

**С.Ф. Клованич  
И.Н. Мироненко**

**МЕТОД  
КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ  
В МЕХАНИКЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОНА**

**Одесса – 2007 г.**

БКБ 38.53

УДК 624.04: 539.3

В монографии предложена методика расчета плосконапряженных железобетонных конструкций, позволяющая учитывать реальные свойства материала на базе теории течения бетона и метода конечных элементов. Представлена конечноэлементная модель железобетона, в основу которой положен неоднородный конечный элемент, где роль арматуры выполняют вставки в виде гибких стержней. Приведена проверка предлагаемой методики путем сопоставления результатов расчетов железобетонных конструкций с результатами расчетов по нормативным документам и известным опытными данными.

Для научных и инженерно-технических работников, аспирантов и студентов строительных и гидротехнических специальностей высших учебных заведений.

У монографії запропоновано методику розрахунку плосконапружених залізобетонних конструкцій, що дозволяє враховувати реальні властивості матеріалу на базі теорії течії бетону і методу скінчених елементів. Представлена скінченоелементна модель залізобетону, в основу якій встановлено неоднорідний скінчений елемент, де роль арматури виконують вставки у вигляді гнучких стрижнів. Наведено перевірку пропонованої методики шляхом зіставлення результатів розрахунків залізобетонних конструкцій з результатами розрахунків по нормативних документах і відомих дослідних даних.

Для наукових і інженерно-технічних працівників, аспірантів і студентів будівельних і гідротехнічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

**Рецензенты:**

д-р техн.наук, проф., академик Академии строительства Украины, зав. кафедрой «Строительная механика» Одесской государственной академии строительства и архитектуры **А.Ф. Яременко**.

д-р техн.наук, проф., академик Академии строительства Украины, зав. кафедрой «Металлических, деревянных и пластмассовых конструкций» Одесской государственной академии строительства и архитектуры **В.В. Стоянов**.

Печатается по решению Ученого совета  
Одесского национального морского университета  
от « 31 » октября 2007 г. (протокол № 2)

ISBN 966-7716-50-3

© С.Ф. Клованич,

И.Н. Мироненко

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Железобетон – физически нелинейный, комплексный, неоднородный материал, обладающий способностью к трещинообразованию. Однако, существующие нормативные документы, регламентируя учет особенностей деформирования железобетона, фактически приводят все расчетные зависимости лишь для линейных элементов (балки, колонны и т.д.) и только на отдельных, наиболее характерных стадиях работы. Между тем, к условно линейным элементам можно отнести лишь часть конструкций современных железобетонных зданий и сооружений. Другую часть составляют плоские и пространственные конструкции, работающие в условиях сложного напряженного состояния. Для них неприменима ни одна из общепринятых гипотез о характере распределения напряжений и деформаций по сечениям. Расчет таких конструкций выполняется обычно методом конечных элементов с использованием шагово-итерационных процедур на базе общих принципов механики деформируемого твердого тела и численных методов решения физически нелинейных задач. Это позволяет отказаться от статических и кинематических «балочных» гипотез и проследить за характером напряженно-деформированного состояния конструкций на различных этапах нагружения, включая предельные. Однако, в этом случае, достоверность расчетных результатов будет определяться, в основном, используемыми физическими моделями материала и соответствующими им определяющими соотношениями. В то же время, модели, основанные на классических теориях пластичности, не могут учесть всю специфику деформирования железобетона.

С другой стороны, несмотря на то, что метод конечных элементов в настоящее время занимает ведущее место среди всех остальных численных методов, что подтверждается огромным количеством промышленных программных комплексов его реализующих, проблемы, связанные с физической стороной решаемых задач, таких как нелинейность процесса, режимы нагружения и т.д., как правило, остаются за кадром этих комплексов. Немногочисленные попытки учесть реальные физико-механические процессы, протекающие при деформировании твердых тел, обычно наталкиваются на серьезные трудности, связанные с необходимостью втиснуть в рамки универсальных комплексов, предназначенных для решения большого класса самых разнообразных задач, те задачи, постановка и методы решения которых уникальны.

Данная работа посвящена, с одной стороны, построению модели железобетона при сложном напряженном состоянии, учитывающей его специфические особенности, с другой стороны, реализации этой модели в методе конечных элементов.

# ГЛАВА 1. ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЧНОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ ЖЕЛЕЗОБЕТОНА ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

## 1.1. Модели материалов

Бетон – упруго-пластический материал, характеризующийся нелинейной зависимостью между напряжениями и деформациями и разной сопротивляемостью на сжатие и растяжение [2].

Однако систематические исследования его физической нелинейности были начаты лишь в работах А.Ф.Лолейта [78] и В.И.Мурашева [83] при разработке методики расчета железобетонных изгибаемых элементов по прочности и жесткости.

Именно принцип А.Ф.Лолейта и теория В.И.Мурашева легли в основу экспериментально-теоретических исследований методов расчета железобетонных изгибаемых элементов, и нашли отражение в целом ряде ныне действующих нормативных документов. Эти концепции развивались и совершенствовались до настоящего времени. Все работы этого направления невозможно перечислить в связи с их многочисленностью.

Обе эти теории базируются на гипотезах о характере распределения напряжений по высоте сечения лишь на отдельных характерных стадиях работы элемента, и не дают ответа на вопрос о действительном характере напряжений в процессе деформирования – от начальной стадии до предельного состояния. Более того, в расчет принимаются только нормальные напряжения, и только продольные деформации в направлении оси балки (стержня).

Для точного ответа на вопрос о процессе деформирования железобетонных конструкций, необходимо привлечение общих методов механики деформирования твердого тела и теории пластичности.

Первые исследования пластичности материала при сложном напряженном состоянии связаны с работами А.А.Ильюшина [37] и Прандтля-Рейса [94, 168].

Однако, с самого начала было ясно, что для исследования пластичности бетона классические теории [37, 94, 168] неприменимы, так как бетон по разному сопротивляется растяжению-сжатию, обладает способностью к трещинообразованию, что обуславливает появление деформационной анизотропии. У бетона наблюдается также увеличение объема при трехосном сжатии, связанное с нарушением его структуры - так называемый эффект дилатации, что противоречит классической гипотезе об упругом изменении объема.

Одной из первых работ по исследованию пластичности бетона при сложном напряженном состоянии является работа Г.А.Гениева, В.Н.Киссюка, Г.А.Тюпина [25], в которой впервые сделана попытка учесть все перечисленные особенности материала. В ней бетон рассматривается нелинейно-упругим изотропным материалом, а железобетон трансверсально изотропным, как на стадиях до, так и после образования трещин.

Теория Г.А.Гениева, В.Н.Киссюка, Г.А.Тюпина [25] нашла свое развитие в работах П.М.Бича [17], С.Ф.Клованича [54], А.И.Козачевского [61], В.М.Круглова [65], В.И.Корсуна [63], А.П.Кричевского [64], а так же [66, 72-74, 86, 87, 112, 114, 152, 179].

Второе направление развития теории малых упруго-пластических деформаций связано с работами Н.И.Карпенко [38-44], его учеников и соавторов. В ней бетон, как до, так и после появления трещин рассматривается как анизотропный материал. Анизотропия в этом случае связана с процессом деформирования и получила название деформационной анизотропии. Она обусловлена, как процессом трещинообразования, так и дискретным расположением арматуры.

Первые исследования в этом направлении отражены в работах А.А.Гвоздева и Н.И. Карпенко [24], где используется эта гипотеза о деформационной ортотропии материала. При этом направление осей ортотропии совпадает с направлением осей главных напряжений.

В дальнейшем ортотропная модель разрабатывалась Н.И. Карпенко [38-42], а также получила свое развитие в работах Т.А.Балана, С.Ф.Клованича [6], Г.Р.Бидного [13, 15], А.С.Городецкого [26], В.С.Здоренко [35] и других авторов [50-52, 60, 61, 63, 69, 71, 80, 118, 120, 127, 168, 176].

Однако, теория малых упруго-пластических деформаций бетона, как изотропная, так и ортотропная является по своей физической природе деформационной теорией и оперирует с конечными величинами напряжений и деформаций. Эта теория дает надежные результаты только при простом пропорциональном нагружении. Ее использование, как отмечается в классических работах по теории пластичности [37, 94, 168], становится проблематичным при сложном режиме нагружения.

Учет эффекта разгрузки, повторного нагружения может быть осуществлен только на базе теории течений, когда изучается приращение деформаций и напряжений. При этом приращения деформации представляются двумя составляющими, одна из которых является обратимой (упругой), вторая необратимой (пластической). Пластическая часть приращений напряжений и деформаций согласно теории течения, ассоциируется с некоторой поверхностью, называемой поверхностью нагружения или пластического потенциала. Пластическое течение развивается по нормали к этой поверхности (ассоциированные теории) или с отклонением от нормали (неассоциированные теории). Как правило, эти поверхности строятся на базе предельных поверхностей материала путем их трансформации (деформационное упрочнение) либо смещения (трансляционное упрочнение). Различные варианты теории течения отличаются способом построения этих поверхностей.

В отличие от деформационных теорий, теории течения для бетонных материалов на сегодняшний день развиты значительно меньше.

Первые исследования по теориям течения для бетона появились относительно недавно и связаны с работами В.С.Ленского [75], З.Бажанта [3],

В.М.Круглова [65], В.И.Кудашова [67], П.М.Нахди [85], J.W.Rudnicki, J.R.Rice [169].

Однако, в последнее время наблюдается возросший интерес к теории течения для бетона, отраженной в работах А.В.Гришина [29], С.Ф.Клованича [55-57], В.П.Максименко [80], Е.Hansen [144], Н.Hartl [145], а также [154, 155, 166].

Современные варианты деформационной теории и теории течения существенным образом опираются на предельные поверхности материала, характеризующие прочность бетона при сложном напряженном состоянии. В деформационной теории с помощью этих поверхностей определяются параметры нелинейности. А в теориях течения с помощью этих поверхностей строятся поверхности нагружения, пластического потенциала и т.д.

Начало современного представления о природе прочности бетона при трехосном напряженном состоянии и способах ее описания положено в работе М.М.Филоненко-Бородича [104]. В дальнейшем исследования прочности бетона при трехосном напряженном состоянии были осуществлены в работах И.Н.Ахвердова [2], А.В.Яшина [112-114], Т.А.Балана, С.Ф.Клованича [6], П.М.Бича [16], Г.А.Гениева, В.Н.Киссюка, Г.А.Тюпина [25], Н.И.Карпенко [38], Е.С.Лейтеса [72, 74], Г.С.Писаренко, А.А.Лебедева [89], J.H.Argiris, G.Faust, J.Szimmat, P.Warnke, K.Willam [117], D.Darwin, D.A.Pecknold [129], S.Dei Poli [130], а также [53, 62, 65, 137, 139, 147-149, 167, 179].

## 1.2. Численные исследования

На этапе становления теории пластичности бетона и железобетона возможности реализации теоретических предложений применительно к расчету конструкций при сложном напряженном состоянии были весьма ограничены. Это было вызвано тем, что сложность исходных моделей материала приводила к необходимости решения громоздких систем дифференциальных уравнений. В замкнутом виде эти уравнения, как правило, решения не имели, а применение численных методов затруднялось отсутствием мощной вычислительной техники. Поэтому, несмотря на имеющиеся теоретические разработки, основная масса пространственных железобетонных конструкций рассчитывалась методами линейной теории упругости с использованием приближенных аналитических решений.

Крупным шагом в развитии методов расчета железобетонных конструкций с учетом реальных свойств материала явился метод В.И.Мурашева [83], который, однако, как уже отмечалось, может быть использован лишь для изгибаемых балочных элементов. К тому же напряженно-деформированное состояние конструкций с помощью этого метода определяется лишь на отдельных характерных стадиях их работы, в то время как работа на промежуточных стадиях остается неизученной.

Появление современных высокопроизводительных ЭВМ с большой памятью сделало возможным решение задач с достаточно сложными

расчетными моделями численными методами. В этой ситуации главным становится вопрос о выборе эффективного численного метода. Выбор метода решения – сложная и противоречивая проблема, не имеющая однозначного решения. Многообразие задач, субъективные оценки возможностей методов и степень владения ими, техническая оснащенность, математическая культура – вот далеко не полный перечень факторов влияющих на выбор метода решения одной и той же задачи [14]. Сначала в качестве основного при расчете железобетонных конструкций с учетом реальных свойств материала многими исследователями [43, 110] использовался метод конечных разностей, достоинства и недостатки которого хорошо известны. Но в дальнейшем основной упор в преобладающем большинстве исследований был сделан на метод конечных элементов (МКЭ), который к настоящему времени занял ведущее место, вытеснив постепенно все остальные численные методы. Преимущества МКЭ как численного метода очевидны. Это, прежде всего, возможность сведения задачи к системе линейных или нелинейных алгебраических уравнений непосредственно, без предварительной формулировки их дифференциальных аналогов. Кроме того метод конечных элементов привлек к себе внимание исследователей главным образом тем свойством, что сплошная среда разбивается на ряд элементов, которые можно рассматривать как конкретные ее части. Части конструкции можно выбрать таким образом, чтобы условия их работы отвечали условиям работы образцов в виде бетонных и железобетонных кубов, призм, цилиндров при стандартных испытаниях. И, наконец, основные процедуры МКЭ стандартны и не зависят от размерности и типа используемых конечных элементов, что позволяет осуществить унификацию этих процедур и создавать программные комплексы по расчету конструкций широкого класса и назначения.

Метод конечных элементов в сочетании с мощными ЭВМ допускает использование моделей материалов практически любой степени сложности. Благодаря МКЭ появилась реальная возможность перейти к расчету не только бетонных, но и железобетонных конструкций при сложном напряженном состоянии. Железобетон, как известно, является комплексным материалом, состоящим из бетона и стальной арматуры, работающих совместно, но обладающих различными механическими свойствами. МКЭ применительно к расчету железобетонных конструкций выступает не только как численный метод анализа, но и служит инструментом моделирования, когда модель материала отражает специфику самого метода конечных элементов.

Особенность железобетона как комплексного материала состоит в его способности работать в условиях образования и развития микротрещин. Трещинообразование выступает как процесс, места образования микротрещин и направления их развития определяются расчетом, хотя и приближенно с точностью до размеров элемента.

Впервые МКЭ для расчета плосконапряженных конструкций использовался в работе D.Ngo и A.C.Scordelis [157]. Бетон моделировался треугольными конечными элементами из линейно упругого изотропного

материала. Арматура представлялась стержневыми конечными элементами. В общих узлах стержневые и плоские элементы деформировались совместно. Основные положения работы [157] развил А.Н.Nilsen [158], который использовал дополнительные связующие конечные элементы между бетоном и арматурными стержнями, имитирующие силы сцепления. В работе L.A.Lutz [154] бетон и арматура при расчете плосконапряженных железобетонных конструкций представлялись плоскими треугольными конечными элементами, работающими совместно. Аналогичные предпосылки использовались в работе [121], однако между бетонными и стальными элементами устанавливались специальные связующие элементы в виде пружин конечной жесткости. Отметим, что указанные подходы не нашли достаточно широкого распространения прежде всего из-за трудности установления жесткости связующих элементов. Кроме того, их реализация сталкивается с затруднениями при моделировании процесса трещинообразования, имеющим принципиальное значение. И, наконец, расчетная схема конструкции представляется набором конечных элементов различных типов и размерностей, что иногда ведет к нарушению сплошности вдоль границ их стыковки.

Поэтому, в преобладающем большинстве дальнейших исследований применялись однотипные конечные элементы, но состоящие из комплексного, нелинейного, анизотропного материала – железобетона. При этом основные зависимости для элементов получались на основе механики композиционных материалов, а вопрос о совместной работе бетона и арматуры на стадиях до и после образования трещин решался не при рассмотрении взаимодействия бетонных и стальных элементов, а при формировании матриц упругости или жесткости железобетонных элементов. Определение характеристик таких элементов осуществляется обычно одним из следующих двух способов. Первый способ используется в работах Л.А.Козака [60], F.R.Hand, D.A.Pecknold, W.C.Shnobrich [143], F.B.Lin, Z.P.Bazant, J.C.Chern, A.H.Marchertas [151], O.C.Zienkiewicz, D.R.H.Oweh, D.V.Phillips, G.C.Nayak [180], N.S.Ottosen [161], R.J.Allwood, A.A.Bajarwan [115], A.A.Elwi, T.M.Hrudey [133] и заключается в разработке специальных изопараметрических конечных элементов, состоящих из бетона, пересекаемых арматурой в виде одиночных стержней или мембран, работающих на растяжение-сжатие в одном или двух направлениях. Жесткость таких элементов определяется как сумма жесткостей бетона и арматуры. Второй способ состоит в том, что арматура при помощи коэффициентов армирования равномерно распределяется по объему конечного элемента и железобетон представляется композиционным материалом, состоящим из двух сплошных сред – бетона и "размазанной" арматуры. Способ распределения арматуры по объему был предложен в статье А.А.Гвоздева и Н.И.Карпенко [24] при выводе определяющих соотношений для плоского железобетонного элемента и в дальнейшем использовался в работах Г.А.Гениева, В.Н.Киссюка, Г.А.Тюпина [25], А.С.Городецкого и В.С.Здоренко [26], Н.И.Карпенко [39], Г.Р.Бидного [13], M.Suidan, W.C.Schnobrich [175], V.Cervenka [127, 128], D.Darwin, D.A.Pecknold [129] и др. В настоящее время



этот способ получил значительное распространение и используется в большинстве численных исследований железобетонных конструкций. При этом совокупность стержней одного направления заменяется физически нелинейной сплошной средой, работающей, как правило, на растяжение-сжатие вдоль этого направления и на сдвиг - перпендикулярно ему. Первый способ, на наш взгляд, незаслуженно забыт.

При расчете по МКЭ считается, что трещины образуются по площадкам главных растягивающих напряжений, когда величины этих напряжений превышают предельные для бетона значения. Конечноэлементному моделированию работы железобетона с трещинами по площадкам главных напряжений при сложном напряженном состоянии уделялось много внимания, что подтверждается многочисленными и оживленными дискуссиями по данному вопросу. В результате этих дискуссий к настоящему времени определились два теоретических направления. Основы первого из них заложены в работе Г.А.Гениева, В.Н.Киссюка и Г.А.Тюпина [25] и развиты в работе [13]. С образованием трещин в направлении, перпендикулярном трещинам, бетон постепенно выключается из работы, что моделируется введением среднего фиктивного модуля деформаций растянутого между трещинами бетона. Значение этого модуля получалось либо из условия равенства усилий в трещине и средних на участке между трещинами с использованием известного коэффициента В.И.Мурашева, либо при помощи ниспадающей ветви на диаграмме работы материала при растяжении, приближенно отражающей экспериментальные данные [35, 152, 163]. Введение фиктивного модуля бетона в направлении нормали к трещине особенно удобно при использовании ортотропных моделей бетона. В этом случае направление трещин совпадает с осями, ортотропии и физические зависимости для бетона с трещинами имеют точно такой же вид, как и для бетона без трещин [13, 15, 26]. Отметим, что физические зависимости для арматурной среды не зависят от стадии работы элемента, а условие совместности двух сред формально распространяется и на элемент с трещинами.

Наиболее значительные успехи в моделировании работы железобетона с трещинами на основе МКЭ связаны со вторым направлением, автором которого является Н.И.Карпенко [39, 40]. Предложенная им теория является известным обобщением традиционной теории В.И.Мурашева для случая сложного напряженного состояния. В отличие от [25] железобетон с трещинами моделируется физически нелинейным анизотропным материалом, представляющим собой распределенную по объему арматуру, ожесточенную за счет остаточных связей ее с бетоном на участке между трещинами. Достоинством подхода является возможность учета сложного, неортогонального армирования, а также таких явлений, как нагельный эффект в арматуре, сил зацепления в трещине, ослабление бетонных сечений каналами арматуры, сдвиг берегов трещин и т.д. Теория Н.И.Карпенко получила развитие в работах [39-44]. Эта теория прошла широкую апробацию в отечественных программных комплексах, реализующих МКЭ для расчета плоскостных конструкций [27].

Отметим, что существующие модели деформирования железобетона с трещинами носят деформационный характер и справедливы лишь при простом пропорциональном нагружении. Вопросы разгрузки, закрытия трещин и их повторного открытия в этих моделях не рассматриваются и требуют дополнительных исследований.

## ГЛАВА 2. МОДЕЛЬ ПЛАСТИЧНОСТИ БЕТОНА

### 2.1. Общие соображения

Теория пластичности материалов представлена двумя направлениями – теория малых упругопластических деформаций (деформационная) и теория пластического течения. Если первое направление является развитием идей А.А.Ильюшина [37], то второе связано с работами Сен-Венана, Мизеса [10, 18, 94]. Каждое из этих направлений имеет свои достоинства и недостатки. К достоинствам деформационных моделей можно отнести их явно феноменологический характер, когда основные параметры получаются непосредственно из простейших испытаний, главный же их недостаток – это применимость только для случаев простого, пропорционального нагружения. Теории течения же, наоборот, позволяют достаточно просто учесть разгрузку и повторное нагружение, но в основе своей имеют, так называемые, поверхности пластичности или нагружения. Вид этих поверхностей зависит от типа материала, и для таких материалов, как бетон, носит достаточно сложный характер. Основные геометрические параметры этих поверхностей получаются, в основном, путем умозрительных построений и с трудом поддаются экспериментальному обоснованию.

Попытаемся создать модель бетона, ориентируясь на общую теорию течения, положив в основу поверхность нагружения, основные параметры которой получались бы по опытным данным, как это делается в деформационных теориях. В качестве отправных элементов модели принимаем предельную поверхность и диаграмму деформирования материала.

Теория течения формулируется в инкрементальной форме, когда рассматриваются не полные деформации, а их приращения. При этом они представляются суммой упругих и пластических составляющих [10, 18, 30, 34, 45, 94]

$$d\{\varepsilon\} = d\{\varepsilon\}_e + d\{\varepsilon\}_p, \quad (2.1)$$

где  $d\{\varepsilon\} = \{d\varepsilon_x \ d\varepsilon_y \ d\varepsilon_z \ d\gamma_{xy} \ d\gamma_{yz} \ d\gamma_{xz}\}$ .

Векторы  $d\{\varepsilon\}_e$  и  $d\{\varepsilon\}_p$  имеют структуру аналогичную вектору  $d\{\varepsilon\}$ .

Упругие деформации определяются через приращение напряжений с помощью обобщенного закона Гука

$$d\{\varepsilon\}_e = [D]^{-1} d\{\sigma\}, \quad (2.2)$$

где  $[D]$  – начальная матрица упругости материала [10, 34];

$d\{\sigma\} = \{d\sigma_x \ d\sigma_y \ d\sigma_z \ d\tau_{xy} \ d\tau_{yz} \ d\tau_{xz}\}$  – вектор приращений напряжений.

Приращения пластических деформаций, в соответствии с гипотезой Мизеса [18], являются потенциальными и определяются с помощью соотношения

$$d\{\varepsilon\}_p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}}, \quad (2.3)$$

которое является, по существу, математической записью, так называемого, ассоциированного закона течения, когда развитие пластических деформаций ассоциируется с некоторой потенциальной функцией  $F$ . Пластические деформации развиваются по нормали к поверхности, определенной этой функцией. При этом множитель  $\frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}}$  характеризует направление, а скалярный параметр  $\lambda$  - величину приращения пластических деформаций.

Функция  $F$  зависит от напряжений  $\partial\{\sigma\}$  и от некоторого скалярного параметра  $\chi$ , называемого параметром упрочнения, т.е.  $F = F(\{\sigma\}, \chi)$ . В классическом варианте теории течения [18] полагается, что  $\chi = 0$  и считается, что неупругое деформирование начинается только тогда, когда выполняется условие  $F = 0$ . В этом случае  $F$  называется функцией текучести. Если же  $\chi \neq 0$ , то функция называется функцией нагружения, а пластическое течение носит характер процесса и развивается постепенно в зависимости от выбранного параметра упрочнения [31]. В этом случае речь идет о, так называемой, ассоциированной теории течения с упрочнением. Именно этот вариант теории и развивается в настоящих исследованиях.

Подставляя в (2.1) выражения (2.2) и (2.3), имеем [34]

$$d\{\varepsilon\} = [D]^{-1} d\{\sigma\} + \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \lambda. \quad (2.4)$$

При пластическом течении напряжения находятся на поверхности нагружения [34], определяемой выражением  $F(\{\sigma\}, \chi) = 0$ . Дифференцируя его, получим

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_1} d\sigma_1 + \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} d\sigma_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial \chi} d\chi = 0 \quad (2.5)$$

или

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T d\{\sigma\} - \Lambda \lambda = 0,$$

$$\Lambda = -\frac{\partial F}{\partial \chi} d\chi \frac{1}{\lambda}, \quad (2.6)$$

где  $\lambda$  - коэффициент пропорциональности.

Запишем выражения (2.4) и (2.5) в форме симметричной матрицы [34]

$$\begin{Bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & \frac{\partial F}{\partial \sigma_1} \\ & [D]^{-1} & & \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ \frac{\partial F}{\partial \sigma_1} & \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} & \dots & -\Lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda \end{Bmatrix}. \quad (2.7)$$

Если теперь исключить  $\lambda$  из уравнения (2.7), то можно получить [34]

$$d\{\sigma\} = [D]_{ep} d\{\varepsilon\}, \quad (2.8)$$

$$[D]_{ep} = [D] - [D] \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T [D] \left[ \Lambda + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T [D] \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\} \right]^{-1}, \quad (2.9)$$

где  $[D]_{ep}$  – текущая упруго-пластическая матрица материала;

$[D]$  – начальная матрица упругости.

При учете упрочнения  $\Lambda \neq 0$  (в случае ассоциированной теории с упрочнением) параметр  $\chi$  определяется как пластическая часть работы при пластическом деформировании [34]

$$d\chi = \sigma_1 d\varepsilon_1^p + \sigma_2 d\varepsilon_2^p + \dots = \{\sigma\}^T d\{\varepsilon\}_p. \quad (2.10)$$

Тогда, используя закон течения Мизеса (2.3) запишем

$$d\chi = \lambda \{\sigma\}^T \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}}. \quad (2.11)$$

Исключая  $\lambda$  из выражения (2.6) получаем

$$\Lambda = -\frac{\partial F}{\partial \chi} \{\sigma\}^T \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}}. \quad (2.12)$$

Подставляя это выражение в (2.9), после некоторых преобразований окончательно запишем [34]

$$[D]_{ep} = [D] - \frac{[D] \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \left( \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right)^T [D]}{\left( \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right)^T [D] \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} - \frac{\partial F}{\partial \chi} \{\sigma\}^T \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}}}. \quad (2.13)$$

Таким образом, получено выражение для упругопластической матрицы, в которую входят производные функций по напряжениям.

Построение варианта ассоциированной теории течения бетона с упрочнением с помощью зависимостей (2.5-2.12) связано с конкретизацией функции нагружения и функцией  $\chi$ , обусловленной упрочнением материала.

Построение функции нагружения непосредственно из эксперимента представляет собой практически неразрешимую задачу. Поэтому, следуя большинству исследований, эту функцию и соответствующую ей поверхность будем строить на базе предельных поверхностей, описывающих условие прочности бетона при сложном напряженном состоянии.

Рассмотрим вывод зависимостей для описания условия прочности бетона.

## 2.2. Предельная поверхность

Известно, что условие прочности должно описывать выпуклую и гладкую поверхность, симметричную относительно диагонали пространства главных напряжений  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ . Строится эта поверхность обычно в местной цилиндрической системе координат  $z, \rho, \theta$ , связанной с исходной  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  следующими соотношениями [89, 90]

$$\left. \begin{aligned} z = \sqrt{3}\sigma_o; \quad \rho = \sqrt{3}\tau_o; \quad \sigma_o = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z); \quad \theta = \frac{1}{3} \arccos \left( \sqrt{2} \frac{I_3}{\tau_o^3} \right); \\ \tau_o = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_z - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)} \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

где  $\sigma_o, \tau_o$  – октаэдрические нормальные и касательные напряжения;

$\theta$  – угол вида напряженного состояния;

$I_3$  – третий инвариант девиатора напряжений, равный

$$I_3 = \begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma_o) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_o) & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_o) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{27} [2(\sigma_x^3 + \sigma_y^3 + \sigma_z^3) - 3(\sigma_x^2\sigma_y + \sigma_y^2\sigma_z + \sigma_z^2\sigma_x + \sigma_x\sigma_y^2 + \sigma_z\sigma_x^2 + \sigma_y\sigma_z^2) +$$

$$+ 12\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 9\sigma_x(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2) + 9\sigma_y(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2) + 9\sigma_z(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2) +$$

$$+ 54\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz}].$$

Иными словами, эта поверхность описывается уравнением  $f(\sigma_o, \tau_o, \theta) \equiv 0$ , которое обычно строится на базе опытных данных при частных видах напряженных состояний способом, предложенным М.М.Филоненко-Бородичем [104]. Сначала для значений  $\theta = 0^\circ$  и  $\theta = 60^\circ$  формируются две кривые  $\tau_1(\sigma_o)$  и  $\tau_2(\sigma_o)$ , аппроксимирующие данные, которые получены из опытов при  $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$  и  $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ . Затем осуществляется интерполяция для углов  $\theta$ , находящихся в интервале  $(0^\circ, 60^\circ)$ .

Характерные сечения поверхности  $f(\sigma_o, \tau_o, \theta) \equiv 0$  представлены на рис.2.1. Графики функций  $\tau_1(\sigma_o)$  и  $\tau_2(\sigma_o)$  имеют ряд характерных точек [62]. Так, кривая  $\tau_1(\sigma_o)$  пересекает ось  $\sigma_3$  в точке, соответствующей пределу прочности при одноосном сжатии  $-R_c$  и плоскость  $\sigma_1 - \theta - \sigma_2$  в точке, соответствующей пределу прочности при равномерном двухосном растяжении  $R_{2p}$ . Кривая  $\tau_2(\sigma_o)$  пересекает плоскость  $\sigma_2 - \theta - \sigma_3$  в точке, соответствующей пределу прочности при равномерном двухосном сжатии  $-R_{2c}$ , и ось  $\sigma_1$  в точке одноосного растяжения  $R_p$ . Координаты перечисленных точек показаны на рис. 2.1, а.

