

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное агентство по образованию

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**М.Я. Кордон, В.И. Симакин, И.Д. Горешник**

ГИДРАВЛИКА

Учебное пособие

Пенза 2005

## Введение

Учебное пособие подготовлено на основе опыта многолетнего преподавания курса «Гидравлика».

При изложении материала учтены такие предпосылки, как логическая связь с другими дисциплинами специальности 330200; фундаментальность представления теоретических вопросов; практическая направленность рассматриваемых вопросов; использование математического аппарата в объеме, не превышающем доступности восприятия теоретического материала.

Учебный материал подготовлен в соответствии с рабочей программой и охватывает следующие разделы: основные физические свойства жидкостей; основы гидростатики; основы кинематики и динамики жидкости; гидравлический удар в трубах; основы теории подобия, моделирования и анализа размерностей; основы движения грунтовых вод и двухфазных потоков.

В каждом разделе рассмотрены примеры практического применения расчетных формул и зависимостей в виде примеров задач и различных инженерных решений.

Представлен также перечень контрольных вопросов для самостоятельного изучения материала.

Курс «Гидравлика» является одной из основополагающих дисциплин при подготовке инженеров, работающих в области защиты окружающей природной среды.

Теоретический материал сопровождается иллюстрациями в виде рисунков, графиков, блок-схем и таблиц в объеме, требующем пояснения качественной или количественной связи параметров технологических процессов или физических явлений.

Авторы учебного пособия учли ценные замечания рецензентов и выражают им свою признательность.

# Часть I. Гидравлика

## 1 ОСНОВНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЖИДКОСТЕЙ

### 1.1. Модель сплошной среды

Жидкостью называется сплошная среда, обладающая способностью легко изменять свою форму под действием внешних сил.

Понятие «жидкость» определяется в зависимости от назначения такого определения.

В физике жидкость трактуется как физическое тело, обладающее свойством текучести.

Легкотекучесть частиц жидкости обусловлена неспособностью ее воспринимать касательные напряжения в состоянии покоя.

По своим механическим свойствам жидкости разделяют на два класса:

1. Малосжимаемые (капельные).
2. Сжимаемые (газообразные).

В механике жидкости и газа законы, справедливые для капельных жидкостей, применимы и к газам, когда сжимаемостью газа можно пренебречь.

Для удобства введены термины «капельная жидкость» (малосжимаемая), «сжимаемая жидкость» (газ) и «жидкость» (охватывающая как капельную жидкость, так и газ).

Таким образом, под жидкостью в механике жидкости и газа подразумевается всякая среда, обладающая текучестью.

При изучении законов равновесия и движения жидкости в прикладной механике жидкостей и газов движение молекул не изучается и жидкость рассматривается в виде сплошной среды, способной деформироваться под действием внешних сил.

Жидкость как всякое физическое тело имеет молекулярное строение.

Расстояние между молекулами во много раз превосходит размеры самих молекул и соответствует от  $10^{-7}$  до  $10^{-8}$  см, а длина свободного пробега молекул газа при атмосферном давлении равна  $10^{-5}$  см.

Поэтому жидкости и газы воспринимаются как сплошные среды, имея прерывистую структуру.

Это обстоятельство позволяет ввести гипотезу сплошности, то есть применить модель, обладающую свойством непрерывности. Гипотеза о непрерывности или сплошности среды упрощает исследование, так как позволяет рассматривать механические характеристики жидкой среды (скорость, плотность, давление и т.д.) как функции координат точки в пространстве и во времени.

Согласно гипотезе сплошности масса среды распределена в объеме непрерывно и в общем неравномерно.

## 1.2. Плотность жидкости

Основной динамической характеристикой среды является плотность распределения массы по объему или просто плотность среды, которая в произвольной точке  $A$  определяется соотношением:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta W}, \quad (1.1)$$

где  $\Delta M$  – масса, заключенная в малом объеме  $\Delta W$ , включая точку  $A$ .

Размерность плотности

$$[\rho] = \frac{M}{L^3},$$

где  $M$  – размерность массы;

$L$  – размерность длины.

Единицами измерения плотности являются  $\text{кг}/\text{м}^3$  в системе СИ и  $\text{кгс} \cdot \text{с}^2/\text{м}^4$  в технической системе.

Наряду с плотностью в технических расчетах применяется удельный вес.

Вес жидкости  $G$ , приходящийся на единицу объема  $W$ , называется удельным весом:

$$\gamma = \frac{G}{W}. \quad (1.2)$$

Размерность удельного веса  $[\gamma] = \frac{M}{L^2 T^2}$ .

Единица измерения удельного веса в системе СИ  $\text{Н}/\text{м}^3$ .

Удельный вес – векторная величина. Он не является параметром вещества, его значение зависит от ускорения свободного падения в пункте определения.

Удельный вес и плотность жидкости связаны следующим соотношением:

$$\gamma = \frac{G}{W} = \frac{Mg}{W} = \rho g, \quad (1.3)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения, принимаемое обычно равным  $9,81 \text{ м/с}^2$ .

Наряду с удельным весом в расчетах используется относительный удельный вес  $\delta$ :

$$\delta = \frac{\gamma_{\text{ж}}}{\gamma_{\text{в}}}, \quad (1.4)$$

где  $\gamma_{\text{ж}}$  – удельный вес жидкости;

$\gamma_{\text{в}}$  – удельный вес воды при  $t = 4 \text{ }^\circ\text{C}$ , равный  $9810 \text{ Н/м}^3$  ( $1000 \text{ кгс/м}^3$ ).

Так, для пресной воды при температуре  $4 \text{ }^\circ\text{C}$   $\delta_{\text{в}} = 1$ . Плотность и удельный вес жидкостей зависят от давления и температуры.

### 1.3. Сжимаемость капельной жидкости

Под действием давления сжимаемость жидкости характеризуется коэффициентом объемного сжатия  $\beta_V$ ,  $\frac{1}{\text{Па}}$ , представляющим собой относительное изменение объема жидкости на единицу изменения давления:

$$\beta_V = \frac{1}{W} \frac{dW}{dp}, \quad (1.5)$$

где  $W$  – первоначальный объем жидкости;

$dW$  – изменение этого объема при изменении давления на величину  $dp$ .

Знак “минус” в формуле (1.5) обусловлен тем, что положительному приращению давления  $p$  соответствует отрицательное приращение объема  $W$ .

Величина, обратная коэффициенту объемного сжатия, называется модулем упругости жидкости  $E_{\text{ж}}$ , Па:

$$E_c = \frac{1}{\beta_V}. \quad (1.6)$$

Плотность капельной жидкости мало изменяется при изменении давления. Это вытекает из зависимости

$$\frac{d\rho}{\rho} = \beta_V dp = \frac{dp}{E_c}. \quad (1.7)$$

Так, для воды среднее значение  $\beta_V = 5 \cdot 10^{-6} \text{ см}^2/\text{Н} = 5 \cdot 10^{-7} \frac{1}{\text{кПа}}$ , а  $E_{\text{ж}} = 2 \cdot 10^6 \text{ кПа}$ .

Например, при повышении давления на  $9,81 \cdot 10^4 \text{ Па}$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{9,81 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^9} = \frac{9,81}{2 \cdot 10^5} = 4,9 \cdot 10^{-5}.$$

Во многих случаях инженерных расчётов сжимаемостью воды можно пренебречь, считая удельный вес и плотность её не зависящей от давления.

#### 1.4. Температурное расширение капельных жидкостей

**Температурное расширение** капельных жидкостей характеризуется коэффициентом температурного расширения  $\beta_t$ ,  $^{\circ}\text{C}^{-1}$ :

$$\beta_t = \frac{1}{W} \frac{dW}{dt}, \quad (1.8)$$

где  $dW$  – изменение этого объема при повышении температуры на величину  $dt$ .

При температуре от 10 до 20  $^{\circ}\text{C}$  и давлении  $10^5 \text{ Па}$  можно приближённо принимать  $\beta_t = 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ .

Если приближённо считать, что плотность не зависит от давления, а определяется только температурой, то, с учётом выражения для плотности  $\rho = \frac{M}{W}$  и формулы (1.8), получим

$$\rho_t = \rho_0 \frac{1}{1 + \beta_t(t - t_0)}, \quad (1.9)$$

где  $t_0$  – температура жидкости при нормальных условиях.

Зависимость плотности от температуры широко используется для создания естественной циркуляции в отопительных системах, для удаления продуктов сгорания и т.д.

#### 1.5. Вязкость жидкости

Вязкостью называется стремление жидкостей к сдвигу. Если к пластине (рис. 1.1) приложить силу  $F$ , то после некоторого интервала времени установится равномерное движение с некоторой скоростью  $U_0$ .

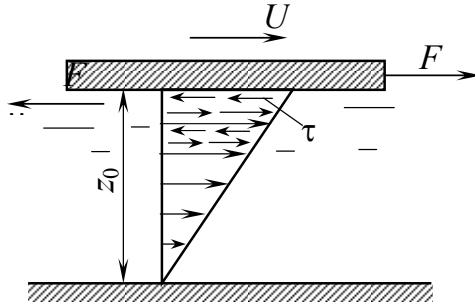


Рис. 1.1

За время разгона возникла сила вязкости  $F_{\mu} = -F$ . Причем, вследствие межмолекулярных связей, слой жидкости, прилегающей к пластине, движется вместе с пластиной со скоростью  $U_0$ . Предположим, что распределение скоростей по высоте носит линейный характер:  $U = f(z)$ , тогда

$$F_{\mu} = \pm \frac{\mu S dU}{dz}, \quad (1.9a)$$

где  $\mu$  – динамический коэффициент вязкости;

$S$  – площадь соприкасающихся слоев;

$\frac{dU}{dz}$  – градиент скорости (показатель интенсивности ее изменения по нормали). Знак (+) или (-) выбирают в зависимости от знака градиента скорости и направления силы  $F_{\mu}$ .

Между слоями жидкости, движущимися со скоростями, отличающимися друг от друга на величину  $dU$ , возникает касательное напряжение  $\tau$ :

$$\frac{F_{\mu}}{S} = \tau = \pm \mu \frac{du}{dz}. \quad (1.10)$$

Размерность  $\mu$   $[\mu] = \frac{M}{LT}$ .

Единица измерения  $[\mu] = \frac{[\tau]}{\frac{dU}{dz}} = \frac{\text{Нс}}{\text{м}^2} = \text{Па} \cdot \text{с}$ .

Отношение динамической вязкости к плотности называется кинематической вязкостью жидкости:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (1.11)$$

Размерность  $[\nu] = \frac{L^2}{T}$ .

$$\text{Единица измерения } [\nu] = \frac{[\mu]}{[\rho]} = \frac{\text{Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^2}{\text{м}^2 \cdot \text{кг}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^3}{\text{с}^2 \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг}} = \frac{\text{м}^2}{\text{с}}.$$

Связь кинематической и динамической вязкости с плотностью и температурой воды находится из выражений (1.9) и (1.11):

$$\nu_t = \frac{\mu_t}{\rho_t} = \frac{\mu_t [1 + \beta_t (t - t_0)]}{\rho_0}. \quad (1.12)$$

Так, для чистой пресной воды зависимость динамической вязкости от температуры определяется по формуле Пуазейля:

$$\mu_t = \frac{0,00179}{1 + 0,0368t + 0,00022t^2}. \quad (1.13)$$

Решая совместно уравнения (1.12) и (1.13), получим:

$$\nu_t = \frac{0,00179 \cdot [1 + \beta_t (t - t_0)]}{\rho_0 \cdot (1 + 0,0368t + 0,000221t^2)}. \quad (1.14)$$

На практике вязкость жидкостей определяется вискозиметрами, из которых наиболее широкое распространение получил вискозиметр Энглера.

Для перехода от условий вязкости в градусах Энглера к кинематической вязкости в м<sup>2</sup>/с применяется несколько эмпирических формул, например формула Убеллоде:

$$\nu = \left( 0,0732 \text{ } ^\circ\text{Э} - \frac{0,0631}{^\circ\text{Э}} \right) \cdot 10^{-4}, \quad (1.15)$$

а также теоретическая формула А.Д. Альтшуля:

$$^\circ\text{Э} = 24 \left[ 2,3 \lg \frac{\sqrt{\nu^2 + 0,0294} - \nu}{\sqrt{\nu^2 + 0,0166} - \nu} + \frac{1}{\nu} \cdot \left( \sqrt{\nu^2 + 0,0294} - \sqrt{\nu^2 + 0,0166} \right) \right], \quad (1.16)$$

где  $\nu$  – кинематическая вязкость жидкости, см<sup>2</sup>/с.

Кроме обычных (ньютоновских) жидкостей, характеризующихся зависимостью (1.10), существуют аномальные жидкости, к которым относятся коллоидные растворы, смазочные масла, нефтепродукты.

Для таких жидкостей закон внутреннего трения выражается в виде

$$\tau = \tau_0 \pm \mu \frac{dU}{dz}, \quad (1.17)$$

где  $\tau_0$  – касательное напряжение в покоящейся жидкости, после преодоления которой жидкость приходит в движение.

## 1.6. Испаряемость жидкости

Показателем испаряемости является температура ее кипения при нормальном атмосферном давлении.



Чем выше температура кипения, тем меньше испаряемость.

Более полной характеристикой испаряемости является давление (упругость) насыщенных паров  $p_n$ , выраженная в функции температуры.

Чем больше давление насыщенных паров при данной температуре, тем больше испаряемость жидкости.

Для многокомпонентных жидкостей (например, для бензина и др.) давление  $p_n$  зависит не только от физико-химических свойств и температуры, но и от соотношения объемов жидкой и паровой фаз.

Давление насыщенных паров возрастает с увеличением части объема жидкой фазы.

Значения упругости паров для таких жидкостей даются для отношения паровой и жидкой фаз, равного 1:4.

### 1.7. Растворяемость газов в жидкостях

Для различных жидкостей растворимость газов различна и изменяется с увеличением давления.

Относительный объем газа, растворенный в жидкости до ее полного насыщения, можно считать прямо пропорциональным давлению:

$$\frac{W_r}{W_{ж}} = k \frac{p_2}{p_1}, \quad (1.18)$$

где  $W_r$  – объем растворенного газа при нормальных условиях;

$W_{ж}$  – объем жидкости;

$p_1$  и  $p_2$  – начальное и конечное давления газа;

$k$  – коэффициент растворимости.

Коэффициент растворимости воздуха  $k$  имеет следующие значения при  $t = 20$  °С:

– для воды  $k = 0,016$ ;

– для керосина  $k = 0,127$ ;

– для трансформаторного масла  $k = 0,083$ ;

– для индустриального масла  $k = 0,076$ .

При понижении давления в жидкости происходит выделение растворенного в ней газа, причем газ выделяется из жидкости интенсивнее, чем растворяется в ней.

### Примеры

**Пример 1.** При гидравлическом испытании трубопровода диаметром  $d = 200$  мм и длиной 250 м давление в трубе было повышено до 3 МПа. Через час давление снизилось до 2 МПа. Сколько воды вытекло через неплотности?

**Решение:**

1. Определим объем воды в трубопроводе:

$$W = \frac{\pi d^2 l}{4} = \frac{\pi 0,2^2 \cdot 250}{4} = 7,85 \text{ м}^3.$$

2. Найдем изменение давления за время испытания:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = 3 - 2 = 1 \text{ МПа}.$$

3. Принимая коэффициент объемного сжатия воды  $\beta_V = 5 \cdot 10^{-7} \frac{1}{\text{кПа}}$ , находим количество воды, вытекающей через неплотности, по формуле

$$\Delta W = -\beta_V W \Delta p = 5 \cdot 10^{-10} \cdot 7,85 \cdot 1 \cdot 10^6 = 3,925 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 \approx 3,93 \text{ л}.$$

**Пример 2.** Сколько кубометров воды будет выходить из котла, если в течение часа в отопительный котел поступило  $50 \text{ м}^3$  воды при температуре  $70 \text{ }^\circ\text{C}$ , а затем температура воды повысилась до  $90 \text{ }^\circ\text{C}$ .

**Решение:**

1. Принимая коэффициент температурного расширения  $\beta_t = 0,00064 \frac{1}{\text{град}}$ , находим увеличение расхода воды:

$$\Delta Q = \beta_t Q_n \Delta t = 0,00064 \cdot 50 \cdot 20 = 0,64 \text{ м}^3/\text{ч}.$$

2. Расход воды из котла при  $t = 90 \text{ }^\circ\text{C}$ :

$$Q_k = Q_n + \Delta Q = 50 + 0,64 = 50,64 \text{ м}^3/\text{ч}.$$

### Контрольные вопросы

1. Перечислите основные физические свойства жидкостей.
2. Что подразумевается под жидкостью в механике жидкости и газа?
3. Что подразумевается под сплошностью среды?
4. Какая связь существует между плотностью и удельным весом жидкостей?
5. Какова размерность плотности и удельного веса?
6. В каких единицах измеряется плотность и удельный вес в системе СИ?
7. Что такое относительный удельный вес?
8. Что такое коэффициент объемного сжатия жидкости? Какова его размерность?

9. Какая связь коэффициента объемного сжатия с модулем объемной упругости? Какова его размерность?

10. Что такое коэффициент температурного расширения? Какова его размерность?

11. Какая связь коэффициента температурного расширения с плотностью жидкости?

12. Что называется вязкостью жидкости?

13. Что такое коэффициент динамической вязкости? Какова его размерность?

14. Какая связь существует между коэффициентами динамической и кинематической вязкости?

15. В каких единицах измеряется динамическая и кинематическая вязкость в системе СИ?

16. Какая связь существует между кинематической и динамической вязкостью с плотностью и температурой воды?

17. Какими приборами измеряется вязкость?

18. Какие жидкости относятся к аномальным?

19. В чем отличие аномальных жидкостей от ньютоновских?

20. Что характеризует испаряемость жидкости?

21. От чего зависит растворимость газов в жидкости?

22. Что такое коэффициент растворимости?

23. При каких условиях происходит выделение газа из жидкости?

24. Какой закон из механики твердого тела аналогичен выражению

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\rho}{E_{\text{ж}}}$$

## 2. ОСНОВЫ ГИДРОСТАТИКИ

### 2.1. Основные сведения

Гидростатика является разделом прикладной механики жидкости и газа, в котором изучаются законы равновесия жидкости.

Вследствие текучести жидкости в ней не могут действовать сосредоточенные силы, а возможно лишь действие сил, непрерывно распределенных по ее объему (массе) или по поверхности. Поэтому внешние силы, действующие на рассматриваемый объем жидкости, разделяют на массовые (объемные) и поверхностные.

**Массовые силы** пропорциональны массе жидкого тела или (для однородных жидкостей) его объему.

К ним относятся сила тяжести и силы инерции переносного движения, действующие на жидкость при относительном ее покое в ускоренно движущихся сосудах или при относительном движении жидкости в руслах.

К числу массовых сил относятся силы, вводимые при составлении уравнений движения жидкости по принципу Д'Аламбера-Лагранжа<sup>1</sup>.

Поверхностные силы проявляются на граничных поверхностях рассматриваемого жидкого тела.

Поверхностную силу, действующую нормально к какой-либо площадке, называют **силой давления**.

Поверхностная сила, действующая по касательной к площадке, является **силой сопротивления**.

Сила сопротивления проявляется только при движении жидкости, а сила давления – как при движении, так и при покое жидкости.

## 2.2. Гидростатическое давление

Рассмотрим произвольный объем жидкости  $W$  (рис. 2.1), находящейся в равновесии под действием внешних сил  $P$  и ограниченной поверхностью  $S$ .

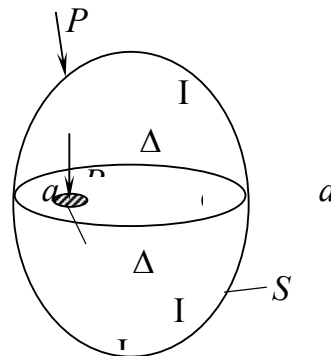


Рис. 2.1

Проведем секущую плоскость  $a-a$ , делящую объем  $W$  на две части 1 и 2. Отбросим часть 1 и заменим распределенными по площади  $\omega$  силами  $\Delta p_i$ , одна из которых  $\Delta p$  приходится на долю площади  $\Delta\omega$ .

Напряжение сжатия  $\sigma_c$ , возникающее при этом, определяется как частное от деления силы  $\Delta p$  на площадь  $\Delta$ :

$$\sigma_c = p_{\text{ср}} = \frac{\Delta p}{\Delta\omega}. \quad (2.1)$$

<sup>1</sup> Сущность принципа виртуальных (возможных) перемещений : для равновесия любой механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ действующих на нее активных сил при любом виртуальном перемещении системы была равна нулю.



Выделим внутри массы жидкости, находящейся в равновесии, малый объем в форме тетраэдра с ребрами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , соответственно параллельными координатным осям, и с массой

$$dm = \rho \frac{1}{6} dx dy dz ,$$

где  $\rho$  – плотность жидкости.

$\rho$  –

Представим, что жидкость внутри тетраэдра – в виде твердого тела. Это не изменяет условий равновесия.

Воспользуемся известными уравнениями статики твердого тела, а именно уравнениями проекций сил и уравнениями моментов:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x = 0; \quad \sum M_x = 0; \\ \sum F_y = 0; \quad \sum M_y = 0; \\ \sum F_z = 0; \quad \sum M_z = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Учитывая, что при стягивании тетраэдра в точку, уравнения моментов такой системы удовлетворяются тождественно, а действующие на него силы сводятся к системе сил, проходящих через одну и ту же точку.

Таким образом, остается только три проекции сил:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x = 0; \\ \sum F_y = 0; \\ \sum F_z = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

К действующим силам относятся поверхностные и массовые (объемные) силы.

К поверхностным силам относятся силы давления жидкости, окружающей элементарный тетраэдр.

Таких сил будет четыре (по числу граней).

На грань  $ABC$  действует сила

$$P_x = p_x \frac{1}{2} dy dz , \quad (2.5)$$

где  $p_x$  – среднее гидростатическое давление для треугольника  $ABC$  с площадью  $\frac{1}{2} dy dz$ .

Сила  $dP_x$  параллельна оси  $ox$ , направлена в противоположную сторону оси  $y$  и, следовательно, войдет в уравнение со знаком «плюс».

Силы  $dP_y$  и  $dP_z$ , действующие на грани  $ABD$  и  $ACD$ , соответственно параллельны осям  $oy$  и  $oz$  и их проекции на ось  $ox$  равны нулю.

Четвертая сила  $dP_n$  – сила давления на грань  $BCD$  равна:

$$dP_n = p_n d\omega, \quad (2.6)$$

где  $p_n$  – среднее гидростатическое давление для грани  $BCD$ ;  
 $d\omega$  – площадь этой грани.

Проекция этой силы на ось  $ox$ :

$$dP_n \cos(\widehat{N, ox}) = p_n d\omega \cos(\widehat{N, ox}). \quad (2.7)$$

Эта сила направлена в отрицательную сторону оси  $ox$ .

Произведение  $d\omega \cos(\widehat{N, ox})$  представляет собой проекцию площади треугольника  $BCD$  на плоскость  $yoz$  и равно:

$$d\omega \cos(\widehat{N, ox}) = \frac{1}{2} dydz. \quad (2.8)$$

Тогда проекция силы  $dP_n$  на ось  $ox$  численно равна:

$$dP_n \cos(\widehat{N, ox}) = p_n \frac{1}{2} dydz. \quad (2.9)$$

Аналогично можно записать проекции силы  $dP_n$  на оси  $oy$  и  $oz$ :

$$\begin{aligned} dP_n \cos(\widehat{N, oy}) &= p_n \frac{1}{2} dx dz; \\ dP_n \cos(\widehat{N, oz}) &= p_n \frac{1}{2} dx dy. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Массовые силы, действующие на тетраэдр, приводятся к равнодействующей  $dR$ , образующей с координатными осями углы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и равной:

$$dR = dmj, \quad (2.11)$$

где  $dm$  – масса тетраэдра, равная:

$$dm = \rho \frac{1}{6} dx dy dz,$$

где  $\rho$  – плотность жидкости;

$\frac{1}{6} dx dy dz$  – объем тетраэдра;

$j$  – ускорение объемной силы (в частном случае ускорение свободного падения).

Обозначим проекции ускорения  $j$  по координатным осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , т.е. примем, что

$$j \cos \alpha = X;$$

$$j \cos \beta = Y;$$

$$j \cos \gamma = Z.$$

Тогда проекции объемной силы  $dR$  равны:

$$\left. \begin{aligned} dR_x &= dmj \cos \alpha = \rho \frac{1}{6} dx dy dz X; \\ dR_y &= dmj \cos \beta = \rho \frac{1}{6} dx dy dz Y; \\ dR_z &= dmj \cos \gamma = \rho \frac{1}{6} dx dy dz Z. \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Запишем сумму проекций всех сил на ось  $ox$  с учетом уравнений (2.12):

$$\sum F_x = p_x \frac{1}{2} dy dz - p_n \frac{1}{2} dy dz + \rho \frac{1}{6} dx dy dz X = 0. \quad (2.13)$$

Или после сокращения на  $\frac{1}{2} dy dz$ :

$$p_x - p_n + \rho \frac{1}{3} dx X = 0.$$

Пренебрегая  $\rho \frac{1}{3} dx X$  как бесконечно малым относительно  $p_x$  и  $p_n$ ,

получаем  $p_x - p_n = 0$  или  $p_x = p_n$ .

Аналогично  $p_y = p_n$  и  $p_z = p_n$ .

Следовательно,

$$p_x = p_y = p_z = p_n. \quad (2.14)$$

Что и надо было доказать.

Таким образом, гидростатическое давление в точке по любому направлению оказывается одинаковым, т.е. не зависит от направления действия.

## 2.4. Условие равновесия жидкости

Жидкость может сохранять свое равновесное состояние в том случае, если внешние силы, действующие в точках граничной поверхности, направлены только по внутренним нормальям к этой поверхности.

Очевидно, что действие силы давления по внешней нормали приводит к нарушению равновесия, т.к. жидкость не оказывает сопротивления растягивающим силам.

Касательные силы возникают при движении жидкости, поэтому при равновесии жидкости, находящейся в покое, они равны нулю.



**Следствие.** Так как гидростатическое давление одинаково по всем направлениям в данной точке, а в различных точках данного объема жидкости в общем случае различно, то

$$p = p(x, y, z). \quad (2.15)$$

В общем случае, когда изменяется атмосферное давление во времени:

$$p = p(x, y, z, \tau). \quad (2.16)$$

## 2.5. Дифференциальное уравнение равновесия жидкости (Уравнение Эйлера)

Выделим в жидкости элементарный параллелепипед  $ABCD A'B'C'D'$  (рис. 2.3).

Полагая его твердым телом, составим три уравнения проекций действующих сил :

$$\sum F_x = 0; \quad \sum F_y = 0; \quad \sum F_z = 0.$$

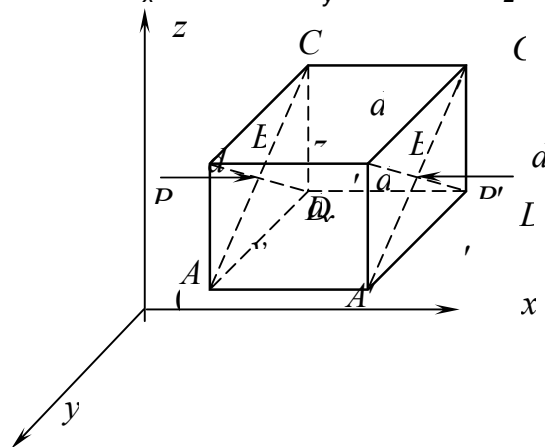


Рис. 2.3

Уравнение моментов исключается. Составим уравнение проекции сил на ось  $ox$ , т.е. уравнение  $\sum F_x = 0$ .

Равновесие параллелепипеда обеспечивается шестью проекциями (по числу граней).

В уравнение  $\sum F_x = 0$  войдут только две силы:  $dP$  и  $dP'$ .

Сила давления на грань  $ABCD$

$$dP = p dy dz,$$

где  $p$  – среднее гидростатическое давление на грань  $ABCD$ .

$p$  –

Сила давления на грань  $A'B'C'D'$

$$dP' = p' dydz ,$$

где  $p'$  – среднее гидростатическое давление на грань  $A'B'C'D'$  ( $p' \neq p$ ).

Определим  $p'$ . Так как  $p = f(x,y,z)$ , то при переходе от одной грани к другой давление должно изменяться в зависимости от одной координаты, так как в сходственных точках ( $A$  и  $A'$ ,  $B$  и  $B'$  и т.д.) давление зависит только от изменения одного аргумента  $x$ . Аргументы  $y$  и  $z$  для сходственных точек ( $A$  и  $A'$ ) остаются неизменными. Следовательно

$$p' = p + \frac{\partial p}{\partial x} dx .$$

Тогда

$$dP' = p' dydz = \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dydz .$$

Сила  $dP'$  войдет в уравнение проекции со знаком «минус».

**Проекция объемных сил.**

Проекция объемной силы  $dR$  равна произведению массы на соответствующую проекцию ускорения объемной силы, т.е.

$$dR_x = \rho dx dydz X ,$$

где  $\rho$  – плотность жидкости;

$dx, dy, dz$  – объем выделенного элемента;

$X$  – проекция ускорения силы  $dR$  на ось  $Ox$ .

Сумма проекций поверхностных и объемных сил на ось  $Ox$  равна:

$$\sum F_x = p dydz - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dydz + \rho dx dydz X = 0 . \quad (2.17)$$

После некоторого преобразования и деления на  $dx dydz$  (объем параллелепипеда  $dW$ ) получим уравнение проекций сил на ось  $Ox$ , отнесенных к единице объема:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \rho X = 0 . \quad (2.18)$$

Аналогично получим два других уравнения:  $\sum F_y = 0$ ;  $\sum F_z = 0$ .

Таким образом, при равновесии жидкости имеем три дифференциальных уравнения:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho X &= 0; \\ -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho Y &= 0; \\ -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho Z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

Система уравнений (2.19) равновесия жидкости относится как к несжимаемой, так и к сжимаемой жидкости.

Эта система уравнений впервые была получена Эйлером в 1755 г.

## 2.6. Основное дифференциальное уравнение гидростатики

Умножая первое уравнение (2.19) на  $dx$  и последующие на  $dy$  и  $dz$ , после суммирования получаем:

$$-\left( \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) + \rho(Xdx + Ydy + Zdz) = 0, \quad (2.20)$$

где  $dx, dy, dz$  — дифференциалы координат, а не ускорений  $X, Y, Z$ .

Так как гидростатическое давление  $p$  является функцией только координат, т.е. независимых переменных  $x, y, z$ , то первый трехчлен уравнения (2.20) как сумма всех трех частных дифференциалов представляет собой полный дифференциал.

Следовательно,

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz). \quad (2.21)$$

Это уравнение является основным дифференциальным уравнением равновесия жидкости.

Так как  $dp$  есть полный дифференциал, то для однородной жидкости (при  $\rho = \text{const}$ ) и трехчлен  $(Xdx + Ydy + Zdz)$  — тоже полный дифференциал некоторой функции  $U(x, y, z)$ .

Следовательно,

$$Xdx + Ydy + Zdz = dU(x, y, z). \quad (2.22)$$

Частные производные функции  $U(x, y, z)$  взятые по  $x, y, z$  равны проекциям ускорений массовых сил на соответствующие оси:

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x}; \\ Y &= \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y}; \\ Z &= \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

Рассматривая  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  не как проекции ускорения, а как проекции объемной силы, отнесенной к единице массы, назовем функцию  $U = f(x, y, z)$  потенциальной, или силовой функцией, а силы, удовлетворяющие условию (2.23), – имеющие потенциал.

Из теоретической механики известно, что силовая функция равна потенциалу сил, взятому с обратным знаком, т.е.

$$U(x, y, z) = -\Pi(x, y, z).$$

Из вышеизложенного следует, что равновесие жидкости возможно только в том случае, когда массовые силы имеют потенциал.

Уравнение (2.21) содержит две неизвестные величины  $p$  и  $\rho$ .

Связь  $p$ ,  $\rho$  с температурой  $T$  может быть выражена характеристическим уравнением.

Так для газов

$$\rho = \frac{p}{RT}. \quad (2.24)$$

Для несжимаемой жидкости характеристическое уравнение имеет вид:

$$\rho = \text{const.}$$

В этом случае плотность  $\rho$  можно считать известной, тогда уравнение (2.24) не требуется.

### Контрольные вопросы

1. Дайте определение гидростатики как научной части дисциплины «Прикладная МЖГ».
2. Перечислите силы, действующие на рассматриваемый объем жидкости.
3. Дайте определение гидростатического давления.
4. Какова размерность давления?
5. В каких единицах измеряется давление?
6. Сформулируйте основную теорему гидростатики.
7. Сформулируйте основное условие равновесия жидкости.
8. Раскройте физический смысл проекций  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ .
9. Раскройте физический смысл потенциала сил.

### 2.7. Поверхность уровня

Поверхность, точки которой имеют одинаковые значения данной функции, называется поверхностью уровня (рис. 2.4). К поверхности равного уровня относятся:

- поверхности равного давления;

- изотермические поверхности (поверхности равной температуры);
- поверхности равной плотности и т.д.

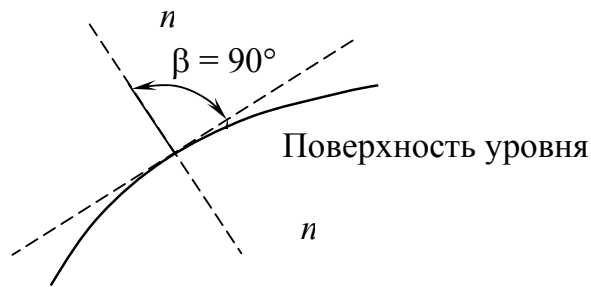


Рис. 2.4

В гидравлике рассматриваются поверхности равного давления.

Принимая  $p = \text{const}$  ( $dp = 0$ ) в основном уравнении гидростатики (2.21), с учетом того, что для жидкости  $\rho \neq 0$ , получим:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0. \quad (2.25)$$

Уравнение (2.25) является дифференциальным уравнением поверхности уровня (здесь  $X, Y, Z$  являются функциями координат).

Поверхности уровня обладают следующими свойствами:

**Первое свойство** поверхности уровня заключается в том, что две различные поверхности уровня не пересекаются между собой.

Докажем это от обратного.

Допустим, что поверхности уровня пересекаются. Тогда во всех точках линии пересечения этих поверхностей давление одновременно должно быть равно  $p_1$  и  $p_2$ , что противоречит основной теореме гидростатики, в которой доказывается, что гидростатическое давление  $p$  одинаково по всем направлениям.

Следовательно, две различные поверхности уровня не пересекаются.

**Второе свойство** – внешние массовые (объемные силы) направлены по нормали к поверхности уровня (см. рис. 2.4).

Известно, что уравнение работы  $dA$  силы  $R$  на пути  $ds$  имеет вид:

$$dA = R_x dx + R_y dy + R_z dz,$$

где  $R_x, R_y$  и  $R_z$  – проекции силы по координатным осям  $Ox, Oy$  и  $Oz$ .

Но

$$R_x = dmX; \quad R_y = dmY \quad \text{и} \quad R_z = dmZ,$$

где элементарная масса;

$dm$  –

$X, Y, Z$  – проекции ускорения силы  $R$  по тем же координатным осям.

–

Тогда

$$dA = dmXdX + dmYdy + dmZdz = (XdX + Ydy + Zdz)dm.$$

Но для поверхности уровня

$$XdX + Ydy + Zdz = 0.$$

Поэтому работа силы  $R$  (внешней объемной силы) равна нулю.

Следовательно, для поверхности уровня

$$dA = R \cos\beta ds = 0,$$

где  $\beta = \angle(R, S)$ .

Это возможно лишь при  $\cos\beta = 0$ , т.е. внешняя сила должна быть нормальна к поверхности уровня, ( $\beta = 90^\circ$ ).

## 2.8. Равновесие жидкости в поле земного тяготения

В качестве объемной силы в поле земного тяготения выступает сила тяжести.

Полное ускорения объемных сил равно ускорению свободного падения:  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ .

В выбранной системе координат проекции единичной объемной силы на оси  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  будут следующими:

$$X = 0; \quad Y = 0; \quad Z = -g.$$

Знак «минус» в ускорении свободного падения соответствует направлению силы тяжести в отрицательную сторону оси  $Oz$ .

Подставляя значения  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  в уравнение поверхности уровня (2.25), получим

$$-gdz = 0 \tag{2.26}$$

и следовательно,

$$z = c = \text{const}, \tag{2.27}$$

где произвольная постоянная.

$c$  –

Уравнение (3.3) является уравнением семейства горизонтальных плоскостей.

Таким образом, поверхностью уровня (поверхность равного давления) в однородной покоящейся жидкости будет любая горизонтальная плоскость, в том числе и свободная поверхность, независимо от формы сосуда или водоема. Горизонтальной плоскостью будет также граница раздела двух несмешивающихся жидкостей (рис. 2.5).



Рис. 2.5

Так, давление в точке  $A$  равно давлению в точке  $B$ , так как обе точки лежат на одной и той же поверхности уровня (поверхности равного давления).

## 2.9. Основное уравнения равновесия жидкости в поле земного тяготения. Закон Паскаля

Воспользуемся основным дифференциальным уравнением гидростатики (2.21):

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz).$$

Учитывая, что при действии силы тяжести на выделенный объем жидкости  $X = 0$ ;  $Y = 0$ ;  $Z = -g$ , получим

$$dp = -\rho g dz \quad (2.28)$$

или

$$\frac{dp}{\rho g} = -dz.$$

Принимая  $\rho = \text{const}$  для несжимаемой жидкости, после интегрирования получим

$$\frac{p}{\rho g} + z = C = \text{const}. \quad (2.29)$$

Постоянную интегрирования найдем из граничных условий. Для свободной поверхности жидкости (рис. 2.6) имеем:

$$p = p_0 \text{ и } z = z_0.$$

где  $p_0$  — давление на свободной поверхности жидкости, обычно  $p_0 = p_{\text{атм}}$ .

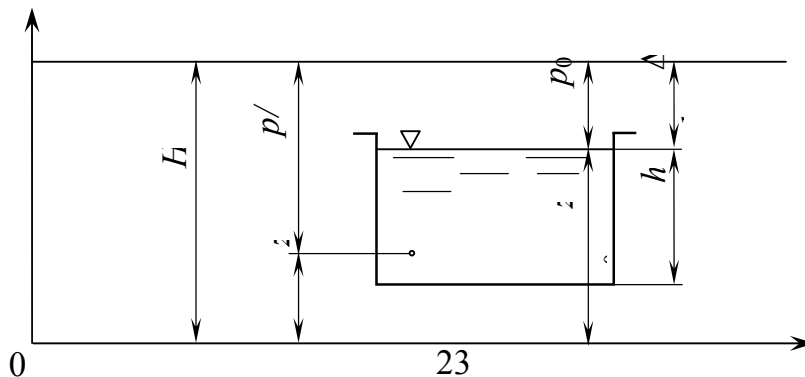


Рис. 2.6

Следовательно

$$C = \frac{p_0}{\rho g} + z. \quad (2.30)$$

Решая совместно уравнения (2.29) и (2.30), получаем

$$\frac{p}{\rho g} + z = \frac{p_0}{\rho g} + z_0 = H' = \text{const}. \quad (2.31)$$

Уравнение (2.31) называется основным уравнением равновесия жидкости в поле тяготения.

Обычно уравнение (2.31) записывается в форме

$$p = p_0 + \rho g(z_0 - z). \quad (2.32)$$

В уравнении (2.31)  $\rho g$  представляет собой силу, с которой поле земного тяготения действует на массу жидкости в объеме  $1 \text{ м}^3$ , т.е. представляет собой вес, отнесенный к единице объема.

Слагаемые уравнения (2.31) выражены в единицах длины.

Так,  $z$  и  $z_0$  представляют собой высоту расположения точек над координатной плоскостью ( $yOx$ ).

Другие составляющие уравнения (2.31) по своему физическому смыслу отличаются от высот  $z$  и  $z_0$ , так как они зависят от  $p$  (при  $\rho = \text{const}$ ) и называются высотами гидростатического давления.

Величина  $H' = z + \frac{p}{\rho g}$  постоянная для всех частиц жидкости, т.к.

является координатой некоторой горизонтальной плоскости ( $xOy$ ). Она расположена выше плоскости свободной поверхности жидкости на величину  $\Delta h$ :

$$\Delta h = (H' - z_0) = \frac{p_0}{\rho g}. \quad (2.33)$$

Из уравнения (2.31) получим:

$$\frac{p - p_0}{\rho g} = z_0 - z = h. \quad (2.34)$$

Величина  $h$  представляет собой глубину погружения данной точки под уровень свободной поверхности жидкости (см. рис. 2.6).

Разность давлений  $p - p_0$  представляет собой избыточное давление  $p_{\text{изб}}$ :

$$p_{\text{изб}} = p - p_0, \quad (2.35)$$



где  $p$  — полное или абсолютное давление;

$p_0$  — давление на свободной поверхности жидкости:

$$p_0 = p_{\text{атм}}; \quad p_0 > p_{\text{атм}}; \quad p_0 < p_{\text{атм}}.$$

Соотношение между указанными выше давлениями можно представить в виде схемы (рис. 2.7).

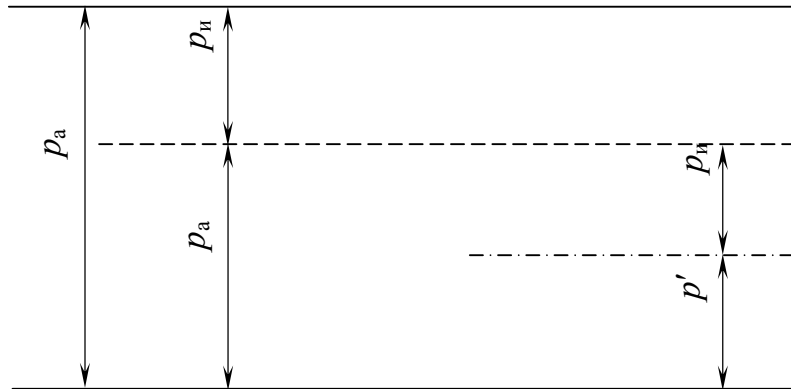


Рис. 2.7

Абсолютное давление всегда положительная величина:

$$p_{\text{абс}} = p_{\text{изб}} + p_{\text{атм}}. \quad (2.36)$$

Здесь  $p_0 = p_{\text{атм}}$  на свободной поверхности жидкости.

Если  $p_0 < p_{\text{атм}}$ , то

$$p'_{\text{абс}} = p_{\text{атм}} - p_{\text{вак}}. \quad (2.37)$$

Рассмотрим жидкость, покоящуюся в открытом резервуаре (рис. 2.8).

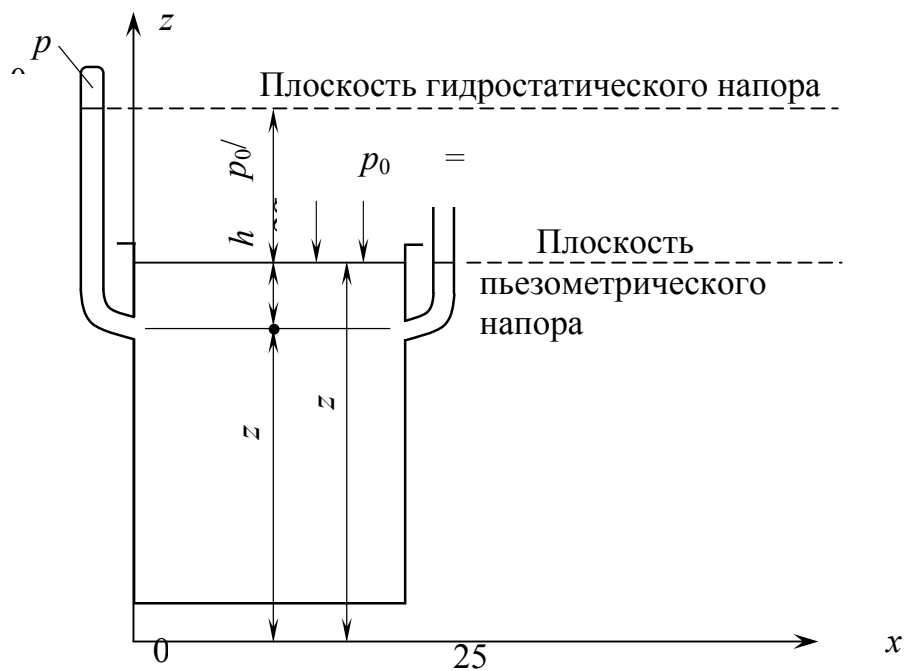


Рис. 2.8

Пусть требуется определить давление в точке  $A$  на уровне  $z$ .

Применим основное уравнение равновесия (2.31) к точке  $A$  и к точке  $B$ , расположенным на свободной поверхности жидкости на уровне  $z_0$ .

Из уравнения (2.31) имеем

$$z + \frac{p}{\rho g} = z_0 + \frac{p_0}{\rho g}.$$

Отсюда

$$p = p_0 + \rho g(z_0 - z), \quad (2.38)$$

где  $z_0 - z = h$  — глубина погружения точки  $A$  под свободной поверхностью.

Тогда 
$$p = p_0 + \rho gh. \quad (2.39)$$

Величину  $\rho gh$  называют весовым давлением, так как оно обусловлено влиянием веса самой жидкости, находящейся под силовым воздействием поля тяготения.

Согласно структуре формулы это давление избыточное, т.к.  $p_0$  — давление на свободной поверхности покоящейся жидкости.

Рассмотрим графическое представление и энергетическую сущность основного уравнения гидростатики.

Графическое изображение абсолютного и избыточного давления представлено на рис. 2.9 в координатах  $z$  и  $\frac{p}{\rho g}$ .

