерштрасса*, если существует $f \in \mathcal{M}(M)$, единственный полюс которой есть точка p, причём порядок этого полюса $\leqslant g$.

11. p – точка Вейерштрасса $\Longleftrightarrow \exists\, \alpha \in \Omega^1(M) \setminus 0$ с нулём порядка $\geqslant g$ в точке p.

12. (U, z) – карта на M с центром p, $\alpha_1, \dots, \alpha_g$ – базис $\Omega^1(M)$, $f_k := \alpha_k/dz \in \mathcal{O}(U)$, $f_k^{(\nu)} := d^\nu f_k/dz^\nu$, $\nu = 0, \dots, g-1$, $W := \det(f_k^{(\nu)})$ – определитель Вронского. Доказать, что p – точка Вейерштрасса тогда и только тогда, когда $W(p) = 0$. Вывести отсюда, что число точек Вейерштрасса на M конечно.

Лекция 11

Расслоения и дивизоры – Дивизоры и расслоения – Классы Черна – Риман–Рох для расслоений – Вложения в $\mathbb{P}_n$ – И опять алгебраические кривые

6. Расслоения и дивизоры. Стандартная конструкция векторного расслоения над многообразием M: задаётся "тривиализующее" открытое покрытие $M = \bigcup U_j$ и на попарных пересечениях его элементов задаются "функции перехода" g_{kj} – матрицы $r \times r$ с элементами, голоморфными (гладкими, непрерывными и т.п.) на $U_j \cap U_k$, согласованные между собой условиями коцикла: $g_{kj}g_{jk} = \mathbb{I}$, $\;g_{kj}g_{jl}g_{lk} = \mathbb{I}$ там, где левые части определены. В дизъюнктном объединении $\bigsqcup(U_j \times \mathbb{C}^r_{w_j})$ (несвязном комплексном многообразии с естественной проекцией на M) вводится отношение эквивалентности: $(p, w_k) \sim (p, w_j)$, если $w_k = g_{kj}(p)w_j$ (w_j – это столбец из $w_{j1}, \ldots, w_{jr}$). Фактор-многообразие $\mathcal{L} := \big(\bigsqcup(U_j \times \mathbb{C}^r_{w_j})\big)/\sim$ является, очевидно, голоморфным векторным расслоением над M ранга r.

Большой произвол в этой конструкции (особенно в выборе покрытия) компенсируется понятием эквивалентности расслоений. Голоморфные векторные расслоения $\mathcal{L} \xrightarrow{\pi} M$ и $\mathcal{L}' \xrightarrow{\pi'} M$ называются эквивалентными, если существует биголоморфное отображение $F\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$, перестановочное с проекцией, $\pi' \circ F = \pi$, и такое, что все отображения $F|\,\mathcal{L}_p \to \mathcal{L}'_p,\; p \in M$, линейные. Как правило, эквивалентные расслоения считаются равными, а их индивидуальные конструкции – просто различными представлениями-реализациями одного и того же расслоения. Например, не меняя расслоения, элементы тривиализующего покрытия можно уменьшать, не меняя функций перехода; можно измельчать покрытие, скажем, $U_j = \bigcup U_j^\nu$, добавляя тождественные переходы ($= \mathbb{I}$) на $U_j^\nu \cap U_j^\mu$ и оставляя исходные g_{kj} на $U_j \cap U_k$, и т.д.

Процедура локальной тривиализации, обратная к описанной выше факторизации $\bigsqcup(U_j \times \mathbb{C}^r_{w_j})$ по коциклу $\{g_{kj}\}$ далеко не однозначна: если F_j – произвольные обратимые $r \times r$-матрицы с элементами, голоморфными в соответствующих U_j, и $w'_j := F_j w_j$, то $\pi^{-1}(U_j)$ биголоморфно также $U_j \times \mathbb{C}^r_{w'_j}$, с переходами $w'_k = (F_k\, g_{kj} F_j^{-1})w'_j$. Поэтому коциклы $\{g_{kj}\}$ и $\{F_k\, g_{kj} F_j^{-1}\}$ считаем эквивалентными. Легко доказывается, что

Расслоения $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$ *над* M *с общим тривиализующим покрытием* (U_j) *эквивалентны тогда и только тогда, когда коциклы, соответствующие (каким-либо) их тривиализациям эквивалентны.*

Отметим, между прочим, что если (U_j) – тривиализующее покрытие для $\mathcal{L}$, а (U'_ν) – для $\mathcal{L}'$ то $(U_j \cap U'_\nu)$ – общее тривиализующее покрытие и для $\mathcal{L}$ и для $\mathcal{L}'$, так что установление эквивалентности по коциклам вполне конструктивно.

Расслоения ранга $r = 1$ называются *линейными*; никаких других у нас дальше и не будет.

Пусть $D = \sum n_j\,[p_j]$ – произвольный дивизор на р.п. M и (U_j) – покрытие некомпактными открытыми множествами. Согласно лекции 10(3) в каждой U_j есть мероморфная функция f_j с дивизором $(f_j) = D|_{U_j}$. Поэтому $f_k/f_j =: g_{kj} \in \mathcal{O}(U_j \cap U_k)$ и $\{g_{kj}\}$, очевидно, есть коцикл. Линейное голоморфное расслоение, определяемое этим коциклом, обозначается через $\mathcal{L}_D$ и называется *расслоением дивизора* D. По построению, $\mathcal{L}_D$ обладает глобальным мероморфным сечением, $\{f_j\}$ в координатном представлении.

Если $\tilde{f}_j$ – другие решения задачи Вейерштрасса то функции $F_j := \tilde{f}_j/f_j$ голоморфны и нигде не равны нулю в U_j и коцикл $\{\tilde{g}_{kj} := \tilde{f}_k/\tilde{f}_j = F_k\, g_{kj} F_j^{-1}\}$ эквивалентен $\{g_{kj}\}$. Понятно, что и при замене покрытия тоже получится эквивалентное расслоение, так что определение $\mathcal{L}_D$ корректно, это расслоение зависит только от D. Более того,

Дивизоры D *и* $\widetilde{D}$ *эквивалентны тогда и только тогда, когда их расслоения* $\mathcal{L}_D$ *и* $\mathcal{L}_{\widetilde{D}}$ *эквивалентны.*

$\lhd$ В самом деле, пусть (U_j) – общее тривиализующее покрытие для $\mathcal{L}_D$, $\mathcal{L}_{\widetilde{D}}$ и $g_{kj} = f_k/f_j$, $\tilde{g}_{kj} = \tilde{f}_k/\tilde{f}_j$ – коциклы, соответствующие описанным выше тривиализациям.