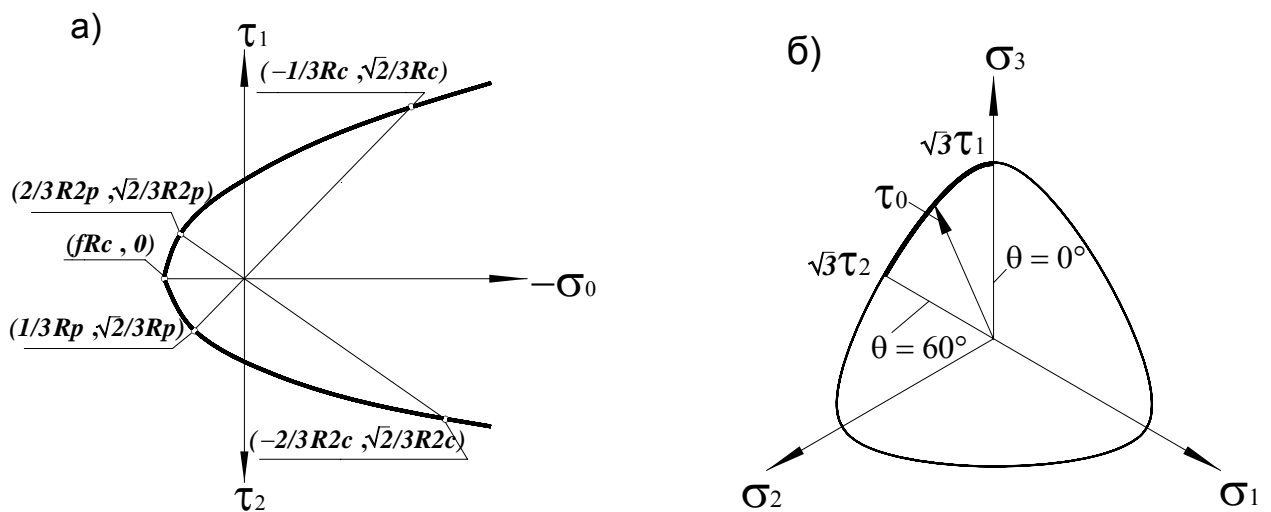


Рис. 2.1. Характерные сечения поверхности прочности:

- а) координаты характерных точек кривых  $\tau_1(\sigma_o)$  и  $\tau_2(\sigma_o)$ ;
- б) девиаторное сечение поверхности прочности

Кроме того, обе кривые пересекаются в точке с координатами  $(fR, 0)$ , соответствующей трехосному равномерному растяжению. Представим функции  $\tau_1(\sigma_0)$  и  $\tau_2(\sigma_0)$  в следующих формах [62]

$$\tau_1 = AR_c \left( \frac{\sigma_0}{R_c} - f \right)^\alpha, \quad (2.15)$$

$$\tau_2 = BR_c \left( \frac{\sigma_0}{R_c} - f \right)^\beta. \quad (2.16)$$

В общем виде коэффициенты, входящие в уравнения (2.15) и (2.16) могут быть получены подстановкой координат характерных точек (рис. 2.1, а), соответствующих случаям одноосного и двухосного сжатия и растяжения.

Так, подставляя в уравнение (2.15) значения  $\sigma_0 = -\frac{R_c}{3}$  и  $\tau_0 = \frac{\sqrt{2}}{3} R_c$ , соответствующие случаю одноосного сжатия и  $\sigma_0 = \frac{2}{3} R_{2p}$  и  $\tau_0 = \frac{\sqrt{2}}{3} R_{2p}$ , соответствующие случаю двухосного растяжения, получим значения параметров  $\alpha$  и  $A$

$$\alpha = \frac{\ln(m_p \omega)}{\ln\left(\frac{f - 2/3 m_p \omega}{f + 1/3}\right)} \leq 1, \quad (2.17)$$

$$A = \frac{\sqrt{2}}{3} \left( -\frac{1}{3} - f \right)^{-\alpha}. \quad (2.18)$$

Подставляя же в уравнение (2.16) значения  $\sigma_0 = -\frac{2}{3} R_{2c}$  и  $\tau_0 = \frac{\sqrt{2}}{3} R_{2c}$ , соответствующие случаю двухосного сжатия и  $\sigma_0 = \frac{R_p}{3}$  и  $\tau_0 = \frac{\sqrt{2}}{3} R_p$ , соответствующие случаю одноосного растяжения, получим значения параметров  $\beta$  и  $B$

$$\beta = \frac{\ln(\omega / m_c)}{\ln\left(\frac{f - \omega/3}{2/3 m_c + f}\right)} \leq 1, \quad (2.19)$$



$$B = \frac{\sqrt{2}}{3} \omega \left( \frac{\omega}{3} - f \right)^{-\beta}. \quad (2.20)$$

В выражениях (2.17), (2.19), (2.20):  $\omega = \frac{R_p}{R_c}$ ;  $m_p = \frac{R_{2p}}{R_p}$ ;  $m_c = \frac{R_{2c}}{R_c}$ .

Рассмотрим теперь, так называемое, девиаторное сечение поверхности прочности (рис. 2.1, б). Это сечение должно иметь форму криволинейного треугольника, для которого установлены только два радиуса  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , что соответствует значениям угла вида напряженного состояния  $\theta = 0^\circ$  и  $\theta = 60^\circ$ .

Величин  $\tau_0$ , соответствующая промежуточным значениям  $0 \leq \theta \leq 60^\circ$ , может быть найдена приближенно путем криволинейной интерполяции между двумя граничными случаями. При этом интерполяционная функция должна удовлетворять следующим условиям:

$$\left. \begin{array}{l} \text{а) при } \theta = 0^\circ \quad \tau_0 = \tau_1, \quad \frac{\partial \tau_0}{\partial \theta} = 0; \\ \text{б) при } \theta = 60^\circ \quad \tau_0 = \tau_2, \quad \frac{\partial \tau_0}{\partial \theta} = 0. \end{array} \right\} \quad (2.21)$$

Соблюдение этих условий обеспечивает неразрывность и гладкость девиаторного сечения. Исследованиям девиаторного сечения поверхности прочности посвящен ряд работ [53, 112, 116, 117, 179]. Данные этих исследований и виды интерполяционных функций, которые удовлетворяют условиям (2.21), приведены в табл.1.

Следует отметить, что анализ функций, приведенных в табл.1, показал, что все они с одинаковым успехом могут быть использованы для интерполяции между предельными значениями  $\tau_1$  и  $\tau_2$ .

В дальнейших исследованиях примем выражение [53], которое имеет вид

$$\rho(\theta) = 1 - 4(1-c) \cos \theta (1 - \cos \theta) = 1 - 8(1-c) \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \theta. \quad (2.22)$$

Поскольку  $\tau_c = \tau_1$ ,  $\tau_t = \tau_2$  и  $\tau_0 = \rho(\theta)\tau_c$  окончательно получим следующее выражение

$$\tau_0 = \tau_1(\sigma_0)\rho(\theta) \quad (2.23)$$

или

$$f(\sigma_0, \tau_0, \theta) = \tau_0 - \tau_1(\sigma_0)\rho(\theta) = 0,$$

**Интерполяционные функции  $\rho = \rho(\theta)$  контуров девиаторного сечения  
поверхности прочности между предельными значениями  $\tau_1$  и  $\tau_2$**

№ п/п	Автор	Вид функции	Аргумент
1.	Willam K.J. Warnke E.P. [177]	$\rho(\theta) = \frac{2a \cos \theta + b \sqrt{a(4 \cos^2 \theta - 1) + b^2}}{4a \cos^2 \theta + b^2}$	$\theta = \arccos \left( \frac{3 + \mu}{2\sqrt{3 + \mu^2}} \right)$
2.	Argiris [115]	$\rho(\theta) = \frac{c}{1 + \frac{c}{2} + \left(1 - \frac{c}{2}\right) \cos 3\theta}, \quad c = \frac{\tau_t}{\tau_c}$	$\theta = \arccos \left( \frac{3 + \mu}{2\sqrt{3 + \mu^2}} \right)$
3.	Ahmad Shah [114]	$\rho(\theta) = 1 - (1 - c) \left(1 - \frac{\theta}{60^\circ}\right)^2$	$\theta = \arccos \left( \frac{3 + \mu}{2\sqrt{3 + \mu^2}} \right)$
4.	Яшин А.В. [110]	$\rho(\theta) = 1 - a \sin \frac{3}{2} \theta + b \sin^2 \frac{3}{2} \theta$	$\theta = \arccos \left( \frac{3 - \mu}{2\sqrt{3 + \mu^2}} \right)$
5.	Клованич С.Ф. [53]	$\rho(\theta) = 1 - 4(1 - c) \cos \theta (1 - \cos \theta)$	$\theta = \arccos \left( \frac{3 - \mu}{2\sqrt{3 + \mu^2}} \right)$
6.	Наши предложе- ния	$\rho(\mu) = 1 - \frac{1}{2}(1 - c) \left(1 + \frac{3}{2} \mu - \frac{1}{2} \mu^3\right)$	$\theta = \arccos \left( \frac{3 - \mu}{2\sqrt{3 + \mu^2}} \right)$
7.		$\rho(\theta) = 1 - \frac{27}{\pi^2} \theta^2 (1 - c) \left(1 - \frac{2}{\pi} \theta\right)$	$\theta = \arccos \left( \frac{3 - \mu}{2\sqrt{3 + \mu^2}} \right)$
8.		$\rho(\theta) = \cos \left[ \left( \frac{3}{\pi} \arccos c \right) \theta \right]$	$\theta = \arccos \left( \frac{3 - \mu}{2\sqrt{3 + \mu^2}} \right)$

удовлетворяющее условию гладкости сечений поверхности прочности плоскостями  $\sigma_0 = const$ . Функция  $f(\sigma_0, \tau_0, \theta)$  в аналитической форме описывает искомую поверхность прочности.

Анализируя приведенные выражения, нетрудно установить, что в общем случае для однозначного описания функций прочности требуется пять независимых параметров материала соответствующих частным случаям напряженного состояния, а именно: прочность бетона при одноосном сжатии и растяжении  $R_c$  и  $R_p$ , прочность при двухосном равномерном сжатии и растяжении  $R_{2c}$  и  $R_{2p}$ , и прочность при трехосном равномерном растяжении, которое характеризуется параметром  $fR$ .

Для указанных случаев напряженного состояния эти параметры могут быть определены экспериментально.

### 2.3 Поверхность нагружения

Теперь можно приступить к построению поверхности нагружения  $F(\{\sigma\}, \chi)$ . Получим ее на базе предельной поверхности в предположении равномерного расширения поверхности нагружения, пока в предельном состоянии она не совпадет с поверхностью прочности (2.23). Процесс получения поверхности нагружения наглядно представлен на рис. 2.2, или в аналитической форме

$$f(\sigma_0, \tau_0, \theta) + h(\chi) = 0,$$

либо так

$$F(\sigma_0, \tau_0, \theta, \chi) = \tau_0 + h(\chi) - \tau_1 \rho = 0, \quad (2.24)$$

где  $\chi$  - параметр упрочнения,  $h(\chi)$  - функция упрочнения.

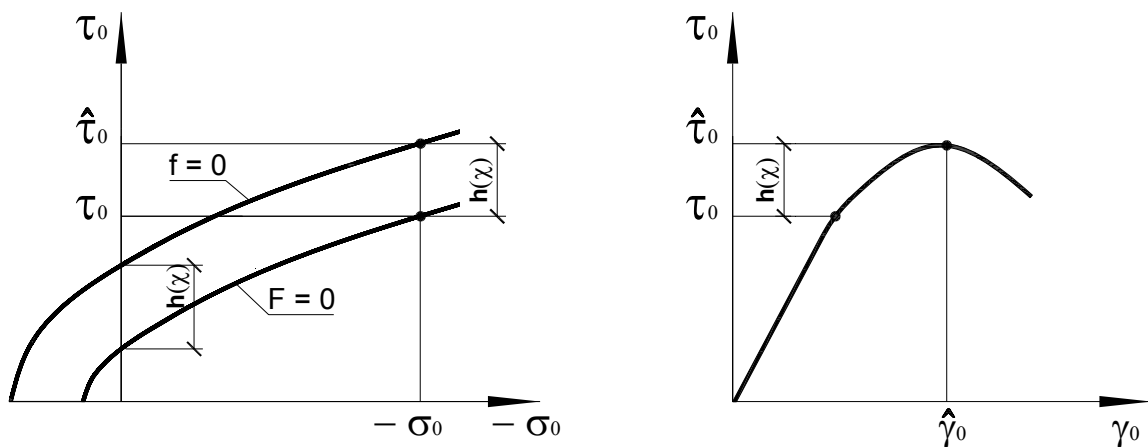


Рис. 2.2. Поверхность нагружения

Теперь, располагая функцией нагружения, можно определить производные, входящие в выражение (2.13), представленные вектором

$$\frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_z} \quad \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \quad \frac{\partial F}{\partial \tau_{yz}} \quad \frac{\partial F}{\partial \tau_{xz}} \right\}. \quad (2.25)$$

Переходя к переменным  $\tau_0$ ,  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  и  $\theta$  из (2.24) можно получить

$$\frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} = [C] \left\{ \frac{\partial F}{\partial \tau_0} \quad \frac{\partial F}{\partial \tau_1} \quad \frac{\partial F}{\partial \tau_2} \quad \frac{\partial F}{\partial \theta} \right\}, \quad (2.26)$$

$$\text{где } [C] = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccc} \frac{\partial \tau_0}{\partial \sigma_x} & \frac{\partial \tau_1}{\partial \sigma_x} & \frac{\partial \tau_2}{\partial \sigma_x} & \frac{\partial \theta}{\partial \sigma_x} \\ \frac{\partial \tau_0}{\partial \sigma_y} & \frac{\partial \tau_1}{\partial \sigma_y} & \frac{\partial \tau_2}{\partial \sigma_y} & \frac{\partial \theta}{\partial \sigma_y} \\ \frac{\partial \tau_0}{\partial \sigma_z} & \frac{\partial \tau_1}{\partial \sigma_z} & \frac{\partial \tau_2}{\partial \sigma_z} & \frac{\partial \theta}{\partial \sigma_z} \\ \frac{\partial \tau_0}{\partial \tau_{xy}} & \frac{\partial \tau_1}{\partial \tau_{xy}} & \frac{\partial \tau_2}{\partial \tau_{xy}} & \frac{\partial \theta}{\partial \tau_{xy}} \\ \frac{\partial \tau_0}{\partial \tau_{yz}} & \frac{\partial \tau_1}{\partial \tau_{yz}} & \frac{\partial \tau_2}{\partial \tau_{yz}} & \frac{\partial \theta}{\partial \tau_{yz}} \\ \frac{\partial \tau_0}{\partial \tau_{xz}} & \frac{\partial \tau_1}{\partial \tau_{xz}} & \frac{\partial \tau_2}{\partial \tau_{xz}} & \frac{\partial \theta}{\partial \tau_{xz}} \end{array} \right|. \end{array} \quad (2.27)$$

Частные производные по напряжениям в выражении (2.26) и (2.27) определяют стандартным образом, как производные сложной функции по независимым переменным  $\tau_0$ ,  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  и  $\theta$  [99]

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial \tau_0} = 1; \quad \frac{\partial F}{\partial \tau_1} = 8 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \theta - 1; \quad \frac{\partial F}{\partial \tau_2} = -8 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \theta; \\ \frac{\partial F}{\partial \theta} = 4(\tau_1 - \tau_2) \left(1 - 4 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \sin \theta \end{array} \right\}. \quad (2.28)$$

Определим производные  $\sigma_0$ ,  $\tau_0$  по  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{xz}$

$$\left. \begin{aligned}
& \frac{\partial \tau_0}{\partial \sigma_x} = \frac{2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z}{9\tau_0}, \quad \frac{\partial \tau_1}{\partial \sigma_x} = \frac{1}{3} \alpha A \left( \frac{\sigma_0}{R_c} - f \right)^{\alpha-1}, \quad \frac{\partial \tau_2}{\partial \sigma_x} = \frac{1}{3} \beta A \left( \frac{\sigma_0}{R_c} - f \right)^{\beta-1}, \\
& \frac{\partial \theta}{\partial \sigma_x} = -\frac{2}{2\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{I_3}{\tau_0^3} \right)^2}} \cdot \frac{\frac{\partial I_3}{\partial \sigma_x} \tau_0 - 3I_3 \frac{\partial \tau_0}{\partial \sigma_x}}{\tau_0^4}; \\
& \frac{\partial \tau_0}{\partial \sigma_y} = \frac{2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z}{9\tau_0}, \quad \frac{\partial \tau_1}{\partial \sigma_y} = \frac{1}{3} \alpha A \left( \frac{\sigma_0}{R_c} - f \right)^{\alpha-1}, \quad \frac{\partial \tau_2}{\partial \sigma_y} = \frac{1}{3} \beta B \left( \frac{\sigma_0}{R_c} - f \right)^{\beta-1}, \\
& \frac{\partial \theta}{\partial \sigma_y} = -\frac{2}{2\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{I_3}{\tau_0^3} \right)^2}} \cdot \frac{\frac{\partial I_3}{\partial \sigma_y} \tau_0 - 3I_3 \frac{\partial \tau_0}{\partial \sigma_y}}{\tau_0^4}; \\
& \frac{\partial \tau_0}{\partial \sigma_z} = \frac{2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y}{9\tau_0}, \quad \frac{\partial \tau_1}{\partial \sigma_z} = \frac{1}{3} \alpha A \left( \frac{\sigma_0}{R_c} - f \right)^{\alpha-1}, \quad \frac{\partial \tau_2}{\partial \sigma_z} = \frac{1}{3} \beta B \left( \frac{\sigma_0}{R_c} - f \right)^{\beta-1}, \\
& \frac{\partial \theta}{\partial \sigma_z} = -\frac{2}{2\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{I_3}{\tau_0^3} \right)^2}} \cdot \frac{\frac{\partial I_3}{\partial \sigma_z} \tau_0 - 3I_3 \frac{\partial \tau_0}{\partial \sigma_z}}{\tau_0^4}; \\
& \frac{\partial \tau_0}{\partial \tau_{xy}} = \frac{2}{3} \frac{\tau_{xy}}{\tau_0}, \quad \frac{\partial \tau_1}{\partial \tau_{xy}} = 0, \quad \frac{\partial \tau_2}{\partial \tau_{xy}} = 0, \\
& \frac{\partial \theta}{\partial \tau_{xy}} = -\frac{2}{2\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{I_3}{\tau_0^3} \right)^2}} \cdot \frac{\frac{\partial I_3}{\partial \tau_{xy}} \tau_0 - 3I_3 \frac{\partial \tau_0}{\partial \tau_{xy}}}{\tau_0^4}; \\
& \frac{\partial \tau_0}{\partial \tau_{yz}} = \frac{2}{3} \frac{\tau_{yz}}{\tau_0}, \quad \frac{\partial \tau_1}{\partial \tau_{yz}} = 0, \quad \frac{\partial \tau_2}{\partial \tau_{yz}} = 0, \\
& \frac{\partial \theta}{\partial \tau_{yz}} = -\frac{2}{2\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{I_3}{\tau_0^3} \right)^2}} \cdot \frac{\frac{\partial I_3}{\partial \tau_{yz}} \tau_0 - 3I_3 \frac{\partial \tau_0}{\partial \tau_{yz}}}{\tau_0^4}; \\
& \frac{\partial \tau_0}{\partial \tau_{xz}} = \frac{2}{3} \frac{\tau_{xz}}{\tau_0}, \quad \frac{\partial \tau_1}{\partial \tau_{xz}} = 0, \quad \frac{\partial \tau_2}{\partial \tau_{xz}} = 0, \\
& \frac{\partial \theta}{\partial \tau_{xz}} = -\frac{2}{2\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{I_3}{\tau_0^3} \right)^2}} \cdot \frac{\frac{\partial I_3}{\partial \tau_{xz}} \tau_0 - 3I_3 \frac{\partial \tau_0}{\partial \tau_{xz}}}{\tau_0^4}.
\end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

Таким образом, для определения упругопластической матрицы  $[D]_{ep}$  (2.13) осталось определить параметр  $\frac{\partial F}{\partial \chi}$ , связанный с упрочнением бетона. Рассмотрим получение этого параметра.

## 2.4. Упрочнение

Параметр упрочнения определяется, как было отмечено ранее, через возможную работу напряжений на пластических деформациях [29, 34, 85, 94], т.е.

$$\partial \chi = \sigma_o \partial \varepsilon_o^p + \tau_o \partial \gamma_o^p. \quad (2.30)$$

Учитывая, что  $\frac{\partial F}{\partial \chi} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_o} \frac{\partial \sigma_o}{\partial \chi} + \frac{\partial F}{\partial \tau_o} \frac{\partial \tau_o}{\partial \chi}$ , а также

$$\frac{\partial \sigma_o}{\partial \chi} = \frac{\partial \sigma_o}{\sigma_o \partial \varepsilon_o^p + \tau_o \partial \gamma_o^p} = \frac{K_p H_p}{\sigma_o H_p + \tau_o K_p} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \tau_o}{\partial \chi} = \frac{\partial \tau_o}{\sigma_o \partial \varepsilon_o^p + \tau_o \partial \gamma_o^p} \approx \frac{1}{\tau_o} G_p,$$

где  $K_p = \frac{\partial \sigma_o}{\partial \varepsilon_o^p}$  – пластический объемный модуль;

$G_p = \frac{\partial \tau_o}{\partial \gamma_o^p}$  – пластический модуль сдвига;

$H_p = \frac{\partial \sigma_o}{\partial \gamma_o^p}$  – пластический модуль дилатации,

будем иметь

$$\frac{\partial F}{\partial \chi} = \frac{K_p H_p}{\sigma_o H_p + \tau_o K_p} \frac{\partial F}{\partial \sigma_o} + \frac{1}{\tau_o} G_p \frac{\partial F}{\partial \tau_o}. \quad (2.31)$$

Для окончательного определения компонентов выражения (2.13), связанных с упрочнением, необходимо установить величины пластических модулей в формуле (2.31). Эти модули определим с помощью диаграмм деформирования.

## 2.5. Пластические модули

Прежде сформулируем зависимости между компонентами октаэдрических напряжений  $\sigma_o, \tau_o$  и деформаций  $\varepsilon_o = 1/3(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$ ,

$$\gamma_o = \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{2}{3}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)} \quad \text{в виде}$$

функций  $\sigma_o = \sigma_o(\varepsilon_o, \gamma_o)$ ,  $\tau_o = \tau_o(\gamma_o)$ . Для определения этих функций будем использовать диаграммы деформирования бетона, аналогичные диаграмме при одноосном сжатии-растяжении [132]. На рис. 2.3 показана функция  $\tau_o = \tau_o(\gamma_o)$  в относительных координатах  $\eta = \gamma / \hat{\gamma}$ ,  $\xi = \tau / \hat{\tau}$ , где  $\hat{\tau}$  и  $\hat{\gamma}$  - координаты вершины диаграммы.

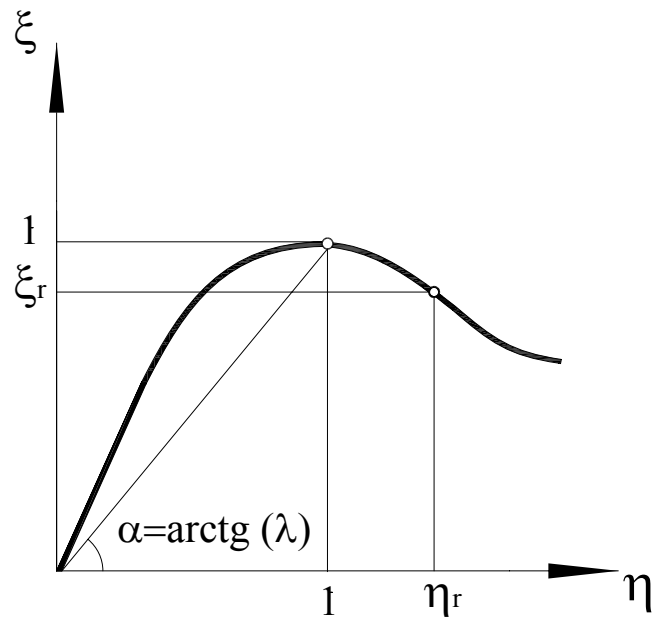


Рис. 2.3. Исходная диаграмма

Выражение для этой функции имеет вид

$$\xi = \frac{\lambda \eta}{1 + A\eta + B\eta^2 + C\eta^3}, \quad (2.32)$$

где  $\hat{\gamma}_o = \lambda \frac{\hat{\tau}_o}{2G_o}$ ;

$$C = \lambda \frac{1 - \xi_r}{\xi_r (\eta_r - 1)^2} - \frac{1}{\eta_r};$$

$$B = 1 - 2C;$$

$$A = C + \lambda - 2;$$

$G_o$  - начальный модуль упругости бетона при сдвиге;

$\xi_r \approx 0.85$ ,  $\eta_r \approx 1.41$  - координаты точки на ниспадающей ветви;

$\lambda$ -коэффициент упругопластических деформаций, определяемый экспериментально и зависящий от вида бетона, его значение принимается в диапазоне 1.8-2.5.

Пластический модуль сдвига равен

$$G_p = \frac{\partial \tau_o}{\partial \gamma_o^p} = \frac{\partial \tau_o}{\partial \gamma_o - \partial \gamma_o^e} = \frac{G_o G}{G_o - G}, \quad (2.33)$$

где модуль сдвига для полных деформаций

$$G = \frac{\partial \tau_o}{\partial \gamma_o} = \frac{\widehat{\tau}_o}{\widehat{\gamma}_o} \frac{\partial \xi}{\partial \eta} = \frac{2G_o}{\lambda} \xi', \quad \xi' = \frac{1 - B\eta^2 - 2C\eta^3}{(1 + A\eta + B\eta^2 + C\eta^3)^2}.$$

Для определения пластических модулей объемных деформаций и дилатации представим диаграмму для всестороннего сжатия в виде произведения двух функций  $\sigma_o = \sigma_o(\varepsilon_o, \gamma_o) = f_1(\varepsilon_o) f_2(\gamma_o)$ , первая из которых определяет нелинейность объемного деформирования бетона, вторая – эффект дилатации. Функцию  $f_1(\varepsilon_o)$  сформулируем по аналогии с выражением (2.23) в

виде  $f_1(\sigma_o) = \widehat{\sigma}_o \xi$ , в котором, однако  $\eta = \frac{\varepsilon_o}{\widehat{\varepsilon}_o}$ ;  $\widehat{\varepsilon}_o = \lambda \frac{\widehat{\sigma}_o}{3K_o}$ . Для функции

$f_2(\gamma_o)$  может быть рекомендовано выражение [67]:  $f_2(\gamma_o) = \exp(\omega \zeta / (1 - \zeta))$ , где  $\zeta = \gamma_o / \widehat{\gamma}_o$ . Тогда модули объемных деформаций и дилатации равны

$$K = \frac{\partial \sigma_o}{\partial \varepsilon_o} = \widehat{\sigma}_o f_2(\gamma_o) \xi'; \quad H = f_1(\varepsilon_o) f_2(\gamma_o) \frac{\omega}{\widehat{\gamma}_o (1 - \zeta)^2},$$

а соответствующие пластические модули имеют вид

$$K_p = \frac{\partial \sigma_o}{\partial \sigma_o^p} = \frac{\partial \sigma_o}{\partial \varepsilon_o - \partial \varepsilon_o^e} = \frac{K_o K}{K_o - K}; \quad H_p = H, \quad (2.34)$$

где  $K_o$  - начальный модуль объемных деформаций бетона.

Таким образом, сформулированы аналитические зависимости, определяющие нелинейное деформирование бетона при сложном напряженном состоянии и сложном нагружении. Другими словами сформулирован вариант ассоциированной теории течения бетона с изотропным упрочнением.



## ГЛАВА 3. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ БЕТОНА И ЖЕЛЕЗОБЕТОНА

### 3.1. Постановка задачи механики железобетона. Система разрешающих уравнений

Задача механики железобетона рассматривается, как общая задача механики сплошной среды и может быть сформулирована следующим образом [14]: известны (заданы) внешние воздействия на тело, так или иначе закрепленное или движущееся в пространстве, как функции координат и времени. Необходимо найти некоторые системы функций координат и времени, описывающие состояние этого тела. Под внешними воздействиями понимают силовые, температурные, динамические, начальные и другие воздействия.

В систему искомых функций входит, как правило, компоненты вектора перемещений  $\{u\} = \{u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)\}$ , а также векторов напряжений  $\{\sigma\} = \{\sigma_x(x, y, z), \sigma_y(x, y, z), \sigma_z(x, y, z), \tau_{xy}(x, y, z), \tau_{yz}(x, y, z), \tau_{zx}(x, y, z)\}$  и деформаций  $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x(x, y, z), \varepsilon_y(x, y, z), \varepsilon_z(x, y, z), \gamma_{xy}(x, y, z), \gamma_{yz}(x, y, z), \gamma_{zx}(x, y, z)\}$ . Процедура определения указанных функций применительно к инженерным задачам называется расчетом конструкций. С математической точки зрения расчет конструкций сводится к решению краевых задач для системы уравнений, включающих [14]:

уравнения равновесия

$$[\Phi]^T \{\sigma\} = \{G_v\} ; \quad (3.1)$$

геометрические уравнения (Коши)

$$\{\varepsilon\} = [\Phi]\{u\}; \quad (3.2)$$

определяющие (физические) уравнения

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}, \quad (3.3)$$

где  $[\Phi]$  - матрица дифференциальных операторов

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix},$$

где  $\{G_v\} = \{X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z)\}$  - вектор-функция объемных сил;

$[D]$  - матрица механических характеристик материала размером 6 x 6.

