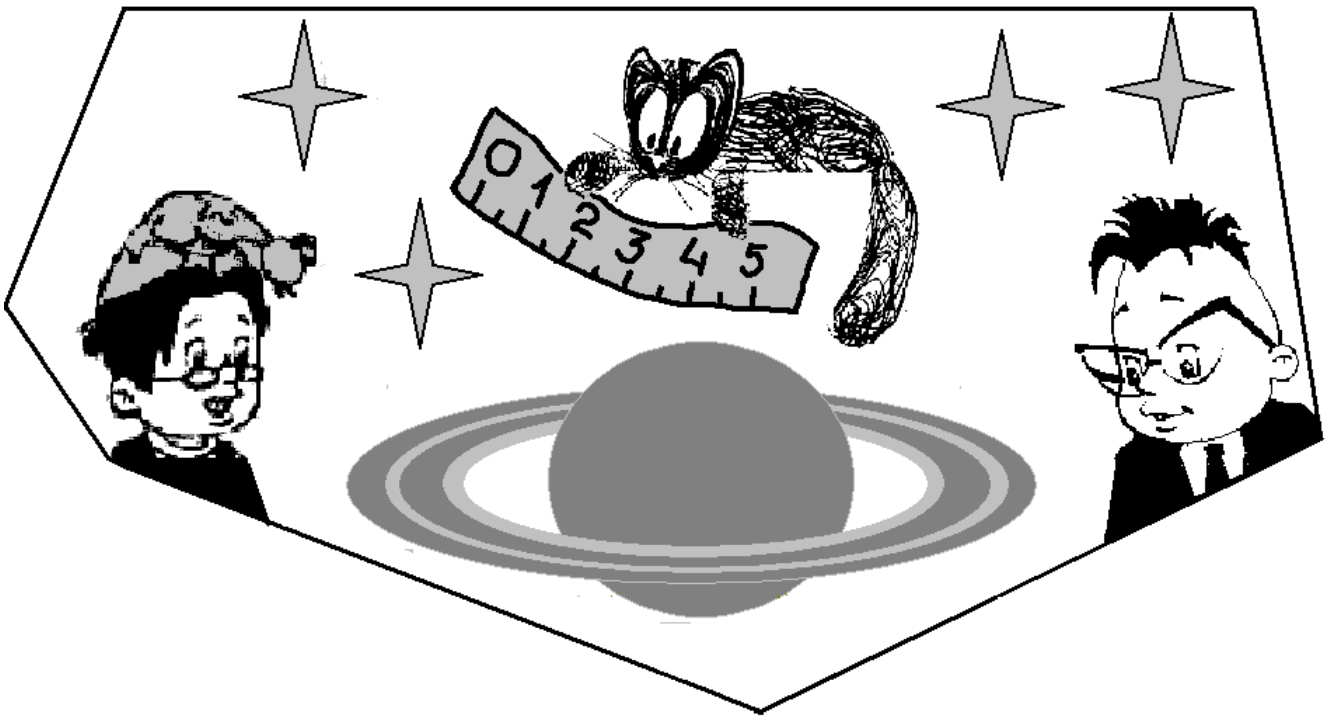
А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов,
А.В. Савин, Н.В.Станкевич

АНАЛИЗ В ФИЗИКЕ



Саратов - 2008

УДК 530.77
К89

Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Савин А.В., Станкевич Н.В.
Анализ в физике. – Саратов: изд-во «Научная книга», 2008, 90 с.
ISBN 978-5-9758-0776-2

Книга содержит задачи, требующие при своем решении не простого получения формул, а их анализа и исследования. Такой подход позволяет воспринимать физику как исследовательскую науку, а также научиться понимать и использовать взаимосвязь физики и математики. Книга будет полезна школьникам и студентам, интересующимся физикой и исследовательской работой, а также учителям физики и преподавателям.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Мельников Л.А.

Оригинал-макет подготовлен авторами

© А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, А.В. Савин, Н.В. Станкевич, 2008

ISBN 978-5-9758-0776-2

Предисловие

…Из нескольких таких
увеличительных стекол Стекляшкин
сделал большую подзорную трубу, в которую
можно было смотреть на Луну и на звезды.
Таким образом он сделался астрономом.

Н. Носов. Приключения Незнайки

Физика – это не только дисциплина в учебном плане школы или вуза, но и ***наука***, которая занимается ***исследованием*** окружающего мира и получением новых, неизвестных ранее знаний. Определенное представление о работе физика-исследователя дает решение физических задач. Но реальные задачи, конечно, отличаются от учебных. Они отличаются и степенью сложности, и объемом математических преобразований, и необходимостью проведения эксперимента и компьютерных расчетов. Главное, однако, в том, что они не сводятся подстановке чисел в некоторую формулу, найденную в учебнике или справочнике. Как правило, решаемые физиками задачи требуют глубокого и всестороннего ***анализа***. Этот анализ необходим как на этапе получения уравнений и формул (например, какие факторы учесть, а какие нет?), так и на этапе их решения (есть ли строгие методы? можно ли применить приближенные?), а также на этапе обсуждения конечных соотношений (какое поведение системы они предсказывают? какие варианты возможны?) В определенной мере именно анализ, точнее, его отсутствие, отличает «традиционную» учебную задачу от по-настоящему исследовательской.

Физические методы анализа трудно формализовать; это в определенной мере искусство, обучиться которому можно, занимаясь исследовательской работой. Однако некоторым подходам и приемам можно научиться и на уровне «школьной» физики, чему и посвящена настоящая книжка.

Интересно, что физические приемы можно применять для решения задач в математической формулировке. Поэтому, прежде всего, мы рекомендуем задачи, которые «выглядят» как математические, но требуют для своего решения физического подхода. Некоторые примеры задач такого рода даны в первом разделе. Во втором разделе обсуждаются физические примеры задач, характеризующихся наличием малой величины. В третьем разделе обсуждаются задачи, связанные с анализом функциональных зависимостей физических величин. В четвертом разделе представлены задачи, в которых исследование связано с зависимостью решения от параметров. В пятом да-

ны примеры задач, анализ которых выявляет так называемые катастрофы и бифуркации, т.е. качественные перестройки состояний физической системы при вариации параметров.

Мы старались не выходить за рамки школьной программы, хотя для решения некоторых задач необходимо уметь вычислять производные. В то эе время книжка будет полезна и студентам младших курсов, которые заинтересованы в более глубоком освоении физики.

Эта книжка является, фактически, задачником, при этом решения составляют ее важную часть. Большинство решений представляют собой маленькие исследования, знакомство с которыми не сводится к простой проверке: правильно или неправильно Вы решили задачу. Поэтому рекомендуем сначала попытаться решить задачу, а потом ознакомиться с решением, даже если Вы убеждены, что решили ее правильно.

1. Физический анализ математических задач

Как известно, физика тесно связана с математикой. Действительно, при решении физических задач появляются и подвергаются преобразованиям различные ***формулы*** и ***уравнения***. Очень часто решение задачи сопровождается тем или иным ***геометрическим построением***. При решении физической задачи устанавливаются ***функции***, связывающие физические величины и т.д.

Для физика-исследователеля математическая и физическая «части» решения задачи не являются отдельными и независимыми. При использовании формул, геометрических построений и функций физик может привлекать для обсуждения их свойств различные физические приемы и соображения.

К таким приемам, прежде всего, относится использование приближенного характера решения. Действительно, физика скорее не «точная», а приближенная наука, ведь всякая физическая величина может быть измерена лишь с конечной, хотя иногда и очень большой, точностью. Замечательно, что физики научились использовать приближенные методы «на пользу» теории.

Очень часто в задаче какая-то величина является малой, и эту малость можно существенно использовать при анализе физического явления. Для классификации малости величин в физике используют понятие ***порядка***. Принято считать, что одно число меньше второго на порядок, если оно примерно в 10 (например, в 9, или 12) раз меньше. Представлять порядок физической величины очень важно, поскольку величины разных порядков по-разному влияют на результат.

Физиками часто используется определенная техника приближенных вычислений и преобразований. Выпишем основные формулы «алгебры» приближенных чисел. Во всех приведенных ниже формулах величина x считается малой по сравнению с единицей, что принято записывать следующим образом: $x \ll 1$.

$$(1+x)^2 \approx 1+2x$$

$$\sqrt{1+x} \approx 1+x/2$$

$$\frac{1}{(1+x)} \approx 1-x$$

$$(1+x)^n \approx 1+nx$$

$$\sin x \approx x$$

$$\cos x \approx 1 - x^2/2$$

Поясним, например, происхождение первой формулы. Очевидно, что

$$(1+x)^2 = 1+2x+x^2 .$$

Если величина x мала, то x^2 будет существенно меньше, т.е. $x^2 \ll x$. (Например, если $x = 0{,}01$, то $x^2 = 0{,}0001$.)

Подход к решению задач, основанный на использовании приведенных соотношений, не только приводит к своеобразной алгебраической технике, но и может быть использован при геометрических построениях. Например, при решении физических задач часто встречаются треугольники, стороны которых могут отличаться на порядок и больше. Именно такой треугольник возникает, если мы рассматриваем удаленные объекты, например, Солнце, Луну и т.д.

Представим некоторые соотношения для прямоугольного треугольника, в котором длины двух сторон одного порядка, а длина третьей стороны на один или несколько порядков меньше (рис.1).

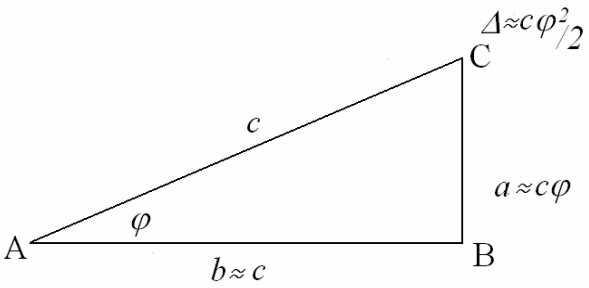


Рис. 1.

«Малый» катет BC такого треугольника равен $a=c\sin\varphi$, где c – гипотенуза. Используя соотношение $\sin\varphi \approx \varphi$, получаем

$$a \approx c\varphi.$$

«Большой» катет AB равен $b=c\cos\varphi$. Но тогда можно записать

$$b \approx c(1-\varphi^2/2).$$

Разница между гипотенузой и «большим» катетом $\Delta = c - b \approx c\varphi^2/2$ очень мала – она порядка $c\varphi^2$. Поэтому часто величиной Δ можно пренебречь и считать, что гипотенуза и большой катет равны: $b \approx c$.

Представленные ниже задачи нацелены на овладение методом приближенного анализа математических выражений. Задачи 1-3 посвящены оценке математических выражений. Задачи 4 и 6 представляют примеры того, как использование малого (или наоборот, большого) значения параметра позволяет получить решение трансцендентного уравнения или уравнения высокой степени.

Интересный пример физического анализа дает задача 5. Она иллюстрирует ситуацию, когда физиков интересует ***качественное поведение*** уравнения, а не формальная формула для его решения. Такой подход будет развит в дальнейшем в разделах 3 и 4.

Задачи 7-13 иллюстрируют геометрические примеры с малыми характерными длинами и углами. Задачи 14-17 демонстрируют использование приближенных формул для аппроксимации функций.

Задачи

1. В каком случае в соотношении $x^3+0{,}001x$ можно пренебречь первым членом? Вторым членом? Нельзя отбросить ни тот, ни другой?
2. Найдите приближенно

   а) $\sin(1^0)$, б) $\sqrt{404}$, в) $\cos(44^0)$.
3. Преобразуйте следующие выражения при малых x:

   а) $\sqrt{1+x}/(1-x)^2$; б) $(1+x)^3-1-\sin x$; в) $\frac{1}{2}x\cdot\sin x-1+\cos x$.
4. Решите уравнение $\cos x=kx$ в области $0<x<\pi$. Рассмотрите два случая: $k\gg 1$ и $k\ll 1$.
5. Изобразите на плоскости параметров области, отвечающие разному числу действительных корней уравнений:

   а) $x^2+px+q=0$,

   б) $x^4+px^2+q=0$,

   в) $x^3+px+q=0$.
6. Найдите приближенно решение уравнения $\varepsilon x^4-x^2+3x-2=0$ в случае, если положительный параметр ε – малая величина порядка 0,01.
7. Докажите, что в треугольнике хотя бы две стороны всегда одного порядка длины.
8. Оцените высоту равнобедренного треугольника, стороны которого равны 1,0001 и 2,0001.
9. В треугольнике ABC сторона AB намного больше стороны BC. Докажите, что сторона AC того же порядка длины, что и AB, а угол BAC мал. Может ли быть малым угол ACB?
10. Получите приближенную формулу для площади треугольника, у которого одна из сторон много меньше двух других. Рассмотрите сначала случай равнобедренного треугольника, а затем – произвольного. Оцените точность вашей формулы.

11. Из вершины А прямоугольного треугольника АВС опущена высота АН. Проведена окружность с центром в точке В, проходящая через точку А. Докажите, что при малых значениях угла АВС окружность делит отрезок СН примерно пополам.
12. Докажите, что если в треугольнике все три стороны одного порядка длины, то возможны только две альтернативные ситуации:
    - все углы треугольника одного порядка;
    - два угла треугольника малы и их величины одного порядка.
13. Получите приближенную формулу для площади правильного N-угольника, применимую в случае, когда число N велико. В качестве характерного размера многоугольника используйте радиус описанного круга R. Получите приближенную формулу, дающую относительное отклонение площади этого многоугольника от площади круга $\varepsilon_N = \frac{\Delta S_N}{S}$, где $S = \pi R^2$, и изучите поведение величины ε_N с ростом N.
14. Докажите, что при малых x окружность $x^2+y^2=R^2$ может быть аппроксимирована параболой.
15. Решите задачу, обратную предыдущей: покажите, что параболу вида $y = a - bx^2$ вблизи вершины можно аппроксимировать окружностью, и найдите ее радиус и центр.
16. Аппроксимируйте параболу $y = ax - bx^2$ в ее высшей точке окружностью из «физических соображений». Для этого воспользуйтесь тем, что тело, брошенное под углом к горизонту, движется по параболе такого вида.
17. Аппроксимируйте функцию $y=a\cos kx$ окружностью при малых x. В какой точке расположен центр этой окружности? Чему равен ее радиус?

2. Анализ с учетом малости физических величин

В этом разделе представлены задачи, в которых оказываются «задействованными» как большие, так и малые физические величины. Использование этого обстоятельства и является важной компонентой решения. Следует иметь в виду, что при решении некоторых из них понадобятся как навыки, так и результаты, полученные при решении задач из предыдущего раздела.

Задачи

1. Через весь земной шар по его поверхности (вдоль экватора) натянута веревка так, что зазор между веревкой и поверхностью Земли отсутствует. В веревку добавили кусок длиной 1 м. Проползет ли в образовавшийся зазор кошка?
2. Тело брошено под углом α к горизонту с некоторой скоростью v. Получите формулу для дальности и высоты полета тела при малых значениях угла α. Во сколько раз возрастет дальность и высота полета тела, если этот угол увеличить в 2 раза?
3. Физик-астроном определяет диаметр Луны с помощью соотношения $d_л = \varphi R_{зл}$, где $R_{зл}$ – расстояние от Земли до Луны, а φ – угол, под которым Луна видна с Земли. Оцените точность его метода.
4. При испытании самолета оказалось, что хвостовое оперение попадает в струю газа от двигателей, расположенных на крыле самолета. Тогда двигатели «довернули» на угол 4^0 так, что струя стала уходить чуть в сторону. Насколько дальше от хвостового оперения стала проходить струя газа? На сколько процентов упала при этом «полезная» сила тяги двигателей? Расстояние от двигателей до хвоста 25 м.
5. Из формулы теории относительности Эйнштейна для энергии движущегося тела $E = \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$ получите обычную (физики говорят – нерелятивистскую) формулу для кинетической энергии.
6. При стрельбе под каким углом будет минимальным разброс точек падения снарядов (кучность)? Считайте, что снаряды вылетают из орудия с одинаковой по модулю начальной скоростью и разбросом угла ее наклона в пределах 3º. Сравните этот результат со случаем наклона орудия в 30º.
7. На сколько процентов изменится частота колебаний груза на пружине, если жесткость пружины увеличить на 3%, а массу груза – на 1%? Задачу

решите без использования микрокалькулятора.

8. К пружине, характеризущейся зависимостью силы упругости F от величины деформации x вида $F = kx+cx^3$, подвешен груз массы m. Найдите равновесное положение груза, считая, что отклонение от закона Гука незначительно.
9. В цилиндрической пробирке длиной 14 см на расстоянии 4 см от верхнего края находится легкий поршень. В пробирку поверх поршня начинают наливать воду так, чтобы она заняла весь объем пробирки выше поршня. Насколько при этом сместится поршень? Считайте, что газ под поршнем подчиняется закону Бойля-Мариотта $PV=const$.
10. Сосуд объемом V разделен подвижным поршнем площади S на две равные части. Давление газа в сосуде равно p. Определите период малых колебаний поршня около положения равновесия. Масса поршня M много больше массы газа. Считайте, что газ под поршнем подчиняется закону Бойля-Мариотта.
11. Автомобиль массы m движется по синусоиде $y=A\sin kx$ с постоянной по величине скоростью v. Определите максимальную силу, действующую на автомобиль со стороны земли.
12. Проволочка изогнута так, что ее вертикальный профиль задан функцией $y=a\cos kx$. В одной из образовавшихся «ямок» колеблется скользящая по проволоке без трения материальная точка. Определите период колебаний, считая их малыми.

3. Анализ функций

Результат решения физической задачи часто представляется некоторой функцией, определяющей искомую величину. В математике принято исследовать изучаемую функцию: выяснить ее асимптоты, установить свойства симметрии, наличие экстремумов и т.п. Такое исследование часто позволяет построить, как говорят, ***качественным*** образом, график функции. Эти приемы и соответствующие навыки оказываются очень полезными при решении физических задач. Действительно, каждый «шаг» в математическом исследовании функции может иметь физическую интерпретацию, которая позволяет продвинуться в понимании физической задачи. Верно и обратное: те или иные физические приближения в исходной задаче позволяют выяснить асимптотический характер функции, даже если ее явный вид пока еще не известен. Приведем простейший пример: если имеется заряженное тело сложной конфигурации, то на больших расстояниях от него электрическое поле будет зависеть от координаты по тому же закону, что и для точечного заряда (см. задачи 2 и 3). Выяснив из подобных физических соображений поведение функции в тех или иных предельных ситуациях, можно делать заключения о наличии у функции экстремумов и т.п.

Задачи

1. Маленький шарик шарнирно укреплен на легком стержне длины l (рис. 2.). Шарику сообщают некоторую скорость v_0. Привлекая известные результаты и качественные соображения, обсудите вид зависимости периода колебаний от начальной скорости v_0. Угол отклонения маятника может быть любым.

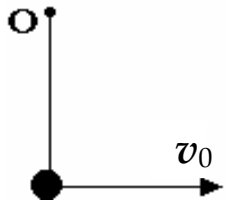


Рис. 2

2. По тонкому кольцу радиуса R равномерно распределен электрический заряд Q. С помощью физических соображений установите вид зависимости электрического поля от координаты x, отсчитываемой вдоль оси, проходящей через центр кольца перпендикулярно его плоскости (рис. 3) а) вблизи центра кольца, б) вдали от кольца. Опираясь на эти результаты, обоснуйте наличие максимума в зависимости электрического поля от координаты. Сравните полученные оценки с точным решением.

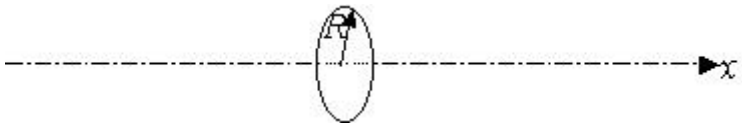


Рис. 3

3. Имеется тонкий диск радиуса R, по которому равномерно распределен заряд с поверхностной плотностью σ. Определите зависимость напряженности электрического поля на оси, проходящей через центр диска перпендикулярно плоскости диска (рис. 4), от расстояния до него в случаях, когда это расстояние мало и велико по сравнению с радиусом диска.

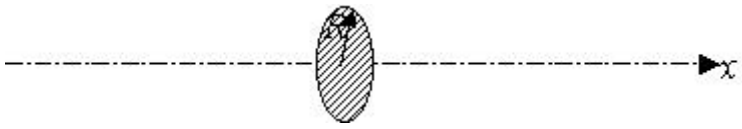


Рис. 4

4. Материальная точка движется по закону $x=v_0t+a\sin\omega t$ ($v_0>0$, $a>0$). Установите, при каких значениях параметров точка все время движется только вперед, а при каких возможно ее движение как вперед, так и назад. Постройте качественно графики зависимости координаты тела от времени для первой и второй ситуаций. Придумайте физический пример, которому может соответствовать такой закон движения.

5. Сила взаимодействия двух молекул в некоторых случаях может быть описана потенциалом Ленарда-Джонса $U(r)=4a[-(b/r)^6+(b/r)^{12}]$. Обсудите вид зависимости потенциала от расстояния между молекулами. Покажите, что потенциал имеет минимум. Используя этот результат, оцените расстояние между молекулами вещества и величину энергии, необходимой, чтобы оторвать молекулы друг от друга. (Параметры a и b считайте известными.)

6. В круге радиуса R вырезали сектор с углом α так, чтобы получить развертку конуса. Обоснуйте, что зависимость объема такого конуса V от угла α обязательно имеет максимум. Покажите, что угол при вершине конуса максимального объема равен 109°28'. (Известно, что для некоторых модификаций и соединений углерода валентные связи атомов углерода направлены к вершинам тетраэдра, причем угол между ними составляет как раз 109°28').

7. Известно, что для балки прямоугольного сечения прочночть на изгиб определяется выражением bh^2, где b – ширина балки, h – ее высота. Из цилиндрического бревна диаметра d изготавливают балку. Найдите ширину и высоту балки максимальной прочности.

8. Лампу подвешивают над центром круглого стола. Обсудите, как зависит освещенность на краю стола от высоты h, на которой подвешена лампа. Обсудите сначала случаи очень малой и очень большой высоты. Найдите условие, при котором освещенность на краях стола максимальна.

9. Частица с массой m налетает на атомное ядро с массой M. После упругого удара ядро приобрело кинетическую энергию, составляющую n-ую часть кинетической энергии налетавшей частицы. Постройте график зависимости величины n от отношения масс частиц $k=m/M$. При каком отношении масс доля переданной энергии максимальна?

10. В толстостенный цилиндрический сосуд массы M наливают жидкость с плотностью ρ (рис. 5). Обсудите свойства зависимости высоты центра масс системы от высоты h налитой в стакан воды. Уровень воды отсчитывается от дна сосуда. Высота внутренней части цилиндра равна H, толщина стенок d, внутренний радиус R.

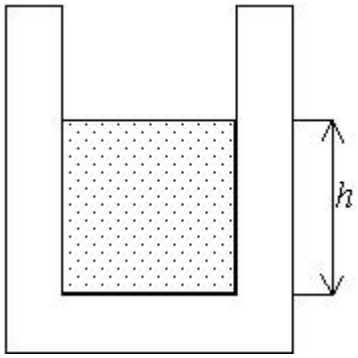


Рис. 5

4. Внимание, в уравнении параметр

…Внимание – в уравнении параметр!..
Название математической статьи в журнале «Квант»

Обычно решение физической задачи заканчивается получением численного значения искомой величины либо формулы, выражающей ее зависимость от других величин, «заданных по условию». Если посмотреть на полученные в результате такого решения уравнения (или неравенства), то может оказаться, что они зависят от каких-либо параметров. Численное значение получается при подстановке каких-либо конкретных величин этих параметров. Однако если параметры не фиксированы, а могут принимать разные значения, то может случиться так, что в зависимости от их величины может реализоваться ***качественно разное поведение системы***. Пусть, например, система характеризуется некоторым параметром a. Тогда может случиться так, что при a больше некоторого критического значения a_C система будет себя вести одним образом, а при $a<a_C$ – другим.

Поясним это на простом примере. Пусть с поверхности небесного тела стартует ракета. Если скорость ракеты больше второй космической, то ракета полностью преодолеет силу тяготения и улетит (со временем) сколь угодно далеко, при этом ее траекторией будет гипербола. Если же скорость меньше второй космической, то ракета останется в ограниченной области пространства в окрестности небесного тела и будет двигаться по эллипсу. Интересно, что точно «критическому» значению второй космической скорости отвечает своя, особая траектория ракеты – парабола.

Может случиться и так, что будет несколько значений параметра, соответствующих качественным перестройкам поведения системы. Таким образом, за величиной параметра может скрываться «разная физика» задачи. Такие задачи интересны тем, что требуют не только «получения ответа», а и определенного исследования.

Еще более интересная ситуация возникает, если физическая система характеризуется двумя параметрами, например a и b. Количество возможных ситуаций существенно возрастает и иногда не совсем ясно, как «перебрать» все возможные варианты решения. В этом случае помогает представление решения на плоскости параметров: можно изобразить плоскость

(a,b) разбитой на характерные области, каждая из которых отвечает своему типу поведения системы. (См. в связи с этим задачу 5 из первого раздела и комментарии к ней.). Следует сказать, что такой подход к анализу поведения систем имеет очень глубокое содержание. Он может применяться к большому количеству физических (и математических) задач, особенно в теории динамических систем, современной теории бифуркаций и др., когда количество возможных вариантов поведения системы велико и их трудно установить и исследовать. Мы познакомимся с таким подходом на примере «почти» традиционных физических задач[1].