Если $\widetilde{D} = D + (f)$ с $f \in \mathcal{M}_*(M)$ то $(\tilde{f}_j) = (f_j f)$, значит, $F_j := \tilde{f}_j/(f_j f) \in \mathcal{O}(U_j)$ вместе с $1/F_j$ и $\tilde{g}_{kj} = (F_k f_k f)/(F_j f_j f) = F_k\, g_{kj} F_j^{-1} \Longrightarrow$ коциклы эквивалентны.

Обратно, если они эквивалентны, то $\tilde{f}_k/\tilde{f}_j = F_k(f_k/f_j)F_j^{-1}$ и значит, $f := (\tilde{f}_j/(f_j F_j)$ в $U_j)$ – единая мероморфная функция на M, причём $(f) = \widetilde{D} - D$. $\rhd$

7. Дивизоры и расслоения. Какие линейные расслоения представимы как расслоения некоторых дивизоров? Оказывается – все.

Предложение. *Всякое голоморфное линейное расслоение $\mathcal{L}$ на компактной римановой поверхности имеет глобальное ненулевое мероморфное сечение. Если D – дивизор этого сечения, то $\mathcal{L} = \mathcal{L}_D$.*

$\lhd$ Первая часть. Если $\mathcal{O}_{\mathcal{L}} \neq 0$, то вот они, глобальные сечения (даже голоморфные). Пусть теперь $\mathcal{O}_{\mathcal{L}} = 0$, $(U_j)_1^\infty$ – тривиализующее покрытие, $\{g_{kj}\}$ – коцикл локальной тривиализации и $p \in U_1 \setminus \big(\bigcup_2^\infty U_j\big)$ (можно считать, что это непустое множество). Тогда, очевидно, $[p]$ – поток бистепени $(1,1)$ со значениями в $\mathcal{L}^*$ (линейный непрерывный функционал на гладких сечениях $\mathcal{L}$ над M). По двойственности Серра (лекция 8(9)) $H^{1,1}_{\mathcal{L}^*}(M) = 0 \Longrightarrow \exists$ поток S бистепени $(1,0)$ со значениями в $\mathcal{L}^*$ такой, что $[p] = \bar\partial S$. $\Longrightarrow S$ – голоморфная $\mathcal{L}^*$-значная форма на $M \setminus p$, которая в точке p имеет полюс первого порядка. Согласно лекции 9(14) существует мероморфная форма ϕ на M с единственным полюсом порядка 2 (и вычетом 0) в точке p. По определению форм со значениями в расслоениях, лекция 8(8) отношение S/ϕ является глобальным мероморфным сечением $\mathcal{L}^*$. Так как $g^*_{kj} = 1/g_{kj}$, то $s := \phi/S$ – глобальное мероморфное сечение $\mathcal{L}$.

Вторая часть. Пусть $s = \{s_j\}$ – координатное представление и $D = (s)$ – дивизор s. По построению $\mathcal{L}_D$, функциями переходов для него являются $s_k/s_j = (\phi/S_k)/(\phi/S_j) = g_{kj}$. $\Longrightarrow \mathcal{L}_D = \mathcal{L}$. $\rhd$

Следствие. *Если $\mathcal{L} = \mathcal{L}_D$, то $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}_{-D}$.*

Следствие. *Если $s, \tilde s$ – ненулевые глобальные мероморфные сечения $\mathcal{L}$, то дивизоры (s), $(\tilde s)$ эквивалентны.*

Таким образом, отображение $[D] \mapsto [\mathcal{L}_D]$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между классами эквивалентностей дивизоров и голоморфных линейных расслоений на р.п. M (на некомпактной р.п. оба эти множества тривиальны, см. упражнение 11.1).

Дивизоры образуют группу по сложению, причём эта операция переносится и на классы, $[D] + [\widetilde D] := [D + \widetilde D]$, т.е. множество классов эквивалентности дивизоров образует абелеву группу, которую обозначим через $\operatorname{Div} M$.

Если $\{s_j\}$, $\{\tilde{s}_j\}$ – соответствующие мероморфные сечения $\mathcal{L}_D$, $\mathcal{L}_{\widetilde{D}}$, то $\{s_j\tilde{s}_j\}$ – сечение $\mathcal{L}_{D+\widetilde{D}}$ (при умножении мероморфных функций их дивизоры складываются). $\Longrightarrow$ Функциями перехода для $\mathcal{L}_{D+\widetilde{D}}$ будут $\{g_{kj}\tilde{g}_{kj}\}$. Расслоение с такими переходами называется тензорным произведением $\mathcal{L}$, $\tilde{\mathcal{L}}$ (обозначается $\mathcal{L}\otimes\tilde{\mathcal{L}}$). Относительно тензорного произведения, классы эквивалентности голоморфных линейных расслоений образуют, очевидно, абелеву группу $\operatorname{Pic} M$, которая называется *группой Пикара* многообразия M. Таким образом, мы получаем, что

Соответствие $[D]\mapsto[\mathcal{L}_D]$ *классов эквивалентностей дивизоров и голоморфных линейных расслоений является изоморфизмом групп*, $\operatorname{Div} M\cong\operatorname{Pic} M$.

Ввиду такой тесной связи, неудивительно, что

Пространство голоморфных сечений $\mathcal{O}_{\mathcal{L}}$ *расслоения* $\mathcal{L}=\mathcal{L}_D$ *над* M *изоморфно пространству* $\mathcal{O}_D$ *мероморфных функций* f *на* M *таких, что* $(f)+D\geqslant 0$.

Пространство $\Omega^1_{\mathcal{L}}$ *голоморфных форм на* M *со значениями в* $\mathcal{L}$ *изоморфно пространству* Ω^1_D *мероморфных форм* ϕ *на* M *таких, что* $(\phi)+D\geqslant 0$.

$\lhd$ Часть первая. Пусть $s=\{s_j\}$ – голоморфное сечение $\mathcal{L}$ и $\{f_j\}$ – мероморфное сечение расслоения $\mathcal{L}_D$ из его конструкции выше (всё над M.) Тогда $s_k=(f_k/f_j)s_j$ т.е. $f=(s_j/f_j$ в $U_j)$ – глобальная мероморфная функция на M, причём в U_j, $(f)+D=(f)+(f_j)=(s_j)\geqslant 0$, т.е. $f\in\mathcal{O}_D$.