В частности для упругого изотропного материала она равна

$$[D] = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix},$$

*симметрично*

где  $E$  - модуль упругости материала;

$\mu$  - коэффициент Пуассона.

Решая совместно (3.3), (3.2) в (3.1), например, относительно неизвестных перемещений можно получить разрешающие уравнения в виде

$$[\Phi]^T [D] [\Phi] \{u\} = \{G_v\}. \quad (3.4)$$

Уравнения (3.1)-(3.4) должны быть дополнены граничными условиями - кинематическими и статическими.

Отметим, что соотношения (3.3) определяются выбором модели материала и для бетона и железобетона формулируются на базе общих физических уравнений, учитывающих его основные свойства.

Разрешающие уравнения (3.1) - (3.4) возможно существенно упростить для решения некоторых частных задач. Так, в случае осесимметричной задачи в цилиндрических координатах  $r, \theta, z$ , где  $z$ -ось симметрии, когда напряженно-деформированное состояние не зависит от угла  $\theta$  и характеризуется

вектор-функциями  $\{u\} = \{u(r, z)w(r, z)\}$ ,  $\{\sigma\} = \{\sigma_r(r, z)\sigma_\theta(r, z)\sigma_z(r, z)\tau_{rz}(r, z)\}$  и определяется внешними воздействиями  $\{G_v\} = \{R_v(r, z)Z_v(r, z)\}$ , матрица характеристик  $[D]$  будет иметь размерность 4 x 4 и для упругого изотропного материала имеет вид

$$[D] = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ & 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ & & 1 & 0 \\ \text{симметрично} & & & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix}.$$

Матрица дифференциальных операторов будет равна

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 1/r & 0 \\ 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial z & \partial/\partial x \end{bmatrix}.$$

Для плоской задачи в случае плоского напряженного или плоского деформированного состояния, когда  $\{u\} = \{u(x, y)v(x, y)\}$ ,  $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x(x, y)\varepsilon_y(x, y)\gamma_{xy}(x, y)\}$ ;  $\{\sigma\} = \{\sigma_x(x, y)\sigma_y(x, y)\tau_{xy}(x, y)\}$ , матрица  $[D]$  имеет размерность 3 x 3 и для упругого изотропного материала равна

$$[D] = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}.$$

Матрица  $[\Phi]$  равна

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix}.$$

Несмотря на относительную простоту сформулированной задачи по расчету конструкций, лишь для ограниченного класса тел и нагрузок, совершенно недостаточных для технических приложений, их удастся проинтегрировать точно и получить искомую систему функций перемещений, деформаций и напряжений. Обычно расчет разнообразных и сложных сооружений, распространенных в инженерной практике, связан с почти непреодолимыми математическими трудностями, поэтому, как правило, используют приближенные численные методы. В большинстве современных приложений в качестве численного метода выбирается метод конечных элементов, сущность которого применительно к нелинейным задачам механики железобетона изложена далее.

### 3.2. Дискретизация области

Рассмотрим твердое деформируемое тело, находящееся в равновесии под внешними воздействиями (силовыми, температурными и т.д.) (рис. 3.1) [14].

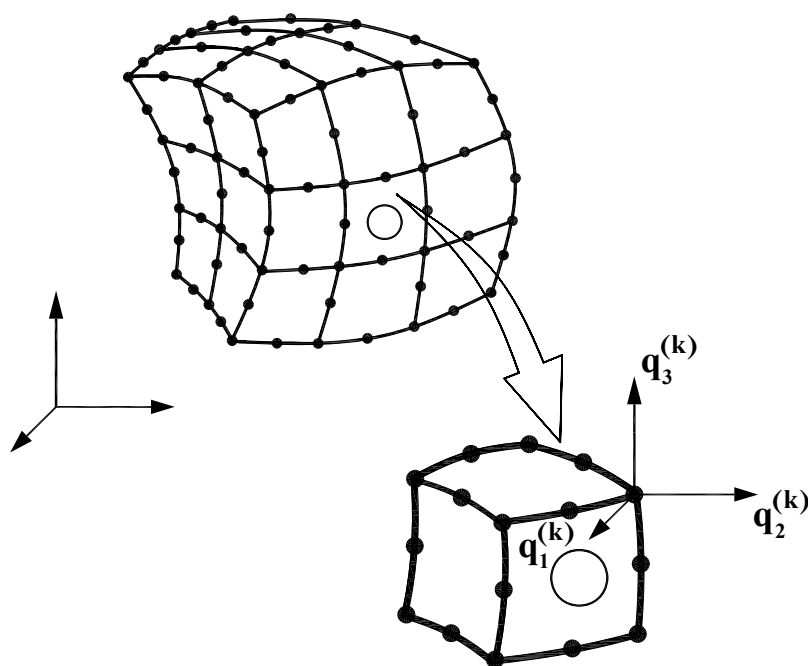


Рис. 3.1. Конечноэлементная модель твердого тела

Мысленно расчленим тело на конечные элементы. Выделим типичный  $i$ -ый конечный элемент и предположим, что этот элемент находится под воздействием только усилий взаимодействия со смежными элементами, возникающими при деформировании тела. Эти силы по отношению к выделенному элементу будем рассматривать как внешние. Очевидно, что если тело находится в равновесии, то и его  $i$ -ый элемент под действием указанных сил также находится в равновесии. Приложим далее к  $i$ -му элементу вместо реальных распределенных усилий, действующих вдоль границ его стыковки со смежными элементами, статически эквивалентные узловые силы, т.е. силы,

действие которых вызывает внутри элемента напряженно-деформированное состояние, аналогичное тому, которое было в нем при фактическом нагружении. Совокупность этих усилий представим вектором столбцом  $\{R\}_i = \{\{R\}_i^{(1)} \{R\}_i^{(2)} \dots \{R\}_i^{(k)} \dots \{R\}_i^{(m)}\}$ , где  $\{R\}_i^{(k)} = \{R_1^{(k)} R_2^{(k)} \dots R_r^{(k)}\}$  - вектор узловых усилий в  $k$ -ом узле  $i$ -го элемента, компонентами которого являются эквивалентные силы по направлениям  $1, 2, \dots, r$ . Поставим в соответствии каждому узловому усилию узловое перемещение и введем в рассмотрение вектор перемещений  $\{q\}_i = \{\{q\}_i^{(1)} \{q\}_i^{(2)} \dots \{q\}_i^{(k)} \dots \{q\}_i^{(m)}\}$ , где  $\{q\}_i^{(k)} = \{q_1^{(k)} q_2^{(k)} \dots q_r^{(k)}\} = \{u_k v_k \dots\}$  - вектор узловых перемещений  $k$ -го узла  $i$ -го элемента с компонентами перемещений по направлению  $1, 2, \dots, r$ ;  $r$  - степень свободы узла. В результате сплошное тело оказывается представленным набором конечного числа элементов, взаимодействующих между собой в конечном числе узловых точек. Очевидно, что, интерпретируя сплошную среду таким образом, можно свести расчет тела к расчету системы с конечным числом степеней свободы и, следовательно, определить узловые усилия или узловые перемещения по процедуре, аналогичной по смыслу и алгоритму процедуре расчета стержневых систем методами строительной механики. Для этого остается найти матрицы жесткости для отдельных элементов, а затем рассмотреть условия статической и кинематической совместности совокупности элементов, получив тем самым разрешающее уравнение задачи.

Разумеется, найденные в результате такого подхода узловые перемещения не дают полной характеристики напряженно-деформированного состояния континуальной системы. Поэтому возникает необходимость найти способ перехода от этих величин к перемещениям, деформациям и напряжениям внутри конечных элементов. Следует особо подчеркнуть, что этот момент является одним из центральных в МКЭ, во многом предопределяющим его точность. По существу, речь идет о решении задачи механики твердого деформируемого тела для некоторых областей в форме конечных элементов, находящихся под узловыми воздействиями. Если бы такие задачи можно было бы решать точно, то МКЭ в этом смысле был бы точным методом. Так, например, обстоит дело в методе конечных элементов для стержневых систем, когда в рамках гипотез сопротивления материалов поведение стержней-элементов от узловых воздействий описывается точно. Ясно, что при таком подходе поведение каждого элемента, загруженного в узлах, не произвольно, а находится в соответствии с некоторыми внутренними связями, накладываемыми на него интерполяционными функциями. Последние однозначно определяют состояние элемента с помощью вектора узловых перемещений  $\{q\}_i$  или узловых усилий  $\{R\}_i$ . Особо следует отметить, что из-за наложенных на элемент связей приложение сосредоточенных узловых усилий не вызывает концентрации напряжений в узловых точках. Следовательно, конечные элементы представляют собой элементы особого типа, а именно: их напряженное и деформированное состояние обуславливается связями, при

которых, по возможности, сохраняется сплошность рассматриваемого объекта [14].

### 3.3. Матрицы жесткости конечных элементов. Узловые силы

Между векторами  $\{R\}_i$  и  $\{q\}_i$  существует взаимно однозначное соответствие

$$\{R\}_i = [K]_i \{q\}_i, \quad (3.5)$$

где  $[K]_i$  - матрица жесткости  $i$ -го элемента.

Учитывая блочную структуру векторов  $\{R\}_i$  и  $\{q\}_i$ , матрицу жесткости также можно представить в блочном виде

$$[K]_i = \begin{bmatrix} [K]_{i1}^{(1)} & \dots & [K]_{i1}^{(k)} & \dots & [K]_{i1}^{(m)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [K]_{il}^{(1)} & \dots & [K]_{il}^{(k)} & \dots & [K]_{il}^{(m)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [K]_{im}^{(1)} & \dots & [K]_{im}^{(k)} & \dots & [K]_{im}^{(m)} \end{bmatrix}.$$

Каждый из блоков матрицы  $[K]_{il}^{(k)}$  определяет реакции в  $l$ -ом узле от единичных перемещений в  $k$ -ом узле  $i$ -го элемента.

Для получения матриц жесткости отдельных элементов необходимо рассмотреть вопрос о переходе от узловых перемещений к перемещениям, деформациям и напряжениям внутри конечных элементов. Известно, что этот переход осуществляется приближенно путем задания так называемых интерполяционных функций. Характер этих функций должен быть таким, чтобы обеспечить, по крайней мере, неразрывность перемещений при переходе от элемента к элементу. При уменьшении размеров элементов это должно привести к решению, стремящемуся к точному. Запишем связь между узловыми перемещениями и перемещениями внутри элемента в виде [14]

$$\{u\} = [C]\{q\}_i = [[C]^{(1)} [C]^{(2)} \dots [C]^{(k)} \dots [C]^{(m)}] \{q\}_i, \quad (3.6)$$

где  $[C]$  – матрица интерполяционных функций.

Теперь, если соотношение (3.6) определено с помощью (3.2) и (3.3) можно найти компоненты деформаций и напряжений по области  $i$ -го конечного элемента [14]

$$\{\varepsilon\} = [\Phi][C]\{q\}_i = [B]\{q\}_i, \{\sigma\} = [D][B]\{q\}_i. \quad (3.7)$$

Здесь  $[B]$ - так называемая матрица деформаций, которая, в связи с блочной структурой вектора  $\{q\}_i$ , также имеет блочную структуру  $[B] = [[B]^{(1)} [B]^{(2)} \dots [B]^{(k)} \dots [B]^{(m)}]$ .

Для получения матрицы жесткости конечного элемента воспользуемся соотношением (3.4). Имея в виду выражения (3.6) и (3.7), умножая (3.4) слева на  $[C]^T$  и интегрируя по объему конечного элемента, получим

$$\left( \int_{V_i} [B]^T [D][B] dV \right) \{q\}_i + \int_{V_i} [C]^T \{G_V\} dV = 0.$$

Сравнивая полученное выражение с соотношением (3.5) будем иметь

$$[K]_i = \int_{V_i} [B]^T [D][B] dV; \quad \{R\}_i = \{P_V\}_i = \int_{V_i} [C]^T \{G_V\} dV.$$

Принимая во внимание блочность матриц  $[B]$  и  $[C]$ , типовые блоки матриц жесткости  $[K]_i^{(k)}$  и вектора узловых внешних сил  $\{P_V\}_i^{(k)}$  могут быть записаны так

$$[K]_{il}^{(k)} = \int_{V_i} ([B]^{(l)})^T [D][B]^{(k)} dV, \quad (3.8)$$

$$\{P_V\}_i^{(k)} = \int_{V_i} ([C]^{(k)})^T \{G_V\} dV. \quad (3.9)$$

Выражение (3.9) представляет собой узловые сосредоточенные силы, эквивалентные распределенной по объему нагрузке. Если, кроме объемных сил, на элемент действует поверхностная распределенная нагрузка, интенсивностью  $\{p_s\}$  то эквивалентные ей узловые силы могут быть определены по формуле, аналогичной (3.9)

$$\{P_S\}_i^{(k)} = \int_{S_i} ([C]^{(k)})^T \{p_s\} dS. \quad (3.10)$$

### 3.4. Разрешающее уравнение МКЭ

Для описания деформированного и напряженного состояния тела, расчлененного на конечные элементы, необходимо все элементы соединить в единое целое, т.е. удовлетворить условиям кинематической и статической совместности для конструкции в целом. Эти условия устанавливаются для узловых точек системы и имеют вид

$$\{\bar{q}\}^{(k)} = \{q\}_i^{(k)}; \quad \{\bar{P}\}^{(k)} = \sum_{i \in k} \{R\}_i^{(k)}, \quad (3.11)$$

где  $\{\bar{q}\}^{(k)}$  – вектор перемещений  $k$ -го узла системы;

$\{\bar{P}\}^{(k)}$  – вектор сил в  $k$ -ом узле;

$i \in k$  – суммирование по всем  $i$ -ым элементам, сходящимся в  $k$ -ом узле системы.

Между векторами  $\{\bar{P}\} = \{\{\bar{P}\}^{(1)} \dots \{\bar{P}\}^{(k)} \dots \{\bar{P}\}^{(p)}\}$  и  $\{\bar{q}\} = \{\{\bar{q}\}^{(1)} \dots \{\bar{q}\}^{(k)} \dots \{\bar{q}\}^{(p)}\}$  существует связь

$$\{\bar{P}\} = [\bar{K}]\{\bar{q}\}, \quad (3.12)$$

где  $[\bar{K}]$  – матрица жесткости системы, имеющая блочную структуру, с числом блоков, соответствующих общему числу узлов системы  $p$

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} [\bar{K}]_1^{(1)} & \dots & [\bar{K}]_1^{(k)} & \dots & [\bar{K}]_1^{(p)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\bar{K}]_l^{(1)} & \dots & [\bar{K}]_l^{(k)} & \dots & [\bar{K}]_l^{(p)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\bar{K}]_p^{(1)} & \dots & [\bar{K}]_p^{(k)} & \dots & [\bar{K}]_p^{(p)} \end{bmatrix}.$$

Каждый блок матрицы  $[K]$  определяется с учетом (3.11) по формуле

$$[\bar{K}]_l^{(k)} = \sum_{i \in k} [K]_{il}^{(k)}, \quad (3.13)$$

где  $[K]_{il}^{(k)}$  – блок матрицы жесткости  $i$ -го элемента, определяющий реакции в  $k$ -ом узле от единичных перемещений в  $l$ -ом узле.

Соотношение (3.12), по существу, является уравнением равновесия узлов системы и представляет собой разрешающее уравнение метода конечных элементов.

### 3.5. Решение нелинейных задач

Численные исследования бетонных и железобетонных конструкций с учетом реальных свойств материалов приводит к необходимости решения систем нелинейных алгебраических уравнений. Нелинейность разрешающих уравнений задачи обусловлена, главным образом, непропорциональной связью между напряжениями и деформациями, которая следует из общей модели железобетона, сформулированной ранее. Этот тип нелинейности носит



название физической. Кроме того, нелинейность может быть вызвана, во-первых, нелинейными зависимостями между деформациями и перемещениями, во-вторых, большими перемещениями, соизмеримыми с внешними размерами конструкции, когда приходится отказываться от гипотезы первоначального недеформируемого состояния расчетной схемы в процессе нагружения. Проявление геометрической нелинейности характерно для железобетонных конструкций в стадиях работы, близких к предельным, при изгибе в момент образования пластического шарнира. Точное решение задач прочности и устойчивости тонкостенных железобетонных конструкций также возможно лишь в геометрически нелинейной постановке.

Изложим сущность численного решения нелинейных задач МКЭ в трактовке [14].

Независимо от типа нелинейности, разрешающим уравнением МКЭ (3.12) является уравнение равновесия. При этом вся информация о физической и геометрической нелинейности содержится в матрице жесткости конструкции  $[\bar{K}]$ , компоненты которой связаны с матрицами жесткости отдельных элементов соотношением (3.13). В то же время характеристики отдельных элементов определяются двумя матрицами  $[D]$  и  $[B]$ . В физически нелинейных задачах механические характеристики материалов, которые определяются матрицей  $[D]$ , являются, как известно, сложными функциями компонентов деформаций, напряжений или перемещений, определяемыми в соответствии с физической моделью материала, т.е.  $[D] = [D(\{q\})]$ . В геометрически нелинейных задачах нелинейной будет матрица  $[B] = [B(\{q\})]$  и вектор координат узлов  $\{x\} = \{x(\{q\})\}$ . Таким образом, несмотря на различную физическую природу обеих типов нелинейности, математическая формулировка задачи и в том и другом случае одинакова и сводится к решению нелинейных разрешающих уравнений

$$F(\{\bar{q}\}) = [\bar{K}(\{\bar{q}\})]\{\bar{q}\} - \{\bar{P}(\{\bar{q}\})\} = 0. \quad (3.14)$$

Именно поэтому способы решения физически и геометрически нелинейных задач могут быть рассмотрены с единых методических позиций.

Для решения систем нелинейных алгебраических уравнений вида (3.14) существует широкий выбор различных итерационных методов, основы которых заложены еще в работах Ньютона. Прежде, чем приступить к рассмотрению методов решения уравнения (3.14), вкратце рассмотрим математическую формулировку задачи на примере системы нелинейных уравнений

$$F(\{x\}) = [f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)], \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (3.15)$$

Допустим, что известен вектор-столбец  $\{x^k\} = \{x_1^k x_2^k \dots x_n^k\}$ , являющийся  $k$ -ым приближением к корню  $\{x\} = \{x_1 x_2 \dots x_n\}$  этого уравнения. Тогда искомое

решение можно представить так  $\{x\} = \{x^k\} + \{dx\}$ , где  $\{dx\}$ - вектор-столбец погрешностей  $k$ -го приближения. Исходное уравнение преобразуется к виду  $F(\{x^k\} + \{dx\}) = 0$ . Теперь используя разложение в ряд Тейлора и ограничиваясь линейными членами, можно записать

$$F(\{x^k\} + \{dx\}) \approx F(\{x^k\}) + F'(\{x^k\})\{dx\} \approx 0,$$

где

$$F'(\{x^k\}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} = [J^k] \text{ – матрица Якоби.}$$

Если матрица  $[J^k]$  существует и неособенная, то вектор погрешностей  $\{dx\} = -[J^k]^{-1} F(\{x^k\})$ . Таким образом, последовательные приближения находятся по формуле

$$\{x^{k+1}\} = \{x^k\} - [J^k]^{-1} F(\{x^k\}), (k = 1, 2, \dots). \quad (3.16)$$

Изложенный метод носит название метода Ньютона-Рафсона. Заметим, что за так называемое «нулевое» приближение обычно принимается грубое решение системы, которое находится, например, из физического смысла задачи. Если на каждой итерации использовать некоторое постоянное значение матрицы Якоби, например  $[J^0]$ , то процедура, носит название метода Ньютона-Канторовича. Естественно, что метод Ньютона-Канторовича требует большего числа итераций, хотя в целом он может оказаться более экономичным, т.к. матрица Якоби обращается в данном случае всего один раз. Если систему нелинейных уравнений (3.15), определенную и непрерывную в окрестностях искомого решения, можно переписать в равносильной форме  $\{x\} = \Phi(\{x\})$ , то для нахождения корня можно использовать метод простых итераций

$$\{x^{k+1}\} = \Phi(\{x^k\}).$$

Принимая во внимание, что вектор-функция  $\Phi(\{x\})$  разыскивается при этом в виде  $\Phi(\{x\}) = \{x\} + \Lambda F(\{x\})$ , где  $\Lambda$  - неособенная матрица, причем  $\Lambda = [J]^{-1}$ , придем, в сущности, к методу Ньютона-Рафсона для уравнения (3.15). Изложенные методы приводят к довольно быстро сходящимся процессам, если

нулевое приближение лежит достаточно близко от искомого решения. Однако, следует учитывать, что в нелинейных задач иногда имеется несколько изолированных корней, поэтому найденное решение не всегда будет искомым. Для получения правильного ответа необходимо применять метод малых приращений и четко представлять физическую сущность задач.

С учетом изложенного вернемся к рассмотрению уравнения (3.14). Представим искомое решение этого уравнения в виде

$$\{\bar{q}\} = \{\bar{q}^k\} + \{\delta\bar{q}\},$$

где  $\{\delta\bar{q}\}$  - вектор невязки, имеющий смысл вариации перемещений, т.е. допускаемый наложенными на систему связями. Тогда

$$F(\{\bar{q}^k + \delta\bar{q}\}) = F(\{\bar{q}^k\}) + dF = [\bar{K}(\{\bar{q}^k + \delta\bar{q}\})](\{\bar{q}^k + \delta\bar{q}\}) - \{\bar{P}(\{\bar{q}^k + \delta\bar{q}\})\} \approx [\bar{K}(\{\bar{q}^k\})](\{\bar{q}^k\} + \{\delta\bar{q}\}) - \{\bar{P}(\{\bar{q}^k\})\} - \{\delta\bar{P}\} \approx 0'$$

откуда

$$\{\delta\bar{q}\} = [K(\{q^k\})]^{-1} (\{\delta F\} + \{\delta P\}) = [K(\{q^k\})]^{-1} \{\delta\bar{P}\}.$$

Таким образом, последовательные приближения находятся по формуле

$$\{\bar{q}^{k+1}\} = \{\bar{q}^k\} + [\bar{K}^k]^{-1} \{\delta\bar{P}^k\}, (k = 1, 2, \dots) \quad (3.17)$$

где  $[\bar{K}^k] = [\bar{K}(\{\bar{q}^k\})]$  - матрица жесткости системы на  $k$ -ой итерации.

В соотношении (3.17) специально не оговаривается вид матрицы  $[\bar{K}^k]$ . Если для ее построения используется касательная линеаризация, то приходим к классическому методу Ньютона-Рафсона (рис. 3.2, а), если секущая - к модифицированному методу Ньютона-Рафсона (рис. 3.2, в). Если в (3.17) положить матрицу  $[\bar{K}^k]$  постоянной, то придем к процедуре Ньютона-Канторовича (рис. 3.2, б). Вектор  $\{\delta\bar{P}\}$ , по существу, является неуравновешенным вектором-столбцом нагрузки (невязкой сил), что хорошо видно на рисунках.

Таким образом, решение нелинейных задач сводится к последовательному приближению к искомому решению по формуле (3.17). Процесс вычислений заканчивается, когда достигнута заданная точность решения  $\varepsilon$ , т.е., при выполнении условия  $\|\delta\bar{q}\| \leq \varepsilon$ . Здесь  $\|\delta\bar{q}\|$  - норма вектора  $\{\delta\bar{q}\}$ . При этом под нормой чаще всего понимают эвклидову норму

$$\|\delta\bar{q}\| = \sqrt{\{\delta\bar{q}\}^T \{\delta\bar{q}\} / \{\bar{q}\}^T \{\bar{q}\}}.$$

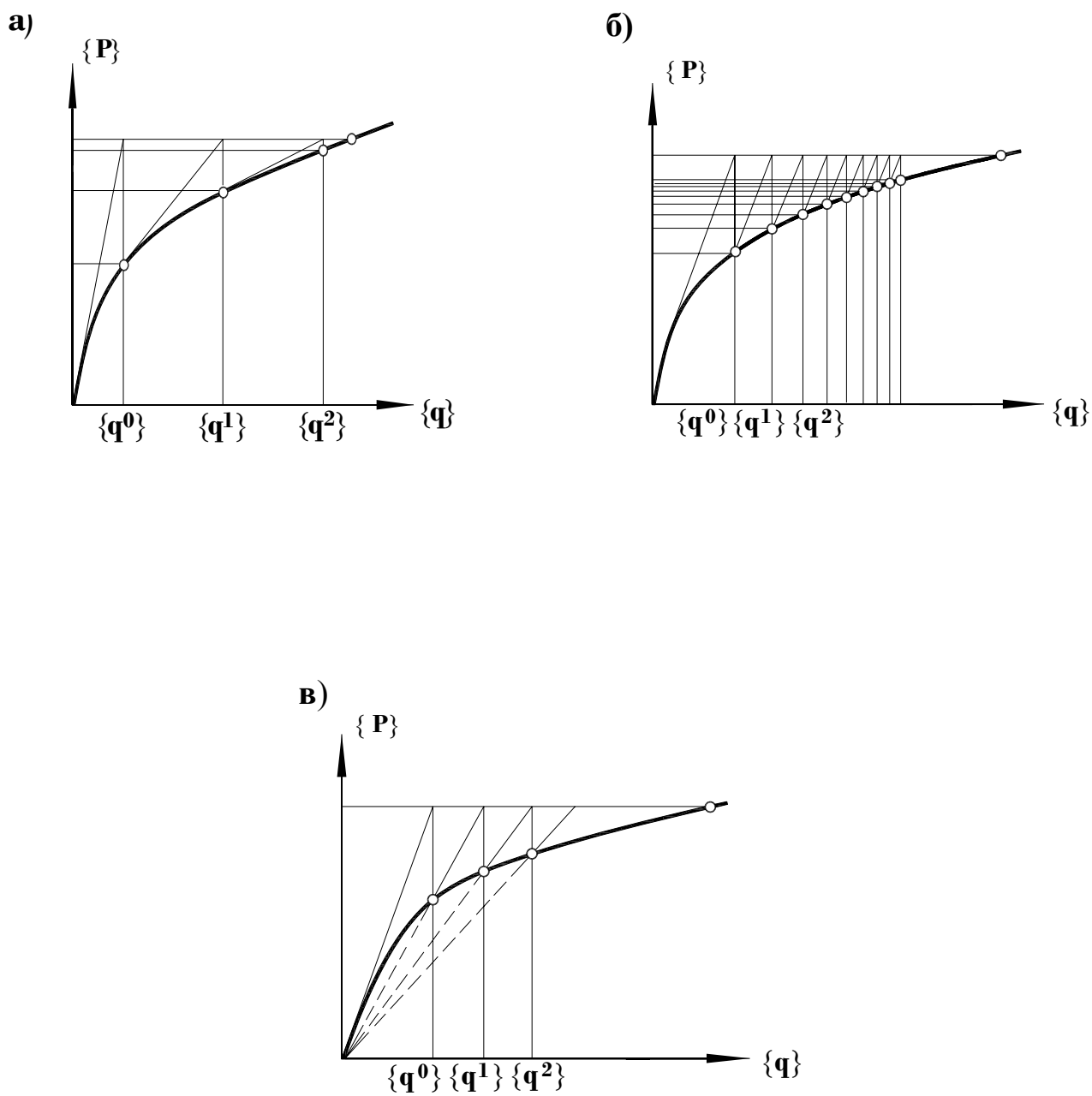


Рис. 3.2. Методы решения нелинейных задач:  
 а) Ньютона-Рафсона; б) Ньютона-Канторовича; в) модифицированный метод Ньютона-Рафсона

Как уже отмечалось, в нелинейных задачах большое значение имеет физическая интерпретация физического процесса, поскольку это создает уверенность, что полученное решение будет искомым. Именно на этом и основаны все известные методы решения нелинейных задач механики сплошной среды. Однако можно показать, что в конечном итоге они сводятся к какой-нибудь разновидности метода Ньютона.

Известно, что нелинейность задачи по расчету бетонных и железобетонных конструкций ведет к нарушению принципа суперпозиции, и ее решение существенным образом зависит от истории (пути) нагружения. Естественно, что в случае сложного, непропорционально нагружения решения может быть получено лишь разбиением пути нагружения на малые интервалы и суммированием найденных на каждом интервале решений, т.е. на основе, так называемого, шагового метода. Отметим, что для реализации шаговой концепции метод конечных элементов должен быть сформулирован в инкрементальной форме, когда разрешающие уравнения записываются не для конечных величин узловых внешних воздействий, а для их приращений в пределах каждого шага. При этом процесс деформирования тела как при динамических, так и при статических кратковременных и длительных воздействиях удобно представлять как процесс движения его точек, а решение задачи отыскивать, последовательно переходя от шага к шагу, в виде перемещения узловых точек  $\{\bar{q}\}$  в момент времени  $T + \Delta T$ , т.е.  $\{\bar{q}^{T+\Delta T}\} = \{\bar{q}^T\} + \{\Delta\bar{q}\}$ . При этом вектор решения на каждом шаге  $\{\Delta\bar{q}\}$  должен быть найден из системы уравнений (3.14), но записанной в инкрементальной форме

$$[\bar{K}(\{\bar{q}^T\})]\{\Delta\bar{q}\} - \{\Delta\bar{P}(\{\bar{q}^T\})\} = 0, \quad (3.18)$$

где  $[\bar{K}(\{\bar{q}^T\})]$  – матрица жесткости;

$\{\Delta\bar{P}(\{\bar{q}^T\})\}$  – и вектор узловых внешних сил системы, являющиеся функциями ее состояния в момент времени  $T$ .

Процедура шагового метода представлена графически на рис. 3.3.