Скажем еще два слова о выборе параметров. В приведенном выше примере он очевиден – это скорость ракеты. Однако если параметров несколько, то на самом деле поведение системы может зависеть не «отдельно» от каждого из них, а от некоторой их комбинации (или комбинаций), которые принято называть ***существенными*** параметрами. Например, если нас интересует движение тела у поверхности Земли, то, вообще говоря, оно зависит от радиуса Земли R и ее массы M, но единственным существенным параметром служит ускорение свободного падения g, которое является комбинацией массы и радиуса Земли $g = G\dfrac{M}{R^2}$. В данном случае существенный параметр выявить просто, но иногда это также требует определенного анализа. При этом полезным является соображение о том, что часто существенные параметры являются безразмерными комбинациями исходных физических параметров. Например, в задаче 8 о движении человека по полю прямоугольной формы (см. ниже) результат зависит не непосредственно от сторон поля a и b, а от их (безразмерного!) отношения $\mu = \dfrac{b}{a}$. В случае, если проблема выбора существенных параметров непроста, мы указываем их в условии задачи.

Задачи

1. В одинаковые сообщающиеся сосуды налита жидкость с плотностью $\rho_т$ так, что ее высота равна H. В один из сосудов начинают очень медленно

---

[1] Подход, основанный на разбиении пространства параметров (в общем случае многомерного) на характерные области с последовательным изучением поведения на разделительных поверхностях, линиях и характерных точках, восходит к выдающемуся математику и физику А.Пуанкаре (1854-1912). Иногда такой подход называют ***стратегией Пуанкаре***.

подливать другую, более легкую жидкость с плотностью $\rho_л$. Что будет происходить в системе? Будут ли иметься какие-то особенности в зависимости высоты заполнения второго сосуда от параметра – количества более легкой жидкости? Жидкости не перемешиваются.

2. На неподвижной полусфере радиуса R в верхней точке располагается небольшое тело. Телу ударом сообщают горизонтальную скорость v_0. Какие качественно различные варианты поведения тела возможны в зависимости от параметра – скорости v_0? Трение отсутствует.

3.Шар радиуса 10 см, изготовленный из материала с плотностью 0,1 г/см^3, плавает в воде. Определите глубину погружения шара.

4. Два груза массы M, скрепленные пружиной жесткости k, покоятся на горизонтальной плоскости. На эту систему вдоль соединяющей грузы прямой налетает другой груз массы m. Произойдет или нет повторное столкновение грузов? Исследование проведите в зависимости от параметра $\frac{m}{M}$. Все удары идеально упругие, трения нет, пружина невесома, удара грузов массы M друг о друга не происходит.

5. В теплоизолированный сосуд, содержащий воду массы M при температуре T°С, бросили кусок льда массы m при температуре $-t$°С. Какие качественно различные состояния системы возможны после установления теплового равновесия? Изобразите на плоскости параметров (T, t) области, соответствующие каждому из этих состояний. Каким точкам на этой плоскости соответствует нулевая конечная температура?

6. На доске массы M лежит небольшой брусок массы m (рис. 6). Коэффициент трения между доской и бруском равен μ_1, а между доской и поверхностью – μ_2. К бруску приложена горизонтальная сила F. Укажите все возможные качественно различные варианты поведения системы и изобразите на плоскости параметров (μ_1, μ_2) соответствующие им области.

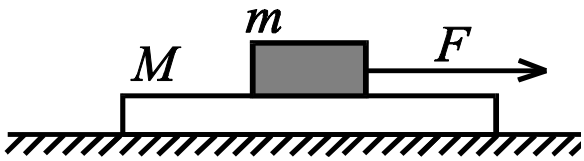


Рис. 6

7. Имеются три не растворяющие друг друга жидкости с одинаковой плотностью. В объеме, наполненном жидкостью 3, плавают две небольшие капельки из жидкостей 1 и 2. Капли соприкоснулись. Что с ними произой-

дет дальше? Коэффициенты поверхностного натяжения на соответствующих границах раздела σ_{12}, σ_{23} и σ_{13}.

8. Поле имеет вид прямоугольника со сторонами a и b, причем $b < a$. Человек может идти по дороге по краю поля со скоростью u, или по полю со скоростью $v<u$. По какому маршруту ему следует двигаться, чтобы попасть из одной вершины в противоположную за минимальное время? Представьте результат на плоскости безразмерных параметров $\varepsilon = \frac{v}{u}$, $\mu = \frac{b}{a}$. В каких предельных случаях пешеходу проще всего выбрать маршрут? В каком случае он будет испытывать максимальные затруднения?

9. Мяч бросают с поверхности земли. На расстоянии l от точки броска стоит стена высоты h (рис.7). Выясните, какие качественно различные варианты полета мяча возможны, и при каких условиях они реализуются?

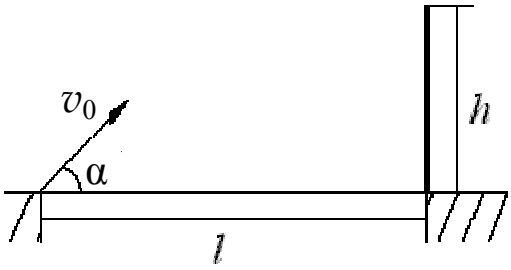


Рис. 7

10. Груз массы M подвешен на невесомой нити, а вторая невесомая нить прикреплена к его нижней части (рис.8) Начиная с некоторого момента времени, нижнюю нить тянут с постоянной силой f. Какая нить порвется? Считайте, что разрыв нити наступает при натяжении T; вплоть до разрыва нить имеет постоянный коэффициент жесткости k.

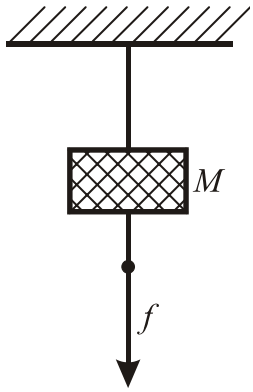


Рис. 8

11. К вбитому в стену гвоздю на невесомой нерастяжимой нити длины L подвешен маленький тяжелый груз. Под гвоздем на расстоянии l от нижнего положения груза ($l<L$) вбит еще один гвоздь. Груз отклоняют вправо так, что нить образует острый угол α с вертикалью (рис. 9), и отпускают без начальной скорости. Перечислите все возможные качественно различные типы поведения этой системы и изобразите соответствующие им области на плоскости безразмерных параметров (l/L, $\cos\alpha$). Потерями энергии пренебречь.

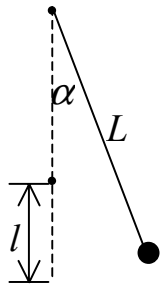


Рис. 9

5. Катастрофы (бифуркации)

…Братцы, вы знаете, какое солнце?
Оно больше всей нашей Земли.
Вот оно какое! И вот, братцы, от солнца
оторвался кусок и летит прямо к нам…

Н. Носов. Приключения Незнайки

Одним из интересных примеров «метаморфоз» функций при вариации параметра (параметров) является слияние и исчезновение экстремумов – максимумов и минимумов. На рис.10 представлен простейший пример такого рода: при изменении параметра сливаются и исчезают минимум и максимум некоторой функции. Задача об исчезновении (рождении) экстремумов в общей математической постановке составляет предмет отдельной теории, которая известна как ***теория катастроф***.

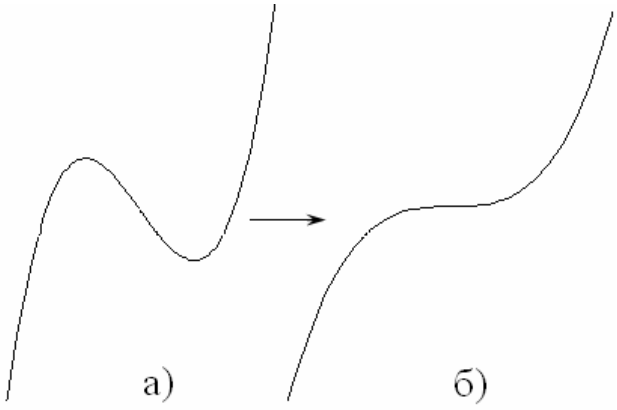


Рис.10

Можно дать простую физическую интерпретацию соответствующих ситуаций. Действительно, будем мыслить функцию как график зависимости потенциальной энергии некоторого тела от координаты. Понятно, что минимуму будет отвечать устойчивое положение равновесия тела. (Устойчивое положение равновесия демонстрирует, например, математический маятник вблизи нижней точки.) Соответственно, максимуму будет отвечать неустойчивое положение равновесия. (Например, математический маятник вблизи верхней точки.) Тогда ситуация слияния экстремумов на «физическом» языке отвечает слияние и исчезновение устойчивого и неустойчивого положений равновесия.

Эта интерпретация поясняет смысл термина «катастрофа». Действительно, пусть в «лунке» располагается шарик (рис.11). При вариации пара-

метра лунка меняет форму, но качественно состояние системы не меняется: шарик остается в лунке. Однако при достижении точки слияния экстремумов шарик «вываливается» из лунки и «скатывается» вниз. Состояние системы качественно изменилось, произошла «катастрофа».

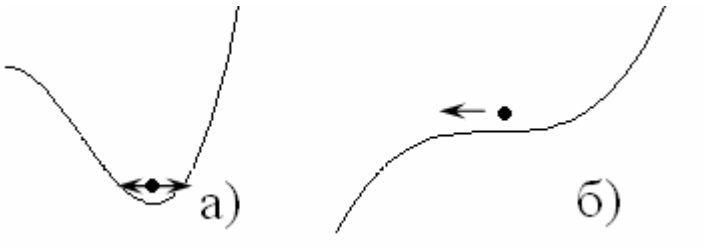


Рис.11

В физике о ситуациях слияния (рождения) положений равновесия говорят, как о бифуркациях. (Бифуркация – от латинского *bifurcus*, что означает разветвление.) Теория катастроф и бифуркаций – обширные области современной науки, которые нашли применение не только в физике, но и в химии, экономике и других отраслях знания[2].

Оказывается, можно выделить некоторые характерные и типичные ситуации исчезновения или рождения экстремумов или положений равновесия. Полезно познакомиться с соответствующей терминологией теории катастроф и бифуркаций. Так, слияние максимума и минимума функции (устойчивого и неустойчивого равновесия) называют часто катастрофой «складка». Ситуацию, когда минимум превращается в максимум, и от него отделяются симметричным образом два новых минимума, называют бифуркацией «вилка» и т.д. Мы введем эти термины по ходу решения задач. Их знание очень полезно, поскольку позволяет при решении конкретных задач выявлять все характерные качественные ситуации.

Мы предлагаем вам достаточно «традиционные» на вид физические задачи, которые, однако, при своем анализе выявляют определенные качественные перестройки или бифуркации. Эти задачи подобраны так, чтобы последовательно познакомить с простейшими и наиболее распространенными бифуркациями и «технологией» соответствующего исследования.

---

[2] Явление бифуркации было впервые описано Л.Эйлером при исследовании равновесия нагруженной колонны; в математическом контексте термин использовал А.Пуанкаре. Терминологию теории катастроф ввел французский математик Р.Том (р. 1923)

Задачи

1. Насколько сильно притянутся два жестких провода с током, из которых один удерживается упругой пружиной, а другой неподвижен (рис.12)? Что произойдет при возрастании тока в одном из проводников? Величины токов I и i, коэффициент жесткости пружины k, расстояние между проводниками в отсутствие токов L, длины проводников l.

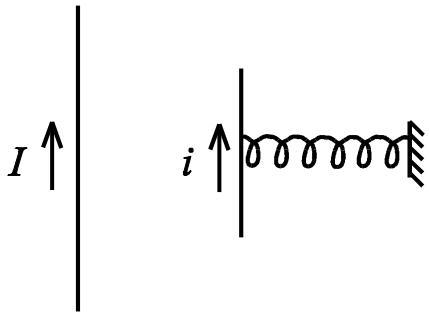


Рис.12

2. В пробирке под невесомым поршнем находится идеальный газ, а поверх поршня налита ртуть (рис.13). Газ очень медленно нагревают, при этом поршень поднимается, и ртуть начинает выливаться из пробирки. Что будет происходить при дальнейшем повышении температуры? Всегда ли реализуется единственный «сценарий» развития событий? Атмосферное давление p_0, масса поршня M, его площадь S, начальная температура газа T_0, длина пробирки l, первоначально газом занята часть пробирки l_0.

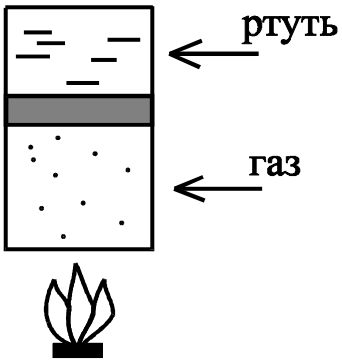


Рис.13

3. Математический маятник в виде невесомого стержня длины l и маленького груза массы m может вращаться в вертикальной плоскости. К маятнику прикреплена спиралевидная пружина, при отклонении маятника от вертикали на угол φ создающая возвращающий момент $M=\mu\varphi$. В каком случае в системе возможно более одного положения равновесия? (Пружина может «закручиваться» на большие углы, в том числе бóльшие 2π.)

4. Математический маятник вблизи верхнего положения равновесия прикреплен к нелинейной пружине (рис.14). Проанализируйте положения

равновесия в системе. Считайте, что отклонение пружины от закона Гука пружины описывается соотношением $F = kx + cx^3$, где k и c – положительные коэффициенты, а угол отклонения маятника от вертикали мал. Длина стержня l, масса шарика m.

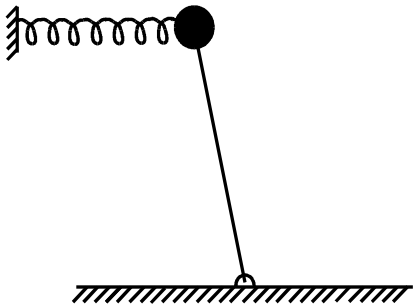


Рис. 14

5. Имеются два одинаковых кольца радиуса R, по каждому из которых равномерно распределен положительный электрический заряд Q. Вдоль оси, проходящей через центры колец, может скользить точечный отрицательный заряд $-q$(рис.15). Обсудите вопрос об устойчивости состояний равновесия заряда в зависимости от расстояния между кольцами a.

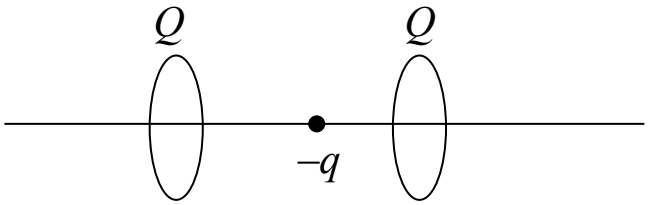


Рис. 15

6. Тонкая однородная палочка длины l и плотности ρ шарнирно укреплена за верхний конец так, что шарнир находится на расстоянии h от поверхности жидкости плотности $\rho_{ж.}$ Какие качественно различные ситуации расположения палочки возможны? Рассмотрите два случая: точка прикрепления шарнира находится над поверхностью жидкости и точка прикрепления шарнира находится под поверхностью жидкости.

7. Маленькая бусинка массы m может скользить без трения по тонкому проволочному кольцу радиуса R (рис.16). Кольцо вращают с частотой ω вокруг вертикальной оси, проходящей через плоскость кольца на расстоянии a от его центра. Проследите за трансформацией зависимости потенциальной энергии бусинки от ее координаты во вращающейся системе отсчета. Сначала исследуйте случай малых значений координаты x, отсчитываемой от оси вращения. Найдите в общем случае отвечающие качественным изменениям вида потенциала линии на плоскости безразмерных параметров

$\varepsilon = \dfrac{g}{\omega^2 R}$, $\alpha = \dfrac{a}{R}$. (При приближенном анализе можно использовать формулу $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \ldots$)

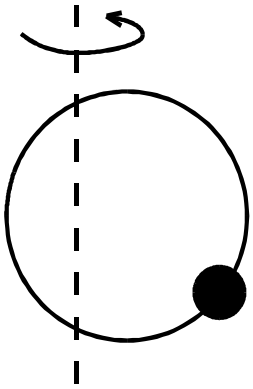


Рис.16

8. Шарик массы m может скользить без трения по стержню, наклоненному под углом α к горизонту. Шарик прикреплен к пружине жесткости k, второй конец которой неподвижно зафиксирован на расстоянии a от стержня в точке, принадлежащей проходящей через стержень вертикальной плоскости (рис.17). Длина пружины в нерастянутом состоянии l_0. Как трансформируется при изменении параметров вид зависимости потенциальной энергии от координаты шарика x, отсчитываемой вдоль стержня? Сначала рассмотрите случай $\alpha = 0$. Найдите отвечающие качественным изменениям вида потенциала линии на плоскости подходящих безразмерных параметров

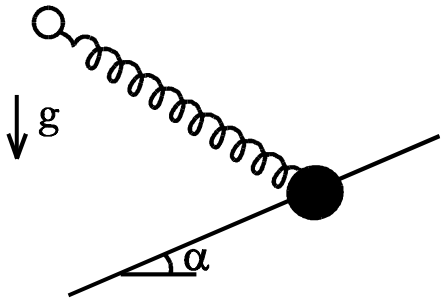


Рис.17

9. Как модифицировать задачи 4 и 5, чтобы для них можно было зафиксировать такие же варианты изменения потенциала при вариации параметров, что и в задачах 7 и 8?

10. На рис.18 показана вольтамперная характеристика полупроводникового радиотехнического элемента — туннельного диода. Считайте, что она задается кубическим полиномом $I = a(U - U_0)^3 - b(U - U_0) + c$, где a, b

и c — коэффициенты. Такой диод включен в цепь, содержащую регулируемую Э.Д.С. $\mathcal{E}$ и резистор с регулируемым сопротивлением R. Определите напряжение на диоде. Укажите на плоскости введенных подходящим образом параметров область, в которой возможно единственное решение, а также область, где таких решений несколько.

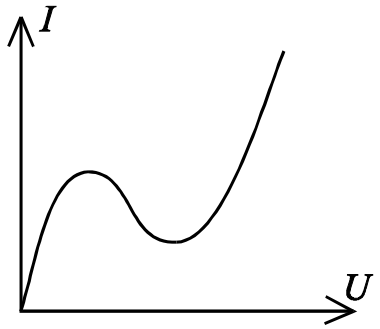


Рис.18

Решения

1. Физический анализ математических задач

1. Особенность этого соотношения в том, что в него входит малая величина – 0,001, а также разные степени величины x. Поэтому возможны три разных варианта: когда первое слагаемое много меньше второго, второе много меньше первого, и, наконец, когда они одного порядка. Первая ситуация реализуется, если $x^3 \ll 0{,}001x$. Соответственно, получаем[3] $x^2 \ll 0{,}001$, или $x \ll 0{,}03$. Если $x \gg 0{,}03$, то, напротив, первое слагаемое много больше второго. При условии, что x порядка 0,03, слагаемые в исходном соотношении будут одного порядка.

2. а) Для вычисления sin(1°) воспользуемся тем, что при малых (в радианах) значениях аргумента $\sin x \approx x$. Переводя 1° в радианы, получаем $x = \frac{\pi}{180} = 0{,}01745329\ldots$. Точное значение, которое можно найти, например, с помощью микрокалькулятора, составляет 0,0174524… Мы видим, что точность приближенного вычисления в этом случае очень высока.

б) Для приближенного вычисления $\sqrt{404}$ представим его в виде $\sqrt{400(1+\frac{4}{400})} = 20\sqrt{1+\frac{1}{100}}$ и воспользуемся соотношением $\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{x}{2}$, справедливым при малых x. Тогда $\sqrt{404} \approx 20(1+\frac{1}{200}) = 20{,}1$. Точное значение $\sqrt{404} = 20{,}09975\ldots$, следовательно, погрешность составляет около одной тысячной процента.

в) Для приближенного вычисления cos(44°) заметим, что малым является отклонение аргумента от величины 45°. Тогда удобно выразить эту величину через косинус двойного угла: $\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$. Полагая $\alpha = \frac{\pi}{4} - x$ (в радианах), в силу малости x получим $\cos 2\alpha = \sin 2x \approx 2x$. Тогда $\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+2x}{2}} \approx \frac{1+x}{\sqrt{2}}$, где мы снова воспользовались соотношением

---

[3] Поскольку нас интересует сравнение абсолютных значений слагаемых, то справедливо считать x положительной величиной. В этом случае можно преобразовать неравенство указанным образом.

$\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{x}{2}$. Переводя 1° в радианы, получаем численную оценку cos(44°)≈0,719448… при точном значении 0,719339…

3. а) Воспользуемся приближенными равенствами $\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{x}{2}$, $(1-x)^2 \approx 1-2x$, $\frac{1}{1+x} \approx 1-x$, и далее осуществим преобразования, отбрасывая малые (квадратичные по x) члены:

$$\frac{\sqrt{1+x}}{(1-x)^2} \approx \frac{1+\frac{x}{2}}{1-2x} \approx (1+\frac{x}{2})(1+2x) \approx 1+\frac{x}{2}+2x = 1+\frac{5}{2}x.$$

б) Аналогичным образом, получаем

$$(1+x)^3 - 1 - \sin x \approx 1+3x-1-x \approx 2x.$$

в) Учтем сначала члены порядка x и x^2, тогда $\sin x \approx x$ и $\cos x \approx 1-\frac{x^2}{2}$:

$$\frac{1}{2}x \cdot \sin x - 1 + \cos x \approx \frac{1}{2}x^2 - 1 + (1-\frac{x^2}{2}) = 0.$$

Это означает, что в указанном приближении искомая величина оказывается очень малой, и необходимо учесть поправки более высокого порядка. В справочнике находим, что $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$, а для косинуса следующая поправка имеет четвертый порядок: $\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$. Следовательно,

$$\frac{1}{2}x \cdot \sin x - 1 + \cos x \approx -\frac{1}{24}x^4.$$

4. Полезно предварительно получить представление о характере решения графически. На рис.19 показаны в области $0<x<\pi$ график косинуса $y = \cos x$ и прямая $y = kx$, пересечение которых и дает искомое решение уравнения. В случае $k \gg 1$ прямая очень круто идет вверх (рис.19а). Из рисунка видно, что в этом случае пересечение графиков располагается вблизи точки $x = 0$.

Для самой грубой оценки можно положить $\cos x \approx 1$. Тогда из $\cos x \approx kx$ получаем $x \approx \frac{1}{k}$. Можно уточнить это решение, полагая $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$.

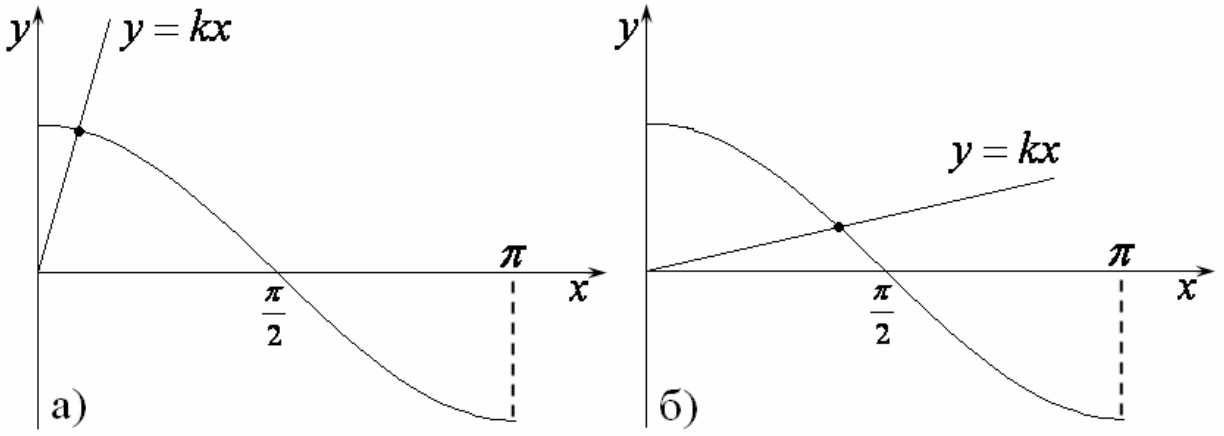


Рис.19

Тогда после некоторых преобразований приходим к квадратному уравнению

$$x^2 + 2kx - 2 = 0.$$

Решая его и оставляя близкий к нулю корень, получаем:

$$x = -k + \sqrt{k^2 + 2}.$$

Заметим, что это решение согласуется с полученным выше. Действительно, преобразуя соответствующим образом квадратный корень с учетом малости величины $\frac{1}{k}$: $\sqrt{k^2+2} = k\sqrt{1+\frac{2}{k^2}} \approx k(1+\frac{1}{k^2})$, получаем также $x \approx \frac{1}{k}$.

Пусть теперь $k \ll 1$. В этом случае наклон прямой очень мал (рис.19б), и корень уравнения близок к $\frac{\pi}{2}$. Тогда естественно положить $x = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, где ε – малая величина. Соответственно, $\cos x = \cos(\frac{\pi}{2} - \varepsilon) = \sin\varepsilon \approx \varepsilon$. Тогда из $\cos x \approx kx$ находим $\frac{\pi}{2} - x = kx$.

Отсюда, в свою очередь, получаем искомое решение $x \approx \frac{\pi/2}{1+k}$.

В силу малости k его можно переписать в виде $x \approx \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2k}$.