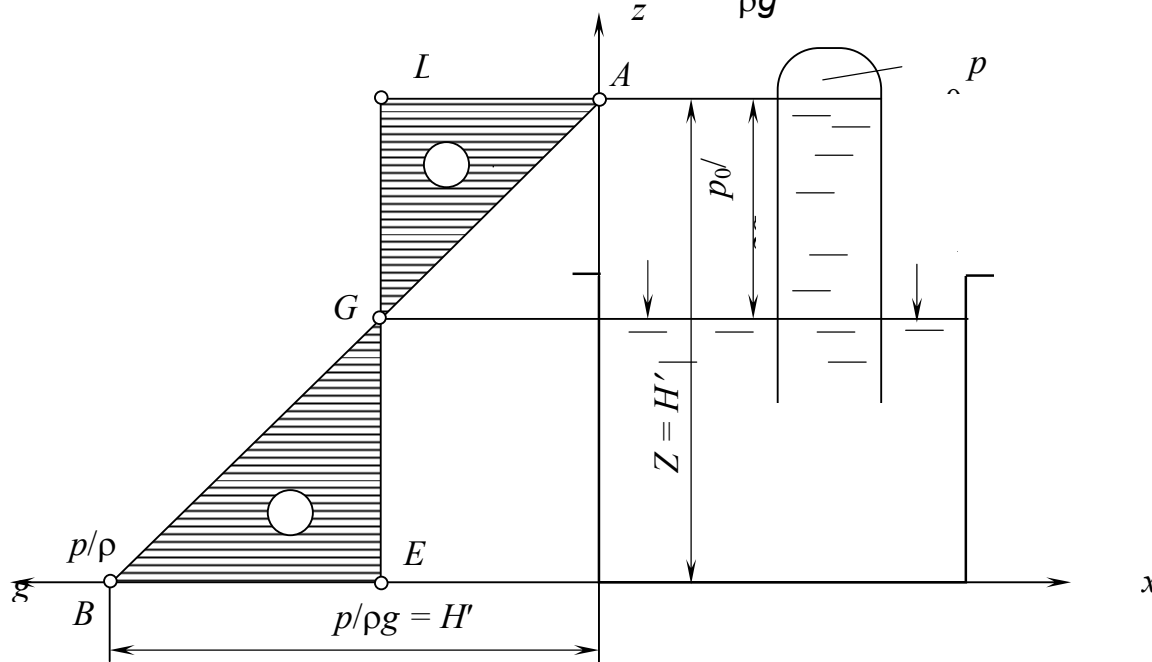


Рис. 2.9

Треугольником  $OAB$  выражает закон изменения абсолютного давления, а два треугольника с общей вершиной в точке  $G$  символизируют закон изменения избыточного давления.

Причем нижний треугольник  $BGE$  выражает  $\frac{\rho_{изб}}{\rho g} > 0$ , а верхний

$$\frac{\rho_{изб}}{\rho g} < 0.$$

При условии, что  $p_0 = p_{атм}$  отрицательное избыточное давление называют вакуумом, а  $h_{вак} = -\frac{\rho_{изб}}{\rho g}$  – вакууметрической высотой.

Очевидно, что максимальное значение вакуума устанавливается на высоте  $H'$ , где абсолютное давление равно нулю.

Энергетическую сущность основного уравнения гидростатики легко представить, если выразить его в единицах работы (или энергии).

Для этого следует умножить уравнение на единицу, придавая ей размерность силы (1Н), тогда все члены уравнения будут выражены в единицах энергии (работы), т.е. в Дж.

Так как жидкость находится в равновесии, то она обладает только потенциальной энергией.

В нашем случае имеем:

$\frac{\rho}{\rho g}$ , Дж – потенциальная энергия, определяемая гидро-статическим давлением;

$z$ , Дж – энергия положения (данная масса жидкости расположена на высоте  $z$  от плоскости сравнения);

$H' = (\frac{\rho}{\rho g} + z)$ , Дж – полный запас потенциальной энергии.

–

(Отнесенный к массе, вес которой равен 1Н, т.е. к массе

$$m = \frac{1}{g} = \frac{1}{9,81} \text{ кг} = 0,103 \text{ кг} ).$$

Из основного уравнения равновесия (2.32)

$$p = p_0 + \rho g(z_0 - z)$$

видно, что при изменении внешнего давления  $p_0$  на  $p'_0 = p_0 + \Delta p_0$  давление во всех точках данной жидкости, находящейся в равновесии, изменится на то же значение  $\Delta p_0$ .

Таким образом, жидкость обладает свойством передавать давление.

Это свойство жидкости положено в основу закона Паскаля, который формулируется следующим образом: давление, которое возникает на

граничной поверхности жидкости, находящейся в равновесии, передается всем частицам этой жидкости по всем направлениям без изменения передаваемого давления.

На законе Паскаля основан принцип действия различных гидравлических устройств, с помощью которых давление передается на расстояние.

К таким устройствам относятся: гидравлические прессы, гидроподъемники, гидродомкраты, гидравлические аккумуляторы, гидравлические тормозные системы, гидромультпликаторы и др.

В качестве примера рассмотрим работу гидравлического прессы.

Гидравлический пресс применяют для получения больших сжимающих усилий, что необходимо, например, для деформации металлов при обработке давлением (прессование, ковка, штамповка), при испытании различных материалов, уплотнении рыхлых материалов, в технологических процессах по обезвоживанию осадков и т.д.

Принципиальная схема прессы представлена на рис 2.10.

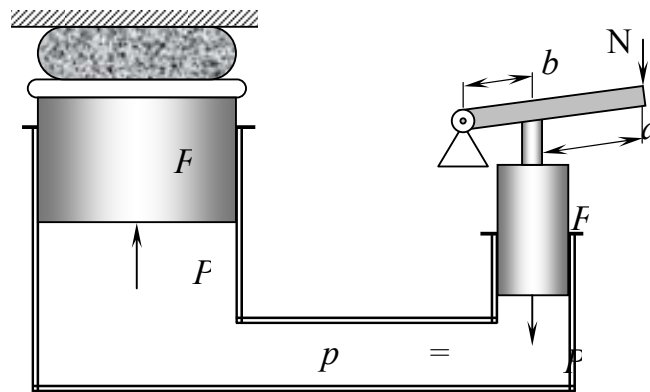


Рис. 2.10

К поршню площадью  $F$  приложена сила  $P_1$ , которая передается жидкости, создавая давление  $p_1$ :

$$p_1 = \frac{P_1}{F_1}.$$

По закону Паскаля давление передается на поршень площадью  $F_2$ , создавая полезную силу, под действием которой прессуется материал:

$$p_2 = p_1 = \frac{P_2}{F_2}.$$

Следовательно

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{F_1}{F_2} \quad (2.40)$$

или

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}. \quad (2.41)$$

Из формулы (2.41) видно, что отношение усилий на малом и большом поршнях пропорционально квадрату отношения диаметров поршней.

Например, если диаметр большого поршня в десять раз больше диаметра малого поршня, то полезное усилие на большом поршне будет в 100 раз больше, чем на малом.

### Примеры

**Пример 1.** Определить усилие, которое развивает гидравлический пресс, имеющий  $d_2 = 250$  мм,  $d_1 = 25$  мм,  $a = 1$  м и  $b = 0,1$  м, если усилие, приложенное к рукоятке рычага рабочим,  $N = 200$  Н, а КПД равен 0,8.

**Решение:** Сила  $P_2$  определяется по формуле

$$P_2 = \eta N \frac{a+b}{b} \left( \frac{d_2}{d_1} \right)^2 = 0,8 \cdot 200 \frac{1+0,1}{0,1} \left( \frac{250}{25} \right)^2 = 176 \text{ кН.}$$

**Пример 2.** Гидромультипликатор (рис 2.11) служит для повышения давления  $p_1$ , передаваемого насосом или аккумулятором давления.

Определить давление  $p_2$  при следующих данных:  $G = 300$  кг,  $D = 125$  мм,  $p_1 = 10$  кг/см<sup>2</sup>,  $d = 50$  мм. Силами трения в уплотнениях пренебречь.

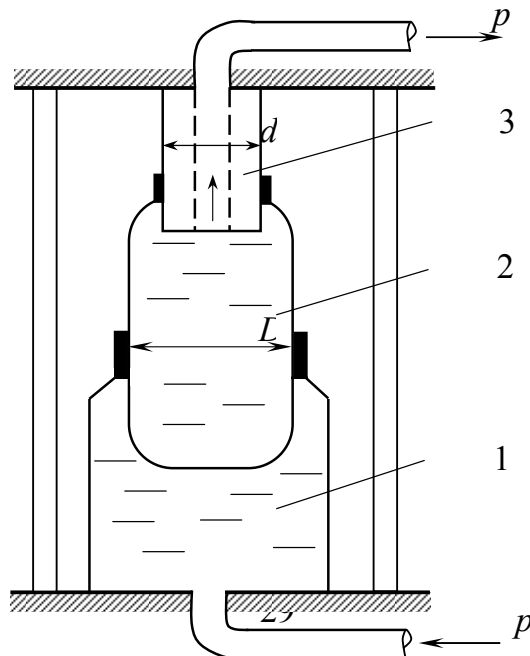


Рис 2.11

**Решение:** Из условия равновесия цилиндра 2 имеем

$$\frac{\pi D^2}{4} \rho_1 = \frac{\pi d^2}{4} \rho^2 + G.$$

Отсюда

$$\rho_2 = \rho_1 \left( \frac{D}{d} \right)^2 - \frac{4G}{\pi d^2} = 10 \cdot \left( \frac{125}{50} \right)^2 - \frac{4 \cdot 300}{\pi \cdot 5^2} = 47,22 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$

**Пример 3.** Определить  $h_{\text{вак}}$  и построить эпюры вакууметрического и абсолютного давлений на стенку водяного вакуумметра, если  $p_{\text{абс}} = 0,85 \cdot 10^5$  Па, а в нижнем резервуаре вода.

**Решение:**

$$h_{\text{вак}} = \frac{p_{\text{атм}} - p_{\text{абс}}}{\rho g} = \frac{(0,981 - 0,85) \cdot 10^5}{9,81 \cdot 10^3} = 1,34 \text{ м.}$$

Эпюры вакууметрического и абсолютного давлений построены на рис. 2.12.

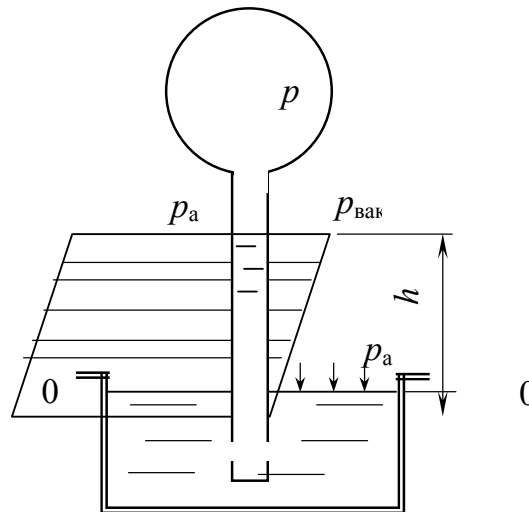


Рис. 2.12

**Пример 4.** Определить показания жидкостного манометра, присоединенного к резервуару с водой, на глубине  $h = 1$  м, если по показаниям пружинного манометра давление  $p_{\text{м}} = 0,25 \cdot 10^5$  Па (рис. 2.13).

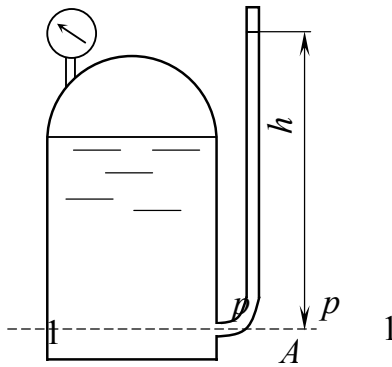


рис. 4.15

**Решение:** Так как пружинный манометр показывает  $0,25 \cdot 10^5$  Па, то

$$p_0 = p_{\text{атм}} + 0,25 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

В сечении 1-1  $p_{\text{л}} = p_{\text{п}}$ , но при этом

$$p_{\text{л}} = p_0 + \rho gh \text{ и } p_{\text{п}} = p_{\text{атм}} + \rho gh_{\text{п}}.$$

Отсюда

$$p_0 + \rho gh = p_{\text{атм}} + \rho gh_{\text{п}}$$

или

$$p_{\text{атм}} + 0,25 \cdot 10^5 + \rho gh = p_{\text{атм}} + \rho gh_{\text{п}};$$

отсюда

$$h_{\text{п}} = \frac{2,5 \cdot 10^4 + \rho gh}{\rho g} = \frac{2,5 \cdot 10^4 + 10^3 \cdot 9,81 \cdot 1}{10^3 \cdot 9,81} = 3,54 \text{ м.}$$

### Контрольные вопросы

1. Что называется поверхностью уровня (поверхностью равного давления)?
2. Перечислите свойства поверхности уровня.
3. Что представляет собой поверхность уровня в поле сил тяготения?
4. Раскрыть физический смысл членов, входящих в основное дифференциальное уравнение гидростатики.
5. Раскрыть физический смысл членов, входящих в основное интегральное уравнение равновесия.
6. Что называется полным (абсолютным) давлением (показать схематически)?

7. Что называется избыточным давлением и вакуумом?
8. Что называется пьезометрическим и гидростатическим напором?
9. Раскрыть энергетическую сущность основного уравнения гидростатики.
10. Сформулируйте закон Паскаля.
11. Какие гидравлические устройства основаны на законе Паскаля?

## 2.10. Относительное равновесие жидкости в поле сил тяготения

Относительным равновесием жидкости называется такое состояние, при котором каждая ее частица сохраняет свое положение относительно твердой стенки движущегося сосуда.

При относительном равновесии надо решить две задачи.

1. Определить форму поверхности уровня.
2. Установить характер распределения давления.

Решение этих задач основано на дифференциальных уравнениях равновесия (2.21) и (2.25).

При относительном равновесии следует учитывать силы инерции, дополняющие систему массовых сил, действующих в жидкости, находящейся в состоянии абсолютного покоя.

Рассмотрим некоторые частные случаи такого равновесия.

**1-й случай.** Равноускоренное движение по вертикали. Вначале определим форму поверхности уровня.

Имеем общее дифференциальное уравнение:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0.$$

При равноускоренном движении по вертикали внешними объемными силами будут сила тяжести и сила инерции (рис. 2.14).

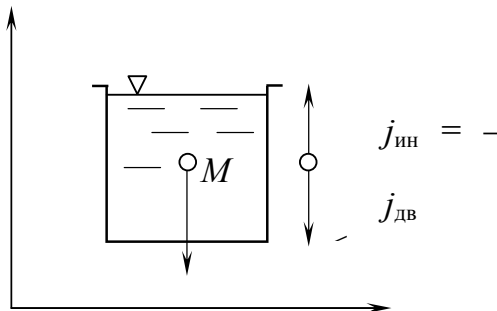


Рис. 2.14

Их проекции или проекции ускорений  $X = 0$ ;  $Y = 0$ ;  $Z = (-g \pm j)$  (при спуске  $(+j)$  и при подъеме  $(-j)$ ).

Уравнение поверхности уровня имеет вид



$$(-g \pm j)dz = 0. \quad (2.42)$$

Отсюда следует, что если  $g \neq j$ , то  $dz = 0$ , а потому

$$z = c = \text{const}. \quad (2.43)$$

Выражение (2.43) представляет собой уравнение семейства горизонтальных плоскостей как при подъеме, так и при спуске поверхности уровня.

Гидростатическое давление изменяется только по высоте.

Если  $g = j$ , то в уравнении (2.42)  $(-g+j) = 0$ , а потому  $dz$  может равняться нулю. Если  $dz \neq 0$ , то поверхность уровня может иметь любую форму (рис. 2.15),  $z \neq \text{const}$ .

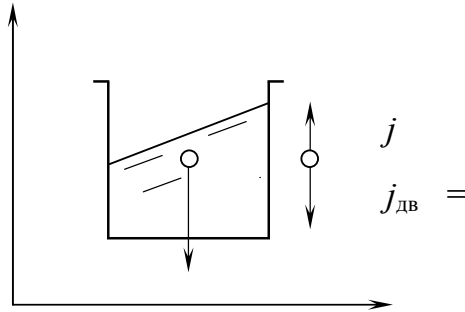


Рис. 2.15

**Закон распределения давления** находим из основного дифференциального уравнения (2.21):

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz).$$

С учетом того, что  $X = 0$ ;  $Y = 0$ ;  $Z = (-g \pm j)$ , уравнение (2.44) преобразуется к виду:

$$dp = \rho(-g \pm j)dz. \quad (2.44)$$

При равноускоренном движении (спуске)  $(-g+j)$  можно записать

$$dp = -\rho g \left(1 - \frac{j}{g}\right) dz, \quad (2.45)$$

а при равноускоренном подъеме  $(-g-j)$

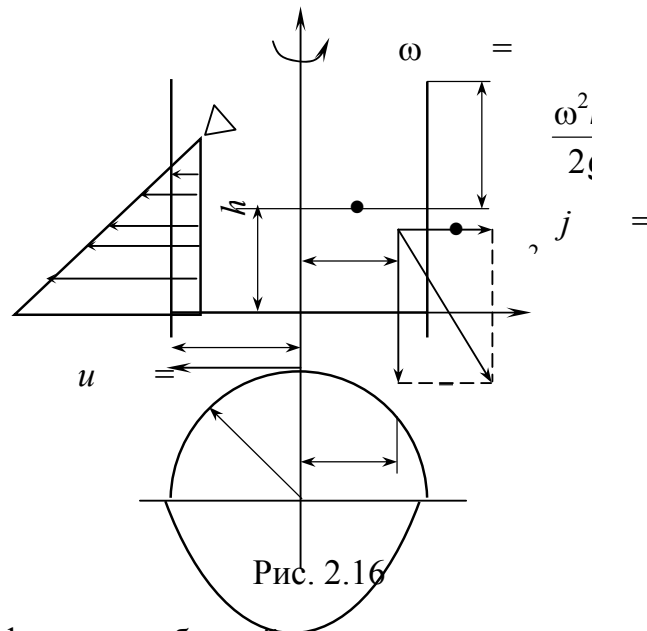
$$dp = -\rho g \left(1 + \frac{j}{g}\right) dz. \quad (2.46)$$

Из уравнений (2.45) и (2.46) следует, что связь между  $p$  и  $z$  линейная, как и при абсолютном равновесии.

Анализ уравнений (2.45) и (2.46) показывает, что произведение  $\rho g \left(1 \pm \frac{j}{g}\right)$  можно рассматривать как условный вес, отнесенный к единице объема жидкости. Обозначим его  $\gamma'$ , тогда при спуске и при  $j < g$ ,  $\left(1 - \frac{j}{g}\right) < 1$  и  $\gamma' < \rho g$  жидкость оказывается как бы более легкой, а при  $j = g$  получим  $\left(1 - \frac{j}{g}\right) = 0$  и, следовательно,  $\gamma' = 0$ , поэтому жидкость стала невесомой (см. рис. 2.15).

При равноускоренном подъеме  $\left(1 + \frac{j}{g}\right) > 1$  и  $\gamma' > \rho g$ , т.е. жидкость становится как бы тяжелее.

**2-й случай.** Вращательное движение относительно вертикальной оси (рис. 2.16).



Определим форму свободной поверхности и закон распределения давления.

Допустим, что жидкость в цилиндрическом сосуде вращается относительно оси  $z$  с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Определим форму свободной поверхности из общего дифференциального уравнения поверхности уровня:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0. \quad (2.47)$$

С учетом осесимметричности движения относительно оси  $oz$  уравнение (2.47) можно записать в цилиндрических координатах:

$$Rdr + Zdz = 0, \quad (2.48)$$

где  $Z = -g$  — ускорение свободного падения;

$R$  — проекция ускорения центробежной силы, равного

$$j = \frac{u^2}{r},$$

здесь  $u$  — окружная скорость;

$r$  —

радиус вращения.

Учитывая, что  $u = \omega r$ , имеем:

$$R = j = \frac{u^2}{r} = \frac{(\omega r)^2}{r} = \omega^2 r.$$

Очевидно, что уравнение поверхности в данном случае имеет вид:

$$\omega^2 r dr - g dz = 0.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\frac{\omega^2 r^2}{2} - gz = c'$$

или

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + c. \quad (2.49)$$

Уравнение (2.49) представляет собой параболу в плоскости  $ro_z$ .

Очевидно, что для всей массы жидкости поверхность уровня будет параболоидом вращения.

Постоянная  $c$  находится из граничных условий. Так, при  $r = 0$  из уравнения (2.49) получаем:

$$c = z_0. \quad (2.50)$$

С учетом равенства (2.50) уравнение свободной поверхности имеет вид:

$$z = z_0 + \frac{\omega^2 r^2}{2g} = h, \quad (2.51)$$

где  $h$  — глубина на расстоянии  $r$  от оси вращения.

$h$  —

Таким образом, глубина  $h$  увеличивается с увеличением расстояния от оси.

**Закон распределения давления** находим из уравнения

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz).$$

Трехчлен правой части выразим в виде

$$Xdx + Ydy + Zdz = \omega^2 r dr - g dz.$$

Тогда

$$dp = \rho(\omega^2 r dr - g dz) = \rho g \left( \frac{\omega^2 r dr}{g} - dz \right)$$

или

$$\frac{dp}{\rho g} = \frac{\omega^2 r dr}{g} - dz.$$

После интегрирования и изменения порядка слагаемых получим

$$\frac{p}{\rho g} = -z + \frac{\omega^2 r^2}{2g} + c. \quad (2.52)$$

Найдем постоянную интегрирования  $c$ , принимая  $r=0$ ,  $z=h_0$  и  $p=p_0$ ,

$$c = \frac{p_0}{\rho g} + h_0. \quad (2.53)$$

Подставляя формулу (2.53) в уравнение (2.52), получим

$$\frac{p - p_0}{\rho g} + z = h_0 + \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

или

$$\frac{p_{\text{изб}}}{\rho g} + z = h_0 + \frac{\omega^2 r^2}{2g}. \quad (2.54)$$

Из уравнения (2.54) видно, что для любого заданного  $r=\text{const}$ , закон распределения давления по высоте является линейным, т.е. таким же, как и без вращения:

$$h_0 + \frac{\omega^2 r^2}{2g} = \text{const} \quad \frac{p_{\text{изб}}}{\rho g} + z = c.$$

## 2.11. Приборы для измерения давления

Приборы для измерения гидростатического давления можно разделить на две группы: жидкостные и механические.

К приборам жидкостного типа относятся: пьезометр, ртутные манометры, поршневые манометры, дифференциальные манометры, микроманометры, вакуумметры.

К приборам механического типа относятся пружинные и мембранные манометры.

Простейшим прибором жидкостного типа является пьезометр (рис. 2.17).

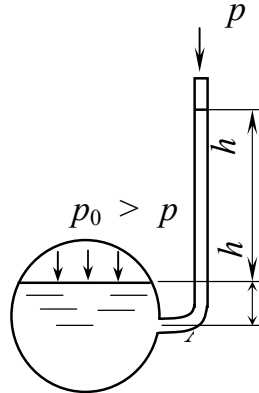


Рис. 2.17

Пьезометр представляет собой стеклянную трубку диаметром не менее 5 мм, открытую с одного конца. Второй конец трубки присоединен к сосуду, в котором измеряется давление.

При  $p_0 > p_{\text{атм}}$  на свободной поверхности жидкости в сосуде жидкость в пьезометре поднимается выше уровня в сосуде на некоторую высоту  $h_{\text{п}}$ .

Гидростатическое давление в точке  $A$  на глубине  $h$  от свободной поверхности определяется по основному уравнению гидростатики:

$$p_A = p_{\text{атм}} + \rho g(h_{\text{п}} + h).$$

Отсюда

$$h_{\text{п}} + h = \frac{(p_A - p_{\text{атм}})}{\rho g}.$$

Учитывая, что

$$p_A = p_0 + \rho gh,$$

находим

$$p_0 = p_{\text{атм}} + \rho gh_{\text{п}}.$$

Таким образом, пьезометрическая высота характеризует избыточное давление в сосуде и может быть мерой для определения его значения. Измерение давления пьезометрами весьма удобно и часто применяется в технике измерений, так как пьезометр очень чувствительный и точный прибор.

При измерении давления надо иметь в виду следующие соотношения: давление в 1 Па соответствует 0,0075 мм рт. ст. или 0,102 мм вод. ст.

Пьезометры применяются при измерении небольших давлений, так как высота трубки пьезометра ограничена.

При более высоких давлениях используют жидкостные манометры, в которых давление уравнивается не жидкостью, находящейся в сосуде, а жидкостью большей плотности, например, ртутью, так как ее плотность в 13,6 раза больше плотности воды.

Ртутный манометр (рис. 2.18) представляет U-образную стеклянную трубку, изогнутое колено которой заполняется ртутью.

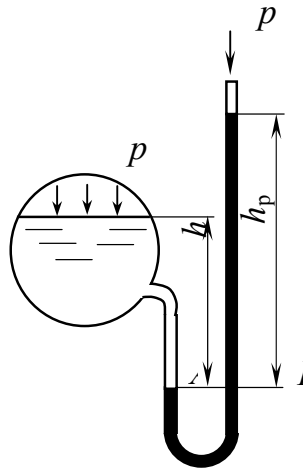


Рис. 2.18

Давление жидкости  $p_0$  в сосуде уравнивается столбом ртути  $h_{рт}$ . Для точки  $A$  имеем

$$p_A = p_0 + \rho gh.$$

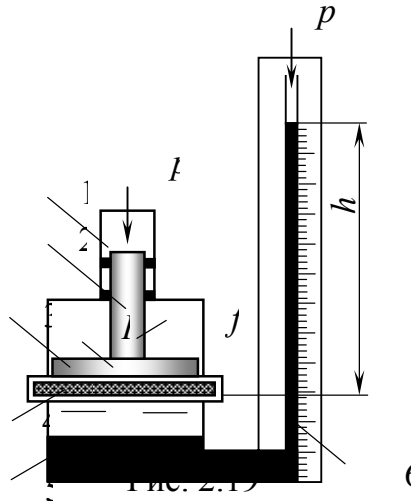
Для точки  $B$   $p_B = p_{атм} + \rho_{рт} gh_{рт}$ . Так как  $p_A = p_B$ , приравняв выражения правой части уравнений, получим

$$p_0 = p_{атм} + \rho_{рт} gh_{рт} - \rho gh,$$

где  $\rho_{рт}$ ,  $\rho$  — плотность ртути и жидкости соответственно в сосуде.

Для измерения высоких давлений применяют поршневой манометр (рис. 2.19), представляющий собой обращенный гидравлический пресс.

Поршневой манометр состоит из входной трубки 1 для входного давления  $p_0$ , поршня 2, металлической пластины 3, резиновой диафрагмы 4, соприкасающейся с водой, короткого колена манометра 5, открытой трубки 6, которые заполнены ртутью.



Обозначая площадь поршня  $f$ , площадь металлической пластины  $F$ , высоту ртути в манометрической трубке  $h$ , найдем выражение для определения давления  $p_0$  согласно уравнению равновесия:

$$p_0 = \rho_{\text{рт}} g h \left( \frac{F}{f} \right).$$

Видно, что поршневой манометр при сравнительно малой высоте ртутного столба позволяет измерять весьма высокие давления.

Для измерения разности давления в двух сосудах применяется дифференциальный манометр (рис. 2.20).

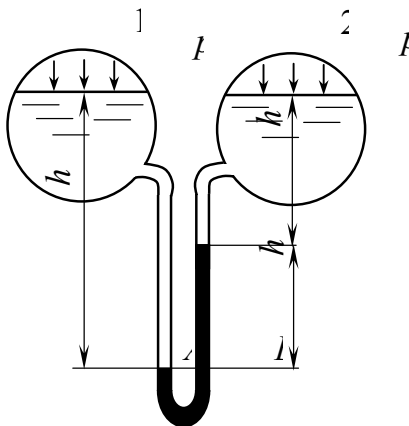


Рис. 2.20

Он также используется при измерении разности давления в двух точках жидкости в одном и том же сосуде.

Давление в левом колене в точке  $A$

$$p_A = p_1 + \rho_1 g h_1 = p_2 + \rho_1 g h_2 + \rho_{\text{рт}} g h.$$

Отсюда

$$p_1 - p_2 = \rho_1 g (h_2 - h_1) + \rho_{\text{рт}} g h \text{ или } p_1 - p_2 = (\rho_{\text{рт}} - \rho_1) g h,$$

т.к.  $h_2 - h_1 = h$ .

Микроманометры используются при измерении низких давлений с повышенной точностью.

Микроманометры с наклонной шкалой представлены на рис. 2.21.

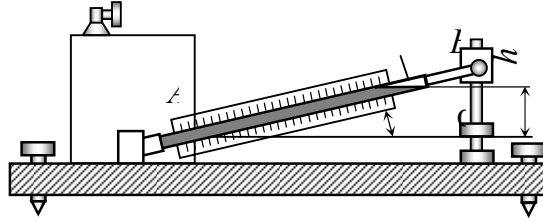


Рис. 2.21

Манометр состоит из резервуара  $A$ , присоединенного к сосуду, в котором измеряется давление, и манометрической трубки  $B$ , угол наклона которой к горизонту  $\alpha$  можно изменять.

Давление у основания трубки определяется выражением:

$$p = \rho g \ell \sin \alpha,$$

где  $\ell$  — длина трубки  $B$  значительно больше  $h$  и тем больше, чем меньше угол  $\alpha$ , поэтому микроманометр обладает значительно большей точностью, чем обычный манометр.

Для измерения вакуума служат приборы, называемые вакуумметрами.

Вакуумметр (рис. 2.22) представляет собой изогнутую трубку.

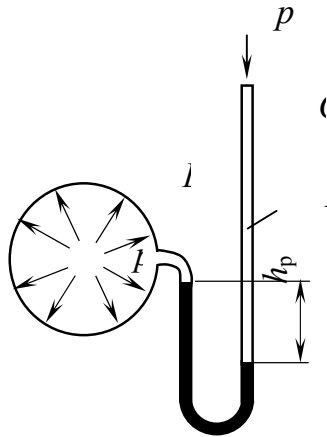


Рис. 2.22

Конец трубки  $A$  присоединен к сосуду  $B$ , в котором измеряется вакуум.

Трубка с открытым концом сообщается с атмосферой. Применяя основное уравнение гидростатики  $p = p_{\text{атм}} - \rho_{\text{рт}} \cdot g h_{\text{рт}}$ , находим высоту  $h_{\text{рт}} =$



$\frac{\rho_{\text{атм}} - \rho}{\rho g}$ , соответствующую вакууму в сосуде, которую обычно называют вакуумметрической высотой и обозначают  $h_{\text{вак}}$ .

Применение рассмотренных приборов жидкостного типа ограничивается областью сравнительно невысоких давлений. В основном, их используют в лабораторной практике.

Для измерения высоких давлений применяют механические приборы. Существуют два типа приборов: пружинные и мембранные.

## 2.15. Равновесие тела в покоящейся жидкости.

### Закон Архимеда

Определим силу давления со стороны жидкости на погруженное в нее тело (рис. 2.23).

Рассмотрим тело, погруженное в жидкость объемом  $W$  и плотностью  $\rho_1$ .

Плотность жидкости  $\rho$ . Поверхностные силы  $P_{x_1}$  и  $P_{x_2}$  взаимно уравновешены.

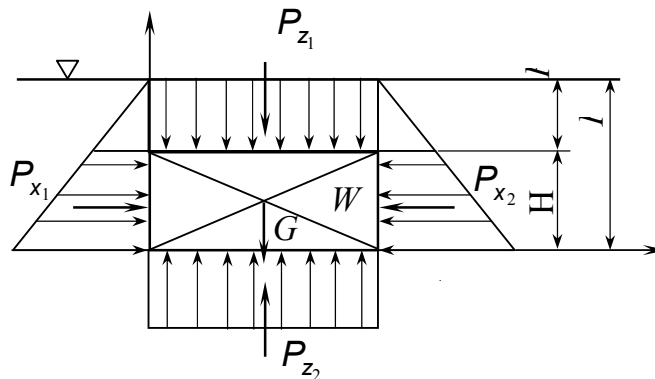


Рис. 2.23

Вертикальные силы давления, действующие на поверхности  $AB$  и  $CD$ , равны весу жидкости в объеме соответствующего тела давления:

$$P_{z_1} = \rho g W_{AEFB} \quad \text{и} \quad P_{z_2} = \rho g W_{DEFC},$$

где  $\rho$  – плотность жидкости;

$\rho$  –

$W$  – объем соответствующего тела давления.

Равнодействующая этих сил

$$P = P_{z_2} - P_{z_1} = \rho g (W_{DEFC} - W_{AEFB}) = \rho g W_{ABCD}. \quad (2.89)$$

Сила  $P$  называется Архимедовой силой и направлена вверх.

Формула (2.89) отражает закон Архимеда: **на погруженное в жидкость тело действует выталкивающая сила, равная весу вытесненной им жидкости.**

Силу  $P$  называют взвешивающей силой, подъемной силой или водоизмещением, а точку ее приложения к телу, соответствующую центру давления, называют центром водоизмещения.

При полном погружении тела в однородную жидкость сила  $P$  зависит не от глубины погружения, а только от плотности жидкости (если  $\rho = \text{const}$ ) и от объема тела  $W$ .

Линия действия Архимедовой силы  $P$  проходит через центр тяжести объема вытесненной жидкости  $W_i$ .

Рассмотрим условия равновесия плавающих тел.

Условия равновесия погруженного в жидкость тела определяются характером погружения тела и соотношением действующих на тело вертикальных сил: веса тела  $G = \rho_1 g W_T$  и архимедовой силы:

$$P = \rho g W_i,$$

где  $\rho_1$  — плотность тела.

При полном погружении однородного тела ( $\rho_1 = \text{const}$ ) под уровень свободной поверхности  $W_T = W_i$  центр водоизмещения совпадает с центром тяжести тела, а силы  $G$  и  $P$  направлены по одной вертикали. Можно выделить три случая:

1)  $\rho_1 > \rho$  или  $G - P = W_T(\rho_1 - \rho) > 0$ , т.е.  $G > P$ .

Следовательно, тело тонет, т.е. равнодействующая сил направлена вниз.

2)  $\rho_1 = \rho$  или  $G - P = W_T(\rho_1 - \rho) = 0$ , т.е.  $G = P$ .

В этом случае тело находится в состоянии безразличного равновесия. Равнодействующая сил равна нулю.

3)  $\rho_1 < \rho$  или  $G - P = W_T(\rho_1 - \rho) < 0$ , т.е.  $P > G$ .

Тело всплывает на поверхность жидкости. Равнодействующая сил направлена вверх.

Все вышеизложенное относится и к подводному плаванию неоднородного тела с той лишь разницей, что центр тяжести его будет лежать ниже центра водоизмещения.

Вес жидкости в объеме погруженной части тела называется водоизмещением, а центр тяжести этого объема  $D$  — центром водоизмещения (рис. 2.24).

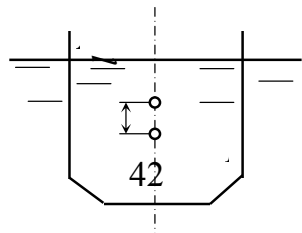


Рис. 2.24

Линия  $A-A$  называется ватерлинией, а внутренняя часть – плоскостью плавания. Линия  $O-O$  является осью плавания. Расстояние  $CD$  называется эксцентриситетом.

Способность плавающего тела восстанавливать начальное положение после воздействия внешней силы называется устойчивостью (рис. 2.25).

$$r_m = \frac{I_0}{W}$$

где  $r_m$  – момент инерции плоскости плавания относительно продольной оси;  
 $I_0$  – момент инерции относительно продольной оси;  
 $W$  – объем водоизмещения.

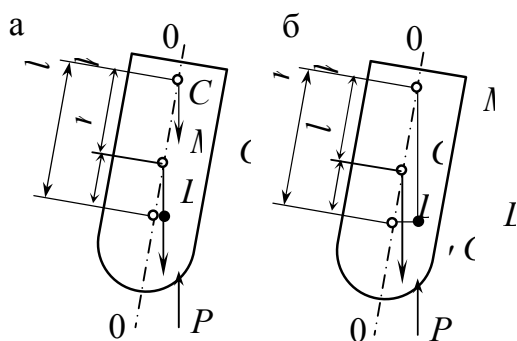


Рис. 2.25.

$M$  – метациентр;  $r_m$  – метациентрический радиус;  
 $h_m = r_m - l$  – метациентрическая высота

Тогда

$$h_m = \frac{I_0}{W} - l;$$

$h_m > 0$  – плавание устойчивое и  $h_m < 0$  – неустойчивое.

### Примеры

**Пример 1.** Определить силу, точку приложения и направление ее действия, если вода действует на затвор диаметром  $D = 2$  м, шириной  $B = 3$  м (рис. 2.26).

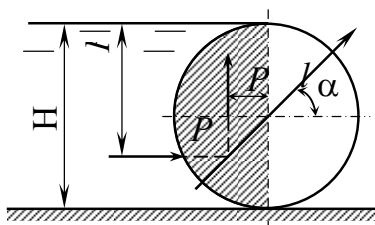


Рис. 2.26

**Решение:**

1. Сила, действующая на вертикальную проекцию,  $P_x$  :

$$P_x = \rho g h_c \omega = \rho g \frac{D}{2} DB = 1000 \cdot 9,81 \cdot \frac{2}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 58,86 \text{ кН.}$$

2. Вертикальная составляющая силы

$$P_z = \rho g v = \rho g \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi D^2}{4} B = 1000 \cdot 9,81 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi 2^2}{4} \cdot 3 = 4623 \text{ кН.}$$

3. Полная сила гидростатического давления

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2} = \sqrt{(58,86)^2 + (46,23)^2} = 74,84 \text{ кН.}$$

4. Угол наклона результирующей силы с горизонтальной осью

$$\alpha = \arctg \frac{P_z}{P_x} = \arctg \frac{46,23}{58,86} = 30^\circ 15'.$$

Сила  $P$  проходит через центр окружности и приложена в точке  $D$ .

**Пример 2.** Определить плотность шара  $\rho$ , плавающего в сосуде, при полном погружении, если центр тяжести шара лежит в плоскости раздела жидкостей  $\rho_1 = 1000 \text{ кг/м}^3$  и  $\rho_2 = 1200 \text{ кг/м}^3$  (рис.2.27).

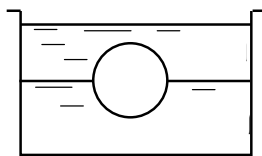


Рис.2.27

**Решение:** Обозначим объем шара  $2W$ . Так как центр шара находится в плоскости раздела, то ясно, что он вытеснил равные объемы  $W$  каждой из жидкостей.

Очевидно, что на шар действуют выталкивающие силы:  $\rho_1 gW$  верхней его половины и  $\rho_2 gW$  нижней половины. В равновесии алгебраическая сумма силы тяжести  $\rho g 2W$  и архимедовых сил равна нулю, т.е.

$$\rho g 2W - \rho_1 gW - \rho_2 gW = 0.$$

После сокращения на  $gW$  получим

$$\rho = \frac{(\rho_1 + \rho_2)}{2} = \frac{(1000 + 1200)}{2} = 1100 \text{ кг/м}^3.$$

**Пример 3.** Определить минимально необходимый диаметр шарового поплавка, обеспечивающего автоматическое закрытие клапана при наполнении резервуара, если вода под давлением  $p = 24,5 \cdot 10^4$  Па заполняет резервуар через трубу диаметром  $d = 15$  мм, при  $a = 15$  мм и  $b = 500$  мм.

Собственной массой рычага, клапана и поплавка пренебречь (рис. 2.28).

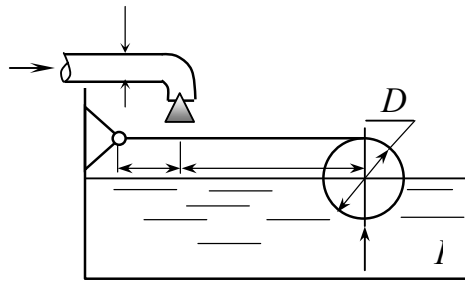


Рис. 2.28

**Решение:**

1. Сила, действующая на клапан:

$$P_1 = p\omega = \frac{p\pi d^2}{4} = 24,5 \cdot 10^4 \frac{\pi(0,015)^2}{4} = 43,3 \text{ Н}.$$

2. Подъемная сила, приложенная к шару:

$$P_2 = P \left( \frac{a}{a+b} \right) = 43,3 \cdot \left( \frac{100}{100+500} \right) = 7,22 \text{ Н}.$$

3. Необходимый объем поплавка:

$$W = \frac{P_2}{\rho g} = \frac{7,22}{10^3 \cdot 9,81} = 0,736 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

4. Диаметр шара:

$$d = \sqrt[3]{\frac{6W}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 0,736 \cdot 10^{-3}}{\pi}} = 0,112 \text{ м} = 112 \text{ мм.}$$

### Контрольные вопросы

1. По каким формулам определяется сила давления и центр давления на цилиндрические поверхности?
2. Что такое тело давления? Как определяется тело давления при отсутствии свободной поверхности ?
3. Как определяется давление жидкости в круглой трубе?
4. По какой формуле определяется сила гидростатического давления жидкости на колесо трубы?
5. Как формулируется закон Архимеда?
6. Что такое остойчивость плавающего тела?
7. Что называется метацентром и метацентрическим радиусом?

## 3. ОСНОВЫ КИНЕМАТИКИ И ДИНАМИКИ ЖИДКОСТИ

### 3.1. Основные понятия и определения кинематики и динамики жидкости

Кинематика жидкости изучает связь между геометрическими характеристиками движения и времени (скоростью и ускорением).

Динамика жидкости (или гидродинамика) изучает законы движения жидкости как результат действия сил.

Классификация видов движения жидкости основана на ряде признаков.

По характеру протекания процесса:

1. Неустановившееся движение жидкости – движение, изменяющееся во времени, т.е. скорость и давление в данной точке изменяются с течением времени. Иллюстрацией неустановившегося движения жидкости может быть истечение из резервуара при его опорожнении.

2. Установившееся движение жидкости – это такое, при котором в любой точке пространства скорость и давление не изменяются ни по направлению, ни по величине.

Установившееся движение может быть равномерным и неравномерным.

Равномерным движением называется такое, при котором скорости в сходственных точках двух смежных сечений равны между собой, а

траектории частиц – прямолинейны и параллельны оси  $ox$ , т.е. поле скоростей не изменяется вниз по течению.

Ускорение частиц жидкости при этом равно нулю. В символической форме это условие можно записать  $\frac{\partial}{\partial x}(f) = 0$ ; здесь  $(f)$  означает тот или иной параметр, например скорость, глубину  $h$ , путь  $\ell$ , ускорение  $a$ .

Неравномерное движение – это движение, не удовлетворяющее определению равномерного движения, т.е.  $\frac{\partial}{\partial x}(f) \neq 0$ .

Равномерное и неравномерное движение может быть напорным и безнапорным. При напорном жидкость соприкасается с твердой стенкой ( $p > p_{\text{атм}}$ ) по всему периметру своего сечения, а при безнапорном – лишь по части периметра, причем при условии, что  $\frac{p_{\text{изб}}}{\rho g} = 0$ .

При поступательном движении частиц жидкости наблюдается их вращательное движение. Такое движение называется вихревым.

Поступательное движение в направлении одной координаты называется одномерным движением жидкости.

$v = v(x); p = p(x)$  – установившееся одномерное движение жидкости;

$v = v(x, t); p = p(x, t)$  – неустановившееся одномерное движение жидкости.

Если параметры жидкости при движении изменяются в направлении двух координат, то движение называется двухмерным:  $v = v(x, y); p = p(x, y)$  или  $v = v(x, y, z); p = p(x, y, t)$ .

При изменении параметров жидкости по трем координатам движение называется трехмерным:

$$v = v(x, y, z); p = p(x, y, t)$$

или

$$v = v(x, y, z, t); p = p(x, y, z, t).$$

Прикладная механика жидкости и газа занимается одномерным движением жидкости при решении практических задач.

### 3.2. Гидравлические элементы потока

**Живым сечением** потока  $\omega$  называется поперечное сечение потока, нормальное к направлению движения и ограниченное его внешним контуром.

**Смоченным периметром**  $\chi$  называется длина контура живого сечения, на которой жидкость соприкасается с твердыми стенками.

**Гидравлическим радиусом** называется отношение площади живого сечения потока  $\omega$  к смоченному периметру  $\chi$ :

$$R = \frac{\omega}{\chi}.$$

### 3.3. Геометрические характеристики потока

Основными геометрическими характеристиками являются траектория, линия тока и линия отмеченных точек.

**Траектория** – линия, по которой движется некоторая частица  $M$ .

**Линия тока** – кривая, проходящая через такие частицы, скорость которых в данный момент времени направлена по касательной к этой линии (рис. 3.1).

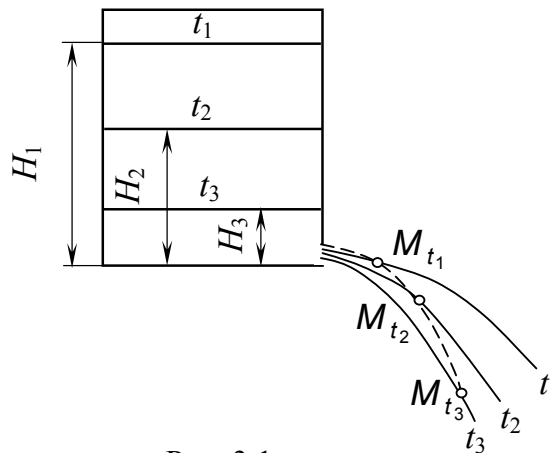


Рис. 3.1

Система линий тока характеризует направление течения потока в данный момент времени (рис. 3.2).

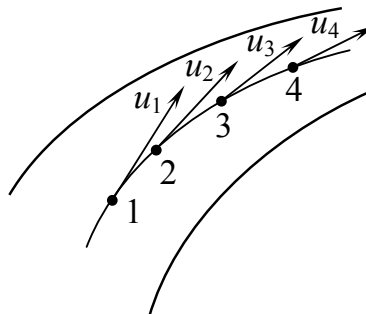


Рис. 3.2

При неустановившемся движении жидкости линии тока изменяют свою форму и расположение, а картина движения изменяется во времени.



При неустановившемся движении линия тока и траектория не совпадают друг с другом (рис. 3.3).

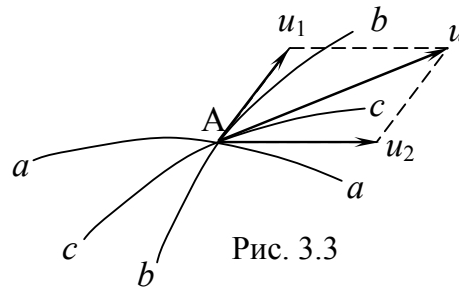


Рис. 3.3

Две различные линии тока во всех случаях не пересекаются между собой. Так, полная скорость в точке  $A$ , скорость  $u$  (см. рис. 3.3) направлены по касательной к линии  $C-C$  и, следовательно, линия  $a-a$  не является линией тока.

Линия отмеченных точек – линия, на которой в данный момент времени лежат частицы жидкости, прошедшие в свое время через одну и ту же начальную точку.

Иллюстрацией такой линии может служить линия расположения поплавков, последовательно выпущенных из одной и той же точки.

### 3.4. Трубка тока и элементарная струйка

Трубкой тока называется трубчатая поверхность бесконечно малого поперечного сечения, образованная системой линий тока, проходящих через точки бесконечно малого замкнутого контура (рис. 3.4).

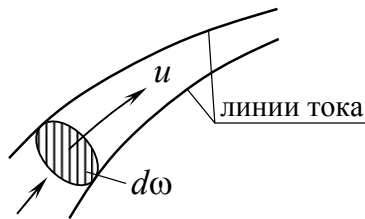


Рис. 3.4

Жидкость, протекающая внутри этой трубки, называется элементарной стружкой. Элементарная стружка изолирована от окружающей массы жидкости. Очевидно, жидкость не может протекать через боковую поверхность трубки тока, так как на ней  $u_n = 0$ . Совокупность элементарных струек представляет собой поток конечных размеров. Струйная модель потока жидкости упрощает теоретические исследования движения жидкости.