При решении реальных задач приходится иметь дело с конечными временными интервалами, что, как видно из рис. 3.3, а, ведет к «дрейфу» приближенного решения от точного. Для устранения этого «дрейфа» на каждом шаге могут быть использованы различные итерационные алгоритмы, описанные ранее. Различные шагово-итерационные алгоритмы приведены на рис. 3.3, б-г.

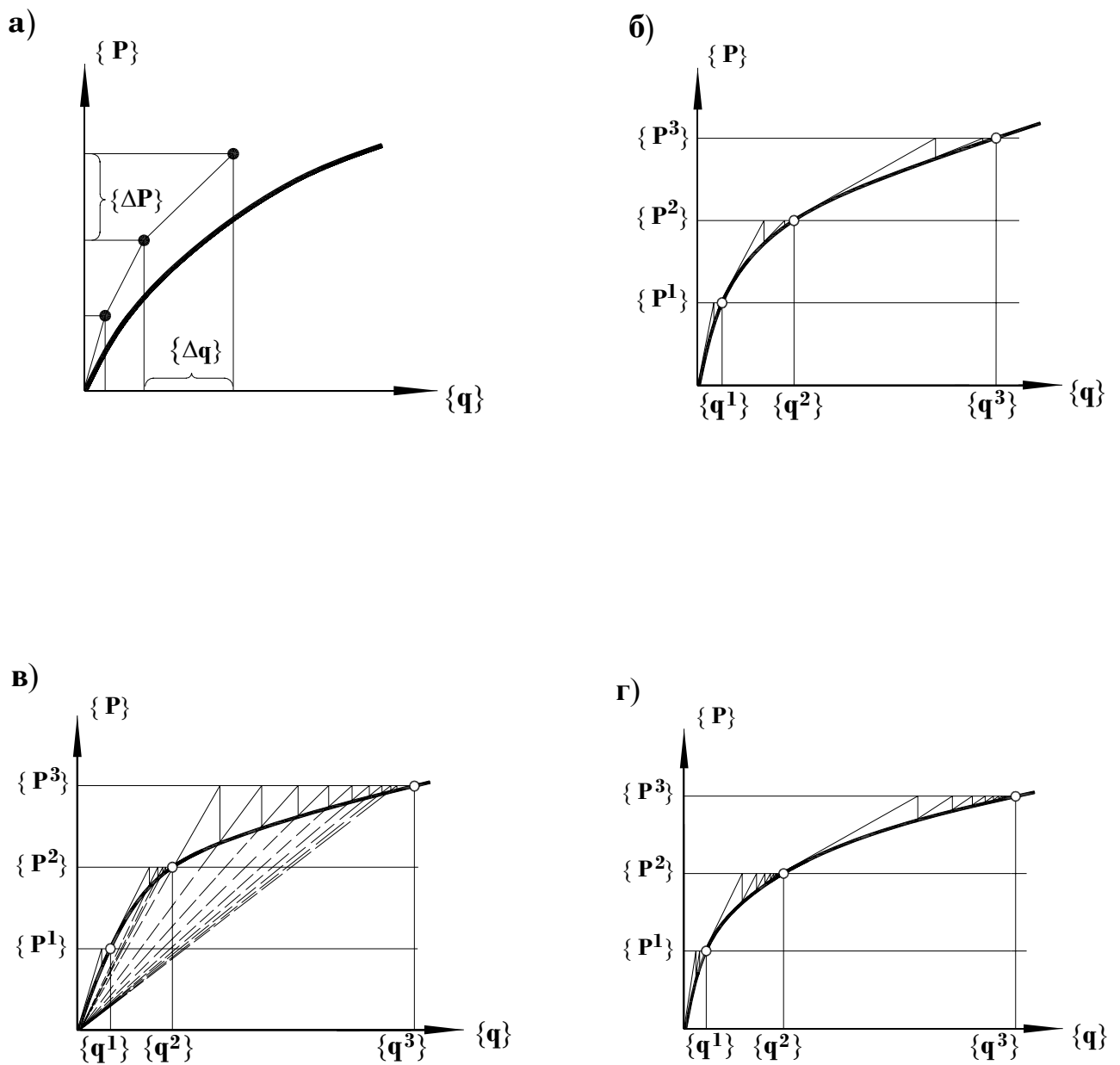


Рис. 3.3. Шагово-итерационные методы:

- а) шаговый метод; б) шаговый с процедурой Ньютона-Рафсона по шагам;
- в) шаговый с процедурой переменных параметров упругости по шагам;
- г) шаговый с процедурой Ньютона-Канторовича по шагам

## ГЛАВА 4. КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ДЛЯ РАСЧЕТА БЕТОННЫХ И ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

### 4.1. Интерполяционные функции перемещений

Выше указывалось, что функции, связывающие узловые перемещения с перемещениями внутренних точек конечного элемента, называются интерполяционными [34]. Определение матрицы  $[C]$  (3.6) содержащей эти функции является одним из центральных моментов МКЭ, во многом определяющим его точность. Для иллюстрации процедуры формирования этих функций и изучения их свойств рассмотрим  $i$  – ый конечный элемент с  $n$  узлами, выделенный на рис. 3.1, вектор-столбец узловых перемещений которого

$$\{q\}_i = \left\{ \{q\}^{(1)} \quad \{q\}^{(2)} \quad \dots \quad \{q\}^{(k)} \quad \dots \quad \{q\}^{(n)} \right\}, \quad (4.1)$$

где  $\{q\}^{(k)} = \{q_1^{(k)} \quad q_2^{(k)} \dots q_l^{(k)}\}$  – вектор перемещений  $k$ -го узла, имеющего в общем случае  $l$  степеней свободы.

В случае пространственной задачи ( $l = 3$ )  $\{q\}^{(k)} = \{u_k \quad v_k \quad w_k\}$ , плоской и осесимметричной ( $l = 2$ ) –  $\{q\}^{(k)} = \{u_k \quad v_k\}$ .

Для определения напряженно деформированного состояния элемента необходимо найти способ перехода от величин узловых перемещений  $\{q\}_i$  к перемещениям внутри области элемента, характеризуемыми вектором  $\{u\} = \{u(x, y) \quad v(x, y) \quad w(x, y)\}$  или для плоской и осесимметричной задачи  $\{u\} = \{u(x, y) \quad v(x, y)\}$ , т.е. установить матричную зависимость (3.6). Эта зависимость в МКЭ определяется приближенно путем априорного задания интерполяционных функций [14, 136], характер которых должен быть таким, чтобы обеспечить, по крайней мере, неразрывность перемещений при переходе от элемента к элементу. При уменьшении размеров элементов это должно привести к решению, стремящемуся к точному.

Для иллюстрации процедуры формирования этих функций рассмотрим конечный элемент в условиях плоской задачи, вектор узловых перемещений которого  $\{q\}_i = \left\{ \{q\}^{(1)} \quad \{q\}^{(2)} \quad \dots \quad \{q\}^{(k)} \quad \dots \quad \{q\}^{(n)} \right\} = \{u_1 v_1 \quad u_2 v_2 \quad \dots \quad u_k v_k \quad \dots \quad u_n v_n\}$ . Разумеется, в данном случае речь идет о функциях, с помощью которых перемещения по области элемента  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  выражаются через компоненты  $\{q\}_i$ . Поскольку составляющие перемещений зависят лишь от соответствующих компонентов вектора  $\{q\}_i$ , представим их в виде суммы Рэлея-Ритца [170]

$$\begin{aligned} u(x, y) &= C_1(x, y)u_1 + \dots + C_k(x, y)u_k + \dots + C_n(x, y)u_n; \\ v(x, y) &= C_1(x, y)v_1 + \dots + C_k(x, y)v_k + \dots + C_n(x, y)v_n, \end{aligned}$$

в матричной форме

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & \dots & C_k & 0 & \dots & C_n & 0 \\ 0 & C_1 & \dots & 0 & C_k & \dots & 0 & C_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix},$$

или сокращенно

$$\{u\}_i = [C]\{q\}_i \quad (4.2)$$

Сопоставляя (4.2) с (3.6) видим, что прямоугольная матрица и есть матрица интерполяционных функций  $[C] = [[C]^{(1)} [C]^{(2)} \dots [C]^{(k)} \dots [C]^{(n)}]$  с типовым блоком  $[C]^{(k)} = \begin{bmatrix} C_k(x, y) & 0 \\ 0 & C_k(x, y) \end{bmatrix} = E_2 C_k(x, y)$ , где  $E_2$  –единичная матрица второго порядка. Основное свойство функции  $C_k(x, y)$  состоит в том, что она равна единице в рассматриваемом узле и нулю во всех остальных узлах элемента, т.е.

$$C_k(x_j, y_j) = \begin{cases} 1, & \text{при } k = j; \\ 0, & \text{при } k \neq j. \end{cases}$$

Построение интерполяционных функций можно осуществить несколькими способами. Наиболее распространенный прием состоит в том, что сначала задаются законом распределения перемещения по области элемента, который выбирают обычно в виде степенного полинома. Так, в рассматриваемом случае плоской задачи можно записать

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_3 x + \alpha_5 y + \alpha_7 xy + \dots \\ v(x, y) &= \alpha_2 + \alpha_4 x + \alpha_6 y + \alpha_8 xy + \dots \end{aligned} \right\}. \quad (4.3)$$

Полиномы (4.3) должны, по-видимому, удовлетворять следующим требованиям. Во-первых, на каждой стороне элемента, где величины  $x$  и  $y$  связаны некоторой зависимостью, полиномы являются функциями одной переменной и обеспечивают непрерывность перемещений при переходе от элемента к элементу. Это означает, что их степень относительно координаты по оси, совмещенной со стороной элемента, определяется заданным числом узловых точек на этой стороне. Действительно, если смежные элементы



взаимодействуют в двух узловых точках, то, считая перемещения этих точек равными, получаем, что непрерывность будет обеспечена только тогда, когда на каждой стороне перемещения будут представлены полиномами первой степени, поскольку между двумя точками можно провести только одну прямую. Если же таких точек на каждой стороне элемента  $p + 1$ , то полиномы должны быть степени  $p$ . Кроме того, число членов, удерживаемых в полиномах, не произвольно, а равно числу узловых перемещений.

Подставляя в (4.3) координаты узловых точек, с использованием (4.2) получим следующее выражение

$$\begin{Bmatrix} C_1(x, y) \\ C_2(x, y) \\ \dots \\ C_k(x, y) \\ \dots \\ C_n(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_k & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_k & \dots & y_n \\ x_1 y_1 & x_2 y_2 & \dots & x_k y_k & \dots & x_n y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ xy \\ \dots \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

Нетрудно видеть, что компонентами вектора-столбца  $\{1 \ x \ y \ xy \dots\}$  в (4.4) являются члены полинома (4.3) при  $\alpha_k = 1$ , порядок и число членов которого определяются сформулированными выше требованиями. Компоненты столбцов средней матрицы в (4.4) представляют собой те же члены полинома, в которых вместо величин  $x$  и  $y$  подставлены координаты узловых точек элемента, а число этих столбцов равно числу узловых точек.

Проиллюстрируем получение интерполяционных функций на примере элемента треугольной формы. Из соотношения (4.4) находим

$$\begin{Bmatrix} C_1(x, y) \\ C_2(x, y) \\ C_3(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix}, \quad (4.5)$$

или в развернутом виде

$$\left. \begin{aligned} C_1(x, y) &= \frac{1}{2\Delta_i} (a_1 + b_1 x + c_1 y); \\ C_2(x, y) &= \frac{1}{2\Delta_i} (a_2 + b_2 x + c_2 y); \\ C_3(x, y) &= \frac{1}{2\Delta_i} (a_3 + b_3 x + c_3 y) \end{aligned} \right\}, \quad (4.6)$$

где

$$2\Delta_j = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} - \text{удвоенная площадь треугольника } 1, 2, 3;$$

$$a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2; \quad b_1 = y_2 - y_3; \quad c_1 = x_3 - x_2.$$

Остальные коэффициенты  $a$ ,  $b$  и  $c$  получаются циклической перестановкой индексов.

Описанный способ получения интерполяционных полиномов не является единственным, имеются также и другие, описанные, например в [9, 14, 34, 182, 91]. Наиболее эффективным считается способ, основанный на использовании системы местных относительных, так называемых, нормализованных или естественных координат, привязанных к конкретному конечному элементу. В этой системе значения координат узловых точек элемента меняются в пределах от  $-1$  до  $+1$ , а его размеры не имеют значения. Интерполяция осуществляется по-разному для элементов треугольной и четырехугольной форм.

Рассмотрим треугольный конечный элемент первого порядка с тремя узлами, совпадающими с угловыми точками (рис. 4.1, а). Для него наиболее естественной будет система нормализованных координат  $L_1, L_2, L_3$ .

Нормализованные координаты точки  $m$  внутри элемента представляют собой отношения площадей треугольников, противолежащих соответствующим вершинам, к площади всего элемента (рис. 4.1, б), т.е.

$$L_1 = \frac{\Delta_{m23}}{\Delta_{123}}, L_2 = \frac{\Delta_{m13}}{\Delta_{123}}, L_3 = \frac{\Delta_{m12}}{\Delta_{123}}$$

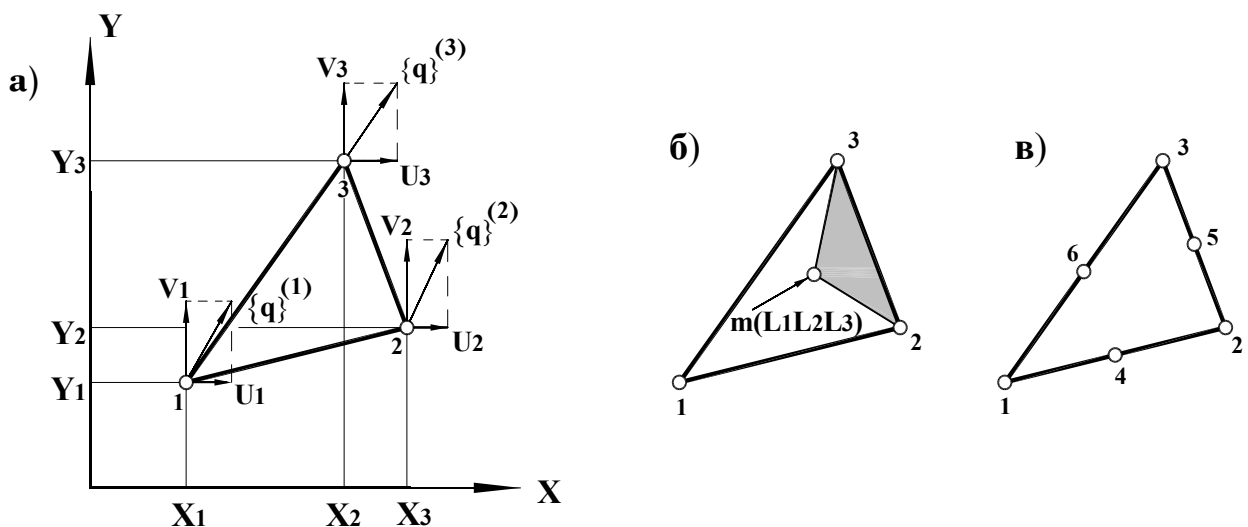


Рис. 4.1. Треугольные элементы

Нормализованные координаты  $L_1, L_2, L_3$  называются еще барицентрическими или  $L$  – координатами. Как известно [34], они связываются с общими координатами с помощью интерполяционных функций (4.6)

$$L_1 = C_1(x, y); \quad L_2 = C_2(x, y); \quad L_3 = C_3(x, y). \quad (4.7)$$

Таким образом, в случае треугольного элемента первого порядка интерполяционные функции являются  $L$ - координатами точки  $C_k(x, y) = L_k$ , где  $k = 1, 2, 3$ .

Отметим, что и при использовании конечных элементов треугольной формы с дополнительными равноотстоящими друг от друга узловыми точками, расположенными на их сторонах (рис. 4.1, в), соответствующие интерполяционные функции могут быть получены с помощью рекуррентного соотношения [14, 34]. Так, для угловых узлов треугольников второго порядка с одним дополнительным узлом на стороне

$$C_j(x, y) = (2L_j - 1) L_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad (4.8)$$

для узлов на его сторонах

$$C_j(x, y) = 4L_k L_m, \quad j = 4, 5, 6, \quad (4.9)$$

где  $k$  и  $m$  – узлы на стороне противоположающей узлу  $j$ .

При решении плоской задачи теории упругости широко используются также конечные элементы прямоугольной формы с различным числом узловых точек (рис. 4.2).

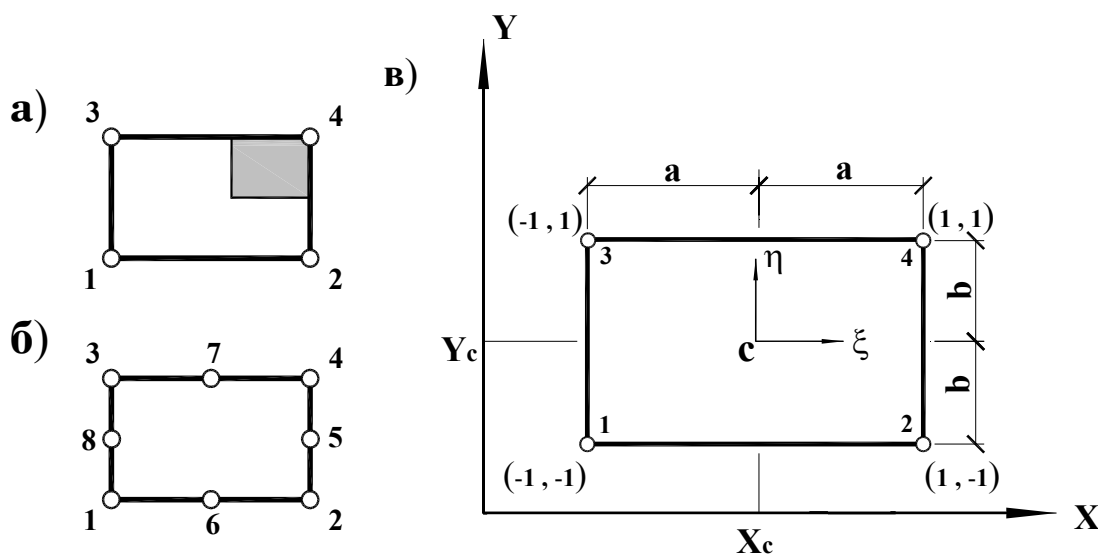


Рис. 4.2. Прямоугольные элементы

Для получения интерполяционных функций с помощью (4.5) в этом случае удобно ввести нормализованные координаты (рис. 4.2, в):

$$\xi = \frac{x - x_c}{a}; \quad \eta = \frac{y - y_c}{b}. \quad (4.10)$$

Тогда для элемента первого порядка, показанного на рис. 4.2, а, подставляя в (4.5) нормализованные координаты узлов, запишем

$$\begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ \xi \\ \eta \\ \xi\eta \end{Bmatrix}, \quad (4.11)$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} C_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta); \\ C_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta); \\ C_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta); \\ C_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \end{aligned} \right\}. \quad (4.12)$$

Зависимости (4.12) могут быть объединены формулой

$$C_k(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_k)(1 + \eta\eta_k). \quad (4.13)$$

Легко видеть, что и в этом случае формула (4.13) выражает отношение площадей заштрихованного и всего прямоугольника на рис. 4.2, а.

Для элемента второго порядка (рис. 4.2, б) интерполяционные функции равны [34]

$$\left. \begin{aligned} C_k(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_k)(1 + \eta\eta_k)(\xi\xi_k + \eta\eta_k - 1), \quad k = 1, 2, 3, 4 \\ C_k(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_k), \quad k = 5, 7; \\ C_r(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 + \xi\xi_k)(1 - \eta^2), \quad k = 6, 8 \end{aligned} \right\}. \quad (4.14)$$

Можно сформулировать интерполяционные функции для прямоугольников и более высокого порядка- третьего, четвертого и т.д. [9, 34].

Отметим, что способы построения интерполяционных функций для двумерных элементов без особого труда обобщаются на пространственные конечные элементы.

В конкретных задачах нередко приходится иметь дело с телами сложной геометрии, удовлетворительное описание которой набором относительно малого числа элементов с прямолинейными сторонами ведет к существенным погрешностям. Избежать их можно введением так называемых криволинейных конечных элементов [34], конфигурацию которых удобно описать с помощью местной криволинейной системы координат (рис. 4.3). Поскольку в дальнейшем необходимо переходить от местной системы координат  $\xi, \eta, \zeta$  к общей  $x, y, z$ , удобно, следуя работе [34] для описания формы криволинейных элементов использовать систему введенных ранее интерполяционных функций

$$\left. \begin{aligned} x &= C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_kx_k + \dots \\ y &= C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ky_k + \dots \\ z &= C_1z_1 + C_2z_2 + \dots + C_kz_k + \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

где  $C_k$  – интерполяционная функция;

$x_k, y_k, z_k$  – координаты точек на поверхности элемента в общей системе координат.

Такой подход обеспечивает непрерывную аппроксимацию тела криволинейными элементами, точность которой предопределяется выбранным числом точек на поверхности элемента. Если число этих точек совпадает с числом узлов, то такие элементы называются изопараметрическими. Когда число точек для задания геометрии элемента больше числа узлов, элементы называются суперпараметрическими.

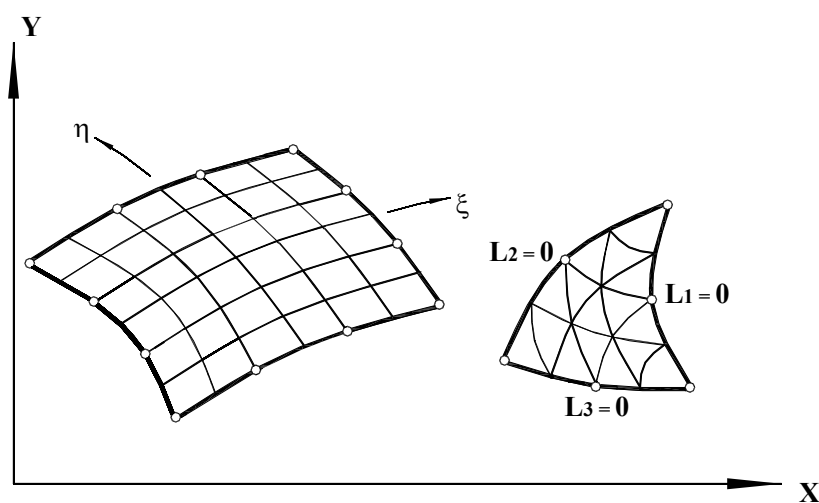


Рис. 4.3. Криволинейные элементы

## 4.2. Однородные конечные элементы. Численное интегрирование

Под однородными конечными элементами будем понимать такие элементы, у которых свойства материала по объему не меняются.

Определив закон распределения перемещений в области конечного элемента в зависимости от значений узловых параметров, можно установить остальные характеристики напряженно деформированного состояния. Так, например, известно, что деформации связаны с перемещениями с помощью соотношений Коши (3.2). Подставляя в (3.2) зависимость (4.2), получим связь между деформациями и узловыми перемещениями в области элемента

$$\{\varepsilon\}_i = [\Phi][C]\{q\}_i = [B]_i\{q\}. \quad (4.16)$$

Здесь  $[B]_i$  - так называемая матрица деформаций элемента. С учетом того, что матрица интерполяционных функций имеет блочную структуру (4.2) ее можно представить также в блочном виде по числу блоков, равным числу узлов элемента

$$[B]_i = \left[ [B]_i^{(1)} [B]_i^{(2)} \dots [B]_i^{(k)} \dots [B]_i^{(n)} \right], \quad (4.17)$$

где  $[B]_i^{(k)} = [\Phi]C_k(x, y)$ .

Напряжения по области элемента определяются с использованием физических соотношений (3.3) следующим образом

$$\{\sigma\}_i = [D]\{\varepsilon\}_i = [D][B]_i\{q\}_i. \quad (4.18)$$

Построение матрицы  $[B]_i$  в том случае, когда интерполяционные функции заданы в местной нормированной системе вызывает необходимость выразить производные интерполяционных функций по декартовым координатам через производные по местным координатам, поскольку построение связано с матрицей операторов  $[\Phi]$ . Для этого, используя правило дифференцирования сложной функции, например, для плоской задачи  $C_k(\xi, \eta)$ , запишем

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{dC_k}{d\xi} \\ \frac{dC_k}{d\eta} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cc} \frac{dx}{d\xi} & \frac{dy}{d\xi} \\ \frac{dx}{d\eta} & \frac{dy}{d\eta} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \frac{dC_k}{dx} \\ \frac{dC_k}{dy} \end{array} \right\}. \quad (4.19)$$

Здесь средняя матрица – матрица Якоби  $[J]$ , т.е.:

$$\begin{Bmatrix} \frac{dC_k}{d\xi} \\ \frac{dC_k}{d\eta} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{dC_k}{dx} \\ \frac{dC_k}{dy} \end{Bmatrix}. \quad (4.20)$$

Так как вектор в левой части (4.20) находится достаточно просто, а матрица  $[J]$  с учетом (4.15) вполне определена

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{dC_1}{d\xi} & \frac{dC_2}{d\xi} & \dots & \frac{dC_k}{d\xi} & \dots \\ \frac{dC_1}{d\eta} & \frac{dC_2}{d\eta} & \dots & \frac{dC_k}{d\eta} & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_k & y_k \\ \vdots & \vdots \end{Bmatrix}, \quad (4.21)$$

то искомые производные

$$\begin{Bmatrix} \frac{dC_k}{dx} \\ \frac{dC_k}{dy} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{dC_k}{d\xi} \\ \frac{dC_k}{d\eta} \end{Bmatrix}. \quad (4.22)$$

Если в качестве местной системы координат используются  $L$  – координаты, то удобно ввести обозначения

$$L_1 = \xi; \quad L_2 = \eta; \quad L_3 = 1 - \xi - \eta. \quad (4.23)$$

Тогда

$$\frac{d}{d\xi} C_k(L_1, L_2, L_3) = \frac{dC_k}{dL_1} \frac{dL_1}{d\xi} + \frac{dC_k}{dL_2} \frac{dL_2}{d\xi} + \frac{dC_k}{dL_3} \frac{dL_3}{d\xi} \quad (4.24)$$

или, учитывая (4.23),

$$\frac{dC_k}{d\xi} = \frac{dC_k}{dL_1} - \frac{dC_k}{dL_3} \quad (4.25)$$

и все дальнейшие операции осуществляются по вышеприведенным формулам.

Отметим, что все полученные в этом параграфе соотношения, несмотря на конкретизацию объекта изучения, носят общий характер.

Опять обратимся к рассмотрению  $i$  – го конечный элемент произвольной формы с  $n$  узлами, вектора узловых перемещений и сил которого равны  $\{q\}_i = \{\{q\}_i^{(1)} \{q\}_i^{(2)} \dots \{q\}_i^{(k)} \dots \{q\}_i^{(n)}\}$ ,  $\{R\}_i = \{\{R\}_i^{(1)} \{R\}_i^{(2)} \dots \{R\}_i^{(k)} \dots \{R\}_i^{(n)}\}$ .

Представим далее, что компоненты  $\{R\}_i$  являются по отношению к  $i$  – му элементу внешними силами, которые вызывают в нем перемещения, деформации и напряжения.

Чтобы определить матрицу жесткости для  $i$  – го конечного элемента, т.е. установить связь между  $\{R\}_i$  и  $\{q\}_i$ , воспользуемся принципом возможных перемещений

$$\{\delta q\}_i^T \{R\}_i - \int_{V_i} \{\delta \varepsilon\}_i^T \{\sigma\}_i dV = 0. \quad (4.26)$$

Отсюда, если учесть, что  $\{\delta q\}_i \neq 0$ , а на основании (4.16)  $\{\delta \varepsilon\}_i^T = \{\delta q\}_i^T [B]_i^T$ , и  $\{\sigma\}_i = [D]\{\varepsilon\}_i = [D][B]\{q\}_i$ , получим

$$\{R\}_i = \left[ \int_{V_i} [B]_i^T [D] [B]_i dV \right] \{q\}_i. \quad (4.27)$$

Введем обозначение

$$[K]_i = \int_{V_i} [B]_i^T [D] [B]_i dV. \quad (4.28)$$

Тогда

$$\{R\}_i = [K]_i \{q\}_i. \quad (4.29)$$

Матрица  $[K]_i$ , носит название матрицы жесткости  $i$  – го конечного элемента. Компонентами этой матрицы являются реактивные усилия в узлах по заданным направлениям, отвечающие единичным узловым перемещениям, последовательно накладываемым по этим направлениям, при условии, что остальные перемещения в узлах элемента равны нулю. Матрица жесткости является квадратной, порядок которой равен числу степеней свободы рассматриваемого конечного элемента.

Матрица жесткости  $[K]_i$ , учитывая блочную структуру матрицы  $[B]_i$  (4.17), можно также представить в блочном виде



$$[K]_i = \begin{bmatrix} [K]_i^{(1)} & [K]_i^{(2)} & \dots & [K]_{i1}^{(\kappa)} & \dots & [K]_{i1}^{(n)} \\ [K]_{i2}^{(1)} & [K]_{i2}^{(2)} & \dots & [K]_{i2}^{(\kappa)} & \dots & [K]_{i2}^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [K]_{ij}^{(1)} & [K]_{ij}^{(2)} & \dots & [K]_{ij}^{(\kappa)} & \dots & [K]_{ij}^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [K]_{in}^{(1)} & [K]_{in}^{(2)} & \dots & [K]_{in}^{(\kappa)} & \dots & [K]_{in}^{(n)} \end{bmatrix}, \quad (4.30)$$

где  $[K]_{ij}^{(\kappa)} = \int_{V_i} ([B]_i^{(j)})^T [D] [B]_i^{(\kappa)} dV$  - типовая подматрица, элементами которой являются реактивные усилия по соответствующим направлениям в  $j$  - м узле, отвечающие единичным перемещениям по направлению компонент перемещений в  $\kappa$  - м узле.