Обратно, если $f\in\mathcal{O}_D$, то $\{ff_j=:s_j\}$ – глобальное голоморфное сечение $\mathcal{L}$.

Часть вторая. $\alpha=\{\alpha_j\}\in\Omega^1_{\mathcal{L}}\Longrightarrow\phi=\{\alpha_j/f_j\}$ – мероморфная форма на M с дивизором $(\phi)=(\alpha_j)-D$ в U_j. $\Longrightarrow(\phi)+D\geqslant 0$. Обратно, если $\phi\in\Omega^1_D$, то $\{\phi f_j=:\alpha_j\}$ – глобальная голоморфная форма со значениями в $\mathcal{L}$. $\rhd$

8. Классы Черна. Так как для всякого дивизора D расслоение $\mathcal{L}_D$ обладает глобальным мероморфным сечением, то можно попробовать найти аналитическую связь между D и сечениями $\mathcal{L}_D$, типа формулы Пуанкаре–Лелона. Сразу отметим, что однозначного соотношения быть не может, поскольку расслоение определяется не конкретным дивизором, а его классом эквивалентности в $Div\,M$, т.е. дивизор сечения будет эквивалентным D, но не обязательно равным. Тогда спросим по-другому: можно ли аналитически выразить дивизор данного мероморфного сечения через само сечение, есть ли здесь что-нибудь похожее на формулу Пуанкаре–Лелона?

Для этого, прежде всего, хорошо бы иметь понятие “модуля” сечения. Канонически-однозначно определить его опять-таки невозможно – ввиду неоднозначности локальных тривиализаций (т.е. выборов “вертикальных” координат), как отмечалось выше. Поэтому довольствуемся следующим общепринятым определением. *Метрикой* в линейном расслоении $\mathcal{L}$ с тривиализующим покрытием (U_j) и коциклом перехода $\{g_{kj}\}$ называется набор $h = \{h_j\}$ положительных гладких функций $h_j \in C^\infty(U_j)$ таких, что $h_k = |g_{jk}|^2 h_j$ в $U_k \cap U_j$. Если (λ_j) – разбиение единицы, соответствующее (U_j), то можно взять $h_j := \Pi_\nu |g_{\nu j}|^{2\lambda_\nu}$; таким образом, метрика существует на любом линейном расслоении. (Ясно, что h есть сечение $\mathbb{R}$-линейного расслоения, соответствующего коциклу $|g_{jk}|^2$, которое тривиально в классе гладких расслоений.)

Модуль (поточечная норма) сечения $s = \{s_j\}$ расслоения $\mathcal{L}$ с метрикой h есть по определению неотрицательная функция $|s|_h$, квадрат которой равен $|s_j|^2 h_j$ в U_j.

Если сечение s глобальное мероморфное, то, согласно формуле Пуанкаре – Лелона (лекция 7(3)) в каждой U_j, дивизор этого сечения как поток степени 2 (бистепени $(1,1)$) на M представляется в виде

$$(s) = \frac{i}{\pi}\partial\bar{\partial}\ln|s|_h + c_1(h). \qquad (*)$$

Здесь $c_1(h)$ – гладкая 2-форма на M, равная $\frac{1}{2\pi i}\partial\bar{\partial}\ln h_j$ в U_j (определение корректно, так как $\partial\bar{\partial}\ln|g_{jk}| = 0$ на $U_k \cap U_j$); она называется *формой Черна* метрики h и компенсирует в формуле $(*)$ для дивизора произвол выбора этой метрики.

На первый взгляд, ввиду богатого выбора метрик h, форма $c_1(h)$ тоже весьма произвольна, однако это далеко не так. Вычисляя степень дивизора (s) (равную $[s](1)$) по формуле $(*)$, мы находим, что $\deg(s) = [s](1) = \int_M \frac{i}{\pi}\partial\bar{\partial}\ln|s|_h + \int_M c_1(h)$. Первый интеграл равен нулю по формуле Стокса, второй есть $[c_1(h)](1)$ и, значит, $\deg(s) = [c_1(h)](1)$. В частности, если h, $\tilde{h}$ – различные метрики в $\mathcal{L}$, то $[c_1(h) - c_1(\tilde{h})](1) = 0$ и, следовательно, форма $c_1(h) - c_1(\tilde{h})$ точна см. лекцию 9(2) (и $\bar{\partial}$-точна, но нам здесь это не понадобится). Таким образом, класс эквивалентности формы $c_1(h)$ в $H^2(M,\mathbb{R})$ не зависит от выбора метрики h; он называется (первым) *классом Черна* расслоения $\mathcal{L}$ и обозначается через $c_1(\mathcal{L})$.

(Так как $[c_1(h)](1) = \deg(s)$ – целое число, то $c_1(\mathcal{L})$ является *целочисленным* классом, т.е. лежит в образе $H^2(M,\mathbb{Z})$ (когомологии Чеха, которые мы тут не обсуждаем) при естественном вложении $H^2(M,\mathbb{Z}) \hookrightarrow H^2(M,\mathbb{R})$.) Полученное выше равенство переписывается в виде $\deg(s) = [c_1(\mathcal{L})](1)$ и это общее значение называется *степенью* линейного расслоения $\mathcal{L}$, обозначается $\deg \mathcal{L}$, или *числом Черна*, обозначается $c_1(\mathcal{L}, M)$.

Примеры. 1) $T^{1,0}M$, голоморфное кокасательное расслоение с функциями перехода $g_{kj} = dz_j/dz_k$, соответствующими покрытию M картами (U_j, z_j). Произвольная голоморфная форма $\alpha \in \Omega^1(M)$, в координатном представлении $\alpha = \alpha_j\, dz_j$, определяет глобальное голоморфное сечение $\{\alpha_j\}$ этого расслоения, ну и наоборот. Таким образом, $\mathcal{O}_{T^{1,0}M} = \Omega^1(M)$. Так как $(\alpha) = \mathbb{K}$, канонический дивизор (если $\alpha \not\equiv 0$), то $T^{1,0}M = \mathcal{L}_{\mathbb{K}}$ называется *каноническим расслоением* р.п. M.