Основные свойства элементарной струйки:

1. Скорость и площади сечений элементарной струйки могут меняться вдоль струйки, скорости же в пределах одного сечения элементарной струйки вследствие малости площадки одинаковы.

2. Жидкость не может протекать через боковую поверхность элементарной струйки, так как на основании определения линии тока в любой точке поверхности элементарной струйки скорость направлена по касательной к поверхности.

Объем жидкости, проходящей в единицу времени через данное поперечное сечение струйки, называется элементарным расходом.

За время  $dt$  (рис. 3.5) все частицы из сечения 1-1 переместятся на расстояние  $ds = udt$  в сечении 1-1'. Здесь  $u$  – скорость движения частиц. Объем жидкости между сечениями

$$dW = d\omega ds = u d\omega dt .$$

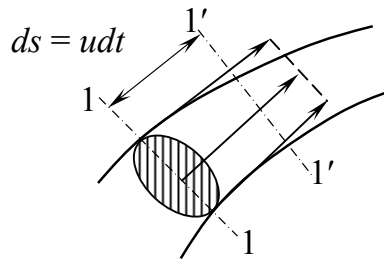


Рис. 3.5

За единицу времени проходит количество жидкости в объеме, равном:

$$dQ = \frac{dW}{dt} = \frac{u d\omega dt}{dt} = u d\omega . \quad (3.1)$$

Единица измерения  $\text{м}^3/\text{с}$ . Массовый расход  $dG = dQ\rho = \rho u d\omega$ , кг/с. Весовой расход  $dG_g = dGg = \rho g u d\omega$ , Н/с.

### 3.5. Расход и средняя скорость потока

Поток представляет собой совокупность элементарных струек (рис. 3.6).

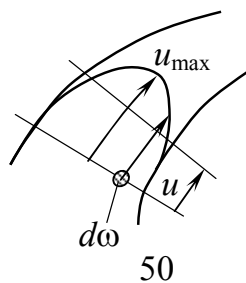


Рис. 3.6

Из рис. 3.6 видно, что скорость в отдельных струйках различна. Расход потока  $Q$  равен сумме расходов элементарных струек, т.е.

$$Q = \int_{\omega} dQ = \int_{\omega} u d\omega. \quad (3.2)$$

Скорость движения потока характеризуется средней скоростью в данном поперечном сечении:

$$v = \frac{\int_{\omega} u d\omega}{\omega} = \frac{Q}{\omega} \quad (3.3)$$

или уравнение расхода  $Q = v\omega. \quad (3.4)$

### 3.6. Условие неразрывности, или сплошности движения жидкости

Для двух сечений 1-1 и 2-2 элементарной струйки в установившемся движении (рис. 3.7) можно записать:

$$dQ_1 = u_1 d\omega_1 \quad \text{и} \quad dQ_2 = u_2 d\omega_2.$$

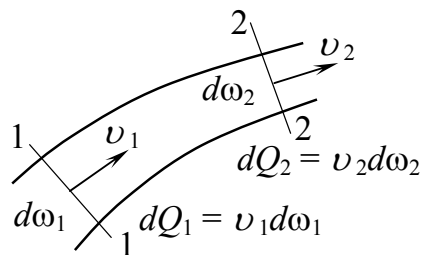


Рис. 3.7

Видно, что  $dQ_1 > dQ_2$  по условию несжимаемости и  $dQ_1 < dQ_2$  по условию сплошности движения.

Следовательно, условие неразрывности имеет вид  $dQ_1 = dQ_2$  или  $u_1 d\omega_1 = u_2 d\omega_2$ .

Очевидно, что для всего потока имеем

$$\omega_1 v_1 = \omega_2 v_2$$

или

$$Q = \omega v = \text{const}.$$

Таким образом, при установившемся движении жидкости расход в любом сечении потока остается неизменным.

### 3.7. Методы исследования движения жидкости

Существует два метода изучения движения жидкости: метод Лагранжа и метод Эйлера.

Метод Лагранжа изучает изменение положения в пространстве отдельных частиц жидкости, т.е. траектории их движения.

Метод Эйлера изучает поле скоростей, т.е. картину движения частиц жидкости в отдельных точках пространства в данный момент времени.

Метод Лагранжа в гидродинамике используется редко, ввиду его сложности. Обычно изучение движения основано на методе Эйлера, суть которого заключается в следующем.

Метод основан на понятии местной скорости или скорости в точке в данный момент времени.

В общем случае местные скорости различны в один и тот же момент времени (рис. 3.8) в разных точках. Они могут изменяться во времени в каждой точке.

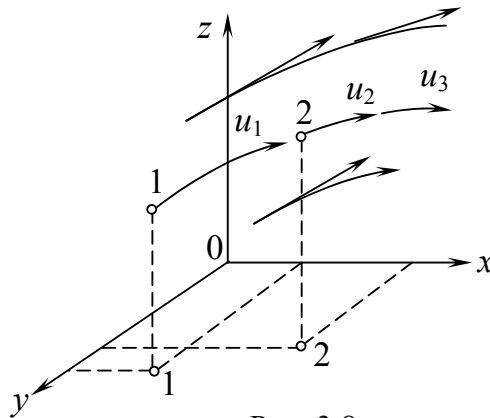


Рис. 3.8

Проекции скорости на оси координат можно записать в виде функций:

$$\left. \begin{aligned} u_x &= u_x(x, y, z, t); \\ u_y &= u_y(x, y, z, t); \\ u_z &= u_z(x, y, z, t). \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Функция (3.5) характеризует поле скоростей движущейся жидкости.

Используя метод Эйлера, можно выразить ускорение  $a$  жидкой частицы в соответствии с физическим смыслом:

$$a = \frac{du}{dt}.$$

Если учесть, что для движущейся частицы ее координаты являются функциями времени:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t),$$

то проекции скорости будут сложными функциями времени:

$$\begin{aligned} u_x &= u_x[x(t); y(t); z(t), t]; \\ u_y &= u_y[x(t); y(t); z(t), t]; \\ u_z &= u_z[x(t); y(t); z(t), t]. \end{aligned}$$

Используя правило дифференцирования сложных функций, для проекций полного ускорения получим:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{dz}{dt}; \\ a_y &= \frac{du_y}{dt} = \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \frac{dz}{dt}; \\ a_z &= \frac{du_z}{dt} = \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{dz}{dt}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Учитывая, что для движущейся жидкости

$$\frac{dx}{dt} = u_x; \quad \frac{dy}{dt} = u_y; \quad \frac{dz}{dt} = u_z,$$

преобразуем функции (3.6) к виду:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} u_z; \\ a_y &= \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_y}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_y}{\partial z} u_z; \\ a_z &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_z}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_z}{\partial z} u_z, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где  $\frac{du_x}{dt}$ ;  $\frac{du_y}{dt}$ ;  $\frac{du_z}{dt}$  – индивидуальные или субстанциональные производные;

$\frac{\partial u_x}{\partial t}$ ;  $\frac{\partial u_y}{\partial t}$ ;  $\frac{\partial u_z}{\partial t}$  – локальные производные, выражающие изменение во времени вектора  $u$  в фиксированной точке пространства;

$\frac{\partial u_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} u_z$  – конвективная производная вектора  $u$ . Эта величина выражает изменение скорости в пространстве в данный момент времени. При установившемся движении локальные ускорения равны нулю.

### 3.8. Уравнение Эйлера

По основному закону механики равнодействующая всех внешних сил, действующих на данное тело, равна массе тела, умноженной на ускорение, с которым движется это тело:

$$R = ma. \quad (3.8)$$

Выделим в потоке жидкости элементарный объем в форме параллелепипеда (рис. 3.9) и запишем основное уравнение (3.8) в проекциях по осям:

$$\left. \begin{aligned} dR_x &= dma \cos \alpha = dma_x; \\ dR_y &= dma \cos \beta = dma_y; \\ dR_z &= dma \cos \gamma = dma_z. \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

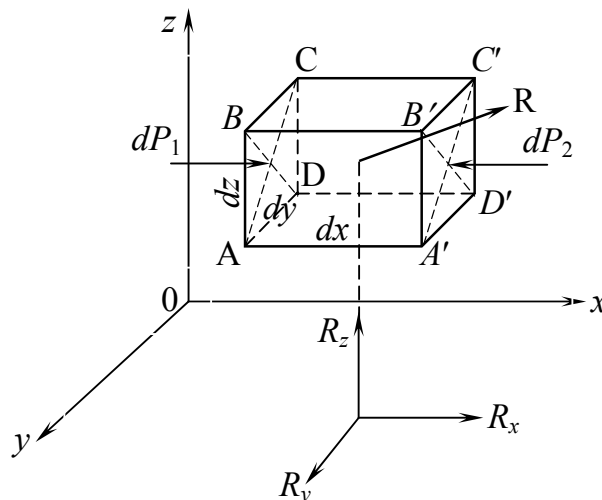


Рис. 3.9

Для первого уравнения (3.9) найдем массу

$$dm = \rho dx dy dz.$$

Ускорение вдоль оси  $Ox$  равно первой производной скорости по времени  $t$ , т.е.  $a_x = \frac{du_x}{dt}$ :

$$\frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}.$$

Учитывая, что  $dR_x = dma_x$ ,

$$\text{где } dma_x = \rho dx dy dz a_x = \rho dx dy dz \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right),$$

получим

$$dR_x = \rho dx dy dz \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right). \quad (3.9a)$$

На выделенную элементарную массу действуют поверхностные силы давления и объемные силы (или массовые), т.е. в силу  $dR_x$  включаются эти силы.

Рассмотрим проекцию силы давления на боковую грань  $ABCD$  и  $A'B'C'D'$ :

$$dP_1 = p dydz; \quad dP_2 = p' dydz ,$$

где  $p$  и  $p'$  – среднее гидростатическое давление для указанных граней:

$$p' = p + \frac{\partial p}{\partial x} dx .$$

Тогда  $dP_2 = p' dydz = \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dydz$ . Сила  $dP_2$  войдет в основное

уравнение со знаком «минус», т.е. в сумму проекций сил давления на боковые грани:

$$dP_1 - dP_2 = p dydz - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dydz = - \frac{\partial p}{\partial x} dx dydz . \quad (3.10)$$

Проекция объемной силы  $dF_x$  определяется выражением:

$$dF_x = dF \cos \alpha = \rho X dx dydz , \quad (3.11)$$

где  $X$  – проекция ускорения объемной силы;

$\rho$  – плотность жидкости;

$dx dydz = dV$  – объем параллелепипеда.

Проекция равнодействующей с учетом выражений (3.10) и (3.11) имеет вид:

$$dR_x = dP_1 - dP_2 + dF_x = - \frac{\partial p}{\partial x} dx dydz + \rho dx dydz X . \quad (3.12)$$

Подставляя выражение (3.9а) в уравнение (3.12), получим:

$$- \frac{\partial p}{\partial x} dx dydz + \rho dx dydz X = \rho dx dydz \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) .$$

После сокращения на  $\rho dx dydz$ , т.е. отнеся уравнение к единице массы, получим:

$$- \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} . \quad (3.13)$$

Аналогично составив выражения для сил  $dR_y$  и  $dR_z$  и для  $dma_y$  и  $dma_z$ , получим три уравнения Эйлера:

$$\left. \begin{aligned} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X &= \frac{du_x}{dt}; \\ - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y &= \frac{du_y}{dt}; \\ - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Z &= \frac{du_z}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

Система (3.14) описывает движение как капельной, так и газообразной жидкости. В системе 3-х уравнений пять неизвестных  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$ ,  $p$  и  $\rho$ , поэтому необходимо иметь еще два уравнения. Такими уравнениями являются уравнения неразрывности и характеристическое уравнение.

При  $\rho = \text{const}$  (для капельной жидкости) достаточно уравнения неразрывности:

$$Q = v\omega = \text{const}.$$

### Контрольные вопросы

1. Что изучает кинематика и динамика жидкости?
2. Что представляет собой линия потока и траектория движения? В чем различие?
3. Что называется трубкой тока, элементарной струйкой и каковы их свойства?
4. Что называется потоком жидкости?
5. Что называется живым сечением, смоченным периметром и гидравлическим радиусом?
6. Что называется средней скоростью потока и расходом?
7. Напишите уравнение неразрывности (сплошности) потока.
8. Приведите примеры равномерного и неравномерного, напорного и безнапорного движения.
9. Что изучает метод Лагранжа?
10. Что изучает метод Эйлера?

### 3.9. Интегрирование уравнения Эйлера для установившегося движения жидкости

При установившемся движении частные производные по времени равны нулю, т.е.

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial u_y}{\partial t} = \frac{\partial u_z}{\partial t} = 0.$$

В этом случае движение жидкости может быть вихревым. Запишем уравнение Эйлера в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}; \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z}; \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$



Умножим первое уравнение на  $dx$ , второе на  $dy$  и третье на  $dz$ ; здесь  $dx$ ,  $dy$  и  $dz$  являются проекциями элементарного перемещения.

Тогда, для первого уравнения будем иметь:

$$Xdx - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx = u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} dx + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} dx. \quad (3.16)$$

Учитывая, что  $u_x = \frac{dx}{dt}$ ;  $u_y = \frac{dy}{dt}$  и  $u_z = \frac{dz}{dt}$ , преобразуем правую часть уравнения (3.16) к виду:

$$\begin{aligned} & u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} dx + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} dx = \\ & = u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{dy}{dt} \frac{\partial u_x}{\partial y} dx + \frac{dz}{dt} \frac{\partial u_x}{\partial z} dx = \\ & = u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{dx}{dt} \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{dx}{dt} \frac{\partial u_x}{\partial z} dz = \\ & = u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + u_x \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + u_x \frac{\partial u_x}{\partial z} dz = \\ & = u_x \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz \right), \end{aligned}$$

где выражение в скобках представляет полный дифференциал проекции скорости на ось  $ox$  т.е.

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz = du_x. \quad (3.17)$$

С учетом уравнения (3.17) первое уравнение запишем в виде

$$Xdx - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx = u_x du_x = \frac{du_x^2}{2}. \quad (3.17a)$$

Оставшиеся два уравнения записываются по аналогии:

$$Ydy - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} dy = \frac{du_y^2}{2}; \quad (3.17б)$$

$$Zdz - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} dz = \frac{du_z^2}{2}. \quad (3.17в)$$

Сложив почленно уравнения (3.17а, б, в), после некоторых преобразований получим:

$$\begin{aligned} (Xdx + Ydy + Zdz) - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = \\ = \frac{du_x^2 + du_y^2 + du_z^2}{2} = \frac{d(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)}{2} = \frac{du^2}{2}. \end{aligned}$$

Здесь  $u^2$  представляет полную скорость в данной точке.

Левую часть уравнения можно представить в виде силовой функции  $U(x, y, z)$  и полного дифференциала  $dp$ , т.е.

$$Xdx + Ydy + Zdz = U(x, y, z)$$

и

$$\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = \frac{dp}{\rho};$$

тогда имеем

$$dU(x, y, z) - \frac{dp}{\rho} - \frac{dU^2}{2} = 0$$

или

$$-dU(x, y, z) + \frac{dp}{\rho} + \frac{dU^2}{2} = 0. \quad (3.18)$$

После интегрирования уравнения (3.18) получаем:

$$-U(x, y, z) + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{U^2}{2} = \text{const}. \quad (3.19)$$

Выражение (3.19) называют интегралом Бернулли-Эйлера.

Если движение жидкости протекает под действием только сил тяжести и жидкость несжимаемая, т.е.  $\rho = \text{const}$ , то

$$U(x, y, z) = -gz \quad \text{и} \quad \int \frac{dp}{\rho} = \frac{p}{\rho}. \quad (3.20)$$

С учетом выражений (3.20) интеграл Бернулли (3.19) принимает вид:

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2} = \text{const}$$

или после деления членов уравнения на  $g$  получим известное уравнение Бернулли в его обычной форме:

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{U^2}{2g} = H = \text{const}. \quad (3.21)$$

Для установившегося вихревого движения значение  $H$  постоянно только вдоль одной линии тока или траектории (для элементарной струйки). Это следует из условий интегрирования для потенциальных течений.

Уравнение Бернулли имеет большое практическое и теоретическое значение. Согласно уравнению Бернулли сумма трех высот остается неизменной вдоль данной элементарной струйки (рис 3.10). Высота  $z$  называется геометрической высотой, или высотой положения центра тяжести сечения струйки;  $\frac{p}{\rho g}$  – высота, определяемая величиной гидродинамического

давления, или пьезометрическая высота;  $\frac{U^2}{2g}$  – скоростная высота, или скоростной напор.

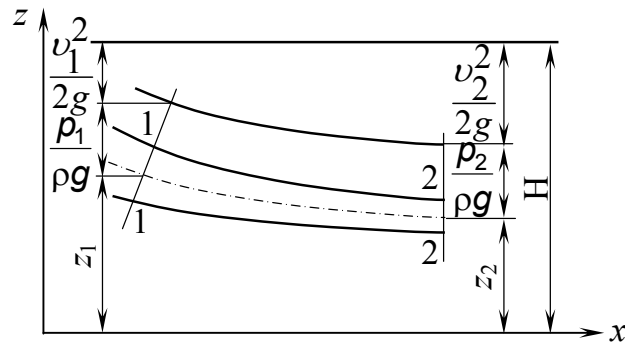


Рис. 3.10

Энергетический смысл уравнения Бернулли представляет собой полную энергию, отнесенную к единице веса жидкости.

Сопоставляя основное уравнение гидростатики  $z + \frac{p}{\rho g} = H = \text{const}$  с

уравнением Бернулли, видим, что слагаемое  $\frac{v^2}{2g}$  можно рассматривать как кинетическую энергию, отнесенную к единице веса жидкости:

$$\mathcal{E}_{\text{кин}} = \frac{v^2}{2g}.$$

Так как  $z + \frac{p}{\rho g} = \mathcal{E}_{\text{пот}}$ , то полный запас энергии элементарной струйки, отнесенной к весу жидкости, будет равен сумме:

$$H = \mathcal{E}_{\text{пот}} + \mathcal{E}_{\text{кин}}$$

В связи с этим уравнение Бернулли часто называют уравнением энергии.

### 3.10. Уравнение Бернулли для потока реальной жидкости

При решении различных практических вопросов приходится иметь дело не с элементарными струйками, а с потоком реальной жидкости конечных размеров.

В этом случае уравнение Бернулли может быть получено путем суммирования элементарных струек.

Рассмотрим движение жидкости в канале переменного сечения при следующих допущениях:

1. Поток движущейся жидкости установившийся, т.е.  $Q = \text{const}$ , и подчиняется основному закону гидростатики:  $z + \frac{p}{\rho g} = H = \text{const}$ .

2. Затраты энергии на преодоление сопротивлений движению вязкой жидкости учитываются между сечениями потока величиной  $\rho Q_{\text{Э}1-2}$  (рис. 3.11).

3. Кинетическая энергия определяется через среднюю скорость потока:

$$v_{\text{ср}} = \int \omega \frac{u}{n},$$

где  $n$  – число струек;

$u$  – скорость в любой струйке.

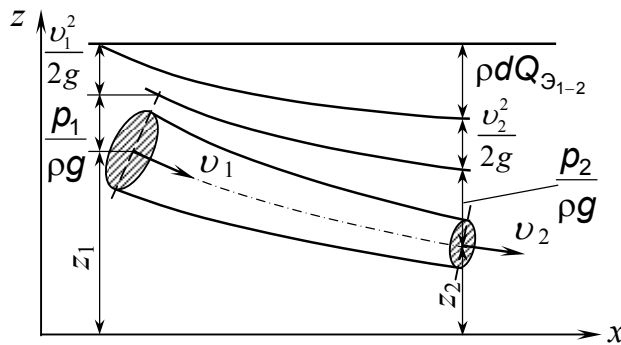


Рис. 3.11

4. Жидкость несжимаема ( $\rho = \text{const}$ ).

Умножив все члены уравнения для элементарной струйки, с учетом потерь энергии на  $\rho dQ$ , получим:

$$\rho dQ \frac{u_1^2}{2} + \rho dQ \left( gz_1 + \frac{p_1}{\rho} \right) = \rho dQ \frac{u_2^2}{2} + \rho dQ \left( gz_2 + \frac{p_2}{\rho} \right) + \rho dQ_{\text{Э}1-2}$$

Суммируя по площади живого сечения, имеем:

$$\int_{\omega} \rho \frac{u_1^2}{2} dQ + \int_{\omega} \rho \left( gz_1 + \frac{p_1}{\rho} \right) dQ = \int_{\omega} \rho \frac{u_2^2}{2} dQ + \int_{\omega} \rho \left( gz_2 + \frac{p_2}{\rho} \right) dQ + \int_{\omega} \rho_{\Sigma_{1-2}} dQ. \quad (3.22)$$

Рассмотрим каждый член уравнения отдельно.

Выражения  $\int_{\omega} \rho \frac{u_1^2}{2} dQ = \frac{\rho}{2} \int_{\omega} u_1^2 dQ$  и  $\int_{\omega} \rho \frac{u_2^2}{2} dQ = \frac{\rho}{2} \int_{\omega} u_2^2 dQ$  представляют собой кинетическую энергию всей массы жидкости, протекающей в единицу времени через поперечные сечения 1-1 и 2-2.

С учетом допущения

$$\frac{\rho}{2} \int_{\omega} u_1^2 dQ = \frac{\rho}{2} Qu_{1cp}^2 \quad \text{и} \quad \frac{\rho}{2} \int_{\omega} u_2^2 dQ = \frac{\rho}{2} Qu_{2cp}^2. \quad (3.23)$$

Однако  $\frac{\rho}{2} \int_{\omega} u^2 dQ \neq \frac{\rho}{2} Qv_{cp}^2$ .

Объясняется это тем, что  $\int_{\omega} u^2 dQ$  есть арифметическая сумма произведений расходов отдельных элементарных струек  $dQ$  на квадраты их действительных скоростей  $u^2$ .

Произведение  $Qv_{cp}^2$  – суммарный расход потока:

$$Q = \int_{\omega} dQ,$$

умноженный на среднюю скорость потока:

$$v_{cp} = \int_{\omega} \frac{u}{n},$$

где  $n$  – число струек.

Подобная замена требует корректировки кинетической энергии потока в выражении  $\frac{\rho}{2} Qv_{cp}^2$ . Эта корректировка представляет собой отношение действительной кинетической энергии жидкости, протекающей через поперечное сечение потока в единицу времени, к кинетической энергии, которая имела бы место при том же расходе, если бы скорость жидкости во всех струйках была бы одинаковой и равнялась средней скорости, т.е.

$\alpha = \frac{\int_{\omega} u^2 dQ}{\int_{\omega} Qv_{cp}^2}$  – коэффициент Кориолиса.

С учетом того, что  $dQ = u d\omega$  и  $Q = v_{cp} \omega$ , получим

$$\alpha = \int_{\omega} \frac{u^3 d\omega}{v_{\text{ср}}^3 \omega} > 1.$$

Обычно коэффициент Кориолиса определяется опытным путем на основании измерений скорости в различных точках исследуемого потока. Коэффициент  $\alpha$  всегда больше единицы.

Для так называемого ламинарного режима движения жидкости в цилиндрической трубе коэффициент  $\alpha = 2$ , а для турбулентного  $\alpha = 1,045-1,10$ .

Рассмотрим выражение второго члена уравнения (3.22), представляющего собой потенциальную энергию потока:

$$\int_{\omega} \rho \left( zg + \frac{p}{\rho} \right) dQ = \rho \left( zg + \frac{p}{\rho} \right) \int_{\omega} dQ = \rho Q \left( zg + \frac{p}{\rho} \right). \quad (3.24)$$

Третий член уравнения (3.22) представляет собой сумму работ сил сопротивления.

Подразумевая под  $\mathcal{E}_{1-2}$  осредненное значение потерь удельной энергии, получим:

$$\int_{\omega} \rho \mathcal{E}_{1-2} dQ = \rho Q \mathcal{E}_{1-2}. \quad (3.25)$$

Подставляя выражения (3.23) и (3.25) в уравнение (3.22), получим:

$$\rho Q \frac{\alpha_1 v_{1\text{ср}}^2}{2} + \rho Q \left( gz_1 + \frac{p_1}{\rho} \right) = \rho Q \frac{\alpha_2 v_{2\text{ср}}^2}{2} + \rho Q \left( gz_2 + \frac{p_2}{\rho} \right) + \rho Q \mathcal{E}_{1-2}.$$

Сокращая на  $\rho Q$ , после преобразования имеем:

$$gz_1 + \frac{p_1}{\rho} + \alpha_1 \left( \frac{v_{1\text{ср}}^2}{2} \right) = gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + \alpha_2 \left( \frac{v_{2\text{ср}}^2}{2} \right) + \mathcal{E}_{1-2}$$

или

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_{1\text{ср}}^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_{2\text{ср}}^2}{2g} + \frac{\mathcal{E}_{1-2}}{g}, \quad (3.26)$$

где  $h_{1-2} = \frac{\mathcal{E}_{1-2}}{g}$  – потери напора, м.

В общем виде уравнение Бернулли для потока вязкой жидкости принимает форму

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g} + h = H = \text{const}, \quad (3.27)$$

где  $v$  – подразумеваемая средняя скорость потока.

При практических расчетах часто принимают  $\alpha = 1$ , тем самым пренебрегают неравномерностью распределения скоростей.

Рассмотрим геометрический смысл уравнения Бернулли для потока жидкости, обладающей вязкостью (рис. 3.12).

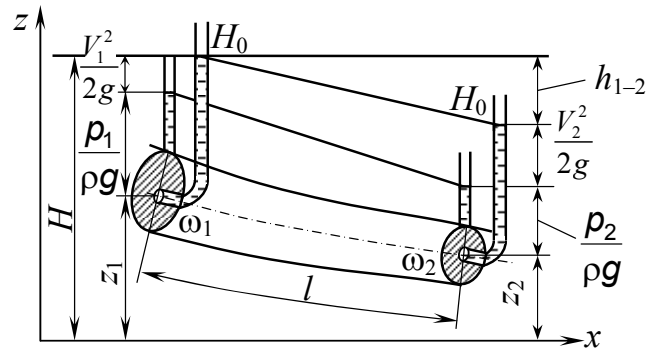


Рис. 3.12

Сумма  $z + \frac{p}{\rho g}$  в каждом сечении является пьезометрическим напором

$$H = h_z + h_p.$$

Линия, соединяющая отметки показаний пьезометров, называется пьезометрической линией.

Величина  $\frac{\alpha v^2}{2g}$  называется скоростным напором  $h_v = \frac{\alpha v^2}{2g}$ .

Сумма пьезометрического и скоростного напоров называется гидродинамическим, или полным напором, который можно выразить зависимостью

$$H_0 = H + \frac{\alpha v^2}{2g} = h_z + h_p + h_v.$$

Линия, соединяющая отметки гидродинамических напоров вдоль движения, называется напорной линией, а ее уклон – гидравлическим уклоном  $I$ .

Величина  $h_{1-2}$  в уравнении Бернулли представляет потери напора. Если потери напора отнести к единице длины потока, то получим гидравлический уклон.

В горизонтальных напорных трубах потери напора возникают при уменьшении давления:

$$i_p = -\frac{dH}{dl} = -\frac{d\left(z + \frac{p}{\rho g}\right)}{dl} \text{ – пьезометрический уклон;}$$

$$I_{\text{Д}} = -\frac{dH_0}{dl} = \frac{d\left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g}\right)}{dl} = \frac{dh_{1-2}}{dl} \text{ -- гидравлический уклон.}$$

### 3.11. Практическое применение уравнения Бернулли

На основе уравнения Бернулли сконструирован ряд приборов, таких, как водоструйный насос, эжектор, карбюраторы поршневых двигателей и др.

#### Примеры

**Пример 1.** Водомер Вентури представляет собой короткий отрезок трубы с сужением посередине (рис. 3.13). В широкой части и горловине устанавливаются либо пьезометры, либо дифференциальный манометр.

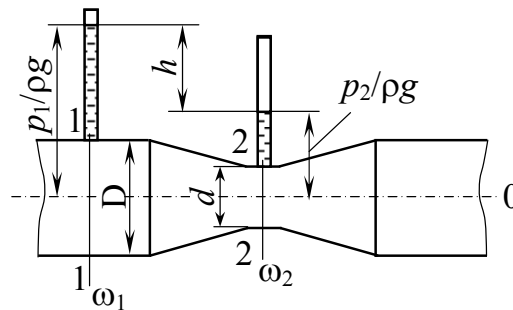


Рис. 3.13

Применим уравнение Бернулли для сечений 1–1 и 2–2 без учета потерь и при  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}.$$

Преобразуем уравнение следующим образом:

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g}\right) = \frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g}.$$

Согласно (рис. 3.13) разность в левой части равна  $h$ . Тогда

$$h = \frac{v_1^2}{2g} \left[ \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 - 1 \right]$$



или

$$v_1 = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{\frac{v_2^2}{v_1^2} - 1}};$$

но

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2}; \quad \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 = \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2;$$

тогда

$$v_1 = \frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 - 1}} \sqrt{h}.$$

Используя уравнение расхода  $Q = \omega v$ , преобразуем формулу к виду

$$Q = \omega_1 \omega_2 \sqrt{\frac{2g}{\omega_1^2 - \omega_2^2}} \sqrt{h}.$$

Обозначим постоянные величины через  $A = \omega_1 \omega_2 \sqrt{\frac{2g}{\omega_1^2 - \omega_2^2}}$  – постоянная Водомера, тогда  $Q = A\sqrt{h}$  – теоретический расход. Действительный расход водомера определяется по формуле

$$Q = \mu A \sqrt{h},$$

где  $\mu$  – коэффициент расхода водомера.

**Пример 2.** Карбюратор поршневых двигателей внутреннего сгорания служит для осуществления подачи бензина и смешения его с потоком воздуха (рис. 3.14). Поток воздуха, засасываемый в двигатель, сужается там, где установлен распылитель бензина.

Скорость воздуха в этом сечении возрастает, а давление по уравнению Бернулли падает.

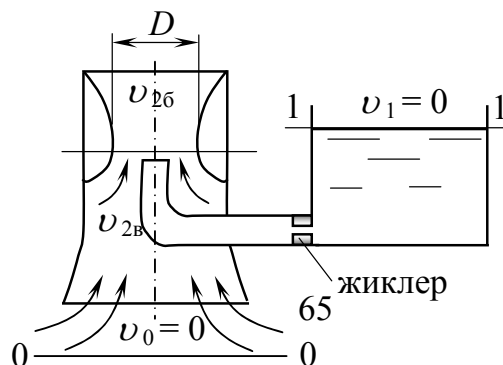


Рис. 3.14

Найдем соотношение между весовым расходом бензина  $G_б$  и воздуха  $G_в$  при заданных размерах  $D$  и  $d$  и коэффициентах сопротивления воздуха (до сечения 2-2)  $\xi_в$  и жиклера  $\xi_ж$ .

Запишем уравнение Бернулли для потока воздуха (сечения 0-0 и 2-2), а затем для потока бензина (сечения 1-1 и 2-2) и получим при  $z_1 = z_2$  и  $\alpha = 1$ .

$$\frac{p_a}{\rho_в g} = \frac{p_2}{\rho_в g} + \frac{v_{2в}^2}{2g} + \xi_в \frac{v_{2в}^2}{2g};$$

$$\frac{p_a}{\rho_б g} = \frac{p_2}{\rho_б g} + \frac{v_{2б}^2}{2g} + \xi_ж \frac{v_{2б}^2}{2g}.$$

Отсюда

$$\frac{\rho_в v_{2в}}{2} (1 + \xi_в) = \frac{\rho_в v_{2в}^2}{2} (1 + \xi_ж).$$

С учетом весовых расходов

$$G_в = \frac{\pi D^2}{4} v_{2в} \rho_в g \quad \text{и} \quad G_б = \frac{\pi d^2}{4} v_{2б} \rho_б g$$

получим

$$\frac{G_б}{G_в} = \left( \frac{d}{D} \right)^2 \sqrt{\frac{\rho_б (1 + \xi_в)}{\rho_в (1 + \xi_ж)}}.$$

**Пример 3.** Трубка Пито широко применяется для измерения скорости воды и газа. Составим уравнение Бернулли для сечений 1-1 и 2-2. Горизонтальная плоскость сравнения 0-0 проходит через носок трубки (рис. 3.15)

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} = h + h_v + \frac{p_{атм}}{\rho g} + \frac{V^2}{2g}.$$

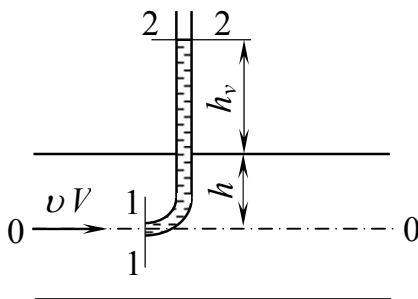


Рис. 3.15

Так как  $z_1 = 0$ ;  $p_1 = p_{\text{атм}} + \rho gh$ ;  $v_2 = 0$ , то, обозначив  $v_1 = v$ , запишем:

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p_{\text{атм}}}{\rho g} + \frac{\rho gh}{\rho g} = h + h_v + \frac{p_{\text{атм}}}{\rho g}.$$

Отсюда

$$\frac{v^2}{2g} = h_v \rightarrow v = \sqrt{2gh_v}.$$

### Контрольные вопросы

1. Напишите уравнение Бернулли для элементарной струйки невязкой жидкости и поясните величины, входящие в него.
2. Чем отличается уравнение Бернулли для потока реальной жидкости от уравнения Бернулли для элементарной струйки?
3. Что называется полной удельной энергией потока?
4. Поясните физический смысл коэффициента Кориолиса в уравнении Бернулли.
5. Поясните энергетический смысл уравнения Бернулли.
6. Что называется пьезометрическим и гидравлическим уклонами?
7. Приведите примеры практического применения уравнения Бернулли.
8. На основе какой модели получен вывод уравнения Бернулли для потока реальной жидкости □
9. Что такое пьезометрический и скоростной напор?
10. Что называется полным напором?

### 3.12. Гидравлические сопротивления.

#### Режимы движения жидкости

При движении реальных жидкостей в различных гидросистемах требуется точная оценка потерь напора на преодоление гидравлических сопротивлений. Точный учёт этих потерь во многом определяет надёжность технических расчётов. Кроме того, это позволяет найти экономически целесообразное инженерное решение, обладающее достаточной степенью совершенства. Для этого необходимо иметь ясное представление о механизме движения жидкости.

В процессе исследований известный физик Рейнольдс в 1883 году подтвердил теорию о существовании двух режимов движения жидкости. Это прежде всего *ламинарный режим* движения жидкости, соответствующий малым скоростям. Ламинарное движение можно рассматривать как движение отдельных слоёв жидкости, происходящее без перемешивания частиц.

При более высоких скоростях движения жидкости наблюдается *турбулентный режим* («турбулентус» по-латыни – вихревой). Такое движение называют беспорядочным.

Для оценки режима движения жидкости Рейнольдс ввёл безразмерный критерий  $Re$ , который учитывает влияние скорости  $v$ , диаметра (характерного размера)  $d(\ell)$ , плотности  $\rho$ , а также динамической вязкости  $\mu$ :

$$Re = \frac{vd\rho}{\mu} \quad \text{или} \quad Re = \frac{vd}{\nu},$$

где  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  – кинематическая вязкость.

Граница существования того или иного режима движения жидкости определяется двумя критическими значениями числа  $Re$ : нижним  $Re'_{кр}$  и верхним  $Re''_{кр}$ .

Так, при  $Re'_{кр} > Re$  возможен только ламинарный режим, а при  $Re''_{кр} < Re$  – только турбулентный режим, при  $Re'_{кр} < Re < Re''_{кр}$  наблюдается неустойчивое состояние потока.

При расчётах принято исходить из одного критического значения числа  $Re = 2320$ , что приводит к большей надёжности в гидравлических расчётах. Критерий Рейнольдса удобен тем, что может применяться для формы живого сечения через гидравлический радиус. Например, для круглого сечения

$$R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{\pi D^2}{4\pi D} = \frac{D}{4}.$$

Тогда

$$Re = \frac{4Rv}{\nu}. \quad (3.28)$$

Для сечения прямоугольной формы со сторонами  $b$  и  $h$

$$R = \frac{bh}{2(b+h)}.$$

Тогда  $Re = \frac{2bhv}{\nu(b+h)}$ .

Критерий Рейнольдса является как бы мерой отношения кинематической энергии жидкости к работе сил вязкого трения. От критерия Рейнольдса в общем случае зависят все безразмерные коэффициенты, входящие в расчётные зависимости, которые применяются в практике гидравлических расчётов.

### 3.13. Потери напора при равномерном движении

Рассмотрим равномерное движение в трубопроводе при следующих условиях:

1. Ускорение потока равно нулю, следовательно, силы инерции отсутствуют.
2. Средние скорости во всех поперечных сечениях одинаковы.
3. Местные сопротивления отсутствуют. Существуют сопротивления по длине, вызывающие соответствующие потери напора на трение (рис. 3.16).

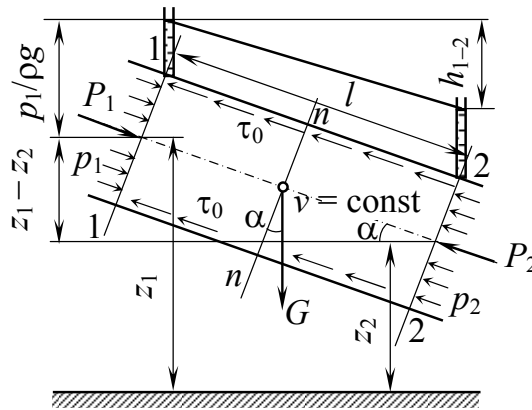


Рис. 3.16

4. Закон распределения давления между сечениями 1-1 и 2-2 подчиняется гидростатическому, т.е.

$$z + \frac{p}{\rho g} = \text{const.}$$

5. На объём жидкости между сечениями 1-1 и 2-2 действуют силы внешнего давления  $P_1$  и  $P_2$  ( $P = p\omega$ ), сила тяжести  $G = \rho g\omega l$  и сила сопротивления движению  $F_{\text{сопр}} = \tau\lambda l$ .

Пользуясь принципом Д'Аламбера, напишем уравнение динамического равновесия для массы жидкости, заключённой между сечениями 1-1 и 2-2 на оси  $x$ :

$$[\sum F_{\text{акт}}]_x = [\sum F_{\text{сопр}}]_x. \quad (3.29)$$

В состав активных сил входят:

1. Сила земного притяжения  $G = \rho g\omega l$ , проекция которой на ось  $x$  равна:

$$G \sin \alpha = \rho g\omega l \sin \alpha.$$

Так как  $l \sin \alpha = z_1 - z_2$ , то получаем

$$G \sin \alpha = \rho g \omega (z_1 - z_2). \quad (3.30)$$

2. С учётом допущения п. 4, равнодействующие сил давления  $P_1$  и  $P_2$  приложены в центрах тяжести сечений 1–1 и 2–2 и равны:

$$P_1 = \omega \rho_1 \quad \text{и} \quad P_2 = \omega \rho_2.$$

Тогда сумма проекций на ось  $x$

$$[\sum P]_x = P_1 - P_2 = \omega (\rho_1 - \rho_2). \quad (3.31^{\square})$$

3. Нормальные силы к оси  $x$  равны и противоположно направлены, поэтому проекции сил  $N \dots N$  равны нулю.

Очевидно, что левая часть уравнения (3.30) составляет две силы, а именно:

$$[\sum F_{\text{акт}}]_x = \rho g \omega (z_1 - z_2) + \omega (\rho_1 - \rho_2). \quad (3.32)$$

Силы сопротивления  $F_{\text{сопр}}$  определяются по касательным напряжениям на стенке канала. Эти силы направлены параллельно оси потока в сторону, обратную движению жидкости.

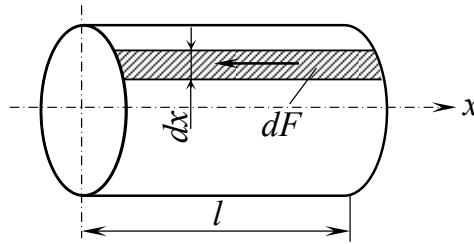


Рис. 3.17

Обозначим силу сопротивления на элементарную площадку  $d\chi$  через  $dF$ , тогда для участка трубы  $l$  имеем:

$$dF = \tau l d\chi. \quad (3.33)$$

После интегрирования, принимая  $\tau = \tau_0 = \text{const}$  ( $\chi$  может изменяться по периметру) в выражении (3.33), получим

$$[\sum F_{\text{сопр}}]_x = \int_x \tau_0 l d\chi = \tau_0 l \int_x d\chi = \tau_0 l \chi, \quad (3.34)$$

где  $\tau_0$  – среднее значение касательного напряжения на стенке.

С учётом уравнений (3.32) и (3.34) запишем уравнение динамического равновесия в виде

$$\rho g \omega (z_1 - z_2) + \omega (\rho_1 - \rho_2) = \tau_0 l \chi. \quad (3.35)$$

Разделив члены уравнения (3.35) на  $\rho g \omega$ , получим

$$z_1 - z_2 + \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{\tau_0 \ell \chi}{\rho g \omega}. \quad (3.36)$$

Обозначим отношение  $\frac{\omega}{\chi} = R$ , после преобразования выражения (3.36), имеем

$$\left( z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right) - \left( z_2 + \frac{p_2}{\rho g} \right) = \frac{\tau_0 \ell}{\rho g R}. \quad (3.37)$$

Сравним уравнение Бернулли, записанное для сечений 1–1 и 2–2:

$$\left( z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} \right) - \left( z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} \right) = h_v. \quad (3.38)$$

Так как при равномерном движении  $V_1 = V_2$ , то из сопоставления уравнений (3.37) и (3.38) находим

$$h_v = \frac{\tau}{\rho g R}. \quad (3.39)$$

Учитывая, что  $h_v = i \ell$  (где  $i$  – гидравлический уклон), преобразуем выражение (3.39) к виду

$$Ri = \frac{\tau_0}{\rho g} \quad \text{или} \quad \tau_0 = \rho g i R. \quad (3.40)$$

Это уравнение академик Н.Н. Павловский назвал основным уравнением равномерного движения.

Опытным путём Шези установлено, что величина  $\frac{\tau_0}{\rho g}$  пропорциональна квадрату скорости, т.е.

$$\frac{\tau_0}{\rho g} = \xi \frac{v^2}{2g}, \quad (3.41)$$

где  $\xi$  – коэффициент пропорциональности, в общем случае величина переменная.

Подставим равенство (3.41) в выражение (3.39), получим формулу Вейсбаха

$$h_v = \xi \frac{\ell v^2}{R 2g}.$$

Учитывая, что  $R = \frac{d}{4}$ , преобразуем формулу Вейсбаха к виду

$$h_v = 4\xi \frac{\ell v^2}{d 2g}.$$

Обозначим  $4\xi = \lambda$ , получим

$$h_v = \lambda \frac{\ell v^2}{d 2g}, \quad (3.42)$$

где  $\lambda$  – коэффициент гидравлического трения.

Формула (3.42) именуется формулой Дарси-Вейсбаха. Она используется для расчёта трубопроводов.

Учитывая, что  $\frac{\tau_0}{\rho g} = Ri$  и  $\frac{\tau_0}{\rho g} = \frac{\lambda}{4} \cdot \frac{v^2}{2g} = \lambda \frac{v^2}{8g}$ , получим

$$Ri = \lambda \frac{v^2}{8g}.$$

Отсюда

$$v = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}} \sqrt{Ri}.$$

Обозначив  $C = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}}$ , м/с, получим формулу Шези

$$V = C \sqrt{Ri},$$

где  $C$  – коэффициент Шези.

Формула Шези получила широкое применение в расчётах открытых потоков.

Анализ формулы (3.42) показывает, что потери пропорциональны квадрату скорости, а закон сопротивления называется законом квадратичного сопротивления.

В то же время установлено, что потери напора, помимо скорости, зависят от характера режима, формы и размеров сечения, вязкости жидкости, материала и состояния стенок.

Это не учитывается формулами Шези и Дарси-Вейсбаха.

На графике (рис. 3.18) показана зависимость потерь на трение в зависимости от скорости движения жидкости  $h_v = f(v)$ . Однако квадратичные формулы Шези и Дарси-Вейсбаха очень удобны для практических целей и обычно применяются как для турбулентного, так и для ламинарного режимов течения жидкости.





Рис. 3.18

Отклонения от квадратичного закона учитываются тем, что коэффициенты  $\lambda$  и  $C$  ставятся в косвенную зависимость от скорости. Поэтому основная задача при определении потерь на трение при равномерном движении жидкости сводится к определению коэффициентов  $\lambda$  и  $C$  при известной скорости движения жидкости.

### 3.14. Способы определения потерь напора при равномерном движении жидкости

Основной формулой при расчёте напорных трубопроводов является формула Дарси-Вейсбаха:

$$h_v = \lambda \frac{\ell}{d} \cdot \frac{v^2}{2g},$$

а при расчёте течений в открытых руслах – формула Шези:

$$v = C\sqrt{Ri}.$$

Применение этих формул связано с определением коэффициентов  $\lambda$  и  $C$ .

При ламинарном движении жидкости коэффициент  $\lambda$  для труб определяется по формуле

$$\lambda = \frac{64}{Re}. \quad (3.43)$$

Впервые наиболее исчерпывающие данные о значении  $\lambda$  были получены Никурадзе. Результаты показаны на рис. 3.19.

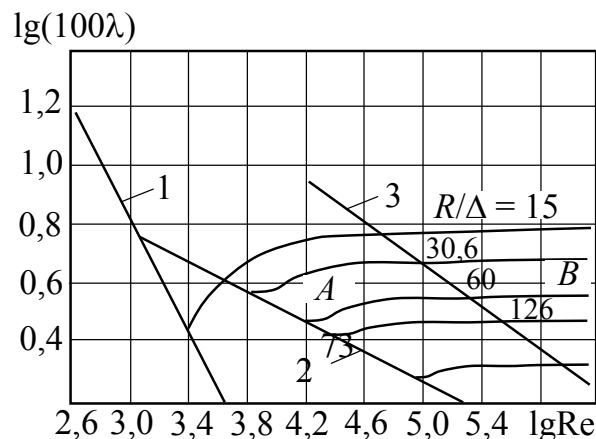


Рис. 3.19

В пределах прямой 1 коэффициент  $\lambda$  зависит не от шероховатости стенок трубы, а от числа  $Re$  (см. формулу 3.43). Прямая 2 представляет зависимость  $\lambda = f(Re)$  для гидравлических гладких труб, у которых шероховатость меньше толщины ламинарного пристенного слоя.