5. а) Квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет решения

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Соответственно, если $q > \frac{p^2}{4}$, то действительных корней нет вообще, если $q < \frac{p^2}{4}$, то имеется два действительных корня, а если $q = \frac{p^2}{4}$, то один. На плоскости параметров (q, p) можно выделить, таким образом, две области – где есть два корня и где их нет вообще (рис.20). Разделительной линией служит парабола $q = \frac{p^2}{4}$, которая отвечает ситуации единственного корня. Две первых ситуации (два корня и нет корней) отвечают, как говорят, ***случаям общего положения***. Иногда говорят еще, что это ***типичные*** ситуации, вкладывая в это понятие следующий смысл. Пусть мы случайным образом выбрали два числа (q, p) – коэффициенты квадратного уравнения. Тогда, скорее всего (т.е. с вероятностью 1) на плоскости параметров мы попадем именно в одну из этих областей. Линии же на плоскости параметров $q = \frac{p^2}{4}$ отвечает, как говорят, ***вырожденная*** ситуация. Таким образом, наличие двух или отсутствие корней в квадратном уравнении – это случаи общего положения, наличие единственного корня – вырожденная ситуация.

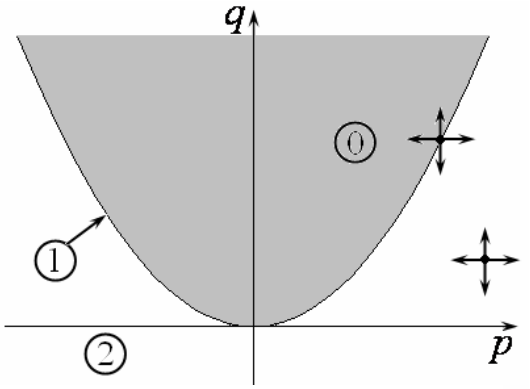


Рис. 20.

Еще одним полезным способом рассуждений является ***метод малых шевелений***. Он состоит в следующем. Пусть точка находится внутри одной из областей на рис.20. Слегка пошевелим (изменим) параметры (q, p). Очевидно, что всегда можно выбрать такую величину малых добавок к параметрам, что мы останемся внутри этой же области при любом «направлении» шевеления. Если же имеется вырождение, то ситуация иная. Действительно, если точка лежит на разделительной линии, то обязательно существует такое направление, что даже бесконечно малое шевеление вдоль него может привести либо в одну, либо в другую область (рис.20).

Представления о случаях общего положения и вырожденных случаях являются очень общими и могут применяться при обсуждении самых разных физических и математических задач. Они являются очень удобными для физиков, поскольку при исследовании различных сложных ситуаций

можно в первую очередь изучать ***наиболее типичные*** явления (в определенном смысле, наиболее вероятные). Мы будем использовать физический анализ, основанный на разбиении плоскости параметров на области, при решении задач из разделов 4 и 5.

б) Уравнение $x^4 + px^2 + q = 0$ является биквадратным. Для него

$$x_{1,2}^2 = y_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\,, \quad x_{3,4}^2 = y_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\,.$$

Так же как и в предыдущем случае, если $q > \frac{p^2}{4}$, то корней нет вообще. Пусть $q < \frac{p^2}{4}$. Тогда удобно провести анализ для всех четырех четвертей плоскости (q, p) с учетом того, что величина y должна быть положительной.

Если $p > 0$, $q > 0$, то $y_1 < 0$ и $y_2 < 0$. В этом случае действительных корней нет вообще.

Если $p > 0$, $q < 0$, то $y_1 > 0$ и $y_2 < 0$. В этом случае есть два действительных корня.

Если $p < 0$, $q > 0$, то $y_1 > 0$ и $y_2 > 0$. В этом случае есть четыре действительных корня.

Если $p < 0$, $q < 0$, то $y_1 > 0$ и $y_2 < 0$. В этом случае есть два действительных корня.

Окончательно разбиение плоскости параметров (q, p) на характерные области показано на рис.21. В этом случае число случаев общего положения возросло – их три и, соответственно, на рис.21 показаны три характерные области. Имеются три линии вырожденных ситуаций (рекомендуем самостоятельно обсудить, что происходит с корнями на этих линиях).

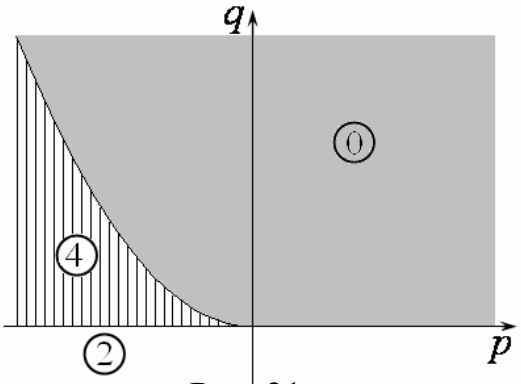


Рис. 21.

Особенность полученного рисунка – наличие вырождения большего порядка, которому отвечает точка, в которой схо-

дятся все три разграничительные линии ($p=0$, $q=0$). «Шевеля» параметры в окрестности этой точки, можно попасть уже в любую из трех характерных областей.

в) Кубическое уравнение $x^3+px+q=0$ в случае общего положения может иметь либо три, либо один действительный корень, что иллюстрирует рис.22а,б. Нетрудно понять, что разграничительным линиям на плоскости параметров, отвечающим рождению (исчезновению) корней, будет отвечать ситуация, касания графиком кубической параболы оси абсцисс (рис.22в). Поэтому для этих линий справедливо как уравнение $x^3+px+q=0$, так и продифференцированное соотношение $3x^2+p=0$.

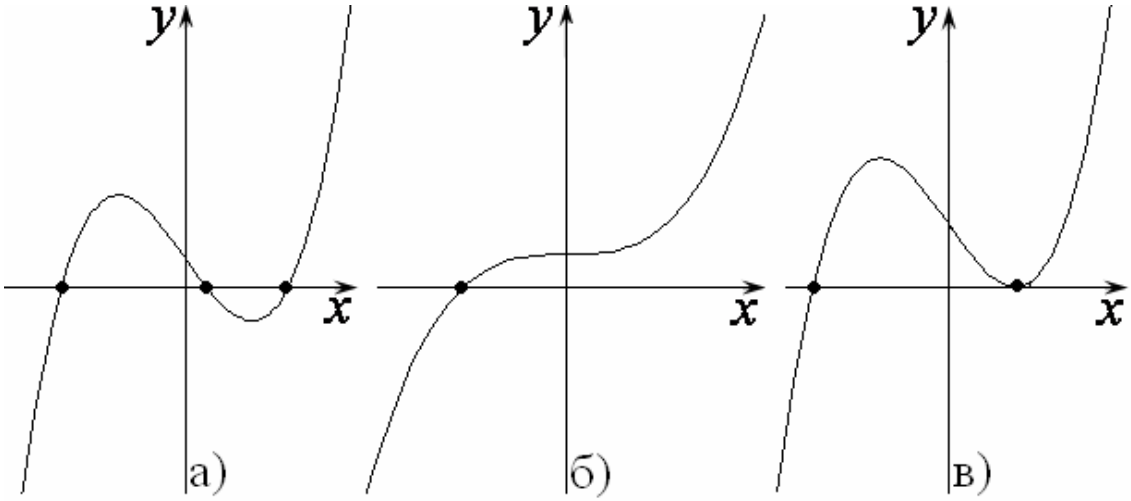


Рис.22

Но тогда $x=\pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$, и, подставляя в исходное кубическое уравнение, получаем уравнения линий, разграничивающих области существования одного и трех корней:

$$q=\pm\frac{2}{3\sqrt{3}}(-p)^{3/2}.$$

Эти линии на плоскости параметров показаны на рис.23. Они имеют вид характерного «полуострия», отвечающего степенному закону «три вторых» в формуле. Линии сходятся в начале координат, которое является, таким образом, точкой более высокого вырождения: ей отвечает слияние всех трех корней кубического уравнения. Следует заметить, что особая точка такого типа с подхо-

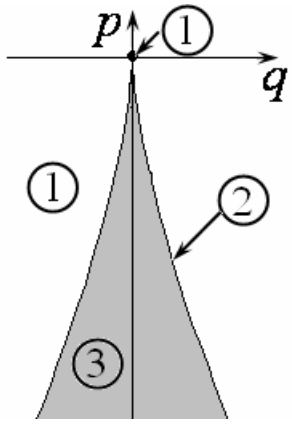


Рис. 23.

дящими по закону «три вторых» линиями имеет большое значение в теории особенностей; в математической теории, известной как теория катастроф; а также в теории бифуркаций. Она носит специальное название «***сборка***» (см. также раздел 5).

6. Предположим сначала, что неизвестная величина x порядка единицы (или меньше). Тогда в соотношении $\varepsilon x^4 - x^2 + 3x - 2 = 0$ первый член εx^4 в силу малости ε существенно меньше остальных, и им можно пренебречь. Тогда просто $-x^2 + 3x - 2 = 0$, откуда легко находим $x_1 \approx 1$ и $x_2 \approx 2$.

Однако исходное уравнение имеет четвертую степень, а значит, может иметь еще два действительных корня. Будем теперь считать, что $x \gg 1$. Тогда наличие большого коэффициента x^4 может скомпенсировать малость ε. В этом случае вполне может оказаться, что εx^4 и x^2 будут одного порядка, однако тогда остальные члены уравнения будут малы по сравнению с ними, то есть $\varepsilon x^4 - x^2 \approx 0$. Отсюда находим $x_3 \approx \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ и $x_4 \approx -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. (Корень x=0 нас не устраивает, т.к. мы предположили $x \gg 1$). Если параметр ε порядка 0,01, то x_3 и x_4 будут порядка 10, т.е. действительно $x \gg 1$. Мы оценили все четыре корня этого уравнения.

Их значения можно уточнить, опираясь на малость параметра ε. Для первых двух корней можно положить $x = x_{1,2} + \mu$, где μ – малая добавка. Тогда после подстановки в исходное уравнение, получаем

$$\varepsilon(x_{1,2}+\mu)^4 - (x_{1,2}+\mu)^2 + 3(x_{1,2}+\mu) - 2 = 0.$$

Учтем теперь малость μ. В первом члене за счет малости параметра ε, можно просто положить $\varepsilon(x_{1,2}+\mu)^4 \approx \varepsilon x_{1,2}^4$. Во втором члене положим $(x_{1,2}+\mu)^2 \approx x_{1,2}^2 + 2\mu x_{1,2}$. Собирая эти соотношения вместе, с учетом $x_{1,2}^2 - 3x_{1,2} + 2 = 0$ после некоторых преобразований, получаем

$$\mu = \frac{\varepsilon x_{1,2}^4}{2x_{1,2} - 3}.$$

С учетом $x_1 \approx 1$ и $x_2 \approx 2$, получаем $\mu_1 = -\varepsilon$ и $\mu_2 = 16\varepsilon$. Таким образом, уточненные значения корней есть

$$x_1 \approx 1 - \varepsilon, \quad x_2 \approx 2 - 16\varepsilon.$$

Мы видим, что если ε порядка 0,01, то добавки к корням являются малыми (для первого корня это условие выполняется лучше, чем для второго.)

Найдем теперь поправки к корню $x_3 \approx \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. (Для $x_4 \approx -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ можно поступить аналогично.) Положим $x = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(1+\mu)$. После подстановки в исходное уравнение, получаем:

$$(1+\mu)^4 - (1+\mu)^2 + 3\sqrt{\varepsilon}(1+\mu) - 2\varepsilon = 0.$$

Полагая далее $(1+\mu)^4 \approx 1+4\mu$ и $(1+\mu)^2 \approx 1+2\mu$, находим

$$\mu \approx \frac{2\varepsilon - 3\sqrt{\varepsilon}}{2+3\sqrt{\varepsilon}} = \sqrt{\varepsilon} \cdot \frac{2\sqrt{\varepsilon}-3}{2+3\sqrt{\varepsilon}}.$$

Поскольку ε порядка 0,01, то вполне удачной будет оценка $\mu \approx -\frac{3}{2}\sqrt{\varepsilon}$. Таким образом, получаем $x_3 \approx \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(1-\frac{3}{2}\sqrt{\varepsilon}) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{3}{2}$. Обратите внимание, что добавка является малой по отношению к самому корню, но «сама по себе» порядка единицы.

7. Проведем доказательство от противного. Обозначим стороны треугольника через a, b, c (рис.24). Пусть все три стороны треугольника разного порядка длины, т.е. $c \gg b \gg a$. В любом треугольнике сумма двух сторон больше третьей. Выберем в качестве этой третьей сторону максимальной длины c. Но тогда должно быть $c < a + b$. В силу условия $b \gg a$ правая часть этого неравенства порядка b. Это значит, что величина c тоже порядка b. Но это вступает в противоречие с тем, что $c \gg b$. Таким образом, все три стороны не могут быть разного порядка длины, а это значит, что по крайней мере две из них (либо все три) одного порядка длины.

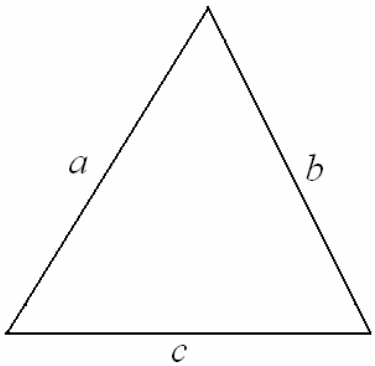


Рис. 24.

8. Если основание треугольника равно a, а боковая сторона – b, то по теореме Пифагора его высота $h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$. Возможны две различные конфигурации такого треугольника, качественно показанные на рис.25. В первом случае a=1,0001, b=2,0001, при этом величины b и $a/2$ существенно

различаются, поэтому малым отклонением длин сторон от 1 и 2 можно пренебречь и получить для высоты треугольника $h \approx \sqrt{2^2 - (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{15}}{2} \approx 1{,}93....$

Если говорить о порядке длины, то $h \approx 2$, т.е. по порядку высота совпадает с боковыми сторонами треугольника.

Во втором случае (рис.25б) b и $a/2$ являются примерно равными величинами, поэтому малые добавки к значениям 1 и 2 существенны (если ими пренебречь, то длина высоты окажется равной нулю, что, очевидно, является слишком грубым приближением). Обозначим эту добавку через $\varepsilon = 10^{-4}$. Тогда

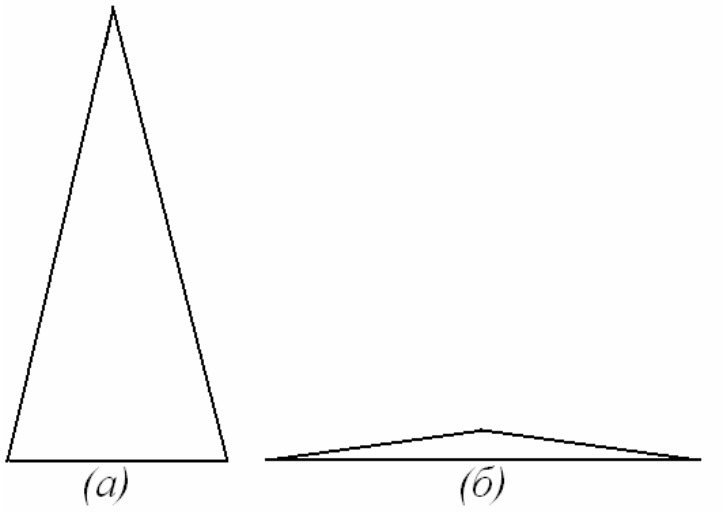


Рис. 25.

$$h = \sqrt{(1+\varepsilon)^2 - \left(\frac{2+\varepsilon}{2}\right)^2}.$$

Отбрасывая в этом соотношении члены порядка ε^2, получаем: $h \approx \sqrt{\varepsilon} = 0{,}01$.

9. Отложим наибольшую сторону AB, длину которой обозначим через c. Из точки B опишем окружность радиуса a, равного стороне BC (рис.26). Точки окружности дают множество возможных вершин C треугольника. Из рисунка видно, что угол CAB, обозначенный α, будет максимальным, если сторона AC касается окружности. Таким образом, для максимального угла α справедливо соотношение

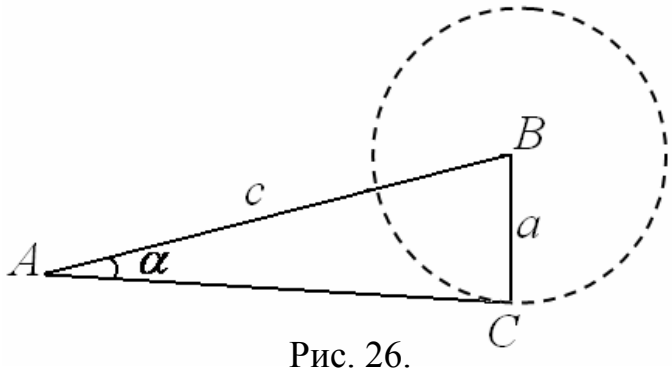


Рис. 26.

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}.$$

По условию задачи $c \gg a$. Это значит, что угол α мал, причем для его величины в радианах имеет место оценка $\alpha \le \frac{a}{c}$.

Угол же ACB может быть сколь угодно малым, для этого точка C должна быть расположена сколь угодно близко к точке пересечения отрезка AB либо его продолжения с окружностью.

10. Равнобедренный треугольник, у которого две стороны много больше третьей ($b=c \gg a$), показан на рис.27а. Из рисунка хорошо видно, что для такого треугольника высоту, опущенную на основание, можно считать примерно равной боковой стороне $h \approx c$, а для основания считать, что $a \approx \alpha c$. Таким образом, для площади получаем приближенную формулу

$$S \approx \frac{c^2}{2}\alpha .$$

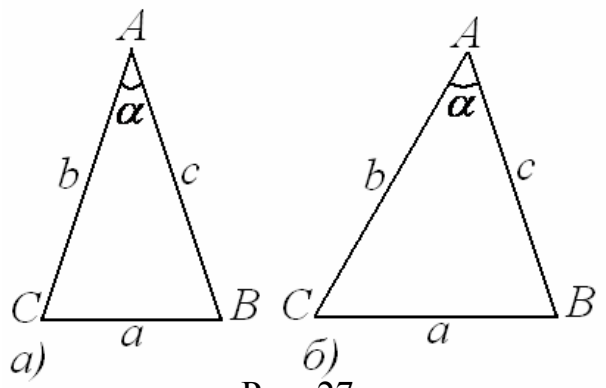


Рис. 27.

Обсудим ее точность. Для этого сравним ее с точной формулой $S = \frac{c^2 \sin\alpha}{2}$.

Мы видим, что точность полученной приближенной формулы определяется эффективностью уже использованного нами равенства $\sin x \approx x$.

Обобщим ее на случай треугольника с двумя сторонами одного порядка длины, которые много больше третьей стороны: $c,b \gg a$. Пусть $b<c$. Как видно из соответствующего рисунка (рис.27б), для высоты треугольника, опущенной на сторону c, можно получить оценку $h \approx b\alpha$. Тогда для площади имеем

$$S \approx \frac{cb}{2}\alpha .$$

Если $b \approx c$, что естественно в случае $c,b \gg a$ (см. задачу 7), приходим к предыдущей формуле.

11. Соответствующее геометрическое построение показано на рис.28.

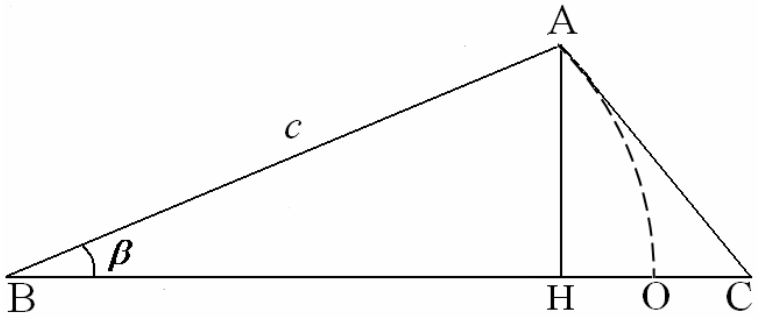


Рис.28

Нетрудно видеть, что отрезок BC=$\frac{c}{\cos\beta}$, а отрезок BH=$c\cos\beta$. Тогда

$$\text{CH=BC–CH}=\frac{c}{\cos\beta}-c\cos\beta.$$

Используя приближенные выражения $\cos\beta\approx 1-\frac{\beta^2}{2}$ и $\frac{1}{\cos\beta}\approx\frac{1}{1-\frac{\beta^2}{2}}\approx 1+\frac{\beta^2}{2}$,

получаем $\text{CH}\approx c\beta^2$.

В свою очередь, BO=c, в силу того, что точка O лежит на окружности радиуса c. Тогда

$$\text{OH}=c-\text{BH}=c-c\cos\beta\approx c-c(1-\frac{\beta^2}{2})=\frac{c\beta^2}{2}.$$

Сопоставляя два последних соотношения, приходим к выводу, что OH составляет примерно половину отрезка CH.

12. Множество треугольников первого типа, очевидно, не пусто, поскольку к нему относится, например, равносторонний треугольник. Действительно, у такого треугольник все стороны равны, а значит одного порядка длины, и все углы по 60^0, т.е. не малые. Очевидно, что к этому классу относятся и все слабо возмущенные равносторонние треугольники. (рис.29а).

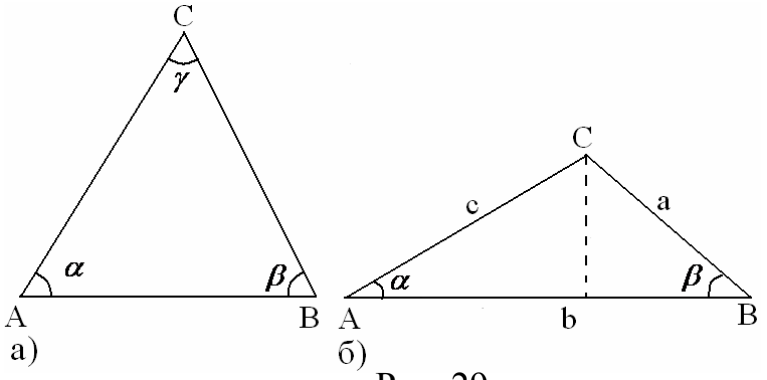


Рис. 29.

Пусть теперь ***хотя бы один*** из углов треугольника, который обозначим через α, мал (рис.29б). Опустим из вершины C треугольника высоту на сторону длины c. Тогда будет справедливо равенство $h=b\sin\alpha=a\sin\beta$. Поскольку угол α мал (в радианах $\alpha\ll 1$), то $\sin\alpha\approx\alpha$, и, таким образом, $\sin\beta=\frac{b\sin\alpha}{a}\approx\frac{b\alpha}{a}$.

Поскольку, по условию, все стороны одного порядка длины, то b и a – величины одного порядка, а значит в силу малости α, малым является и $\sin\beta$.

Это, в свою очередь, означает, что $\sin\beta\approx\beta$ и $\beta\approx\frac{b\alpha}{a}$.

Опять же в силу того, что все стороны одного порядка, приходим к выводу, что углы β и α малы и одного порядка по величине. Очевидно, что третий угол такого треугольника будет близок к 180^0. Примером треугольника такого типа является, например, треугольник на рис.25б.

13.Для правильного *N*-угольника легко получить, что

$$S_N = N\frac{R^2}{2}\sin\frac{2\pi}{N}.$$

При больших *N* величина $\frac{2\pi}{N}$ (угол, под которым сторона *N*-угольника видна из центра описанной окружности) является малой. Используя соотношение $\sin x \approx x$, получаем, что

$$S_N \approx \pi R^2.$$

Таким образом, в этом приближении площадь многоугольника равна площади описанного вокруг него круга. Оценим теперь отличие площади многоугольника от площади круга. Для этого следует использовать более точную формулу для синуса $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$. Тогда легко находим

$$S_N = \pi R^2 - \frac{2R^2\pi^3}{3N^2}.$$

Теперь нетрудно оценить относительное отклонение площади многоугольника от площади круга $\varepsilon_N = \frac{\Delta S_N}{S} = \frac{2\pi^2}{3N^2}$.

Эта величина падает с ростом N, причем по закону $\frac{1}{N^2}$. Проверим наши оценки для квадрата, правильных шести-, десяти- и стоугольника. В таблице в верхней строке приведены оценки величины ε_N с помощью полученной формулы, а в нижней строке – соответствующие точные значения. Мы видим, что уже для десятиугольника оценка получается достаточно точной.

N	4	6	10	100
ε_N, оценка	0,4112	0,1828	0,0658	0,0066
ε_N, точное	0,3634	0,1730	0,0645	0,0066

14. Очевидно, что

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} = R\sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}} \approx R\left(1 - \frac{x^2}{2R^2}\right) = R - \frac{1}{2R}x^2.$$

Таким образом, действительно, окружность у своей высшей точки аппроксимируется параболой (рис.30).

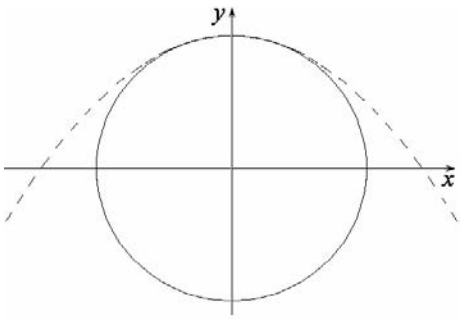


Рис. 30.

15. В силу симметрии ясно, что центр окружности лежит на оси ординат. Пусть его координата равна C. Тогда $(y-C)^2+x^2=R^2$. По аналогии с предыдущей задачей, легко находим $y \approx C+R-\frac{1}{2R}x^2$.

Сравнивая с заданной по условию параболой $y=a-bx^2$, приходим к выводу, что $a=C+R$, $b=\frac{1}{2R}$. Отсюда следует, что $R=\frac{1}{2b}$, $C=a-\frac{1}{2b}$.