Двойственное к нему расслоение $T_{1,0}M$ (с коциклом переходов dz_k/dz_j) называется *голоморфным касательным расслоением* (в классе гладких расслоений оно, как легко видеть, эквивалентно обычному касательному расслоению). Так как $\frac{\partial}{\partial z_k} = \left(\frac{dz_j}{dz_k}\right)\frac{\partial}{\partial z_j}$, то его сечениями являются комплексные векторные поля типа $(1,0)$, $\tau = \tau_j\, \partial/\partial z_j$, в частности, голоморфные векторные поля.

Если $h = \{h_j\}$ – метрика в $\mathcal{L}$ то $\{1/h_j\}$ – метрика в $\mathcal{L}^*$. Поэтому $c_1(T_{1,0}M) = -c_1(T^{1,0}M)$ и $\deg T^{1,0}M = \deg \mathbb{K} = 2g-2$, а $\deg T_{1,0}M = 2-2g$. Из этого следует, в частности, что

На компактной р.п. рода $g > 1$ нет ненулевых глобальных голоморфных полей, обязательно должны быть полюса или другие особенности.

2) Метрики на $T_{1,0}M$ – это в точности конформные римановы метрики, которые рассматривались в лекции 5(3), $\rho = \rho_j(dx_j^2 + dy_j^2) = \rho_j\,|dz_j|^2$ в U_j. Соответствующая форма площади равна $\omega_\rho = \rho_j\, dx_j \wedge dy_j = \frac{i}{2}\rho_j\, dz_j \wedge d\bar{z}_j$ и форма Черна $c_1(\rho) = \frac{1}{2\pi i}\partial\bar{\partial}\ln\rho_j = -\frac{1}{4\pi}\Delta_j(\ln\rho_j)\, dx_j \wedge dy_j$, где Δ_j – оператор Лапласа в U_j. Представим это в виде $c_1(\rho) = \frac{1}{2\pi}K_\rho\,\omega_\rho$, где функция $K_\rho := -\frac{\Delta_j \ln\rho_j}{2\rho_j}$ в U_j есть классическая гауссова кривизна римановой метрики ρ (относительно конформных координат (x_j, y_j) в U_j). Так как любая риманова метрика на ориентированной поверхности M является конформной метрикой некоторой комплексной структуры J на M (см. лекцию 6(10))

и $\deg T_{1,0}M = 2 - 2g$, эйлерова характеристика, то отсюда получается *формула Гаусса – Бонне*

$$\frac{1}{2\pi}\int_M K_\rho\,\omega_\rho = \chi(M),$$

справедливая таким образом для произвольной римановой метрики ρ на произвольной компактной ориентируемой поверхности M.

9. Риман–Рох для расслоений. Учитывая вышеизложенное, величины, входящие в классическую формулу Римана–Роха, лекция 10(2), можно выразить в терминах расслоений. Согласно (6) для $\mathcal{L} = \mathcal{L}_D$ имеем $\mathcal{O}_D = \mathcal{O}_\mathcal{L}$ и $\Omega^1_{-D} = \Omega^1_{\mathcal{L}^*}$, так как $(\mathcal{L}_D)^* = \mathcal{L}_{-D}$. $\Longrightarrow$ Левая часть формулы Р–Р равна $\dim\mathcal{O}_\mathcal{L} - \dim\Omega^1_{\mathcal{L}^*}$ (см. доказательство в лекции 10(2)). По двойственности Серра (лекция 8(9)) для компактной р.п. M $\dim\Omega^1_{\mathcal{L}^*} = \dim H^{0,1}_\mathcal{L}$ (все размерности – над полем $\mathbb{C}$, все сечения – над всей M). Обозначим через $\bar\partial_\mathcal{L}$ оператор $\bar\partial\colon \Lambda^0_\mathcal{L} \to \Lambda^{0,1}_\mathcal{L}$, действующий из линейного пространства гладких глобальных сечений $\mathcal{L}$ в пространство гладких форм бистепени $(0,1)$ на M со значениями в $\mathcal{L}$, и напомним, что $H^{0,1}_\mathcal{L} := \Lambda^{0,1}_\mathcal{L}/\bar\partial\,\Lambda^0_\mathcal{L}$. Следовательно, $\dim H^{0,1}_\mathcal{L} = \operatorname{codim}(\operatorname{im}\bar\partial_\mathcal{L} = \bar\partial\Lambda^0_\mathcal{L}) = \dim(\operatorname{coker}\bar\partial_\mathcal{L})$.

Для произвольного непрерывного линейного отображения $A\colon L_1 \to L_2$ линейных топологических пространств, имеющего конечномерные ядро и коядро, число $\dim\ker A - \dim\operatorname{coker} A$ называется *индексом* A и обозначается $\operatorname{ind} A$.

У нас $\ker\bar\partial_\mathcal{L} = \mathcal{O}_\mathcal{L}$. Так как M компактна (что мы предполагаем), то пространства $\mathcal{O}_\mathcal{L}$ и $\Omega^1_{\mathcal{L}^*}$ конечномерны. (Из всякой последовательности ограниченных голоморфных функций в координатных окрестностях U_j можно выделить подпоследовательность, сходящуюся равномерно на $V_j \Subset U_j$, $\bigcup V_j = M$; покрытия конечные, а сечения в координатных представлениях – это те же функции; таким образом указанные линейные пространства имеют компактные окрестности нуля и, значит, (функ-ан.) конечномерны.) Значит, левая часть формулы Р–Р равна $\operatorname{ind}\bar\partial_\mathcal{L}$. В правой части $\deg D = c_1(\mathcal{L}, M)$ и таким образом дивизор D в формуле исчезает, заменяясь (своим) расслоением. Результат:

Теорема Римана–Роха. *M – компактная риманова поверхность рода g, $\mathcal{L}$ – голоморфное линейное расслоение на M* $\Longrightarrow \operatorname{ind}\bar\partial_\mathcal{L} = c_1(\mathcal{L}, M) - g + 1$.

(В частности, для тривиального расслоения $\mathcal{L} = M \times \mathbb{C}$, $\bar{\partial}_{\mathcal{L}}$ – это обычный $\bar{\partial}\colon \Lambda^0 \to \Lambda^{0,1}$, $c_1(\mathcal{L}, M) = 0$ (упражнение 11.7) и, значит, $\operatorname{ind}\bar{\partial} = 1 - g$; впрочем, это очевидно следует и из классической формулы Р–Р для дивизора $D = 0$.)