Коэффициент  $\lambda$  для гидравлических гладких труб определяется по формуле Блазиуса (прямая 2):

$$\lambda = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{Re}} \quad (3.44)$$

Между линиями 2 и линией 3 слева располагается зона  $A$ , в которой  $\lambda$  зависит как от числа Рейнольдса, так и от шероховатости поверхности стенок труб.

Для определения  $\lambda$  в этой области может применяться формула А. Д. Альтшуля:

$$\lambda = 0,11 \left( \frac{k_s}{d} + \frac{68}{Re} \right)^{0,25}, \quad (3.45)$$

где  $k_s$  – эквивалентная равномерно зернистая шероховатость, определяемая опытным путем.

В области  $B$  коэффициент  $\lambda$  зависит только от шероховатости.

Для определения  $\lambda$  в этой области рекомендуется формула Никурадзе

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,75 + 2 \lg \frac{r}{\Delta}, \quad (3.46)$$

где  $r$  – радиус трубы;

$\Delta$  – абсолютная шероховатость стенок трубы.

Существуют формулы Ф. А. Шевелёва, Н. З. Френкеля, Л. А. Тепакса, Б. Н. Шифринсона, Н. Ф. Фёдорова и других.

### 3.15. Местные гидравлические сопротивления

Местные сопротивления вызываются фасонными частями, арматурой и другими элементами трубопровода. При движении жидкости на местных сопротивлениях изменяется величина и направление скорости.

Потери, связанные с преодолением местных сопротивлений, пропорциональны кинетической энергии потока:

$$h_M = \xi \frac{v^2}{2g}, \quad (3.47)$$

где  $\xi_M$  – коэффициент местных сопротивлений зависит не только от вязкости и скорости движения основного потока, но главным образом от геометрической формы и размеров сопротивления.

При турбулентном режиме движения жидкости потери  $h_M$  зависят только от геометрических характеристик сопротивления.

Рассмотрим вопрос о потере напора при внезапном расширении трубопровода (рис. 3.20). Часть энергии в этом случае расходуется на сложное циркуляционное движение жидкости в кольцевом пространстве между струёй и стенками трубы за сечением 1–1.

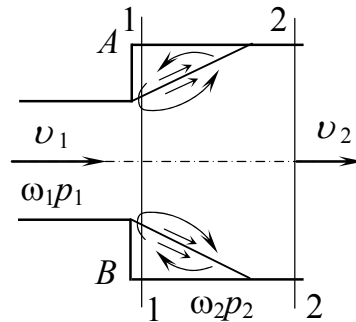


Рис. 3.20

Вследствие отрыва потока и связанного с ним вихреобразования на участке трубы между сечениями 1–1 и 2–2 наблюдаются значительные потери напора.

Учитывая, что давление на торцевой стенке  $AB$  практически равно давлению на выходе из узкой части трубы  $p_1$ , найдём величину потерь по уравнению Бернулли:

$$h_{\text{вн.р}}^{1-2} = \left( \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} \right) - \left( \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} \right) = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} \quad (3.48)$$

Из теоремы импульсов для сечений 1–1 и 2–2 можно записать:

$$(p_1 - p_2)\omega = Q\rho(v_2 - v_1). \quad (3.49)$$

Пренебрегая силами трения на участке 1–2 и учитывая, что  $Q = v\omega$ , после деления на  $\rho g$  обеих частей уравнения (3.49) получим:

$$\omega_2 \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{v_2 \omega_2}{g} (v_2 - v_1)$$

или

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{v_2^2}{g} - \frac{v_1 v_2}{g}. \quad (3.50)$$

Подставляя выражение (3.50) в уравнение (3.48), найдём:

$$h_{\text{вн.р}} = \frac{v_2^2}{g} - \frac{v_1 v_2}{g} + \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g}$$

или

$$h_{\text{вн.р}} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} = \frac{(\Delta v)^2}{2g}. \quad (3.51)$$

То есть, потери напора при внезапном расширении равны скоростному напору от потерянной скорости. Выражение (3.51) называется теоремой, или формулой Борда.

Формулу (3.51) можно привести к виду:

$$h_{\text{вн.р}} = \left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right)^2 \frac{v_1^2}{2g} = \xi \frac{v_1^2}{2g}.$$

С учётом того, что  $v_1 \omega_1 = v_2 \omega_2$  и  $\xi = \left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right)^2$ , получим:

$$\xi = \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 \text{ — относится к скорости } v_1;$$

$$\xi = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1\right)^2 \text{ — относится к скорости } v_2.$$

Суммарные потери напора в трубопроводе постоянного диаметра ( $d_i = \text{const}$ )

$$h_v = \lambda \frac{\ell}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} + \sum_1^n \xi_i \frac{v^2}{2g} = \left( \lambda \frac{\ell}{d} + \sum_1^n \xi_i \right) \cdot \frac{v^2}{2g}.$$

## Примеры

**Пример 1.** Определить режим движения жидкости в лотке прямоугольной формы высотой 0,2 м и шириной 0,5 м при уровне воды 0,15 м и скорости  $v = 1,2$  м/с (рис. 3.21).

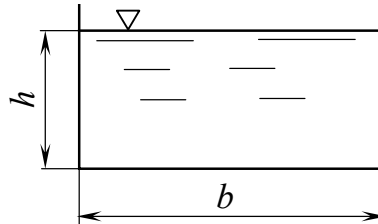


Рис. 3.21

**Решение:** Принимая  $\nu = 0,01 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/с, по формуле (3.28) определяем:

$$Re = \frac{4Rv}{\nu} = \frac{4bhv}{(2h+b)\nu} = \frac{4 \cdot 0,15 \cdot 0,5 \cdot 1,2}{(2 \cdot 0,15 + 0,5) \cdot 0,01 \cdot 10^{-4}} = \frac{0,45}{0,01 \cdot 10^{-4}} = 450000.$$

Так как  $Re > Re_{кр} = 580$ , то режим движения потока будет турбулентным.

**Пример 2.** Определить режим движения и потери напора по длине трубопровода (рис. 3.22), если длина трубопровода 100 м, диаметр  $d = 100$  мм,  $Q = 10$  л/с,  $\nu_{ж} = 0,726$  см<sup>2</sup>/с.

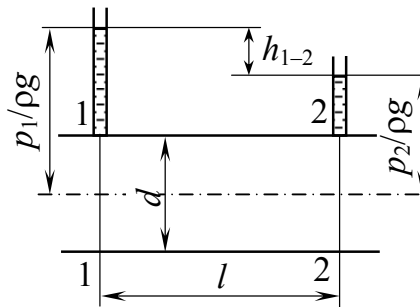


Рис. 3.22

**Решение:** Скорость потока в трубопроводе

$$v = \frac{Q}{\omega} = \frac{10000}{0,785 \cdot 10^2} = 127 \text{ см/с.}$$

Число Рейнольдса

$$Re = \frac{vd}{\nu} = \frac{127 \cdot 10}{0,726} = 1750.$$

Так как число Рейнольдса меньше 2320, то режим движения ламинарный:  $\lambda = \frac{64}{Re}$ .

Потери напора

$$h_v = \lambda \frac{\ell}{d} \frac{v^2}{2g} = \frac{64 \ell}{\text{Re} d} \cdot \frac{v^2}{2g} = \frac{32 \nu \ell v}{d^2 g} = \frac{32 \cdot 0,726 \cdot 1000 \cdot 127}{981 \cdot 10^2} = 300 \text{ см} = 3 \text{ м}.$$

**Пример 3.** Определить потери давления при внезапном расширении трубопроводов, применяемых в качестве нагревательных приборов системы отопления. Стояк, подводящий нагретую воду, и соединительные трубы выполнены диаметром  $d = 0,025$  м и приварены к торцу труб  $d_1 = 100$  мм. Скорость воды в подводящих трубах  $v = 0,3$  м/с, а температура воды  $t = 80^\circ\text{C}$ .

**Решение:** Кинематическая вязкость и плотность воды в подводящей сети (при  $t = 80^\circ\text{C}$ ) равны соответственно:

$$\nu = 0,36 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}; \quad \rho = 972 \text{ кг/м}^3.$$

Находим число Рейнольдса в трубопроводах подводящей сети по формуле

$$\text{Re} = \frac{vd}{\nu} = \frac{0,3 \cdot 0,025}{0,36 \cdot 10^{-6}} = 20820, \text{ т.е. } \text{Re} > 2320.$$

Потери давления определим по формуле Борда:

$$\Delta p = \frac{v^2}{2} \left( 1 - \frac{d_2^2}{d_1^2} \right)^2 \cdot \rho = \left( \frac{0,3^2}{2} \right) \cdot \left( 1 - \frac{0,025^2}{0,1^2} \right)^2 \cdot 972 = 41,8 \text{ Па}.$$

### Контрольные вопросы

1. Какие два режима движения жидкости вы знаете и каковы их характерные особенности?
2. Какие физические свойства жидкости и характеристики потока влияют на режимы движения жидкости?
3. Каким критерием оцениваются режимы движения жидкости?
4. Запишите и поясните критерий оценки для круглого сечения потока и потока произвольной формы.
5. Приведите примеры ламинарного и турбулентного режимов движения потока для жидкостей с различной вязкостью.
6. Как определяется граница между ламинарным и турбулентным режимами? Для каких целей введено критическое число Рейнольдса?

7. По какой формуле определяются потери напора по длине трубопровода и каков её физический смысл?

8. Что такое коэффициент гидравлического трения и по какой формуле он определяется при ламинарном движении жидкости?

9. По какой формуле определяются местные потери? Физический смысл потерь на местном сопротивлении?

10. Приведите пример местных сопротивлений.

11. В каких случаях применяется формула Борда для расчёта потерь на местных сопротивлениях?

12. Какие трубы называются гидравлически гладкими и гидравлически шероховатыми?

13. Приведите формулы для расчёта  $\lambda$  гидравлически гладких труб, а также для случаев, когда  $\lambda$  зависит только от шероховатости.

## 4. ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ИСТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ

### 4.1. Общая характеристика истечения

Истечение жидкостей из отверстий и насадков имеет большое практическое значение, поскольку они применяются при решении многих технических задач. Например, в различных двигателях внутреннего сгорания при подаче топлива, при опорожнении цистерн и различных ёмкостей, при конструировании сопел и форсунок, где необходима строгая дозировка и расход жидкости, а также гидромониторных и эжекторных установках, разрабатывающих грунты, гидротехнических сооружениях, содержащих затворы или отверстия для сброса воды.

Истечение жидкости может происходить при постоянном и переменном напорах, через малое или большое отверстие, через насадки различной конструкции. Кроме того, истечение может быть свободным в атмосферу или вакуум и под уровень (затопленное истечение).

При выходе струи из отверстия струя претерпевает сжатие. Сжатое сечение струи находится примерно на  $0,5d$  от стенки резервуара.

Отношение площади струи в сжатом сечении к площади всего отверстия называется коэффициентом сжатия струи:

$$\varepsilon = \frac{\omega_c}{\omega} \quad (4.1)$$

Значение коэффициента сжатия струи зависит от характера деформации потока.

В этой связи различают совершенное и несовершенное, полное и неполное сжатие.

Совершенным сжатием называется такое, при котором ни свободная поверхность, ни близлежащие стенки не влияют на сжатие струи.

Расстояние до ближайшей стенки должно быть в три (3) раза больше диаметра отверстия ( $\ell = 3d$ ).

Сжатие будет несовершенным, если это условие не соблюдается. Коэффициент сжатия  $\epsilon$  при совершенном сжатии меньше, чем при несовершенном.

Если струя имеет равномерное сжатие по периметру, то сжатие называется полным, в противном случае сжатие называется неполным. Неполное сжатие будет иметь отверстие, расположенное на дне резервуара или у боковой поверхности.

Коэффициент сжатия для боковых отверстий больше, чем для отверстий с полным сжатием.

Для получения того или иного гидравлического эффекта к отверстию присоединяются так называемые насадки, длина которых  $\ell = (3-4)d$ . Обычно насадки применяются для увеличения пропускной способности отверстия, получения компактной струи и т. д.

#### 4.2. Истечение жидкости из отверстия в тонкой стенке

Рассмотрим истечение жидкости из круглого отверстия диаметром  $d_0$  в вертикальной тонкой стенке сосуда (рис. 4.1).

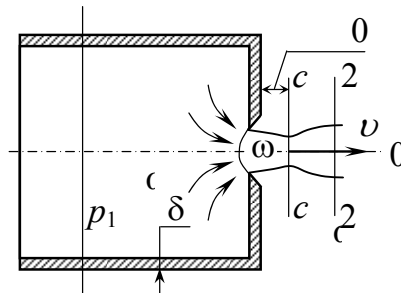


Рис. 4.1

Стенка считается тонкой, если её толщина  $\delta < 0,2d_0$  и не влияет на условия истечения. Основной задачей истечения является определение скорости истечения и расхода жидкости при следующих условиях:

1. Процесс истечения установившийся, т.е.  $p_1 = \text{const}$ .
2. Сжатие струи – полное и совершенное.
3. В сжатом сечении давление подчиняется гидростатическому закону распределения.
4. Скорости в верхних и нижних точках отверстия не отличаются между собой и коэффициент Кориолиса  $\alpha = 1$ .

Для определения скорости истечения напишем уравнение Бернулли для сечений 1–1 и 2–2, учитывая, что плоскость сравнения проходит через центр тяжести отверстия, т.е.  $z_1 = z_2 = 0$ :



$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_0}{\rho g} + \frac{v_c^2}{2g} + h_{\text{ВХ}}. \quad (4.2)$$

Анализ уравнения (4.2) показывает, что  $p_0$  в сжатом сечении можно принять равным атмосферному.

Потери напора между сечениями 1–1 и 2–2 определяются по формуле Вейсбаха

$$h_{\text{ВХ}} = \xi_{\text{ВХ}} \frac{v_c^2}{2g}, \quad (4.3)$$

где  $\xi_{\text{ВХ}}$  – коэффициент сопротивления отверстия.

$\xi_{\text{ВХ}}$  –

С учётом формулы (4.3) преобразуем уравнение (4.2) к виду:

$$v_c^2 \left( 1 + \xi_{\text{ВХ}} - \frac{v_1^2}{v_c^2} \right) = \frac{2(p_1 - p_0)}{\rho}. \quad (4.4)$$

Решая уравнение (4.4) относительно  $v$ , находим

$$v_c = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_{\text{ВХ}} - \frac{v_1^2}{v_c^2}}} \cdot \sqrt{\frac{2(p_1 - p_0)}{\rho}}. \quad (4.5)$$

Преобразуем отношение  $\frac{v_1^2}{v_c^2}$ , используя уравнение расхода для

сечений 1–1 и с–с (см. рис. 4.1) в виде  $v_1 \omega_1 = v_c \omega_c$  или  $\frac{v_1^2}{v_c^2} = \frac{\omega_c^2}{\omega_1^2}$ . Умножив

и разделив правую часть последнего равенства на  $\omega_0^2$ , получим

$$\frac{v_1^2}{v_c^2} = \frac{\omega_c^2}{\omega_0^2} \cdot \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2}.$$

Обозначив  $\frac{\omega_c^2}{\omega_0^2} = \varepsilon^2$  и  $\frac{\omega_0^2}{\omega_1^2} = n^2$ , преобразуем формулу (4.5) к виду

$$v_c = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_{\text{ВХ}} - n^2 \varepsilon^2}} \sqrt{\frac{2(p_1 - p_0)}{\rho}}. \quad (4.6)$$

Введём обозначение

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_{\text{вх}} - n^2 \varepsilon^2}}, \quad (4.7)$$

где коэффициент скорости истечения, учитывающий потери  $\varphi$  – скорости на местном сопротивлении (на острой кромке входного отверстия);

$\varepsilon = \frac{\omega_c}{\omega_0}$  – коэффициент сжатия струи для круглых отверстий, равный 0,64;

$n = \frac{\omega_0}{\omega_1}$  – коэффициент, учитывающий влияние скорости потока перед входным отверстием на коэффициент скорости (при истечении из малых отверстий  $n \rightarrow 0$ ).

С учётом обозначения (4.7), формула (4.6) принимает вид (индекс «с» опускается)

$$v = \varphi \sqrt{\frac{2(p_1 - p_0)}{\rho}} \quad (4.8)$$

При истечении холодной воды через малое отверстие обычно имеем:

$$\varphi \approx 0,97 - 0,98; \quad \xi_{\text{вх}} \approx 0,06.$$

По коэффициенту скорости легко определить коэффициент сопротивления  $\xi_{\text{вх}}$ :

$$\xi_{\text{вх}} = \frac{1}{\varphi^2} - 1.$$

Эти коэффициенты зависят от напора  $H$  (и, следовательно, от скорости истечения), вязкости жидкости, формы и размеров отверстия, а поэтому и от числа Рейнольдса. Обычно принимают  $\varphi = f(\text{Re})$ .

Траектория полёта струи при истечении жидкости при небольших скоростях и небольших высотах падения, когда можно пренебречь сопротивлением окружающего струю воздуха и принять форму струи параболической, показана на рис. 4.2.

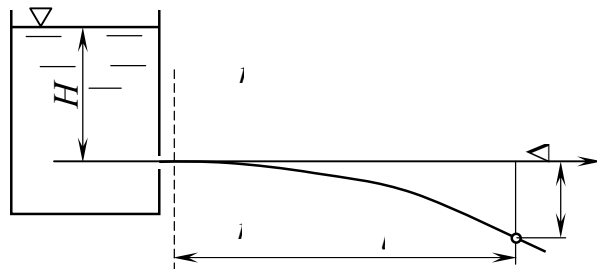


Рис. 4.2

Без большой погрешности можно считать, что частица жидкости за сжатым сечением  $n-n$  движется по инерции: по оси  $x$  – равномерно, по оси  $z$  – равноускоренно, поэтому закон движения частицы жидкости можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \ell &= vt; \\ \ell &= \varphi \sqrt{2gH}t; \\ \Delta z &= \frac{gt^2}{2}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Отсюда  $t = \sqrt{\frac{2\Delta z}{g}}$ .

Подставляя выражение  $t$  в формулу (4.9), получим

$$\ell = \varphi \sqrt{2gH} \sqrt{\frac{2\Delta z}{g}}.$$

Отсюда

$$\Delta z = \frac{\ell^2 g}{2\varphi^2 2gH} = \frac{\ell^2}{4\varphi^2 H}. \quad (4.10)$$

Решая выражение (4.10) относительно коэффициента скорости, находим

$$\varphi = \frac{\ell}{2\sqrt{\Delta z H}}. \quad (4.11)$$

Чтобы определить  $\varphi$ , надо измерить дальность полёта струи  $\ell$ , высоту падения  $\Delta z$  и напор  $H$ .

Расход жидкости равен произведению скорости в сжатом сечении на площадь живого сечения:

$$Q = \omega_c v.$$

Подставляя вместо  $\omega_c$  и  $v$  их значения, имеем:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_{\text{вх}} - \varepsilon^2 n^2}} \varepsilon \omega \sqrt{\frac{2(\rho_1 - \rho_0)}{\rho}}.$$

Введём обозначение

$$\mu = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + \xi_{\text{вх}} - \varepsilon^2 n^2}} = \varphi \varepsilon, \quad (4.12)$$

где  $\mu$  – коэффициент расхода.  
 С учётом обозначений в формуле (4.12) получим

$$Q = \mu \omega \sqrt{\frac{2(p_1 - p_0)}{\rho}}. \quad (4.13)$$

Так как для малых отверстий коэффициент сжатия  $\varepsilon = 0,64$ , а коэффициент скорости  $\varphi = 0,97$ , то, в соответствии с формулой (4.12),

$$\mu = \varphi \varepsilon = 0,64 \cdot 0,97 = 0,62.$$

Учитывая зависимость  $\varepsilon$  от  $n = \frac{\omega_0}{\omega_1}$ , можно найти также зависимость  $\mu = f(n, \xi_{\text{вх}})$ .

При истечении из малых отверстий  $n \rightarrow 0$  из формулы (4.12), находим

$$\mu = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + \xi_{\text{вх}}}}. \quad (4.14)$$

В случае истечения из сосудов со свободной поверхностью формулы (4.8) и (4.13) записываются в виде:

$$v = \varphi \sqrt{2gH} \quad (4.15)$$

$$Q = \mu \omega \sqrt{2gH}, \quad (4.16)$$

где  $H = \frac{(p_1 - p_2)}{\rho g}$  – высота уровня жидкости в сосуде над центральным отверстием (при диаметре отверстия  $d \ll H$  (см. рис. 4.2).

Опытами установлено, что коэффициент  $\mu$  существенным образом изменяется в зависимости от формы, размеров отверстия и от напора. Причём, с увеличением размеров отверстия коэффициент расхода уменьшается, а с увеличением напора уменьшается влияние размеров отверстия на коэффициент  $\mu$ .

При неполном сжатии коэффициент расхода определяется по формулам:

$$\mu = \mu_0 \left( 1 + 0,152 \frac{n}{\rho} \right) - \text{для круглых отверстий};$$

$$\mu = \mu_0 \left( 1 + 0,128 \frac{n}{p} \right) - \text{для прямоугольных отверстий};$$

здесь коэффициент расхода для аналогичного отверстия при  
 $\mu_0$  – полном сжатии;  
 $n$  – часть периметра отверстия, где отсутствует сжатие;  
 $p$  – полный периметр отверстия.

Если сжатие несовершенное или неполное, то коэффициенты  $\mu$  и  $\varphi$  определяются с поправками по формуле Н. Е. Жуковского:

$$\varepsilon = \frac{\pi}{(\pi + 2) \cdot \left( \frac{2\theta}{\operatorname{tg} 2\theta} \right)},$$

где угол, определяемый из выражения:  
 $\theta$  –

$$\frac{a}{H} = \operatorname{tg} \theta \left( 1 + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2\theta}{\operatorname{tg} 2\theta} \right);$$

здесь глубина погружения нижней кромки отверстия;  
 $H$  –  
 $a$  – высота отверстия.

При совершенном сжатии  $\varepsilon = \frac{\pi}{\pi + 2} \approx 0,611$ , что хорошо согласуется

с опытными данными.

При истечении жидкости из затопленного отверстия, как показали многочисленные исследования, коэффициенты  $\mu$ ,  $\varphi$ ,  $\varepsilon$  будут мало отличаться от коэффициентов при истечении жидкости в атмосферу, но в качестве напора будет действовать разность напоров  $H_1 - H_2$  (рис. 4.3) при  $p_1 = p_2$ .

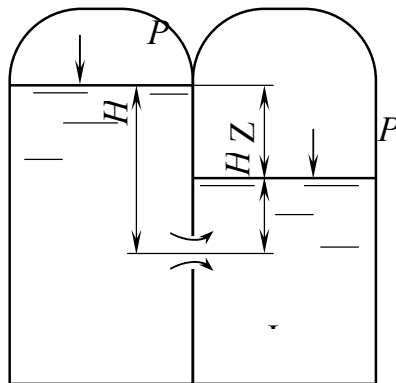


Рис. 4.3

Расчётные формулы имеют вид:

$$v = \varphi \sqrt{2g(H_1 - H_2)} = \varphi \sqrt{2gz};$$

$$Q = \mu \omega \sqrt{2g(H_1 - H_2)} = \mu \omega \sqrt{2gz}. \quad (4.17)$$

Если давление на свободной поверхности резервуаров не равно атмосферному (рис. 4.3), т.е.  $p_1 > p_2 > p_{\text{атм}}$ , то расчётными формулами будут следующие:

$$v = \varphi \sqrt{2g \left[ \left( H_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right) - \left( H_2 + \frac{p_2}{\rho g} \right) \right]} = \varphi \sqrt{2g \left( \frac{p_1 - p_2}{\rho g} + z \right)};$$

$$Q = \mu \omega \sqrt{2g \left[ \left( H_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right) - \left( H_2 + \frac{p_2}{\rho g} \right) \right]} = \mu \omega \sqrt{2g \left( \frac{p_1 - p_2}{\rho g} + z \right)}. \quad (4.18)$$

### 4.3. Истечение при переменном напоре

Задача об истечении жидкости при переменном напоре сводится к определению времени опорожнения или наполнения всего или некоторой части сосуда, в зависимости от начального наполнения, формы и размеров сосуда и отверстия.

Подобные задачи встречаются при расчётах наполнения и опорожнения резервуаров, цистерн, водохранилищ, бассейнов, шлюзовых камер и др.

При переменном напоре имеет место неустановившееся движение жидкости, что делает неприемлемым обычное уравнение Бернулли. Поэтому полное время истечения разделяют на бесконечно малые промежутки, в течение которых напор считается постоянным, а истечение жидкости – установившимся. Это позволяет использовать для решения полученные выше зависимости и приводит к достаточно точным результатам.

Рассмотрим простейший пример истечения жидкости в атмосферу через донное отверстие площадью  $\omega$  из открытого вертикального цилиндрического сосуда, одинакового по всей высоте поперечного сечения  $F$  (рис. 4.4).

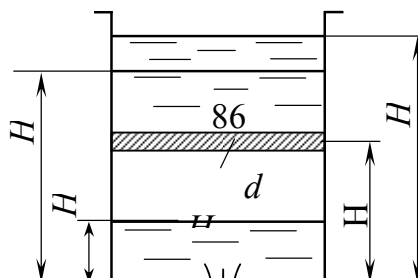


Рис. 4.4

Пусть за время  $dt$  через отверстие вытекло  $dQ$  жидкости, равное

$$dQ = \mu\omega\sqrt{2gH} dt ,$$

где  $H$  – напор на уровне элементарного элемента  $dH$ , который можно считать постоянным;

$\mu$  – коэффициент расхода (изменяющейся в зависимости от напора, формы и размеров отверстия).

В действительности, за это время уровень жидкости в сосуде опустится на  $dH$  и объём жидкости в нём изменится на  $dW = -FdH$  .

Вследствие неразрывности движения жидкости

$$dQ = -FdH$$

или

$$\mu\omega\sqrt{2gH} dt = -FdH .$$

Отсюда

$$dt = \frac{-FdH}{\mu\omega\sqrt{2gH}} . \tag{4.19}$$

Полное время опорожнения сосуда определим в результате интегрирования уравнения (4.19):

$$\int_0^t dt = -\int_{H_n}^0 \frac{FdH}{\mu\omega\sqrt{2gH}} ,$$

где  $H_n$  – начальный напор жидкости в сосуде.

Меняя пределы интегрирования в правой части уравнения, принимая  $\mu = \text{const}$  и вынося постоянные за знак интеграла, получим

$$t = \frac{F}{\omega\mu\sqrt{2g}} \int_0^{H_n} \frac{dH}{H^{\frac{1}{2}}} = \frac{2F\sqrt{H_n}}{\mu\omega\sqrt{2g}} . \tag{4.20}$$

Умножив и разделив правую часть уравнения (4.20) на  $\sqrt{H_n}$  , получим

$$t = \frac{2F\sqrt{H_n}\sqrt{H_n}}{\mu\omega\sqrt{2gH_n}} = \frac{2FH_n}{Q} = \frac{2W}{Q} \quad (4.21)$$

Из выражения (4.21) следует, что при сохранении постоянного напора в сосуде тот же объём жидкости пройдёт через отверстие за время  $t$ , вдвое меньшее, чем  $t$ , т.е.  $t = 2t$ .

Формула (4.20) применима и для случая истечения жидкости из отверстия в боковой стенке сосуда. В этом случае напор  $H_n$  отсчитывается от центра тяжести площади отверстия.

При частичном опорожнении сосуда применяется следующая зависимость:

$$t = \frac{2F(\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2})}{\mu\omega\sqrt{2g}} \quad (4.22)$$

### Примеры

**Пример 1.** Вода вытекает из малого незатопленного отверстия в вертикальной стенке при постоянном напоре  $H$ . Высота расположения отверстия над полом  $z = 1,0$  м и достигает пола на расстоянии  $\ell = 1,2$  м. Диаметр отверстия  $d = 50$  мм,  $\varphi = 0,97$ . Определить расход  $Q$ .

**Решение:** По формуле (4.10) определяем  $H$ :

$$H = \frac{\ell^2}{\varphi^2 4\Delta z} = \frac{1,2^2}{0,97^2 \cdot 4 \cdot 1,0} = 0,315 \text{ м.}$$

Принимая коэффициент расхода  $\mu = 0,62$ , находим расход:

$$Q = \mu\omega\sqrt{2gH} = 0,62 \cdot \frac{3,14 \cdot 5^2}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 31,5} = 28 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{с.}$$

$2 \cdot 10^5$  Па, а во II резервуаре  $p_2 = 1,7 \cdot 10^5$  Па,  $\mu = 0,62$ . Скоростью подхода пренебречь. **Пример 2.** Определить расход жидкости, перетекающей из резервуара I в резервуар II (см. рис. 4.3), если диаметр отверстия в вертикальной стенке  $d = 0,2$  мм, высота  $H_1 = 7$  м,  $H_2 = 6$  м, давление в I резервуаре  $p_1 =$

**Решение:** Определяем площадь отверстия:

$$\omega = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 0,2^2}{4} = 0,0314 \text{ м}^2.$$

Находим расход жидкости:



$$Q = \mu\omega\sqrt{2g\left(z + \frac{p_1 + p_2}{\rho g}\right)} = 0,62 \cdot 0,0314 \sqrt{19,6\left(1 + \frac{(2 - 1,7) \cdot 10^5}{1000 \cdot 9,81}\right)} =$$

$$= 0,62 \cdot 0,0314 \cdot 4,43 \cdot 2 = 0,0175 \text{ м}^3/\text{с}.$$

**Пример 3.** Определить расход воды и скорость ее истечения через круглое незатопленное отверстие диаметром  $d = 0,2$  м, если  $H = 4$  м,  $\mu = 0,62$ ,  $\varphi = 0,97$ . Скоростным напором пренебречь.

**Решение:** Определяем скорость истечения:

$$v = \varphi\sqrt{2gH} = 0,97\sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 4} = 8,58 \text{ м/с}.$$

Площадь отверстия

$$\omega = 0,78 \cdot 0,2^2 = 0,0314 \text{ м}^2.$$

Определяем расход воды через отверстие:

$$Q = \mu\omega\sqrt{2gH} = 0,62\sqrt{2 \cdot 9,81} \cdot 0,0314 = 0,172 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Контрольные вопросы

1. Что понимается под тонкой стенкой, малым отверстием, большим отверстием?
2. Какие виды сжатия струи при истечении из отверстия в тонкой стенке вы знаете?
3. Какими коэффициентами характеризуется истечение жидкости из отверстий и какова между ними аналитическая связь?
4. Чем отличается формула расхода жидкости для незатопленного и затопленного отверстий?
5. Какие технические задачи решаются на основе гидравлического расчёта истечения жидкости?
6. По какой зависимости определяется коэффициент скорости опытным путём?
7. Какие поправочные коэффициенты применяются при расчёте  $\varphi$  и  $\mu$  при несовершенном сжатии?
8. Какая задача решается при опорожнении ёмкостей и от каких факторов зависит её решение?

#### 4.4. Истечение жидкости через насадки

Насадком называется короткая труба длиной  $\ell = (3-4)d$  цилиндрической, конической и коноидальной форм. Присоединение насадка к отверстию в тонкой стенке изменяет вытекающий из сосуда расход и оказывает влияние на время опорожнения сосуда, дальность полета струи и т.д. Аналогичное явление наблюдается при истечении из отверстия в толстой стенке, т.е. когда  $\delta = (3-4)d$ .

Характер течения жидкости в различных насадках имеет много общего. Рассмотрим истечения жидкости через внешний цилиндрический насадок (насадок Вентури) (рис. 4.5).

При наличии острой кромки возникает сжатие струи на входе в насадок. Максимальное сжатие образуется на расстоянии от плоскости входа в отверстие, равном  $0,5d$ .

Площадь сжатого сечения потока  $\omega_c = \varepsilon\omega$ , причем числовое значение коэффициента сжатия зависит от условий входа. В частности, для рассматриваемого случая (круглое отверстие с острой кромкой) приближенно можно принять  $\varepsilon = 0,64$ .

После сжатого сечения струя расширяется, заполняя поперечное сечение полностью, выходя из него полным сечением. Рассмотрим соотношение скоростей и давлений в сжатом сечении и на выходе из насадка (см. рис. 4.5). Давление на выходе из насадка равно атмосферному, а скорость – меньше скорости в сжатом сечении. Тогда, согласно уравнению Бернулли, давление в сжатом сечении должно быть меньше атмосферного, т.е. в сжатом сечении образуется вакуум.

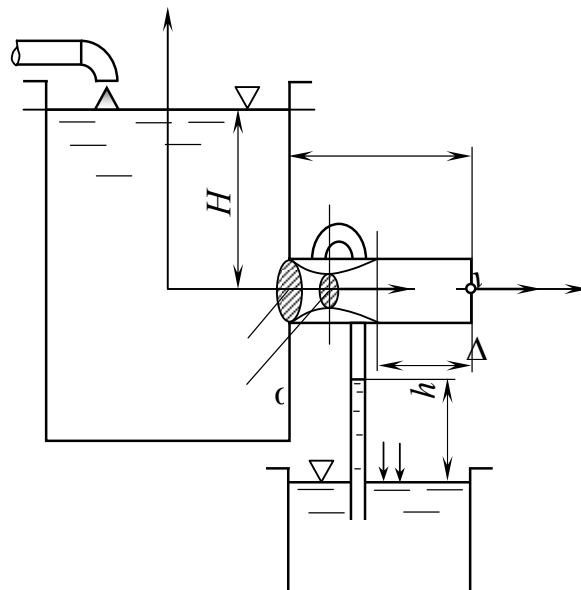


Рис. 4.5

Наличие в сжатом сечении вакуума существенно меняет картину истечения. В этом случае жидкость из резервуара изливается в область вакуума, что сопоставимо с увеличением напора и объясняет увеличение

действительного расхода. Для доказательства найдем расчетные зависимости для скорости истечения и расхода жидкости через насадок.

Запишем уравнение Бернулли для сечений 1–1 и 2–2. Для следующих условий истечения:

1. Движение жидкости в насадке установившееся.

2. Входная кромка круглого отверстия – острая, что приводит к сжатию струи, коэффициент сжатия  $\varepsilon = \frac{\omega_c}{\omega} = 0,64$ .

3. На выходе из насадка струя заполняет все сечение ( $l=3...4d$ ), поэтому  $\varepsilon = 1$ .

4. Распределение давления в сечении 2–2 подчиняется гидростатическому закону:

$$z + \frac{p}{\rho g} = \text{const.}$$

5. Коэффициент Кориолиса  $\alpha = 1$

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + \sum h_{1-2} \quad (4.23)$$

Из анализа уравнения (4.23), в соответствии с расчетной схемой, имеем:

$$z_1 = H; \quad \frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_2}{\rho g} = \frac{p_{\text{атм}}}{\rho g}; \quad \frac{\alpha v_1^2}{2g} = 0;$$

$$\sum h_{1-2} = \lambda \frac{\Delta l}{d} \frac{v^2}{2g} + \xi_{\text{вх}} \frac{v_c^2}{2g} + \frac{(v_c - v_2)^2}{2g},$$

где

$\lambda \frac{\Delta l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}$ –	потери напора на участке $\Delta l$ пренебрежительно малы;
$\xi_{\text{вх}} \frac{v_c^2}{2g}$ –	потери напора на входе до сжатого сечения;
$\frac{(v_c - v_2)^2}{2g}$	потери напора на расширение струи (по теореме Борда).

На основе анализа уравнения Бернулли имеем:

$$H = \frac{v_2^2}{2g} + \xi_{\text{ВХ}} \frac{v_2^2}{2g} + \frac{(v_c - v_2)^2}{2g} \quad (4.24)$$

Применяя уравнение расхода для сжатого и выходного сечений и исключая  $v_c$  из уравнения (4.24), получим

$$v_c \omega_c = \omega_2 v_2 \rightarrow v_c = v_2 \frac{\omega}{\omega_c} = \frac{v_2}{\varepsilon};$$

$$H = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{\xi_{\text{ВХ}}}{\varepsilon^2} \frac{v_2^2}{2g} + \frac{\left(\frac{v_2}{\varepsilon} - v_2\right)^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g} \cdot \left[1 + \frac{\xi_{\text{ВХ}}}{\varepsilon^2} + \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)^2\right].$$

Отсюда

$$v = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\xi_{\text{ВХ}}}{\varepsilon^2} + \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)^2}} \cdot \sqrt{2gH} = \varphi \sqrt{2gH}, \quad (4.25)$$

где  $\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\xi_{\text{ВХ}}}{\varepsilon^2} + \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_{\text{нас}}}}$  – коэффициент скорости.

При  $\xi_{\text{ВХ}} = 0,06$  и  $\varepsilon = 0,64$  получим  $\varphi = 0,82$ .

Общий коэффициент сопротивления для насадки

$$\xi_{\text{нас}} = \frac{1}{\varphi^2} - 1 = \frac{1}{0,82} - 1 = 0,5.$$

Определим расход из уравнения неразрывности (расхода):

$$Q = \omega_c v = \omega_c \varphi \sqrt{2gH}.$$

Учитывая, что  $\varepsilon = \frac{\omega_c}{\omega_2}$ , получим

$$Q = \varepsilon \varphi \omega_2 \sqrt{2gH}.$$

Обозначая  $\varepsilon \varphi = \mu$  и считая, что  $\omega_2 = \omega$ , получим

$$Q = \omega \mu \sqrt{2gH}, \quad (4.26)$$

где  $\mu$  – коэффициент расхода.

е  $\mu$  –

Так как для насадки  $\varepsilon = 1$ , то  $\mu = \varphi = 0,82$ .

Сравнивая коэффициенты расхода и скорости для насадка и отверстия в тонкой стенке, видим, что насадок увеличивает расход и уменьшает скорость истечения.

Действительно, для больших значений  $Re$  отношения

$$\frac{\mu_n}{\mu_0} = \frac{0,845}{0,611} = 1,38;$$

$$\frac{\varphi_n}{\varphi_0} = \frac{0,845}{1} = 0,845,$$

то есть расход через насадок увеличивается более чем на 35% по сравнению со скоростью истечения из отверстия.

#### 4.5. Зависимость коэффициентов истечения от числа Рейнольдса

Полученные выше значения коэффициентов истечения для отверстий и насадков различной формы справедливы для условий, когда влияние вязкости жидкости на истечение не проявляет себя в заметной степени.

При числе  $Re_0 > 100000$  влияние вязкости можно не учитывать:

$$Re_0 = \sqrt{2 \frac{\Delta p}{\rho}} \frac{d}{v} = \sqrt{2gH} \frac{d}{v}. \quad (4.27)$$

При  $Re_0 > 300000$  (область, наиболее характерная для истечения из отверстий воды) практически остается неизменным.

Вместе с тем, коэффициент истечения зависит от числа  $Re$  при истечении воды и других маловязких жидкостей из отверстий малого диаметра.

Кроме того, изменение коэффициента расхода  $\mu$  от числа Рейнольдса необходимо учитывать при определении времени опорожнения сосудов.

При малых значениях  $Re < 10$  время опорожнения определяется по зависимости:

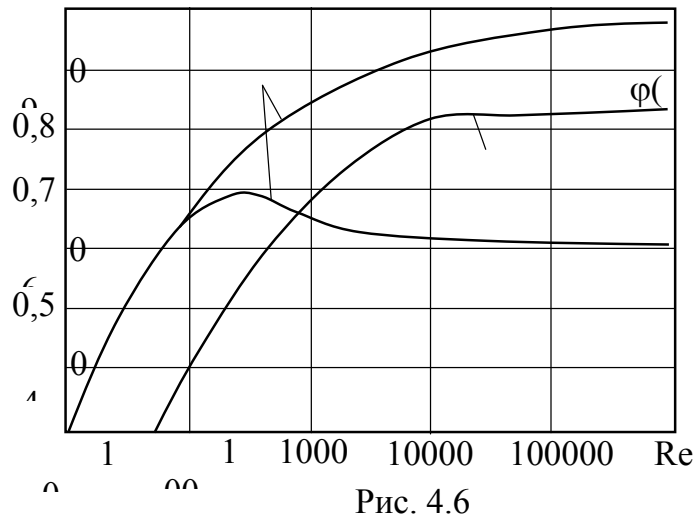
$$t = 29F_v \frac{(H_1/H_2)}{g\omega d}.$$

Для определения значений  $\mu$  при  $Re_n = 100 - 100000$  (при  $\frac{\ell}{d} = 2 - 5$ ) применяется эмпирическая формула

$$\mu = \left[ 1,23 + \frac{58\ell}{Re_n d} \right]^{-1}, \quad (4.28)$$

где  $Re_n$  – число Рейнольдса для насадка.

Из графика (рис. 4.6), построенного по формуле (4.28), видно, что при  $Re_n \rightarrow \infty$  и  $\mu \rightarrow 0,813$ , что незначительно отличается от  $\mu = 0,82$  для цилиндрического насадка.



На графике (см. рис. 4.6) кривая 1 – для истечения из отверстия в тонкой стенке, а кривая 2 – из цилиндрического насадка при  $\frac{\ell}{d} = 3$ . Из графика следует, что при  $Re_n < 1000$  применение насадка уменьшает коэффициент расхода по сравнению с истечением из отверстия при одинаковых  $d$ .

#### 4.6. Вакуум в цилиндрическом насадке

Определим вакуум в сжатом сечении по формуле

$$h_{\text{вак}} = \frac{p_{\text{атм}} - p_{\text{абс}}}{\rho g}, \quad (4.29)$$

где  $p_{\text{абс}}$  – абсолютное давление в данной точке.

Запишем уравнение Бернулли для сечений 1–1 и C–C (см. рис. 4.5):

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1}{2g} = z_c + \frac{p_c}{\rho g} + \frac{v_c^2}{2g} + h_{1-c};$$

здесь  $z_1 = H$ ;

$$\frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_{\text{атм}}}{\rho g};$$

$$\frac{v_1^2}{2g} \approx 0;$$

$$z_c = 0;$$

$$h_{1-c} = \xi_{\text{вх}} \frac{v_c^2}{2g}.$$

Тогда

$$H + \frac{p_{\text{атм}}}{\rho g} = \frac{p_c}{\rho g} + \frac{v_c^2}{2g} + \xi_{\text{вх}} \frac{v_c^2}{2g}.$$

Отсюда

$$h_{\text{вак}} = \frac{(p_{\text{атм}} - p_c)}{\rho g} = (1 + \xi_{\text{вх}}) \frac{v_c^2}{2g} - H. \quad (4.30)$$

Выразим  $v_c = \frac{v}{\varepsilon}$ , а  $v = \varphi \sqrt{2gH}$

или

$$v_c = \frac{\varphi}{\varepsilon} \sqrt{2gH}. \quad (4.31)$$

Подставляя уравнение (4.29) в выражение (4.28), получим

$$h_{\text{вак}} = (1 + \xi_{\text{вх}}) \frac{(\varphi^2 / \varepsilon^2) 2gH}{2g} - H = \left[ (1 + \xi_{\text{вх}}) \frac{\varphi^2}{\varepsilon^2} - 1 \right] H. \quad (4.32)$$

Принимая  $\xi_{\text{вх}} = 0,06$ ;  $\varphi = 0,82$ ;  $\varepsilon = 0,64$ , получим

$$h_{\text{вак}} \approx 0,75H_{\text{ом.ммст}}.$$

Из этой формулы можно определить предельное значение напора  $H$ .

Так как максимальный вакуум равен при  $h_{\text{вак}} = \frac{p_{\text{атм}}}{\rho g}$ , то

$$H_{\text{пр}} \approx 1,3 \frac{p_{\text{атм}}}{\rho g}.$$

Если принять предельное значение вакуума равным 10 м, то

$$H_{\text{пр}} = \frac{h_{\text{вак}}}{0,75} = \frac{10}{0,75} = 13,33 \text{ м}.$$

Однако в действительности, вследствие вскипания жидкости и нарушения из-за этого сплошности течения струи жидкости, нормальная работа насадка нарушается раньше, а именно: при  $h = 7$  м. Отсюда реальным предельным напором будет напор  $H_{\text{пр}} = \frac{7}{0,75} = 9,3$  м, а не 13,33.



#### 4.7. Практическое применение насадков

Рассмотрим область применения часто встречающихся насадков, а также их достоинства и недостатки (рис. 4.7-4.12).

Внешний цилиндрический насадок применяется для получения компактной дальнобойной струи (рис. 4.7). Как насадки такого типа работают водовыпуски в плотинах, трубы под насыпями и т.д. Значения коэффициентов для воды равны:  $\varphi = 0,82$ ,  $\mu = 0,82$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\xi = 0,5$ .

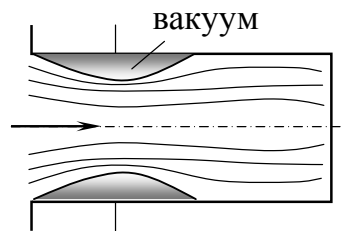


Рис. 4.7

Внутренний цилиндрический насадок в силу конструктивных причин может применяться вместо внешнего цилиндрического насадка. В этом случае некоторые линии тока изменяют свое направление на  $180^\circ$  (рис. 4.8).

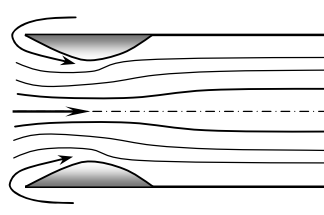


Рис. 4.8

Сжатие потока и потери энергии в насадке больше, чем для внешнего цилиндрического насадка, т.е.

$$\mu = 0,71; \quad \varphi = 0,71; \quad \varepsilon = 1; \quad \xi_n = 1,0.$$

Конические сходящиеся насадки применяются для получения больших выходных скоростей, увеличения силы и дальности полета струи жидкости в пожарных брандспойтах, в форсунках для подачи топлива; гидромониторах для размыва грунта, фонтанных соплах, соплах активных гидравлических турбин и т.д. (рис. 4.9). При углах конусности  $\theta = (12-14^\circ)$  коэффициент расхода достигает максимального значения порядка  $\mu = 0,94 \dots 0,95$ , а коэффициент скорости  $\varphi = 0,96$ , так как из-за сужающихся направляющих стенок струя выходит из насадка с небольшим сжатием ( $\varepsilon = 0,98 \dots 0,99$ ).

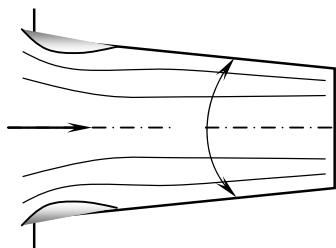


Рис. 4.9

Конические расходящиеся насадки применяются в коротких водоводах для наполнения шлюзовых камер, в эрлифтах и других установках, где необходим значительный всасывающий эффект для увеличения расхода (рис. 4.10).

Такие насадки применяются в механизмах для замедления подачи смазочных веществ.

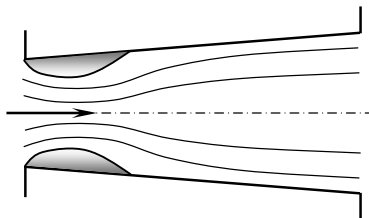


Рис. 4.10

В насадке после сжатого сечения расширение потока больше, чем в цилиндрической насадке, что приводит к большим потерям напора и уменьшению скорости.