Легко показать, что подматрица  $[K]_{ij}^{(\kappa)}$  в свою очередь является квадратной симметричной порядка  $l$  ( $l$  - число компонент перемещений (усилий) в каждом из узлов элемента) вида

$$[K]_{ij}^{(\kappa)} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1l} \\ & K_{22} & \dots & K_{2l} \\ & \dots & \dots & \dots \\ \text{Симметрично} & & & K_{ll} \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

Поскольку при выводе уравнений для матриц жесткости конечных элементов никаких ограничений, касающихся формы элемента и вида интерполяционных функций для перемещений, не вводилось, формула (4.28) имеет общий характер.

Заметим, что матрица жесткости конечного элемента зависит не только от его геометрии и механических свойств материала, но и от принятого закона изменения компонентов деформаций по области конечного элемента.

В случае, когда матрица  $[B]_i$ , входящая в подынтегральное выражение (4.28), являются функцией местных, в том числе криволинейных координат, для выполнения интегрирования необходимо выразить элементарный объем или поверхность в местных координатах и изменить пределы интегрирования. Как известно [34]

$$dx dy dz = [J] d\xi d\eta d\zeta, \quad (4.32)$$

где  $[J]$ - определитель матрицы Якоби (4.21), или якобиан.

Поэтому если, например, криволинейный четырехугольный элемент задан с помощью нормализованных координат, то для него после соответствующих преобразований выражение (4.28) можно записать в виде

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [F(\xi, \eta)] d\xi d\eta. \quad (4.33)$$

Когда конечный элемент имеет форму криволинейного треугольника, описанного  $L$  – координатами, то с учетом (4.23) формулу (4.33) можно представить в виде

$$\int_0^{1-\eta} \int_0^{1-\eta} [F_1(\xi, \eta)] d\xi d\eta. \quad (4.34)$$

### 4.3. Неоднородные конечные элементы

Неоднородными будем называть такие конечные элементы, у которых свойства материала по объему не одинаковы. Различие свойств может быть вызвано, во-первых, физической нелинейностью задачи, когда напряжения и деформации по области элемента не постоянны, что обуславливает различные жесткостные характеристики в различных точках внутри конечного элемента, во-вторых, в состав конечного элемента могут быть включены различные вставки из материала, обладающего отличными от основного материала свойствами (например, арматура в бетонном элементе, крупный заполнитель в вяжущем и т.д.). Назовем первый тип неоднородности деформационной неоднородностью, второй – конструктивной.

Если учет деформационной неоднородности численно может быть осуществлен достаточно просто на этапе численного интегрирования при получении матриц элемента, когда свойства материала пересчитываются в каждой точке интегрирования, то второй тип неоднородности до сих пор учитывается весьма приближенно с помощью приведенных модулей. Чтобы устранить этот недостаток попробуем сформулировать зависимости для конечного элемента, имеющего вставки в виде треугольников, четырехугольников, стержней.

Для иллюстрации процедуры формирования матриц для неоднородных конечных элементов, обладающих вторым типом неоднородности, рассмотрим четырехугольный конечный элемент (элемент-матрица) в состав которого входит треугольник (элемент-заполнитель) (рис. 4.4, а). Особенность такого представления состоит в том, что внутренние узлы, принадлежащие элементу-заполнителю, не являются независимыми и не участвуют в формировании степеней свободы элемента [57]. Перемещения этих узлов, вектор-столбец которых равен  $\{\bar{q}\} = \{\{\bar{q}\}^{(1)} \{\bar{q}\}^{(2)} \{\bar{q}\}^{(3)}\}$ , где  $\{\bar{q}\}^{(k)} = \{\bar{u}_k \bar{v}_k\}$ , являются функцией перемещений узлов элемента-матрицы  $\{q\} = \{\{q\}^{(1)} \{q\}^{(2)} \{q\}^{(3)} \{q\}^{(4)}\}$ , где  $\{q\}^{(k)} = \{u_k v_k\}$  и равны перемещениям точек элемента-матрицы, совпадающих с узлами элемента-заполнителя.

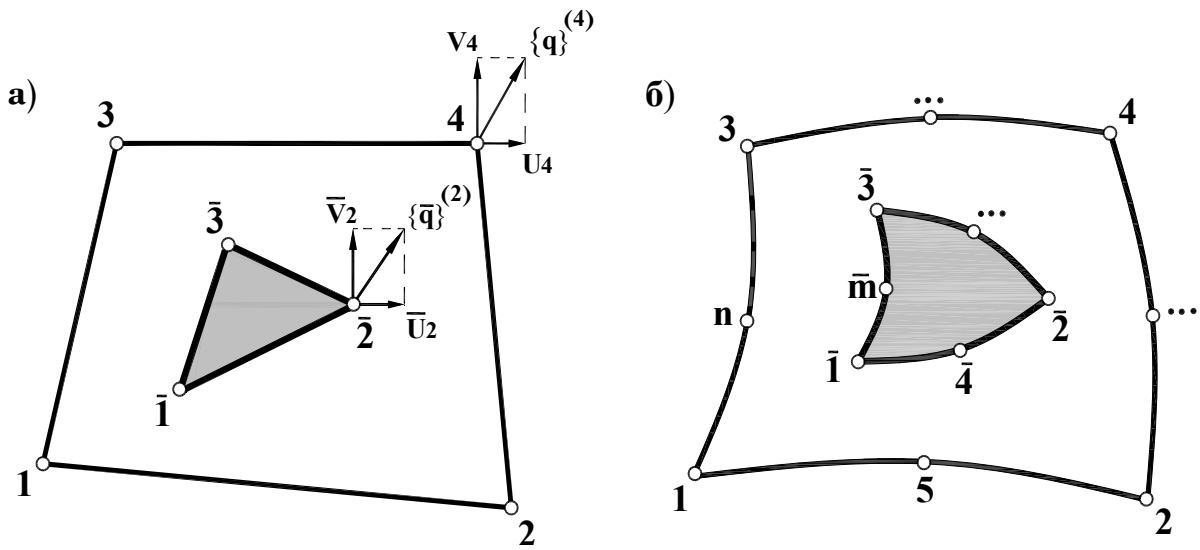


Рис. 4.4. Неоднородные конечные элементы:

а) четырехугольный конечный элемент с элементом заполнителем в виде треугольника; б) общего вида

Поэтому, прежде, чем перейти к процедуре вывода матрицы жесткости, рассмотрим вопрос перехода от узловых перемещениях внешних узлов  $\{q\}$  к узловым перемещениям внутренних узлов  $\{\bar{q}\}$ . Этот переход может быть осуществлен с помощью интерполяционных полиномов, описанных ранее. Так, например, перемещение  $\bar{k}$ -го узла элемента-заполнителя можно определить с использованием интерполяционных функций для элемента-матрицы, в которых подставляются значения координат этого узла, т.е.

$$\{\bar{q}\}^{(k)} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_k \\ \bar{v}_k \end{Bmatrix} = \left[ \begin{array}{cc} C_1(\bar{x}_k \bar{y}_k) & 0 \\ 0 & C_1(\bar{x}_k \bar{y}_k) \end{array} \right] \dots \left[ \begin{array}{cc} C_4(\bar{x}_k \bar{y}_k) & 0 \\ 0 & C_4(\bar{x}_k \bar{y}_k) \end{array} \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \dots \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix},$$

или

$$\{\bar{q}\}^{(k)} = [C(\bar{x}_k \bar{y}_k)]\{q\} \quad (4.35)$$

В целом для треугольника можно записать

$$\begin{Bmatrix} \{\bar{q}\}^{(1)} \\ \{\bar{q}\}^{(2)} \\ \{\bar{q}\}^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [C(\bar{x}_1\bar{y}_1)] \\ [C(\bar{x}_2\bar{y}_2)] \\ [C(\bar{x}_3\bar{y}_3)] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q\}^{(1)} \\ \{q\}^{(2)} \\ \{q\}^{(3)} \\ \{q\}^{(4)} \end{Bmatrix}. \quad (4.36)$$

В общем случае, когда элемент-матрица имеет  $n$  узлов, а элемент-заполнитель  $m$  узлов (рис. 4.4, б), выражение (4.36) будет иметь вид

$$\begin{Bmatrix} \{\bar{q}\}^{(1)} \\ \{\bar{q}\}^{(2)} \\ \dots \\ \{\bar{q}\}^{(m)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [C(\bar{x}_1\bar{y}_1)] \\ [C(\bar{x}_2\bar{y}_2)] \\ \dots \\ [C(\bar{x}_m\bar{y}_m)] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q\}^{(1)} \\ \{q\}^{(2)} \\ \dots \\ \{q\}^{(n)} \end{Bmatrix},$$

или

$$\{\bar{q}\} = [H]\{q\}, \quad (4.37)$$

где  $[H] = \begin{bmatrix} [H]_{11} & \dots & [H]_{1j} & \dots & [H]_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [H]_{k1} & \dots & [H]_{kj} & \dots & [H]_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [H]_{m1} & \dots & [H]_{mj} & \dots & [H]_{mn} \end{bmatrix};$

$$[H]_{kj} = E_2 C_j(\bar{x}_k \bar{y}_k).$$

Аналогичные зависимости можно сформировать и для трехмерных элементов. В этом случае в (4.37) необходимо принять  $[H]_{kj} = E_3 C_j(\bar{x}_k \bar{y}_k \bar{z}_k)$ , где  $E_3$  – единичная матрица третьего порядка.

Чтобы определить матрицу жесткости для неоднородного конечного элемента вновь воспользуемся принципом возможных перемещений [34, 89]

$$\{\delta q\}^T \{R\} = \int_{V-V_1} \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV + \int_{V_1} \{\delta \bar{\varepsilon}\}^T \{\bar{\sigma}\} dV, \quad (4.38)$$

где  $V$ ,  $V_1$  – объем элементов матрицы и заполнителя;

$\{\varepsilon\}$ ,  $\{\bar{\varepsilon}\}$  – деформации матрицы и заполнителя;

$\{\sigma\}$ ,  $\{\bar{\sigma}\}$  – напряжения в матрице и заполнителе.

Отсюда, если учесть, что  $\{\delta q\} \neq 0$ , а на основании (4.16) и (4.38)

$$\{\delta\varepsilon\}^T = \{\delta q\}^T [B]^T, \quad \{\delta\bar{\varepsilon}\}^T = \{\delta\bar{q}\}^T [\bar{B}]^T = \{\delta q\}^T [H]^T [\bar{B}], \quad \{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} = [D][B]\{q\},$$

$$\{\bar{\sigma}\} = [\bar{D}]\{\bar{\varepsilon}\} = [\bar{D}][\bar{B}]\{\bar{q}\} = [\bar{D}][\bar{B}][H]\{q\}, \text{ получим}$$

$$\{R\}_i = \left[ \int_{V-V_i} [B]^T [D] [B] dV + \int_{V_i} [H]^T [\bar{B}]^T [\bar{D}] [\bar{B}] [H] dV \right] \{q\}.$$

Как и прежде, выражение в скобках есть искомая матрица жесткости элемента

$$[K] = \int_{V-V_i} [B]^T [D] [B] dV + \int_{V_i} [H]^T [\bar{B}]^T [\bar{D}] [\bar{B}] [H] dV, \quad (4.39)$$

Здесь  $[\bar{B}]$  и  $[\bar{D}]$  - матрица деформаций и матрица упругости элемента-заполнителя.

Нетрудно видеть, что если в состав элемента-матрицы входит несколько элементов-заполнителей, то

$$[K] = \int_V [B]^T [D] [B] dV - \int_{\sum_i V_i} [B]^T [D] [B] dV + \sum_i \int_{V_i} [H]^T [\bar{B}]^T [\bar{D}] [\bar{B}] [H] dV. \quad (4.40)$$

Таким образом, получен общий алгоритм генерации матриц жесткости неоднородных элементов путем объединения в составе одного элемента-матрицы одного или нескольких элементов-заполнителей. Ясно, что форма и размерность элементов могут быть произвольными из допустимой библиотеки элементов.

Необходимо отметить, что размерности элементов матрицы и заполнителя не обязательно должны совпадать, важно лишь, чтобы степени свободы узлов были одинаковы. То есть в одном элементе допустимо объединять объемные, плоские и стержневые элементы.

#### 4.4. Неоднородный конечный элемент для расчета железобетонных конструкций

Рассмотрим неоднородный конечный элемент, в котором роль матрицы заполнителя играет стержень, работающий только на растяжение-сжатие (рис. 4.5).

Пользуясь рассуждениями предыдущего параграфа, получим матрицу жесткости такого элемента. Для этого сначала сформулируем матрицу жесткости элемента-стержня в общей системе координат  $x, y$ . Как и ранее, для наглядности все построения сначала будем осуществлять для плоских элементов, а затем приводить обобщения для пространственного случая.

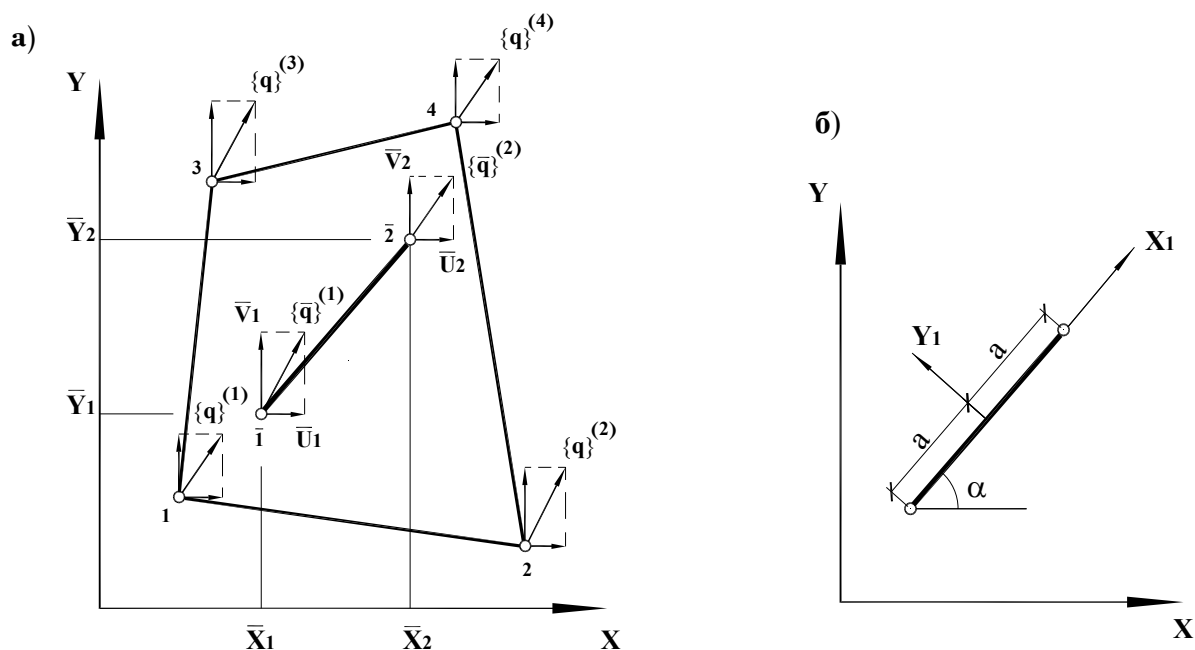


Рис. 4.5. Неоднородный элемент для моделирования железобетона: а) со стержнем, играющим роль заполнителя; б) плоский стержень в местной системе координат

Как известно [91], матрица жесткости плоского стержня в местной системе координат  $x_1 y_1$  (рис. 4.5, б) имеет вид

$$[\bar{K}_1] = \frac{EF}{2a} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.41)$$

где  $E$  – модуль деформаций материала стержня;

$F$  – площадь поперечного сечения стержня;

$a = \frac{1}{2} \sqrt{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2}$  – половина длины стержня.

Нулевые компоненты матрицы (4.41) означают отсутствие жесткости по направлению, перпендикулярном оси стержня.

Матрицу жесткости в общей системе координат можно получить по хорошо известным правилам [91]

$$[\bar{K}] = [L]^T [\bar{K}_1] [L], \quad (4.42)$$

$$\text{где } [L] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} - \text{ матрица преобразования координат.}$$

Теперь, по аналогии с (4.39) можно получить выражение для матрицы жесткости неоднородного элемента со стержневым включением

$$[K] = \int_V [B]^T [D] [B] dV + [H]^T [\bar{K}] [H]. \quad (4.43)$$

Здесь матрица, осуществляющая связь между независимыми перемещениями узлов элемента-матрицы и узловыми перемещениями стержня равна

$$[H] = \begin{bmatrix} [H]_{11} & \dots & [H]_{1j} & \dots & [H]_{1n} \\ [H]_{21} & \dots & [H]_{2j} & \dots & [H]_{2n} \end{bmatrix},$$

где  $n$ - число узлов матрицы;  $[H]_{1j} = E_2 C_j(\bar{x}_1 \bar{y}_1)$ ;  $[H]_{2j} = E_2 C_j(\bar{x}_2 \bar{y}_2)$ .

В случае если в составе элемента-матрицы имеется несколько стержневых включений, то

$$[K] = \int_V [B]^T [D] [B] dV + \sum_s [H]_s^T [\bar{K}]_s [H]_s. \quad (4.44)$$

Теперь сформулируем задачу в общем виде. Предположим, что элемент-матрица является плоским изопараметрическим элементом общего вида, описанным в разделе 4.3, и содержит  $n$  узлов.

В состав этого элемента включен криволинейный гибкий стержень также общего вида с  $m$  узлами. Получим выражение для матрицы жесткости такого элемента. Прежде всего рассмотрим стержневой изопараметрический элемент (рис. 4.6), работающий только на растяжение-сжатие.

Ясно, что такой элемент вне состава элемента-матрицы является, в известной мере, условным, т.к., не обладая изгибной жесткостью, он при приложении растягивающих усилий просто бы выпрямился, а при сжатии – потерял бы устойчивость. Гибкий криволинейный стержневой элемент имеет смысл только тогда, когда он работает в упругой среде, роль которой выполняет элемент – матрица, либо при моделировании канатов. Условно его можно представить в виде «гибкой нити», работающей в криволинейном канале. Но, тем не менее, определим его жесткостные характеристики в предположение, что напряженно-деформированное состояние однозначно определяется его узловыми перемещениями.

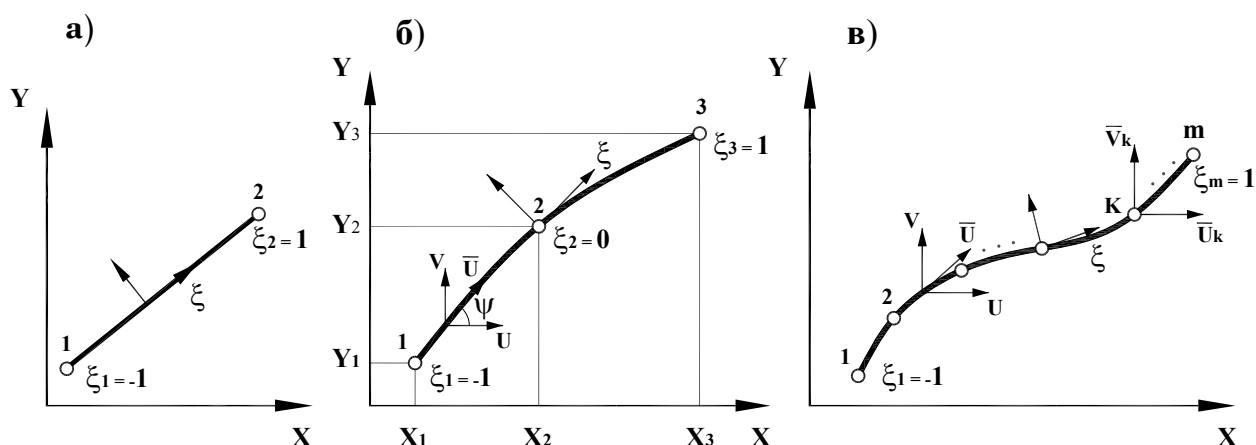


Рис. 4.6. Стержневой элемент:

а) первого порядка; б) второго порядка; в) третьего порядка

Прежде всего, определим для элемента одномерные функции в местной нормированной системе координат  $-1 < \xi < 1$ , интерполирующие координаты и узловые перемещения. В зависимости от порядка элемента, т.е. от числа его узлов, эти функции будут выглядеть следующим образом:

элемент первого порядка (рис. 4.6, а)  $\bar{C}_k = \frac{1}{2}(1 + \xi_k \xi)$ ,  $k = 1, 2$ ;

элемент второго порядка (рис. 4.6, б)  $\bar{C}_k = \left(\frac{3}{2}\xi_k^2 - 1\right)\xi^2 + \frac{1}{2}\xi_k \xi - \xi_k^2 + 1$ ,  
 $k = 1, 2, 3$ ;

элемент третьего порядка (рис. 4.6, в)  $\bar{C}_k = \frac{9}{16}\xi_k (\xi + \xi_k)\left(\xi^2 - \frac{1}{9\xi_k^2}\right)$ ,

$k = 1, 2, 3, 4$ .

Для элементов более высокого порядка одномерные интерполяционные функции могут быть определены по [9].

Геометрия стержня может быть описана посредством этих функций так

$$x = \sum_{k=1}^m \bar{C}_k x_k ; \quad y = \sum_{k=1}^m \bar{C}_k y_k , \quad (4.45)$$

где  $x_k, y_k$  - координаты узловых точек.

Из этих зависимостей может быть определен тангенс угла наклона касательной к геометрической оси стержня в произвольной точке как производная функции, заданной параметрически



$$\operatorname{tg} \psi = \frac{dy}{dx} = \frac{\sum_{k=1}^m \bar{C}'_k y_k}{\sum_{k=1}^m \bar{C}'_k x_k}, \quad (4.46)$$

а также дифференциал дуги стержня

$$ds = a d\xi, \quad (4.47)$$

где 
$$a = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^m \bar{C}'_k x_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^m \bar{C}'_k y_k\right)^2}.$$

Перемещения произвольной точки оси стержня в направлениях осей  $x$  и  $y$  определяются через перемещения его узлов

$$\{\bar{q}\} = \left\{ \{\bar{q}\}^{(1)} \{\bar{q}\}^{(2)} \dots \{\bar{q}\}^{(k)} \dots \{\bar{q}\}^{(m)} \right\},$$

где  $\{\bar{q}\}^{(k)} = \{\bar{u}_k \bar{v}_k\},$

$$u = \sum_{k=1}^m \bar{C}_k \bar{u}_k; \quad v = \sum_{k=1}^m \bar{C}_k \bar{v}_k. \quad (4.48)$$

Из геометрических соображений найдем дифференциал перемещения вдоль направления касательной

$$d\bar{u} = du \cos \psi + dv \sin \psi. \quad (4.49)$$

Осевые деформации стержня представим в виде

$$\varepsilon = \frac{d\bar{u}}{ds} = \frac{d\bar{u}}{a d\xi} = \frac{1}{a} \left( \frac{du}{d\xi} \cos \psi + \frac{dv}{d\xi} \sin \psi \right)$$

или, учитывая (4.48), так

$$\varepsilon = \frac{1}{a} \left[ \cos \psi \sum_{k=1}^m \bar{C}'_k \bar{u}_k + \sin \psi \sum_{k=1}^m \bar{C}'_k \bar{v}_k \right]. \quad (4.50)$$

Соотношение (4.50) перепишем в матричном виде

$$\varepsilon = \frac{1}{a} [\bar{C}'_1 \bar{C}'_2 \dots \bar{C}'_k \dots \bar{C}'_m] \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \psi & \sin \psi & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \sin \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \cos \psi & \sin \psi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \dots \\ \bar{u}_k \\ \bar{v}_k \\ \dots \\ \bar{u}_m \\ \bar{v}_m \end{Bmatrix} = [\bar{B}] \{\bar{q}\}, \quad (4.51)$$

где  $[B]$  – матрица деформаций элемента, связывающая деформации в произвольной точке оси с его узловыми перемещениями.

Произведя матричное перемножение, получим

$$[\bar{B}] = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} \bar{C}'_1 \cos \psi & \bar{C}'_1 \sin \psi & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{C}'_k \cos \psi & \bar{C}'_k \sin \psi & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \bar{C}'_m \cos \psi & \bar{C}'_m \sin \psi \end{bmatrix}. \quad (4.52)$$

Теперь, произведя стандартные преобразования (раздел 4.2), несложно получить выражение для матрицы жесткости стержневого элемента в виде

$$[\bar{K}]_s = EA \int_{-1}^1 [\bar{B}]^T [B] ad \xi, \quad (4.53)$$

где  $E$  – модуль деформации материала стержня;

$A$  – площадь поперечного сечения стержня.

Здесь интегрирование может быть выполнено точно только для элемента первого порядка. В этом случае мы фактически приходим к зависимости (4.42). В случае элементов второго и более высоких порядков выполняется численное интегрирование по переменной  $\xi$  методом Гаусса, аналогично способу, описанному в разделе 3.5. Рекомендуем определять матрицу жесткости элемента численным интегрированием, независимо от порядка элемента. Число гауссовых точек интегрирования в этом случае должно быть не менее порядка элемента.

Теперь, располагая матрицей жесткости независимого стержневого элемента, построим его матрицу жесткости в составе плоского изопараметрического элемента (рис. 4.7).

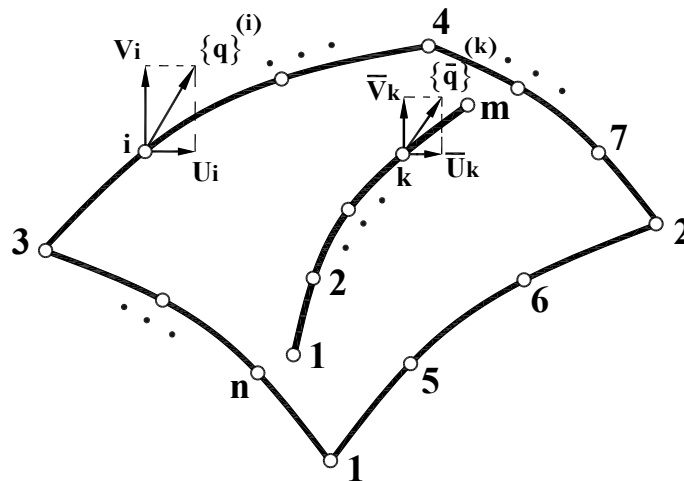


Рис. 4.7. Неоднородный плоский элемент общего вида

Для этого необходимо, помимо матрицы жесткости элемента-матрицы (плоского) и элемента-заполнителя (стержня), сформулировать связь между компонентами узловых перемещений неоднородного элемента, представленного вектором столбцом  $\{q\} = \{\{q\}^{(1)} \{q\}^{(2)} \dots \{q\}^{(j)} \dots \{q\}^{(n)}\}$ , и компонентами вектора столбца узловых перемещений стержня  $\{\bar{q}\}$  в предположении, что они деформируются совместно, т.е. установить зависимость вида

$$\{\bar{q}\} = [H]\{q\}. \quad (4.54)$$

Для построения прямоугольной матрицы  $[H]$ , размерностью  $m \times n$ , будем полагать, что для плоского элемента определены интерполяционные полиномы (раздел 4.3)  $C_j(x, y)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , порядок и число которых определяются  $n$  порядком плоского элемента. Тогда с помощью этих полиномов нетрудно установить перемещения точек, совпадающих с узлами стержней. Принятые условия совместности позволяют записать следующие выражения для узловых перемещений  $k$ -го узла стержня

$$\bar{u}_k = \bar{q}_1^{(k)} = \sum_{j=1}^n C_j(\bar{x}_k, \bar{y}_k) u_j; \quad \bar{v}_k = \bar{q}_2^{(k)} = \sum_{j=1}^n C_j(\bar{x}_k, \bar{y}_k) v_j, \quad (4.55)$$

или в матричном виде

$$\{\bar{q}\}^{(k)} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_k \\ \bar{v}_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1k} & 0 & \dots & C_{jk} & 0 & \dots & C_{nk} & 0 \\ 0 & C_{1k} & \dots & 0 & C_{jk} & \dots & 0 & C_{nk} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \dots \\ u_j \\ v_j \\ \dots \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix}, \quad (4.56)$$

где  $C_{jk} = C_j(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$ .

В сокращенном виде соотношение (4.56) имеет вид

$$\{\bar{q}\}^{(k)} = [H]^{(k)} \{q\}, \quad (4.57)$$

где  $[H]^{(k)} = [E_2 C_1(x_k, y_k) \dots E_2 C_j(x_k, y_k) \dots E_2 C_n(x_k, y_k)]$ ,  $E_2$ - единичная матрица второго порядка.

Объединяя в единое матричное соотношение выражения (4.57) для всех узлов стержня, получим

$$\begin{Bmatrix} \{\bar{q}\}^{(1)} \\ \{\bar{q}\}^{(1)} \\ \dots \\ \{\bar{q}\}^{(k)} \\ \dots \\ \{\bar{q}\}^{(m)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_2 C_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1) & E_2 C_2(\bar{x}_1, \bar{y}_1) & \dots & E_2 C_j(\bar{x}_1, \bar{y}_1) & \dots & E_2 C_n(\bar{x}_1, \bar{y}_1) \\ E_2 C_1(\bar{x}_2, \bar{y}_2) & E_2 C_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2) & \dots & E_2 C_j(\bar{x}_2, \bar{y}_2) & \dots & E_2 C_n(\bar{x}_2, \bar{y}_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ E_2 C_1(\bar{x}_k, \bar{y}_k) & E_2 C_2(\bar{x}_k, \bar{y}_k) & \dots & E_2 C_j(\bar{x}_k, \bar{y}_k) & \dots & E_2 C_n(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ E_2 C_1(\bar{x}_m, \bar{y}_m) & E_2 C_2(\bar{x}_m, \bar{y}_m) & \dots & E_2 C_j(\bar{x}_m, \bar{y}_m) & \dots & E_2 C_n(\bar{x}_m, \bar{y}_m) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q\}^{(1)} \\ \{q\}^{(2)} \\ \dots \\ \{q\}^{(j)} \\ \dots \\ \{q\}^{(n)} \end{Bmatrix}, \quad (4.58)$$

где средняя прямоугольная матрица размером  $m \times n$  и есть искомая матрица  $[H]$  для выражения (4.54).