В таком виде теорема ещё раз подчёркивает центральную роль оператора $\bar{\partial}$ и допускает различные обобщения, скажем, на комплексные многобразия бо́льших размерностей и на расслоения произвольных рангов. Сформулируем последнее.

Теорема*. *$\mathcal{L}$ – голоморфное векторное расслоение ранга r на компактной римановой поверхности M рода g* $\Longrightarrow \operatorname{ind}\bar{\partial}_{\mathcal{L}} = c_1(\mathcal{L}, M) - r(g-1)$.

(Напоминаем, что класс Черна $c_1(\mathcal{L})$ расслоения с коциклом переходов $\{g_{kj}\}$ по определению равен классу Черна $c_1(\det\mathcal{L}) \in H^2(M, \mathbb{R})$ линейного расслоения с коциклом переходов $\{\det g_{kj}\}$ и, понятно, $c_1(\mathcal{L}, M) = \int_M c_1(\mathcal{L})$.)

Поясним, откуда здесь появляется ранг. Если $\mathcal{L}$ – прямое (послойное) произведение r линейных расслоений $\mathcal{L}_\nu$ (т.е. матрицы перехода диагональные), то $\mathcal{O}_{\mathcal{L}}$ и $\Omega^1_{\mathcal{L}^*}$ изоморфны прямым суммам пространств $\mathcal{O}_{\mathcal{L}_\nu}$ и $\Omega^1_{\mathcal{L}^*_\nu}$. Пишем для каждого слагаемого формулу Римана–Роха и складываем; равенство $c_1(\mathcal{L}) = \sum c_1(\mathcal{L}_\nu)$ в этом случае легко проверяется.

В общем случае любое голоморфное векторное расслоение допускает ненулевое глобальное мероморное сечение (упражнение 11.4) и, как следствие, имеет голоморфное линейное подрасслоение (по которому можно факторизовать, уменьшая ранг на единицу); таким образом, доказательство проходит индукцией по рангу r.

10. Вложения в $\mathbb{P}_n$. Голоморфные расслоения хороши тем, что они значительно обогащают класс голоморфных, неособых объектов (за счёт технических усложнений, которые не так существенны, особенно в многомерном случае). Посмотрим это на примере голоморфных вложений компактных р.п. в комплексное проективное пространство.

Начнём с канонического расслоения $\mathcal{L}_{\mathbb{K}} = T^{1,0}M$, голоморфные сечения которого – это обычные голоморфные формы. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_g$ – базис в $\Omega^1(M)$ и $g > 1$. В области $U_j = \{p\colon \alpha_j|_p \neq 0\}$ отношения α_k/α_j являются голоморфными функциями. Так как U_j покрывают всю M (см. упражнение 9.10), то мы получаем корректно определённое голоморфное отображение

$F\colon M \to \mathbb{P}_{g-1}$, при котором $U_j \ni p \mapsto F(p) = (\alpha_1\colon \ldots : \alpha_g) := [(\alpha_1/\alpha_j)(p), \ldots, (\alpha_g/\alpha_j)(p)] \in \mathbb{P}_{g-1}$. Если выбрать другой базис в $\Omega^1(M)$, то такое другое отображение будет получаться из F дополнительным дробно-линейным (линейным относительно однородных координат) преобразованием $\mathbb{P}_{g-1}$, т.е. по существу получается то же самое.

Допустим, что $F(p) = F(q)$ для некоторых $p \neq q$ и рассмотрим дивизор $D = [p] + [q]$. Подпространство $\Omega^1_{-D} \subset \Omega^1(M)$ определяется тогда всего одним линейным условием $\alpha|_p = 0$; значит, $\dim \Omega^1_{-D} = g - 1$ и, по теореме Римана – Роха, $\dim \mathcal{O}_D = 2$. $\Longrightarrow \exists$ мероморфная функция f на M с простыми полюсами в точках p, q и в остальном голоморфная. По теореме о равнораспределении значений (лекция 7(3)) $f\colon M \to \mathbb{P}_1$ – двулистное отображение, т.е. M – гиперэллиптическая р.п.

Дифференциал F в точке $p \in (U, z)$ вырожден, если

$$(\alpha/dz)'(p) = 0 \qquad \forall\, \alpha \in \Omega^1(M).$$

Для такой точки p и дивизора $D = 2[p]$ пространство Ω^1_{-D} задаётся тем же одним уравнением $\alpha|_p = 0$, значит, опять $\dim \mathcal{O}_D = 2$. $\Longrightarrow \exists$ мероморфная функция с единственным полюсом порядка 2 в точке p, т.е. опять M – гиперэллиптическая. Итог:

Если M не гиперэллиптическая, то каноническое отображение

$$M \ni p \mapsto (\alpha_1\colon \ldots : \alpha_g)|_p \in \mathbb{P}_{g-1}$$

является голоморфным вложением.

Образ M при каноническом вложении называется *канонической кривой* в $\mathbb{P}_{g-1}$ и не зависит от биголоморфно эквивалентных реализаций M: если M' биголоморфна M, то образ M' при каноническом вложении получается из образа M некоторым дробно-линейным автоморфизмом $\mathbb{P}_{g-1}$.

(Что происходит с гиперэллиптическими поверхностями, см. упражнение 11.9.)

Для общего линейного расслоения степени $\deg \mathcal{L} > g$ пространство $\mathcal{O}_{\mathcal{L}}$ глобальных голоморфных сечений имеет размерность $\geqslant \deg \mathcal{L} - g + 1 > 1$ (неравенство Римана) и если $s_0, \ldots, s_n \in \mathcal{O}_{\mathcal{L}}$, то отображение $p \mapsto (s_0\colon \ldots : s_n)|_p$ определено и голоморфно всюду, кроме *базовых точек* системы, т.е. точек, в которых все $s_j = 0$. Так как сечения можно умножать на мероморфные функции, то условие $\deg \mathcal{L} > g$ гарантирует существование двух голоморфных сечений без общих нулей (упражнение 11.10). Ещё повышая степень расслоения, можно подобрать его сечения так, что $p \mapsto [s_0, \ldots, s_n]|_p$ будет вложением (уже без всяких ограничений на гиперэллиптичность). Детали опускаем (принцип ясен), зафиксируем результат:

Любая компактная риманова поверхность допускает голоморфное вложение в некоторое $\mathbb{P}_n$.