16. Для тела, брошенного под углом к горизонту, из кинематики известно выражение для траектории:

$$y=tg\alpha \cdot x-\frac{g}{2u^2}x^2,$$

где $u=v_0\cos\alpha$ – горизонтальная скорость тела. Сравнивая с заданным по условию уравнением параболы $y=ax-bx^2$, получаем a=tgα, $b=\frac{g}{2u^2}$.

В высшей точке траектории полная скорость равна горизонтальной, а ускорение свободного падения g перпендикулярно к ней, и служит, таким образом, центростремительным. По известной формуле кинематики

$$a_{ц.с.}=g=\frac{u^2}{R},$$

откуда получаем $R=\frac{u^2}{g}$. Подставляя сюда $b=\frac{g}{2u^2}$, получаем $b=\frac{1}{2R}$. Отметим, что этот результат согласуется с решением предыдущей задачи.

17.Очевидно, что при малых x

$$a\cos kx \approx a-\frac{ak^2x^2}{2}.$$

Используя результат задачи 15, приходим к выводу, что радиус аппроксимирующей окружности $R=\frac{1}{ak^2}$, а ее центр $C=a-\frac{1}{ak^2}$. Нетрудно видеть, что чем больше амплитуда косинусоиды, тем меньше радиус аппроксимирующей окружности.

2. Анализ с учетом малости физических величин

1.Длина веревки в начале составляет $2\pi R_З$, где $R_З$ – радиус Земли. Если вставить кусок длины l, то ее длина, очевидно, ставит $2\pi R_З + l$, а радиус соответствующей окружности равен $R_З + \frac{l}{2\pi}$. Таким образом, веревка приподнимется на величину $h = \frac{l}{2\pi}$. При $l = 1$м получаем $h \approx 16$см. Таким образом, кошка вполне может проползти, хотя на первый взгляд это и кажется несколько парадоксальным.

2. Если начальная скорость тела v, а угол броска α, то при малых α можно считать, что вертикальная компонента скорости мала и составляет $v_y \approx v\alpha$ (рис.31). В свою очередь, горизонтальная компонента практически равна начальной скорости, т.е. $v_x \approx v$. В этом случае время полета $t \approx \frac{2v\alpha}{g}$, высота $h \approx \frac{v^2\alpha^2}{2g}$, а дальность $s \approx vt \approx \frac{2v^2\alpha}{g}$. Заметим, что к этим же соотношениям можно прийти и полагая малым угол в точных формулах $h = \frac{v^2 \sin^2\alpha}{2g}$ и $s = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}$. Таким образом, если малый угол броска увеличить в 2 раза, то высота возрастет примерно в 4 раза, а дальность – в 2 раза.

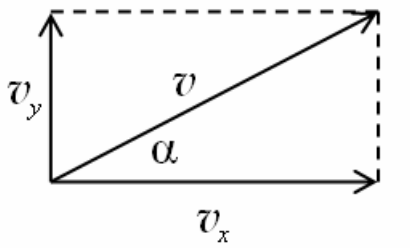


Рис. 31.

3. Точная формула $d_Л = 2R_{ЗЛ} \sin\frac{\varphi}{2}$ (построение аналогично рис. 26). Поскольку угол, под которым видна Луна, мал, то $\sin\frac{\varphi}{2} \approx \frac{\varphi}{2}$, и приходим к приближенной формуле $d_Л \approx R_{ЗЛ}\varphi$. Для оценки ее точности можно использовать улучшенную аппроксимацию синуса: $\sin\frac{\varphi}{2} \approx \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{6}\left(\frac{\varphi}{2}\right)^3$. Тогда ошибка в определении диаметра Луны есть

$$\Delta d_Л \approx 2R_{ЗЛ} \cdot \frac{1}{6}\left(\frac{\varphi}{2}\right)^3 = R_{ЗЛ}\frac{\varphi^3}{24},$$

а относительная ошибка

$$\frac{\Delta d_Л}{d_Л} \approx \frac{1}{24}\left(\frac{d_Л}{R_{ЗЛ}}\right)^2.$$

Используя справочные данные для диаметра Луны $d_Л = 3480$ км и среднего расстояния от Земли до Луны $R_{ЗЛ} \approx 384\,400$ км, получаем $\frac{\Delta d_Л}{d_Л} \approx 3{,}4 \cdot 10^{-6}$.

В абсолютных значениях это около 10 метров.

4. Расстояние, на которое ушла струя, легко определяем из соответствующих геометрических построений: $\Delta l = l tg\alpha \approx l\alpha$. При $\alpha = 4^o$ и $l = 25$ м имеем $\Delta l \approx l\alpha \approx 1{,}7$ м. (Напомним, что угол следует перевести в радианы.) В то же время тяга двигателя в направлении движения самолета уменьшилась и стала равной $f\cos\alpha$. Изменение тяги составило $\Delta f = f - f\cos\alpha \approx f\frac{\alpha^2}{2}$.

(Мы воспользовались тем, что при малых углах $\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$). Для угла $\alpha = 4^o$ имеем $\frac{\Delta f}{f} \approx \frac{\alpha^2}{2} \approx 0{,}0024$. Таким образом, выигрыш в смещении струи значителен, а потери в мощности очень малы.

5. Воспользуемся тем, что скорость тела много меньше скорости света, а значит величина v^2/c^2 мала. Тогда $\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx \frac{1}{1 - v^2/2c^2} \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2}$.

В свою очередь, $E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m_0 c^2 + \frac{mv^2}{2} + \ldots$

Таким образом, в этом приближении энергия складывается из энергии покоя и «обычного», нерелятивистского выражения для кинетической энергии.

6. Дальность полета снаряда дается формулой $s = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}$. Пусть начальный угол изменился на малую величину $\Delta\alpha$. Тогда

$$\sin(2\alpha + 2\Delta\alpha) = \sin 2\alpha \cdot \cos 2\Delta\alpha + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\Delta\alpha.$$

При малых добавках к углу можно считать, что $\cos 2\Delta\alpha \approx 1$ и $\sin 2\Delta\alpha \approx 2\Delta\alpha$. Тогда $\sin(2\alpha + 2\Delta\alpha) \approx \sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha \cdot \Delta\alpha$.

Таким образом, добавка к дальности полета снаряда, связанная с разбросом значений начального угла, составит

$$\Delta s_1 \approx 2\frac{v^2\cos 2\alpha}{g}\Delta\alpha .$$

Эта формула и определяет кучность стрельбы. Заметим, однако, что если α=45º (угол, отвечающий максимальной дальности при фиксированной начальной скорости), то это соотношение дает $\Delta s_1 \to 0$ независимо от значения Δα. Таким образом, в этом случае точность нашей формулы недостаточна, и случай α=45º требует специального рассмотрения.

Выберем $\alpha = \frac{\pi}{4} + \Delta\alpha$, тогда $\sin 2\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\Delta\alpha\right) = \cos 2\Delta\alpha \approx 1 - \frac{(2\Delta\alpha)^2}{2}$.

Значит, $s = \frac{v^2\sin 2\alpha}{g} \approx \frac{v^2}{g}(1-2\Delta\alpha)^2$ и, соответственно, $\Delta s_2 \approx 2\frac{v^2}{g}\Delta\alpha^2$.

Таким образом, при стрельбе на максимальную дальность кучность стрельбы определяется не линейной, а квадратичной добавкой к начальному углу. Сравнивая эти два соотношения, получаем:

$$\frac{\Delta s_1}{\Delta s_2} \approx \frac{\cos 2\alpha}{\Delta\alpha} .$$

Если, например, α=30º и Δα=3º (в радианах 0,05), то $\frac{\Delta s_1}{\Delta s_2} \approx 0{,}1$. Значит при стрельбе под углом α=45º кучность в 10 раз выше.

7. Для груза на пружине период колебаний определяется формулой $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Пусть масса груза и жесткость пружины изменились на величины Δm и Δk. Тогда изменившийся период составит

$$T + \Delta T = 2\pi\sqrt{\frac{m+\Delta m}{k+\Delta k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\cdot\sqrt{\frac{1+\Delta m/m}{1+\Delta k/k}} \approx T\frac{1+\Delta m/2m}{1+\Delta k/2k} \approx$$
$$\approx T(1+\Delta m/2m - \Delta k/2k).$$

Таким образом, $\frac{\Delta T}{T} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta m}{m} - \frac{\Delta k}{k}\right)$.

В нашем случае $\frac{\Delta m}{m} = 0{,}01$ и $\frac{\Delta k}{k} = 0{,}03$, и получаем, что период уменьшится на 2%.

8. Условие равновесия груза на пружине имеет вид $mg = kx + cx^3$.

Поскольку отклонение от закона Гука невелико, то грубо положение равно-

весия определяется как $x \approx \frac{mg}{k}$. Кроме того, малость отклонения от закона Гука означает, что $kx \gg cx^3$, или $1 \gg \frac{cx^2}{k}$. Используя оценку $x \approx \frac{mg}{k}$, последнее неравенство можно переписать как $1 \gg \frac{cm^2g^2}{k^3}$.

Уточним нашу оценку и учтем отклонение от закона Гука. Для этого положим $x = \frac{mg}{k} + \tilde{x}$. Подставляя это соотношение в условие равновесия $mg = kx + cx^3$ и пренебрегая высшими порядками по $\tilde{x}$, получим

$$mg = k\left(\frac{mg}{k} + \tilde{x}\right) + c\left(\frac{mg}{k} + \tilde{x}\right)^3 \approx mg + k\tilde{x} + c\left(\frac{mg}{k}\right)^3 + 3c\left(\frac{mg}{k}\right)^2 \tilde{x}.$$

Отсюда вытекает выражение для поправки к координате:

$$\tilde{x} \approx -\frac{c\left(\frac{mg}{k}\right)^3}{k + 3c\left(\frac{mg}{k}\right)^2}.$$

Используя неравенство $1 \gg \frac{cm^2g^2}{k^3}$, его можно несколько упростить:

$$\tilde{x} \approx -\frac{1}{k}c\left(\frac{mg}{k}\right)^3.$$

9. Как известно, нормальное атмосферное давление отвечает высоте ртутного столба в 760 мм, или, с учетом плотности ртути в 13600 кг/м^3, примерно 10 м водяного столба. Эта величина значительно превышает характерные масштабы задачи 4 см и 14 см. Значит, положение поршня изменится очень мало. Обозначим через ΔP изменение давления под поршнем, а через ΔV – соответствующее изменение объема. По закону Бойля-Мариотта $PV = (P + \Delta P)(V + \Delta V)$. Пренебрегая квадратичными членами, которые являются малыми более высокого порядка, из этого соотношения получаем $0 \approx V\Delta P + P\Delta V$, или $\Delta V \approx -\frac{V}{P}\Delta P$.

В свою очередь, $\Delta V = S\Delta h$, $V = Sl$, где S – площадь пробирки, а l – первоначальная длина ее участка под поршнем. Изменение давления создается столбом налитой в пробирку воды, который при малом смещении поршня

Δh практически не меняется и равен h, так что можно считать, что $\Delta P \approx \rho g h$. Давление внутри пробирки изменяется тоже очень мало, и можно положить $P \approx \rho g H$, где $H \approx 10$ м – высота столба воды, соответствующая атмосферному давлению. Собирая эти соотношения вместе, получаем, что

$$\Delta h \approx \frac{l}{H} h.$$

Для приведенных в условии численных значений h=4 см и $l = 10$ см, получаем $\Delta h \approx 0{,}4$ мм. Мы видим, что действительно $\Delta h \ll h$.

10. Пусть смещение поршня мало. Определим возникшую при этом разность давлений по разные стороны от поршня, для чего применим полученное в предыдущей задаче соотношение к одной из «половинок» газа объемом $\frac{V}{2}$: $\Delta V \approx -\frac{V}{2P}\Delta P$, или $x \approx -\frac{V}{2PS}\Delta P$, где x – смещение поршня. Тогда возвращающая сила, действующая на поршень со стороны сжавшегося объема газа, составляет $F = S\Delta P$. Точно такая же (в нашем приближении) сила действует со стороны расширившейся части газа. Таким образом, получаем $F = \frac{4PS^2}{V}x$.

Мы получили соотношение, аналогичное закону Гука, с «коэффициентом жесткости» $k = \frac{4PS^2}{V}$. Таким образом, для периода колебаний получаем $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{\pi}{S}\sqrt{\frac{mV}{P}}$.

11. При движении по синусоиде (как, впрочем, по любой гладкой кривой), локально, в малых масштабах можно считать, что тело движется по соприкасающейся окружности. Тогда, если скорость тела постоянна, то его ускорение будет центростремительным: $a = \frac{v^2}{R}$, где R – радиус соприкасающейся окружности (его принято называть радиусом кривизны). Максимальному ускорению отвечает минимальный радиус, который, очевидно, соответствует экстремумам синусоиды. Поскольку синусоида и косинусоида отличаются просто сдвигом аргумента на $\frac{\pi}{2}$, то для определения радиуса соприкасающейся окружности в этом случае можно воспользоваться ре-

зультатом решения задачи 17 из предыдущего раздела: $R = \frac{1}{Ak^2}$. Тогда для максимальной силы находим $f = mAv^2k^2$.

12. Материальная точка будет совершать колебания вблизи локальных минимумов косинусоиды. Поместим начало координат в такую точку. Нетрудно понять, что в этом случае профиль проволоки задается формулой

$$y = a - a\cos kx.$$

Используя известную приближенную формулу при малых x, получаем

$$y \approx \frac{ak^2}{2}x^2.$$

Таким образом, профиль проволочки локально аппроксимируется квадратичной параболой. При смещении точки на величину x, ее потенциальная энергия изменяется на величину $U(x) = mgy \approx \frac{amgk^2}{2}x^2$. С другой стороны, при колебаниях материальной точки вблизи локального минимума вектор ее скорости будет наклонен на очень малый угол относительно горизонтали. Это (по аналогии с задачей 2) позволяет считать, что x-компонента скорости примерно равна полной скорости, и точка фактически совершает колебания вдоль оси x с потенциальной энергией $U(x) = \frac{amgk^2}{2}x^2$. Вспоминая аналогию с колебаниями груза на пружине, получаем эффективный коэффициент жесткости $amgk^2$. Соответственно, для периода колебаний находим $T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{agk^2}}$.

3. Анализ функций

1. Если начальная скорость мала, то маятник будет совершать малые колебания с периодом $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, не зависящим от амплитуды. Таким образом, период колебаний в области малых скоростей почти не зависит от ее величины. Если же скорость равна пороговому значению $2\sqrt{lg}$, то маятник примет вертикальное положение и останется в верхней точке сколь угодно долго. Это значит, что период колебаний стремится к бесконечности.

2. Установим сначала вид зависимости $E(x)$ вблизи центра кольца. Разобьем кольцо на маленькие отрезки с зарядом dq каждый. Суммарное поле, создаваемое вдоль оси x, представляет собой сумму вкладов от всех отрезков. Каждый отрезок, заряженный зарядом dq, создает в этом направлении поле

$$dE(x) \approx \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\sin\alpha \approx \frac{dqx}{4\pi\varepsilon_0 R^3}.$$

(Мы воспользовались тем, что при малых x можно считать, что $\sin\alpha \approx \frac{x}{R}$.)

Суммируя по всем отрезкам, получаем

$$E(x) \approx \frac{Qx}{4\pi\varepsilon_0 R^3}.$$

Таким образом, точно в центре кольца поле равно нулю и растет линейно при удалении от центра.

На больших расстояниях от кольца ($x \gg R$) кольцо будет восприниматься как точечный заряд величины Q, и создавать поле

$$E(x) \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}.$$

Видно, что вдали от кольца электрическое поле спадает с ростом координаты. В совокупности с полученным ранее результатом, это означает, что зависимость $E(x)$ обязательно должна иметь максимум. Используя найденные асимптотики, можно изобразить качественным образом искомый график (рис.32).

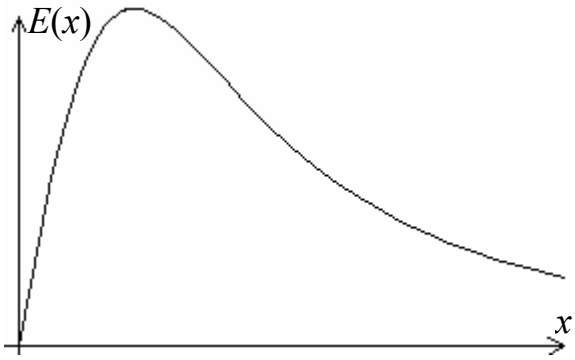


Рис. 32

Можно оценить координату и величину максимума. Для этого приравняем оба асимптотических выражения:

$$\frac{Qx}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}.$$

Отсюда получаем $x \approx R$, и, соответственно, $E(x) \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$.

Полезно привести точную формулу:

$$E(x)=\frac{Qx}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)^{3/2}}.$$

Нетрудно видеть, что при малых и больших x эта формула дает найденные нами из физических соображений асимптотики. Можно убедиться строгим образом, что полученная функция имеет максимум. Дифференцируя $E(x)$, и приравнивая производную нулю, получаем уравнение

$$\frac{dE}{dx}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(R^2+x^2)^{3/2}-3x^2(R^2+x^2)^{1/2}}{(R^2+x^2)^3}=0.$$

Отсюда находим: $x=\frac{R}{\sqrt{2}}$ и $E=\frac{Q}{6\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 R^2}$. Наши качественные соображения подтвердились, а оценки оказались эффективными с точностью до численных множителей, имеющих величину порядка единицы.

3. Непосредственно вблизи диска поле можно вычислить как поле бесконечной заряженной пластины:

$$E\approx\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Вдали от диска (на расстояниях $x \gg R$) он будет восприниматься как точечный заряд величины $q=\sigma S=\pi\sigma R^2$, и создавать поле $E(x)\approx\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}=\frac{\sigma R^2}{4\varepsilon_0 x^2}$.

Приведем для информации точную формулу: $E(x)=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(1-\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}})$.

Нетрудно видеть, что она демонстрирует обе установленные из физических соображений асимптотики. (Рекомендуем показать это самостоятельно.)

4. Чтобы точка двигалась только вперед, ее скорость должна совпадать с по направлению с осью x. Дифференцируя, получим:

$$V=\frac{dx}{dt}=V_0+a\omega\cos\omega t.$$

Скорость будет всегда иметь нужное направление, если $V\geq 0$. С учетом того, что косинус по модулю не превышает единицы, положительные значения скорости обеспечиваются при выполнении условия

$$\frac{V_0}{a\omega}\geq 1.$$

Полезно дать графическую интерпретацию данной задачи. Из условия очевидно, что тело участвует одновременно в двух движениях вдоль оси x: равномерное движение вдоль со скоростью V_0 и гармоническое колебание с

амплитудой a и круговой частотой ω. Поэтому результирующая координата тела в любой момент времени определяется суммой двух координат его “частных” движений. Примерные графики зависимости $x(t)$ даны на рис.33. График на рис.33а соответствует случаю, когда полученное условие выполняется, а на рис.33б – не выполняется.

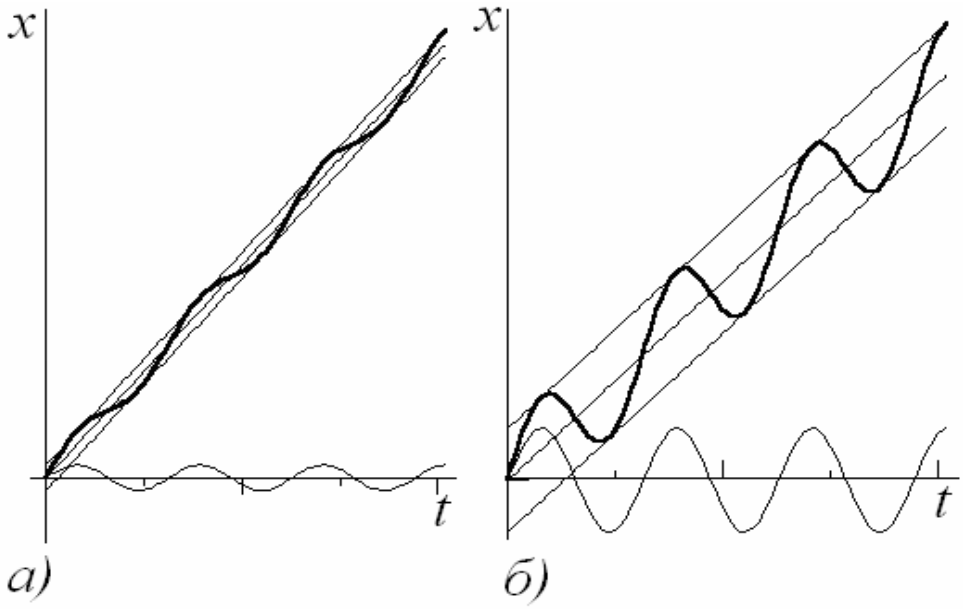


Рис. 33.

Физически условие задачи можно реализовать, если поместить пружинный или математический маятник на тележку, которая может двигаться с постоянной скоростью.

5. Удобно представить потенциал в виде $U = 4a(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x})$, где $x = \left(\frac{r}{b}\right)^6$.

Проанализируем вид потенциала на больших и малых расстояниях между молекулами. В случае малых расстояний начинает доминировать первый член, так что $U \approx 4a\frac{1}{x^2}$ и потенциал стремится к «плюс» бесконечности. В свою очередь, при больших расстояниях доминирует второй член и $U \approx -4a\frac{1}{x}$. Таким образом, потенциал стремится к нулю, причем со стороны отрицательных значений функции. Эти две асимптотики совместимы только при условии, что зависимость потенциала от расстояния имеет минимум. Найдем его. Для этого приравниваем нулю производную

$$\frac{dU}{dx} = 4a(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}) = 0.$$

Отсюда находим $x = 2$. Это значение и определяет расстояние между молекулами $r = \sqrt[6]{2}b$ в случае отсутствия внешних сил. В свою очередь, на больших расстояниях потенциал, как мы видели, обращается в нуль. Это означает, что энергия, необходимая на разделение молекул, дается величиной $E = -U(2) = a$.

6. Прежде всего обоснуем, что зависимость объема конуса от угла α имеет максимум. Это легко сделать из следующих соображений. Если угол вырезанного сектора стремится к нулю, то высота конуса конечна (совпадает с радиусом R), а площадь основания стремится к нулю. Значит, объем конуса также стремится к нулю. Пусть теперь угол стремится к 2π. Тогда площадь основания конечна и стремится к величине πR^2. Высота же конуса в этом случае стремится к нулю, а значит, и объем конуса также стремится к нулю. Таким образом, функция $V(\alpha)$ на отрезке от 0 до 2π должна имеет максимум.

Проведем более детальные вычисления. Длина окружности основания конуса, очевидно, равна $R\alpha$. Тогда радиус основания оставляет $r = \dfrac{R\alpha}{2\pi}$.

В свою очередь для высоты конуса находим $h = \sqrt{R^2 - r^2}$.

Объем конуса $V(\alpha) = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{R^3}{24\pi^2}\alpha^2\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}$.

Это выражение имеет установленные нами асимптотики. Его максимум находим, дифференцируя по α определяющее зависимость от угла выражение $\alpha^2(4\pi^2 - \alpha^2)$ и приравнивая производную нулю:

$$2\alpha\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2} - \frac{\alpha^3}{\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}} = 0.$$

Отсюда получаем, что $\alpha = 2\sqrt{\dfrac{2}{3}}\pi$. Найдем теперь угол при вершине конуса φ. Для него очевидно $\sin\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{r}{R} = \dfrac{\alpha}{2\pi} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Отсюда и определяем значение угла $\varphi = 109°28'$, указанное в условии.

7. По условию прочность балки определяется выражением $P = bh^2$. Пусть толщина балки h стремится к нулю. Тогда, очевидно, ее ширина b стремится к диаметру бревна. И наоборот, если к нулю стремится ширина балки, то ее толщина стремится к диаметру. Таким образом, для этих двух

предельных случаев прочность балки стремится к нулю. Поэтому должна существовать такая конфигурация балки, что ее прочность максимальна. Найдем ее. Очевидно, что $h^2 + b^2 = d^2$. Но тогда $P = b(d^2 - b^2)$. Условию экстремума отвечает $\frac{dP}{db} = d^2 - 3b^2 = 0$, откуда получаем $b = \frac{1}{\sqrt{3}}d$ и, соответственно, $h = \sqrt{\frac{2}{3}}d$.

8. Освещенность на краю стола дается формулой $I = \frac{c}{d^2}\cos\theta$, где d – расстояние от точки подвеса лампы до края стола, а $\cos\theta = \frac{h}{d}$ – угол, под которым виден край стола из этой точки. Используя теорему Пифагора, без труда получаем: $I = \frac{ch}{(h^2 + R^2)^{3/2}}$, где R – радиус стола. Нетрудно видеть, что асимптотики $h \to 0$ и $h \to \infty$ приводят к $I \to 0$. Таким образом, искомая интенсивность как функция высоты подвеса лампы h действительно имеет максимум. Приравнивая нулю производную, по аналогии с задачей 2, получаем $h = \frac{R}{\sqrt{2}}$.

9. Обозначим скорость налетающей частицы массы m через v. Происходит упругий удар с ядром массы M. Используя известные результаты анализа задачи об упругом ударе двух тел, находим скорость ядра V после удара: $V = \frac{2mv}{m + M}$.

По условию кинетическая энергия ядра после удара составляет n-ую часть кинетической энергии налетавшей частицы. Поэтому

$$n = \frac{MV^2}{mv^2} = \frac{4mM}{(m+M)^2} = \frac{k}{(1+k)^2},$$

где $k=m/M$ – отношение масс частицы и ядра. Полученная функция $n = n(k)$ при малых k ведет себя как $n(k) \approx k$.

Таким образом, доля переданной энергии растет с ростом относительной массы налетающей частицы. В тоже время, при больших k имеем оценку $n(k) \approx \frac{1}{k}$.