При этом расход увеличивается благодаря увеличению расчетного выпускного сечения.

Диаметр выходного сечения:

$$D = d + 2\ell \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \quad (4.33)$$

где  $d$  — диаметр входного отверстия;

—

$\theta$  — угол конусности насадка;

$\ell$  — длина насадка.

Причем сечение насадка может доходить до  $9d$ .  $\ell = 9d$  и  $\theta = 8^\circ$ , коэффициенты расхода и скорости  $\mu = \varphi = 0,45$ .

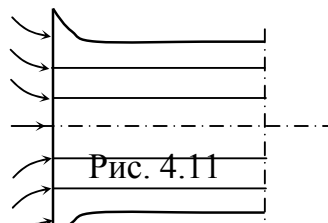
Площадь сечения на выходе по формуле (4.31) в этом случае в 5,1 раза больше площади отверстия. Коэффициент расхода такого насадка в

$$\frac{\varphi_{\text{ц}}}{\varphi_{\text{к}}} = \frac{0,62}{0,45} = 1,38 \text{ раза меньше коэффициента расхода отверстия.}$$

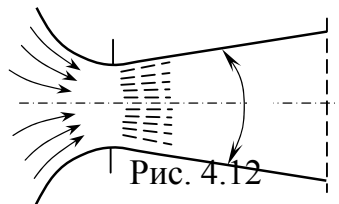
С учетом этого, согласно формуле  $Q = \mu \omega \sqrt{2gH}$ , при равнозначных условиях расход через конический расходящийся насадок в  $\frac{5,1}{1,38} = 3,7$  раза больше, чем через отверстия в тонкой стенке диаметром  $d$ .

В технике для различных целей применяют и другие насадки. Коноидальный насадок (рис. 4.11). имеет форму входной части, близкую к форме вытекающей струи.

Гидравлическое сопротивление в насадке небольшое, поэтому  $\mu = \varphi = 0,97 \dots 0,98$ ,  $\mu = 1$ ,  $\xi_n = 0,06$ . При особенно тщательном изготовлении и гладких стенках можно получить  $\mu = \varphi = 0,995$ .



Применяется также комбинация двух насадков: коноидального (сопло) и конического (диффузора) (рис. 4.12).



Приставка диффузора к соплу влечет за собой снижение давления в узком месте насадка, что приводит к увеличению расхода и скорости через насадок. При том же диаметре узкого сечения 1–1 и том же напоре диффузорный насадок позволяет увеличить расход в 2,5 раза по сравнению с соплом. Они применяются при малых напорах ( $H = 1-4$  м), так как в узком месте (сечение 1–1) возникает кавитация, что увеличивает сопротивление насадка (см. рис. 4.12).

Коэффициент расхода определяется по формуле (рис. 4.13)

$$\mu_1 = \frac{Q}{S_1 \sqrt{2gH}},$$

где  $S_1$  – площадь узкого сечения.

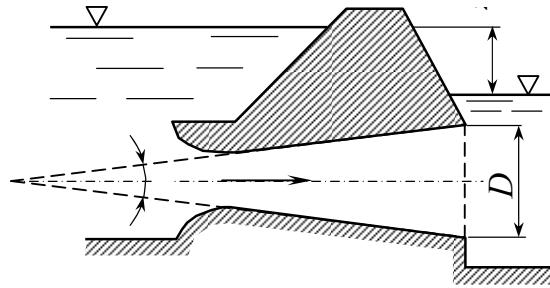


Рис. 4.13

### Примеры

**Пример 1.** Определить расход и скорость истечения воды из круглого отверстия диаметром  $d = 0,01$  м в боковой стенке резервуара больших размеров. Напор воды над центром отверстия  $H = 1$  м, температура воды  $t = 20$  °С ( $\nu = 1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ).

**Решение:** Число Рейнольдса, характеризующее истечение:

$$Re = \frac{\sqrt{2gH} d}{\nu} = \frac{\sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 0,01}}{1 \cdot 10^{-6}} = 44300.$$

По рис. 4.6 находим  $\mu$  и  $\varphi$  при  $Re = 44300$ ,  $\mu = 0,62$ ,  $\varphi = 0,95$  и определяем скорость истечения воды через отверстие:

$$v = \varphi \sqrt{2gH} = 0,95 \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 1} = 4,2 \text{ м/с}.$$

Расход вытекающей жидкости через отверстие

$$Q = \mu \omega \sqrt{2gH} = 0,62 \frac{\pi 0,01^2}{4} \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 1} \approx 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с}.$$

**Пример 2.** Определить диаметры: в начале и в конце водовыпуска, имеющего форму конически расходящегося насадка, работающего в затопленном режиме (см. рис. 4.13), если  $Q = 0,5 \text{ м}^3/\text{с}$ ;  $\mu = 0,5$ ,  $z = 0,25$  м, длина насадка  $\ell = 4$  м.

**Решение:** Расход через насадок

$$Q = \mu \omega \sqrt{2gz}.$$

Отсюда

$$Q = \mu \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{2gz},$$

находим диаметр:

$$D = \sqrt{\frac{4Q}{\pi\mu\sqrt{2gz}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0,5}{\pi \cdot 0,5 \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 0,25}}} = 0,76 \text{ м.}$$

Приняв угол конусности  $\theta = 6^\circ$ , найдем диаметр входной части насадки (рис. 4.14)

$$\begin{aligned} d &= D - 2l \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = 0,76 - 2 \cdot 4 \cdot \operatorname{tg} 3^\circ = \\ &= 0,76 - 2 \cdot 4 \cdot 0,054 = 0,76 - 0,43 \approx 0,33 \text{ м.} \end{aligned}$$

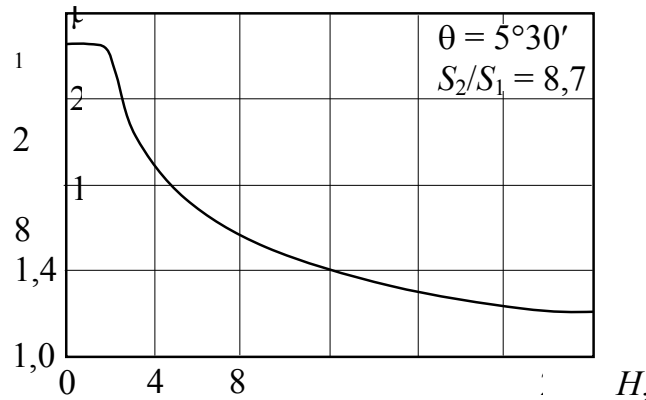


Рис. 4.14

### Контрольные вопросы

1. Что называется насадком и какие насадки вы знаете?
2. При каких условиях образуется сжатое сечение и на каком удалении от входа?
3. Почему в насадках коэффициент сжатия струи  $\varepsilon = \frac{\omega_c}{\omega}$  принимается равным единице?
4. Чем отличаются коэффициенты  $\mu$  и  $\varphi$  для отверстия?
5. Как учитывается влияние вязкости на коэффициенты  $\mu$  и  $\varphi$ ?
6. Что такое предельное (критическое) значение напора при истечении жидкости через насадки и почему действительное значение меньше критического?

7. Назовите область применения цилиндрических насадков и дайте им краткую характеристику.

8. Назовите область применения конических насадков и дайте им краткую характеристику.

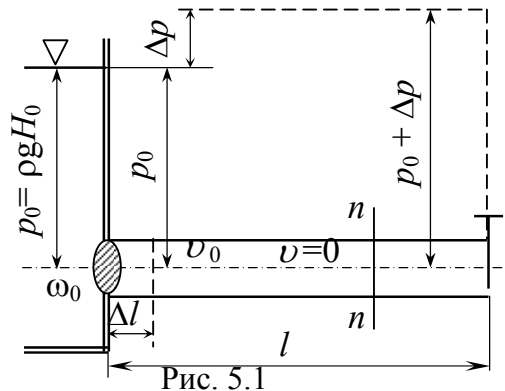
## 5. ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ УДАР В ТРУБАХ

### 5.1. Физическая сущность гидравлического удара

Гидравлическим ударом в трубах называется резкое увеличение давления при очень быстром (практически мгновенном) уменьшении скорости движения жидкости (например, при очень быстром закрытии пробкового крана).

Всестороннее изучение гидравлического удара началось в связи с частыми авариями на новых линиях Московского водопровода, построенных в конце XIX века. Причины аварии исследовал выдающийся русский ученый Н.Е. Жуковский, который впервые разработал теорию гидроудара.

Основная схема физического процесса явления гидравлического удара по теории Н.Е. Жуковского заключается в следующем (рис. 5.1).



Будем считать жидкость не вязкой, а сжимаемой и подчиняющейся закону Гука, а трубопровод абсолютно жестким. Физический процесс, протекающий при гидравлическом ударе, представляет собой четыре фазы преобразования энергии движущейся жидкости.

**Первая фаза.** При внезапном и полном закрытии задвижки в конце трубопровода вся движущаяся в нем жидкость должна остановиться. Реальная жидкость, обладающая свойством упругости, останавливается постепенно, сжимаясь от слоя к слою, начиная от конца трубопровода. Фронт остановившейся жидкости (сечение  $n-n$ ) будет перемещаться от задвижки к резервуару. В остановившемся объеме между задвижкой и сечением  $n-n$

возникает дополнительное давление  $\Delta p$ . Скорость перемещения этого фронта называется скоростью распространения ударной волны и обозначается символом  $C_v$ :

$$C_v = \frac{l}{T},$$

где  $l$  и  $T$  – соответственно длина трубы и длительность первой фазы.

Таким образом, упругая деформация сжатия и повышения давления распространяется вверх по течению и за время  $T$  достигает конца трубы. При этом освободившееся пространство на расстоянии  $\Delta l$  заполняется жидкостью из резервуара.

В конце первой фазы вся жидкость в трубе неподвижна ( $v_0 = 0$ ) и находится под давлением:  $p + \Delta p$ .

Плотность жидкости при этом увеличивается до  $\rho' = \rho + \Delta \rho$ .

**Вторая фаза.** Начало второй фазы совпадает с концом первой. Жидкость в трубе сжата, но не уравновешена давлением в резервуаре, где давление  $p$ . Поэтому жидкость в трубе начинает расширяться в сторону резервуара. Сначала приобретают движение слои жидкости, близкие к резервуару, а затем фронт спада давления  $n-n$  станет перемещаться от резервуара к задвижке со скоростью  $C_v$ .

К концу второй фазы вся жидкость в трубе окажется в движении со скоростью  $v$  в сторону резервуара и давление в трубе восстановится до первоначального.

**Третья фаза.** (Фаза растяжения и остановки движения). В начальный момент вся жидкость движется в обратную сторону и стремится оторваться от задвижки.

Если отрыва не произойдет, то начнется растяжение жидкости с дальнейшим понижением давления до  $p'' = p - \Delta p$ . В конце третьей фазы вся жидкость останавливается и находится под действием пониженного давления.

Это состояние оказывается также неуравновешенным, т.к. давление в резервуаре равно  $p$ , а в трубе  $p - \Delta p$ .

**Четвертая фаза.** (Фаза восстановления движения до состояния, имевшего место перед закрытием задвижки). В начале четвертой фазы жидкость из резервуара начнет втекать в трубку со скоростью  $v_0$  и давление будет повышаться до  $p$ . Фронт первоначального давления  $n-n$  будет перемещаться в сторону задвижки со скоростью распространения ударной волны  $C_v$ . К концу четвертой фазы скоростью движения по всей длине трубы будет равна  $v_0$ , а давление  $p$ .

Так как задвижка закрыта, то, начиная с конца четвертой фазы, процесс гидравлического удара будет повторяться.

В реальных условиях, когда существуют гидравлические сопротивления и упругие деформации стенок трубопровода, процесс гид-

равлического удара будет более сложным и затухающим. При этом наиболее опасным является первое повышение давления (рис. 5.2).

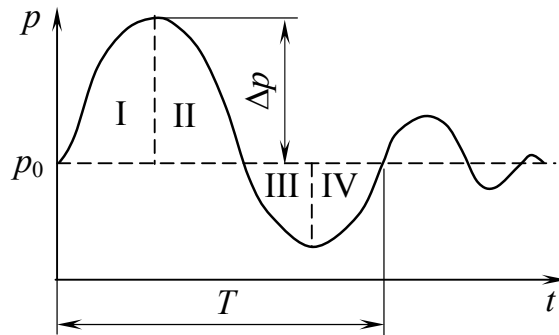


Рис. 5.2

Время одного цикла, включающего повышение и понижение давления, называется фазой удара  $T$ . Считая скорость ударной волны при повышении и понижении давления одинаковой, определим фазу удара:

$$T = \frac{2l}{C_v}.$$

Если время закрытия задвижки меньше или равно фазе удара ( $t_3 \leq T$ ), то удар называется прямым.

При  $t_3 \geq T$  не вся кинетическая энергия переходит в потенциальную энергию давления и повышение давления при тех же условиях меньше, чем при прямом ударе.

Такой удар называется непрямым.

Так как характеристики движения жидкости при гидравлическом ударе изменяются с течением времени, то такой процесс называется неустановившимся.

Гидравлический удар может возникнуть при внезапной остановке насоса, подающего воду по нагнетательному трубопроводу в резервуар (рис. 5.3).

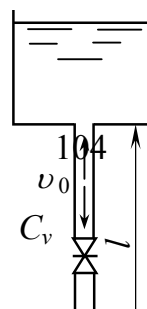




Рис. 5.3

После выключения насоса жидкость некоторое время будет двигаться по инерции в сторону резервуара со скоростью  $v_0$  и в трубопроводе образуется пониженное давление. Затем начинается обратное движение жидкости из резервуара в область пониженного давления. В трубопроводе и задвижке давление повысится подобно тому, как это имело место при прямом ударе.

## 5.2. Определение ударного давления и скорости распространения ударной волны

Рассмотрим гидравлический удар в трубопроводе при внезапном (мгновенном) закрытии задвижки в конце трубопровода с учетом реальных условий движения жидкости, а именно: жидкость сжимаема, а стенки трубопровода обладают упругими свойствами.

За бесконечно малый промежуток времени  $dt$  после закрытия задвижки движение жидкости прекращается на расстоянии  $C_v dt$  от задвижки. На этом бесконечно малом участке трубопровода произойдет повышение давления на величину  $\Delta p$  (рис. 5.4).

Определим величину  $\Delta p$  с помощью закона изменения количества движения.

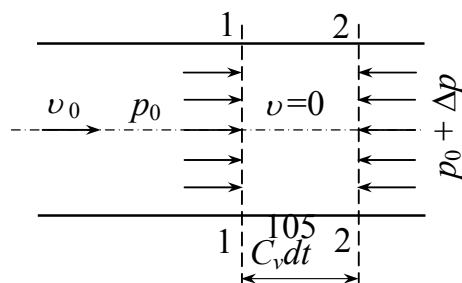


Рис. 5.4

До закрытия задвижки количество движения в рассматриваемом объеме:

$$\text{КД} = \rho \omega C_v dt v_0, \quad (5.1)$$

где  $\omega$  – площадь сечения трубы;

$\rho$  – плотность жидкости;

$v_0$  – скорость движения жидкости;

$C_v$  – скорость распространения ударной волны.

После закрытия задвижки скорость и количество движения уменьшились до нуля, т.е. в этом случае изменение количества движения стало равно начальному количеству движения.

Это изменение количества движения должно быть равно импульсу действующих сил.

Учитывая, что давление в сечении 1–1 равно  $p_0$ , а в сечении 2–2 повысилось до  $p_0 + \Delta p$ , находим импульс действующих сил в виде

$$\text{ИС} = (p_0 + \Delta p) \omega dt - p_0 \omega dt = \Delta p \omega dt \quad (5.2)$$

Запишем закон изменения количества движения с учетом выражений (5.1) и (5.2):

$$\rho \omega C_v dt v_0 = \Delta p \omega dt .$$

Отсюда

$$\Delta p = \rho v_0 C_v . \quad (5.3)$$

Формула (5.3) получена Н.Е. Жуковским и позволяет определить повышение давления при прямом гидравлическом ударе при известной скорости распространения ударной волны  $C_v$ .

При абсолютно жестких стенках трубопровода скорость распространения ударной волны  $C_v$  равна скорости распространения звука в воде ( $C_v = 1425$  м/с).

Определим скорость распространения ударной волны с учетом деформации стенок трубопровода и упругих свойств жидкости из условия сохранения массы жидкости при гидравлическом ударе.

До удара между сечениями 1–1 и 2–2 масса жидкости

$$m = \rho \omega C_v dt . \quad (5.4)$$

За время  $dt$  после закрытия задвижки в результате некоторого сжатия жидкости (т.е. увеличения ее плотности) и расширения трубы между сечениями 1–1 и 2–2 накопилась масса

$$m' = (\rho + d\rho)(\omega + d\omega)C_v dt. \quad (5.5)$$

Накопленная масса образуется в трубопроводе в конце первой фазы в объеме  $\omega \Delta \ell$  (см. рис 5.1):

$$m_0 = \rho \omega v_0 dt. \quad (5.6)$$

Условие сохранения массы при гидравлическом ударе с учетом выражений (5.4)-(5.5) и (5.6) запишется в виде  $m_0 = m' - m$ :

$$\rho \omega v_0 dt = (\rho + d\rho)(\omega + d\omega)C_v dt - \rho \omega C_v dt. \quad (5.7)$$

Сокращая выражение (5.7) на  $dt$  и пренебрегая бесконечно малыми величинами второго порядка, получим

$$\rho \omega v_0 = \rho C_v d\omega + \omega C_v d\rho = C_v (\rho d\omega + \omega d\rho). \quad (5.8)$$

Выражение (5.8) является законом сохранения массы при гидравлическом ударе, из которого находим скорость  $C_v$  в виде:

$$C_v = \frac{v_0}{\frac{d\omega}{\omega} + \frac{d\rho}{\rho}}. \quad (5.9)$$

Из выражения (5.9) видно, что скорость ударной волны зависит от деформации трубы  $\frac{d\omega}{\omega}$  и сжатия  $\frac{d\rho}{\rho}$ , которые характеризуются упругими свойствами материала трубы и жидкости.

Представим выражение для относительной деформации площади трубы в виде

$$\frac{d\omega}{\omega} = \frac{d\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{2dD}{D}. \quad (5.10)$$

Из механики упругих тел известно, что относительная деформация  $\frac{dD}{D}$  может быть выражена в зависимости от вызываемого ею растягивающего напряжения в материале трубы  $\Delta \sigma$  и модуля его упругости  $E_{тр}$  по закону Гука:

$$\frac{dD}{D} = \frac{\Delta \sigma}{E_p}. \quad (5.11)$$

Напряжение, вызванное ударной волной в стенках трубы, может быть определено по с формуле

$$\Delta\sigma = \frac{\Delta p D}{2\delta}, \quad (5.12)$$

где  $\Delta p$  – давление в гидравлическом ударе;

$\delta$  – толщина стенки трубы;

$D$  – диаметр трубы.

С учетом зависимостей (5.11) и (5.12) выражение (5.10) приводится к виду:

$$\frac{d\omega}{\omega} = \frac{2dD}{D} = \frac{2\Delta\sigma}{E_{\text{тр}}} = \frac{2\Delta p D}{2\delta E_{\text{тр}}} = \frac{\Delta p D}{\delta E_{\text{тр}}}. \quad (5.13)$$

Относительное изменение плотности жидкости  $\frac{d\rho}{\rho}$  зависит от повышения давления  $\Delta p$  и модуля объемной упругости жидкости  $E_{\text{ж}}$ :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\Delta p}{E_{\text{ж}}}. \quad (5.14)$$

Подставим выражения (5.13) и (5.14) в формулу (5.9) и получим

$$C_v = \frac{v_0}{\frac{\Delta p D}{E_{\text{тр}}\delta} + \frac{\Delta p}{E_{\text{ж}}}}. \quad (5.15)$$

Рассмотрим физический смысл величин, находящихся под корнем в правой части формулы (5.15).

Если гидравлический удар, происходящий в трубе из абсолютно неупругого материала  $E_{\text{тр}} = \infty$ , то

$$C'_v = \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho}{E_{\text{ж}}}}} = \sqrt{\frac{E_{\text{ж}}}{\rho}}, \quad (5.16)$$

где  $C'_v$  – скорость распространения упругих деформаций (ударной волны) в жидкости, м/с.

Из физики известно, что выражение  $\sqrt{\frac{E_{\text{ж}}}{\rho}}$  является скоростью звука в жидкой среде.

Для воды  $C_v = 1425$  м/с.

В другом предельном случае при  $E_{\text{ж}} = \infty$  можно считать, что гидравлический удар происходит в трубе, по которой движется абсолютно неупругая жидкость. Тогда:

$$C_v'' = \frac{1}{\sqrt{\frac{D}{\delta} \frac{\rho}{E_{тр}}}} = \sqrt{\frac{\delta E_{тр}}{\rho D}}. \quad (5.17)$$

Можно также считать, что  $C_v''$  является скоростью распространения упругих деформаций (ударной волны) исключительно по телу трубы.

С учетом формул (5.16) и (5.17) преобразуем формулу (5.15) к виду:

$$C_v = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(C_v')^2} + \frac{1}{(C_v'')^2}}} = \frac{C_v'}{\sqrt{1 + \frac{C_v'^2}{C_v''^2}}} \quad (5.18)$$

или

$$C_v = \frac{\sqrt{\frac{E_{ж}}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{D}{\delta} \cdot \frac{E_{ж}}{E_{тр}}}}. \quad (5.19)$$

Учитывая, что  $\sqrt{\frac{E_{ж}}{\rho}} = 1425$  м/с для воды, получим, м/с:

$$C_v = \frac{1425}{\sqrt{1 + \frac{D}{\delta} \cdot \frac{E_{ж}}{E_{тр}}}}. \quad (5.20)$$

Подставим выражение (5.20) в формулу (5.3) и получим, Па:

$$\Delta p = \frac{1425 \rho v_0}{\sqrt{1 + \frac{D}{\delta} \cdot \frac{E_{ж}}{E_{тр}}}}. \quad (5.21)$$

Отношение  $\frac{E_{ж}}{E_{тр}}$  для воды в зависимости от материала стенки трубы принимается по табл. 5.1.

Таблица 5.1

Вид труб	$\frac{E_{ж}}{E_{тр}}$
Стальные	0,01
Чугунные	0,02
Асбестоцементные	0,11
Полиэтиленовые	1...1,45

Бетонные	0,10...0,14
Резиновые	333...1000

Для железобетонных труб с учетом их армирования

$$\frac{E_{ж}}{E_{тр}} = \frac{0,1...0,14}{1 + 9,5 \frac{f}{\delta}}, \quad (5.22)$$

где  $f$  – площадь сечения кольцевой арматуры на 1 м длины стенки трубы.

Обычно  $\frac{f}{\delta} = 0,015...0,05$ .

### 5.3. Способы гашения и примеры использования гидравлического удара

Разработка способов гашения гидравлического удара основана на теоретических закономерностях явления. Впервые Н.Е. Жуковский предложил способы устранения или незначительного уменьшения гидравлического удара.

Так, в водопроводной сети стали использоваться всевозможные вентили вместо «пробковых» кранов. За счет более медленного перекрытия трубопровода значительно снижается эффект гидравлического удара.

В системах, где это сделать невозможно, сооружаются специальные открытые емкости, так называемые уравнильные резервуары.

При возникновении гидравлического удара вода из водовода через отверстие в диафрагме поступает в полость резервуара и тем самым снижает уровень давления в ударной волне.

В водоводах устанавливают специальные клапаны или предохранительные диафрагмы. По длине водовода монтируются воздушные колпаки, которые амортизируют повышение давления.

На насосных станциях в начале напорных трубопроводов устанавливаются противоударные аппараты. При остановке насоса часть воды выливается через клапан без повышения давления, после чего клапаны закрываются.

Имеются случаи применения разрушительной силы гидравлического удара в некоторых устройствах, например, для подъема воды с помощью гидравлического тарана (рис. 5.5).

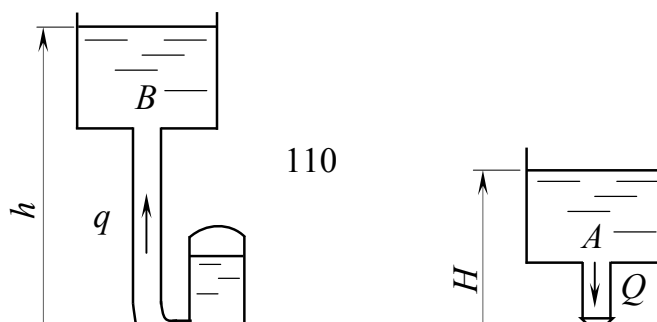


Рис. 5.5

Гидравлический таран работает автоматически при подаче воды  $Q$  из резервуара  $A$ . Причем большая часть воды  $Q - q$  будет сливаться наружу, а меньшая часть  $q$  – в резервуар  $B$ .

КПД гидравлического тарана определяется как отношение полезной мощности к затраченной:

$$\eta = \frac{\rho g q (h - H)}{\rho g (Q - q) H} = \frac{q (h - H)}{(Q - q) H}. \quad (5.23)$$

КПД зависит от отношения  $\frac{h}{H}$ . Так, при изменении  $\frac{h}{H}$  от 2 до 10  $\eta$  изменяется от 0,9 до 0,5.

Гидравлические тараны, выпускаемые промышленностью, могут поднимать воду на высоту до 60 м с расходом 20-22 л/мин.

Они просты в эксплуатации и могут непрерывно работать длительное время, снабжая водой небольшие поселки и предприятия.

## Примеры

**Пример 1.** По стальной трубе диаметром  $d=500$  мм и толщиной стенок  $\delta=10$  мм подается вода со скоростью 2,5 м/с. Пьезометрический напор перед открытой задвижкой равен 4 Ом. Определить повышение давление при быстром закрытии задвижки и полный напор  $H$ .

**Решение:** Скорость ударной волны  $C_v$  определяем по формуле (5.20)

$$C_v = \frac{1425}{\sqrt{1 + \frac{D E_{ж}}{\delta E_{тр}}}} = \frac{1425}{1 + \frac{500}{10} \cdot 0,01} = 1391 \text{ м/с.}$$

Повышение давления найдем по формуле (5.3)

$$\Delta p = \rho C_v v_0 = 1000 \cdot 1391 \cdot 2,5 = 3,48 \text{ МПа}$$

или

$$\Delta H = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{3,48 \cdot 10^6}{9,81 \cdot 10^3} \approx 355 \text{ м.}$$

**Пример 2.** Определить расход в напорном трубопроводе гидротарана, если рабочий расход  $Q = 30$  л/с, напор  $H = 3$  м, высота подачи  $h = 21$  м, КПД  $= 0,6$ .

**Решение:** Расход вычисляем по формуле (5.23):

$$\eta = \frac{q(h - H)}{(Q - q)H},$$

отсюда

$$q = \frac{\eta H Q}{(h - H) + \eta H} = \frac{0,6 \cdot 3 \cdot 30}{(21 - 3) + 0,6 \cdot 3} = 2,74 \text{ л/с.}$$

Излив через клапан равен:

$$Q - q = 30 - 2,74 = 27,26 \text{ л/с.}$$

### Контрольные вопросы

1. Что называется гидравлическим ударом?
2. Каковы причины возникновения гидравлического удара?
3. Какие способы применяются при гашении гидравлического удара?
4. Какие устройства используются в технике для этой цели? Приведите примеры.
5. Как влияет модуль упругости стенок трубопровода на давление гидравлического удара?
6. Напишите и поясните формулу повышения давления при прямом гидравлическом ударе?
7. От чего зависит скорость распространения ударной волны при гидравлическом ударе?
8. Как влияет время закрытия задвижки на повышение давления при гидравлическом ударе?
9. Для каких целей применяется гидротаран?



## 6. ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ТРУБОПРОВОДОВ

### 6.1. Классификация трубопроводов

Рассмотрим классификацию трубопроводов по следующим характерным признакам:

1. По функциональному назначению трубопроводы подразделяют на
  - всасывающие;
  - нагнетательные.
2. С конструктивной точки зрения трубопроводы подразделяют на:
  - простые;
  - сложные;
  - короткие;
  - длинные.

**Простыми** называют трубопроводы, не имеющие ответвлений и обслуживающие только одну точку  $\Rightarrow x$ .

Причем, диаметр трубы, а также расход жидкости на всей длине трубы остается неизменным.

**Сложные** трубопроводы делятся на тупиковые, параллельные и кольцевые.

**Тупиковые** состоят из магистрального (главного) трубопровода, от которого в разные стороны отходят ответвления к потребителям.

**Параллельные** состоят из нескольких параллельно проложенных трубопроводов, связанных между собой перемычками с регулирующими задвижками.

**Кольцевые** представляют собой замкнутую сеть труб, что обеспечивает подачу воды в любом направлении.

При аварии на каком-либо участке подача воды потребителю не прекращается.

**Короткими** называют трубопроводы, которые имеют значительные местные сопротивления по сравнению с линейными (путевыми).

**Длинными** называют трубопроводы, у которых доминируют потери напора по длине трубопровода; местными потерями и скоростным напором пренебрегают.

## 6.2. Система уравнений и задачи гидравлического расчета трубопроводов

Гидравлический расчет трубопроводов основан на следующих уравнениях, формулах и зависимостях:

– уравнение Бернулли для потока вязкой жидкости

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g} + h_v = H = \text{const}; \quad (6.1)$$

– уравнение неразрывности для установившегося потока жидкости (уравнение расхода):

$$Q = v\omega = \text{const}; \quad (6.2)$$

– формула Дарси-Вейсбаха для учета потерь на трение (по длине трубопровода):

$$h_\ell = \lambda \frac{\ell}{d} \frac{v^2}{2g}; \quad (6.3)$$

– формула для учета местных потерь:

$$h_M = \xi_M \frac{v^2}{2g}; \quad (6.4)$$

– формула Шези при расчете длинных трубопроводов:

$$v = c\sqrt{iR} \quad \text{или} \quad Q = \omega c\sqrt{iR}, \quad (6.5)$$

где коэффициент Шези;

$$c = \frac{1}{n} R^y$$

$n$  – коэффициент шероховатости;

$R$  – гидравлический радиус;

$y$  – показатель степени,  $y = f(n, R)$ .

Обозначим в формуле (6.5) через  $K = \omega c\sqrt{iR}$ , получим

$$Q = K\sqrt{i}, \quad (6.6)$$

где  $K$  – расходная характеристика (модуль расхода), представляющая собой расход при гидравлическом уклоне, равном единице;

– формула для определения гидравлического уклона (удельных потерь напора по длине):

$$i = \frac{h_\ell}{\ell} = \frac{v^2}{c^2 R} = \frac{Q^2}{\omega^2 c^2 R} \quad (6.7)$$

или по формуле Дарси-Вейсбаха (6.3):

$$i = \frac{h_\ell}{\ell} = \frac{\lambda \frac{\ell}{d} \frac{v^2}{2g}}{\ell} = \frac{\lambda}{d} \frac{v^2}{2g}.$$

Заменяя скорость  $v$  на расход  $Q$ , из уравнения расхода  $Q = v\omega$  получим

$$i = \frac{16\lambda Q^2}{2g\pi^2 d^5} = \frac{8\lambda Q^2}{g\pi^2 d^5}. \quad (6.8)$$

Обозначим  $A = \frac{8\lambda}{g\pi^2 d^5}$  – удельное сопротивление трубопровода, получим

$$i = AQ^2. \quad (6.9)$$

Тогда

$$h_\ell = i\ell = AQ^2\ell = SQ^2, \quad (6.9a)$$

где  $S$  – линейное сопротивление трубопровода.

Найдем связь между  $K$  и  $A$  из формул (6.6 и 6.8):

$$K = \frac{Q}{\sqrt{i}} \text{ или } K^2 = \frac{Q^2}{i}.$$

Подставляя значение  $i$  из формулы (6.8), получим

$$K^2 = \frac{Q^2}{\frac{8\lambda}{g\pi^2 d^5} Q^2} = \frac{g\pi^2 d^5}{8\lambda} = \frac{1}{A}. \quad (6.10)$$

Из выражений (6.10 и 6.9), находим

$$i = \frac{Q^2}{K^2} \ell. \quad (6.11)$$

Тогда потери по длине определяются по формуле

$$h_\ell = i\ell = \frac{Q^2}{K^2} \ell. \quad (6.12)$$

Учитывая, что  $i = \frac{h_\ell}{\ell}$ , получим

$$Q = K \sqrt{\frac{h_\ell}{\ell}} = \frac{K}{\sqrt{\ell}} \sqrt{h_\ell}.$$

Обозначим  $P = \frac{K}{\sqrt{\ell}}$ , получим:

$$Q = P\sqrt{h_{\text{тр}}}, \quad (6.13)$$

где  $P$  – проводимость, выражающая собой расход жидкости при  $h_{\text{тр}} = P - 1$ .

Сравнивая выражения (6.9) и (6.13), найдем связь между  $P$  и  $S$ .

Из выражения (6.9а) имеем  $Q = \sqrt{\frac{h_{\ell}}{S}}$ ,

тогда:

$$P\sqrt{h_{\ell}} = \sqrt{\frac{h_{\ell}}{S}} \quad \text{или} \quad P = \frac{1}{\sqrt{S}}; \quad S = \frac{1}{P^2}. \quad (6.14)$$

Значения  $A$  и  $K$  приводятся в таблицах.

Общая задача гидравлического расчета трубопроводов заключается в определении диаметров труб для пропуска заданного расхода воды и напора, необходимого для подачи воды ко всем точкам водоразбора при оптимальных затратах.

Оптимальные затраты учитывают расход средств на строительство и эксплуатацию трубопровода.

Например, если принять при расчете высокие скорости движения воды, то за счет этого уменьшаются диаметры труб, но увеличиваются потери напора по длине, что приводит в процессе эксплуатации к большим затратам электроэнергии.

Рекомендации по выбору оптимальных скоростей движения жидкости в трубопроводах приводятся в СНиПах.

При решении инженерных задач четыре величины – расход  $Q$ , скорость  $v$ , диаметр трубопровода  $d$  и потери напора  $h$  – являются переменными и взаимозависимыми.

Их связывают между собой уравнения Бернулли и неразрывности (расхода), потери по длине трубопровода и на местных сопротивлениях, которые учитываются по формулам (6.3 и 6.4) соответственно.

Определенность при решении задач гидравлического расчета трубопроводов достигается при следующих условиях:

1. Задается расход воды.
2. Принимаются оптимальные скорости движения воды.

Наряду с общей задачей гидравлического расчета трубопроводов решаются следующие частные задачи:

1. Проверяется пропускная способность трубопровода при заданных значениях диаметров труб и напора.

2. Определяется напор при заданных значениях диаметров труб и расхода воды.

Рассмотрим определение напора по схеме, представленной на рис. 6.1.

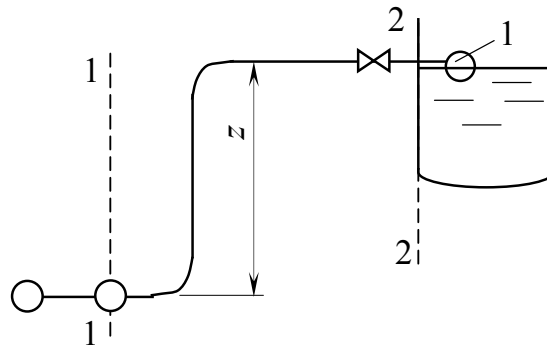


Рис. 6.1

Применяя уравнение Бернулли, для сечений 1–1 и 2–2 запишем:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_{1-2}, \quad (6.15)$$

где  $z_1 = 0$ ;  
 $z_2 = z$ ;  
 $\frac{v_1^2}{2g} \approx \frac{v_2^2}{2g}$ , так как величина скоростных напоров городского

водопровода мала и ею можно пренебречь ( $v_1 \approx v_2$ ) (на практике эта разность – около 5 см).

Тогда уравнение (6.15) примет вид

$$\frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_2}{\rho g} + z + h_{1-2}, \quad (6.16)$$

где  $\frac{p_1}{\rho g}$  – величина пьезометрического напора в сечении 1–1. Он расходуется на подъем воды на высоту  $z$  и на преодоление гидравлических сопротивлений в трубопроводе  $h_{1-2}$ ;

$\frac{p_2}{\rho g}$  – свободный напор, необходимый для преодоления местного сопротивления клапана 1 и создания скорости излива воды в бак.

Свободный напор в местах водоразбора принимается в пределах 1...4 м и обозначается  $H_{св}$ .

Тогда уравнение Бернулли (6.16) можно записать так:

$$H = H_{св} + z + h_{1-2}. \quad (6.17)$$

Для определения напора в любом сечении трубопровода необходимо знать:

- разность геометрических отметок  $z$  между наиболее высоко расположенным водоразбором и данным сечением потока; если точка потребления расположена ниже заданного сечения, то  $z$  принимается со знаком минус;

- величину свободного напора  $H_{св}$  в высшей точке водоразбора;

- величину потерь напора на гидравлических сопротивлениях по пути движения воды от заданного сечения до наиболее удаленной точки водоразбора.

Так как разность отметок  $z$  и свободный напор обычно задаются, то для определения требуемого напора производится расчет потерь напора, связанных с гидравлическим сопротивлением трубопровода.

3. Напор задан. Определяются диаметры труб таким образом, чтобы выполнялось условие:

$$H_{тр} = H_{св} + z + h_{1-2}. \quad (6.18)$$

### 6.3. Метод расчета простых трубопроводов

Применение тех или иных методов расчета напорных трубопроводов обусловлено конструктивными характеристиками и назначением трубопровода.

При расчете простого трубопровода находится расчетная зависимость из уравнения Бернулли и уравнения расхода, а также из формулы для учета потерь по длине и на местных сопротивлениях.

Рассмотрим две основные расчетные схемы: истечение в атмосферу и истечение под уровень.

Схема истечения в атмосферу показана на рис. 6.2.

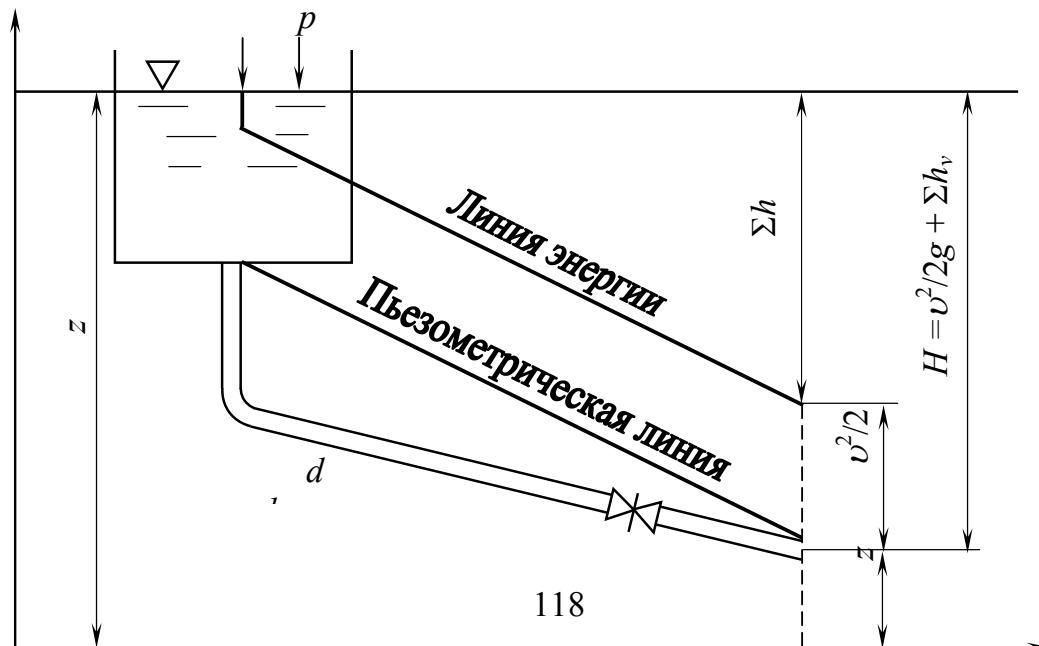


Рис. 6.2

Напишем уравнение Бернулли для сечений 1-1 и 2-2:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \sum h_{1-2}, \quad (6.19)$$

где  $z_1 - z_2 = H$ ;

$$\frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_2}{\rho g} = \frac{p_{\text{атм}}}{\rho g};$$

$$\alpha_1 \approx \alpha_2 = 1;$$

$$\frac{v_1^2}{2g} \approx 0.$$

Тогда

$$H = \frac{v_2^2}{2g} + \sum h_{1-2}, \quad (6.20)$$

где  $\sum h_{1-2}$  - сумма потерь по длине и местных сопротивлений;

$$\sum h_{1-2} = \frac{v_2^2}{2g} \left( \lambda \frac{\ell}{d} + \sum \xi_i \right).$$

Подставляя последнее выражение в (6.20), получим зависимость:

$$H = \frac{v_2^2}{2g} \left( 1 + \lambda \frac{\ell}{d} + \sum \xi_i \right). \quad (6.21)$$

Схема истечения под уровень показана на рис. 6.3.

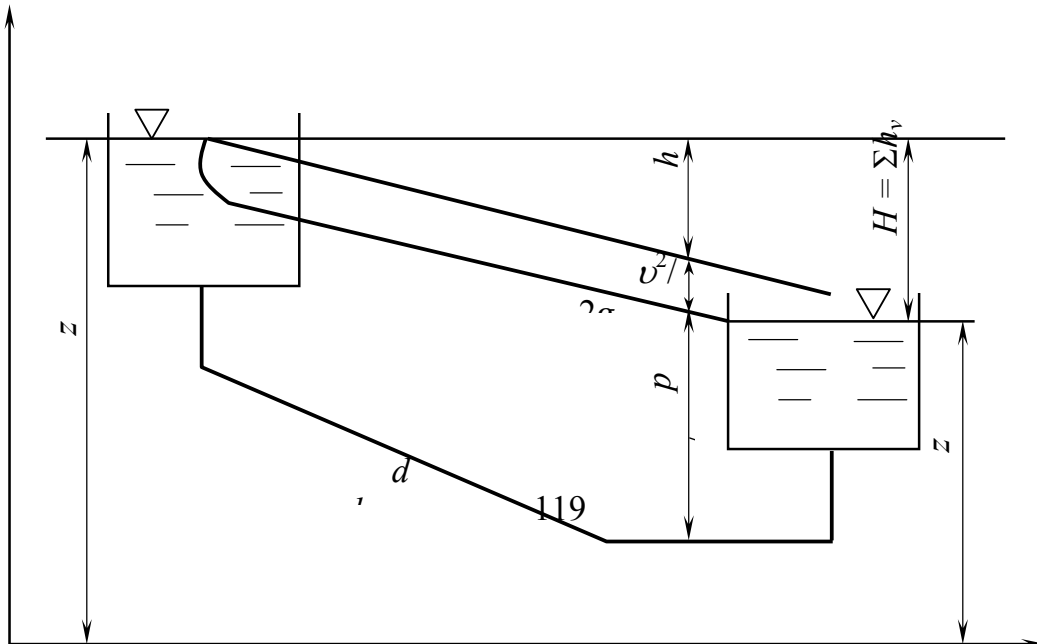


Рис. 6.3

Напишем уравнение Бернулли для сечений 1–1 и 2–2:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \sum h_{1-2}, \quad (6.22)$$

где  $z_1 - z_2 = H$ ;

$$\frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_2}{\rho g} = \frac{p_{\text{атм}}}{\rho g}$$

$$\alpha_1 \approx \alpha_2 = \alpha = 1;$$

$$\frac{v_2^2}{2g} = \frac{v_1^2}{2g} = 0;$$

тогда

$$H = \sum h_{1-2}, \quad (6.23)$$

$$\text{где } \sum h_{1-2} = \lambda \frac{\ell}{2g} \cdot \frac{v^2}{2g} + \xi \frac{v^2}{2g} + \frac{(v - v_2)^2}{2g} \quad (6.24)$$

В выражении (6.24) два последних члена представляют собой потери на местных сопротивлениях, причем последнее слагаемое определяет потери напора при внезапном расширении и вычисляется по теореме Борда.

Решая совместно уравнения (6.23) и (6.24) и учитывая, что  $\frac{v_2^2}{2g} = 0$ , получим

$$H = \frac{v^2}{2g} \left( \lambda \frac{\ell}{d} + \sum_1^n \xi_i + 1 \right). \quad (6.25)$$

Сопоставляя уравнения (6.21 и 6.25), можно видеть, что по форме написания они совершенно тождественны.

Различие между уравнениями по физическому смыслу заключается лишь в том, что единица, стоящая в скобках правой части уравнения (6.21), относится к скоростному напору на выходе потока из трубы в атмосферу.



Следовательно, единица определяет кинетическую энергию, которую поток уносит с собой и которая может быть в дальнейшем использована для совершения работы.

При истечении под уровень единица в скобках в уравнении (6.25) определяет собой потерянный напор на внезапное расширение при входе потока из трубы в резервуар.

Следовательно, при истечении под уровень вся энергия, которой располагает поток, расходуется только на преодоление сопротивлений.

При расчете простого трубопровода решаются три основные задачи:

**Первая задача.** Требуется определить необходимый действующий напор  $H$  для трубопровода длиной  $l$ , м, диаметром  $d$ , м, для пропуска расхода  $Q$ .

Решение сводится к прямому вычислению напора по формуле (6.21).

Коэффициенты  $\lambda$  и  $\xi$  могут быть связаны с числом Рейнольдса

$$Re = \frac{vd}{\nu} = \frac{Qd}{\omega\nu},$$

где  $Q$  и  $d$  заданы по условию задачи.

**Вторая задача.** Требуется определить расход  $Q$  при заданных  $H$ ,  $l$  и  $d$ .

Расход определяется из уравнения расхода  $Q = \nu\omega$  и выражения (6.21). При совместном решении получаем формулу для вычисления расхода:

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2gH}{1 + \lambda \frac{l}{d} + \sum_1^n \xi_i}}. \quad (6.26)$$

Для определения  $\lambda$  и  $\xi$  необходимо знать скорость  $\nu$  или искомый расход  $Re = \frac{vd}{\nu} = \frac{Qd}{\omega\nu}$ , поэтому  $Q$  можно найти по формуле (6.26) методом попыток или графоаналитическим способом, путем использования формулы (6.21) и построения графика  $H = f(Q)$  (рис. 6.4).

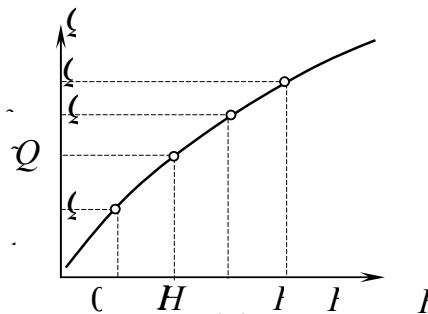


Рис. 6.4

Задаваясь значениями  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ , по формуле

$$H = \frac{8Q^2}{g\pi^2 d^4} \left( 1 + \lambda \frac{\ell}{d} + \sum \xi \right)$$

вычисляем ряд значений  $H_1, H_2, \dots, H_n$ .