Теперь, пользуясь хорошо известными правилами [91], можно записать матрицу жесткости стержня, работающего в составе и совместно с плоским элементом

$$[K]_s = [H]^T [\bar{K}] [H]. \quad (4.59)$$

Окончательно зависимость для матрицы жесткости неоднородного элемента, включающего в себя плоский и несколько стержневых элементов может быть записана по аналогии с (4.44) следующим образом

$$[K] = [K]_b + \sum_s [K]_s . \quad (4.60)$$

Таким образом, полученное выражение (4.60) наиболее естественно для моделирования работы железобетонных элементов, когда первое слагаемое представляет собой матрицу жесткости бетона, последующие – матрицы жесткости арматурных стержней в составе бетонного элемента [56].

## ГЛАВА 5. КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНАЯ МОДЕЛЬ ЖЕЛЕЗОБЕТОНА

### 5.1. Инкрементальная формулировка

В основу конечноэлементной модели железобетона положим неоднородный конечный элемент (раздел 4.4), жесткость которого представляется в виде суммы жесткостей «матрицы» (в данном случае бетона) и «заполнителей» (арматурных стержней), т.е., по аналогии с (4.44), для  $i$ -го конечного элемента запишем [57]

$$[K]_i = [K_b] + \sum [\bar{K}_s] = \int [B]^T [D_b] [B] dv + \sum_s [H]_s^T [\bar{K}_s] [H]_s, \quad (5.1)$$

где  $[D_b]$  - матрица механических характеристик бетона;

$$[\bar{K}_s] = E_s A_s \int_{-1}^1 [\bar{B}]^T [B] a d\xi - \text{матрица жесткости } s\text{-го стержня в составе}$$

неоднородного элемента;

$E_s, A_s$  - модуль деформации и площадь поперечного сечения  $s$ -го арматурного стержня.

Объединяя элементы в систему, как это делалось в разделе 3.4, уравнения равновесия узлов системы запишем в виде аналогичном (3.12)

$$\{P\} = [K]\{q\}, \quad (5.2)$$

где  $[K]$  - матрица жесткости системы, определяемая суммированием матриц жесткости отдельных элементов выражения (5.1) по формулам (3.12), (3.13),

$\{q\}$  - узловые перемещения системы;

$\{P\}$  - вектор узловых сил системы.

Однако, соотношение (5.2) записано в предположении физической линейности задачи, когда свойства материалов не зависят от достигнутого уровня напряжений и деформаций, то есть при постоянстве матриц  $[D_b]$  и модуля арматуры  $E_s$ .

В тоже время, как показано в главе 1, задача существенно нелинейная. Решению нелинейных задач с помощью метода конечных элементов посвящена глава 3. В ней нелинейная матрица  $[D_b]$ , равная упруго-пластической матрице (2.13), определяется по теории течения и по сути своей является касательной матрицей, связывающей приращения деформаций и напряжений, т.е.

$$\{d\sigma_b\} = [D_b]\{d\varepsilon_b\}. \quad (5.3)$$

Очевидно, что при таком подходе и матрица жесткости элемента (5.1) будет касательной (инкрементальной) матрицей жесткости, то есть уравнение равновесия  $i$ -го конечного элемента (3.5) будет выглядеть следующим образом

$$\{\Delta R\}_i = [K]_i \{\Delta q\}_i, \quad (5.4)$$

а в целом для системы разрешающие уравнения МКЭ формулируются в приращениях

$$\{\Delta P\} = [K] \{\Delta q\}, \quad (5.5)$$

где  $[K]$  - касательная (инкрементальная) матрица жесткости системы.

Анализируя методы решения физически нелинейных задач приведенные в разделе 3.5, можно прийти к выводу, что наиболее подходящим из них применительно к уравнению (5.5) является шаговый метод приращения нагрузки с итерационной процедурой Ньютона-Рафсона на каждом шаге решения (рис. 5.1) [14].

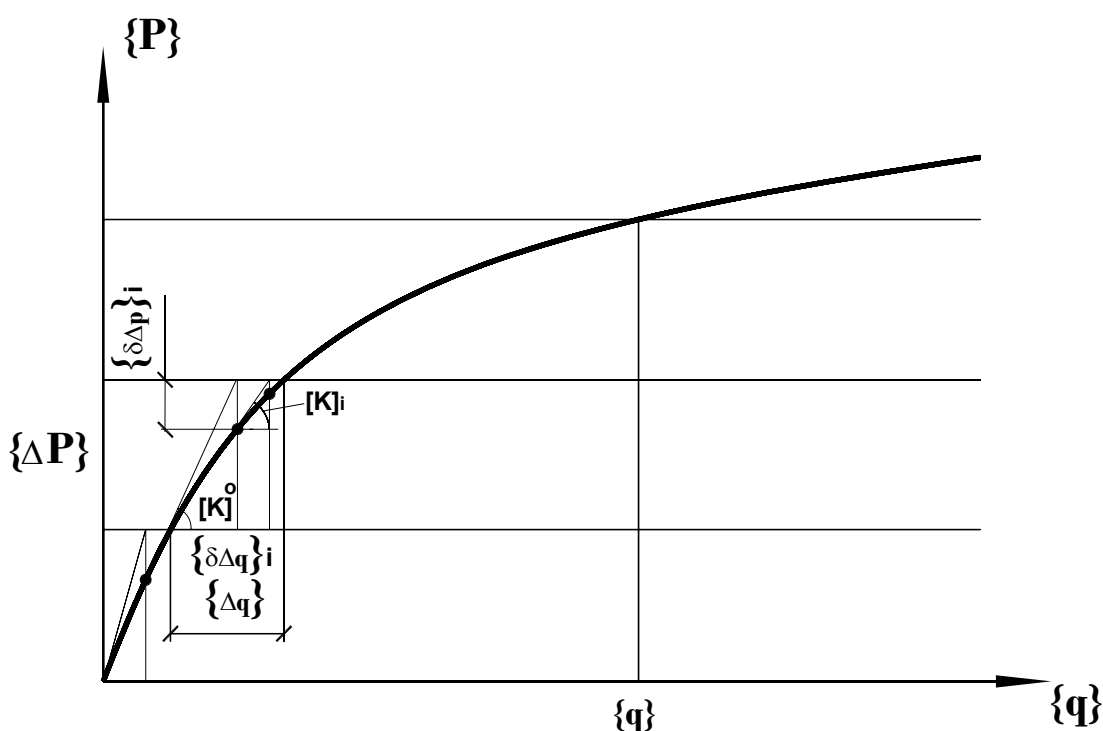


Рис. 5.1. Шаговый метод в сочетании с методом Ньютона-Рафсона

Особо подчеркнем, что метод Ньютона-Рафсона является методом касательных, что полностью отвечает физической природе матрицы жесткости, полученной на базе теории течения. Алгоритм решения нелинейных задач шаговым методом с процедурой Ньютона-Рафсона на каждом шаге представлен блок схемой на рис. 5.2.





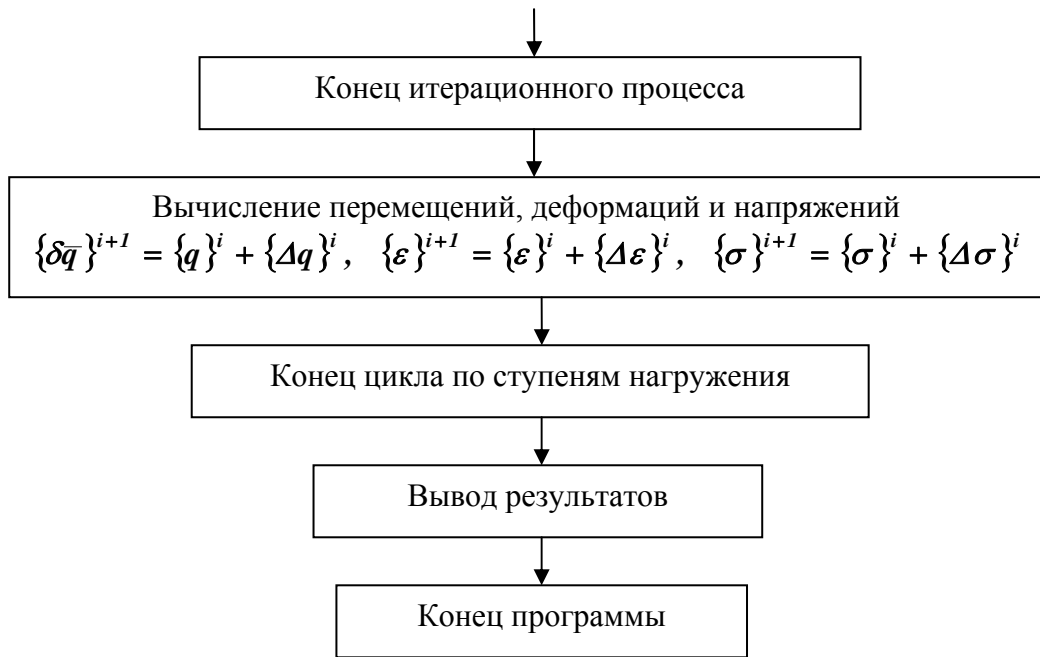


Рис. 5.2. Блок схема шагового метода с итерационным уточнением

Поскольку неоднородный конечный элемент содержит в своем составе арматуру, то необходимо рассмотреть также и касательную линеаризацию матрицы жесткости  $i$ -го арматурного стержня. Ясно, что свойства арматуры в этой матрице будут определяться исключительно модулем деформации арматурного стержня. Поэтому рассмотрим отдельно характеристики деформирования арматуры, имея в виду, что механические характеристики бетона были получены ранее в главе 2.

## 5.2. Диаграмма деформирования арматуры

Примем для арматуры при сжатии и растяжении диаграмму Прандтля, которая рекомендуется нормативными документами стран СНГ [102]. Диаграмма имеет два участка (рис. 5.3):

$$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ участок} \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{s0}, \quad \sigma_s = \varepsilon_s E_s \\ 2 \text{ участок} \quad \varepsilon_0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{s2}, \quad \sigma_s = R_s \end{array} \right\} \quad (5.6)$$

где  $R_s$  – расчетное сопротивление арматуры;

$\varepsilon_{s0}$  – относительные деформации удлинения арматуры при достижении напряжениями  $\sigma_s$  расчетного сопротивления  $R_s$ ;

$E_s$  – модуль упругости арматуры;

$\varepsilon_{s2}$  – относительные деформации, соответствующие пределу прочности арматуры (принимают равными 0.025).

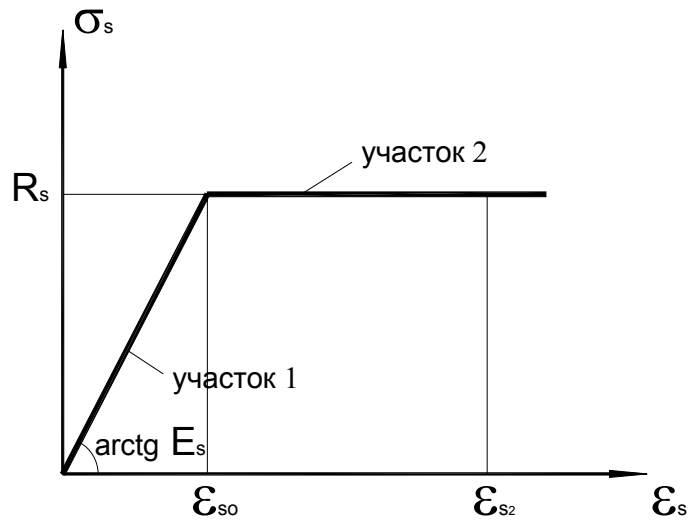


Рис. 5.3. Диаграмма состояния растянутой арматуры

На диаграмме значения предельных упругих деформаций  $\varepsilon_{s0}$  связаны с расчетным сопротивлением арматуры  $R_s$  соотношением

$$\varepsilon_{s0} = \frac{R_s}{E_s}. \quad (5.7)$$

Будем считать, что диаграммы деформирования арматуры (рис. 5.3) справедливы как при растяжении, так и при сжатии.

На интервале  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{s0}$  (участок 1)  $d\sigma_s = E_s \cdot d\varepsilon_s$ , т.е. касательный модуль равен модулю упругости арматуры

$$E_s^{\tan} = E_s = \frac{d\sigma_s}{d\varepsilon_s}. \quad (5.8)$$

На этом интервале касательный модуль и секущий модуль равны между собой, т.е.

$$E_s^{\tan} = E_s^{\sec}$$

На интервале  $\varepsilon_{s0} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{s2}$  (участок 2):

$$E_s^{\sec} = \frac{R_s}{\varepsilon_s}. \quad (5.9)$$

Учитывая, что на этом участке  $\sigma_s = R_s = \text{const}$ , то касательный модуль равен

$$E_s^{\tan} = \frac{d\sigma_s}{d\varepsilon_s} = 0. \quad (5.10)$$

Соотношения для бетона, арматуры и железобетона приведенные в этом разделе и в разделе 5.1, получены в предположении отсутствия трещин в бетоне. Между тем, известно, что основной особенностью железобетона, как конструкционного материала, является наличие трещин в бетоне в эксплуатационной стадии работы конструкций. В этой связи возникает необходимость рассмотреть особенности деформирования материала при условии образования и наличия трещин. Прежде всего, рассмотрим условия образования трещин, а затем перейдем к уточнению физических соотношений и матрицы жесткости железобетонного элемента с трещинами.

### 5.3. Условия образования трещин. Схемы трещин

Будем полагать, что трещины в бетоне железобетонного элемента образуются по главным площадкам, когда нарушаются условия прочности (2.23) [39]

$$f(\sigma_0, \tau_0, \theta) \geq 0 \quad (5.11)$$

При этом одно или несколько главных напряжений являются растягивающими. Схемы образования трещин представлены на (рис. 5.4)

Здесь значения главных напряжений определены выражениями [89]

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_0 - \frac{3 + \mu}{\sqrt{2}\sqrt{3 + \mu^2}} \tau_0 \\ \sigma_2 &= \sigma_0 + \frac{\sqrt{2}\mu}{\sqrt{3 + \mu^2}} \tau_0 \\ \sigma_3 &= \sigma_0 - \frac{3 - \mu}{\sqrt{2}\sqrt{3 + \mu^2}} \tau_0 \end{aligned} \right\}, \quad (5.12)$$

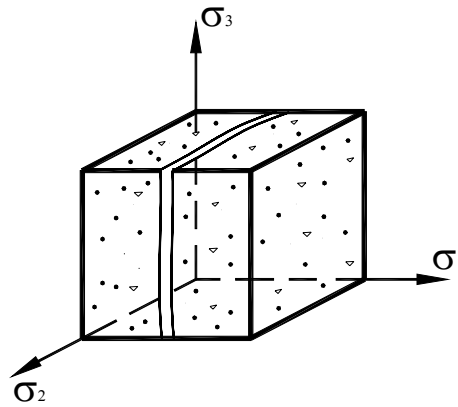
где  $\mu = \frac{\sigma_2 - \sigma_1 + \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}$  - параметр Лодэ Надаи, определяемый в зависимости от

угла вида напряженного состояния  $\theta$  (раздел 2.2).

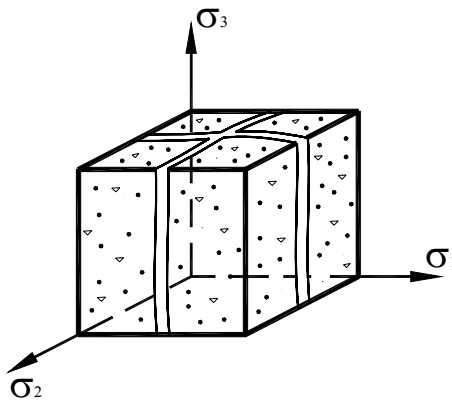
Направляющие косинусы  $m_{ck}$  площадок трещин определяются из совместного решения системы

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_c)m_{c1} + \tau_{xy}m_{c2} + \tau_{xz}m_{c3} &= 0 \\ \tau_{xy}m_{c1} + (\sigma_y - \sigma_c)m_{c2} + \tau_{yz}m_{c3} &= 0 \\ \tau_{xz}m_{c1} + \tau_{yz}m_{c2} + (\sigma_z - \sigma_c)m_{c3} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

а) Схема 1



б) Схема 2



в) Схема 3

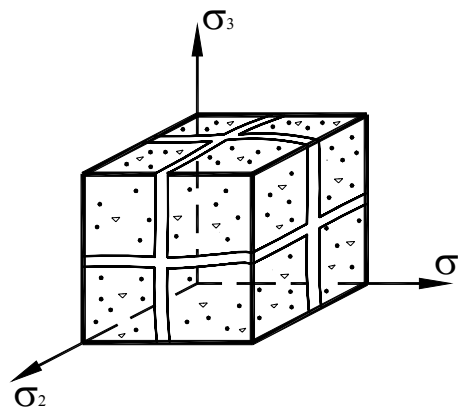


Рис. 5.4. Схемы образования трещин в бетоне:

- а) одна трещина  $\sigma_1 \geq 0, \sigma_2 < 0, \sigma_3 < 0$ ; б) две трещины  $\sigma_1 > \sigma_2 > 0, \sigma_3 < 0$ ;  
в) три трещины  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > 0$

и уравнения

$$m_{c_1}^2 + m_{c_2}^2 + m_{c_3}^2 = 1, \quad (5.14)$$

где  $c = 1, 2, 3$  – направления главных осей.

После несложных преобразований получим

$$\left. \begin{aligned} m_{c_1} &= \pm \frac{1}{\sqrt{1 + P_1^2 + P_2^2}}; \\ m_{c_2} &= P_1 \cdot m_{c_1}; m_{c_3} = P_2 m_{c_1} \end{aligned} \right\}, \quad (5.15)$$

где

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \frac{\tau_{xz}\tau_{yz} - (\sigma_z - \sigma_c)\tau_{xy}}{A_{c1}}; \\ P_2 &= \frac{\tau_{xz}\tau_{yz} - (\sigma_z - \sigma_c)\tau_{xy}}{A_{c1}}; \\ A_{c1} &= (\sigma_y - \sigma_c)(\sigma_z - \sigma_c) - \tau_{yz}^2 \neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

В уравнениях (5.15) принимается знак «плюс», если знаки напряжений  $\sigma_c$  и  $\sigma_{cc}$  совпадают и «минус» - в противном случае.

Если  $A_{c1} = 0$ , следует вычислить ближайшую, не равную нулю, величину  $A_{c2}$  или  $A_{c3}$  при помощи циклической перестановки индексов 1-2-3 в выражении (5.16). В этом случае аналогичная перестановка должна быть осуществлена и в соотношениях (5.15). Подобный способ используется при решении систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса при выборе главного элемента.

Описанная процедура определения направляющих косинусов справедлива для любых видов напряженных состояний, поскольку параметры  $A_{ck}$ , ( $c, k = 1, 2, 3$ ) не могут быть равными нулю все одновременно. Кроме того здесь устанавливается знак величин  $m_{ck}$  ( $c, k = 1, 2, 3$ ).

Отметим, что приведенные в данной главе формулы могут быть использованы применительно к компонентам деформированного состояния. В этом случае на основании аналогии между теориями напряжений и деформаций [90] необходимо заменить нормальные составляющие тензора  $\sigma_{ii}$ ,  $\sigma_c$  ( $i, c = 1, 2, 3$ ) на аналогичные тензора деформаций, а касательные напряжения  $\tau_{ij}$  на  $\gamma_{ij}/2$ .

## 5.4. Железобетон с трещинами

Рассмотрим железобетонный элемент с трещинами при одноосном растяжении (рис. 5.5).

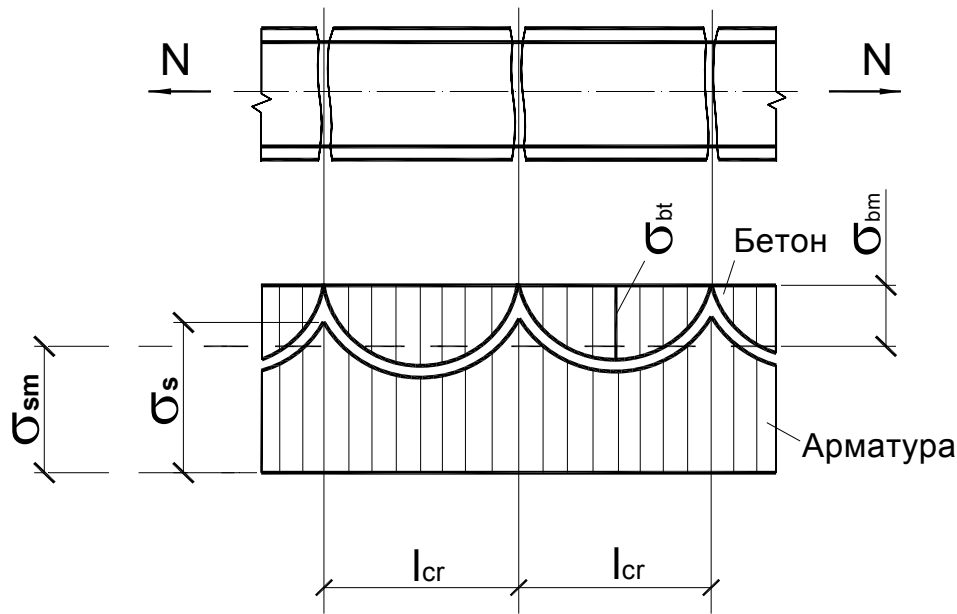


Рис. 5.5. Растянутый элемент с трещинами

На участке между трещинами длиной  $l_{cr}$  напряжения распределены неравномерно [4, 39, 22]. Так напряжения в арматуре в трещинах достигают максимальных значений  $\sigma_s$ . По мере удаления от берегов трещин благодаря сцеплению арматуры с бетоном эти напряжения уменьшаются и на расстоянии  $l_{cr}/2$  принимают минимальные значения. Напряжения в бетоне, наоборот, равны нулю в трещине и максимальны в середине участка между трещинами. В виду неравномерности напряжений на участке между трещинами в расчет вводятся их средние значения  $\sigma_{sm}$  и  $\sigma_{bm}$  (рис. 5.5).

Как известно [4, 39], средние значения напряжений и деформаций арматуры, связаны с максимальными значениями в трещине соотношением

$$\frac{\sigma_{sm}}{\sigma_s} = \frac{\varepsilon_{sm}}{\varepsilon_s} = \psi_s, \quad (5.17)$$

где  $\psi_s$  – коэффициент В.И. Мурашева [83], учитывающий неравномерность работы арматуры на участке с трещинами,

$\varepsilon_{sm}$  – средние деформации арматуры на участке между трещинами.

Связь между напряжениями и деформациями будет иметь вид:

- в трещине

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s = \frac{E_s}{\psi_s} \varepsilon_{sm}; \quad (5.18)$$

- между трещинами

$$\sigma_{sm} = E_s \varepsilon_{sm}. \quad (5.19)$$

При этом должно соблюдаться условие

$$\sigma_s = \sigma_{sm} + \sigma_{bm}, \quad (5.20)$$

то есть напряжение в арматуре в трещине, равно сумме средних напряжений в арматуре и бетоне между трещинами.

Таким образом, железобетон с трещинами представляется сплошным материалом, работающим со средними напряжениями в бетоне и арматуре, деформации которых равны между собой и равны средним значениям, т.е.  $\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{bm} = \varepsilon$ . Коэффициент В.И.Мурашева  $\psi_s$  в этой трактовке является параметром, позволяющим осуществить такое представление.

Запишем выражение для  $\psi_s$  в следующем виде [102]

$$\psi_s = 1 - \omega \frac{\sigma_{s,crc}}{\sigma_s}, \quad (5.21)$$

где  $\sigma_{s,crc}$  – напряжения в арматуре в момент образования трещин;

$\sigma_s$  - напряжения в арматуре в трещине;

$\omega$  - коэффициент полноты эпюры растянутого бетона.

Учитывая, что  $\sigma_{s,crc} = E_s \varepsilon_{b,crc}$ , а  $\sigma_s = E_s \varepsilon_s$ , получим

$$\psi_s = 1 - \omega \frac{\varepsilon_{b,crc}}{\varepsilon_s} = 1 - \omega \frac{\varepsilon_{b,crc}}{\varepsilon_{sm}} \psi_s, \quad (5.22)$$

или

$$\psi_s = \frac{1}{1 + \omega \frac{\varepsilon_{b,crc}}{\varepsilon_{sm}}}. \quad (5.23)$$

Подставив значение  $\psi_s$  из (5.23) в формулу (5.18) и учитывая, что  $\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{bm} = \varepsilon$ , получим

$$\sigma_s = E_s \left( 1 + \omega \frac{\varepsilon_{b,crc}}{\varepsilon} \right) \varepsilon = E_s \varepsilon + \omega E_s \varepsilon_{b,crc} \quad (5.24)$$

Сравнивая (5.24) с (5.20) видим, что первое слагаемое в (5.24) представляет собой среднее напряжение в арматуре  $\sigma_{sm} = E_s \varepsilon$ , второе – среднее напряжение в бетоне  $\sigma_{bm} = \omega E_s \varepsilon_{b,crc}$ .

Схематизированная диаграмма зависимости (5.24) изображена на рис. 5.6.

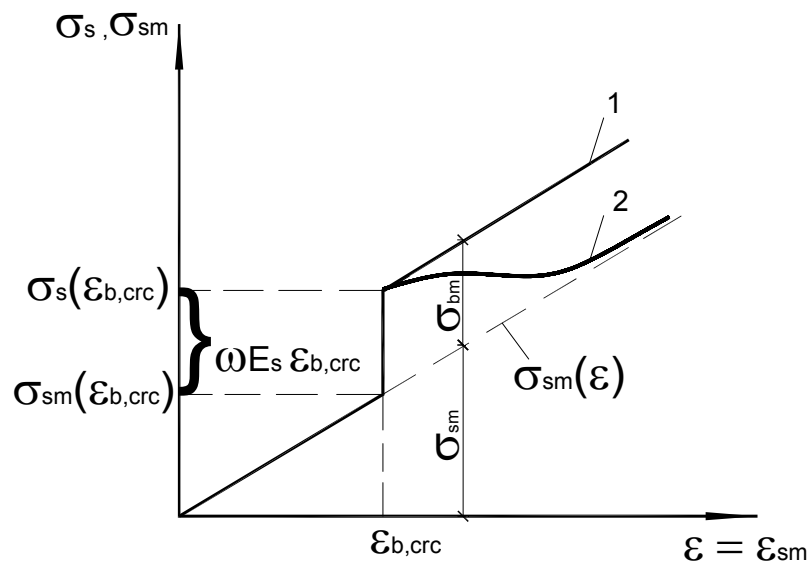


Рис. 5.6. Диаграмма деформирования арматуры на участке между трещинами: 1 – рекомендуемая [102]; 2 – реальная кривая

Из рис. 5.6 видно, что если принять значение  $\omega = 0.8$ , как это рекомендовано в [102], то диаграмма деформирования арматуры после образования трещин, параллельна диаграмме «чистой» арматуры (кривая 1 на рис. 5.6). При этом не учитывается возможность образования новых трещин и постепенное выключение из работы растреснутого бетона в процессе растяжения элемента. Реальная же диаграмма после образования трещин имеет вид кривой, показанной на том же рисунке (кривая 2). Чтобы ликвидировать это противоречие представим коэффициент  $\omega$  следующим образом

$$\omega = \omega_0 \kappa, \quad (5.25)$$

где  $\omega_0$  – начальное значение коэффициента полноты эпюры напряжений в бетоне,  $\omega_0 = 0.8$  [102];

$\kappa$  - параметр, учитывающий образование новых трещин, так называемое «подростание» трещин [13].



Параметр  $\kappa$  является функцией средних деформаций. В момент образования трещин он равен 1, далее монотонно уменьшается до нуля вследствие полного растрескивания бетона и выключения его из работы элемента.

Рекомендуем следующее выражение для параметра  $\kappa$

$$\kappa = \eta e^{-(\eta-1)}, \quad (5.26)$$

где  $\eta = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{b,crc}} \geq 1$ .

График функции  $\psi_s$  изображен на рис. 5.7.