В этом случае доля переданной энергии падает – очень тяжелая налетающая частица почти не передает энергии легкому ядру[4]. Из установленных асимптотик вытекает, что зависимость $n = n(k)$ должна иметь максимум. Его можно найти, дифференцируя $n(k)$ и приравнивая производную нулю:

$$\frac{dn}{dk} = \frac{1-k^2}{(1+k)^4} = 0.$$

Отсюда находим, что $k = 1$. Таким образом, доля переданной энергии максимальна, когда массы частицы и ядра равны. При этом передается четвертая часть энергии налетающей частицы, поскольку при $k = 1$:

$$n = \frac{k}{(1+k)^2} = \frac{1}{4}.$$

График функции $n(k)$ и найденные асимптотики показаны на рис.34.

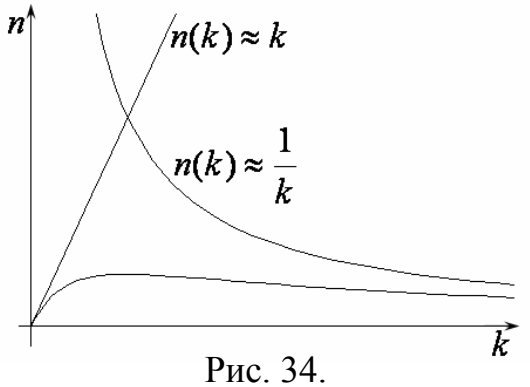


Рис. 34.

10. Для начала определим положение центра масс пустого сосуда h_0. Разделим мысленно сосуд на две части – стенки массой m_1 и дно массой m_2. Для простоты будем считать, что толщина стенок мала по сравнению с диаметром сосуда. В этом случае $m_1 = 2\pi RdH\rho_0$, $m_2 = \pi R^2 d\rho_0$, где ρ_0 – плотность материала стенок. Тогда координата центра масс пустого сосуда, отсчитываемая *от уровня дна*, определяется выражением $h_0 = \frac{1}{2}\frac{m_1 H - m_2 d}{m_1 + m_2}$.

(Знак минус в числителе связан с тем, что дно расположено ниже выбранного нулевого уровня.) Используя выражения для масс стенок и дна, находим

$$h_0 = \frac{1}{2}\frac{2H^2 - Rd}{2H + R}.$$

Таким образом, возможны две качественно различные ситуации. Если $H > \sqrt{\frac{Rd}{2}}$, то $h_0 > 0$, и центр масс пустого сосуда лежит выше уровня дна.

[4] Этот вывод может показаться неверным, ведь очевидно, что после соударения с очень тяжелой частицей («стенкой») легкая полетит с достаточно большой скоростью. Между тем парадокса здесь нет: энергия легкой частицы мала лишь по сравнению с энергией тяжелой, а не «сама по себе».

Этот случай имеет место при достаточно высоких стенках, и его естественно назвать «стакан».

Если же неравенство выполняется в противоположную сторону: $H < \sqrt{\frac{Rd}{2}}$, то центр масс лежит ниже уровня дна. Эта ситуация имеет место, если стенки невысоки, и ее будем условно называть «тарелка».

Отметим также, что из полученной формулы следует, что $h_0 < \frac{H}{2}$. Это понятно – центр масс стенок лежит точно на высоте $\frac{H}{2}$, а добавка дна может только понизить его положение.

Пусть теперь в сосуд подлили воду до уровня h. Тогда высота центра масс сосуда с водой будет определяться формулой $l = \frac{Mh_0 + \frac{1}{2}\rho S h^2}{M + \rho S h}$, или

$$l = \frac{h_0\varepsilon + \frac{1}{2}h^2}{\varepsilon + h}.$$

Здесь введен параметр $\varepsilon = \frac{M}{\rho S}$ с размерностью длины. Он имеет физический смысл высоты столба жидкости, масса которого равна массе стакана.

Обсудим теперь, как зависит положение центра масс от уровня налитой воды h. Из полученной формулы видно, что при больших h квадратичный член будет доминировать, и положение центра масс можно оценить как $l \approx \frac{1}{2}h$. Эта оценка физически понятна: если налито много воды, то стакан по сравнению с жидкостью весит мало, а значит, центр масс определяется положением центра масс столба жидкости.

Если же налито немного жидкости, наоборот, можно пренебречь квадратичным членом по сравнению с линейным, и получить:

$$l \approx \frac{h_0\varepsilon}{\varepsilon + h} = \frac{h_0}{1 + h/\varepsilon} \approx h_0 - \frac{h_0}{\varepsilon}h.$$

Анализ этой формулы выявляет два различных случая. Пусть сначала мы имеем «тарелку», для которой центр масс находится ниже дна и $h_0 < 0$. В этом случае высота центра масс системы возрастает с ростом h. Физически это вполне понятно – подливаемая вода заведомо лежит выше центра масс пустой тарелки.

Иная ситуация имеет место для стакана. Действительно, для стакана $h_0 > 0$, и при малом количестве подлитой воды центр масс начинает понижаться. Физически это также ясно: при малом количестве жидкости она целиком располагается ниже центра масс пустого сосуда.

Эта два случая разделяются особой, выделенной ситуацией, когда $h_0 = 0$. Это случай, когда центр масс пустого сосуда точно совпадает с его дном. Для него из исходного анализируемого соотношения имеем

$$l = \frac{\frac{1}{2}h^2}{\varepsilon + h},$$

то есть уровень центра масс при изменении уровня жидкости меняется очень слабо, квадратичным образом.

Обсудим теперь случай «стакана» более подробно. Как мы видели, положение центра масс при малом количестве подлитой жидкости уменьшается. С другой стороны – при большом количестве подлитой жидкости оно растет. Таким образом, исследуемая зависимость должна иметь минимум. Убедимся в этом. Удобно ввести безразмерный уровень жидкости $x = \frac{h}{\varepsilon}$. Тогда

$$l = \frac{h_0 + \frac{1}{2}\varepsilon x^2}{1 + x}.$$

Найдем минимум этой функции. Дифференцируя по x и приравнивая производную $\frac{dl}{dx}$ нулю, находим

$$\varepsilon x(1 + x) - h_0 + \frac{1}{2}\varepsilon x^2 = 0,$$

откуда получаем квадратное уравнение для координаты:

$$x^2 + 2x - \frac{2h_0}{\varepsilon} = 0.$$

Решая его, получаем искомое значение

$$x_{\min} = -1 + \sqrt{1 + \frac{2h_0}{\varepsilon}}.$$

Соответственно, высота наинизшего положения центра масс дается выражением

$$l_{\min} = l(x_{\min}) = \varepsilon\left(\sqrt{1 + \frac{2h_0}{\varepsilon}} - 1\right).$$

После прохождения этой точки центр масс начинает подниматься. Интересно, что можно добиться такой ситуации, когда центр масс стакана с водой будет точно совпадать с положением центра масс пустого стакана. Действительно, приравнивая $l = h_0$, получаем: $x = \frac{2h_0}{\varepsilon}$. Или, переходя к размерным переменным, $\frac{h}{2} = h_0$. Это условие имеет простую физическую интерпретацию: центр масс стакана с водой совпадает с центром масс пустого стакана в том случае, если центр масс налитой воды также совпадает с центром масс пустого стакана. Отметим, что мы установили, что $h_0 < \frac{H}{2}$. Это означает, что найденная ситуация соответствует $h < H$. А это, в свою очередь, означает, что наиболее высокое положение центра масс будет в полностью заполненном водой стакане, после прохождения условия совпадения центра масс, что довольно очевидно из физических соображений.

Для частного случая $\frac{h_0}{\varepsilon} = \frac{3}{2}$ график функции $y(x) = l/h_0\,(x) = \frac{1 + \frac{1}{3}x^2}{1 + x}$ показан на рис.35. Минимум в этом случае достигается при $x_м = 1$.

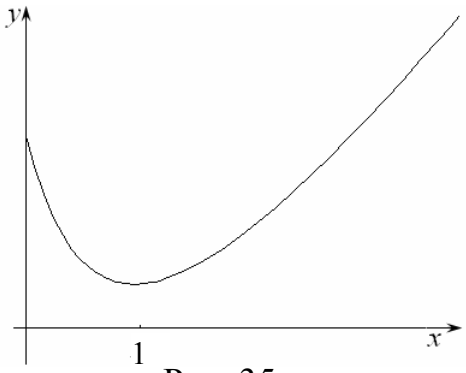


Рис. 35

4. Внимание, в уравнении параметр

1. Пусть высота столба тяжелой жидкости в первом сосуде составляет l_1, а во втором – l_2. Очевидно, что $l_1 + l_2 = 2H$. Условие равенства давлений в соединяющей трубке дает $\rho_Л l + \rho_Т l_1 = \rho_Т l_2$, где l – «количество»[5] подлитой легкой жидкости. Из этих двух соотношений легко находим

$$l_2 = H + \frac{\rho_л l}{2\rho_Т}.$$

Однако это соотношение будет выполняться лишь до тех пор, пока легкая жидкость не вытеснит тяжелую во второй сосуд, т.е. до $l_2 = 2H$, или

[5] Чтобы избежать введения лишних величин, количество жидкости в этой задаче будем характеризовать высотой ее столба в сосуде данного диаметра.

$$l = \frac{2\rho_T}{\rho_Л} H .$$

Начиная с этого момента, часть легкой жидкости будет перетекать из первого сосуда во второй и всплывать наверх, поскольку жидкости не перемешиваются. В этом случае

$$\rho_Л (l - x) = 2\rho_T H + \rho_Л x_2 ,$$

где x – количество легкой жидкости, перетекшей во второй сосуд. Тогда легко получаем

$$l_2 = 2H + x = 2H + \frac{\rho_Л l - 2\rho_T H}{2\rho_Л} = \frac{1}{2} l + H\left(2 - \frac{\rho_T}{\rho_Л}\right).$$

Нетрудно видеть, что в первом случае наклон графика зависимости уровня во втором сосуде от количества подлитой жидкости определяется коэффициентом $\frac{\rho_Л}{2\rho_T}$, а во втором – $\frac{1}{2}$. Таким образом, соответствующий график имеет в точке $l = \frac{2\rho_T}{\rho_Л} H$ излом.

2. Тело будет набирать скорость, соскальзывая с полусферы, и может оторваться от нее. Найдем момент отрыва. Пусть радиус, проведенный к телу, составляет угол α с вертикалью. По закону сохранения энергии имеем

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgR(1 - \cos\alpha),$$

где m – масса тела. С другой стороны, условием движения тела по окружности радиуса R является соотношение

$$mg\cos\alpha - N = \frac{mv^2}{R},$$

где N – сила реакции опоры. В момент отрыва $N = 0$. Комбинируя все эти соотношения вместе, получаем:

$$\cos\alpha = \frac{2}{3} + \frac{mv_0^2}{3Rg}.$$

В частном случае, когда начальная скорость равна нулю, получаем для условия отрыва $\cos\alpha = \frac{2}{3}$. Следует отметить, однако, что косинус не может превышать единицу. Поэтому найденное решение существует лишь при

$\frac{mv_0^2}{Rg} < 1$. Следовательно, имеется критическая скорость, при превышении которой отрыв тела происходит сразу, и оно совершает свободный полет по параболе.

3. В этой задаче, на первый взгляд, нет параметра, поскольку все численные значения заданы. Однако она представляет собой пример, когда такой параметр удобно ввести искусственным образом. Действительно, обсудим сначала задачу в общем виде, полагая плотность материала шара ρ, а плотность воды – $\rho_в$. Пусть шар погрузился в воду на глубину h. Объем погруженной части находим как объем шарового сегмента: $\pi h^2 (R - h/3)$. Тогда по закону Архимеда получаем

$$\pi h^2 (R - h/3)\rho_в = 4/3\, \pi R^3 \rho,$$

где $4/3\, \pi R^3$ – объем шара. Введем далее безразмерную глубину погружения $x = h/R$. Тогда наше уравнение можно привести к виду

$$x^2 (1 - x/3) = \varepsilon,$$

где $\varepsilon = \frac{4\rho}{3\rho_в}$ и есть соответствующий параметр. В случае, отвечающем $\rho = 0{,}1$ г/см^3, имеем $\varepsilon = 0{,}133\ldots$. Итак, задача свелась к решению кубического уравнения, которое можно решить численно. Однако можно аналитически получить очень хорошее приближенное решение, используя малость параметра ε.

В силу малости ε, малой является и искомая величина x. (Шар очень легкий и, следовательно, мало погружен в жидкость.) Поэтому можно пренебречь величиной $x/3$ по сравнению с единицей. Тогда получаем $x \approx \sqrt{\varepsilon}$.

В нашем случае $x \approx \sqrt{0{,}1333} \approx 0{,}365$. Эффективность нашего приближения определяется малостью величины $x/3 \approx 0{,}121$ по сравнению с единицей.

Мы можем улучшить полученное приближение. Для этого положим $x = \sqrt{\varepsilon} + \delta$, где δ – маленькая добавка. Тогда

$$x^2 = (\sqrt{\varepsilon} + \delta)^2 \approx \varepsilon + 2\sqrt{\varepsilon}\delta,$$

$$x^3 = (\sqrt{\varepsilon} + \delta)^2 \approx (\sqrt{\varepsilon})^3 + 3\varepsilon\delta$$

в силу малости δ. Подставляя эти соотношения в исследуемое уравнение, получим

$$\delta \approx \frac{\varepsilon}{3(2-\sqrt{\varepsilon})}.$$

В нашем случае $\varepsilon = 0{,}133...$, откуда находим $\delta \approx 0{,}027...$. Окончательно $x = \sqrt{\varepsilon} + \delta \approx 0{,}365 + 0{,}027 = 0{,}392$. Возвращаясь к размерным переменным, получаем, что шар углубится в воду примерно на 3,9 см. Десятые доли миллиметра мы отбросили, поскольку ясно, что в реальной задаче такая точность не нужна. (Поскольку влияние, например, поверхностного натяжения внесет бóльшую поправку.) Заметим, что первое приближение было достаточно точным: добавка во втором составила всего около 3 мм.

При желании уравнение $x^2(1 - x/3) = \varepsilon$ можно решить и более точно. Для этого можно воспользоваться, например, методом Ньютона. Он состоит в том, что для решения уравнения $f(x) = 0$ можно находить все более точные значения корня с помощью итерационного соотношения

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

В нашем случае $f(x) = x^2(1 - x/3) - \varepsilon$, и итерационная формула выглядит как:

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 - \frac{2}{3}x_n^3 + \varepsilon}{(2 - x_n)x_n}.$$

Используя, например, начальное приближение $x_1 = 0{,}365$, получаем $x_2 = 0{,}3923...$, $x_3 = 0{,}3916...$ $x_4 = 0{,}3916...$ Мы видим, что последовательность очень быстро сходится, и чтобы получить глубину погружения шара точностью до сотых долей миллиметра (что с физической точки зрения, конечно, не нужно), достаточно всего двух итераций.

Аналогичным образом можно приближенно решить задачу, если плотность шарика близка к плотности воды.

Есть еще один случай, позволяющий легко найти приближенное решение: если плотность жидкости примерно в два раза больше плотности шара. Действительно, в этом случае шар погружен почти точно наполовину. Тогда объем погруженной части складывается из половины объема шара и малой добавки, которую можно вычислить, умножая площадь шара в соответ-

ствующем сечении на малую добавку к радиусу, т.е. $\pi R^2 h$. В результате имеем

$$(\tfrac{2}{3}\pi R^3 + \pi R^2 h)\rho_в = \tfrac{4}{3}\pi R^3 \rho,$$

откуда получаем

$$\frac{h}{R} = \frac{2}{3}\frac{2\rho - \rho_в}{\rho_в}.$$

Например, для $\rho = 0{,}6$ г/см^3, получаем $\frac{h}{R} \approx 0{,}133$, и суммарная глубина погружения шара составит 11,33 см. Более точный расчет дает 11,035 см. Таким образом, ошибка составляет 3 мм.

4. Обозначим скорость налетающего грузика массы m через v. Сначала произойдет абсолютно упругий удар с одним грузиком массы M. (Считаем время соударения очень малым, так что за это время грузы не смещаются и пружина не успевает деформироваться). Используя известные результаты анализа задачи об упругом ударе двух тел, находим скорости налетающего u и первоначально неподвижного V грузов после удара:

$$u = \frac{m - M}{m + M}v, \quad V = \frac{2m}{m + M}v.$$

После удара налетавший груз движется со скоростью u, поэтому его координата зависит от времени по закону $x_1 = ut$. Обсудим теперь движение второго (покоившегося) груза. Он входит в систему из двух одинаковых грузиков, скрепленных пружиной. Движение такой системы проще всего понять, перейдя в систему центра масс, которая после удара движется со скоростью $V/2$. В этой системе отсчета грузики симметричным образом колеблются по гармоническому закону, причем центр пружины неподвижен, а амплитуда колебаний скорости составляет $V/2$. Таким образом, скорость грузиков изменяется по закону $V(t) = \frac{V}{2}\cos\omega t$, где ω – частота собственных колебаний каждого груза. Этому отвечает изменение координаты по закону $x(t) = \frac{V}{2\omega}\sin\omega t$. Возвращаясь в исходную систему отсчета, получаем

$$x_2 = \frac{V}{2}t + \frac{V}{2\omega}\sin\omega t.$$

Условие повторного столкновения грузиков $x_1 = x_2$ приводит к следующему уравнению:

$$ut = \frac{V}{2}t + \frac{V}{2\omega}\sin\omega t.$$

Используя полученные ранее соотношения для скоростей u и V, после некоторых преобразований получим

$$\sin\omega t = -\frac{M}{m}\omega t.$$

Это трансцендентное уравнение относительно времени соударения t. Обсудим подробнее его свойства. Для этого удобно ввести безразмерные переменную $\tau=\omega t$ и параметр $k = \frac{M}{m}$. Тогда исследуемое уравнение примет вид

$$\sin\tau = -k\tau.$$

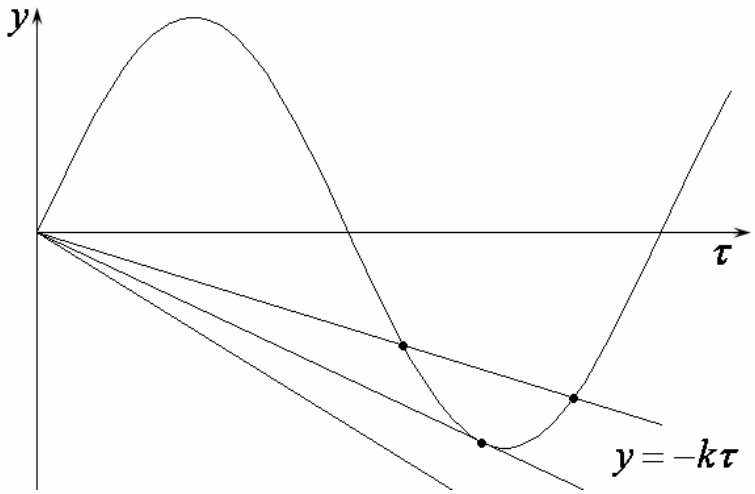


Рис. 36

Таким образом, его решения зависят от параметра k. Представление о них можно получить графическим методом. С этой целью изобразим на одном графике две функции, задающие левые и правые части уравнения: $y(\tau) = \sin\tau$ и линейную $y(\tau) = -k\tau$ при разных значениях параметра k, «управляющего» наклоном прямой линии (рис.36). Из рисунка хорошо видно, что в зависимости от значений этого параметра графики могут пересекаться, что физически отвечает возможности повторного столкновения грузиков, а могут и не пересекаться, тогда повторное столкновение невозможно. «Критическая» ситуация, очевидно, отвечает случаю, когда прямая линия является касательной к графику синуса. Для этого в точке касания угловой коэффициент прямой линии k должен совпасть с угловым коэффициентом касательной к графику синуса, который находим, вычисляя соответствующую производную. Таким образом, в критической ситуации

$$\sin\tau = -k\tau,$$

$$\cos\tau = -k.$$

(Фактически, мы просто продифференцировали первое соотношение.) Поделив эти два уравнения друг на друга, получим

$$\operatorname{tg}\tau=\tau.$$

Это также трансцендентное уравнение, но в него не входит никаких параметров, поэтому его можно решить численно. Прежде всего, полезно оценить примерное значение интересующего нас корня. Для этого вновь воспользуемся графическим методом. Из соответствующего рис.37 видно, что графики пересекаются в окрестности точки $\frac{3}{2}\pi$. Таким образом, $\tau_1\approx 4{,}712388....$

Для дальнейшего уточнения корня положим $\tau=\frac{3}{2}\pi-\delta$, где δ – малая величина. Подставляя это в исследуемое уравнение, получим

$$ctg\delta=\frac{1}{\frac{3}{2}\pi-\delta}.$$

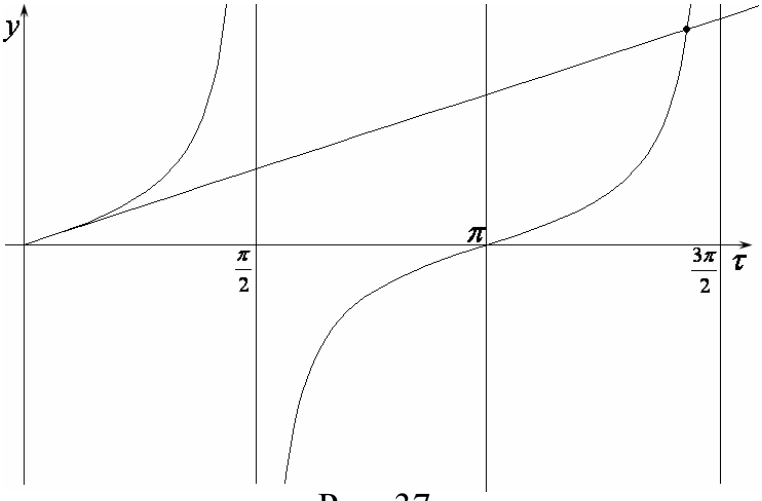


Рис. 37

При малых δ можно положить $ctg\delta=\frac{1}{\delta}$ (поскольку $\sin\delta\approx\delta$, $\cos\delta\approx 1$). Тогда можно легко получить $\delta\approx\frac{2}{3\pi}$. Окончательно, $\tau_2\approx\frac{3}{2}\pi-\frac{2}{3\pi}\approx 4{,}50017\ldots$

Можно еще более точно решить уравнение, если учесть квадратичные по δ члены: $\sin\delta\approx\delta$, $\cos\delta\approx 1-\frac{\delta^2}{2}$. Тогда из $ctg\delta(\frac{3}{2}\pi-\delta)=1$ получаем

$$\delta=\frac{3\pi}{2}(1-\sqrt{1-2\left(\frac{2}{3\pi}\right)^2}=0{,}2172\ldots$$

Таким образом, $\tau_3=4{,}49517....$

Дальнейшие уточнения можно получить с помощью метода Ньютона. Тонкость состоит, однако, в том, что решать исходное уравнение $\operatorname{tg}\tau=\tau$ оказывается очень неудобно, поскольку в окрестности корня тангенс имеет очень большую крутизну и трудно добиться сходимости метода. Поэтому

будем решать эквивалентное уравнение $\sin\tau - \tau\cos\tau = 0$. Применим к нему формулу метода Ньютона

$$\tau_{n+1} = \tau_n - \frac{f(\tau_n)}{f'(\tau_n)}.$$

Тогда получаем

$$\tau_{n+1} = \tau_n - \frac{1}{\tau_n} + ctg\tau_n.$$

Используя начальное приближение $\tau = 0{,}45$, получаем $\tau = 4{,}49342...$ Следующая итерация дает $\tau = 4{,}49341...$

Возвращаясь к нашей физической задаче, легко находим значение параметра $k = -\cos\tau$: $k = 0{,}21722...$

Поскольку параметр k определяется массами грузиков ($k = \frac{M}{m}$), то повторное столкновение грузов возможно, если

$$\frac{M}{m} < 0{,}21722.$$

Таким образом, для того, чтобы столкновение было возможным, налетающий груз должен быть достаточно тяжелым.

5. Могут реализоваться следующие конечные состояния системы:

- В сосуде останется только лед. Соответствующее условие имеет вид

$$c_в MT + \lambda M < c_л m.$$

- В сосуде останется только вода. Условие реализации этого состояния имеет вид

$$c_в MT > c_л mt + \lambda M.$$

- Промежуточная ситуация: есть одновременно и лед, и вода при нулевой температуре.

Здесь $c_в$, $c_л$, λ – удельные теплоемкости воды и льда и удельная теплота плавления льда соответственно.

Соответствующие области на плоскости параметров (T, t) изображены на рис. 38. При этом прямые, являющиеся границами областей, па-

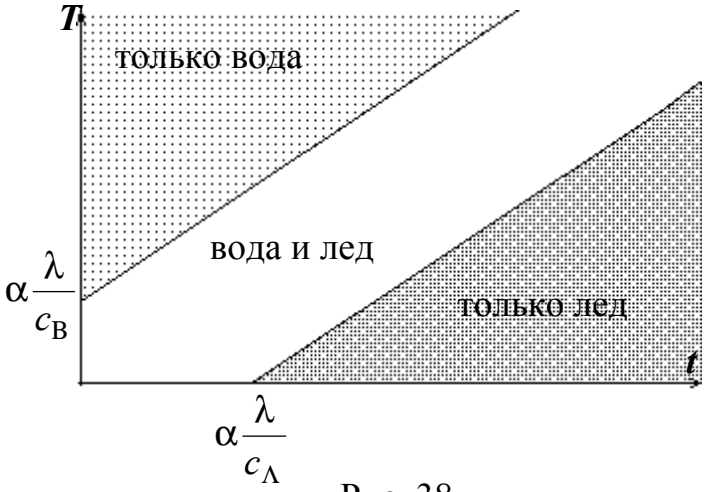


Рис. 38

раллельны, а их угловой коэффициент равен параметру $\alpha=m/M$, характеризующему соотношение начальных масс воды и льда[6].