**Третья задача.** Требуется определить диаметр трубопровода  $d$  по заданным  $H, Q$ , и  $\ell$ .

Диаметр трубопровода  $d$  определяется графоаналитическим способом. Строится кривая  $d = F(H)$ : задаваясь рядом значений  $d_1, d_2, \dots, d_n$ , вычисляем  $H_1, H_2, \dots, H_n$  (рис. 6.5). При этом для каждой точки графика вычисление  $H_1, H_2, \dots, H_n$ , проводится, без подбора, так как при каждом  $d_1, d_2, \dots, d_n$  число Рейнольдса вычисляется непосредственно по формуле

$$Re = \frac{Qd}{\omega v}.$$

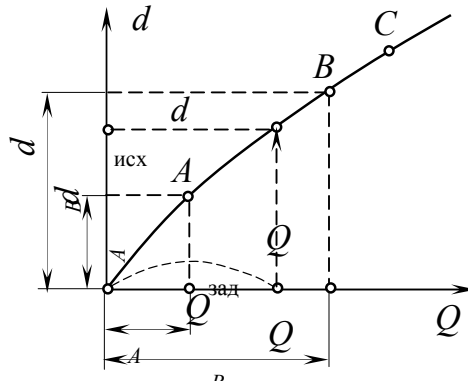


Рис. 6.5

**Замечание 1.** Для длинных трубопроводов, когда потерями на местных сопротивлениях можно пренебречь, все три основные задачи решаются на основе использования формулы

$$H = \lambda \frac{\ell}{d} \frac{v^2}{2g} = \lambda \frac{8Q^2 \ell}{g\pi^2 d^5}. \quad (6.27)$$

Следовательно, методика расчета сохраняется, но расчёты значительно упрощаются.

**Замечание 2.** При квадратичном законе сопротивления, т.е. когда  $\lambda$ , а также коэффициент Шези  $C$  не зависят от  $Re$ , расчёт можно выполнить по формуле

$$H = \frac{Q^2}{K^2} \ell. \quad (6.28)$$

Первые две задачи сводятся к прямому вычислению их по формуле (6.28), причём  $K$  определяется по таблицам по заданному диаметру  $d$ .

Для решения третьей задачи (определить  $d$  по данным  $H$ ,  $Q$  и  $l$ ) сначала вычисляется по формуле (6.28) необходимое значение  $K$ , по которому затем из таблиц находится ближайшее большее и ближайшее меньшее значения  $K_1$  и  $K_2$  ( $K_1 > K > K_2$ ), и по технико-экономическим условиям принимается  $d$ .

## 6.4. Методы расчета сложных трубопроводов

Гидравлический расчет трубопроводов производят по методам:

- 1) удельных гидравлических сопротивлений;
- 2) удельных потерь напора на трение;
- 3) приведенного коэффициента местного сопротивления на трение;
- 4) приведения местных сопротивлений к линейным.

Для упрощения гидравлического расчета используют обобщенные гидравлические параметры трубопровода:

– удельное линейное сопротивление трубопровода  $A = \frac{8\lambda}{g\pi^2 d^5}$ ;

– линейное сопротивление трубопровода  $S = Al$ ;

– расходную характеристику трубопровода, или модуль расхода, т.е.

$$K^2 = \frac{1}{A};$$

– проводимость трубопровода  $P^2 = \frac{1}{S}$ .

Последние два параметра связаны между собой выражением

$$K = P\sqrt{l}.$$

Для гидравлического расчета трубопроводов используются приведенные формулы и в зависимости от задания определяются по таблицам значения  $A$ ,  $S$ ,  $K$  или  $P$ .

### 6.4.1. Методы расчета по удельным гидравлическим сопротивлениям

Метод используется при учете местных сопротивлений и при их отсутствии.

**Рассмотрим последовательное соединение трубопроводов разных диаметров (рис. 6.6).**

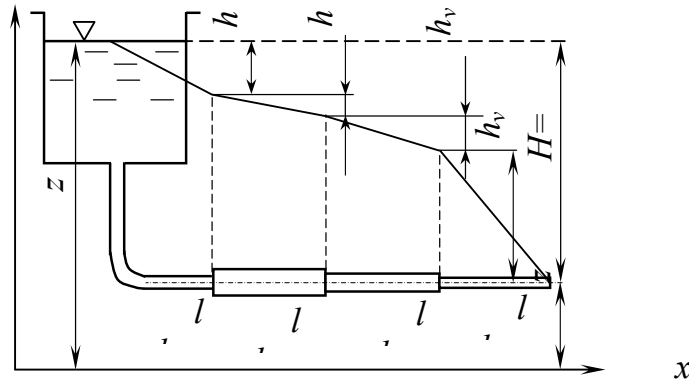


Рис. 6.6

Пренебрегая местными потерями, потери по длине можно определить по формулам:

$$h_{vi} = \frac{Q^2}{K_i^2} l_i \quad \text{или} \quad h_{vi} = A_i Q^2 l_i. \quad (6.29)$$

Потери напора в трубопроводе получают путем суммирования потерь напора, определенных на каждом отдельном участке:

$$\sum h_v = h_{v_1} + h_{v_2} + h_{v_3} + h_{v_4}.$$

С учетом приведенных формул (6.29), получим

$$\sum h_v = Q^2 \left( \frac{l_1}{K_1^2} + \frac{l_2}{K_2^2} + \frac{l_3}{K_3^2} + \frac{l_4}{K_4^2} \right)$$

или

$$\sum h_v = Q^2 (A_1 l_1 + A_2 l_2 + A_3 l_3 + A_4 l_4).$$

Для области квадратного сопротивления можем написать:

$$h_v = Q^2 (S_1 + S_2 + S_3 + S_4),$$

т.е.

$$h_v = Q^2 \sum S,$$

где  $S$  — сопротивление системы трубопроводов.

$$\sum S = S_c -$$

Таким образом, систему с последовательным соединением трубопроводов можно рассматривать как один простой трубопровод, сопротивление которого равно сумме сопротивлений отдельных последовательно соединенных трубопроводов разного диаметра.

Используя формулу (6.29) и учитывая, что весь напор  $H$  затрачивается на преодоление гидравлических сопротивлений, т.е.  $H = \sum h_v$ , можно решить обратную задачу, а именно, при заданных  $H$ ,  $l_1, l_2, l_3, l_4$  и  $d_1, d_2, d_3, d_4$  определить пропускную способность всей системы по формуле

$$Q = \sqrt{\frac{H}{S_c}} = \sqrt{\frac{H}{\sum_1^4 \left(\frac{l}{K^2}\right)}}.$$

### Параллельное соединение трубопроводов.

Из рис. 6.7 видно, что в узловой точке  $A$  поток жидкости в магистрале делится на четыре потока в ветвях 1–4, которые объединяются в точке  $B$ , образуя далее продолжение магистрального трубопровода.

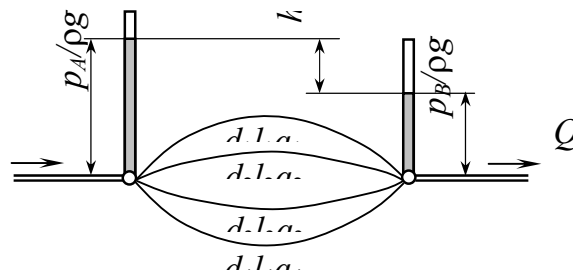


Рис. 6.7

Основной задачей является определение расхода каждой ветки  $q_1 \dots q_4$  и потерянного напора  $h_v$  на пути от точки  $A$  до точки  $B$ .

Решение задачи основано на том, что напоры  $H_A$  и  $H_B$  в узловых точках являются общими для каждой из веток, а их разность

$$\Delta H = H_A - H_B \tag{6.30}$$

представляет одну и ту же потерю напора  $h_v$  одновременно для каждой из веток.

Учитывая, что

$$\Delta H = \frac{Q^2}{K^2} l = Q^2 A_1 l = \frac{Q^2}{P^2},$$

можно записать следующую систему равенств:

$$\left. \begin{aligned} \Delta H &= \frac{Q_1^2}{K_1^2} l_1 = \frac{Q_2^2}{K_2^2} l_2 = \frac{Q_3^2}{K_3^2} l_3 = \frac{Q_4^2}{K_4^2} l_4; \\ \Delta H &= Q_1^2 A_1 l_1 = Q_2^2 A_2 l_2 = Q_3^2 A_3 l_3 = Q_4^2 A_4 l_4; \\ \Delta H &= \frac{Q_1^2}{P_1^2} = \frac{Q_2^2}{P_2^2} = \frac{Q_3^2}{P_3^2} = \frac{Q_4^2}{P_4^2}. \end{aligned} \right\} (6.31)$$

В системе (6.31) имеем (для каждого из трех выражений  $\Delta H$ ) четыре уравнения (по числу веток) и пять неизвестных величин, из них четыре неизвестных расхода  $Q_1 \dots Q_4$  и один неизвестный потерянный напор  $\Delta H$ .

Для замыкания системы (6.31) требуется ещё одно уравнение, которое может быть уравнением узловых расходов, а именно:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4. \quad (6.32)$$

Рассмотрим определение неизвестных величин с учетом выражений  $\Delta H$  в системе уравнений (6.31).

Выразим расходы  $Q_2, Q_3, Q_4$  через расход  $Q_1$  и получим:

$$\left. \begin{aligned} Q_2 &= Q_1 \frac{K_2}{K_1} \sqrt{\frac{l_1}{l_2}}; Q_3 = Q_1 \frac{K_3}{K_1} \sqrt{\frac{l_1}{l_3}}; Q_4 = Q_1 \frac{K_4}{K_1} \sqrt{\frac{l_1}{l_4}}; \\ Q_2 &= Q_1 \frac{A_2 l_2}{A_1 l_1} = Q_1 \frac{S_2}{S_1}; Q_3 = Q_1 \frac{A_3 l_3}{A_1 l_1} = Q_1 \frac{S_3}{S_1}; Q_4 = Q_1 \frac{A_4 l_4}{A_1 l_1} = Q_1 \frac{S_4}{S_1}; \\ Q_2 &= Q_1 \frac{P_2}{P_1}; Q_3 = Q_1 \frac{P_3}{P_1}; Q_4 = Q_1 \frac{P_4}{P_1}. \end{aligned} \right\} (6.33)$$

В соответствии с системой равенств (6.33), получим

$$\left. \begin{aligned} Q &= Q_1 \left( 1 + \frac{K_2}{K_1} \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} + \frac{K_3}{K_1} \sqrt{\frac{l_1}{l_3}} + \frac{K_4}{K_1} \sqrt{\frac{l_1}{l_4}} \right); \\ Q &= \frac{Q_1}{S_1} (S_1 + S_2 + S_3 + S_4); \\ Q &= \frac{Q_1}{P_1} (P_1 + P_2 + P_3 + P_4). \end{aligned} \right\} (6.34)$$

Из выражений (6.34) находим расход  $Q_1$ :

$$Q_1 = \frac{Q}{\left(1 + \frac{K_2}{K_1} \sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}} + \frac{K_3}{K_1} \sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_3}} + \frac{K_4}{K_1} \sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_4}}\right)};$$

$$Q_1 = \frac{QS_1}{(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)};$$

$$Q_1 = \frac{QP_1}{(P_1 + P_2 + P_3 + P_4)}.$$
(6.35)

Значения  $Q_2$ ,  $Q_3$ , и  $Q_4$  найдём из выражений (6.34). Потерянный напор  $\Delta H$  находится по одному из равенств (6.31), например:

$$\Delta H = \frac{Q_1^2}{K_1^2} \ell_1 \quad \text{или} \quad \Delta H = Q_1^2 A_1 \ell_1, \quad \text{или} \quad \Delta H = \frac{Q_1^2}{P_1^2}.$$

В водопроводных сетях потери напора на местные сопротивления, кроме некоторых случаев, незначительны по сравнению с линейными потерями. Поэтому при большом напоре их не принимают во внимание. При расчёте внутренних водопроводов на линейные потери напора вводят поправочный коэффициент  $K_M$ , учитывающий местные сопротивления:

$$h_{\text{дл}} = K_M \sum_1^n h_\ell,$$

где  $\sum_1^n h_\ell$  – сумма линейных потерь напора на всех последовательно (по ходу воды) расположенных участках водопровода от начального до самого удаленного.

Только при очень ограниченном напоре местные сопротивления определяются расчётом.

Такой случай может быть, например, при питании внутреннего водопровода от бака, установленного в здании.

Расчёт потерь производится по формуле

$$\sum h_{\text{дл}} = h_\ell + h_M = \lambda \frac{\ell}{d} \frac{v^2}{2g} + \sum_1^n \xi \left( \frac{v^2}{2g} \right) = \left[ \left( \frac{\lambda}{d} \right) \ell + \sum_1^n \xi \right] \frac{v^2}{2g},$$
(6.36)

где  $\sum_1^n \xi \left( \frac{v^2}{2g} \right)$  – сумма потерь напора на местных сопротивлениях.

Из уравнения расхода выразим скорость  $v = \frac{4Q}{\pi d^2}$ , значение подставим в формулу (6.36) и получим



$$h_{\text{дп}} = \left( \lambda \frac{\ell}{d} + \sum_1^n \xi \right) \frac{16Q^2}{2g\pi^2 d^4} = BQ^2, \quad (6.37)$$

где  $B = \left( \lambda \frac{l}{d} + \sum_1^n \xi \right) \frac{8}{2g\pi^2 d^4}$  — характеристический коэффициент, или гидравлическая характеристика трубопровода.

Она выражает суммарные сопротивления в трубопроводе длиной  $l$  при единичном расходе.

Принимая с некоторой погрешностью  $\frac{\lambda}{d} = \text{const}$ , независимо от диаметра трубопровода, при одних и тех же значениях  $Q$ ,  $\sum \xi$  и  $l$ , найдём отношение  $\frac{B_1}{B}$  для диаметров  $\frac{d}{d_1}$  из формулы (6.37):

$$\frac{B_1}{B} = \frac{d^4}{d_1^4} \quad (6.38)$$

или

$$\frac{B_1}{B} = \frac{H_p}{h_v} = \frac{d^4}{d_1^4}, \quad (6.39)$$

где заданный напор (располагаемый).  
 $H_p$  —

Отсюда  $d_1 = d \cdot \sqrt[4]{\frac{h_v}{H_p}}$  или в общем виде

$$d_1 = d \cdot \sqrt[4]{\frac{H}{H_1}}. \quad (6.40)$$

Из формулы (6.40) следует, что диаметры труб изменяются обратно пропорционально корню четвёртой степени из величины напора или потерь напора.

Пусть напор увеличился в 2 раза:  $H_1 = 2H$ , тогда

$$d_1 = d \cdot \sqrt[4]{0,5} = 0,84d.$$

Новый расчётный диаметр  $d_1$  будет на 16% меньше предыдущего  $d$ .

## 7. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ, МОДЕЛИРОВАНИЯ И АНАЛИЗА РАЗМЕРНОСТЕЙ

### 7.1. Основные положения

Решение дифференциальных уравнений гидродинамики охватывает ограниченный круг задач. В ряде случаев аналитическое решение сопряжено со значительными математическими трудностями. В частности, не всегда можно получить удовлетворительный результат и с помощью численных методов. В таких случаях на помощь приходят экспериментальные методы исследования.

Цель этих исследований состоит в том, чтобы получить данные, необходимые для расчета других процессов, родственных изучаемому.

Эксперименты проводятся на специально создаваемых модельных установках, моделирующих определенным образом исследуемые устройства и протекающие в них физические процессы.

Известны физический и математический методы моделирования.

При физическом моделировании исследуемая модель обычно выполняется в меньшем масштабе, чем оригинал (натура), и воспроизводит изучаемое явление с сохранением его физической природы.

Математическое моделирование осуществляется путем изучения явлений, имеющих иное, чем исследуемый процесс, физическое содержание, но описываемых аналогичными математическими уравнениями.

### 7.2. Законы механического подобия

Полученные на модели результаты опытных исследований обобщаются и затем переносятся на натуру. Выполнение этой процедуры требует знаний законов, связывающих между собой величины, полученные при исследованиях на модели, и соответствующие им величины в натуре.

Эти законы называются законами подобия. Они устанавливают определенные соотношения между геометрическими размерами, кинематическими и динамическими характеристиками потоков в модели и натуре.

Законы подобия подробно изучаются в специальных курсах теории подобия и моделирования.

Следует отметить, что теория подобия имеет большое теоретическое и практическое значение не только для моделирования различных явлений и процессов, но и прежде всего для научного обоснования экспериментальных исследований, обработки их результатов и построения на их основе рациональных эмпирических формул.

Следует иметь в виду, что динамическое или вообще физическое подобие является обобщением геометрического подобия.

Рассмотрим способы получения масштабных коэффициентов для геометрического, кинематического и динамического подобия.

### 7.2.1. Геометрическое подобие

Пусть имеем натуральный объект (поток) (рис. 7.1), подлежащий гидродинамическому исследованию, и его модель.

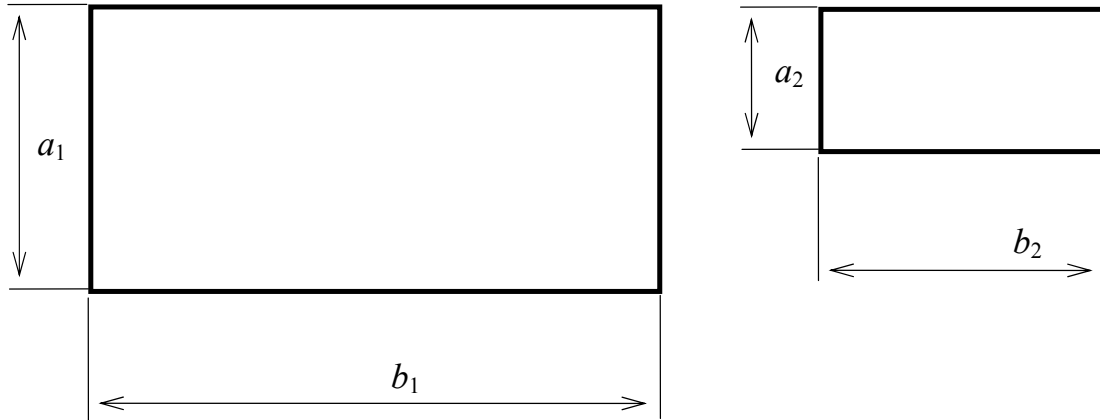


Рис. 7.1

Обозначим геометрические размеры объекта (натурного потока) индексом 1, а модельного – индексом 2.

Чтобы получить область течения в модели, геометрически подобную натурному потоку, разделим все линейные размеры натурного потока на некоторое число  $k$ , которое называется линейным масштабом. Таким образом получаем связь между геометрическими размерами  $a_1$  и  $a_2$ ,  $b_1$  и  $b_2$ , в виде равенств:

$$\frac{a_1}{a_2} = k \text{ и } \frac{b_1}{b_2} = k. \quad (7.1)$$

Линейные размеры, связанные соотношением (7.1), называют соответственными, или сходственными.

Точки, координаты которых удовлетворяют этому соотношению, называют сходственными.

Безразмерные координаты сходственных точек одинаковы.

Обычно за единицу измерения всех линейных величин в соответствующих потоках принимают  $L_1$  (натура),  $L_2$  (модель) и находят линейный масштаб  $k_l$ :

$$\frac{L_1}{L_2} = k_l. \quad (7.2)$$

Для площадей и объемов соответственно имеем:

$$\frac{F_1}{F_2} = k_\ell^2, \quad \frac{W_1}{W_2} = k_\ell^3. \quad (7.3)$$

Очевидно, что для геометрических подобных потоков необходима пропорциональность соответствующих площадей и объемов.

### 7.2.2. Кинематическое подобие

Кинематическое подобие обязательно включает в себя геометрическое подобие, т.е. для кинематического подобия необходимо, чтобы траектории частиц обоих потоков были подобны геометрически.

Кроме того, для кинематически подобных потоков отрезки траекторий соответствующих частиц натурального и модельного потоков, а также отрезки времени, в течение которых протекают соответствующие процессы в природе и в модели, должны быть пропорциональны.

Другими словами, если в первом потоке (натуре) частицы проходят путь  $L_1$  за время  $t_1$ , то во втором потоке (модели) – путь  $L_2$  за  $t_2$ .

Причем, отрезки  $L_1$  и  $L_2$  должны быть геометрически подобны, а отношение  $\frac{t_1}{t_2}$  должно быть одинаковым для сходственных точек обоих потоков.

Отношение  $\frac{t_1}{t_2}$  называется масштабом времени и обозначается  $k_t$ .

Например, для скоростей частиц жидкости в сходственных точках потока легко получить следующие выражения:

$$v_1 = \frac{L_1}{t_1}, \quad v_2 = \frac{L_2}{t_2}.$$

Тогда

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{L_1}{t_1} \bigg/ \frac{L_2}{t_2} = \frac{L_1 \cdot t_2}{L_2 \cdot t_1} = \frac{k_\ell}{k_t}.$$

Очевидно, что

$$k_v = \frac{v_1}{v_2} = \frac{k_\ell}{k_t}.$$

Аналогично находим масштаб ускорений:

$$k_a = \frac{k_\ell}{k_t^2}.$$

Таким образом, скорости и ускорения в сходственных точках потока связаны соотношениями

$$v_1 = k_v v_2; \quad a_1 = k_a a_2. \quad (7.4)$$

### 7.2.3. Динамическое подобие

Динамическое подобие обязательно включает в себя геометрическое и кинематическое подобия. В любых потоках, если физическая природа действующих на жидкость сил одинакова и силы образуют геометрически подобные силовые многоугольники, они являются динамически подобными.

В динамически подобных потоках отношение одноименных сил в сходственных точках в натуре и на модели постоянны, т.е.

$$\frac{P_1}{P_2} = k_p = \text{const}, \quad (7.5)$$

где  $P$  – любая сила, в том числе и равнодействующая;

$P$  –

$k_p$  – масштабный коэффициент, или масштаб сил.

К силам, действующим в потоке жидкости, можно отнести: силы внутреннего трения жидкости, силы тяжести, силы поверхностного натяжения и др.

Для динамически подобных потоков отношение плотностей жидкости в натуре и на модели должно быть постоянным:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = k_\rho = \text{const}. \quad (7.6)$$

Обозначим действующие в сходственных точках натурального и модельного потоков силы  $P_1$  и  $P_2$  соответственно. По основному уравнению динамики, известному из теоретической механики, сила равна произведению массы на ускорение:

$$P = ma,$$

где  $m$  – масса жидкости;

$m$  –

$a$  – ускорение.

Учитывая, что масса равна произведению плотности на ее объем

$$m = \rho W,$$

где  $W = L^3$ ,

тогда

$$m = \rho L^3.$$

Ускорение определяется приращением скорости  $v = \frac{\ell}{t}$  в единицу времени  $t$ , т.е.  $a = \frac{\ell}{t^2}$ .

Следовательно,

$$P = ma = \rho \ell^3 \left( \frac{\ell}{t^2} \right) = \frac{\rho \ell^4}{t^2} = \rho v^2 \ell^2. \quad (7.7)$$

Таким образом, для динамического подобия необходимо, чтобы силы находились в соотношении

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\rho_1 v_1^2 \ell_1^2}{\rho_2 v_2^2 \ell_2^2} = k_p = k_p k_v^2 k_\ell^2. \quad (7.8)$$

Выражение (7.8) является математическим выражением общего закона динамического подобия, впервые сформулированным Ньютоном.

Преобразуем выражение (7.8) к виду

$$\frac{P_1}{\rho_1 v_1^2 \ell_1^2} = \frac{P_2}{\rho_2 v_2^2 \ell_2^2} = \text{idem}. \quad (7.9)$$

Следовательно,  $\frac{P}{\rho v^2 \ell^2} = \text{Ne}$  – критерий Ньютона. Критерий Ньютона

является обобщенным критерием динамического подобия механических систем.

В гидродинамических исследованиях во многих случаях оказывается невозможным найти количественные оценки действующих внешних сил, а следовательно, и их равнодействующей. Поэтому при исследованиях гидравлических явлений часто выделяют только одну силу, а действием остальных пренебрегают. В этом случае применяют частные критерии Рейнольдса, Фруда, Вебера и др.

### 7.3. Гидродинамические критерии подобия

Рассмотрим порядок получения критериев, в которых учитывается действие тех или иных сил.

1. Рассмотрим движение вязкой жидкости по горизонтальному трубопроводу. В этом случае решающее значение имеют силы внутреннего трения.

По основному закону внутреннего трения эти силы могут быть выражены следующим образом:

$$P = \mu S \frac{dv}{dn} \quad \text{или} \quad P = \mu L^2 \left( \frac{v}{\ell} \right) = \mu v \ell. \quad (7.10)$$

Для натурального и модельного потоков получим отношение вида

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\mu_1 \nu \ell_1}{\mu_2 \nu_2 \ell_2}. \quad (7.11)$$

Приравнивая правую часть отношения (7.11) к полученному выше основному уравнению динамического подобия, получим

$$\frac{\rho_1 \nu_1^2 \ell_1^2}{\rho_2 \nu_2^2 \ell_2^2} = \frac{\mu_1 \nu_1 \ell_1}{\mu_2 \nu_2 \ell_2}. \quad (7.12)$$

Преобразуем выражение (7.12) к виду

$$\frac{\rho_1 \nu_1 \ell_1}{\mu_1} = \frac{\rho_2 \nu_2 \ell_2}{\mu_2}.$$

Заменяя отношение  $\frac{\mu}{\rho}$  кинематической вязкостью  $\nu$ , получим

$$\frac{\nu_1 \ell_1}{\nu_1} = \frac{\nu_2 \ell_2}{\nu_2} = \text{idem}. \quad (7.13)$$

Отсюда критерий Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{\nu \ell}{\nu}, \quad (7.14)$$

где  $\ell$  – характерный размер, в частном случае – диаметр трубы  $d$ :

$$\text{Re} = \frac{\nu d}{\nu}. \quad (7.15)$$

Следовательно, в рассматриваемом случае критерием динамического подобия является число Рейнольдса и условие подобия (7.13). Это равносильно тому, что число Re одинаково для обоих потоков.

Физический смысл критерия Рейнольдса. Критерий Re характеризует отношение силы инерции к силе трения (вязкости).

Рассмотрим движение по трубопроводу неньютоновской вязкопластичной жидкости при определении сил внутреннего трения.

Силы внутреннего трения в этом случае обусловлены как вязкими, так и пластичными ее свойствами. Тогда необходимо учитывать напряжение сдвига  $\tau_0$ , а именно:

$$P = \left( \tau_0 + \frac{\mu \nu}{\ell} \right) \ell^2 = \tau_0 \ell^2 + \mu \nu \ell. \quad (7.16)$$

Запишем уравнение (7.8) с учетом уравнения (7.16):

$$\frac{\rho_1 \nu_1^2 \ell_1^2}{\rho_1 \nu_2^2 \ell_2^2} = \frac{\tau_{01} \ell_1^2 + \mu_1 \nu_1 \ell_1}{\tau_{02} \ell_2^2 + \mu_2 \nu_2 \ell_2}.$$

Преобразуем это выражение к виду

$$\frac{\rho_1 v_1^2}{\tau_{01} + \mu_1 v_1 \ell_1} = \frac{\rho_2 v_2^2}{\tau_{02} + \mu_2 v_2 \ell_2},$$

тогда

$$\frac{\frac{v_1 \ell_1 \rho_1}{\mu_1}}{1 + \frac{\tau_{01} \ell_1}{v_1 \mu_1}} = \frac{\frac{v_2 \ell_2 \rho_2}{\mu_2}}{1 + \frac{\tau_{02} \ell_2}{v_2 \mu_2}},$$

где критерий Рейнольдса для ньютоновской жидкости;  
 $\frac{v \ell \rho}{\mu} = \text{Re}$  –  
 $\frac{\tau_0 \ell}{v \mu} = \text{Se}$  – критерий Сен-Венана (Ильюшина), характеризующий пластические свойства жидкости.

Окончательно можно записать:

$$\frac{\text{Re}_1}{1 + \text{Se}_{n1}} = \frac{\text{Re}_2}{1 + \text{Se}_{n2}} = \text{idem}. \quad (7.17)$$

2. Если влияние вязкости жидкости незначительно и движение жидкости преимущественно обусловлено действием сил тяжести, то в основное уравнение динамического подобия (7.8) вместо силы  $P$  надо подставить значение силы тяжести:

$$P = mg = \rho \ell^3 g, \quad (7.18)$$

где  $m = \rho v = \rho \ell^3$  – масса жидкости;

$g$  – ускорение силы тяжести.

Запишем уравнение (7.8) с учетом формулы (7.18)

$$\frac{\rho_1 v_1^2 \ell_1^2}{\rho_2 v_2^2 \ell_2^2} = \frac{\rho_1 \ell_1^3 g_1}{\rho_2 \ell_2^3 g_2}$$

или после сокращений

$$\frac{v_1^2}{g_1 \ell_1} = \frac{v_2^2}{g_2 \ell_2} = \text{idem}. \quad (7.19)$$

Выражение (7.19) называется законом подобия Фруда, а  $F_r = \frac{v^2}{g \ell}$  – критерием Фруда. Критерий Фруда характеризует отношение силы инерции к силе тяжести.



Критерий Фруда применяется при моделировании большинства гидротехнических сооружений, истечении жидкости через водосливы, при изучении волнового сопротивления, испытываемого движущимися кораблями.

Если преобладающее влияние имеет сила поверхностного напряжения (например при истечении жидкости из капиллярных отверстий), то в уравнение (7.8) вместо силы  $P$  следует подставить выражение силы поверхностного натяжения:

$$P = \rho \ell^2 = \frac{\sigma}{L} \ell^2 = \sigma \ell. \quad (7.20)$$

Тогда имеем

$$\frac{\rho_1 v_1^2 \ell_1^2}{\rho_2 v_2^2 \ell_2^2} = \frac{\sigma_1 \ell_1}{\sigma_2 \ell_2}.$$

Отсюда получим

$$\frac{\rho_1 v_1^2 \ell_1}{\sigma_1} = \frac{\rho_2 v_2^2 \ell_2}{\sigma_2} = \text{idem}. \quad (7.21)$$

Выражение (7.21) называется законом подобия Вебера, а  $We = \frac{\rho v^2 \ell}{\sigma}$  – это критерий Вебера. Он характеризует отношение сил инерции к силам поверхностного натяжения.

### Контрольные вопросы

1. Раскройте сущность физического моделирования.
2. Раскройте сущность математического моделирования.
3. Что называется законами механического подобия?
4. Раскройте сущность геометрического, кинематического и динамического подобия.
5. Что такое коэффициенты подобия?
6. Что такое критерий Ньютона?

7. Раскройте физический смысл критерия Рейнольдса.
8. Раскройте физический смысл критерия Фруда.
9. Раскройте физический смысл критерия Вебера.
10. Что характеризует критерий Сен-Венана (Ильюшина)?

#### 7.4. Физическое моделирование

Физическое моделирование находит широкое применение при опытных исследованиях в области гидравлики. Моделирование основано на создании модели, имеющей ту же физическую природу, что и процессы, протекающие в натуре. Достоинством этого метода является возможность изготовления модели в любом произвольном масштабе и применения на модели любой жидкости.

Обычно модель выполняется меньших размеров, чем в натуре, что значительно удешевляет и упрощает проведение опытов. Полученные результаты опытов обрабатываются и обобщаются с целью переносов их в натуре. Физическое моделирование базируется на законах теории механического подобия и теории размерностей.

На практике обычно применяется частичное, или приближенное, моделирование. В этом случае модель исследуется по основным признакам, соответствующим реальному процессу.

При частичном моделировании используются свойства приближенного подобия по одному из определяющих критериев.

В этом случае основной задачей является определение связи между определяющими и неопределяющими критериями, а также нахождение масштабов для основных физических величин.

Непременным условием при физическом моделировании является строгое геометрическое подобие модели и натуре, а также равенство в них соответствующих критериев подобия.

Рассмотрим примеры частичного физического моделирования.

#### Примеры

**Пример 1.** Частичное моделирование по критерию Рейнольдса.

Если при движении жидкости преобладающими силами, определяющими движение жидкости или газа, являются сила трения и инерции, то моделирование проводится по критерию  $Re$ .

Согласно условию динамического подобия

$$Re_1 = Re_2 \quad \text{или} \quad \frac{v_1 l_1}{\nu} = \frac{v_2 l_2}{\nu}. \quad (7.22)$$

Причем вязкость жидкости на модели и в натуре одна и та же, то есть  $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ .

Соотношение (7.22) принимает вид:

$$\nu_1 \ell_1 = \nu_2 \ell_2 \quad \text{или} \quad \frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{\ell_2}{\ell_1}. \quad (7.23)$$

Отсюда просто определяется масштаб скоростей:

$$k_v = k_\ell^{-1,0}.$$

Масштабы других физических величин находятся следующим образом.

Например, определение масштаба расхода вычисляется из уравнения расхода

$$Q = \nu \omega.$$

Для динамически подобных потоков определяется комбинация масштабных коэффициентов, с учетом соотношения (7.23):

$$k_Q = k_v k_\omega = k_\ell^{-1,0} k_\ell^{2,0} = k_\ell^{1,0},$$

где  $k_Q$  – масштаб расхода;

$$k_v = \frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{L_2}{L_1} = k_\ell^{-1,0} \quad \text{масштаб скорости};$$

$$k_\omega = \left( \frac{\ell_1}{\ell_2} \right)^2 = k_\ell^2 \quad \text{масштаб площади}.$$

По аналогии можно получить масштабы других физических величин.

При частичном моделировании, по критерию Рейнольдса, одним из основных признаков динамического подобия потоков с преобладающим действием сил трения является равенство коэффициентов гидравлического сопротивления по длине, то есть  $\lambda_1 = \lambda_2$ .

Это свойство широко используется при моделировании по критерию Рейнольдса.

**Пример 2.** Частичное моделирование по критерию Фруда.

Моделирование по критерию Фруда применяется при изучении потоков, в которых преобладают силы инерции и тяжести, например при изучении гидравлических струй и др.

Динамическое подобие потоков обеспечивается равенством критерия Фруда на натуре и модели.

$F_{r1} = F_{r2}$  или, при условии, что  $g_1 = g_2 = g$ :

$$\left(\frac{v^2}{\ell}\right)_1 = \left(\frac{v^2}{\ell}\right)_2. \quad (7.24)$$

Из соотношения (7.24) определим масштаб скоростей:

$$k_v^2 = \frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{\ell_1}{\ell_2}.$$

Отсюда  $k_v^2 = k_\ell$  или  $k_v = k_\ell^{0,5}$ .

Аналогично можно получить масштабы других физических величин.

**Пример 3.** Предположим, что исследуется движение вязкой жидкости в трубопроводе, в котором при моделировании следует учитывать как силы внутреннего трения жидкости, обусловленные ее вязкостью, так и массовые гравитационные – силы тяжести.

Для обеспечения полного динамического подобия требуется равенство критериев  $Re$  и  $Fr$  на модели и в натуре.

Для одних и тех же гравитационных условий принимаем  $g_1 = g_2 = g$ .

Тогда при моделировании по Рейнольдсу отношение средних скоростей движения жидкости в трубопроводе (натурном и модельном) должно удовлетворять условию:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\ell_1 v_2}{\ell_2 v_1} = k_\ell \frac{v_2}{v_1}. \quad (7.25)$$

При моделировании по Фруду

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = k_\ell^{-0,5}. \quad (7.26)$$

Сопоставляем полученные выражения (7.25) и (7.26) и находим

$$k_\ell \frac{v_2}{v_1} = k_\ell^{-0,5} \quad \text{или} \quad \frac{v_2}{v_1} = k_\ell^{-1,5}.$$

Отсюда

$$v_2 = k_\ell^{-1,5} v_1 = \frac{v_1}{k_\ell^{1,5}}. \quad (7.27)$$

Из выражения (7.27) следует, что для соблюдения полного динамического подобия в модели должна применяться жидкость,

кинематическая вязкость которой  $\nu_2$  будет в  $k^{1,5}$  раз меньше  $\nu_1$  натурной жидкости.

Например, если при моделировании принять линейный масштаб  $k_\ell = 25$ , то

$$\nu_2 = \frac{\nu_1}{25^{1,5}} = \frac{\nu_1}{125}.$$

Очевидно, что найти жидкость со столь малой вязкостью практически невозможно.

Это указывает на то, что при реальных масштабах физических величин подтверждается несовместимость двух основных критериев подобия:  $Re$  и  $Fr$ .

Кроме того, очевидна невозможность полного динамического подобия потоков одной и той же жидкости.

В некоторых случаях для приближенного моделирования используют методы напорно-воздушного моделирования, с частичным искажением геометрического подобия. Эти методы изложены в специальной литературе.

## 7.5. Анализ размерностей. $\pi$ -теорема

При организации экспериментов необходимо с самого начала установить наиболее целесообразную методику их проведения и порядок обработки результатов опытов.

В практике гидравлических исследований метод анализа размерностей нашел широкое применение. Этот метод позволяет заранее определить основные критерии подобия, в которых следует обрабатывать результаты опытов, а также обобщать их и устанавливать закономерности, отражающие исследуемый процесс.

Исходным для метода анализа размерностей является то, что любое математическое уравнение, описывающее физический процесс, обязательно должно быть размерно однородным.

Это означает, что обе его части имеют всегда одинаковую размерность независимо от выбора системы физических величин.

Свойство однородности является основой теории размерностей. В механике в качестве основных физических величин принимают длину  $L$ , массу  $M$  и время  $T$ . Они независимы друг от друга.

В механике жидкости и газа не всегда удается воспользоваться основными физическими величинами, тогда принимаются любые, независимые друг от друга, например плотность, скорость, время.

Достоинством метода является то, что при его применении достаточно знать основные переменные величины, характеризующие

данный процесс, само же уравнение, описывающее этот процесс, может быть неизвестно.

Обычно задача анализа размерностей решается путем определения физических величин, которые полностью характеризуют данный процесс. Затем устанавливается характер зависимости между выделенными величинами, исходя из принципа однородности размерности с помощью так называемой  $\pi$ -теоремы.

Сущность  $\pi$ -теоремы состоит в следующем. В общем случае  $\pi$ -теорема устанавливает связь между теорией подобия и теорией размерностей.

Предположим, что переменная величина  $A_1$  зависит от ряда переменных:  $A_2, A_3, \dots, A_n$ , участвующих в каком-либо физическом процессе, и не зависит от каких-либо других переменных.

Тогда общая функциональная зависимость между этими величинами может быть представлена уравнением

$$A_1 = f(A_2, A_3, \dots, A_n) \quad (7.28)$$

или

$$\varphi(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n) = 0.$$

Пусть число определяющих размерных единиц, через которые могут быть выражены все  $n$  – переменные, равно  $m$ .

$\pi$ -Теорема формулируется так:

*Уравнение, связывающее между собой  $n$  размерных физических величин, характеризующих рассматриваемое явление, среди которых  $m$  обладают независимой размерностью, может быть преобразовано в  $n-m$  безразмерных комплексов, составленных из указанных величин.*

□  $\pi$ -Теорема устанавливает, что если указанные  $n$  переменных выразить через эти основные единицы, то их можно сгруппировать в  $n-m$  безразмерных  $\pi$ -членов:

$$F(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{n-m}) = 0, \quad (7.29)$$

где каждое число  $\pi$  представляет собой безразмерное произведение нескольких  $A$ , то есть число членов в физическом уравнении сокращается до  $n - m$ . Причем каждый такой  $\pi$ -член будет содержать  $m + 1$  переменную величину. В гидродинамических задачах число таких переменных, входящих в  $\pi$ -члены, должно равняться четырем.

Три из них – определяющие: характерный размер (диаметр  $d$ ), скорость течения жидкости  $v$  и ее плотность  $\rho$  (или вязкость  $\mu$ ) входят в каждый из  $\pi$ -членов и только четвертая заменяется другой при переходе от члена к члену.

Для удобства исследования показатели последних принимаются равными  $-1$ . Показатели степени определяющих переменных неизвестны. Обозначим их  $x, y, z$  с индексами, соответствующими индексам  $\pi$ -членов.

Таким образом, имеем:

$$\left. \begin{aligned} \pi_1 &= A_1^{x_1} \cdot A_2^{y_2} \cdot A_3^{z_1} \cdot A_4^{-1} \\ \pi_2 &= A_1^{x_2} \cdot A_2^{y_2} \cdot A_3^{z_2} \cdot A_5^{-1} \\ \pi_{n-3} &= A_1^{x_{n-3}} \cdot A_2^{y_{n-3}} \cdot A_3^{z_{n-3}} \cdot A_n^{-1} \end{aligned} \right\}. \quad (7.30)$$

Выражаем затем входящие в  $\pi$ -члены переменные через основные независимые размерности, но, поскольку эти члены являются безразмерными во всех полученных для них выражениях, то показатели степени каждой из основных размерностей должны обязательно равняться нулю.

## Примеры

**Пример.** Рассмотрим применение  $\pi$ -теоремы для определения опытным путем потерь напора на трение по длине потока при равномерном напорном движении по трубам вязкопластичной бингамовской жидкости.

Известно, что потери напора, а следовательно, и давления  $\Delta p$  зависят от следующих факторов:

- геометрических характеристик трубопровода диаметра  $d$ , длины  $\ell$ , шероховатости стенок  $\Delta$ ;
- физических свойств жидкости: плотности  $\rho$ , динамической вязкости  $\mu$ , начального напряжения сдвига  $\tau_0$ ;
- средней скорости течения  $v$ .

Общую функциональную зависимость, связывающую эти величины, представим уравнением:

$$\Delta p = f(d, \ell, \rho, v, \mu, \tau_0, \Delta) \quad (7.31)$$

или

$$\Phi\left(\frac{\Delta p}{\ell}, d, \rho, v, \mu, \tau_0, \Delta\right). \quad (7.32)$$

В задачах прикладной механики жидкости и газа имеются три физические величины, имеющие независимые размерности: масса  $[M]$ , время  $[T]$ , длина  $[L]$ , то есть в этих задачах следует принимать  $m = 3$ . Это позволяет составить уравнение размерностей для каждого  $\pi$ -члена, соблюдая при этом обязательное условие их размерной однородности. Так как число основных размерных величин равно трем ( $m = 3$ ), а переменных величин в уравнении

(7.32) семь ( $n = 7$ ), то получим уравнение, состоящее из  $n-m$  безразмерных  $\pi$ -членов:

$$F(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = 0. \quad (7.33)$$

Каждый  $\pi$ -член должен содержать четыре переменные величины. Принимаем в качестве определяющих переменных величин следующие:

- диаметр трубопровода  $d$ ;
- среднюю скорость  $v$ ;
- плотность жидкости  $\rho$ .