(Вместо сечений тут можно было, конечно, использовать и обычные мероморфные функции, сначала вкладывая M в $(\mathbb{P}_1)^n$, а затем используя то, что многообразие $(\mathbb{P}_1)^n$ само голоморфно вкладывается в $\mathbb{P}_N$ (с $N = 2n+1$); но мы продемонстрировали общий метод, который работает и для многомерных комплексных многообразий.)

При $n > 3$ проекция из общей точки $a \in \mathbb{P}_n$ в $a^\perp \cong \mathbb{P}_{n-1}$ любой гладкой голоморфной кривой S в $\mathbb{P}_n$ будет гладкой (без особенностей) голоморфной кривой в $\mathbb{P}_{n-1}$. Так дойдём до $\mathbb{P}_3$. Касательные комплексные прямые (сферы) к гладкой голоморфной кривой S в $\mathbb{P}_3$ образуют комплексно-аналитическое множество размерности 2 $\Longrightarrow$ проекция $\mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_2$ из произвольной точки вне этого множества задаёт погружение S в $\mathbb{P}_2$. Слегка варьируя центр проектирования, получаем результат:

Любая компактная риманова поверхность допускает голоморфное вложение в $\mathbb{P}_3$ *и голоморфное погружение, с простейшими двойными трансверсальными самопересечениями, в* $\mathbb{P}_2$.

Вложить в $\mathbb{P}_2$ можно далеко не всякую поверхность (см. упражнение 11.11).

Что касается некомпактных поверхностей, то для них ситуация аналогичная: повторяя стандартное доказательство теоремы Уитни о вложении и используя теорему Рунге (упражнение 8.3), нетрудно доказать, что

Всякая некомпактная риманова поверхность допускает собственное голоморфное вложение в $\mathbb{C}^3$ *и собственное погружение с простейшими особенностями в* $\mathbb{C}^2$.

11. И опять алгебраические кривые. По теореме Чжоу всякое комплексное аналитическое подмножество (в частности, всякая компактная голоморфная кривая) в $\mathbb{P}_n$ является алгебраическим, т.е. множеством общих нулей некоторой (конечной) системы однородных многочленов. Для голоморфных кривых (образов компактных р.п., как выше) это доказывается довольно просто.

Лемма. *Пусть* $f\colon M \to \mathbb{P}_1$ *– мероморфная функция степени* n *на компактной р.п. и* h *– произвольная другая мероморфная функция на* M. *Тогда существует многочлен Вейерштрасса* $P(z,w) = w^n + a_1(z)w^{n-1} + \dots + a_n(z)$ *с рациональными коэффициентами такой, что* $P(f(p), h(p)) \equiv 0$ *на* $M \setminus \{$*конечное множество особых точек*$\}$.

$\lhd$ По определению степени число решений уравнения $f(p) = a$ с учётом кратностей равно n независимо от $a \in \mathbb{P}_1$ (лекция 7(3)). Множество критических точек f над $\mathbb{C}$ (точек-не полюсов, в которых $df = 0$) конечно. Его объединение с множеством полюсов f и h обозначим через Σ_0 и положим $\Sigma := f^{-1}(f(\Sigma_0))$. Тогда $f|\, M \setminus \Sigma \to \mathbb{C} \setminus f(\Sigma)$ – голоморфное n-листное накрытие, т.е. для всякой точки $a \in \mathbb{C} \setminus f(\Sigma)$ найдётся (связная) окрестность $U \ni a$ такая, что $f^{-1}(U)$ состоит из n попарно не пересекающихся областей U_j и все сужения $f|\, U_j \to U$ биголоморфны; пусть $f_j^{-1}\colon U \to U_j$ – обратные отображения. Положим $w_j(z) := h \circ f_j^{-1}(z)$, $z \in U$, и образуем симметрические суммы $s_\nu(z) := \sum_1^n w_j(z)^\nu$, $\nu \in \mathbb{Z}_+$. Как и в лекции 1(4), функции s_ν голоморфны в U. Если $\widetilde{U}$ – другая такая окрестность, то в $U \cap \widetilde{U}$ построенные s_ν, $\tilde{s}_\nu$, очевидно, совпадают $\Longrightarrow$ каждая s_ν – единая голоморфная функция на $\mathbb{C} \setminus f(\Sigma)$. Множество $f(\Sigma)$ конечное. Так как $h\colon M \to \mathbb{P}_1$ – непрерывное отображение, то s_ν продолжаются на всю $\mathbb{C}$ как непрерывные отображения в $\mathbb{P}_1 \Longrightarrow$ (по теореме об устранимой особенности, ТФКП) функции s_ν мероморфны на $\mathbb{P}_1$ $\Longrightarrow$ это рациональные функции.

Пусть $P(z,w)$ – многочлен Вейерштрасса степени n, корни которого над $z \in U$ суть $w_1(z), \dots, w_n(z)$. По формулам Виета и Ньютона коэффициенты P являются многочленами от s_ν и, значит, рациональными функциями от z. Если $z = f(p) \in U$ то, по построению, $h(p) = h \circ f_j^{-1}(z)$ для некоторого j, $\Longrightarrow P(f,h) \equiv 0$ на $M \setminus \Sigma$. $\rhd$

Следствие. *Пусть* $F\colon M \to \mathbb{P}_2$ *– непостоянное голоморфное отображение. Тогда* $S = F(M)$ *– алгебраическая кривая.*

$\lhd$ Можно считать, что $F(M)$ не содержит точку $[0,0,1] \in \infty := \mathbb{P}_2 \setminus \mathbb{C}^2$. Пусть $z = z_1/z_0$, $w = z_2/z_0$ – аффинные координаты в $\mathbb{C}^2 = \mathbb{P}_2 \cap \{z_0 \neq 0\}$. Тогда $f = z \circ F$ и $h = w \circ F$ – мероморфные функции на M, причём $f \not\equiv \mathrm{const}$. По лемме, существует многочлен Вейерштрасса $P(z,w)$ такой, что $S \cap \mathbb{C}^2 = Z_P$. Так как $[0,0,1] \notin S$, то все коэффициенты P – многочлены от z. $\Longrightarrow S$

есть множество нулей в $\mathbb{P}_2$ однородного многочлена Q, который получается проективизацией многочлена P (см. лекцию 2(8)). $\triangleright$

Следствие. *$F\colon M \to \mathbb{P}_n$ – непостоянное голоморфное отображение $\Longrightarrow S = F(M)$ – алгебраическая кривая.*

$\triangleleft$ Проектируя различными способами на двумерные проективные подпространства (проекции π), получаем, согласно доказанному выше, однородные многочлены Q в проекциях, равные нулю в точности на соответствующих проекциях S. Тогда $Q\circ\pi$ – однородные многочлены в $\mathbb{P}_n$, равные нулю на S. Множество общих нулей таких многочленов, очевидно, совпадает с S; детали опускаем. (Нетрудно доказать, что для точного определения S можно подобрать не более чем n таких Q.)$\triangleright$

Общий результат этого раздела:

Теорема. *Всякая компактная риманова поверхность биголоморфно эквивалентна некоторой гладкой алгебраической кривой в $\mathbb{P}_3$.*

С этого мы начинали наш спецкурс, на этом и заканчиваем.