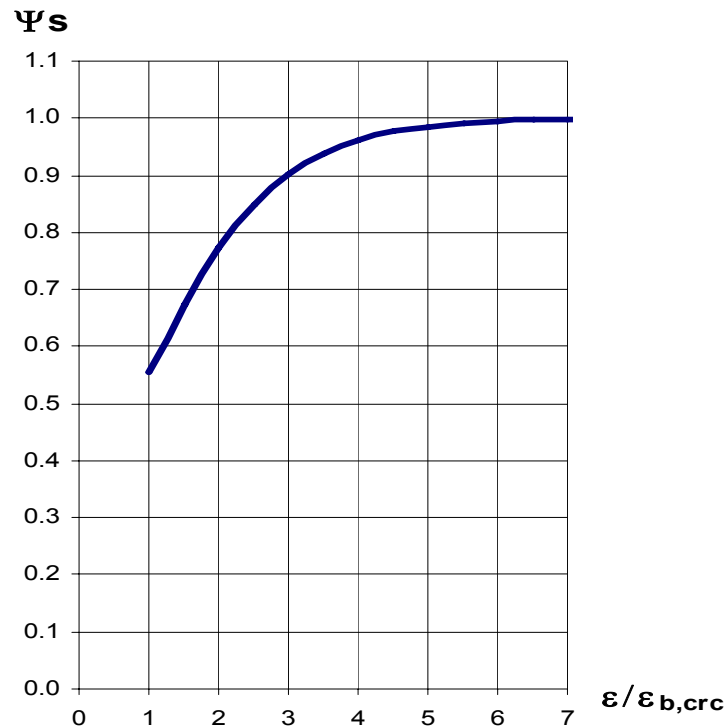


Рис. 5.7. Коэффициент  $\psi_s$

Определим средние секущие и касательные модули арматуры на участке с трещинами:

$$E_s^{\text{sec}} = \frac{E_s}{\psi_s}, \quad (5.27)$$

$$E_s^{\text{tan}} = \frac{d\sigma_s}{d\varepsilon} = E_s + \omega \varepsilon_{b,crc} \frac{d\kappa}{d\varepsilon}, \quad (5.28)$$

где

$$\frac{d\kappa}{d\varepsilon} = \frac{\partial \kappa}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon_{b,crc}} (1-\eta) e^{1-\eta}. \quad (5.29)$$

В выражении (5.28) входит значение деформации  $\varepsilon_{b,crc}$  в момент образования трещин. Его можно определить либо непосредственно из эксперимента, либо с использованием упругопластического коэффициента  $\lambda$  (раздел 2.1)

$$\varepsilon_{b,crc} = \lambda \frac{R_{bt,ser}}{E_b}. \quad (5.30)$$

Все соотношения настоящего раздела получены в предположении, что трещины перпендикулярны направлению армирования. Это возможно только при центральном растяжении.

При сложном напряженном состоянии трещины образуются, как правило, под углом к арматурным стержням, т.е. направление главных растягивающих напряжений в бетоне не совпадает с направлением армирования. В этом случае в формуле (5.26) необходимо определить  $\varepsilon$  как деформации в направлении арматурного стержня по общеизвестным правилам преобразования деформаций из одной системы координат в другую [76].

Переходя к неоднородному конечному элементу, в состав которого входят один или несколько арматурных стержней (раздел 4.4), видим, что в слагаемые в матрице жесткости этого элемента  $[K]_s$ , связанные с арматурой, входят свойства арматуры в виде ее касательных модулей  $E_s^{tan}$ . Определив эти модули по формуле (5.28), получим матрицу жесткости железобетонного конечного элемента с трещинами в бетоне.

Таким образом, сформулирован общий алгоритм вычисления матрицы жесткости конечного железобетонного элемента, как с трещинами, так и без них. При этом для элемента с трещинами вместо модуля упругости арматуры  $E_s$  необходимо ввести касательный модуль арматуры, определяемый выражением (5.28).

### 5.5. Ширина раскрытия трещин, расстояния между трещинами

Ширина раскрытия трещин, нормальных к продольной оси элемента, представляет собой разность удлинений арматуры и растянутого бетона на участке между трещинами длиной  $l_{crc}$ , т.е. [4]

$$a_{crc} = (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{btm}) l_{crc}. \quad (5.31)$$

Средней деформацией растянутого бетона  $\varepsilon_{btm}$  как величиной малой в сравнении со средней деформацией растянутой арматуры пренебрегают и тогда выражение (5.31) запишется так:

$$a_{crc} = \varepsilon_{sm} l_{crc}. \quad (5.32)$$

Определим расстояние между трещинами  $l_{crc}$  из уравнения равновесия, в котором усилие в арматуре в трещине  $\sigma_s A_s$  уравновешивается усилием сцепления арматуры с бетоном.

$$\sigma_s A_s = \tau_c a l_{crc} \omega, \quad (5.33)$$

где  $A_s = \frac{\pi d^2}{4}$  – площадь сечения арматуры;

$a = \pi d$  – периметр сечения арматуры;

$\omega$  – коэффициент полноты эпюры сцепления;

$\tau_c$  – максимальное напряжение сцепления арматуры с бетоном.

После подстановки в уравнение (5.33) значений  $A_s$  и  $a$  получим

$$\sigma_s \frac{\pi d^2}{4} = \tau_c \pi d l_{crc} \omega,$$

откуда расстояние между трещинами равно

$$l_{crc} = \frac{\sigma_s d}{4\omega\tau_c}. \quad (5.34)$$

С учетом выражения (5.34) ширина раскрытия трещин

$$a_{crc} = \varepsilon_{sm} l_{crc} = \frac{\sigma_s d}{4\omega\tau_c} \varepsilon = \frac{E_s d}{4\omega\tau_c} \varepsilon^2.$$

Если обозначить [4]  $\frac{R_{bt,ser}}{\tau_c \omega} = \eta$  или  $\tau_c \omega = \frac{R_{bt,ser}}{\eta}$ , то

$$a_{crc} = \frac{E_s d \eta}{4R_{bt,ser}}, \quad (5.35)$$

где  $R_{bt,ser}$  – растягивающее напряжение в бетоне в момент образования трещин, определяемое с помощью условия прочности бетона;

$\eta$  – коэффициент, учитывающий вид и профиль арматуры;

$\eta = 0.7$  – для стержневой арматуры периодического профиля;

$\eta = 0.9$  – для рифленной проволоки классов Вр-I, Вр-II и канатов;

$\eta = 1$  – для гладких стержней;

$\eta = 1.25$  – для гладкой проволоки класса В-II.

## ГЛАВА 6. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

### 6.1. Расчет железобетонных статически определимых балок

В качестве тестовых задач рассмотрим расчет железобетонных статически определимых балок прямоугольного сечения без предварительного напряжения без поперечного армирования и с поперечным армированием. Выбор такой конструкции обусловлен, с одной стороны, тем, что они представляют наиболее обширный класс железобетонных конструкций, с другой, тем, что их расчет может быть осуществлен по наиболее обоснованной стандартной методике, изложенной в нормативных документах [100]. Следует, однако, отметить, что расчет по действующим нормам может быть осуществлен лишь на отдельных характерных стадиях работы балок. Результаты расчетов именно на этих стадиях могут служить для тестирования разработанной модели и метода расчета.

Геометрические размеры и армирование балок приведены на рис. 6.1. Балки изготовлены из обычного тяжелого бетона на портландцементе. В качестве исходных данных приняты следующие характеристики бетона (соответствующие нормативным значениям для бетона класса В25):  $R_b = 18.5$  МПа,  $R_{bt} = 1.6$  МПа,  $E_b = 3 \cdot 10^4$  МПа,  $\nu = 0.2$ ,  $\varepsilon_u = 0.0025$ ,  $\varepsilon_{ut} = 0.0002$ . Продольное армирование осуществлено из арматуры класса А-IV с  $R_s = 590$  МПа и  $E_s = 1.9 \cdot 10^5$  МПа, а поперечное армирование (хомуты) из арматуры класса А-I с  $R_s = 235$  МПа,  $E_s = 2.1 \cdot 10^5$  МПа. Нагрузка прикладывалась симметрично в виде сосредоточенных сил на расстоянии  $\frac{1}{4}$  от опор.

Результаты расчета балок по СНиП [100] :

Высота сжатой зоны  $x = 160$  мм. Разрушающая нагрузка  $P_{max} = 12$  т. Нагрузка трещинообразования  $P_{crc} = 1.4$  т. Напряжение в арматуре в момент трещинообразования – 19.5 МПа. Прогиб к моменту разрушения 7 мм.

Разрушение балок: без поперечной арматуры – по наклонному сечению, с поперечной арматурой – по нормальному сечению.

Эти же балки рассчитывались методом конечных элементов с использованием плоских четырехузловых изопараметрических элементов, а также элементов-вставок в виде сосредоточенных стержней, описанных в разделе 4.4. Расчетная схема представлена на рис. 6.2. Нагружение производилось ступенями по  $\Delta P = 0.12$  т. (всего 100 ступеней). Разрушающая нагрузка  $P = 12$  т. В силу осевой симметрии, расчет велся для  $\frac{1}{2}$  части балки. Результаты расчетов по МКЭ приведены на рис. 6.3 - 6.6.

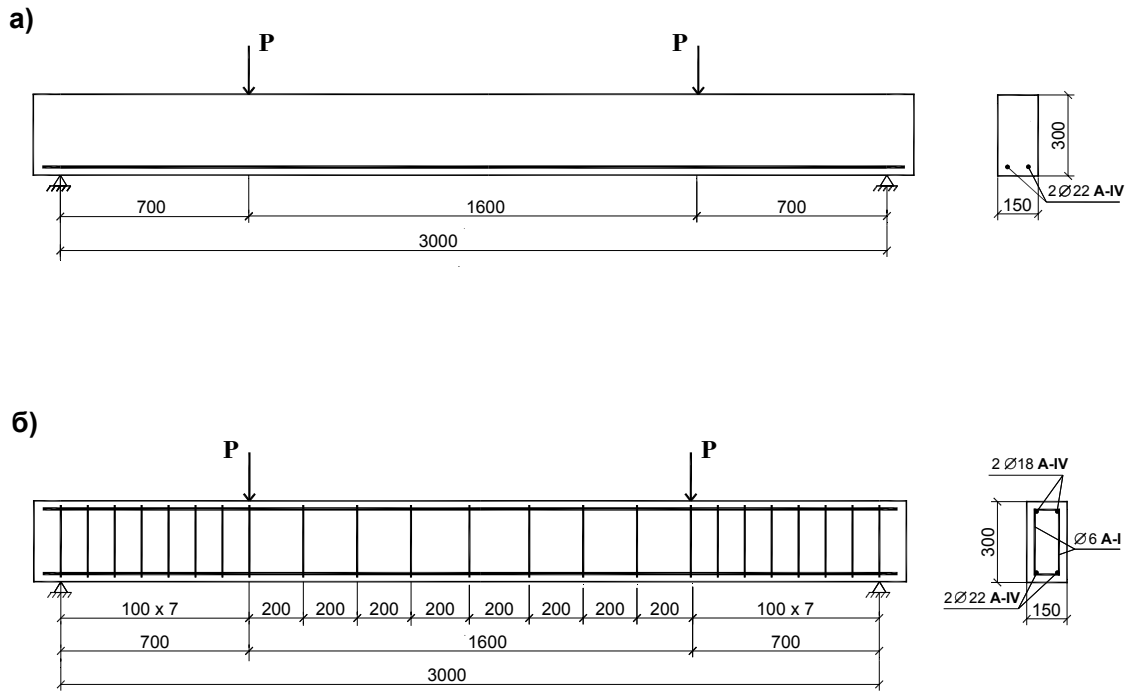


Рис. 6.1. Конструкция железобетонных балок прямоугольного сечения:  
 а) без поперечного армирования; б) с поперечным армированием

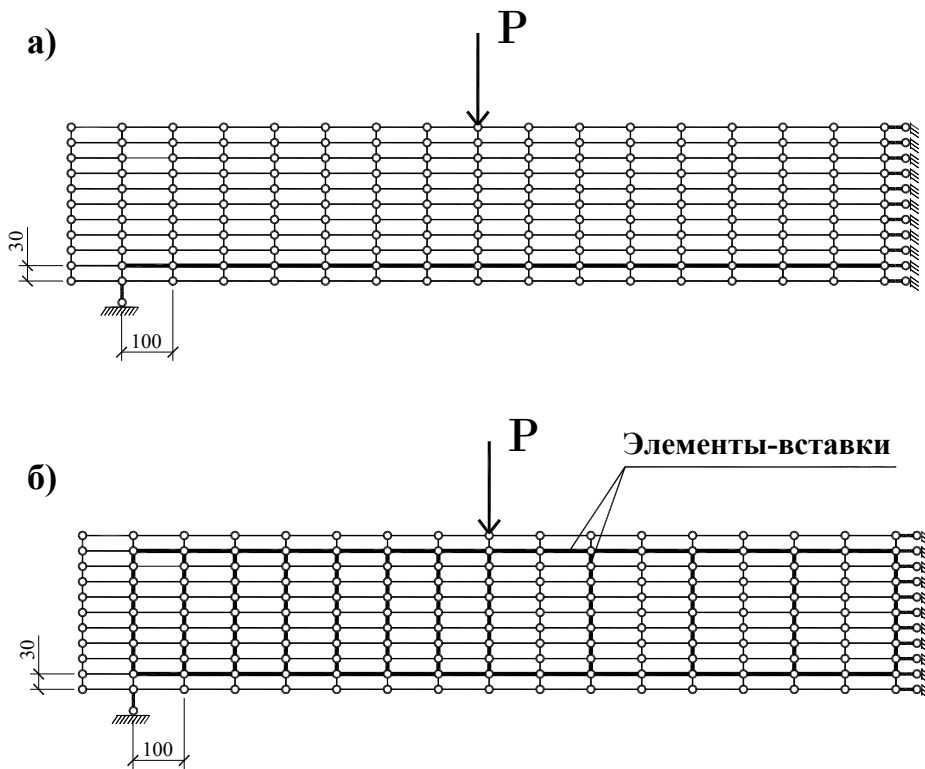
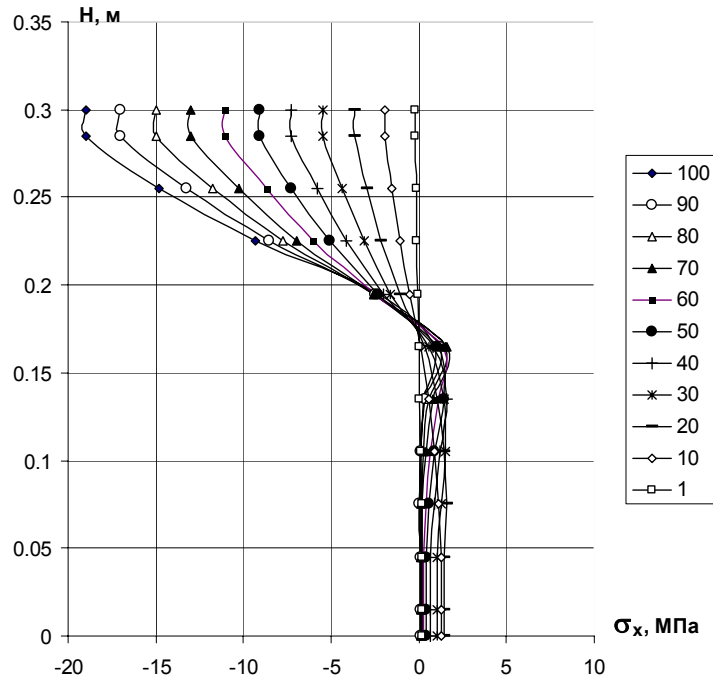


Рис. 6.2. Расчетная схема балок: а) без поперечного армирования;  
 б) с поперечным армированием

## Результаты расчета МКЭ

а)



б)

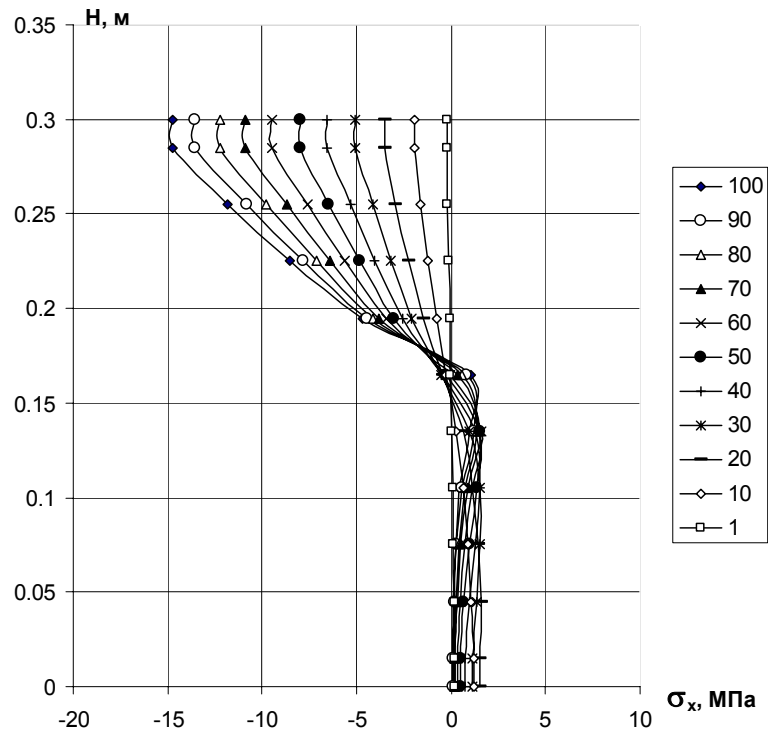


Рис. 6.3. Эпюры нормальных напряжений в железобетонных балках на различных ступенях нагружения: а) без поперечного армирования; б) с поперечным армированием

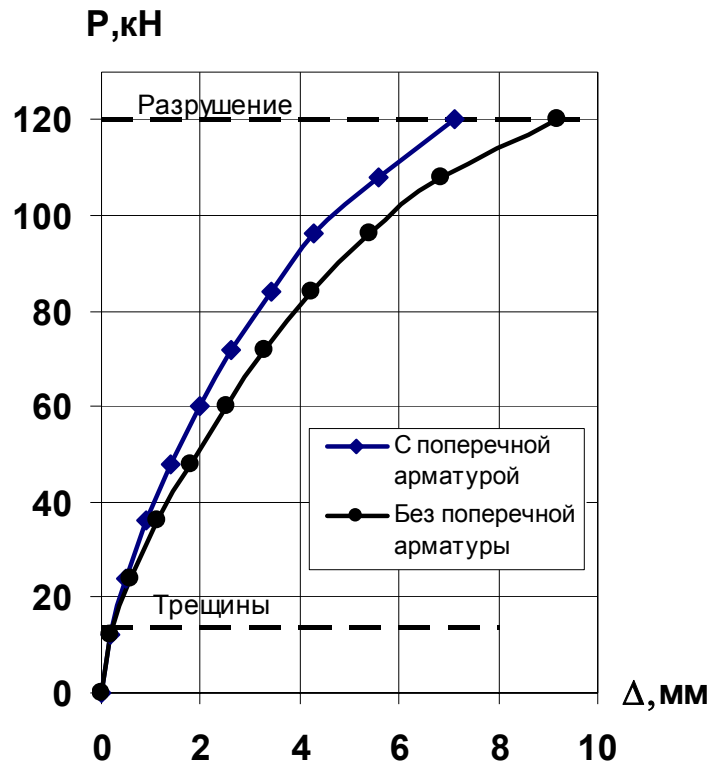


Рис. 6.4. Прогибы в среднем сечении балок

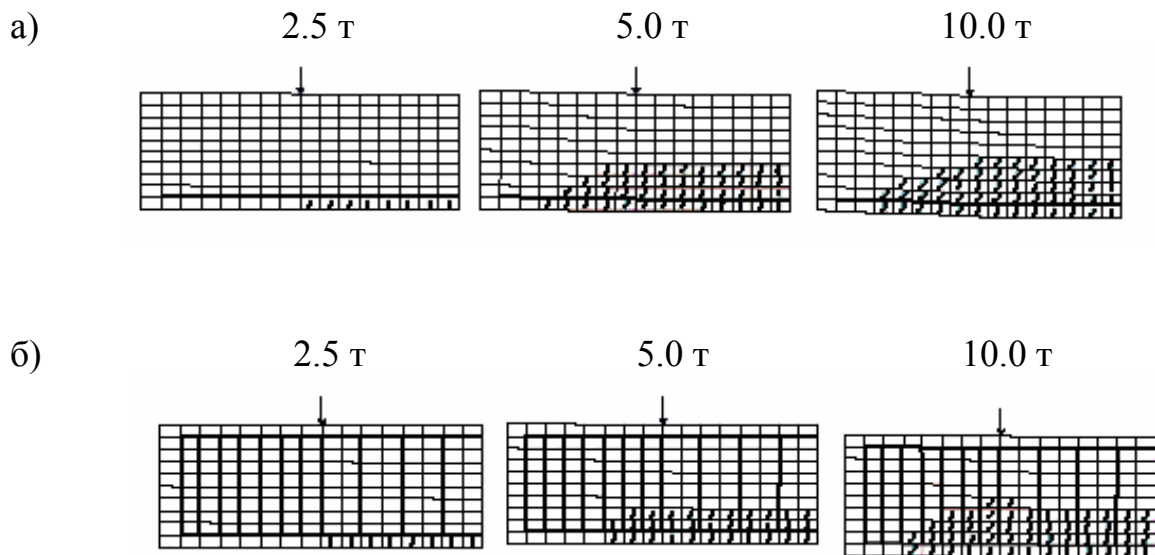


Рис. 6.5. Процесс трещинообразования в балках:  
 а) без поперечного армирования;  
 б) с поперечным армированием

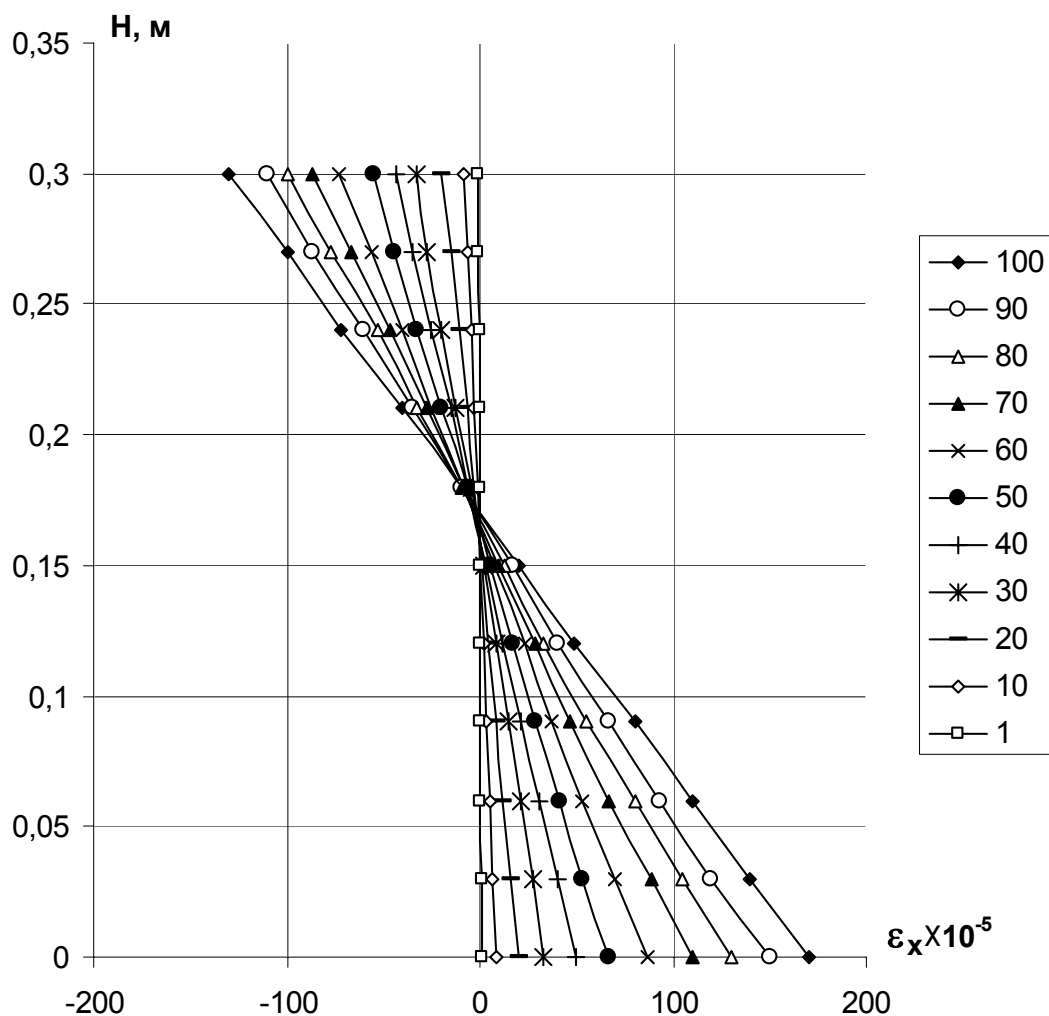


Рис. 6.6. Изменение деформаций по высоте сечения балки на различных ступенях нагружения

На рис. 6.6 приведен график изменения деформаций по высоте сечения. Из этого графика видно, что гипотеза плоских сечений соблюдается при любом уровне нагружки.

Из сопоставления результатов полученных по МКЭ и по [100] видно, что в обоих случаях первые нормальные трещины появились в растянутой зоне в середине пролета балки при нагрузке  $P = 1.44$  т (12-я ступень нагружения). Максимальное напряжение в момент трещинообразования  $\sigma_x = 3.35$  МПа. Аналогично для балки без поперечного армирования  $P = 1.56$  т (13-я ступень) и напряжение в момент трещинообразования  $\sigma_x = 2.97$  МПа.

Для наглядности процесс трещинообразования, а также изменения нормальных напряжений по высоте сечения представлены на рис. 6.5 и рис. 6.3. Изменение прогибов балок без поперечного армирования и с поперечным армированием по ступеням нагружения показано на рис. 6.4.

Таким образом, анализ полученных данных показывает, что с помощью предлагаемого метода можно проследить за трещиностойкостью и жесткостью железобетонных балок на всех этапах нагружения.



В целом наблюдаются достаточно удовлетворительные совпадения данных расчетов по МКЭ и [100].

## 6.2. Расчет железобетонных предварительно напряженных конструкций

Для проверки предлагаемой методики применительно к предварительно напряженным конструкциям был осуществлен расчет железобетонной балки прямоугольного сечения, работа которой изучалась экспериментально в НИИЖБ. Геометрические размеры балки и ее армирование показаны на рис. 6.7. Использовались плоские 4-х узловые прямоугольные изопараметрические элементы и линейные элементы-вставки, моделирующие работу арматуры рис. 6.8. [58].

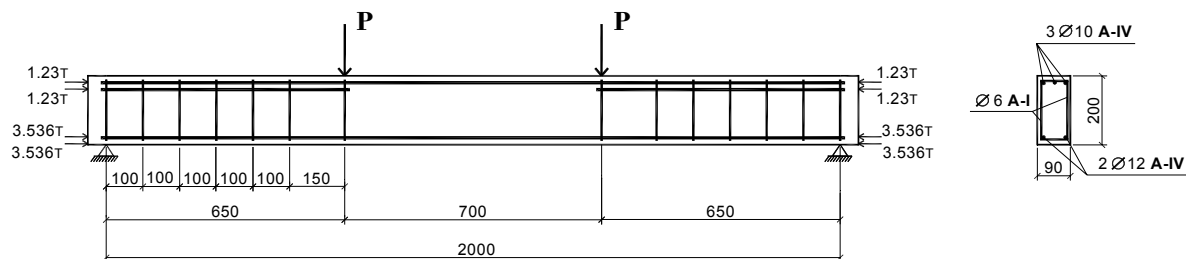


Рис. 6.7. Конструкция предварительно напряженной балки прямоугольного сечения

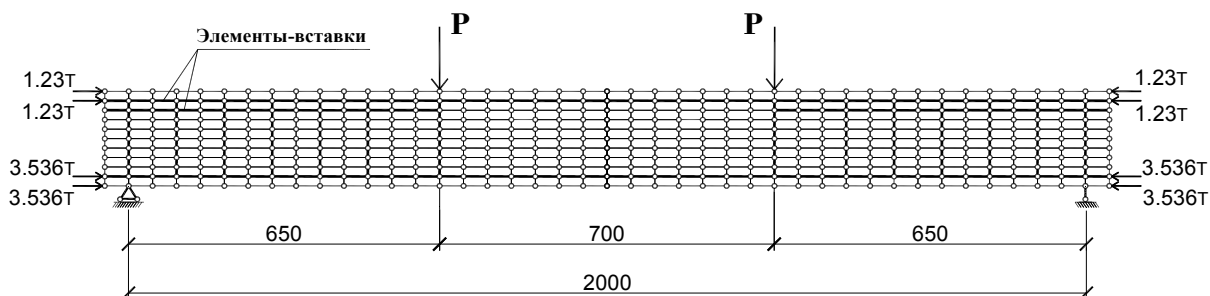


Рис. 6.8. Расчетная схема балки

Нагрузка на балку прикладывалась симметрично в виде сосредоточенных сил ступенями (всего 20 ступеней) аналогично опытному. При этом на первой ступени прикладывалась горизонтальная нагрузка, моделирующая предварительное напряжение. Значения горизонтальных сил показаны на рис. 6.8. Начиная со второй ступени нагружение осуществлялось вертикальными силами по  $\Delta P = 0.5$  т. Исходные характеристики материалов соответствуют опытными значениям и принимались равными: бетон –  $R_b = 43.5$  МПа,  $R_{bt} = 2.5$  МПа,  $E_b = 3.6 \cdot 10^4$  МПа,  $\nu = 0.2$ ,  $\varepsilon_u = 0.002$ ,  $\varepsilon_{ut} = 0.00014$ , арматура  $R_s = 400$  МПа,  $E_s = 2 \cdot 10^5$  МПа.

По результатам расчетов определены прогибы в среднем сечении балки рис. 6.10, показан процесс трещинообразования рис. 6.14, построены эпюры нормальных напряжений по высоте сечения балки рис. 6.9, показаны изополя напряжений в бетоне и усилия в арматуре на характерных ступенях нагружения балки рис. 6.11, 6.12, 6.13 и 6.15 [59].

Из графиков зависимостей результатов расчетов прослеживается соблюдение гипотезы плоских сечений, приближение очертания эпюр нормальных напряжений к параболическим, уменьшение высоты сжатой зоны бетона с увеличением напряжений.

По результатам расчетов МКЭ первые трещины появились при нагрузке  $P = 1$  т (3 ступень нагружения) с напряжением в момент трещинообразования  $\sigma_x = 8.8$  МПа. Разрушение наступило при  $P = 6.5$  т (14 ступень нагружения – течение арматуры) с напряжением в сжатом бетоне в момент разрушения  $\sigma_x = 43.1$  МПа, прогиб к моменту разрушения составил 13 мм.

Эти результаты хорошо согласуются с результатами, полученными в ходе опытных испытаний балки.