Комбинируя их поочередно с остальными переменными, входящими в уравнение (7.32), получим:

$$\left. \begin{aligned} \pi_1 &= d^{x_1} v^{y_1} \rho^{z_1} \mu^{-1}; \\ \pi_2 &= d^{x_2} v^{y_2} \rho^{z_2} \tau_0^{-1}; \\ \pi_3 &= d^{x_3} v^{y_3} \rho^{z_3} \Delta^{-1}; \\ \pi_4 &= d^{x_4} v^{y_4} \rho^{z_4} \left( \frac{\Delta p}{\ell} \right)^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (7.34)$$

Запишем размерности переменных величин, входящих в  $\pi$ -члены системы (7.34):

$$\begin{aligned} [d] &= [L]; & [v] &= \left[ \frac{L}{T} \right]; & [\rho] &= \left[ \frac{M}{L^3} \right]; \\ [\mu] &= \square \left[ \tau \frac{dv}{dn} \right] = [FTL^{-2}] = \left[ \frac{M}{LT} \right]; & [\tau_0] &= \left[ \frac{M}{LT^2} \right]; \\ [\Delta] &= [L]; & [\Delta p] &= \left[ \frac{M}{LT^2} \right]; & \left[ \frac{\Delta p}{L} \right] &= \left[ \frac{M}{L^2 T^2} \right]. \end{aligned}$$

Составим уравнения размерностей для каждого из  $\pi$ -членов, имея в виду обязательное условие их размерной однородности. Для первого члена имеем

$$\pi_1 = d^{x_1} v^{y_1} \rho^{z_1} \mu^{-1} = L^{x_1} \cdot \left( \frac{L}{T} \right)^{y_1} \cdot \left( \frac{M}{L^3} \right)^{z_1} \cdot \left( \frac{M}{LT} \right)^{-1} = L^0 T^0 M^0. \quad (7.35)$$

Найдем степени размерностей в левой части уравнения (7.35):

$$\pi_1 = L^{x_1+y_1-3z_1+1} \cdot T^{-y_1+1} \cdot M^{z_1-1} = L^0 T^0 M^0.$$

Приравнявая к нулю показатели степени при одинаковых основаниях  $x$ , получим систему уравнений с неизвестными  $x_1, y_1, z_1$ :

$$\left. \begin{aligned} x_1 + y_1 - 3z_1 + 1 &= 0; \\ -y_1 + 1 &= 0; \\ z_1 - 1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.36)$$

Из совместного решения уравнений (7.36) находим:



$$x_1 = 1; \quad y_1 = 1; \quad z_1 = 1; \quad \pi_1 = d^1 v^1 \rho^1 \mu^{-1}.$$

Подставив эти значения показателей степени в первый  $\pi$ -член системы уравнений (7.34), получим

$$\pi_1 = \frac{d v \rho}{\mu}, \quad (7.37)$$

где найденное значение  $\pi_1$  представляет собой критерий Рейнольдса:

$$\left( \text{Re} = \frac{d v \rho}{\mu} \right).$$

Для второго  $\pi$ -члена имеем

$$\begin{aligned} \pi_2 &= d^{x_2} v^{y_2} \rho^{z_2} \tau_0^{-1} = L^{x_2} \left( \frac{L}{T} \right)^{y_2} \cdot \left( \frac{M}{L^3} \right)^{z_2} \cdot \left( \frac{M}{L T^2} \right)^{-1} = \\ &= L^{x_2 + y_2 - 3z_2 + 1} \cdot T^{-y_2 + 2} \cdot M^{z_2 - 1} = L^0 T^0 M^0. \end{aligned}$$

Отсюда запишем систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} x_2 + y_2 - 3z_2 + 1 &= 0; \\ -y_2 + 2 &= 0; \\ z_2 - 1 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Находим  $x_2, y_2, z_2$ :

$$x_2 = 0; \quad y_2 = 2; \quad z_2 = 1.$$

Запишем выражение для второго  $\pi$ -члена с учетом показателей степени:

$$\pi_2 = d^0 v^2 \rho^1 \tau_0^{-1}$$

или

$$\pi_2 = \frac{v^2 \rho}{\tau_0}. \quad (7.38)$$

Для третьего  $\pi$ -члена:

$$\pi_3 = d^{x_3} v^{y_3} \rho^{z_3} \Delta^{-1} = L^{x_3} \left( \frac{L}{T} \right)^{y_3} \cdot \left( \frac{M}{L^3} \right)^{z_3} \cdot [L^{-1}] = L^0 T^0 M^0;$$

$$\pi_3 = L^{x_3 + y_3 - 3z_3 - 1} \cdot T^{-y_3} \cdot M^{z_3} = L^0 T^0 M^0.$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} x_3 + y_3 - 3z_3 - 1 &= 0; \\ -y_3 &= 0; \\ z_3 &= 0. \end{aligned} \right\}.$$

Решая систему уравнений, получим:

$$x_3 = 1; \quad y_3 = 0; \quad z_3 = 0.$$

Тогда

$$\pi_3 = d^1 v^0 \rho^0 \Delta^{-1}$$

или

$$\pi_3 = \frac{d}{\Delta}. \quad (7.39)$$

Для четвертого  $\pi$ -члена:

$$\pi_4 = d^{x_4} v^{y_4} \rho^{z_4} \left( \frac{\Delta p}{\ell} \right)^{-1} = L^{x_4+y_4-3z_4+2} \cdot T^{-y_4+2} \cdot M^{z_4-1} = L^0 T^0 M^0.$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} x_4 - y_4 - 3z_4 + 2 &= 0; \\ -y_4 + 2 &= 0; \\ z_4 - 1 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Решая систему уравнений, получим:

$$x_4 = -1; \quad y_4 = 2; \quad z_4 = 1.$$

Тогда

$$\pi_4 = d^{-1} v^2 \rho^1 \left( \frac{\Delta p}{\ell} \right)^{-1}$$

или

$$\pi_4 = \frac{v^2 \rho \ell}{d \Delta p}. \quad (7.40)$$

Подставив значения  $\pi$ -членов в соотношение (7.33), получаем уравнение:

$$F \left( \frac{dv\rho}{\mu}, \frac{v^2 \rho}{\tau_0}, \frac{d}{\Delta}, \frac{v^2 \rho \ell}{d \Delta p} \right) = 0. \quad (7.41)$$

Решая уравнение (7.41) относительно  $\pi_4$ , находим

$$\frac{v^2 \rho \ell}{d \Delta p} = F \left( \frac{dv\rho}{\mu}, \frac{d}{\Delta}, \frac{v^2 \rho}{\tau_0} \right). \quad (7.42)$$

Выделим  $\Delta p$  из уравнения (7.42) и получим:

$$\Delta p = \frac{\nu^2 \rho \ell}{d} \left[ F \left( \frac{\nu d \rho}{\mu}, \frac{\nu^2 \rho}{\tau_0}, \frac{d}{\Delta} \right) \right]^{-1}. \quad (7.43)$$

Разделив левую и правую части уравнения (7.43) на  $\rho g$ , находим:

$$h_{\text{тр}} = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{\ell \nu^2}{dg} \left[ F \left( \frac{d\nu\rho}{\mu}, \frac{\nu^2\rho}{\tau}, \frac{d}{\Delta} \right) \right]^{-1}.$$

Обозначим

$$\frac{\lambda}{2} = \left[ F \left( \frac{d\nu\rho}{\mu}, \frac{\nu^2\rho}{\tau_0}, \frac{d}{\Delta} \right) \right]^{-1}$$

и получим выражение для потери напора:

$$h_{\text{тр}} = \lambda \frac{\ell \nu^2}{d 2g}.$$

Тогда общее выражение для  $\lambda$  примет вид:

$$\lambda = \frac{2}{F \left( \frac{d\nu\rho}{\mu}, \frac{\nu^2\rho}{\tau_0}, \frac{d}{\Delta} \right)}. \quad (7.44)$$

Знаменатель выражения (7.44) представляет собой критериальное уравнение, включающее критерии:

$\text{Re} = \frac{d\nu\rho}{\mu}$  – критерий Рейнольдса;

$\frac{\nu^2\rho}{\tau_0} = \frac{\text{Re}}{\text{Sen}} = \frac{d\nu\rho}{\mu} / \frac{\tau_0 d}{\mu\nu} = \frac{d\nu\rho\mu\nu}{\mu\tau_0 d} = \frac{\nu^2\rho}{\tau_0} = B$  – критерий пластичности;

здесь  $\text{Sen} = \frac{\tau_0 d}{\mu\nu}$  критерий Сен-Венана (Ильюшина) – есть характеристика пластичности жидкости.

Отношение  $\frac{d}{\Delta}$  является характеристикой геометрического подобия

$$\left( \frac{d}{\Delta} = \frac{1}{\varepsilon} \right).$$

Следовательно, можно выразить  $l$  в следующем виде:

$$\lambda = \frac{2}{F\left(\text{Re}, B, \frac{1}{\varepsilon}\right)} = F'\left(\frac{\varepsilon}{\text{Re}}, B\right). \quad (7.45)$$

Для ньютоновской жидкости  $\tau_0 = 0$ , поэтому при турбулентном режиме имеем

$$\lambda = \frac{2}{F\left(\text{Re}, \frac{1}{\varepsilon}\right)} = F'\left(\frac{\varepsilon}{\text{Re}}\right).$$

При ламинарном режиме ( $\varepsilon = 0$ ), тогда

$$\lambda = \frac{2}{F(\text{Re})} = F'(\text{Re}).$$

Таким образом, применение метода анализа размерностей позволило выявить основные критерии подобия, характеризующие потери напора на трение по длине трубопровода.

В этих критериях производится обработка опытных данных на модели таким образом, чтобы соблюдалось их равенство в натуре.

### Контрольные вопросы

1. Сущность частичного моделирования.
2. Сущность частичного моделирования по критерию Рейнольдса.
3. Сущность частичного моделирования по критерию Фруда.
4. Сущность анализа размерностей и его достоинства.
5. Сущность  $\pi$ -теоремы.
6. Какие основные физические величины приняты в механике жидкости и газа?
7. Запишите размерность физических величин  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $\tau_0$ ,  $\nu$ .
8. Как определяется число  $\pi$ -членов?

## 8. ОСНОВЫ ДВИЖЕНИЯ ГРУНТОВЫХ ВОД И ДВУХФАЗНЫХ ПОТОКОВ

### 8.1. Движение грунтовых вод. Основные понятия движения грунтовых вод.

Грунтовой называется вода, содержащаяся в порах грунта. Как правило, грунтовая вода находится в движении. Наука, занимающаяся изучением движения грунтовых вод, называется подземной гидравликой.

Грунтовые воды, образуются за счет атмосферных осадков, которые просачиваются в поры грунта и движутся по мельчайшим каналам.

Движение воды в порах того или иного материала, в том числе и грунта, называется фильтрацией. Движение грунтовой воды происходит под действием силы тяжести.

Движение фильтрационных вод может быть установившимся и неустановившимся, равномерным и неравномерным, напорным и безнапорным.

Если гидравлические характеристики (параметры) потока зависят от координат и времени, то грунтовой поток называется неустановившимся:

$$\begin{aligned} p &= f(x, y, z, t); \\ v &= f(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (8.1)$$

Если параметры потока зависят только от координат, то поток называется установившимся.

При равномерном движении грунтовых вод, уклон свободной поверхности равен уклону подстилающего водонепроницаемого слоя  $i$ .

При неравномерном движении это условие не выполняется, т.е.  $J \neq i$

При безнапорном движении грунтовых вод, давление на свободной поверхности равно атмосферному.

Примером может быть фильтрация через тело земляной плотины.

При напорной фильтрации свободная поверхность отсутствует, т.к. движение грунтовых вод ограничено двумя непроницаемыми пластами. Например, движение воды под телом бетонной плотины.

Фильтрационные свойства грунта зависят от его пористости, которая характеризуется коэффициентом пористости  $m$ :

$$m = V_n / V, \quad (8.2)$$

где  $V_n$  – объем пор;

$V$  – объем грунта.

Например, пористость песка  $m \approx 0,4$ ; глины  $m \approx 0,5$  и т. д. Грунт называется однородным, если фильтрационные свойства его одинаковы в любой точке объема.

Фильтрационным потоком называется поток грунтовых вод в порах грунта.

Как всякий поток, он характеризуется:

1. Фильтрационным расходом  $Q$  – это количество воды, проходящее через поперечное сечение грунтового потока в единицу времени. За поперечное сечение  $\omega$  принимается вся геометрическая площадь потока, независимо от того, какую часть этой площади занимают поры.

2. Скорость потока фильтрации  $U$  называют отношение расхода к полной площади поперечного сечения потока:

$$v = Q/\omega \quad (8.3)$$

Истинная скорость движения воды в порах грунта  $v_{ист}$  будет больше, чем скорость фильтрации  $v$ .

Водонепроницаемый слой, расположенный снизу, называется водоупором, или подстилающим слоем. Средний его уклон обозначается буквой  $i$  и называется уклоном дна.

Депрессионной кривой называют свободную поверхность грунтового потока.

Уклон свободной поверхности одновременно является гидравлическим уклоном, так как скорость фильтрации незначительна.

Водоносным слоем называется пористый слой грунта, заполненный водой.

### 8.2. Скорость фильтрации. Формула Дарси

При расчете фильтрационных потоков, главной задачей является определение скорости  $U$  и расход  $Q$ .

Расход фильтрационного потока пропорционален площади поперечного сечения  $\omega$  и гидравлическому уклону  $J$ . Это основной закон фильтрации:

$$Q = k\omega J \quad (8.4)$$

где  $k$  – коэффициент фильтрации, зависящий от строения фильтрующего слоя, пористости фильтра и крупности частиц грунта;

$J = h/\ell$  – гидравлический уклон, представляющий отношение потерь напора  $h$  по длине фильтрующего потока к его длине  $\ell$ .

Ввиду малости скоростного напора ( $v^2/2g \approx 0$ ) потери напора можно выразить в виде:

$$h_{\omega} = (z_1 + \frac{p_1}{\rho g}) - (z_2 + \frac{p_2}{\rho g}) \quad (8.5)$$

Средний гидравлический уклон на небольшой длине фильтрующего потока можно определять по выражению:

$$J = \frac{h_{\omega}}{\ell} = \frac{(z_1 + \frac{p_1}{\rho g}) - (z_2 + \frac{p_2}{\rho g})}{\Delta \ell} \quad (8.6)$$

Выражение (8.6) одновременно является средним пьезометрическим уклоном.

Скорость фильтрующего потока определяется по формуле:

$$v = Q/\omega = kJ \quad (8.7)$$

Из формулы (8.7) следует, что скорость фильтрации пропорциональна гидравлическому уклону в первой степени.

Формулы Дарси можно применять при расчете ламинарного потока фильтрации.

### 8.3. Коэффициент фильтрации и методы его определения

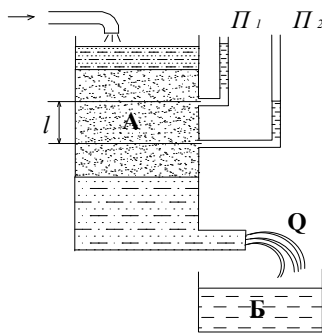
Коэффициент фильтрации численно равен скорости, при уклоне, равном единице:  $v = kJ$  при  $J=1$ ;  $k=v$ .

Единица измерения коэффициента фильтрации см/с или м/с. Размерность [L/T].

Для определения коэффициента фильтрации в лабораторных условиях используется установка Дарси (рис. 8.1).

Единица измерения коэффициента фильтрации см/с или м/с. Размерность [L/T].

Для определения коэффициента фильтрации в лабораторных условиях используется установка Дарси (рис.8.1).



Установка Дарси заполняется испытуемым грунтом. Потери напора определяются двумя пьезометрами  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ . Расход, проходящий через испытуемый грунт определяется по формуле:

$$Q = k\omega J = k\omega \frac{h_1 - h_2}{l} = k\omega \frac{h_1 - h_2}{l} \quad (8.9)$$

Рис. 8.1

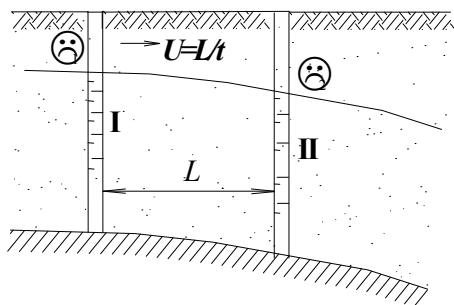
где  $h_1, h_2$  – показания пьезометров. Отсюда

$$k = \frac{Ql}{\omega(h_1 - h_2)} \quad (8.10)$$

Расход фильтрата определяется с помощью мерной емкости Б.

С помощью установки можно определить только приближенное значение коэффициента фильтрации грунта в его естественном залегании.

В естественных условиях можно получить достоверное значение коэффициента фильтрации путем бурения двух скважин на расстоянии L друг от друга в направлении движения грунтовых вод (рис.8.2).



В первую I скважину вводят солевой раствор или другой индикатор. Во второй скважине с помощью специального прибора определяют появление индикатора. Зная расстояние L между скважинами и время движения

индикатора, определяют истинную скорость потока фильтрации

$$\text{Рис.8.2} \quad U_{\text{ист}} = L/t \quad (8.11)$$

Скорость фильтрации определяется из выражения:

$$U = U_{\text{ист}} \frac{\omega_{\text{пор}}}{\omega} \quad (8.12)$$

$\omega_{\text{пор}}$  – часть площади потока, занимаемая площадью пор;

$\omega$  – вся площадь грунтового потока.

Отношение  $\frac{\omega_{\text{пор}}}{\omega}$  называется коэффициентом пористости  $m$ , тогда

$$U = m \cdot U_{\text{ист}}$$

Потери напора определяются по разности отметок  $\nabla_1$  и  $\nabla_2$  между скважинами.

Средний гидравлический уклон на этом участке  $J = h_{\omega}/L$ . Из уравнения Дарси находится коэффициент фильтрации

$$k = \frac{U}{J} = \frac{U_{\text{ист}} m l}{h_{\omega}} = \frac{L^2 m}{t(\nabla_1 - \nabla_2)} \quad (8.14)$$

Существуют и другие методы определения коэффициента фильтрации в полевых условиях, например, метод изотопов.

#### 8.4. Ламинарная и турбулентная фильтрация

Движение грунтовых вод происходит, как правило, в условиях ламинарного течения. Для расчета таких фильтрационных потоков применяются формулы (8.4) и (8.7).

Случай, когда фильтрационный поток имеет значительную скорость, движение будет турбулентным, формулы (8.4) и (8.7) неприемлемы.

Случай, когда скорости фильтрации настолько малы, что решающими силами будет не сила тяжести, а молекулярное взаимодействие частиц жидкости с частицами грунта формулы (8.4) и (8.7) также неприемлемы.

Таким образом, для формул Дарси существует верхний и нижний предел их применимости.

Основной закон фильтрации теряет силу, если скорость фильтрации превышает критическое значение, см/с

$$U_{\text{кр}} = \frac{0,03 \div 0,18}{d} \quad (8.15)$$



где  $d$  – диаметр частиц грунта.

Нижний предел применимости формулы Дарси соответствует условию, когда начинает преобладать действие межмолекулярных сил.

Турбулентная фильтрация возникает при относительно больших поперечных сечениях паровых каналов. Между ламинарной и квадратичной областью фильтрации лежит широкая область переходных режимов.

Граница перехода от ламинарного к турбулентному режиму фильтрации определяется критическим значением числа Рейнольдса:

$$\text{Re}_{KP} = \frac{\nu R}{U} \quad (8.16)$$

где  $\nu$  – действительная скорость в порах;

$R$  – гидравлический радиус порового канала;

$\nu$  – кинематическая вязкость жидкости.

Значение числа Рейнольдса критического равно 2780.

В квадратичной области фильтрации скорость фильтрации определяется по формуле

$$U = k\sqrt{J} \quad (8.17)$$

Для определения скорости фильтрации при турбулентном режиме можно пользоваться формулой С.В. Избаша

$$U = C_{\phi} m \sqrt{Jd} \quad (8.18)$$

где  $C_{\phi}$  – обобщенный коэффициент Шези, равный  $20-14/d$

$d$  – диаметр шара в пределах от 1 до 2,5 см;

$m$  – пористость среды (грунта).

## 8.5. Основное уравнение неравномерного движения грунтовых вод

В условиях плоской задачи при уклоне дна подстилающего слоя  $i > 0$  (грунт однороден) уравнение неравномерного движения имеет вид:

$$\frac{dh}{dl} = i \frac{h - h_0}{h}$$

где  $h$  – глубина потока в рассматриваемом сечении;

$dl$  – расстояние от рассматриваемого сечения до некоторого начального;

$h_0$  – глубина потока при равномерном режиме;

$\frac{dh}{dl}$  – уклон свободной поверхности по отношению к дну  
 (рис.8.3)

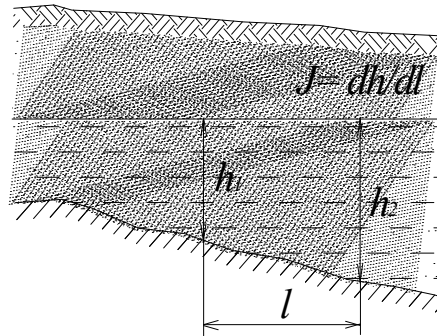
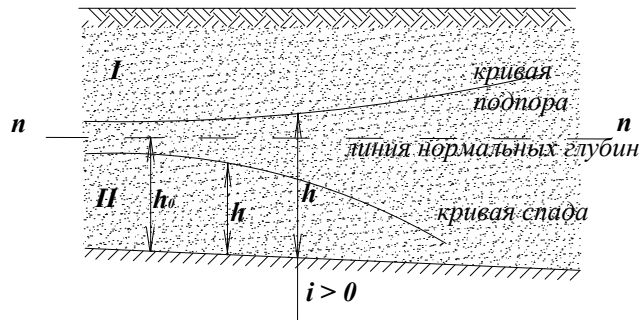


Рис. 8.3



Если  $h_1 = h_2$ , то  $\frac{dh}{dl} = 0$  (нет приращения высот). Это

Рис. 8.4

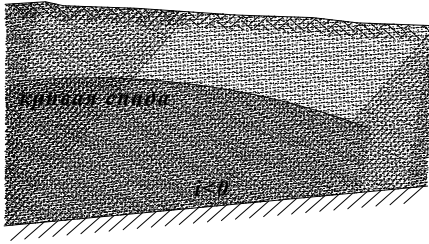
означает, что уклон свободной поверхности равняется уклону дна, т.е. поток находится в условиях равномерного режима с глубиной  $h_0$ .

На рисунке 8.4. в потоке с уклоном  $i > 0$  проведем линию  $n-n$ , лежащую выше подстилающего слоя на высоте  $h_0$ . Линия  $n-n$  разобьет поток на зоны I и II.

Если  $h > h_0$ , то правая часть уравнения (8.19) больше нуля и  $\frac{dh}{dl}$  тоже больше нуля, а уклон свободной поверхности будет меньше уклона дна.

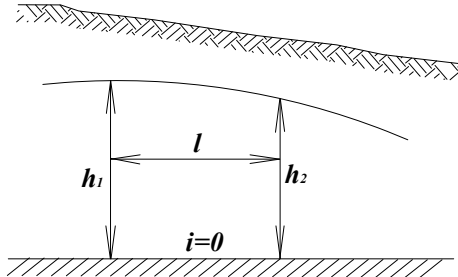
Если  $h > h_0$  (рис.8.4), свободная поверхность будет иметь кривую подпора, расположенную в зоне I.

Если  $h < h_0$ , то кривая свободной поверхности будет иметь больший наклон к горизонту, чем уклон дна и расположится в зоне II.



При обратном уклоне подстилающего слоя  $i < 0$  (рис.8.5)  $\frac{dh}{dl} < 0$  и глубина потока вдоль движения будет убывать (кривая спада).

Рис.8.5



При нулевом уклоне подстилающего слоя  $i = 0$  будет тоже кривая спада, как показано на рис. 8.6. При нулевом уклоне применяется формула Дюпон для построения свободной поверхности грунтовых вод при неравномерном их движении

Рис. 8.6

$$l = \frac{k}{2q} (h_1^2 - h_2^2) \quad (8.20)$$

где  $l$  – расстояние между сечениями с глубинами  $h_1$  и  $h_2$ ;  
 $k$  – коэффициент фильтрации;  
 $q$  – удельный расход.

При прямом уклоне подстилающего слоя  $i > 0$  (рис. 8.4) применима формула

$$l = \frac{h_0}{i} (\eta_1 - \eta_2) + 2,3 \cdot \lg \frac{h_2 - 1}{h_1 - 1} \quad (8.21)$$

где  $h_1$  и  $h_2$  – действительные глубины потока в двух сечениях, взятых на расстоянии  $l$  друг от друга;

$\eta_1 = h_1/h_0$  – относительная глубина в первом сечении;

$\eta_2 = h_2/h_0$  – относительная глубина во втором сечении.

При обратном уклоне дна грунтового потока  $i < 0$

$$l = \frac{h_0'}{i'} (\xi' - \xi_1) + 2,3 \cdot \lg \frac{1 + \xi_2}{1 + \xi_1} \quad (8.22)$$

где  $h_0'$  – фиктивная глубина, равная глубине равномерного движения при том же расходе и при положительном уклоне, численно равном данному  $i'$  (абсолютное значение данного уклона  $|i| > 0$ );

$$\xi_1 = h_1/h_0'; \quad \xi_2 = h_2/h_0'$$

Расход  $q$  можно определить по формуле В.С. Козлова с точностью 2÷5%

✓ при прямом уклоне дна ( $i > 0$ )

$$q = \frac{k(h_1^2 - h_2^2)}{2l} + \frac{k \cdot i \cdot (h_1 + h_2)}{2} \quad (8.23)$$

✓ при нулевом уклоне дна ( $i = 0$ ) из формулы (8.20)

$$q = \frac{k(h_1^2 - h_2^2)}{2l} \quad (8.24)$$

✓ при обратном уклоне дна ( $i < 0$ )

$$q = \frac{k(h_1^2 - h_2^2)}{2l} - \frac{k \cdot i \cdot (h_1 + h_2)}{2} \quad (8.25)$$

### 8.6. Фильтрация через однородную земляную среду

Рассмотрим фильтрацию воды через однородную прямоугольную перемычку (рис.8.7).

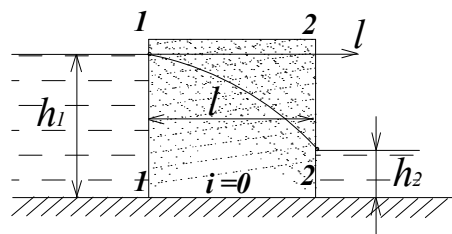


Рис. 8.7

Обозначим уровень воды слева и справа через  $h_1$  и  $h_2$  соответственно. В теле перемычки, будем иметь кривую спада. Водоупор в основании перемычки имеет уклон  $i = 0$ .

Уровень воды на грани 1–1 равен  $h_1$ , а на грани 2–2 –  $h_2$ . Удельный расход на 1 м длины  $l = 1$  перемычки определяется по формуле (8.24)

$$q = \frac{k(h_1^2 - h_2^2)}{2l}$$

Рассмотрим фильтрационный поток через однородную земляную плотину (рис.8.8), находящуюся на водонепроницаемом основании  $AD$ .

Картина течения воды через плотину показана линиями токов, начинающихся на верховом откосе  $AB$  и заканчивающихся на низовом откосе  $CD$ . Самая верхняя линия тока является депрессионной кривой. Выход этой линии на низовом откосе (точка  $Z$ ) называется точкой *высачивания*.

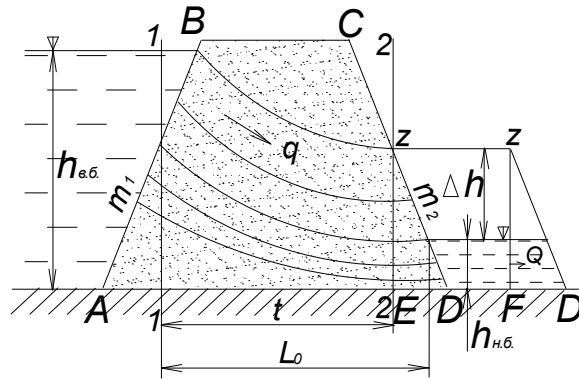


Рис. 8.8

В частном случае точка  $Z$  может совпадать с уровнем воды в нижнем бьефе, в этом случае  $\Delta h = 0$ .

Расчет фильтрации через земляную плотину сводится к определению расхода, проходящего через тело плотины, выходных скоростей фильтрации вблизи точки высачивания и определению положения депрессионной кривой.

Существует несколько методов расчета: метод Павловского, Угинчуса, Нумерова, Михайлова, Шаффернака и др.

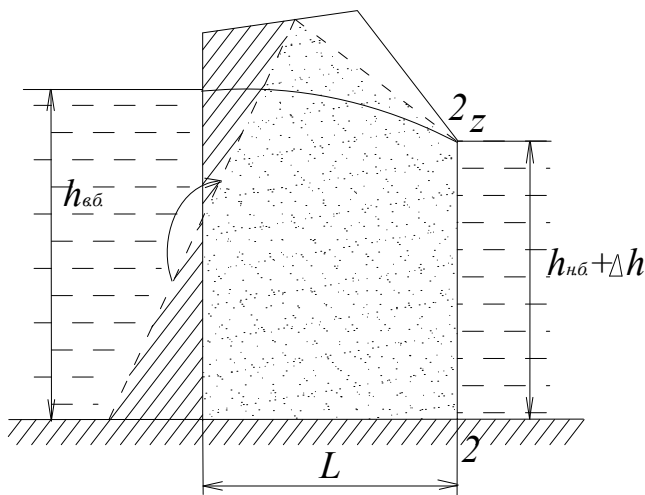


Рис. 8.9

Рассмотрим метод Шаффернака, основанный на том, что реальную картину заменяют плотинной, у которой передняя грань вертикальна.

Для этого линия  $AB$  делится пополам вертикально 1-1 (рис.8.9) и нижний клин плотины переносится вверх, как показано стрелкой. Клин на низовом откосе правее вертикали 2-2 временно отбрасывается. В результате имеем преобразованную среднюю часть плотины,

которая похожа на прямоугольную перемычку (рис.8.7). Расход через среднюю часть плотины определяется по формуле:

$$q = \frac{k \left[ h_{\text{сб}}^2 - (h_{\text{нб}} + \Delta h)^2 \right]}{2L} \quad (8.26)$$

Расход, проходящий через среднюю часть плотины, определяемый по формуле (8.26), затем проходит через низовой клин ZDE (рис. 8.8).

Расход через треугольную призму можно определить по формуле

$$q = k \frac{\Delta h}{m_2} \left( 1 + 2,3 \cdot \lg \frac{h_{\text{нб}} + \Delta h}{\Delta h} \right) \quad (8.27)$$

В уравнениях (8.26) и (8.27) неизвестными являются  $q$  и  $\Delta h$ . Решая эти уравнения совместно, определяются обе эти величины.

*Пример.* Определить точку высачивания Z и фильтрационный расход  $q$  через однородную земляную плотину  $H = 27$  м;  $b = 14,5$  м;  $m_1 = 3$  м;  $m_2 = 2,5$  м, если  $h_{\text{сб}} = 25$  м,  $h_{\text{нб}} = 4$  м. Коэффициент фильтрации плотины  $k = 0,0002$  м/с. Плотина построена на водонепроницаемом основании.

Решение:

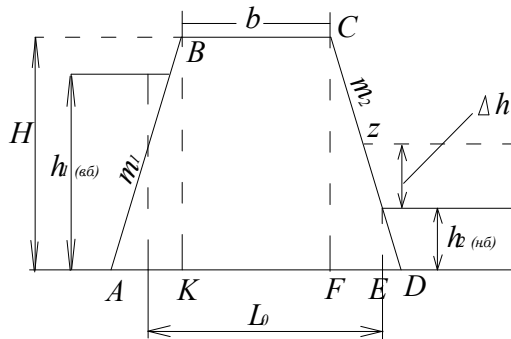


Рис. 8.10

1. Определяем отрезки

$$\frac{AK}{2} = \frac{m_1 \cdot H}{2} = \frac{81}{2} = 40,5 \text{ м}$$

$$ED = m_2 h_{\text{нб}} = 2,5 \cdot 4 = 10 \text{ м}$$

$$FD = m_2 \cdot H = 2,5 \cdot 27 = 67,5 \text{ м}$$

2. Определяем  $L_0$

$$L_0 = AK/2 + ED + FD = 40,5 + 10 + 67,5 = 127,5 \text{ м}$$

3. Из уравнений (8.26) и (8.27) находим

$$\frac{h_{\text{сб}}^2 - (h_{\text{нб}} + \Delta h)^2}{2 \cdot (127,5 - 2,5\Delta h)} = \frac{\Delta h}{m_2} \left( 1 + 2,3 \cdot \lg \frac{h_{\text{нб}} + \Delta h}{\Delta h} \right)$$

Подставляя исходные данные  $h_{\text{сб}}$ ,  $h_{\text{нб}}$ ,  $m_2$ , находим значение  $\Delta h = 5,3$  м.

4. Определяем фильтрационный расход через плотину по уравнению

$$q = k \frac{\Delta h}{m_2} \left( 1 + 2,3 \cdot \lg \frac{h_{н\bar{0}} + \Delta h}{\Delta h} \right) = 0,0002 \frac{5,3}{2,5} \left( 1 + 2,3 \cdot \lg \frac{4 + 5,3}{5,3} \right) = 0,00028 \text{ м/с}$$

### Примеры

1. Фильтрационный поток движется равномерно на глубине  $h_0=3,5\text{м}$ . Уклон дна подстилающего слоя  $i=0,0015$ , а коэффициент фильтрации  $k=0,008\text{м/с}$ .

Определить расход воды на одном метре фильтрующего потока.

Решение. Расход фильтрации находим из уравнения Дарси:

$$q = k \cdot h_0 \cdot i = 0,008 \cdot 3,5 \cdot 0,0015 = 4,2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 / (\text{с} \cdot \text{м})$$

2. Определить коэффициент фильтрации грунта при равномерном движении грунтового потока, при уклоне подстилающего водонепроницаемого слоя  $i=0,05$ , удельном расходе  $q=0,025 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с}$  и глубине потока  $h=3 \text{ м}$ .

Решение. Используем уравнение Дарси для определения коэффициента фильтрации в виде:

$$k = \frac{q}{h_0 i} = \frac{0,025 \cdot 10^{-3}}{0,05 \cdot 3} = 0,167 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}$$

3. Определить коэффициент фильтрации  $k$ , если в полевых условиях были получены следующие данные (рис.8.11):

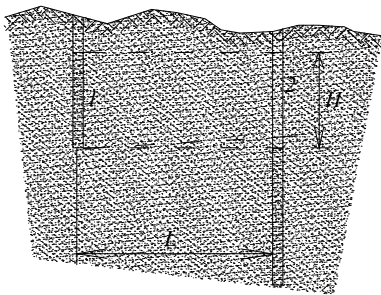


Рис. 8.11

- 1) время появления воды в шурфе 2 от начала исследования составило 45 часов;
- 2) разность отметок в рабочем шурфе 1 и наблюдаемом шурфе 2  $H=4 \text{ м}$ ;
- 3) расстояние между стенками наблюдаемого и рабочего шурфа  $L=5\text{м}$ ;
- 4) пористость грунта  $m=0,45$

Решение. Из уравнения Дарси находим

$$k = \frac{L^2 m}{T(\nabla_1 - \nabla_2)} = \frac{5^2 \cdot 0,45}{45 \cdot 3600 \cdot 4} = 2,78 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}$$

Контрольные вопросы:

1. Что называется фильтрацией?
2. Под действием каких сил происходит процесс фильтрации?

3. При каком условии уклон свободной поверхности равен уклону подстилающего водонепроницаемого слоя?
4. При какой фильтрации свободная поверхность отсутствует?
5. Что называется фильтрационным потоком?
6. Что называется скоростью потока фильтрации?
7. Что называется депрессионной кривой фильтрационного потока?
8. Сформулируйте основной закон фильтрации.
9. Каким соотношением связаны скорость фильтрации и гидравлический уклон при ламинарной и турбулентной фильтрации?
10. На каком приборе и как определяется коэффициент фильтрации?
11. Как определяется коэффициент фильтрации грунта в полевых условиях?
12. Чем отличаются напорный и безнапорный фильтрационные потоки?



## 8.7. Особенности гидравлики двухфазных потоков

### 8.7.1. Виды течений двухфазных потоков жидкости и газа

При совместном течении жидкости и газа в горизонтальных трубах тип потока определяется объемным расходом и свойствами самого потока.

Экспериментально установлены следующие виды (режимы) истечения (типы потоков) жидкостей с вязкостями  $\mu$  менее 0,1 Па·с и газами примерно равными плотности воздуха.

1. «*Пенное*» течение («пенный» поток), при котором пузырьки газа распределены по всей жидкости.

Процесс наблюдается при поверхностных скоростях: для жидкости – 1,5÷4,5 м/с; для газов – 0,3÷3,0 м/с (рис. 8.11, а).

2. «*Пузырьковое*» течение («пузырьковый» поток) при котором порции жидкости и газа попеременно движутся по верхней части трубы. Имеет место при скоростях жидкости менее 0,6 м/с и газа менее 0,9 м/с (рис. 8.11, б).

3. «*Плоское*» течение («плоский» или «ровный» поток), при котором жидкость движется по дну трубы, а газ – по гладкой поверхности раздела фаз. Имеет место при поверхностных скоростях жидкости менее 0,15 м/с и газа 0,6÷3,0 м/с (рис. 8.11, в).

4. «*Волновое*» течение («волновой» поток) аналогично «плоскому», за исключением того, что на поверхности раздела фаз образуются волны, бегущие в направлении движения потока при скоростях жидкости менее 0,3 м/с и примерно 4,5 м/с (рис. 8.11, д).

5. «*Поршневое*» течение («поршневой» поток) наблюдается, когда порция жидкости периодически подхватывается быстродвижущимся газом и образует пенную пробку, которая проходит по трубе со скоростью большей, чем средняя скорость жидкости.

В этом случае могут происходить интенсивные вибрации магистралей вследствие ударов быстродвижущихся пробок, например, о фитинги (рис. 8.11, е).

6. «*Слоистое*» течение («слоистый» поток) или («кольцевой» поток), при котором жидкость движется слоем, покрывающим внутреннюю поверхность трубы, а газ – вместе с захваченными каплями жидкости проходит по центральной части трубы. Процесс наблюдается при поверхностных скоростях газа более 6 м/с (рис. 8. 11, ф).

7. «*Дисперсное*» течение («распыленный» или «дисперсный» поток), при котором почти вся жидкость в виде мелких капель захватывается газом. Процесс наблюдается при поверхностных скоростях газа, превышающих 60 м/с (рис. 8.11).

Режимы течения двухфазных потоков представлены на рис.8.11

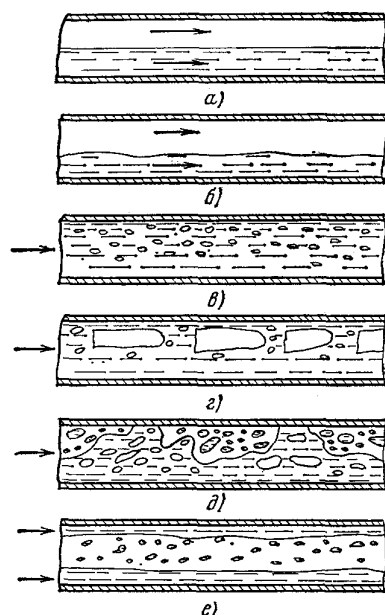


Рис. 8.11. Режимы течения двухфазных потоков в горизонтальных каналах

а) — расслоенный; б) — волновой; в) — пузырьковый; г) — снарядный; д) — эмульсионный; е) — дисперсно-кольцевой

Режимы течения двухфазного потока в вертикальных каналах представлены на рис. 8.12.

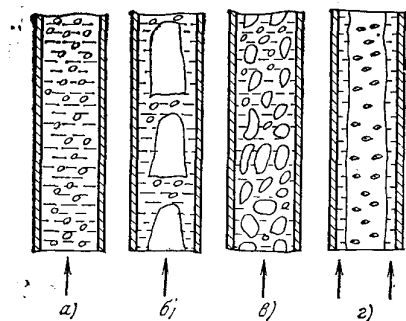


Рис. 8.12. Режимы течения двухфазного потока в вертикальных каналах

а) пузырьковый; б) снарядный; в) эмульсионный; г) дисперсно-кольцевой.

В вертикальных каналах различают пузырьковый, снарядный, эмульсионный и дисперсно-кольцевой режимы.

Пузырьковый режим имеет место при относительно малом паросодержании:

$$\varphi = \frac{S''}{S} \leq 3$$

где  $S''$  – осредненная во времени площадь сечения, приходящаяся на паровую фазу;

$S$  – площадь поперечного сечения канала.

*Снарядный* (поршневой) режим наблюдается при относительно небольших скоростях потока, небольших давлениях и  $\varphi=0,3\div 0,7$ .

*Эмульсионный* режим характеризуется в среднем достаточно однородной структурой. В отличие от пузырькового режима состоит в том, что в эмульсионном режиме пузырьки имеют неправильную форму.

*Дисперсно-кольцевой* режим характеризуется тем, что газовая фаза движется в ядре потока, а жидкая в пленке на стенке, и в виде отдельных капель в ядре. Такой режим имеет место, например, при захлаживании трубопровода криогенными жидкостями. Для режима характерны высокие скорости смеси и паросодержание  $\varphi=0,9$ .

### 8.7.2. Основные определения

**Массовый расход двухфазной смеси:**

$$G_{CM} = G' + G'' \quad (8.28)$$

где  $G'$  – массовый расход жидкости;

$G''$  – массовый расход газа (пара).

Массовым расходным паросодержанием называется отношение расхода газа к расходу смеси:

$$x = G''/G_{CM} \quad (8.29)$$

Объемные расходы фаз находятся из выражений:

– для газа  $V'' = G''/\rho''$

– для жидкости  $V' = G'/\rho'$

**Тогда объемный расход смеси равен сумме объемных расходов фаз:**

$$V_{CM} = V' + V'' = \frac{G'}{\rho'} + \frac{G''}{\rho''} \quad (8.30)$$

Отношение объемного расхода пара (газа) к объемному расходу смеси называется объемным расходным паросодержанием:

$$\beta = V'' / V_{CM} \quad (8.31)$$

Связь между  $x$  и  $\beta$  устанавливается в виде:

$$\frac{x}{1-x} = \frac{\rho''}{\rho'} \cdot \frac{\beta}{(1-\beta)} \quad (8.32)$$

Выделим контрольный объем двухфазной смеси  $V_{CM}$ , тогда осредненное во времени значение объема паровой (газовой) фазы составит  $V''$ . Отношение осредненного во времени значения объема паровой фазы к контрольному объему смеси называется истинным объемным паросодержанием:

$$\varphi = V'' / V_{CM} \quad (8.33)$$

В одномерном приближении можно записать:

$$V = S \Delta L; \quad V'' = S'' \Delta L \quad (8.34)$$

где  $S = S' + S''$  – площадь поперечного сечения канала;

$\Delta L$  – длина контрольного объема смеси;

$S'$  и  $S''$  – осредненные во времени площади сечений, приходящиеся на жидкую и паровую фазы соответственно.

Тогда находим, что:

$$\varphi = S'' / S' \quad (8.35)$$

Отношение (8.35) является наиболее употребляемым. Истинная скорость паровой (газовой) фазы равна:

$$v'' = V'' / S \varphi \quad (8.36)$$

Истинная скорость жидкой фазы равна:

$$v' = V' / S (1 - \varphi) \quad (8.37)$$

Величины  $v_0'' = V'' / S$  и  $v_0' = V' / S$  называются приведенными скоростями фаз.

Сумма приведенных скоростей называется скоростью смеси или скоростью циркуляции, называют скорость, которую имела бы в канале жидкость при массовом расходе, равном  $G_{CM}$ , т.е.:

$$v_0 = G_{CM} / (\rho' S) \quad (8.38)$$

Скорость смеси равна сумме:

$$v_{CM} = v_0' + v_0'' \quad (8.39)$$

Скорость смеси и скорость циркуляции связаны соотношением:

$$v_{CM} = v_0 \left( 1 + \frac{\rho' - \rho''}{\rho''} x \right) \quad (8.40)$$

или

$$v_{CM} = \frac{v_0}{1 - (\rho' - \rho'') \beta / \rho'} \quad (8.41)$$

Величины  $x$ ;  $\beta$ ;  $v_0'$ ;  $v_0''$ ;  $v_{CM}$ ;  $v_0$  в большинстве задач являются заданными.

В общем случае не определяют непосредственно действительные скорости фаз или действительное паросодержание в канале. Фактически важные характеристики потока  $\varphi$ ;  $v''$ ;  $v'$  не входят в условия однозначности, а являются функцией процесса и являются искомыми величинами, поэтому достаточно знать одну из этих величин.

Отношение истинных величин скоростей фаз называют фактором скольжения:

$$\Phi = v'/v'' = \frac{\beta \cdot (1 - \beta)}{\varphi \cdot (1 - \varphi)} \quad (8.42)$$

Поскольку  $v_{CM} = v'' + v'(1 - \varphi)$ , при  $\Phi=1$  (в отсутствии скольжения фаз, т.е. при  $\beta = \varphi$ ) скорость смеси равна истинным скоростям каждой из фаз.

Используя величины  $\varphi$  и  $\beta$  можно определить «истинную» и расходную плотность смеси:

$$\left. \begin{aligned} \rho_\varphi &= \rho''\varphi + \rho'(1 - \varphi) \\ \rho_\beta &= \rho''\beta + \rho'(1 - \beta) \end{aligned} \right\} \quad (8.43)$$

### 8.7.3. Истинное объемное паросодержание адиабатных двухфазных потоков.

Нахождение связи  $\varphi = \varphi(\beta)$  – одна из главных задач анализа двухфазных течений.

В отсутствие локального скольжения фаз ( $\Phi=1$ ), т.е. в гомогенном потоке, различие истинного и расходного объемных паросодержаний связано с реальной неоднократностью потока, с изменением скорости и паросодержания по сечению канала.

Истинное объемное паросодержание и объемное расходное паросодержание связаны зависимостью:

$$\varphi = \frac{1}{C_0} \beta \quad (8.44)$$

где  $C_0$  – параметр распределения.

Для пузырькового и эмульсионного режимов течения можно принять  $C_0 \approx 1,2$ .

Формула (8.44) может быть также представлена в виде:

$$v'' = C_0 v_{CM} \quad (8.45)$$

Формулы (8.44) и (8.45) справедливы для эмульсионного и пузырькового режимов течения в горизонтальных трубах.

В вертикальных каналах газовая фаза при пузырьковом снарядном и эмульсионном режимах имеет заметное скольжение относительно жидкости, тогда:

$$v'' = v_{CM} + \Delta v \quad (8.46)$$

$$\text{где} \quad \Delta v = k_0 U_\infty \quad (8.47)$$

Здесь  $k_0$  – параметр, учитывающий взаимное влияние паровых пузырей; а также движение паровой фазы в виде весьма мелких пузырьков со скоростью  $v'$ , т.е. без скольжения;

$U_\infty$  – скорость всплытия одиночного пузыря в спокойной жидкости.

Параметр  $k_0$  определяется по эмпирической формуле:

$$k_0 = 1,4 \left( \frac{\rho'}{\rho''} \right)^{1/5} \left( 1 - \frac{\rho''}{\rho'} \right)^5 \quad (8.48)$$

Формула (8.48) удовлетворительно согласуется с опытами для парожидкостных потоков в каналах относительно большого диаметра, в широком диапазоне давлений при  $\varphi \leq 0,7$  и числе Бонда  $\geq 100$ :

$$B_0 = \frac{g(\rho' - \rho'')D^2}{\sigma} \geq 100 \quad (8.49)$$

Скорость всплытия одиночного пузыря в эмульсионном режиме течения рассчитывается по формуле:

$$U_\infty = k_1 \cdot \sqrt[4]{\frac{\sigma g(\rho' - \rho'')}{(\rho')^2}} \quad (8.50)$$

при значении  $k_1 = 1,5$ .

С учетом формул (8.48) и (8.50) для пузырькового и эмульсионного режимов течения (включая процесс барботажа) имеем:

$$\Delta v = 2,1 \left( \frac{\rho'}{\rho''} \right)^{1/5} \left( 1 - \frac{\rho''}{\rho'} \right)^5 \times \sqrt[4]{\frac{\sigma g(\rho' - \rho'')}{(\rho')^2}} \quad (8.51)$$

Для снарядного режима в вертикальных каналах значение скорости пузырька может быть рассчитано по формуле:

$$U_{\infty} = 0,345 \sqrt{\frac{gD(\rho' - \rho'')}{\rho'}} \quad (8.52)$$

Формула (8.52) справедлива для маловязких жидкостей.

Определение  $k_0$  представляет значительные трудности, так снарядное течение никогда не бывает полностью развитым течением, так как всякий последующий пузырь стремится догнать предыдущий и слиться с ним. В первом приближении можно использовать формулу (8.48) для определения  $k_0$ . Значение  $\varphi = 0.84\beta$  для снарядного режима течения двухфазного потока.

Для водовоздушных потоков при пузырьковом и эмульсионном режимах рекомендуется формула:

$$v'' = C_0 v_{CM} + 1,53 \cdot \sqrt[4]{\frac{\sigma g (\rho' - \rho'')}{(\rho')^2}} \quad (8.53)$$

а для снарядного режима:

$$v'' = C_0 v_{CM} + U_{\infty} \quad (8.54)$$

где  $C_0=1,2$ , а  $U_0$  определяется по формуле (8.52).

При известном значении истинной скорости газа расчет истинного объемного паросодержания проводят по формуле:

$$\varphi = \beta \frac{v_{CM}}{v'} = \beta \left( \frac{1}{1 + \Delta v / v_{CM}} \right) \quad (8.55)$$

или

$$\varphi = \frac{\beta}{1 + (\Delta v / v_0) \left( 1 - \frac{\rho' - \rho''}{\rho'} \beta \right)} \quad (8.56)$$

Формулы (8.55) и (8.56) пригодны для расчета пузырькового и эмульсионного режимов течения в вертикальных каналах при  $Bo \geq 100$ , если  $\varphi \leq 0,7$ .

При расчете парогенераторов применяются номограммы ВТИ–ЦКТИ, построенные по опытным данным.

#### 8.7.4. Гидравлическое сопротивление двухфазных потоков

*Полный перепад давления.* В инженерной практике используются, как правило, одномерные модели двухфазных потоков.

Перепад давления в направлении оси канала  $z$  для одномерного двухфазного потока выражается уравнением:

$$-\frac{dp}{dz} = \frac{G_{CM}}{S} \cdot \frac{d}{dz} [v''x + v'(1-x)] + \frac{4\tau_{CM}}{D} + \rho_{\varphi} g_z \quad (8.57)$$

где  $\tau_{CM}$  – касательное напряжение на стенке канала при течении смеси;

$D$  – гидравлический диаметр канала;

$g$  – проекция ускорения свободного падения на направление  $z$ .