* * * * *

Упражнения.

1. На некомпактной р.п. всякое голоморфное линейное расслоение тривиально.

2.* M – компактная р.п. рода $g \Longrightarrow$ Вронскиан (W_j в координатной окрестности (U_j, z_j)) является сечением линейного расслоения с функциями перехода $g_{kj} = (dz_j/dz_k)^N$, $N = g(g+1)/2$.

3.* Весом (порядком) точки Вейерштрасса $p \in M$ называется порядок нуля определителя Вронского W в точке p. Доказать, что число точек Вейерштрасса с учётом весов на компактной р.п. M рода g равно $(g+1)g(g-1)$.

4. Любое голоморфное векторное расслоение (произвольного ранга) на любой р.п. имеет глобальное ненулевое мероморфное сечение.

Подмногообразие $\mathcal{L}^1 \subset \mathcal{L}$ векторного расслоения $\pi\colon \mathcal{L} \to M$ называется подрасслоением, если $\pi|\mathcal{L}^1 \to M$ – тоже расслоение, причём вложения слоёв $\mathcal{L}^1_p \hookrightarrow \mathcal{L}_p$ линейные.

5. Всякое голоморфное векторное расслоение (ранга $r \geqslant 1$) на р.п. имеет голоморфное линейное (т.е. ранга 1) подрасслоение.

6. $\mathcal{L}$ – голоморфное линейное расслоение на некомпактной р.п. $\Longrightarrow$

$\mathcal{L}$ имеет глобальное ненулевое меоморфное сечение,

$\mathcal{L}$ имеет глобальное ненулевое голоморфное сечение,

$\mathcal{L}$ имеет глобальное голоморфное сечение без нулей,

$\mathcal{L}$ тривиально (эквивалентно $M \times \mathbb{C}$).

7. Для трививального расслоения $\mathcal{L} = M \times \mathbb{C}$ класс Черна тоже тривиален, $c_1(\mathcal{L}) = 0$.

8. $c_1(\mathcal{L}) \in H^2(M, \mathbb{C})$ – класс Черна голоморфного линейного расслоения $\mathcal{L}$ на компактной р.п. M и $\phi \in \Lambda^2(M)$ – гладкая форма из класса $c_1(\mathcal{L}) \Longrightarrow$ на $\mathcal{L}$ существует метрика h такая, что $\phi = c_1(h)$.

9. M – гиперэллиптическая р.п. рода $g > 1 \Longrightarrow$ её образ при каноническом отображении биголоморфно эквивалентен сфере Римана, точнее, замыканию в $\mathbb{P}_{g-1}$ голоморфной кривой $\{[1, z, \dots, z^{g-1}]\colon z \in \mathbb{C}\}$.

10. $\mathcal{L}$ – голоморфное линейное расслоение над к.р.п. M, $\deg \mathcal{L} > g$ $\Longrightarrow \exists$ глобальные голоморфные сечения s, $\tilde{s}$ без общих нулей на M.

11. Гиперэллиптическая кривая рода $g > 1$ голоморфно не вкладывается в $\mathbb{P}_2$ (но топологически – пожалуйста!).

12. M – компактная риманова поверхность, A – конечное подмножество в $M \Longrightarrow M \setminus A$ допускает голоморфное вложение в $\mathbb{C}^N$ в качестве аффинной алгебраической кривой.

Контрольная работа (с решениями)

1. $f = (f_1, f_2)\colon M \to S$, $f_j \in \mathcal{M}(M)$, – *голоморфное, почти всюду* $1:1$ *отображение компактной римановой поверхности* M *на алгебраическую кривую* $S \subset (\mathbb{P}_1)^2$, *которая в аффинной части задаётся уравнением* $w^2 = z^2(z^3-1)$. *Вычислить род* M. *Выписать базис голоморфных 1-форм на* M. *Привести пример канонического дивизора на* M.

При отображении $f_1\colon M \to (\mathbb{P}_1)_z$ число прообразов равно 2 для всех $z \notin \{\infty, \sqrt[3]{1}\}$, а для этих 4 точек z оно равно 1 (у $z=0$ на M – два прообраза!). По формуле Римана – Гурвица (лекция 2), $\chi(M) = 2(\chi(\mathbb{P}_1) - 4) + 4 = 0$, $\implies g = 1$.

Так как $\mathbb{K} \geqslant 0$ и $\deg \mathbb{K} = 2g - 2 = 0$, то простейшим каноническим дивизором на M является $D = 0$.

На S $2w\,dw = (5z^3-2)z\,dz \implies$ форма $\frac{z}{w}p(z)\,dz$, где $p(z)$ – произвольный многочлен от z, голоморфна на $S \cap \mathbb{C}^2$. Локальным параметром в окрестности (∞,∞) на S является $\zeta = 1/\sqrt{z}$, параметрическое представление S: $z = 1/\zeta^2$, $w = \zeta^{-5}\sqrt[2]{1-\zeta^6} \implies$ форма $\frac{z}{w}p(z)\,dz$ на S голоморфна в окрестности (∞,∞) только когда $p \equiv \mathrm{const}$. $\implies \frac{f_1}{f_2}\,df_1$ – базисная форма на M (одна, т.к. $g = 1$).

2. $M\colon t = x^2$ – *поверхность в* $\mathbb{R}^3_{x,y,t}$, *ориентированная так, что проекция в плоскость* (x,y) *сохраняет ориентацию.* J – *комплексная структура на* M, *положительно ориентированная и ортогональная относительно евклидовой метрики в* $\mathbb{R}^3$. *Поле* $\frac{\partial}{\partial y}$ *касательное к* M. *Выписать поле* $J\frac{\partial}{\partial y}$.