6. Брусок либо скользит по доске, либо нет. В первом случае приложенная сила F больше, чем максимальная сила трения покоя между бруском и доской $F_{тр.1}=\mu_1 mg$, во втором – меньше.

Если брусок скользит, то по третьему закону Ньютона на доску в направлении силы F действует еще и сила трения скольжения $F_{тр.1}$, а если нет – то сила трения покоя, равная F**.** Если эта сила меньше, чем максимальная сила трения покоя между доской и поверхностью $F_{тр.1}=\mu_2(m+M)g$, то доска скользит по поверхности, если нет, то доска покоится. Таким образом, возможны четыре различные ситуации:

- Брусок и доска скользят относительно друг друга.

В этом случае $F>\mu_1 mg$ и $\mu_1 mg>\mu_2(m+M)g$, и следовательно

$$\mu_1<\frac{F}{mg},\ \mu_2<\mu_1\frac{m}{m+M}.$$

- Брусок скользит по доске, доска покоится относительно поверхности.

В этом случае должны выполняться неравенства $F>\mu_1 mg$ и $\mu_1 mg<\mu_2(m+M)g$, откуда следует, что

$$\mu_1<\frac{F}{mg},\ \mu_2>\mu_1\frac{m}{m+M}.$$

- Брусок неподвижен относительно доски, доска скользит. Это соответствует $F<\mu_1 mg$ и $F>\mu_2(m+M)g$, или

$$\mu_1>\frac{F}{mg},\ \mu_2<\mu_1\frac{m}{m+M}.$$

- Брусок и доска неподвижны. Тогда $F<\mu_1 mg$ и $F<\mu_2(m+M)g$, или

$$\mu_1>\frac{F}{mg},\ \mu_2>\mu_1\frac{m}{m+M}.$$

Соответствующие этим ситуациям области на плоскости параметров (μ_1,μ_2) приведены на рис. 39. При вариации коэффициентов трения мы будем двигать-

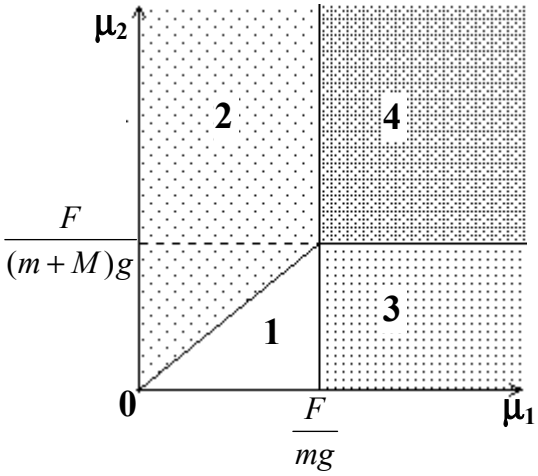


Рис. 39

[6] Строго говоря, необходимо дополнительно ограничить рисунок прямыми T=100ºC и t=273ºC из вполне очевидных физических соображений.

ся по этой плоскости параметров и наблюдать качественное изменение типа поведения системы. Интересно отметить, что на плоскости параметров имеется особая точка, в окрестности которой реализуются все четыре возможных типа динамики.

7. Пусть капли соприкасаются. Поверхность раздела в таком случае должна находиться в равновесии. Таким образом, соответствующие трем границам три силы должны в сумме давать ноль. Это условие может, однако, нарушаться. Например, если $\sigma_{12}+\sigma_{13}<\sigma_{23}$, то капля 1 «растечется» по капле 2. Если $\sigma_{23}+\sigma_{12}<\sigma_{13}$, то наоборот, капля 2 растечется по капле 1. Если же $\sigma_{23}+\sigma_{13}<\sigma_{12}$, то капли разлетятся. При представлении результатов в пространстве параметров можно отнормировать коэффициенты поверхностного натяжения на величину σ_{12}. Тогда приходим к разбиению плоскости параметров $(\sigma_{13}/\sigma_{12},\sigma_{23}/\sigma_{12})$ на области, показанному на рис.40.

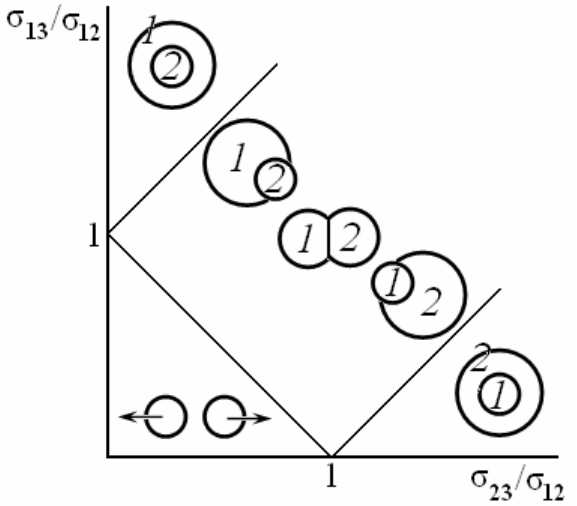


Рис. 40.

8. Обсудим сначала некоторые предельные случаи. Если скорости движения по полю и дороге совпадают, т.е. $v=u$ и $\varepsilon=1$, то очевидно, что минимальное время будет достигаться при движении по кратчайшему расстоянию между точками, т.е. по диагонали прямоугольника. Если же $v=0$, то двигаться следует только по дорогам. Можно предположить, что в промежуточной ситуации будет оптимальным маршрут – сначала по полю под некоторым углом к дороге, а затем по дороге (рис.41). Оказывается, что на плоскости указанных в условии параметров этим трем возможностям отвечают определенные области. Обсудим этот вопрос более подробно.

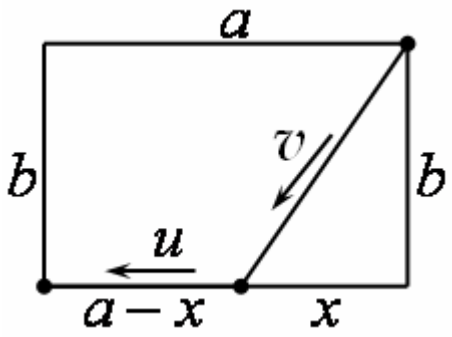


Рис. 41.

Пусть человек сначала идет по полю так, что выходит на дорогу на расстоянии x от угла поля (рис. 41). В этом случае он при движении по полю затратит время $t=\dfrac{\sqrt{x^2+b^2}}{v}$. По дороге он пройдет расстояние $(a-x)$ за

время $t = \frac{(a-x)}{u}$. Таким образом, суммарное время движения составит

$$t = \frac{\sqrt{x^2 + b^2}}{v} + \frac{(a-x)}{u}.$$

Введем далее для удобства безразмерное время $\tau = \frac{vt}{a}$ и безразмерную координату $\frac{x}{a}$, которую мы для удобства продолжим обозначать как x. Тогда

$$\tau = \varepsilon(1-x) + \sqrt{x^2 + \mu^2}.$$

Эта зависимость имеет две характерные асимптотики. Для одной, отвечающей $x = 1$, имеем

$$\tau_1 = \sqrt{1 + \mu^2}.$$

Данному случаю отвечает движение строго по диагонали прямоугольника.

Во втором случае $x = 0$ и

$$\tau_0 = \varepsilon + \mu.$$

На первый взгляд, ему отвечает движение только по дорогам. На самом деле нужно рассуждать более аккуратно. Такое решение отвечает движению «почти» вдоль дороги, но все же по полю вдоль стороны прямоугольника b, и лишь затем по дороге. Для движения же только по дорогам можно получить без труда $t = \frac{a+b}{u}$ или

$$\tau_3 = (1+\mu)\varepsilon.$$

Продолжим наш анализ. Пусть пешеход движется частично по полю, а частично по дороге. Как мы нашли, он затратит время

$$\tau = \varepsilon(1-x) + \sqrt{x^2 + \mu^2}.$$

Подберем значение x (точку выхода на дорогу) так, чтобы получить минимальное значение функции $\tau = \tau(x)$. Для этого вычислим производную этой функции и приравняем ее нулю:

$$\frac{d\tau}{dx} = -\varepsilon + \frac{x}{\sqrt{x^2 + \mu^2}} = 0.$$

Решая это уравнение, находим координату, отвечающую экстремуму функции

$$x_M = \frac{\mu\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

Само значение функции в этой точке

$$\tau_M = \varepsilon + \mu\sqrt{1-\varepsilon^2}.$$

Нетрудно показать, что эта точка всегда отвечает локальному минимуму функции (Для этого нужно вычислить вторую производную, которая оказывается всегда положительной.)

При дальнейшем анализе надо учесть, что функция $\tau = \tau(x)$ определена на отрезке от нуля до единицы, и локальный минимум x_M не всегда отвечает минимальному значению функции на этом отрезке.

Пусть сначала $x_M > 1$. Это значит, что локальный минимум лежит на числовой оси правее границы области определения функции. Но тогда ее минимум будет определяться значением $\tau_1=\tau(1)$. Физически это соответствует, как мы отмечали выше, движению по полю строго по диагонали. Найдем соответствующую область на плоскости параметров (μ,ε). Используя $x_M > 1$ и $x_M = \frac{\mu\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$, после некоторых преобразований, получим:

$$\varepsilon > \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

Итак, при выполнении этого условия выгодно двигаться по диагонали.

Пусть теперь полученное неравенство выполняется в противоположную сторону. В этом случае выбирать следует между движением только по дорогам, когда $\tau_3=(1+\mu)\varepsilon$, и по дороге и по полю, когда $\tau_M = \varepsilon + \mu\sqrt{1-\varepsilon^2}$. Ясно, что движение только по дорогам выгоднее, если

$$\tau_3 < \tau_M, \text{ или } (1+\mu)\varepsilon < \varepsilon + \mu\sqrt{1-\varepsilon^2}.$$

Решая последнее неравенство, после некоторых преобразований получаем

$$\varepsilon < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, это условие не зависит от конфигурации прямоугольника. Собирая полученные результаты вместе, получаем области, показанные на рис.42. На рисунке показаны ситуации, когда

- Выгодно идти только по полю (по диагонали), цифра 1.

- Выгодно идти под определенным углом по полю, а затем – по дороге, цифра 2.
- Выгодно идти только по дорогам, цифра 3.

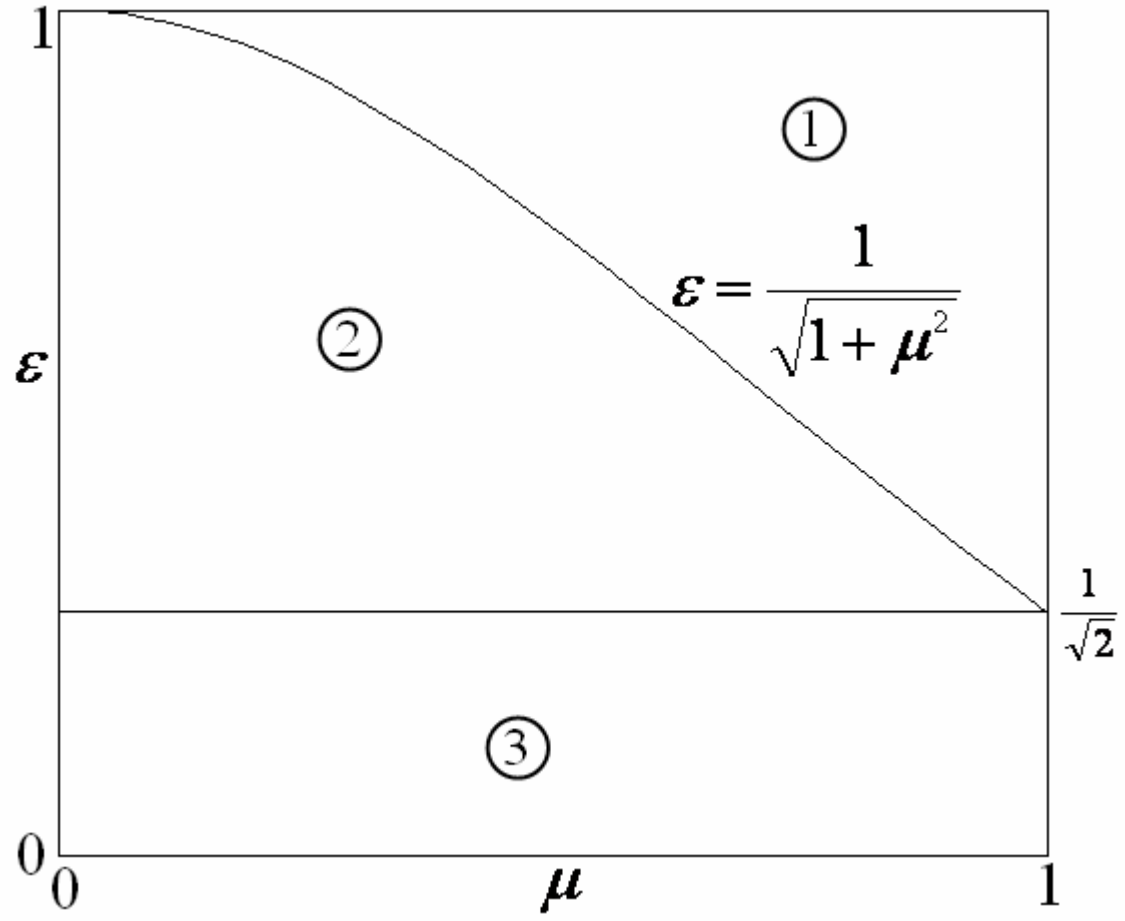


Рис.42

Из рисунка видно, что плоскость параметров имеет «тройную» точку, для которой $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\mu = 1$, в которой сходятся все три характерные области. Таким образом, если поле близко по форме к квадрату, а отношение скоростей к $\frac{1}{\sqrt{2}}$, пешеходу определить «на взгляд» оптимальный путь наиболее трудно.

9.Возможны три качественно разные ситуации: мяч не долетел до стенки, мяч ударился о стенку, мяч перелетел через стенку (рис.43)

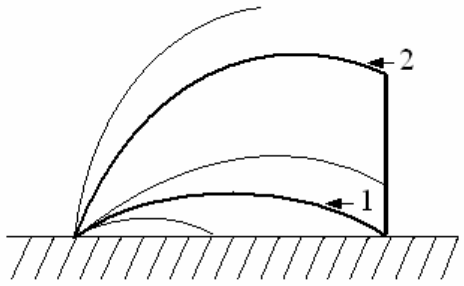
«Граничными» являются траектории, обозначенные на рисунке цифрами 1 и 2. Для первой такой траектории дальность полета равна *l*. Поэтому имеем

$$l = v^2 \sin 2\alpha / g .$$

Вторая траектория проходит через точку на высоте *h* на расстоянии *l*.

Поэтому для нее должно выполняться соотношение

$$h = l(tg\alpha - \frac{gl}{2v^2 \cos^2 \alpha}).$$



Траектории 1 и 2 разделяют траектории мяча, отвечающие разным исходам

Рис. 43.

Выберем два параметра, которые будут отложены по осям абсцисс и ординат. С физической точки зрения наиболее естественно использовать угол α и начальную скорость v. Однако безразмерный параметр gl/v^2 удобнее, чем скорость v, поскольку для него получаются более простые соотношения. Отметим, что физический смысл имеют лишь положительные значения этого параметра и значения угла α, лежащие в интервале от 0 до $\pi/2$. Используя два приведенных выше соотношения, получаем для разграничительных линий:

$$gl / v^2 = \sin 2\alpha,$$

$$gl / v^2 = \sin 2\alpha - (h / l)(\cos 2\alpha + 1).$$

Изобразим эти разграничительные линии на одном рисунке (рис.44).

Эти линии разбили диаграмму на три области, которые соответствуют трем возможным типам движения мяча. Нетрудно установить, какая область соответствует какому конечному результату.

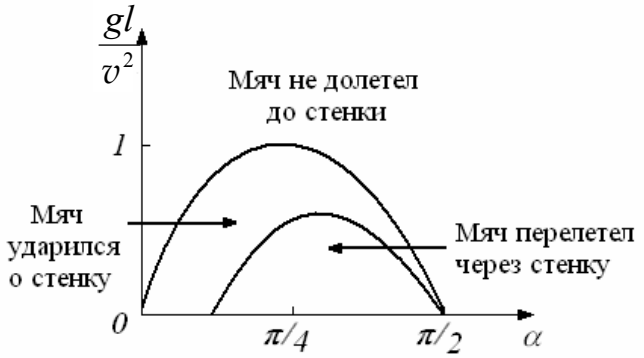


Рис. 44.

А что будет происходить, если мы будем бросать несколько мячей с некоторой определенной скоростью, постепенно увеличивая угол? Чтобы ответить на этот вопрос, следует провести на диаграмме горизонтальные линии, которые соответствуют фиксированным значениям скорости (рис.44). Как видно из рисунка, возможны три «сценария» такого эксперимента с набором мячей:

- все мячи не долетают до стенки;
- мячи, брошенные под малыми углами, не долетают до стенки; мячи, брошенные в некотором интервале больших углов, ударяются в стен-

ку; мячи, брошенные под еще большими углами, не долетают до стенки;

- мячи, брошенные под малыми углами, не долетают до стенки; мячи, брошенные под большими углами, ударяются в стенку; мячи, брошенные под еще большими углами, перелетают через стенку, и далее в обратном порядке.

Определим пороговые значения скорости, при которой меняются типы «сценариев». Очевидно, что им соответствуют максимумы разграничительных линий. Максимум линии, заданной уравнением $gl/v^2 = \sin 2\alpha$ достигается при значении $\alpha=\pi/4$ и равен единице. Поэтому соответствующее пороговое значение скорости

$$v_{\min 1}^2 = gl.$$

Это минимальное значение скорости, при которой мяч уже может долететь до стенки.

Максимум линии, заданной уравнением

$$gl/v^2 = \sin 2\alpha - (h/l)(\cos 2\alpha + 1)$$

равен $(\sqrt{1+h^2/l^2} - h/l)$. Таким образом, соответствующее пороговое значение скорости

$$v_{vin2}^2 = \frac{gl}{\sqrt{1+h^2/l^2} - h/l}.$$

Это минимальное значение скорости, при которой мяч уже может перелететь через стенку.

10. Прежде всего, отметим, что если $f>T$, то рвется нижняя нить. Обсудим теперь, что будет происходить, если $f<T$. В этом случае сила натяжения нижней нити равна f (нить невесома). В рамках предложенной в условии модели мы приходим к ситуации, когда имеется груз на пружинке, который потянули вниз с силой f. Такая система будет совершать колебания около положения равновесия по гармоническому закону. По такому же закону будет изменяться и сила натяжения около среднего положения $f_{ср}=f+Mg$ с амплитудой f. Нить порвется, если максимальная сила натяжения $f+f_{ср}=2f+Mg$ превысит T, и не по-

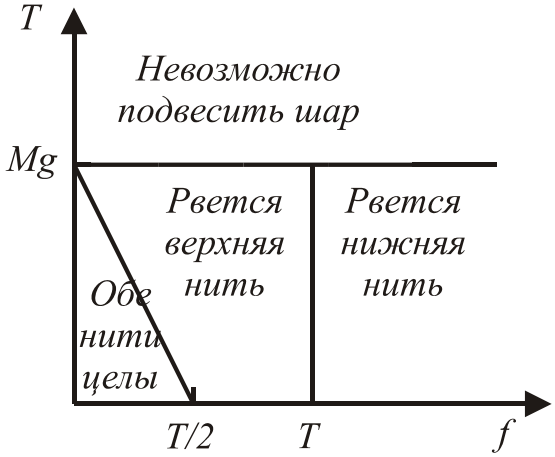


Рис. 45.

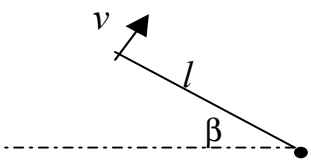
рвется при выполнении противоположного условия. Различные возможные случаи на плоскости существенных параметров иллюстрируются рис. 45.

11. Сразу очевидны три качественно различных ситуации: когда нить закручивается вокруг нижнего гвоздя, а грузик при этом движется по окружности; когда грузик совершает колебания, а нить все время остается натянутой; и «промежуточный» вариант.

Грузик совершает колебания, а нить все время остается натянутой, если отклонение грузика влево не превышает 90°. Тогда по закону сохранения энергии $mgL(1-\cos\alpha)<mgl$, откуда получаем условие $l/L>1-\cos\alpha$.

Для того, чтобы грузик закручивался вокруг нижнего гвоздя и нить все время оставалась натянутой, необходимо, чтобы сила натяжения нити в верхней точке траектории была больше нуля, т.е. $mv^2/l>mg$, тогда по закону сохранения энергии $mgL(1-\cos\alpha)>mgl/2+mgl$, откуда $l/L<2/5(1-\cos\alpha)$.

Промежуточный случай требует более подробного рассмотрения. Если грузик отклоняется вправо на угол, больший 90°, но его энергии не хватает для движения по окружности, то в некоторый момент натяжение нити становится равным нулю. Пусть в этот момент угол между нитью и горизонталью составляет β (рис. 46). Из условия равенства нулю силы натяжения нити получим $mv^2/l=mg\sin\beta$. В то же время по закону сохранения энергии $mv^2/2=mgL(1-\cos\alpha)-mgl(1+\sin\beta)$, откуда получим выражение для угла β: $\sin\beta=2/3(L/l(1-\cos\alpha)-1)$.



Дальнейшее движение грузика в течение некоторого времени можно рассматривать как полет тела, брошенного под углом к горизонту. Возможны две качественно различных ситуации: когда грузик проходит над нижним гвоздем (в этом случае нить наматывается на гвоздь, но траектория грузика не является окружностью), и когда грузик проходит ниже этого гвоздя, при этом нить не наматывается, а грузик совершает сложные движения. Найдем условие, разграничивающее эти ситуации.

Пусть грузик оказывается на одной вертикали с гвоздем через время t. Тогда $v\sin\beta\, t=l\cos\beta$, откуда $t=l\cos\beta/v\sin\beta$. Грузик пройдет выше гвоздя и нить намотается на гвоздь, если $l\sin\beta+v\cos\beta t-gt^2/2>0$. Подставив t и проведя некоторые преобразования с использованием ранее полученных соотношений, получим неравенство: $l/L<2/(2+\sqrt{3})(1-\cos\alpha)$.

Таким образом, окончательно имеем 4 различных ситуации: I – колебания по дуге окружности; II – сложное движение без закручивания нити вокруг гвоздя; III – нить закручивается вокруг гвоздя, шарик движется по сложной кривой; IV – шарик движется по спирали, нить закручивается вокруг гвоздя. Соответствующие им области представлены на рис. 47.

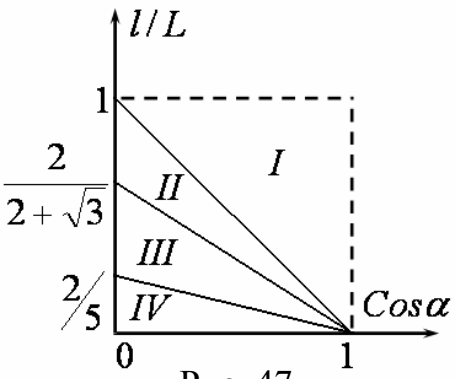


Рис. 47.

5. Катастрофы (бифуркации)

1. Равновесие системы будет определяться конкуренцией двух факторов – притяжением токов, которое стремится уменьшить расстояние между ними, и силой упругости, которая стремится увеличить это расстояние. Поместим начало координат в точку, отвечающую положению правого провода при отсутствии деформации пружины. Тогда сила притяжения токов, расположенных на расстоянии $(L-x)$, дается известной формулой

$$F(x)=\frac{\mu_0 Iil}{2\pi(L-x)}.$$

В противоположную сторону будет направлена сила упругости $-kx$, так что суммарная сила

$$F(x)=\frac{\mu_0 Iil}{2\pi(L-x)}-kx.$$

Положение равновесия будет определяться условием $F(x)=0$, которое приводит к квадратному уравнению

$$x^2-Lx+\frac{\mu_0 Iil}{2\pi k}=0.$$

Решая его, находим

$$x_{1,2}=\frac{L}{2}(1\mp\sqrt{1-\varepsilon}),$$

где $\varepsilon=\dfrac{2\mu_0 Iil}{\pi k L^2}$ – «управляющий» безразмерный параметр, который можно варьировать, например, изменяя ток в проводниках. Мы выбрали знаки так, чтобы корень x_1 лежал ближе к началу координат, а x_2 – ближе к непод-

вижному проводнику. Действительно, в отсутствии токов $\varepsilon = 0$ и из полученной формулы имеем $x_1 = 0$, а $x_2 = L$.

Нетрудно видеть, что состояния равновесия возможны при $\varepsilon < 1$, причем в этом случае их два, чему отвечают разные знаки перед квадратным корнем. Для дальнейшего анализа следует изобразить график зависимости силы F от координаты x (рис.48). На этом графике хорошо видны положения равновесия. Обратимся сначала к тому из них, которое ближе к пружине. Из графика видно, что при прохождении через это равновесие сила меняется с положительной на отрицательную, т.е. она направлена к положению равновесия. Таким образом, это устойчивое положение равновесия. Для более далекой точки сила меняет знак с отрицательного на положительный, т.е. она направлена от точки равновесия. Это неустойчивое положение равновесия.