Первый член уравнения (8.57) отражает потери давления за счет ускорения потока, связанного либо с изменением паросодержания  $x$ , либо с изменением площади поперечного сечения канала  $S$ . При адиабатном течении в канале постоянного сечения этот член уравнения равен нулю.

Второй и третий члены правой части уравнения (8.57) выражают соответственно потери давления на трение и на работу против массовых сил. При умеренных скоростях основной вклад в гидравлическое сопротивление вносят потери на трение.

*Гомогенная модель* дает простой, физически ясный и дающий удовлетворительные результаты метод расчета значений  $\tau_{CM}$ . В этом случае двухфазный поток рассматривается как однородная жидкость с плотностью  $\rho_{\beta}$  и средней скоростью течения  $v_{CM}$ . Тогда:

$$\tau_{CM} = \frac{\xi_{CM}}{8} \cdot \rho_{\beta} v_{CM}^2 = \frac{\xi_{CM}}{8} \cdot \rho' v_0^2 \left( 1 + \frac{\rho' - \rho''}{\rho''} x \right) \quad (8.58)$$

где  $\xi_{CM}$  – коэффициент трения в пузырьковом, снаряжном и эмульсионном режимах течения рассчитывается как для однофазного потока по формулам Блазиуса, Конакова, Шифринсона, Никурадзе и Альтшуля. При этом число Рейнольдса можно приближенно рассчитывать как  $Re_{CM} = \rho v_0' D / \mu'$ . При турбулентном течении удовлетворительные результаты получаются, если принять  $\xi_{CM} = 0,02$ , что соответствует развитому турбулентному течению жидкости в гладких трубах.

Формулу (8.58) можно представить в следующем виде:

$$\frac{\tau_{CM}}{\tau_0} = \frac{\Delta p_{CM}^{mp}}{\Delta p_0^{mp}} = 1 + \frac{\rho' - \rho''}{\rho''} x \quad (8.59)$$

где  $\tau_0$  – касательное напряжение на стенке при течении в том же канале однофазной жидкости с расходом  $G_{CM}$ ;



$\Delta p_{CM}^{mp}$ ,  $\Delta p_0^{mp}$  – перепады давления в канале за счет трения в двухфазном и однофазном потоках ( $\Delta p = 4\tau \frac{L}{D}$ , где L – длина канала, D – диаметр канала).

Согласно гомогенной модели потери на трение в двухфазном потоке с увеличением паросодержания растут линейно и при полном испарении жидкости ( $x = 1$ ):

$$\frac{\Delta p_{CM}^{mp}}{\Delta p_0^{mp}} = \frac{\rho'}{\rho''} \quad (8.60)$$

Применение формул (8.58) и (8.59) оправдано в потоках с гомогенной структурой, т.е. при пузырьковом и эмульсионном режимах течения, при  $\varphi < 0,7$  при больших скоростях смеси. При малых скоростях смеси дают заниженные значения  $\tau_{CM}$ . Лучший результат достигается при расчете  $\tau_{CM}$  по формуле:

$$\tau_{CM} = \frac{\xi_{CM}}{8} \rho_{\varphi} v_{CM}^2 \quad (8.61)$$

Причем плотность смеси рассчитывается по формуле:

$$\rho_{\varphi} = \rho''\varphi + \rho'(1 - \varphi) \quad (8.62)$$

а истинное паросодержание по формулам:

$$\varphi = \beta / \left( 1 + \frac{\Delta v}{v_{CM}} \right) \text{ или } \varphi = \beta / \left[ 1 + \frac{\Delta v}{v_{CM}} \left( 1 - \frac{\rho' - \rho''}{\rho'} \beta \right) \right].$$

*Гидравлическое сопротивление в дисперсно-кольцевом потоке.*

Для восходящего дисперсно-кольцевого режима течения справедливы соотношения:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{dp}{dz} &= \frac{4\tau_i}{D - 2\delta} \\ \tau_i &= \tau_{\omega} + g(\rho' - \rho'')\delta \end{aligned} \right\} \quad (8.63)$$

где  $\tau_i$  и  $\tau_{\omega}$  – касательные напряжения на свободной поверхности пленки и на стенке соответственно;

$\delta$  – толщина пленки;

D – диаметр канала.

Истинное объемное паросодержание определяется по формуле:

$$\varphi = \left( \frac{D - 2\delta}{D} \right)^2 \quad (8.64)$$

если не учитывать расход жидкости в виде капель в газовом ядре.

Касательное напряжение на стенке определяется по формуле:

$$\tau_{\omega} = \frac{\xi_{\omega}}{8} \cdot \frac{\rho v_0'^2}{(1-\varphi)^2} \quad (8.65)$$

где  $\xi_{\omega}$  – коэффициент трения на границе жидкая пленка–стенка, определяемый по формулам однофазного потока в зависимости от  $Re_{CM} = \rho' v_0 D / \mu'$ .

Касательное напряжение по поверхности пленки определяется по формуле:

$$\tau_i = \frac{\xi_i}{8} \cdot \frac{\rho' v_0''^2}{\varphi^2} \quad (8.66)$$

Коэффициент трения на межфазовой поверхности можно рассчитывать по соотношению:

$$\xi_i = \xi_0 \left( 1 + k_i \frac{\delta}{D} \right) \quad (8.67)$$

где  $\xi_0$  – коэффициент трения газового потока в гладком канале, определяемый по значениям Рейнольдса

$$Re'' = \rho'' v_0'' D / \mu''$$

Значение  $k_i$  принимается равным 300.

Так как восходящее кольцевое течение возможно при значительных скоростях газа  $\left( Fr'' = \frac{\rho'' v_0''^2}{g(\rho' - \rho'') D} \geq 1 \right)$  в большинстве случаев можно принять  $\xi_0 = 0,02$ , тогда:

$$\xi_i = 0,02 \left( 1 + 300 \cdot \frac{\delta}{D} \right) \quad (8.68)$$

Соотношения (8.63–8.68) позволяют рассчитывать истинное объемное паросодержание и гидравлическое сопротивление восходящего кольцевого газожидкого потока.

Решение уравнений (8.63) весьма громоздко, необходимость применения машинного счета очевидна.

При больших приведенных скоростях газа для дисперсно-кольцевого режима течения справедливо эмпирическое соотношение:

$$\frac{\Delta p}{\Delta p_0} = 1 + 0.1 \left( \frac{v_0''}{v_0'} \cdot \sqrt{\frac{\rho''}{\rho'} Re'} \right)^{1/3} \quad (8.69)$$

где  $\Delta p$  – перепад давления в двухфазном потоке;

$\Delta p_0$  – перепад давления в однофазном потоке жидкости, имеющей скорость  $v_0''$ .

Формула (8.69) применима при условии, что  $\left( \frac{v_0''}{v_0'} \sqrt{\frac{\rho''}{\rho'} \text{Re}'} \right) > 40$  и

ламинарном течении жидкости в пленке. При этом для расчета истинного объемного паросодержания используется формула:

$$(1 - \varphi) = \sqrt{\Delta p_0 / \Delta p} \quad (8.70)$$

Для пароводяных потоков истинное объемное паросодержание в дисперсном кольцевом режиме может быть найдено по номограмме.

*Нормативный метод.* Метод основан на использовании гомогенной модели при любых режимах течения, т.е. во всем диапазоне паросодержаний при  $0 \leq x \leq 1$ .

На основе опытных данных для пароводяных потоков вводится относительный коэффициент гидравлического сопротивления  $\psi$ , а искомый перепад давления определяется по формуле:

$$\Delta p_{CM}^{mp} = \xi_{CM} \frac{L}{D} \cdot \frac{\rho' v_0^2}{2} \left( 1 + \psi \frac{\rho' - \rho''}{\rho''} x \right) \quad (8.71)$$

Значение  $\psi$  определяется по номограммам.

Местные сопротивления в двухфазных потоках рассчитываются по формулам для гомогенного потока:

$$\Delta p_M = \xi_M \frac{\rho_B v_{CM}^2}{2} \quad (8.72)$$

где  $\xi_M$  – коэффициент местного сопротивления, определяется из таблиц или нормативных документов.

### 8.7.5. Критические истечения двухфазных систем.

Для многих практических решений, в первую очередь для систем аварийной защиты АЭС, требуется рассчитывать скорость истечения двухфазного потока через отверстия или насадки.

Наиболее важной является задача об истечении насыщенной или недогретой до температуры насыщения жидкости. Истечение такой жидкости сопровождается падением давления ниже локального давления насыщения, что приводит к парообразованию внутри канала. Наличие в потоке сжимаемой фазы создает условие для появления критического режима.

Критические режимы истечения двухфазных потоков значительно отличаются от аналогичных режимов при истечении однофазной сжимаемой среды, где критический режим наступает при достижении в критическом сечении локальной скорости звука.

В двухфазном потоке достижение максимального критического расхода смеси необязательно сопряжено с установлением в критическом сечении давления, независимого от противодавления, что характерно для однофазного истечения газового потока. В критическом сечении однофазного (газового) потока устанавливается скорость звука при определенном давлении.

В двухфазном потоке само определение скорости звука не является однозначным. Причем, скорость звука зависит как от действительной структуры потока, так и от принятой физической модели процесса распространения волны возмущения.

В настоящее время не сложилась еще общепринятая точка зрения на механизм истечения и возникновения критических режимов в двухфазных потоках.

На основе обработки опытных данных по истечению насыщенной и недогретой до насыщения воды из коротких ( $L/D \leq 6$ ) каналов небольшого диаметра ( $D \leq 9$ ) для плотности потока может быть рекомендована следующая формула:

$$j = \mu_G \sqrt{2\rho_0' p_0 (1 - \beta_{CP})} \quad (8.73)$$

где  $\mu_G$  – гидравлический коэффициент расхода, который для каналов с острой кромкой на входе равен 0,61;

$\rho_0'$  и  $p_0$  – плотность и давление заторможенного потока на уровне входного отверстия;

$\beta_{CP} = p_0 / p_{CP}$ , здесь  $p_{CP}$  – давление на выходном срезе канала.

Отличие формулы (8.73) от формулы для однофазного потока состоит в том, что при определении плотности потока массы однофазной смеси используется перепад давлений  $p_0 - p_{CP}$ , а не полная разность между давлением  $p_0$  и противодавлением  $p_{ПР}$ .

По мере роста недогрева и снижения давления начального давления  $p_0$  при усилении относительной длины канала, формула (8.73) дает результат близкий к формуле для гидравлического расчета.

При давлениях  $p_0 > 10$  Мпа критическое отношение давлений определяется по формуле:

$$\beta_{CP} = 0,27(L/D)^{0,36} [1 - 0,01(\Delta T_H - 20)] \quad (8.74)$$

если  $\Delta T_H > 20$  К, а при  $\Delta T_H < 20$  К – по формуле

$$\beta_{CP} = 0,27(L/D)^{0,36} \quad (8.75)$$

Для коротких каналов ( $L/D < 6$ ) большого сечения ( $D > 9$  мм) расчет по приведенным формулам дает завышенный результат.

В длинных каналах ( $L/D > 6$ ) при значительных недогревах ( $\Delta T_H > 20$  К), расход воды можно рассчитать по формулам, аналогичным формулам для гидравлического истечения:

$$j = \mu_{\Gamma} \sqrt{2\rho' (p_0 - p_s)} \quad (8.76)$$

где  $p_s$  – давление насыщения при температуре  $T_0$ .

При критическом истечении углеводородов для длинных каналов ( $L/D > 8$ ) применяется критериальное уравнение:

$$\tilde{W}_0 = 0,09\pi^{0,65}\Theta^{-0,2}\nu^{0,34(\pi-1)} \quad (8.77)$$

где безразмерные величины  $\tilde{W}_0$ ,  $\pi$ ,  $\Theta$ ,  $\nu$  выражены с помощью масштабов, полученных с использованием молекулярной массы  $m$  индивидуальной газовой постоянной  $R$ , давления и температуры в критической точке  $p_{KP}$ ,  $T_{KP}$ :

$$\tilde{W}_0 = \nu_0 / \sqrt{RT_{KP}}; \pi = p_{BX} / p_{KP}; \Theta = \Delta T_{BX} / T_{KP}; \nu = 0,8\tilde{L} / \tilde{D}^{0,6} \quad (8.78)$$

где  $\nu_0$  – скорость жидкости на входе в канал, отнесенная к полному сечению канала;

$p_{BX}$  – давление на входе в канал, определяемое по формуле

$$p_{BX} = p_0 - \frac{\rho'_0 \nu_0^2}{2\mu_{\Gamma}} \quad (8.79)$$

$\Delta T_{BX} = T_0 - T_s(p_{BX})$  – перегрев жидкости на входе в канал.

Безразмерные длина и диаметр канала, входящие в параметр  $\nu$  выражаются как:

$$\tilde{L} = L / \sqrt[3]{\frac{mRT_{KP}}{p_{KP}}}; \tilde{D} = D / \sqrt{\frac{mRT_{KP}}{p_{KP}}}$$

Уравнение (8.77) применимо в диапазоне  $\pi = 0,025 \div 0,52$  (при этом  $p_{BX} / p_{KP}$  может превышать 0,6);  $\Theta = 0,0002 \div 0,03$ .

Порядок расчета по уравнению (8.77) следующий:

1) задаемся значением  $\nu_0$  и по формуле (8.79) находим  $p_{BX}$ . При этом  $\mu = 0,61$  для каналов с острой входной кромкой;

2) рассчитываем входной перегрев жидкости  $\Delta T_{BX} = T_0 - T_s(p_{BX})$ .

Если получим  $\Delta T_{BX} < 0$ , то задаемся большим значением  $\nu_0$ ;

3) рассчитываем левую и правую часть уравнения (8.77) с использованием выражений (8.78). Если расхождение между ними окажется значительным, то задаемся новым значением  $\nu_0$  и расчет повторяем до тех пор, пока не добьемся требуемой точности;

4) проверяем, лежат ли значения  $\pi$  и  $\Theta$  в диапазоне применимости уравнения (8.77).

## 8.8. Движение одиночных капель и пузырьков

### 8.8.1. Методы подобия и размерностей

В механике двухфазных систем числа подобия могут быть представлены как мера отношения сил, действующих на единицу площади поверхности:

$$f_g/f_\sigma = g(\rho' - \rho'')L^2/\sigma = B_0 - \text{число Бонда}; \quad (8.80)$$

$$f_\mu/f_\sigma = \mu v/\sigma = N_{\mu\sigma} - \text{вязкостно-капиллярное число} \quad (8.81)$$

$$f_i/f_\sigma = \rho v^2 L/\sigma = We - \text{число Вебера} \quad (8.82)$$

где  $f_\delta, f_g,$

$f_i, f_\mu$  – соответственно силы поверхностного натяжения, гравитационные (архимедовы), инерции и вязкости;

$L$  – характерный размер системы;

$\mu$  – динамическая вязкость жидкости;

$\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения;

$\rho'$  и  $\rho''$  – плотность жидкости и газа;

$v$  – характерная скорость;

$g$  – ускорение силы тяжести.

Число Рейнольдса можно представить как отношение сил  $Re = f_i/f_\mu$  – инерции  $f_i$  и вязкости  $f_\mu$ . Число Фруда можно представить, как отношение силы инерции к силе тяжести

$Fr' = f_i/f_g = \rho'v^2/[g(\rho' - \rho'')L]$  – для двухфазных систем, если в жидкости движется газовый пузырек.

$Fr'' = \rho''v^2/[g(\rho' - \rho'')L]$  – если капля движется в газе.

При анализе движения дискретной капли (частицы) в сплошной среде коэффициент сопротивления используется как число подобия в виде:

$$C_v = \frac{F}{0,5 \cdot \rho \cdot v^2 \cdot S_{\text{мид}}} \quad (8.83)$$

где  $F$  – сила вызывающая движение;

$S_{\text{мид}}$  – площадь миделевого сечения частицы. Например, при движении в жидкости сферического пузырька коэффициент сопротивления аналогичен по физическому смыслу числу Фруда

$$C_v = 4/(3Fr') \quad (8.84)$$

При анализе двухфазных систем часто используется безразмерное число, содержащее лишь свойства фаз и ускорение свободного падения:

$$M = \frac{B_0 We^2}{Re^4} = \frac{g(\rho' - \rho'')\mu^4}{\sigma^3(\rho')^2} \approx \frac{g\mu^4}{\sigma^2\rho'} \quad (8.85)$$

С помощью чисел подобия процесс движения пузырьков можно описать уравнением вида:

$$Re = Re(B_0, We, \mu'/\mu'', \rho'/\rho'') \quad (8.86)$$

или 
$$Re = Re(B_0, M, \mu'/\mu'', \rho'/\rho'') \quad (8.87)$$

Причем, во многих случаях движение дискретной фазы (внутри пузырька или капли) оказывается несущественным, так что симплексы  $\mu'/\mu''$ ,  $\rho'/\rho''$  в анализе не учитываются.

Конкретный вид уравнения подобия может быть получен на основе опытных результатов, а в отдельных случаях и теоретически.

Силы поверхностного натяжения стремятся придать пузырьку (капле) сферическую форму, а остальные силы стремятся его деформировать.

Поэтому в общем случае неравенства:

$$B_0 \ll 1; N_{\mu\sigma} \ll 1; We \ll 1$$

можно рассматривать как условие сферичности пузырька (капли).

Первое условие характерно для задач гидростатики, последнее – для движущихся капель и пузырьков (достаточное условие сферичности).

При анализе размерностей всегда следует думать о физической полноте набора независимых параметров и переменных процесса. Иначе можно получить формально верный, но физически ошибочный результат.

В качестве примера приведем эмпирическую формулу для скорости свободного всплытия газового пузыря в жидкости, когда эта скорость снижается с увеличением радиуса пузыря:

$$U'' = 1,33 \cdot \sqrt{\sigma/\rho'R} \quad (8.88)$$

где  $U''$  – скорость всплытия пузыря, м/с;

$\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения, Н/м;

$\rho'$  – плотность жидкости, кг/м<sup>3</sup>;

$R$  – радиус эквивалентной по объему сферы, м.

В формуле (8.88) размерности согласованы:

$$[м/с] = \sqrt{[кгм/м \cdot с^2]} [м^3 / кг] [1/м].$$

Однако в ней отсутствует подъемная сила  $g(\rho' - \rho'')$  – единственный источник движения пузыря. Следовательно, независимо от действия гравитации пузырь по этой формуле всегда будет всплывать с одной и той же скоростью, даже в невесомости.

В рамках анализа размерностей можно предположить, что:

а) определяемым критерием подобия является отношение масштаба динамического сопротивления подъему пузыря в жидкости к масштабу силы Архимеда:

$$\frac{\rho' U^2}{g(\rho' - \rho'')R}$$

где  $g$  – ускорение свободного падения, м/с<sup>2</sup>;

$\rho'$  – плотность газа, кг/м<sup>3</sup>;

б) коэффициент гидравлического сопротивления представляет собой функцию деформации пузыря, характеризуемого отношением силы поверхностного натяжения и той же силы Архимеда. Безразмерное соотношение этих воздействий можно записать в форме:

$$\frac{\sigma}{g(\rho' - \rho'')R}$$

где  $\sigma/R$  – мера давления, создаваемая поверхностным натяжением, Н/м<sup>2</sup>.

### 8.8.2. Скорость движения капли и пузырька при $Re < 1$

При малых числах Рейнольдса уравнение Навье–Стокса для несжимаемой жидкости упрощается, ибо в нем можно опустить инерционный член  $dU/d\tau$ .

В таком приближении было получено решение задачи о движении сферической капли в вязкой жидкости при  $Re \ll 1$ .

Решение дает поля скоростей во внешней области и внутри капли, а также значения нормальных и касательных напряжений на границе капли. Интеграл от проекций этих напряжений на направление движения можно рассматривать как силу сопротивления:

$$F_c = 6\pi a \mu U_\infty \frac{3\mu' + 2\mu}{3\mu' + 3\mu} \quad (8.89)$$

где  $a$  – радиус капли;

$U_\infty$  – скорость движения;

$\mu'$ ,  $\mu$  – динамическая вязкость жидкости вне и внутри капли соответственно.

Если  $\mu' \ll \mu$ , то (8.86) переходит в формулу Стокса для обтекания твердой сферы при  $Re \ll 1$ :

$$F_c = 6\pi a \mu U_\infty \quad (8.90)$$

Для капли, движущейся в жидкости под действием Архимедовой силы  $F_g$ , равенство  $F_g = F_c$  дает скорость её установившегося падения (всплытия):



$$U_{\infty} = \frac{2}{9} \cdot \frac{a^2 g (\rho' - \rho'')}{\mu} \frac{3\mu' + 3\mu}{3\mu' + 2\mu} \quad (8.91)$$

Для твердой сферы  $\mu' \ll \mu$  и скорость падения равна:

$$U_{\infty} = \frac{2}{9} \cdot \frac{a^2 g (\rho_T - \rho)}{\mu} \quad (8.92)$$

где  $\rho_T$  – плотность твердой фазы.

В маловязких жидкостях (вода, керосин, спирты и т.п.) в газах условию  $Re \ll 1$  подчиняется движение очень малых твердых частиц (диаметром не более 0,1 мм). Для газовых пузырьков в жидкости  $\mu' \ll \mu$ , так что:

$$U_{\infty} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 g (\rho - \rho')}{\mu} \quad (8.93)$$

### 8.8.3. Скорость всплытия газового пузырька в жидкости

Свободный газовый пузырь в жидкости, или капля одной жидкости в другой жидкости при отсутствии эффекта смешения, имеет одну определенную геометрическую характеристику – объем  $V$ . Форма пузыря и его линейные характеристики могут изменяться под действием динамических сил и силы поверхностного натяжения на границе раздела фаз (компонент).

Таким образом, в качестве линейного масштаба можно вводить или величину  $V^{1/3}$ , или эффективный радиус:

$$R = (3V/4\pi)^{1/3} \quad (8.94)$$

Свободное движение пузыря обусловлено подъемной силой порядка  $g(\rho' - \rho'')R$  и силой гидродинамического сопротивления порядка  $\xi \rho' U''^2 R^2$ , здесь  $\xi$  – коэффициент гидродинамического сопротивления пузыря;  $U''$  – скорость свободного всплытия пузыря.

Определяемый критерий в форме числа Фруда:

$$Fr = U^{1/2} / gR\Delta\bar{\rho} \quad (8.95)$$

где  $\Delta\bar{\rho} = 1 - \rho''/\rho'$  – относительная разность плотностей.

В критериях надо брать модуль величины относительной плотности  $|\Delta\bar{\rho}|$ . Если  $\Delta\rho > 0$ , то пузырь (капля) всплывает, если  $\Delta\rho < 0$  – капля тонет.

Обычно связь между подъемной силой и гидродинамическим сопротивлением записывают в форме, соответствующей стационарному обтеканию правильной сферы:

$$g(\rho' - \rho'') \frac{4}{3} \pi R^3 = \xi \frac{\rho' U''^2}{2} \pi R^2 \quad (8.96)$$

$$\text{При такой записи} \quad \xi = 8/3 \cdot Fr^{-1}, \quad (8.97)$$

т.е. по существу, это один и тот же критерий подобия.

Практически удобнее пользоваться корнем квадратным из критерия Фруда, который обозначим символом безразмерной скорости всплытия пузыря:

$$\bar{U}'' = U'' / \sqrt{gR\Delta\rho} \quad (8.98)$$

На границе раздела возникает гидродинамическое взаимодействие, вызывающее образование поля давления. Это приводит к деформациям и осцилляциям<sup>2</sup> поверхности пузыря.

В качестве меры этой деформации поверхности раздела принимается критерий, характеризующий взаимодействие подъемной силы и давления, создаваемого поверхностным натяжением:

$$\bar{R}_\sigma = R \left[ \frac{g(\rho' - \rho'')}{\sigma} \right]^{1/2} \quad (8.99)$$

Молекулярные вязкости жидкости и газа проявляются в условиях преобладания ламинарного характера течения, т.е. при относительно малых числах Рейнольдса:

$$Re = U''R/\nu' \quad (8.100)$$

При этом следует учитывать критерий Архимеда:

$$Ar = gR^2\Delta\rho/\nu'^2 \quad (8.101)$$

и симплекс<sup>3</sup>

$$\bar{\mu} = \mu''/\mu' \quad (8.102)$$

Если в пузыре существенно выражены динамические эффекты, то в качестве самостоятельной величины учитывается симплекс:

$$\bar{\rho} = \rho''/\rho' \quad (8.103)$$

В реальных ситуациях действие симплексов (8.102) и (8.9103) практически не проявляется.

Для сферы с неподвижными границами вязкого обтекания ( $Re < 1$ ) имеем

$$\xi = 24/Re \quad (8.104)$$

В области вязкого обтекания с отрывом ( $1 < Re < 5 \cdot 10^2$ ):

$$\xi \approx 24/Re^{0,55} \quad (8.105)$$

В области первой автомодельности ( $5 \cdot 10^2 < Re < 10^5$ ) соответствуют законы всплытия:

$$\bar{U}'' = 2/3 \cdot Ar^{1/2}; \bar{U}'' \approx 0,35Ar^{1/5}; \bar{U} \approx 2,6 \quad (8.106)$$

Для малых пузырей (капель), сохраняющих строго сферическую форму, для области  $Re < 1$  имеется теоретическое решение Адамара-Рыбчинского, учитывающее подвижность границы раздела:

$$Re = \frac{2}{3} Ar \cdot \frac{1 + \bar{\mu}}{2 + 3\bar{\mu}} \quad (8.107)$$

При  $\bar{\mu} \rightarrow \infty$ , т.е. при неподвижной (отвердевшей) границе раздела:

<sup>2</sup> лат.—колебания

<sup>3</sup> лат.—простой

$$Re = 2/9 Ar \quad (8.108)$$

или 
$$\bar{U}'' = 2/9 Ar^{1/2} = 2/9 \sqrt{Ar} \quad (8.109)$$

Это известная формула Стокса для движения твердой сферы в жидкости. Общий характер зависимости  $U''(D)$  показан на рис. 8.13

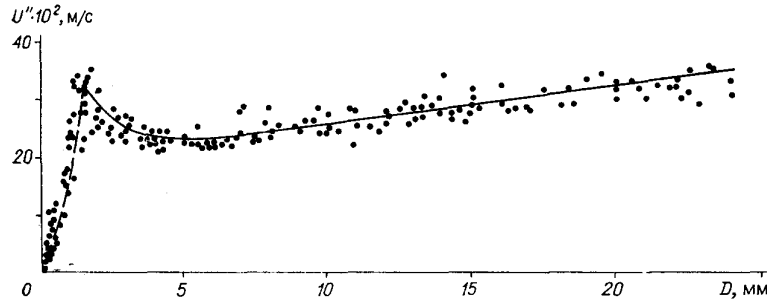


Рис. 8.13. Зависимость скорости всплытия пузырьков от их диаметра

В реальных средах реализуется закон (8.108). Это обусловлено упрочнением границы раздела диффундирующими к ней примесями, имеющимися в жидкости и газе.

При движении пузыря (капли) в канале, например круглой трубе, необходимо учитывать взаимодействие со стенками.

С этой целью, при прочих равных условиях вводится отношение эффективного радиуса пузыря к внутреннему радиусу трубы.

Общий характер зависимости  $U''(\bar{R})$  при свободном всплытии пузыря показан на рис.8.13. Левая ветвь отвечает малодеформированным сферам, т.е. автомодельна относительно  $\bar{R}$ .

Правая ветвь, имеющая отчетливый минимум, соответствует движению деформирующихся больших пузырей и практически автомодельна относительно вязкости, т.е. критерия  $Ar$ , т.е.:

$$\bar{U}'' = 2/9 Ar^{1/2} \quad (8.110)$$

Установлено, что с помощью критериев подобия опытные данные по скоростям всплытия газовых пузырьков в различных жидкостях не удастся обобщить единой зависимостью. Поэтому, можно выделить пять характерных зон на зависимости скорости всплытия  $U_\infty$  от радиуса (по объему) эквивалентной сферы  $R_3$ , которые для различных жидкостей охватывают различные диапазоны  $R_3$  и чисел Рейнольдса:

$$Re = 2\rho'U_\infty R_3 / \mu' \quad (8.111)$$

На рис.8.13 границы зоны отмечены для дистиллированной воды.

Зона I–сферические пузырьки при  $Re < 1$ ,

$$We = \rho'U_\infty^2 2R_3 / \sigma < 1 \quad (8.112)$$

Скорость всплытия подчиняется в чистых жидкостях при условии, что  $\mu' \ll \mu$ , формуле:

$$U_{\infty} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 g (\rho - \rho')}{\mu} \quad (8.113)$$

Малые газовые пузырьки в воде ( $R_3 > 0,07$  мм) всплывают, как твердые шарики, что объясняется накоплением на поверхности раздела фаз сложных молекул поверхностно-активных веществ.

Зона II – сферические пузырьки при  $Re > 1$ .

Приближенно можно принимать, что сферичность сохраняется при  $We \leq 1$ . При  $We = 1$  для газовых пузырьков  $Re = 300 \div 400$ ,  $R_3 \approx 0,6$  мм, а в вязких жидкостях условие  $We < 1$ , автоматически приводит к требованию  $Re < 1$ . в минеральном масле  $We = 1$  при  $R_3 = 1,4$  мм. В пределах зоны II при  $Re \gg 1$  (практически при  $Re > 40$ ) скорость всплытия может быть рассчитана по формуле Муара:

$$C_{\omega} = \frac{48}{Re} \left( 1 - \frac{2,21}{Re^{1/2}} \right) \quad (8.114)$$

При Рейнольдсе от 1 до 40 можно пользоваться формулой Чао:

$$C_{\omega} = \frac{32}{Re} \left( 1 - \frac{0,314}{Re^{1/2}} \right) \quad (8.115)$$

Зона III – пузырьки, сплюсненные вдоль вертикальной оси в виде сфероидов. Эта зона ограничена условием  $1 \leq We \leq 3,5$  и охватывает весьма узкий диапазон размеров пузырьков (для воды  $R_3 = 0,6 \div 0,8$  мм,  $Re = 400 \div 500$ ). При условии  $Re \gg 1$  (маловязкие жидкости – вода, этанол, криогенные жидкости и т.п.) скорость всплытия пузырьков можно рассчитывать по методике Муара.

Зона IV – пузырьки неправильной формы, всплытие которых происходит по сложной винтообразной траектории и сопровождается пульсациями формы. Для нижней границы  $We = 3,5$ , для верхней  $R_3 = 0,8 \div 1$  мм. Скорость всплытия может определяться приближенно по эмпирической формуле:

$$U_{\infty} = k_1 \sqrt[4]{\frac{\sigma g (\rho' - \rho'')}{(\rho')^2}} \quad k_1 = 1,4 \div 1,8 \quad (8.116)$$

Для воды скорость всплытия  $U_{\infty} = 0,24 \div 0,32$  м/с.

Зона V – пузырьки объемом  $V > 2$  см<sup>3</sup>, имеющие форму практически правильного сферического сегмента. Пузырьки в жидкостях любой вязкости всплывают со скоростью:

$$U_{\infty} = (1 \pm 0,05) \sqrt{g R_3} .$$

При этом возможно дробление пузырьков в маловязких жидкостях.

#### 8.8.4. Особенности движения капель в газовых потоках

Малые сферические капли жидкости при  $Re < 1$  имеют скорость падения в газе, определяемую формулой Стокса:

$$U = \frac{2}{9} \cdot \frac{a^2 g (\rho_T - \rho)}{\mu}$$

при  $\rho_T = \rho'$ ;  $\rho = \rho''$ ;  $\mu = \mu''$ .

Условию  $Re < 1$  подчиняется падение в газе каплей диаметром не более 0,1 мм. При  $0,5 \leq Re \leq 5$  скорость падения капель в газе определяется с помощью формулы Озеена для коэффициента сопротивления:

$$C_{\omega} = \frac{24}{Re} \left( 1 + \frac{3}{16} Re \right) \quad (8.117)$$

Эта формула получена для движения твердой сферы в жидкости при частичном учете влияния инерционных членов в уравнении Навье-Стокса.

При больших числах Рейнольдса движение капли в газе сопровождается отрывом потока в кормовой части ее поверхности для сферической капли при  $Re \gg 1$  (практически при  $Re > 20$ ). Скорость падения определяется по формуле:

$$U_{\infty} = 2,5 \sqrt{\frac{R_{\omega} g (\rho' - \rho'')}{\rho''}} \quad (8.118)$$

Верхняя граница применимости этой формулы определяется условием  $We = 1$ , что позволяет приближенно установить предельный диаметр капли, сохраняющей сферичность при падении в газе:

$$R_{np} \approx 0,28b = \sqrt{\sigma / [g (\rho' - \rho'')]} \quad (8.119)$$

Согласно этой формулы капля воды, падая в воздухе при комнатной температуре, сохраняет сферичность при диаметре  $2R < 1,5$  мм.

При  $We > 1$  капли деформируются, причем в определенной области размеров увеличение архимедовой силы с ростом объема капли компенсируется ростом силы сопротивления за счет большего её сплющивания, поэтому скорость падения остается неизменной:

$$U_{\infty}^{III} = k_2 \sqrt[4]{\sigma g (\rho' - \rho'') / (\rho'')^2} \quad (8.120)$$

где  $k_2 = 1,6 \div 1,8$ , что соответствует  $U_{\infty}^{III} = 7,6 \div 8,6$  м/с для капель воды в воздухе.

В газовых потоках скорость падения капель  $U_{\infty}$  есть скорость движения капель относительно газа. При подъемном движении газа значение  $U_{\infty}$  определяет так называемую «скорость витания» капли. В общем случае для вертикального потока газа скорость движения капли относительно стенок канала равна  $v'' = U_{\infty}$ , где  $v''$  – скорость газа,

подъемное движение которого соответствует положительному направлению системы отсчета.

На основе опытных данных при условии:

$$We = \rho'' U_\infty^2 2R_3 / \sigma \approx 7 \div 10$$

происходит дробление капель. Это условие отвечает предельному диаметру капель:

$$D_{\text{лп}} = (2 \div 3)b,$$

где  $b$  – капиллярная постоянная:

$$b = \sqrt{\frac{\sigma}{g(\rho' - \rho'')}} \quad (8.121)$$

### 8.8.5. Схлопывание (расширение) полости в жидкости. Уравнение Рэлея

Задача о схлопывании (расширении) сферической полости в жидкости была решена Рэлеем.

Если текущий радиус сферы  $R = R(\tau)$ , то поле давлений в жидкости в любой момент времени  $\tau$  определяется уравнением:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{d\tau} (R^2 \cdot \dot{R}) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^4} \cdot R^4 \cdot \dot{R}^2 = \frac{p(r) - p_\infty}{\rho} \quad (8.122)$$

где  $p_\infty$  – давление на бесконечном удалении от границы полости.

Давление на границе полости  $p_R$  определяется уравнением Рэлея:

$$R \cdot \ddot{R} + \frac{3}{2} \dot{R}^2 = \frac{p_R - p_\infty}{\rho} \quad (8.123)$$

где  $\ddot{R} = d^2 R / d\tau^2$ .

Определив кинетическую энергию  $E$  жидкости во всем объеме от  $r = R$  до  $r = \infty$ , получим эквивалентную энергетическую форму уравнения Рэлея:

$$dE = (p_R - p_\infty) dV \quad (8.124)$$

где  $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ .

При определенных законах расширения (схлопывания) полости поле давлений в жидкости не является монотонным. Экстремальный перепад давлений определяется соотношением:

$$\frac{p_* - p_\infty}{\rho} = \frac{3}{4} \cdot \frac{R}{r_*} (2\dot{R}^2 + R \cdot \ddot{R}) \quad (8.125)$$

где  $r_* = R \left( \frac{2\dot{R}^2}{2\dot{R}^2 + R\ddot{R}} \right)^{1/3}$ .

Из уравнения Рэля выводится закон кавитационного схлопывания сферической полости, давление внутри которой  $p_0 = \text{const}$ , а начальный радиус  $R_0$  при  $\tau = 0$ :

$$\dot{R} = -\sqrt{\frac{2}{3} \frac{\Delta p}{\rho}} \cdot \frac{R_0}{R} \left(1 - \frac{R^3}{R_0^3}\right)^{1/2} \quad (8.126)$$

где  $\Delta p = p_\infty - p_0$ ; знак указывает на то, что скорость границы направлена к центру полости.

Полное время схлопывания кавитационной полости радиусом  $R_0$ :

$$\tau_* = 0,915 \sqrt{\rho / \Delta p} \quad (8.127)$$

Универсальный закон схлопывания полости (изменения давления) выражен уравнением:

$$\int_z^1 \frac{z^{3/2} dz}{(1 - z^3)^{1/2}} = 0,747 \frac{\tau}{\tau_*} \quad (8.128)$$

где  $z = R/R_0$

Максимальный перепад давлений по формуле (8.124) растет обратно пропорционально кубу радиуса полости.

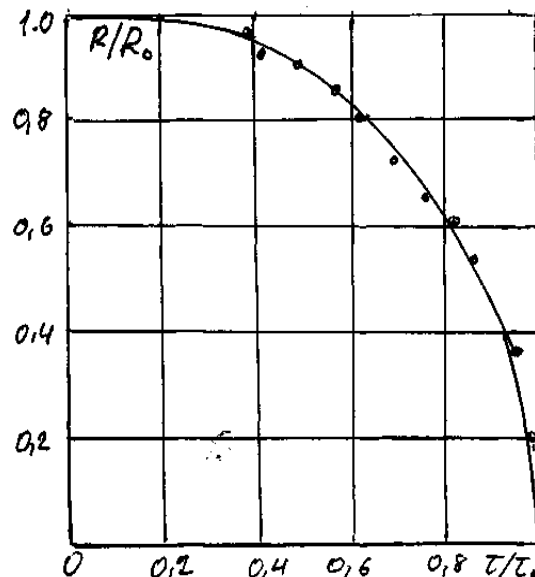
Положение и значение максимума давления на различных этапах схлопывания полости имеет следующие значения:

$R/R_0$	0,63	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05	0,01
$r^*/R$	$\infty$	2,85	1,91	1,73	1,63	1,60	1,587	1,587	1,587
$\frac{p^* - p_\infty}{p_\infty - p_0}$	0	0,055	0,535	1,72	5,1	19	157	1260	157000

На рис.8.14 представлены результаты расчета по формуле (8.127) и опытные данные

Расчетное давление при схлопывании каверны достигает гигантских значений и стремится к бесконечности при  $R \rightarrow 0$ . Анализ показывает, что учет изменения давления газа в процессе схлопывания слабо влияет на основные закономерности процесса.

Вместе с тем при  $R \rightarrow 0$  расчетные границы полости  $\dot{R}$  и экстремальные давления  $p^*$  становятся настолько большими, что



необходимо учитывать сжимаемость жидкости и неоднородность давления газа в полости.

Рис. 8.14. Универсальный закон изменения радиуса схлопывающейся сферической поверхности

Учет сжимаемости жидкости приводит к некоторому изменению положения максимума.

Тем не менее огромное возрастание давления в жидкости в окрестности схлопывающейся каверны является бесспорным. Если кавитация происходит в условиях неоднородного внешнего давления, что практически всегда имеет место вблизи твердых поверхностей, обтекаемых жидкостью, то смыкание полости сопровождается образованием направленных струек жидкости, обладающих огромной кинетической энергией. Эти струйки вызывают эрозию твердых поверхностей при кавитации. Образование кавитационных полостей (разрывов) в жидкости связано со снижением локального давления, что имеет место при обтекании различных тел с большими скоростями, а также при работе насосов, гидравлических турбин, гребных винтов и т.п.

#### 8.8.6. Применимость уравнений

Приведенные выше уравнения и зависимости справедливы в предположении, что происходит движение малого количества частиц в объемах, имеющих большое поперечное сечение. Когда концентрация частиц становится высокой, они располагаются достаточно близко одна к другой и оказывают взаимное замедляющее действие при осаждении. Такое осаждение часто называют стесненным. Свободное осаждение наблюдается при объемных концентрациях  $< 0,1\%$ .

Если диаметр частицы оказывается сравнимым с диаметром сосуда, в котором они осаждаются, то стенки сосуда будут замедлять осаждение.

Это влияние в случае твердых частиц можно учесть, умножив скорость осаждения, полученную по закону Стокса, на коэффициент  $k$  (таблица 8.1).

Поправочные коэффициенты, учитывающие влияние стенки сосуда на осаждение твердых частиц  $\beta = d_p/D$ , где  $D$  – диаметр сосуда.

Таблица 8.1

$\beta$	$k$	$\beta$	$k$	$\beta$	$k$
0,0	1,000	0,3	0,472	0,6	0,0945
0,1	0,792	0,4	0,279	0,7	0,0468



0,2	0,569	0,5	0,170	0,8	0,0205
-----	-------	-----	-------	-----	--------

При турбулентном режиме (область действия закона Ньютона) скорость осаждения должна быть умножена на поправочный коэффициент  $k'$ :

$$k' = 1 - \beta^{1,5} \quad (8.129)$$

где  $\beta$  – отношение диаметра частицы к диаметру сосуда.

Область применения закона Стокса сужается в случае твердых частиц, осаждающихся в газе.

## Библиографический список

1. Альтшуль А.Я., Животинский Л.С., Иванов Л.П. Гидравлика и аэродинамика. – М.: Стройиздат, 1987 – 414 с.
2. Киселев П.Т. Гидравлика. Основы механики жидкости. – М.: Энергия, 1980 – 393 с.
3. Константинов Ю. М. Гидравлика. – Киев: Высшая школа, 1988 – 431 с.
4. Емцев Б.Т. Техническая гидродинамика. – М.: Машиностроение, 1987 – 433 с.
5. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1978 – 847 с.
6. Лятхер В.М., Прудовский А.М. Гидравлическое моделирование. - М.: Энергоатомиздат, 1984 – 397 с.
7. Седов Л.М. Методы подобия и размерности в механике. – М.: Наука, 1974 – 428 с.
8. Справочник по гидравлическим расчетам/ Под ред. П.Г. Киселева. – 4 изд. – М.: Энергия, 1977 – 312 с.
9. Чугаев Р.Р. Гидравлика: Учеб. Для вузов – Л.: Энергоиздат, 1982 – 670 с.

## Содержание

### Введение

#### 1. Основные физические свойства жидкости и газа

- 1.1. Модель сплошной среды
- 1.2. Плотность жидкости
- 1.3. Сжимаемость жидкости
- 1.4. Температурное расширение жидкости
- 1.5. Вязкость жидкости
- 1.6. Испаряемость жидкости
- 1.7. Растворимость газов в жидкости
- 1.8. Силы, действующие на жидкость

#### Примеры

#### Контрольные вопросы

#### 2. Основы гидростатики

- 2.1. Основные сведения
- 2.2. Гидростатическое давление
- 2.3. Основная теорема гидростатики
- 2.4. Условие равновесия жидкости
- 2.5. Дифференциальное уравнение равновесия жидкости (Уравнение Эйлера)
- 2.6. Основное дифференциальное уравнение в поле сил тяготения
- 2.7. Интеграл уравнения Эйлера. Закон Паскаля

#### Примеры. Контрольные вопросы

- 2.8. Интеграл Эйлера для сжимаемой среды
- 2.9. Относительное равновесие жидкости в поле сил тяготения
- 2.10. Равновесие тела в покоящейся жидкости. Закон Архимеда

#### Примеры

#### Контрольные вопросы

#### 3. Основы кинематики и динамики жидкости

#### 3.1. Основные понятия и определения кинематики и динамики жидкости

- 3.2. Гидравлические элементы потока
- 3.3. Геометрические характеристики потока
- 3.4. Трубка тока и элементарная струйка
- 3.5. Расход и средняя скорость потока
- 3.6. Условие неразрывности или сплошности движения жидкости
- 3.7. Методы исследования движения жидкости
- 3.8. Уравнение Эйлера для струйки жидкости

#### Контрольные вопросы

- 3.9. Интегрирование уравнения Эйлера для установившегося движения жидкости
- 3.10. Уравнение Бернулли для потока реальной жидкости.
- 3.11. Практическое применение уравнение Бернулли

Примеры

Контрольные вопросы

- 3.12. Гидравлические сопротивления. Режимы движения жидкости
- 3.13. Потери напора при равномерном движении жидкости
- 3.14. Способы определения потерь напора при равномерном движении жидкости
- 3.15. Местные гидравлические сопротивления

Примеры

Контрольные вопросы

4. Гидравлический расчет истечения

- 4.1. Общая характеристика истечения
- 4.2. Истечение жидкости из отверстия в тонкой стенке
- 4.3. Истечение при переменном напоре

Примеры

Контрольные вопросы

- 4.4. Истечение жидкости через насадки
- 4.5. Зависимость коэффициентов истечения от числа Рейнольдса
- 4.6. Вакуум в цилиндрической насадке
- 4.7. Практическое применение насадков

Примеры

Контрольные вопросы

5. Гидравлический удар в трубах

- 5.1. Физическая сущность гидравлического удара
- 5.2. Определение ударного давления и скорости распространения ударной волны
- 5.3. Способы гашения и примеры использования гидравлического удара

Примеры

Контрольные вопросы

6. Гидравлический расчет трубопроводов

- 6.1. Система уравнений
- 6.2. Методы расчета простых трубопроводов
- 6.3. Методы расчета сложных трубопроводов
- 7. Основы теории подобия, моделирования и анализа размерностей

- 7.1. Основные положения
- 7.2. Законы механического подобия
  - 7.2.1. Геометрическое подобие
  - 7.2.2. Кинематическое подобие
  - 7.2.3. Динамическое подобие
- 7.3. Гидродинамические критерии подобия

Контрольные вопросы

- 7.4. Физическое моделирование

Примеры

- 7.5. Анализ размерностей,  $\pi$ -теорема

Примеры

Контрольные вопросы

8. Основы движения грунтовых вод и двухфазных потоков

8.1. Движение грунтовых вод. Основные понятия движения грунтовых вод

8.2. Скорость фильтрации. Формула Дарси

8.3. Коэффициент фильтрации и методы его определения

8.4. Ламинарная и турбулентная фильтрация

8.5. Основное уравнение неравномерного движения грунтовых вод

8.6. Фильтрация через однородную земляную среду

8.7. Особенности гидравлики двухфазных потоков

8.7.1. Виды течений двухфазных потоков жидкости и газа

8.7.2. Основные определения

8.7.3. Истинное объемное парорасширение

8.7.4. Гидравлическое сопротивление двухфазных потоков

8.7.5. Критические истечения двухфазных потоков

8.8. Движение одиночных капель и пузырьков

8.8.1. Методы подобия и размерностей

8.8.2. Скорость движения капли и пузырька при  $Re < 1$

8.8.3. Скорость всплытия газового пузырька в жидкости

8.8.4. Особенности движения капель в газовых потоках

8.8.5. Схлопывание (расширение) полости в жидкости. Уравнение

Релея

8.8.6. Применимость уравнений