Всякое поле в $\mathbb{R}^3$, ортогональное к $\partial/\partial y$, имеет вид $v = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial t}$. Такое поле касательно к M, если $v(x^2 - t) = 0$ при $x^2 = t$. $\implies J(\partial/\partial y)$ должно иметь вид $v = a\big(\frac{\partial}{\partial x} + 2x\frac{\partial}{\partial t}\big)$. Условие ортогональности J относительно евклидовой метрики $\implies |J(\partial/\partial y)| = |\partial/\partial y| = 1$, $\implies$ надо брать $a = \pm 1/\sqrt[2]{1+4x^2}$. Знак достаточно правильно выбрать в одной точке (в остальном он же будет по непрерывности). В начале координат касательная плоскость к M – это $\mathbb{R}^2_{x,y}$, на которой обычная комплексная структура J_{st} удовлетворяет требованиям задачи. $\implies J\frac{\partial}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}$ в этой точке, $\implies$

Ответ: $J\frac{\partial}{\partial y} = -\big(\frac{\partial}{\partial x} + 2x\frac{\partial}{\partial t}\big)/\sqrt[2]{1+4x^2}$.

3. M – *алгебраическая кривая в* $\mathbb{P}_2$, *которая в* $\mathbb{C}^2$ *задаётся уравнением* $w^2 = z^3 - 1$. *На* M *нет особых точек (проверьте!). Посчитать вычеты формы* dz *и выписать дивизор формы* dw *на* M *(в однородных координатах).*

На $M \cap \mathbb{C}^2$ особых точек нет, так как градиент $w^2 - z^3 + 1$ равен нулю только в $(0,0) \notin M$. $M \setminus \mathbb{C}^2 = [0,0,1]$, голоморфные координаты в окрестности – это $\zeta_0 = z_0/z_2$, $\zeta_1 = z_1/z_2$ и там $M\colon \zeta_0 = \zeta_1^3 - \zeta_0^3$ – многообразие без особенностей. $\Longrightarrow$ Особых точек на M нет.

$[0,0,1]$ – единственный (возможный) полюс dz на M, $\Longrightarrow \operatorname{res}_a dz \equiv 0$ по теореме о сумме вычетов.

Форма dw голоморфна в $\mathbb{C}^2$ и равна $\frac{3z^2}{2w}dz$ на M. В точках $(0, \pm i) \in M$ у неё нули порядка 2 и других нет.

M имеет род $g = 1$ (ф-ла Р.–Г. для функции $z\colon M \to \mathbb{P}_1$) $\Longrightarrow$ Степень канонического дивизора, в частности, степень dw равна $2g - 2 = 0$. $\Longrightarrow dw$ имеет в $[0,0,1]$ полюс порядка 4 и, значит, $(dw) = 2[1,0,i] + 2[1,0,-i] - 4[0,0,1]$.

4. *M – компактная риманова поверхность рода $g > 0 \Longrightarrow$ На M нет точек, в которых все голоморфные формы равны нулю.* (*А что для $g = 0$?*)

Допустим, есть $p \in M$, в которой все $\alpha \in \Omega^1(M)$ равны нулю. Пусть z – голоморфная координата в окрестности p, $z(p) = 0$ и $1/z$ – данные задачи Миттаг-Леффлера (главная часть в единственной точке p). Так как $\operatorname{res}_p(1/z)\alpha = (\alpha/dz)(p) = 0$ для всех α, то эта задача имеет решение (лекция 9), т.е. существует $f \in \mathcal{M}(M)$ с единственным простым полюсом в точке p. Но тогда, по теореме о равнораспределении (лекция 7), $f\colon M \to \mathbb{P}_1$ $1:1 \Longrightarrow g = 0$, в противоречии с условием.

При $g = 0$ утверждение неверно: единственная голоморфная форма $\alpha \equiv 0$ равна нулю во всех точках M.

5. *T – поток степени 2 на компактной римановой поверхности M, $d^c := i(\bar\partial - \partial)$. Доказать, что уравнение $d^cS = T$ на M разрешимо тогда и только тогда, когда $T(1) = 0$.*

$T(1) = 0 \Longleftrightarrow T = d\phi$ (лекция 9) $\Longleftrightarrow T = \bar\partial\phi^{1,0} + \partial\phi^{0,1} = i\bar\partial(-i\phi^{1,0}) - i\partial(i\phi^{0,1}) = d^c(-i\phi^{1,0} + i\phi^{0,1})$.

Список литературы

[А] Л. Альфорс, *Лекции по квазиконформным отображениям*, Мир, М., 1969.

[В] И. Н. Векуа, *Обобщенные аналитические функции*, Наука, М., 1988.

[Г] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, *гл. II*, § 4, Наука, М., 1966.

[ГХ] Ф. Гриффитс, Дж. Харрис, *Принципы алгебраической геометрии*, *т.* 1, *гл.* 2, Мир, М., 1982.

[Д] Б. А. Дубровин, *Римановы поверхности и нелинейные уравнения*, НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Ижевск, 2001.

[ДНФ] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия. Методы теории гомологий*, Наука, М., 1984.

[К] А. И. Кострикин, *Введение в алгебру*, Наука, М., 1977.

[Р] Ж. де Рам, *Дифференцируемые многообразия*, ИЛ, М., 1956.

[С] Дж. Спрингер, *Введение в теорию римановых поверхностей*, ИЛ, М., 1960.

[Ф] О. Форстер, *Римановы поверхности*, Мир, М., 1980.

[Х] М. Хирш, *Дифференциальная топология*, Мир, М., 1979.

[Ч] Е. М. Чирка, *Комплексные аналитические множества*, Наука, М., 1985.

[Ша] Б. В. Шабат, *Введение в комплексный анализ*, *ч.* 1, Наука, М., 1985.

[Шо] В. В. Шокуров, "Римановы поверхности и алгебраические кривые", *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления*, *т.* 23, ВИНИТИ, М., 1988, 5–171.

[Ch] Sh.-Sh. Chern, "An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **6** (1955), 771–782.

Научное издание

Лекционные курсы НОЦ

Выпуск 1

Евгений Михайлович Чирка

Римановы поверхности

Компьютерная верстка: *А. М. Малокостов*

Сдано в набор 01.02.2006. Подписано в печать 01.04.2006.
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 6,625. Тираж 200 экз.

Отпечатано в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН
Москва, 119991, ул. Губкина, 8.
http://www.mi.ras.ru/noc/ e-mail: pavlov@mi.ras.ru