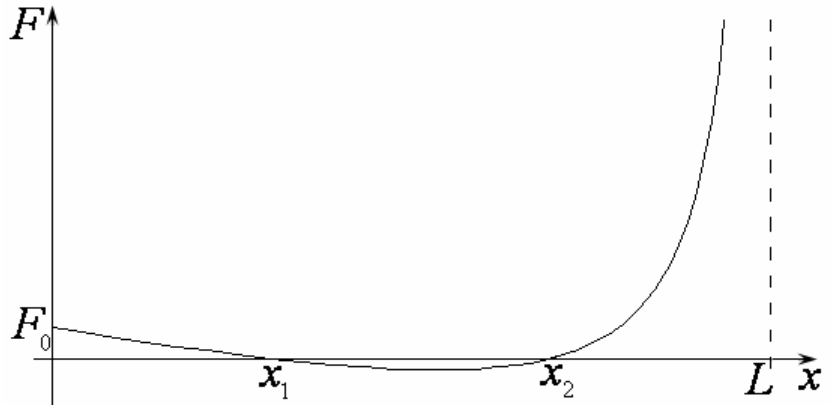


Рис.48

Заметим, что характер равновесий легко можно установить и из ***анализа предельного случая***. Действительно, при выключенных токах $\varepsilon = 0$, и положение равновесия $x_1 = 0$, очевидно, является устойчивым.

При увеличении параметра ε положения равновесия движутся навстречу друг другу, и при $\varepsilon = 1$ сливаются и исчезают. При $\varepsilon > 1$ положений равновесия нет вообще. Таким образом, если медленно увеличивать ток, то проводник на пружине будет постепенно приближаться к неподвижному проводнику (считаем, что возможные колебания гасятся за счет диссипации). При достижении критического значения тока ($\varepsilon = 1$) в точке $x = L/2$ равновесие исчезнет, и подвижный проводник резко притянется к неподвижному. Произойдет качественное состояние изменение системы, которое называют катастрофой или бифуркацией.

Полезно изобразить также график зависимости потенциальной энергии от координаты, который показан на рис.49. Его можно построить как из качественных соображений, используя график зависимости силы от координаты на рис.48, так и используя аналитическое выражение

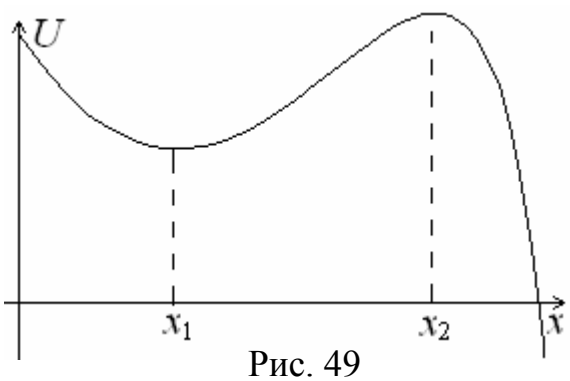


Рис. 49

$$U(x) = -\int F(x)dx = -\int\left(\frac{\mu_0 Iil}{2\pi(L-x)} - kx\right)dx = \frac{\mu_0 Iil}{2\pi}\ln|L-x| + \frac{kx^2}{2}.$$

Мы видим график, аналогичный рис.10.

Ситуация слияния устойчивого и неустойчивого равновесий с их исчезновением является типичной и распространенной катастрофой (бифуркацией), которую называют ***«катастрофа складки».*** Как мы увидим далее, это одна из универсальных и распространенных бифуркаций в физических системах.

2. Пусть в начальном состоянии давление газа равно P. Тогда условие равновесия поршня имеет вид

$$P_0 + \rho g(l - l_0) + mg = P,$$

где ρ – плотность ртути.

Обозначим через y высоту пробирки, занятую газом после нагревания до температуры T. Тогда условие равновесия поршня после нагрева имеет вид

$$P_0 + \rho g(l - y) + mg = P',$$

Здесь $m = \dfrac{M}{S}$ – нормированная на площадь масса поршня. Давление газа P' при температуре T можно найти из уравнения состояния идеального газа

$$P' = \frac{l_0 T}{y T_0} P.$$

Комбинируя эти соотношения вместе, получим

$$P_0 + \rho g(l - y) + mg = \frac{l_0 T}{y T_0}(P_0 + \rho g(l - l_0) + mg).$$

Далее удобно ввести два существенных параметра. Во-первых, некоторую величину с размерностью длины

$$L = l + \frac{P_0 + mg}{\rho g},$$

и безразмерную температуру

$$\tau = \frac{T}{T_0}.$$

Тогда полученное нами уравнение можно переписать в виде

$$(L - y)y = \tau(L - l_0)l_0.$$

Отсюда следует, что координата поршня после нагревания удовлетворяет квадратному уравнению

$$y^2 - Ly + \tau(L - l_0)l_0 = 0.$$

Оно, соответственно, имеет два решения

$$y_{1,2} = \frac{L \mp \sqrt{L^2 - 4\tau(L - l_0)l_0}}{2}.$$

Оба ли корня имеют смысл? Рассмотрим температуру, равную начальной. Тогда $\tau = 1$ и $y_1 = l_0$, а $y_2 = L - l_0$. По условию начальная высота поршня равна l_0, поэтому положение поршня определяется первым корнем. Однако, как мы увидим ниже, второй корень тоже может оказаться существенным с точки зрения решения задачи.

Действительно, пусть, как и предложено в условии, мы постепенно повышаем температуру τ. В выражении

$$y_1 = \frac{L - \sqrt{L^2 - 4\tau(L - l_0)l_0}}{2}$$

подкоренное выражение будет постепенно уменьшаться, при этом координата y растет и поршень постепенно поднимается вверх. Однако, в тот момент, когда подкоренное выражение обратится в ноль, т.е.

$$L^2 - 4\tau(L - l_0)l_0 = 0,$$

решение квадратного уравнения станет невозможным. Формально говоря, два корня уравнения y_1 и y_2 сольются друг с другом и исчезнут. Физически это означает, что равновесие поршня станет невозможным при достижении температурой критического значения

$$\tau_C = \frac{L^2}{4(L - l_0)l_0}.$$

Поршень «самопроизвольно» начнет двигаться вверх, выталкивая ртуть, пока не выбросит ее всю. Произойдет качественное изменение состояния системы.

Физический анализ задачи, однако, на этом не заканчивается. Найдем координату поршня в момент «катастрофы» в системе. Как следует из решения квадратного уравнения, в этот момент

$$y = \frac{L}{2}.$$

Но в системе есть еще один параметр – длина пробирки l. Описанный нами «сценарий» развития событий реализуется, если слияние корней произойдет внутри пробирки, т.е. при условии $\frac{L}{2} < l$. Используя определение L это условие можно переписать в виде

$$P_0 + mg < \rho g l.$$

Если это условие заменить на противоположное, то слияние корней произойдет вне пробирки, что не имеет физического смысла. Таким образом, если $\frac{L}{2} > l$, то при возрастании температуры ртуть будет постепенно вытекать из пробирки вплоть до самого ее верха, и никакого «скачка» не произойдет.

Результат нашего анализа удобно представить на плоскости безразмерных параметров. В качестве одного из них выбираем $\varepsilon = \frac{L}{l}$, который «управляется» массой поршня, атмосферным давлением и плотностью наливаемой жидкости. По своему определению всегда $\varepsilon > 1$. Второй параметр – безразмерная температура τ. Критической температуре отвечает линия

$$\tau_C = \frac{\varepsilon^2}{4(\varepsilon - \mu)\mu}.$$

Здесь $\mu = \frac{l_0}{l}$ – еще один безразмерный параметр, отвечающий соотношению газа и ртути в начальном состоянии системы. По своему определению $\mu < 1$, так что знаменатель в приведенном соотношении всегда положителен.

Резкий выброс ртути возможен, как мы отмечали, при условии при условии $\frac{L}{2} < l$, или в наших безразмерных параметрах, при $\varepsilon = \frac{L}{l} < 2$. При

противоположном условии $\varepsilon > 2$ газ постепенно вытеснит ртуть до самого верхнего края пробирки.

Интересно отметить, что график критической температуры $\tau_C = \dfrac{\varepsilon^2}{4(\varepsilon - \mu)\mu}$ имеет минимум при условии $\varepsilon = 2\mu$, причем критическая температура в этом случае точно равна единице, $\tau_C = 1$. (В этом легко убедиться, продифференцировав функцию $\tau = \tau(\varepsilon)$ и приравняв нулю производную.) Эта ситуация отвечает тому, что начальное состояние уже является критическим – малейшее изменение температуры приводит к выбросу ртути. Ей отвечает условие $L = 2l_0$. Поскольку всегда $\varepsilon > 1$, то такая ситуация возможна лишь если $\mu > 0{,}5$. Соответственно, разбиение плоскости параметров (ε, τ) на характерные области для $\mu < 0{,}5$ (взято $\mu = 0{,}25$) и $\mu > 0{,}5$ (взято $\mu = 0{,}75$) показано на рис.50а и рис.50б. Можно выделить три характерных области:

- Ртуть резко поднимается вверх и выталкивает поршень, цифра 1.
- Поршень приподнялся и находится внутри пробирки, цифра 2.
- Поршень выдавлен из пробирки при медленном, без скачка подъеме ртути, цифра 3.

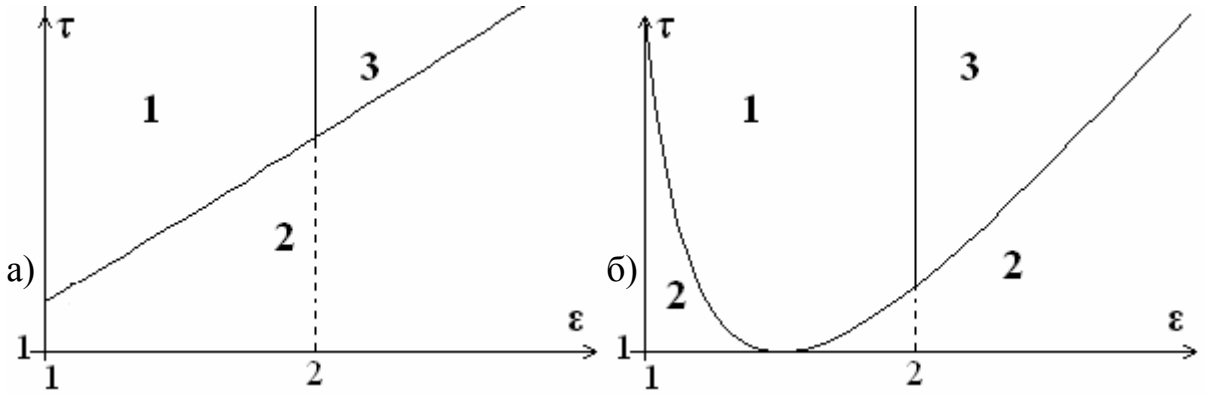


Рис. 50

Обсудим еще один вопрос. В начальном состоянии второй корень y_2 располагается вне пробирки. Но, как мы отметили, возможно слияние корней внутри нее. Тогда этот корень должен иметь какой-то смысл. Можно показать, что решению y_1 отвечает устойчивое состояние равновесия, а y_2 – неустойчивое. Действительно, пусть поршень слегка сместился вверх на величину dy при неизменной температуре системы. Тогда часть ртути выльется и оказываемое ей давление на поршень уменьшится на величину

$dP = \rho g dy$. В свою очередь, по закону Бойля-Мариотта давление газа также упадет, но на величину $dP = \frac{P}{y} dy$. Чтобы равновесие было устойчивым, первая величина должна быть меньше второй, т.е. $\rho g < \frac{P}{y}$. Однако по условию равновесия $P_0 + \rho g(l - y) + mg = P$. Тогда

$$y < \frac{P_0 + \rho g l + mg}{2\rho g} = \frac{L}{2},$$

что всегда выполняется для первого положения равновесия и не выполняется для второго.

Таким образом, реализующаяся в нашей системе «катастрофа» также отвечает слиянию и исчезновению устойчивого и неустойчивого состояний равновесия системы.

3.Пусть маятник отклонили на угол φ. Тогда на него будет действовать сила тяжести, создающая момент $mgl\sin\varphi$ относительно точки подвеса. Пружина, в соответствии с условием, создает момент $M = \mu\varphi$. Таким образом, условие равновесия маятника можно записать как

$$mgl\sin\varphi - \mu\varphi = 0,$$

или, если ввести безразмерный параметр $k = \frac{\mu}{mgl}$, характеризующий жесткость пружины, то

$$\sin\varphi - k\varphi = 0.$$

Прежде всего отметим, что мы получили точно такое же уравнение, как и в задаче 4 из предыдущего раздела, поэтому при его анализе используем уже полученные результаты. Обратимся к графику этого уравнения (рис.51). На рисунке можно видеть, что число равновесий зависит от параметра k, и с его уменьшением появляются все новые состояния равновесия, когда график прямой пересекает синусоиду во все более далеких точках.

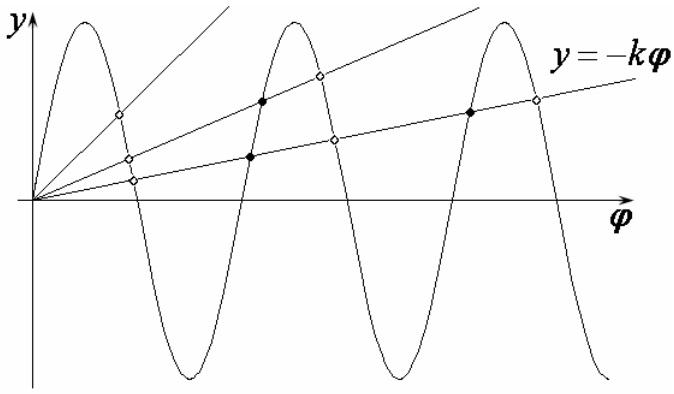


Рис. 51.

Проанализируем возможные решения с использованием физических представлений. Пусть параметр k стремится к нулю,

т.е. пружина очень «мягкая» и почти не оказывает влияние на систему. Как видно из рисунка, решения нашего уравнения в этом случае стремятся к значениям угла π, 2π, 3π, 4π и т.д. Им легко дать простую физическую интерпретацию. Они представляют собой положения равновесия свободного маятника. При этом углам π, 3π, … отвечает неустойчивое равновесие, когда маятник вертикален, а груз находится в верхней точке. Углам 2π, 4π… отвечает нижнее положение маятника, т.е. устойчивое равновесие. (На рис.51 устойчивые равновесия отмечены жирными точками, а неустойчивые – кружочками.) Если пружины нет, то эти равновесия неотличимы друг от друга и от случая нулевого угла. (Они соответствуют поворотам маятника вокруг точки подвеса на угол, кратный 2π.) Однако наличие даже очень мягкой пружины снимает эту симметрию и делает состояния равновесия этого типа различающимися.

Будем теперь медленно увеличивать жесткость пружины, что отвечает на графике увеличению наклона прямой. Можно видеть, что устойчивое и неустойчивое состояния равновесия будут попарно двигаться навстречу друг другу. При некоторых (бифуркационных) значениях параметра они также попарно будут сливаться и исчезать, то есть, если использовать введенную в предыдущих задачах терминологию, будет иметь место катастрофа складки. Моменты слияния и исчезновения равновесий близки к точкам $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{2}\pi$, $\frac{7}{2}\pi$… Физически это тоже понятно: повернем маятник на угол, чуть больший π, т.е. перейдем через верхнюю точку. Тогда сила тяжести начнет создавать момент, противоположный возвращающему моменту пружины. Максимальный момент силы тяжести как раз отвечает повороту на 270º, или $\frac{3}{2}\pi$. Именно в окрестности этой точки и возможна первая бифуркация. Такая же ситуация имеет место при углах около $\frac{5}{2}\pi$ и т.д.

Найдем теперь значения параметра, отвечающие слиянию равновесий. В таких точках прямая на рис.51 является касательной к графику синуса, и поэтому выполняется как соотношение

$$\sin\varphi - k\varphi = 0,$$

так и продифференцированное уравнение

$$\cos\varphi - k = 0.$$

Отсюда получаем уже известное нам по задаче 4 уравнение

$$tg\varphi = \varphi.$$

Однако в отличие от задачи 4, смысл имеют все его корни и решения.

Как видно из графика и как мы отмечали при физическом обсуждении, новые решения возникают в окрестности значений $\varphi = \alpha$, где α равно $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{2}\pi$, $\frac{7}{2}\pi\ldots$ Для примерного определения соответствующих бифуркационных значений можно положить $\varphi = \alpha - \delta$. Тогда для малой величины δ справедливо уравнение

$$ctg\delta = \alpha - \delta,$$

Далее можно использовать, что $ctg\delta \approx \frac{1 - \delta^2/2}{\delta}$, и тогда получаем уравнение

$$\delta^2 - 2\alpha\delta + 2 = 0,$$

решение которого имеет вид

$$\delta = \alpha(1 - \sqrt{1 - 2\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2}\ .$$

Заметим, что из графической интерпретации задачи видно, что полученная приближенная формула должна работать тем лучше, чем более далекие корни мы рассматриваем.

Для определения параметра k следует воспользоваться соотношением $k = -\cos\varphi$. Если мы используем, что $\varphi = \alpha - \delta$, то $k = \sin\delta$, и при малых δ можно полагать

$$k \approx \delta.$$

Перейдем теперь к численным оценкам. Случай $\alpha = \frac{3}{2}\pi$ уже был рассмотрен в задаче 4 (раздел 4). Для него приближенные соотношения дают $\delta_1 \approx 0{,}21721\ldots$, и соответственно

$$\varphi_1 = 4{,}49518\ldots \text{ (точное значение } 4{,}49341\ldots),$$

$$k_1 = 0{,}21721\ldots \text{ (точное значение } 0{,}21723\ldots).$$

Здесь индекс означает номер бифуркации слияния решений, а в скобках приведены точные значения, найденные методом Ньютона.

Для второй точки $\alpha = \frac{5}{2}\pi$ получаем $\delta_2 \approx 0{,}12837\ldots$, и, соответственно

$$\varphi_2 = 7{,}72561... \text{ (точное значение } 7{,}72525...\text{)},$$
$$k_2 = 0{,}12837... \text{ (точное значение } 0{,}12837...\text{)}.$$

Мы видим, что далее приближенные формулы дают очень высокую точность, и можно не привлекать более метод Ньютона. Для третьей точки $\alpha = \frac{7}{2}\pi$ тогда получаем $\delta_3 \approx 0{,}09132\ldots$ и

$$\varphi_3 = 10{,}90425...$$
$$k_3 = 0{,}09132\ldots$$

В этом случае уже хорошо работает и более простая аппроксимация $k \approx \frac{1}{\alpha}$.

Итак, особенность представленной задачи по сравнению с двумя предыдущими – возможность множества бифуркаций слияния и исчезновения устойчивого и неустойчивого равновесий при вариации некоторого параметра.

4. Пусть отклонение шарика от вертикали мало. Тогда сила тяжести создает «опрокидывающую» силу $F = -\frac{mg}{l}x$. Для равновесия шарика необходимо выполнение условия

$$-\frac{mg}{l}x + kx + cx^3 = 0.$$

Отсюда следует, что равновесия отвечают значению $x = 0$, а также

$$x = \pm\frac{\sqrt{mg - kl}}{\sqrt{lc}}.$$

Последнее решение существует лишь при $mg > kl$. Нетрудно понять, что положение равновесия $x = 0$ устойчиво при выполнении неравенства в противоположную сторону: $mg < kl$. В этом случае пружина достаточно жесткая и стабилизирует неустойчивость маятника, связанную с действием силы тяжести. В момент, когда $mg = kl$, это положение равновесия теряет устойчивость, и от него отделяются два новых устойчивых равновесия $x = \pm\frac{\sqrt{mg - kl}}{\sqrt{lc}}$.

Для анализа положений равновесия и их устойчивости, найдем потенциальную энергию системы:

$$U(x) = -\frac{mg}{2l}x^2 + \frac{kx^2}{2} + \frac{cx^4}{4} = \frac{1}{2}(k - \frac{mg}{l})x^2 + \frac{cx^4}{4}.$$

(Дифференцирование этого соотношения по координате приводит к полученному выше выражению для суммарной силы.)

Обсудим вид потенциальной функции $U(x)$ и ее метаморфозы подробнее. Для этого удобно ввести параметр $a = k - \frac{mg}{l}$. Тогда

$$U(x) == \frac{a}{2}x^2 + \frac{cx^4}{4}.$$

Таким образом, потенциальная энергия представляет собой полином четвертой степени. При этом ее график обладает ***симметрией*** относительно вертикальной оси, поскольку $U(x)$ зависит только от четных степеней координаты x. С точки зрения исходной системы, наличие симметрии связано с равноправием отклонения маятника в ту или иную стороны.

Для анализа свойств функции $U(x) = \frac{a}{2}x^2 + \frac{cx^4}{4}$ удобно заметить, что вблизи начала координат $U(x) \approx \frac{a}{2}x^2$, в силу того, что $x^4 \ll x^2$. Поэтому, если $a > 0$, то функция $U(x)$ в начале координат имеет единственный квадратичный минимум, отвечающий устойчивому равновесию системы (рис.52а).

Если же $a < 0$, то вблизи начала координат минимум сменяется максимумом. Вдали от начала координат начинает доминировать член четвертой степени x^4, поэтому «ветви» графика в этой области идут «вверх». Значит, функция $U(x)$ при $a < 0$ должна иметь два локальных минимума (рис.52в), которым как раз отвечают значения координаты $x = \pm\frac{\sqrt{mg - kl}}{\sqrt{lc}}$.

Таким образом, функция $U(x)$ может демонстрировать два качественно разных случая: единственный минимум в начале координат и два минимума, между которыми расположен максимум. Перестройка от одного типа функции к другому происходит через «вырожденный» случай $a = 0$, которому отвечает минимум четвертой степени: $U(x) = \frac{cx^4}{4}$ (рис.52б).

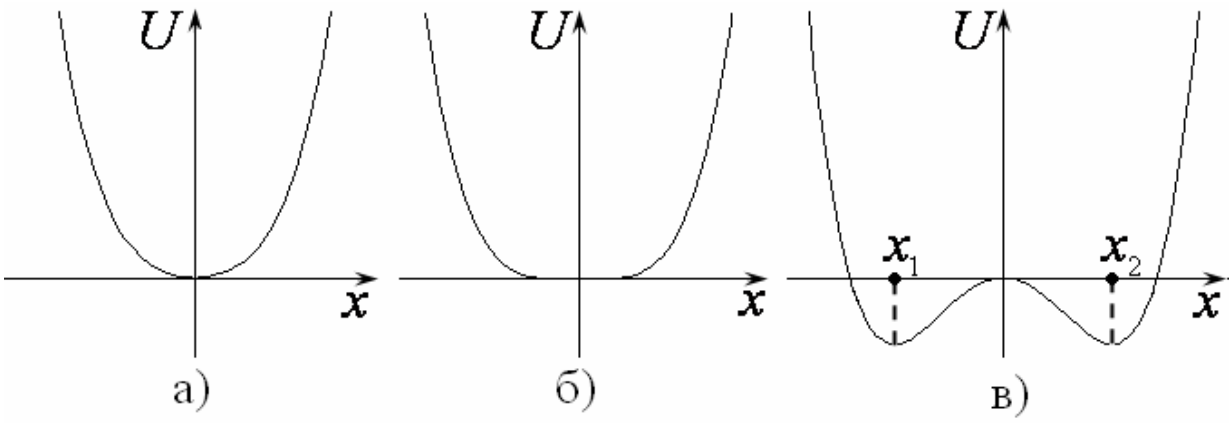


Рис. 52.

Отметим, что вид потенциальной функции типа изображенной на рис.52в очень часто встречается в самых разных физических задачах. Такой потенциал называют ***«двухъямным потенциалом»*** в силу его характерной формы.

Вернемся к нашему маятнику. Если $mg < kl$, то вертикальное положение маятника устойчиво, а если $mg > kl$, то оно станет неустойчивым. Таким образом, сколь угодно малое воздействие выведет его из состояния равновесия, и он отклонится либо налево, либо направо. При этом «выбор» состояния равновесия будет определяться направлением малого воздействия и, фактически, будет во многом случайным. Подчеркнем, что стабилизация маятника в этом случае связана с нелинейностью пружины. Если пружина подчиняется закону Гука $(c = 0)$, то при $mg > kl$ в системе останется только неустойчивое равновесие в начале координат.

Наблюдаемая в данной системе перестройка положений равновесия также является достаточно типичной. Она состоит в том, что при вариации некоторого параметра единственное состояние равновесия теряет устойчивость, и от него отделяются два устойчивых. Ее часто называют «***бифуркация вилка»***. Такая бифуркация обычно характерна для систем с некоторой симметрией.

5. Обозначим расстояние между кольцами через a. Рассмотрим сначала некоторые асимптотические ситуации. Если расстояние между кольцами равно нулю, то они сольются вместе, и будут создавать потенциал, как одно кольцо удвоенного заряда. В этом случае, очевидно, будет иметь место единственное состояние равновесия в начале координат, которое будет устойчивым (рис.53а). Пусть теперь кольца разнесены очень далеко, т.е. $a \gg R$.

Тогда каждое кольцо фактически изолировано и создает локальный минимум потенциала (рис. 53б).

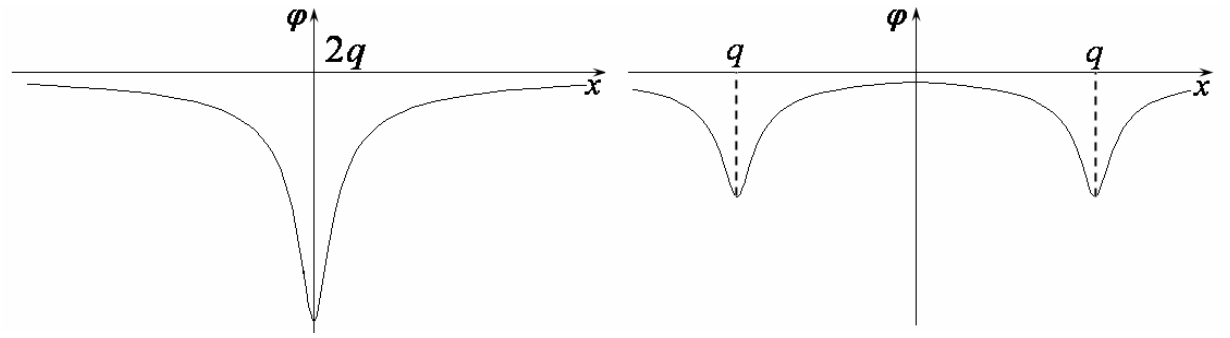


Рис. 53.

Таким образом, в соответствии с рис.53б будут иметь место два устойчивых состояния равновесия и одно неустойчивое, расположенное в начале координат. Следовательно, если медленно увеличивать параметр a, то при некотором его значении находящееся в начале координат положение равновесия потеряет устойчивость и от него отделится два неустойчивых. Найдем соответствующее критическое значение расстояния между кольцами.

Поместим начало координат точно посередине между зарядами. Тогда потенциал, создаваемый кольцами, можно записать в виде

$$\Phi(x) = \varphi(x,a) + \varphi(x,-a),$$

где первое слагаемое

$$\varphi(x,a) = Q\frac{1}{((x+a)^2 + R^2)^{1/2}},$$

отвечает полю, созданному первым зарядом, а второе – вторым. Вычислим первую производную от этого выражения по координате:

$$\varphi'(x,a) = -Q\frac{(x+a)}{((x+a)^2 + R^2)^{3/2}}.$$

Очевидно, что

$$\Phi'(0) = \varphi'(0,a) + \varphi'(0,-a) = 0,$$

что отвечает тому, что в начале координат в любом случае имеет место положение равновесия. Для исследования его на устойчивость необходимо вычислить вторую производную $\Phi''(x)$:

$$\Phi''(x) = \varphi''(x,a) + \varphi''(x,-a).$$

Здесь

$$\varphi''(x,a) = Q\frac{2(x+a)^2 - R^2}{((x+a)^2 + R^2)^{5/2}}.$$

Таким образом,

$$\Phi''(0) = \varphi''(0,a) + \varphi''(0,-a) = 2Q\frac{2a^2 - R^2}{(a^2 + R^2)^{5/2}}.$$

Нетрудно видеть, что при $a < R/\sqrt{2}$ вторая производная отрицательна, а при противоположном условии – положительна.

Таким образом, при $a = R/\sqrt{2}$ в системе положение равновесия в начале координат становится неустойчивым, и от него симметричным образом отделяются два устойчивых. Наблюдаемая в данной системе бифуркация представляет собой бифуркацию вилка и аналогична имеющей место в предыдущей задаче.

6.Очевидно, что вертикальное положение стержня всегда будет положением равновесия, однако оно не всегда устойчиво. Это легко понять, представив два противоположных предельных случая – очень тяжелый и очень легкий стержень.

Проведем анализ устойчивости этого положения. У вертикально висящего стержня длина подводной части составляет $(l - h)$, ее центр масс расположен на расстоянии $\frac{1}{2}(l + h)$ от точки прикрепления, а центр масс всего стержня– на расстоянии $\frac{1}{2}l$ от той же точки. Если стержень отклонился на очень маленький угол, то сила тяжести создаст момент, пропорциональный $\rho\frac{l^2}{2}$, а Архимедова сила – момент, пропорциональный $\frac{1}{2}\rho_B(l + h)(l - h)$. Таким образом, стержень будет устойчивым, если первый момент превысит второй, т.е. $\rho l^2 > \rho_B(l + h)(l - h)$. Отсюда следует, что вертикальное равновесие устойчиво при

$$\rho > \rho_B(1 - \frac{h^2}{l^2}).$$

Пусть теперь стержень в положении равновесия отклонился на угол α от вертикали (рис. 54). Тогда расстояние от точки прикрепления до поверхности воды вдоль стержня составит $\frac{h}{\cos\alpha}$, а

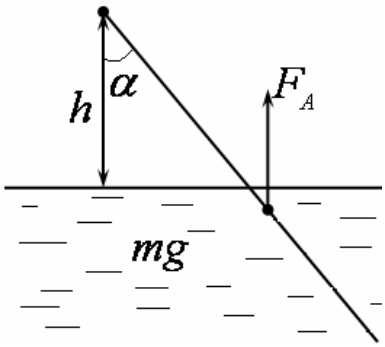


Рис. 54.

длина погруженной в воду части стержня равна $l-\frac{h}{\cos\alpha}$. Центр этой погруженной части расположен на расстоянии $L=\frac{h}{\cos\alpha}+\frac{1}{2}(l-\frac{h}{\cos\alpha})=\frac{1}{2}(l+\frac{h}{\cos\alpha})$ от точки прикрепления.

Условие равновесия стержня можно записать как равенство моментов силы тяжести, приложенной к центру стержня, и силы Архимеда, приложенной к центру погруженной части. Это приводит к следующему уравнению

$$\frac{1}{2}\rho l^2=\frac{1}{2}(l+\frac{h}{\cos\alpha})(l-\frac{h}{\cos\alpha})\rho_B .$$

Отсюда можно выразить косинус искомого угла:

$$\cos\alpha=\frac{h}{l\sqrt{1-\rho/\rho_B}} .$$

Проанализируем это соотношение. Пусть плотность стержня исчезающее мала. Тогда $\cos\alpha=\frac{h}{l}$, что отвечает тому, что стержень целиком расположен в воздухе, касаясь воды только своей нижней точкой. При возрастании плотности стержня он начнет опускаться вниз, и угол его наклона будет определяться полученной формулой. Однако при условии $\rho=\rho_B(1-\frac{h^2}{l^2})$ косинус обратится в единицу, и при дальнейшем увеличении плотности соответствующее решение невозможно. В критической точке угол наклона стержня обращается в ноль. Таким образом, если $\rho<\rho_B(1-\frac{h^2}{l^2})$, то стержень располагается наклонно, а вертикальное положение равновесия является неустойчивым. При выполнении условия в другую сторону неустойчивое положение равновесия при $\alpha=0$ сливается с парой симметрично расположенных устойчивых, и после этого становится устойчивым. Это бифуркация типа вилка, аналогичная рассмотренной в двух предыдущих задачах.

7. Задачу удобно решать во вращающейся системе отсчета. В этой системе действует центробежная сила $m\omega^2 r$, которой можно сопоставить потенциальную энергию $U=-\frac{m\omega^2 r^2}{2}$, где r – радиус вращения. Проведем

вертикальную ось системы координат так, чтобы она проходила через центр окружности. Тогда, очевидно, $r=x+a$. В свою очередь, в соответствии с рис.55 потенциальная энергия дается выражением

$$U = -mg\sqrt{R^2 - x^2}\ .$$

Таким образом, суммарная потенциальная энергия

$$U(x) = -\frac{m\omega^2 (x+a)^2}{2} - mg\sqrt{R^2 - x^2}\ .$$

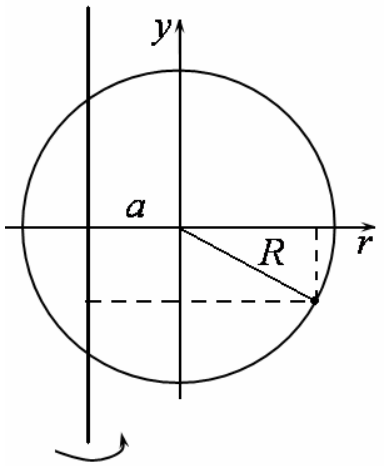


Рис. 55.

Перейдем к безразмерным переменным и параметрам. Введем безразмерную энергию $W = \dfrac{U}{m\omega^2 R}$ и параметры: $\varepsilon = \dfrac{g}{\omega^2 R}$, характеризующий скорость вращения системы, и $\alpha = \dfrac{a}{R}$, характеризующий степень смещения оси вращения относительно центра системы. Тогда

$$W(x) = -\frac{(x+\alpha)^2}{2} - \varepsilon\sqrt{1-x^2}\ .$$

(Мы сохранили для координаты, нормированной на радиус кольца, обозначение x.)

При вариации двух существенных параметров $\alpha = \dfrac{a}{R}$ и $\varepsilon = \dfrac{g}{\omega^2 R}$ потенциальная энергия как функция координаты может испытывать определенные метаморфозы.

Обсудим сначала случай $\alpha = 0$, при котором ось вращения проходит через центр окружности. Ясно, что при отсутствии вращения в системе будет единственное положение равновесия в нижней части окружности, т.е. при $x = 0$. С другой стороны, при очень сильном вращении кольца это равновесие может стать неустойчивым. Убедимся в этом. Используя при малых x известное соотношение

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \ldots,$$

получаем

$$W(x) = const + \frac{\varepsilon - 1}{2}x^2 + \frac{\varepsilon}{8}x^4 + \ldots$$

Таким образом, потенциальная энергия задается параболой четвертой степени. При $\varepsilon = \dfrac{g}{\omega^2 R} > 1$ (медленное вращение) имеется единственный минимум в начале координат, который отвечает устойчивому положению равновесия. При $\varepsilon < 1$ (быстрое вращение) оно становится неустойчивым, и в этот момент от него отделяются симметричным образом два локальных минимума с координатами $x = \pm\sqrt{\dfrac{4(1-\varepsilon)}{\varepsilon}}$. Это бифуркация вилка, уже показанная ранее на рис.52.

Если теперь $\alpha \neq 0$, т.е. ось вращения смещена относительно центра окружности, то

$$W(x) = const - \alpha x + \frac{\varepsilon - 1}{2} x^2 + \frac{\varepsilon}{8} x^4 + \ldots$$

В этом случае график потенциальной энергии становится асимметричным, при этом количество возможных конфигураций потенциала как функции x существенно возрастает и задача становится принципиально двухпараметрической (то есть поведение существенно зависит от двух параметров α и ε). Обсудим возможные метаморфозы потенциала.

Введение нового параметра α и асимметрии задачи приводит к тому, что «глубина» двух потенциальных минимумов может быть разной. При этом варьируя параметр α, можно добиться ситуации слияния максимума и одного из минимумов. Эта ситуация иллюстрируется рис. 56.

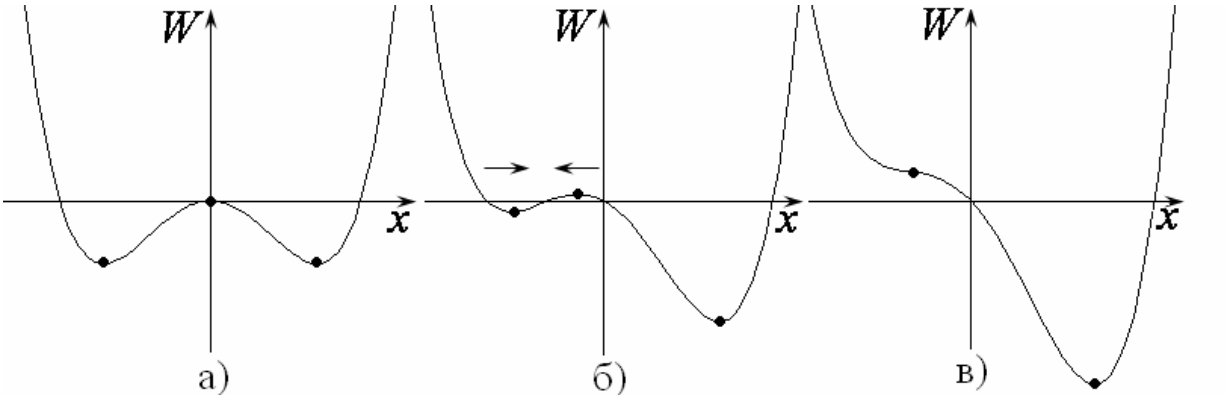


Рис. 56.

Найдем условие этой бифуркации. Положению равновесия отвечает нулевое значение производной потенциала по координате $W'(x) = 0$, а условию слияния положений равновесия – равенство нулю второй производной $W''(x) = 0$, когда потенциальная функция имеет точку перегиба (рис.56в).

Вычислим соответствующие производные:

$$W'(x) = -\alpha + (\varepsilon - 1)x + \frac{\varepsilon x^3}{2} = 0,$$

$$W''(x) = \varepsilon - 1 + \frac{3\varepsilon x^2}{2} = 0.$$

После несложных преобразований, находим $x = \pm\sqrt{\frac{2(1-\varepsilon)}{3\varepsilon}}$. Подставляя в первое соотношение, получаем

$$\alpha = \pm\left(\frac{2(1-\varepsilon)}{3\varepsilon}\right)^{3/2}.$$

Последнее уравнение задает линию на плоскости параметров (α, ε), разделяющую области с различным характером конфигурации потенциальной энергии как функции координаты. Такое разбиение показано на рис.57. Рядом представлены характерные конфигурации потенциальной функции.

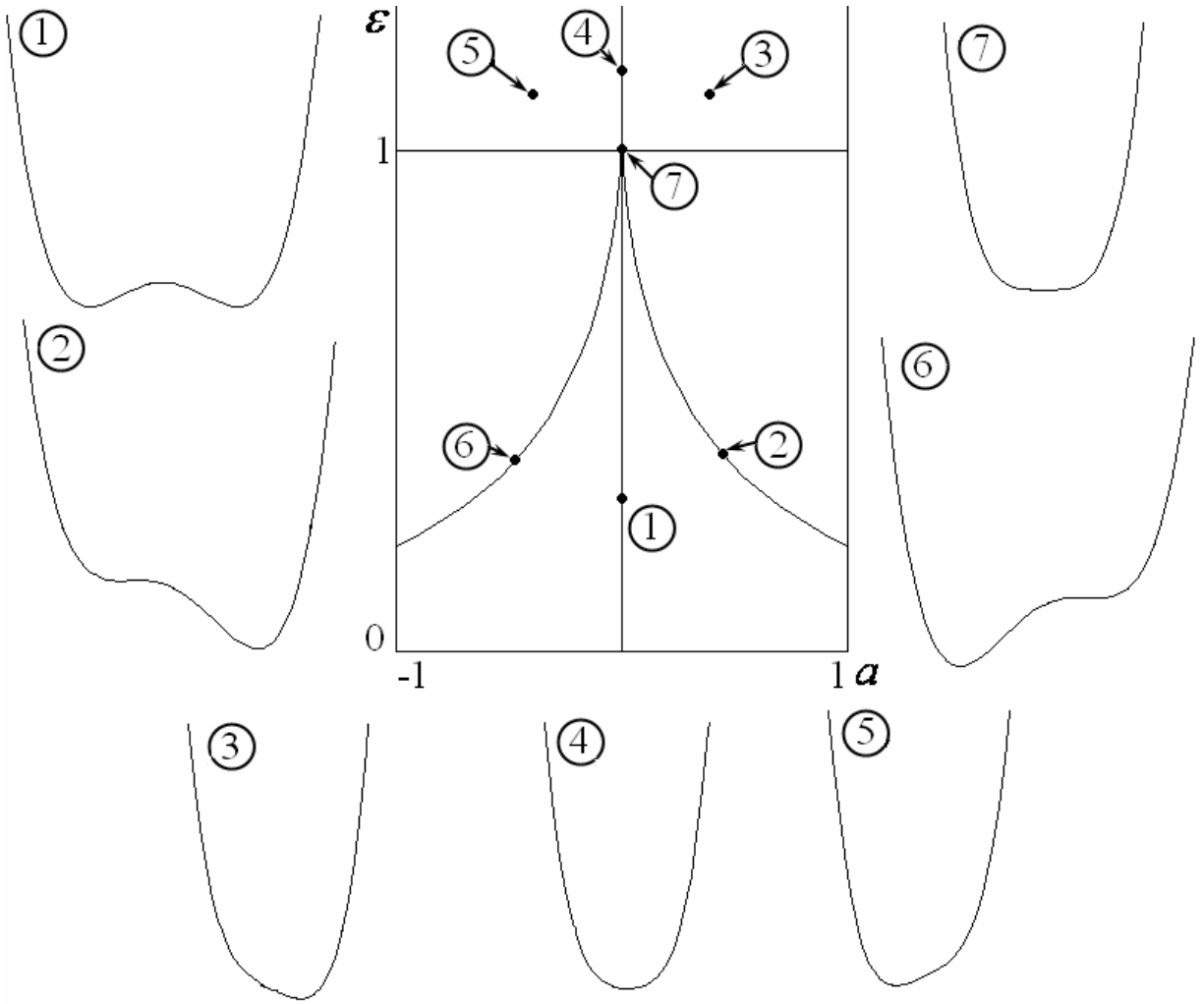


Рис. 57.

Можно заметить, что разделительная линия, отвечающая слиянию двух (устойчивого и неустойчивого) положений равновесия в точке (0,1) имеет особенность («острие»). Эта точка отвечает максимально вырожденной ситуации, когда функция характеризуется локальным минимумом четвертой степени. В ее окрестности, используя $\varepsilon = 1 - \Delta\varepsilon$, получаем

$$\alpha \approx \pm(\frac{2}{3}\Delta\varepsilon)^{3/2}.$$

Таким образом, это действительно особенность в виде полукубического острия. Такие особенности весьма характерны для систем, в которых могут сосуществовать и сливаться три локальных экстремума. В теории катастроф она носит специальное название ***точка сборки***, а подходящие к ней линии слияния экстремумов являются линиями ***складок***. Действительно, как мы видели, переход через эти линии отвечает слиянию максимума и минимума.

Представленная двухпараметрическая картина связана и с бифуркацией вилка. Действительно, если двигаться по плоскости параметров на рис.57 снизу вверх по линии α=0, то при переходе через вершину острия произойдет характерная для рис.52 связанная с этой бифуркацией перестройка.

Итак, мы имеем пример системы, для которой существенен именно ***двухпараметрический анализ***. Об этой двухпараметрической ситуации можно говорить, как о ***катастрофе сборка***. (Сравните полученную картину с имевшей место при решении задачи 5в из первого раздела.)

Мы пока ограничились рассмотрением случая малых x. Проведем теперь рассмотрение более аккуратно, не ограничиваясь этим предположением. Вычисляя соответствующие производные от «полного потенциала» $W(x) = -\frac{(x+\alpha)^2}{2} - \varepsilon\sqrt{1-x^2}$, получаем

$$W'(x) = -x - a + \frac{\varepsilon x}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$

$$W''(x) = -1 + \frac{\varepsilon}{(1-x^2)^{3/2}} = 0.$$

После несложных преобразований, находим:

$$x = \pm\sqrt{1-\varepsilon^{2/3}},$$

и

$$\alpha = \pm(1-\varepsilon^{2/3})^{3/2}.$$

Последнее уравнение задает более точно линию на плоскости параметров (α, ε), разделяющую области с различным характером конфигурации потенциальной энергии как функции координаты. Однако легко видеть, что в окрестности точки сборки мы имеем также полукубическое острие. Действительно, используя $\varepsilon = 1 - \Delta\varepsilon$, и, соответственно, $\varepsilon^{2/3} = (1 - \Delta\varepsilon)^{2/3} \approx 1 - \frac{2}{3}\Delta\varepsilon$, получаем

$$\alpha \approx \pm(\frac{2}{3}\Delta\varepsilon)^{3/2},$$

то есть уже полученное выше соотношение.

8. Решение этой задачи аналогично предыдущей. В системе координат, связанной со стержнем (ось OX направлена вдоль стержня, ось OY – перпендикулярно к нему и проходит через точку крепления пружины), нетрудно получить следующее выражение для потенциальной энергии:

$$U(x) = \frac{k(\sqrt{a^2 + x^2} - l)^2}{2} + mgx\sin\alpha .$$

где $\sqrt{a^2 + x^2} - l$ – найденное с помощью теоремы Пифагора удлинение пружины.

Переходя к безразмерным переменным и параметрам, получаем

$$W(x) = (\sqrt{\varepsilon^2 + x^2} - 1)^2 + \mu x,$$

или

$$W(x) = \varepsilon^2 + 1 + x^2 - 2\sqrt{\varepsilon^2 + x^2} + \mu x .$$

Здесь $W = \frac{U}{kx^2/2}$ – безразмерная энергия, $\varepsilon = \frac{a}{l}$ и $\mu = \frac{2mg\sin\alpha}{kl}$ – безразмерные управляющие параметры, причем первый из них характеризует расстояние от точки прикрепления пружины до стержня. Координата x нормирована на длину l. При малых x из этого соотношения можно получить

$$W(x) = const + \mu x + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}x^2 + \frac{1}{4\varepsilon^3}x^4 + \ldots$$

Таким образом, метаморфозы потенциала при малых x качественно аналогичны случаю предыдущей задачи.

Найдем теперь разбиение плоскости параметров на характерные области, не ограничиваясь случаем малых x. Вычисляя соответствующие производные, имеем:

$$W'(x) = 2x - \frac{2x}{\sqrt{\varepsilon^2 + x^2}} + \mu = 0,$$

$$W''(x) = 2 - \frac{2\varepsilon^2}{(\varepsilon^2 + x^2)^{3/2}} = 0.$$

После некоторых преобразований, получаем для линий складок

$$\mu = \pm 2(1 - \varepsilon^{2/3})^{3/2}.$$

Нетрудно видеть, что и в этом случае имеется полукубическая особенность – точка сборки.

Дадим физическое обсуждение этой задачи в случае, когда наклон стержня отсутствует. При этом

$$U(x) = \frac{k(\sqrt{a^2 + x^2} - l)^2}{2}.$$

Положениям равновесия отвечают значения $x = 0$ и $\sqrt{a^2 + x^2} - l = 0$. Второе из этих соотношений отвечает просто недеформированной пружине. Таким образом, если отвести стержень далеко от пружины ($a > l$), то за счет возможной деформации пружины положение равновесия в начале координат будет устойчивым. Будем уменьшать расстояние до точки прикрепления пружины a. При $a < l$ пружина станет «выпучиваться» и положение равновесия в начале координат станет неустойчивым, но появятся два симметричных устойчивых равновесия, которые отвечают недеформированной пружине.

9. Наше предыдущее рассмотрение говорит о том, что в задачи надо ввести асимметрию. В задаче о кольцах это могут быть разные заряды или радиусы колец. В задаче о стабилизируемом пружиной маятнике можно предположить, что верхняя точка маятника отвечает некоторой начальной деформации пружины.

10. Запишем закон Ома для данной системы:

$$IR + U = \mathcal{E}.$$

Здесь I и U – ток и напряжение на диоде. Используя выражение для их зависимости, получаем:

$$\left[a(U - U_0)^3 - b(U - U_0) + c\right]R + U = \mathcal{E}.$$

Удобно ввести замену переменной $y = U - U_0$. Тогда из нашего уравнения следует

$$aRy^3 - bRy + cy + y = \mathcal{E} - U_0,$$

или

$$y^3 + \frac{1-bR}{aR}y + \frac{U_0 - \mathcal{E} + cR}{aR} = 0 .$$

Вводя параметры $p = \frac{1-bR}{aR}$ и $q = \frac{U_0 - \mathcal{E} + cR}{aR}$, приходим к кубическому уравнению

$$y^3 + py + q = 0 .$$

Его анализ уже не представляет труда. Это уравнение может иметь один или три действительных корня. Новые корни появляются при условии обращения в нуль производной

$$3y^2 + p = 0 .$$

Но тогда $y = \pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$, и получаем уравнения линий, разграничивающих области существования одного и трех корней:

$$q = \pm\frac{2}{3\sqrt{3}}(-p)^{3/2} .$$

Характерно, что мы вновь получили закон «трех вторых». Возвращаясь к физическим переменным, находим

$$\mathcal{E} = U_0 + cR \pm \frac{2}{3\sqrt{3}}\frac{(bR-1)^{3/2}}{\sqrt{aR}} .$$

Это линия сложной формы на плоскости физических параметров – э.д.с. $\mathcal{E}$ и регулируемое сопротивление R. Можно отметить, однако, что она имеет вид «острия» с особенностью «три вторых», с вершиной в точке

$$R = \frac{1}{b}, \quad \mathcal{E} = U_0 + \frac{c}{b} .$$

При этом область, где возможно три решения, располагается при $R > \frac{1}{b}$. Заметим, что предыдущие примеры дают возможность предположить, и это действительно оказывается так, что из трех решений два – устойчивы, а одно неустойчиво.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3
Задачи
1. Физический анализ математических задач 5
2. Анализ с учетом малости физических величин 9
3. Анализ функций 11
4. Внимание, в уравнении параметр 14
5. Катастрофы (бифуркации) 18
Решения
1. Физический анализ математических задач 24
2. Анализ с учетом малости физических величин 37
3. Анализ функций 42
4. Внимание, в уравнении параметр 51
5. Катастрофы (бифуркации) 67

Учебно-методическое пособие

Кузнецов Александр Петрович

Кузнецов Сергей Петрович

Савин Алексей Владимирович

Станкевич Наталия Владимировна

АНАЛИЗ В ФИЗИКЕ

Пособие издано в авторской редакции.

Ответственный за выпуск А.В. Савин

Подписано в печать 28.03.2008 г.

Формат 60x84 1/16. Бумага Снегурочка. Гарнитура Times New Roman.

Усл.-печ. л. 5,55 (6,105). Тираж 120 экз.

Издательство «Научная книга»

410054, г. Саратов, ул. Б. Садовая, 127