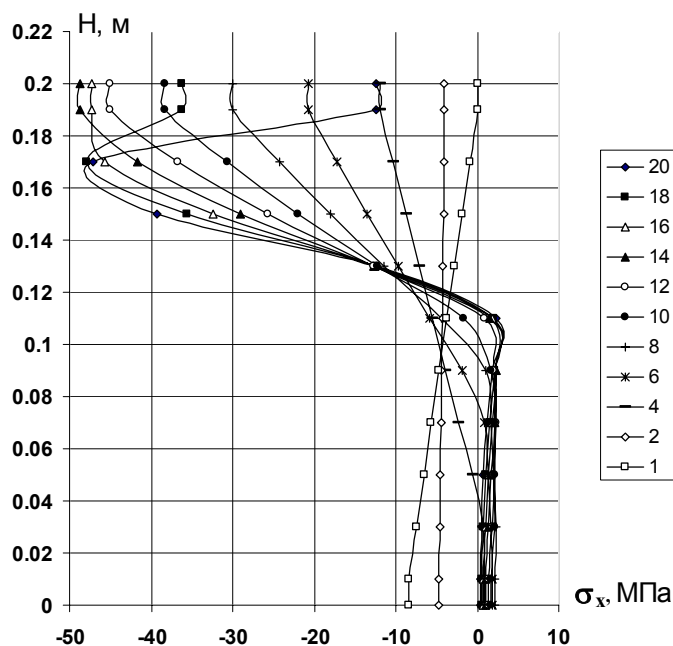


Рис. 6.9. Эпюры нормальных напряжений в балке на различных ступенях нагружения

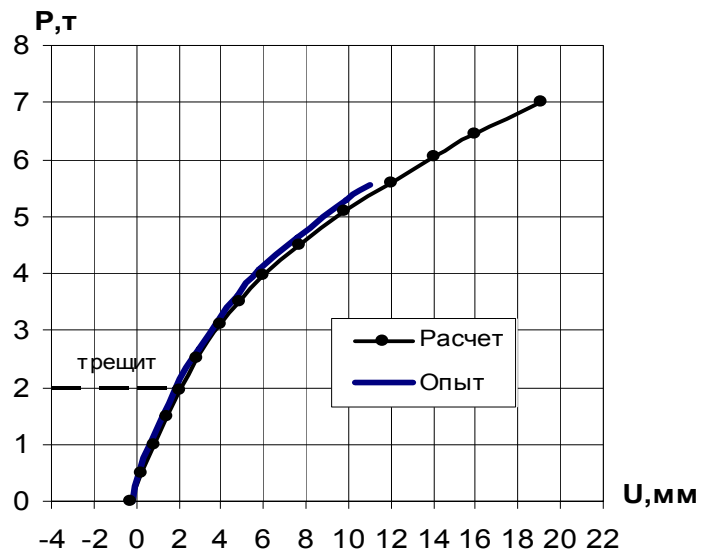


Рис. 6.10. Прогиб в среднем сечении балки

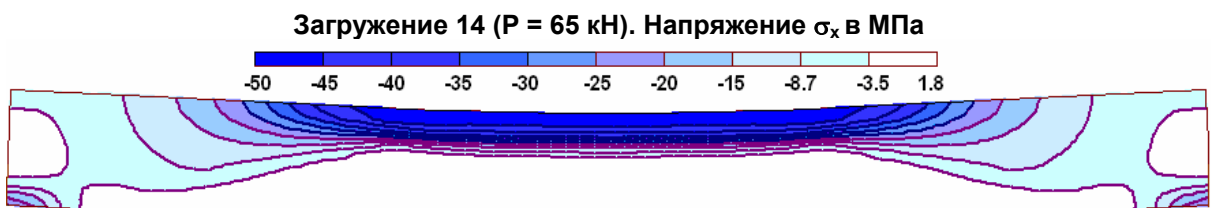


Рис. 6.11. Напряжения  $\sigma_x$  на 14-й ступени

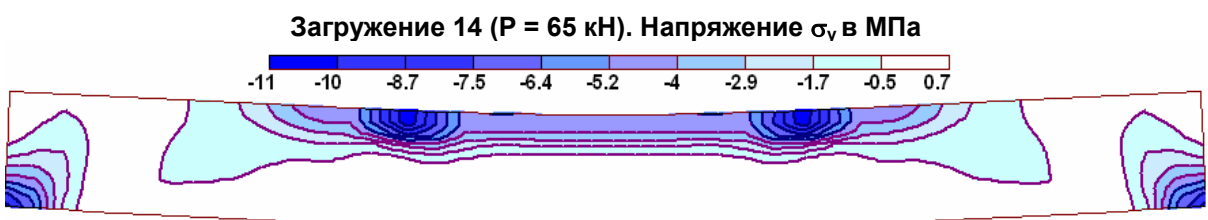


Рис. 6.12. Напряжения  $\sigma_y$  на 14-й ступени

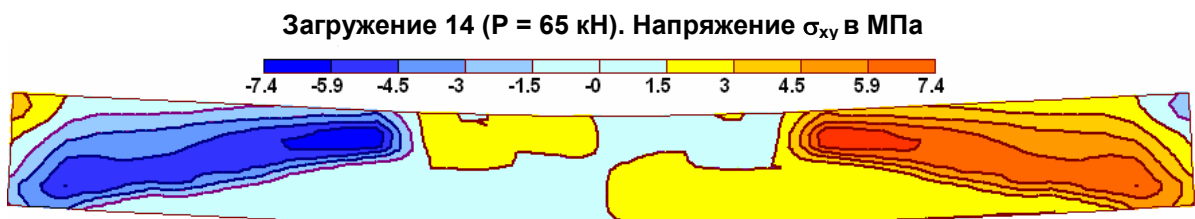


Рис. 6.13. Напряжения  $\sigma_{xy}$  на 14-й ступени

Загружение 14 ( $P = 65$  кН). Усилия в арматуре в кН  
макс.=90.48; мин.= - 20.13

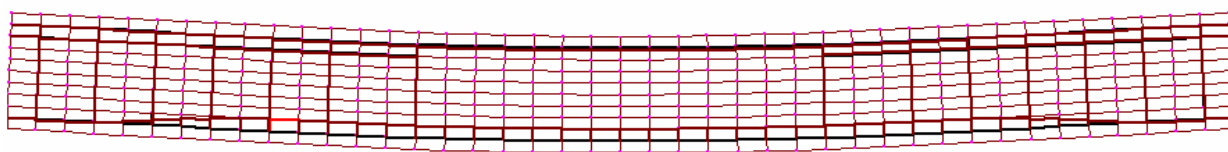


Рис. 6.14. Усилия в арматуре на 14-й ступени

Загружение 14 ( $P = 65$  кН). Трещины в бетоне, текучесть арматуры

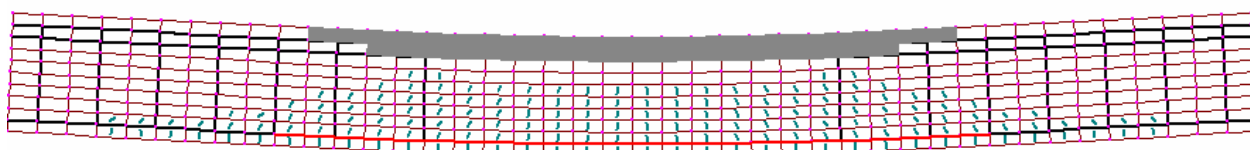


Рис. 6.15. Трещинообразование на 14-й ступени

### 6.3. Расчет железобетонных рам

С помощью предлагаемого метода был осуществлен расчет железобетонных рам, работа которых изучалась экспериментально в НИИЖБе Госстроя СССР.

Конструкции опытных образцов и их расчетные схемы в виде четырехузловых изопараметрических элементов и линейных элементов-вставок показаны на рис. 6.16 и 6.27.

Опытные и расчетные исходные характеристики материалов, из которых были изготовлены рамы:

Для рамы №1:

бетон -  $R_b = 43$  МПа,  $R_{bt} = 2.5$  МПа,  $E_b = 4.5 \cdot 10^4$  МПа,  $\nu = 0.2$ , предельные деформации сжатия -  $\epsilon_u = 0.002$ , предельные деформации растяжения -  $\epsilon_{ut} = 0.0001$ , продольная арматура класса А-III с  $R_s = 400$  МПа,  $E_s = 2 \cdot 10^5$  МПа, поперечная арматура класса А-I с  $R_s = 240$  МПа,  $E_s = 2.1 \cdot 10^5$  МПа.

Для рамы №2:

бетон -  $R_b = 30$  МПа,  $R_{bt} = 1.8$  МПа,  $E_b = 3 \cdot 10^4$  МПа,  $\nu = 0.2$ , предельные деформации сжатия -  $\epsilon_u = 0.002$ , предельные деформации растяжения -  $\epsilon_{ut} = 0.0002$ , продольная арматура класса А-III с  $R_s = 400$  МПа,  $E_s = 2 \cdot 10^5$  МПа, поперечная арматура класса А-I с  $R_s = 240$  МПа,  $E_s = 2.1 \cdot 10^5$  МПа.

В обоих случаях нагрузка прикладывалась ступенями по  $\Delta P = 15$  кН в середине пролета ригеля вплоть до значения, равного 450 кН.

Результаты расчетов – процесс трещинообразования, изополя напряжений в бетоне, продольные усилия в арматуре на различных ступенях нагружения, перемещение центральной точки для рамы №1 показаны на рис. 6.17 - 6.26.

Аналогично, результаты расчетов для рамы №2 показаны на рис. 6.28 - 6.38.

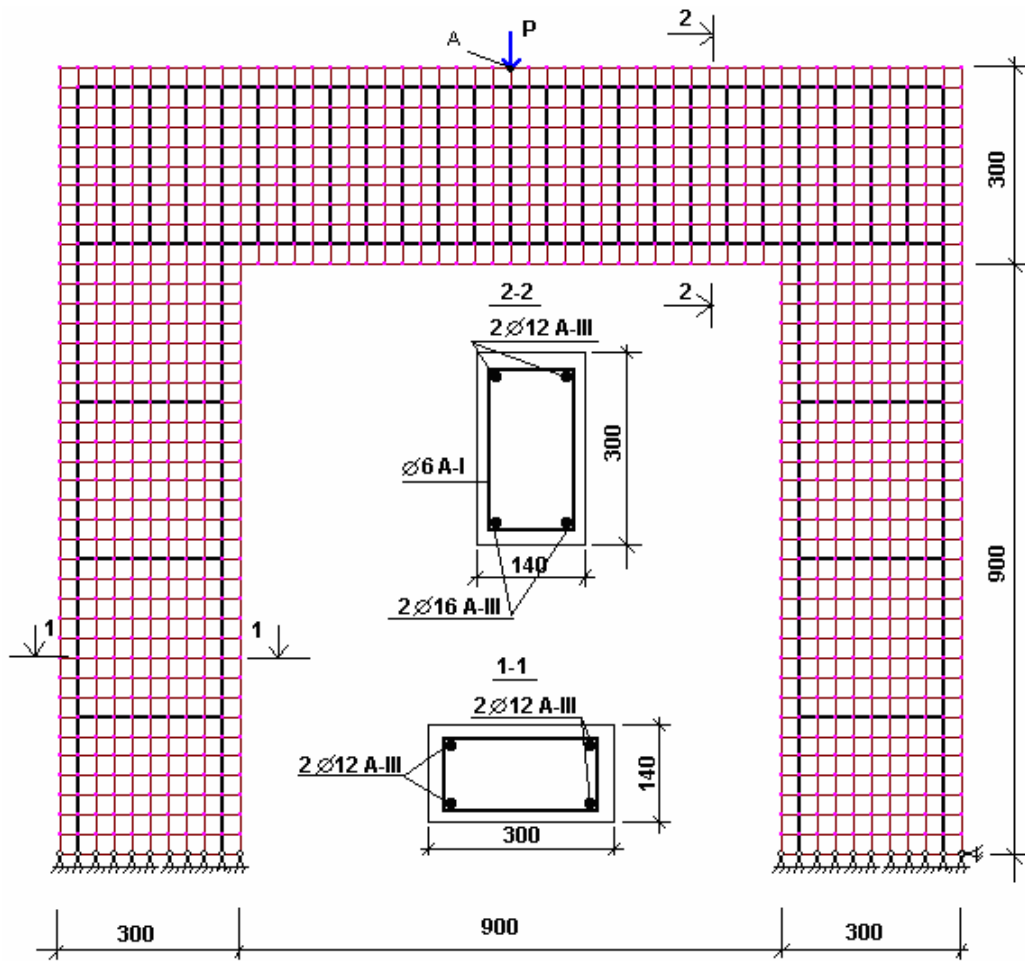


Рис. 6.16. Расчетная схема рамы №1

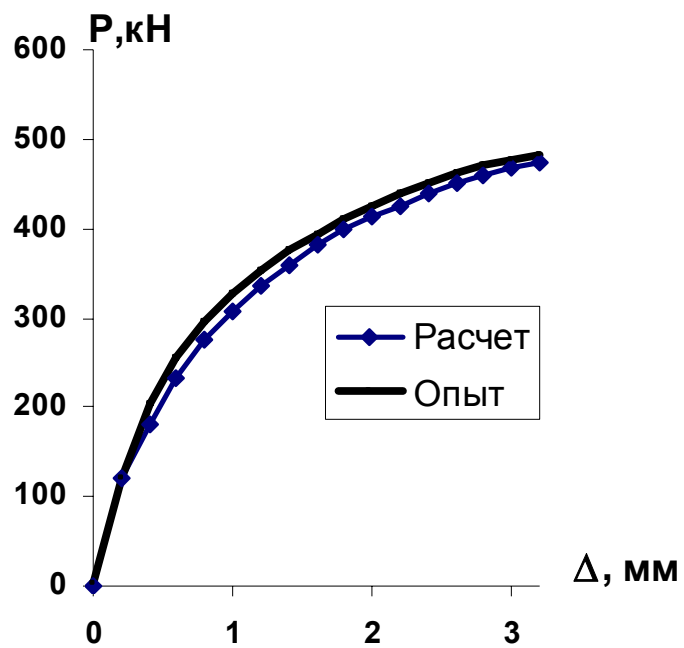


Рис. 6.17. Вертикальные перемещения точки А

Из зависимостей рис. 6.17, 6.28 видно достаточно хорошее совпадение результатов расчетов МКЭ с опытными данными.

Анализируя данные вышеприведенных расчетов, можно сделать вывод, что предлагаемая методика расчета для конструкций данного типа дает достаточно надежные результаты и может быть использована в их реальном проектировании.

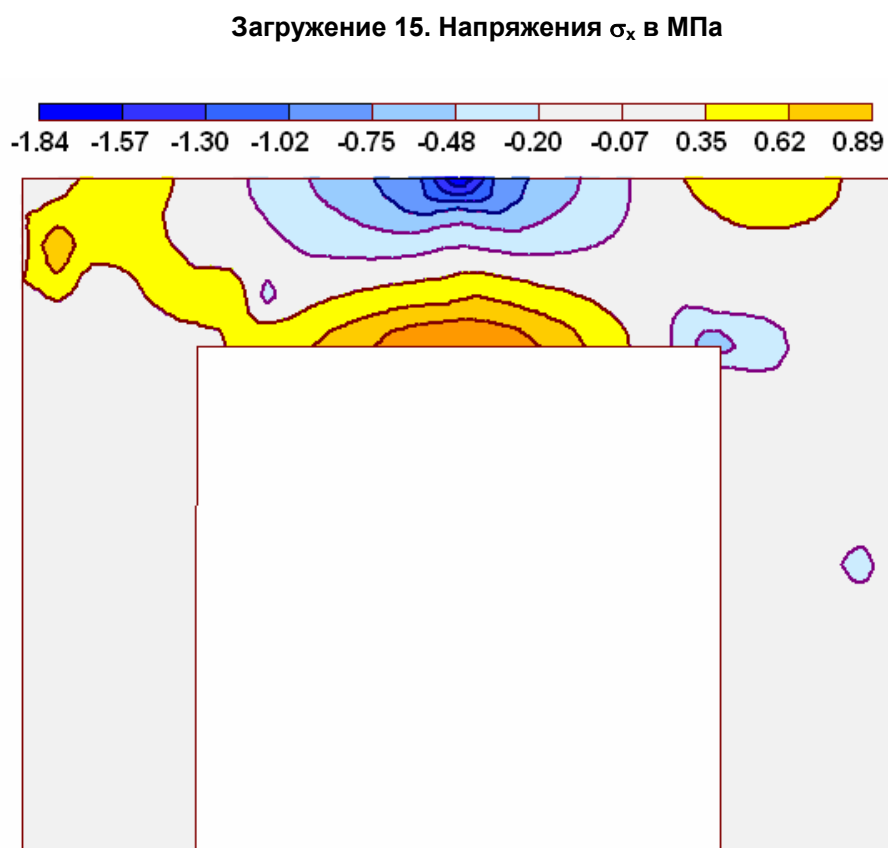


Рис. 6.18. Напряжения  $\sigma_x$  на 15 ступени

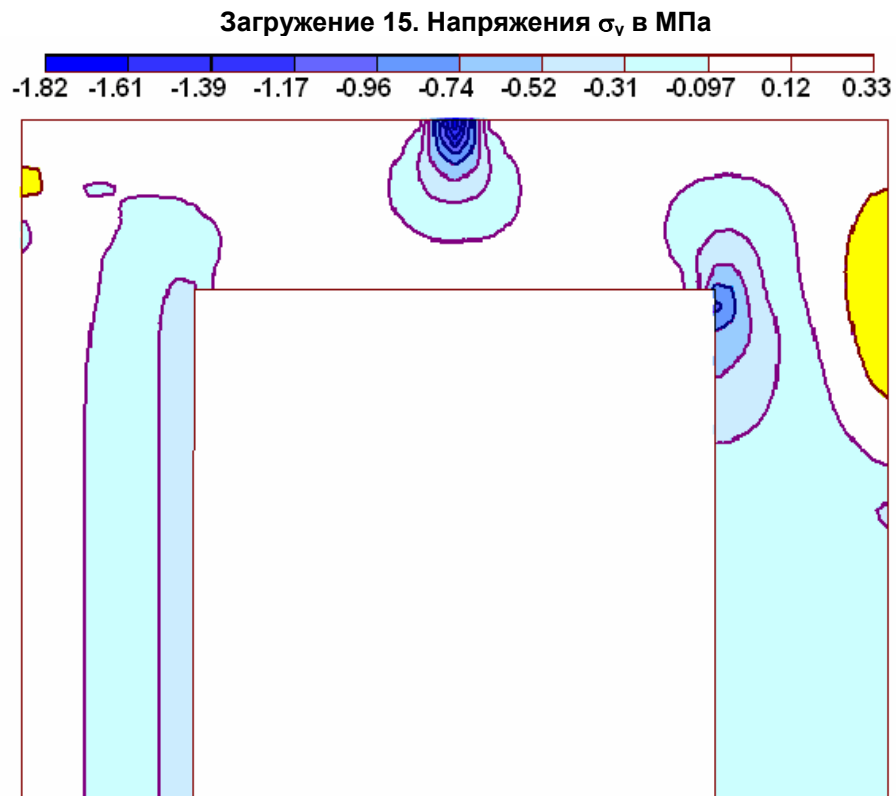


Рис. 6.19. Напряжения  $\sigma_y$  на 15 степени

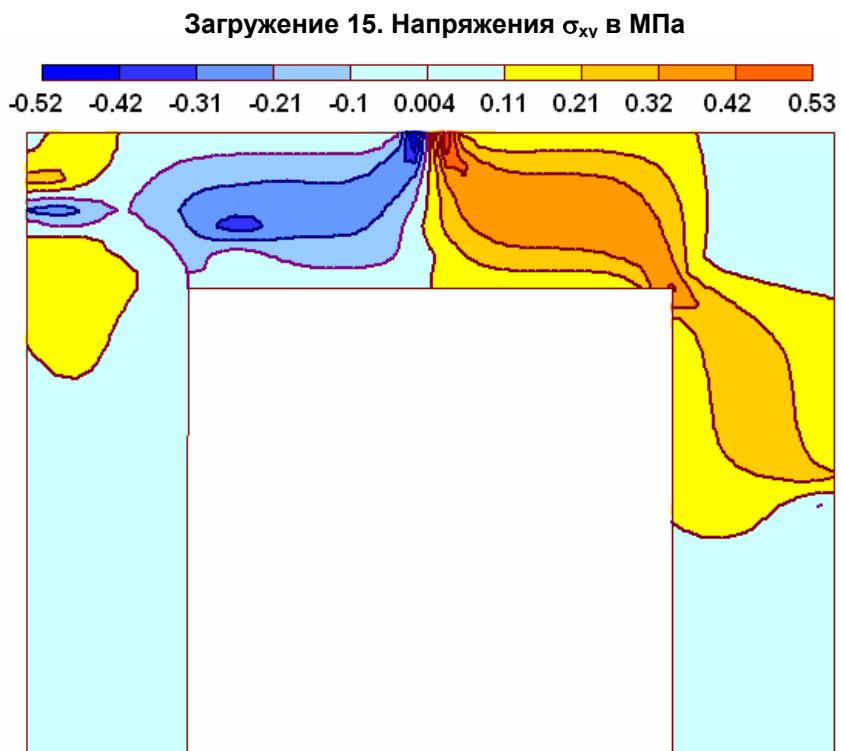


Рис. 6.20. Напряжения  $\sigma_{xy}$  на 15 степени

Загрузка 15. Трещины в бетоне, текучесть арматуры

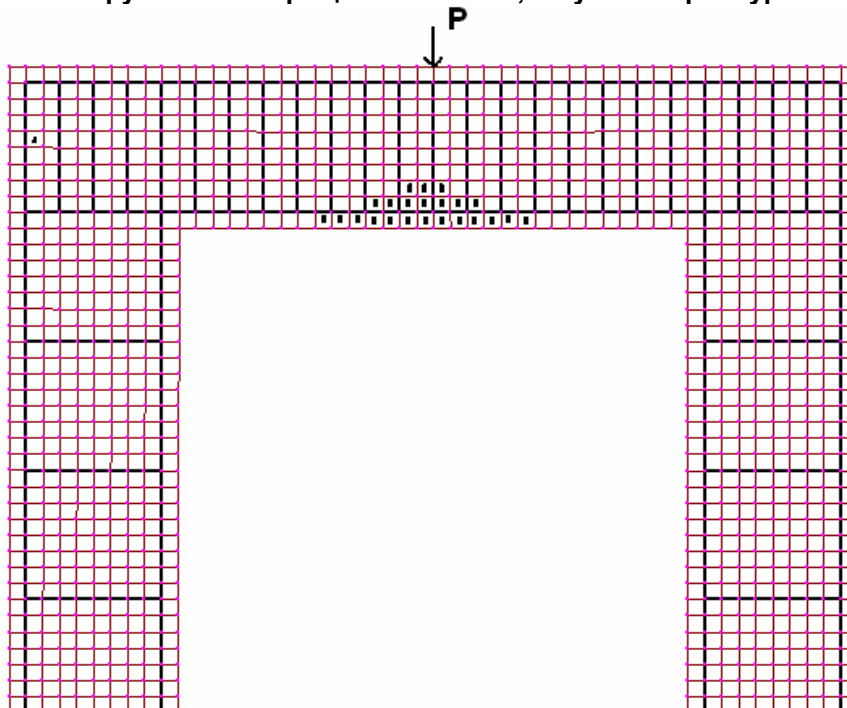


Рис. 6.21. Трещинообразование на 15 степени

Загрузка 30. Напряжения  $\sigma_x$  в МПа

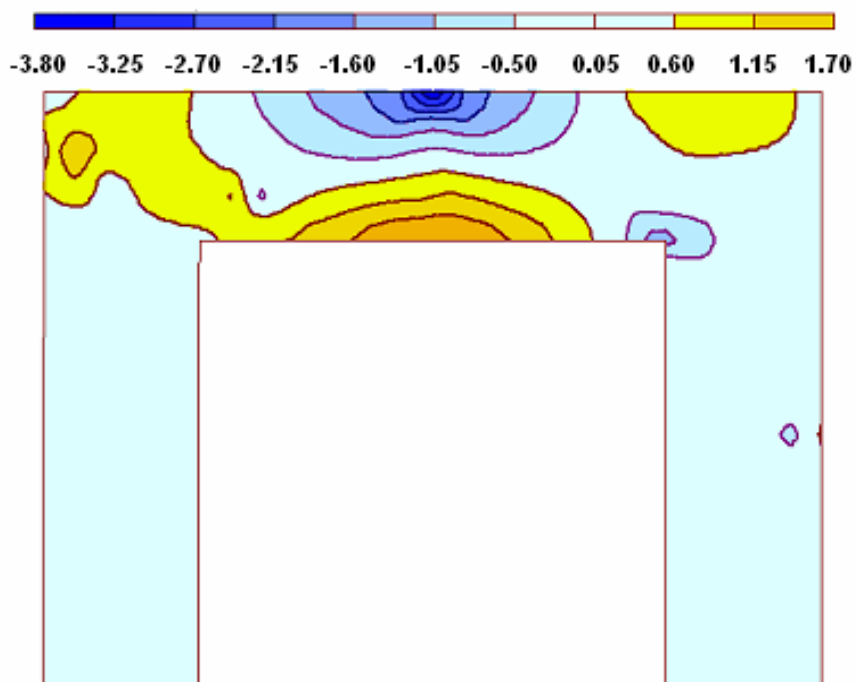


Рис. 6.22. Напряжения  $\sigma_x$  на 30 степени



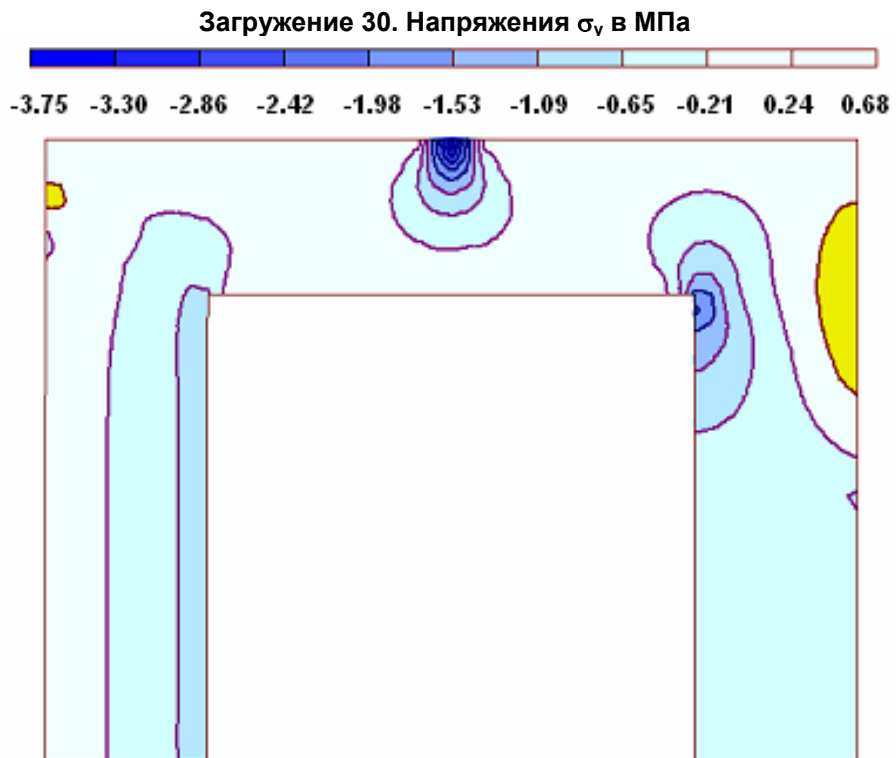


Рис. 6.23. Напряжения  $\sigma_y$  на 30 степени

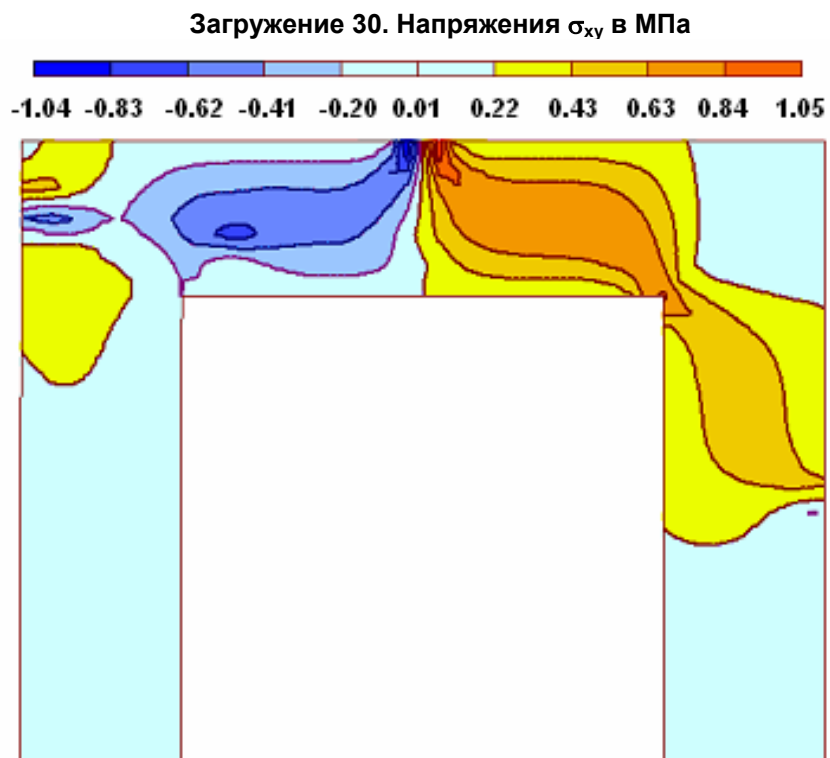


Рис. 6.24. Напряжения  $\sigma_{xy}$  на 30 степени

Загрузка 30. Трещины в бетоне, текучесть арматуры

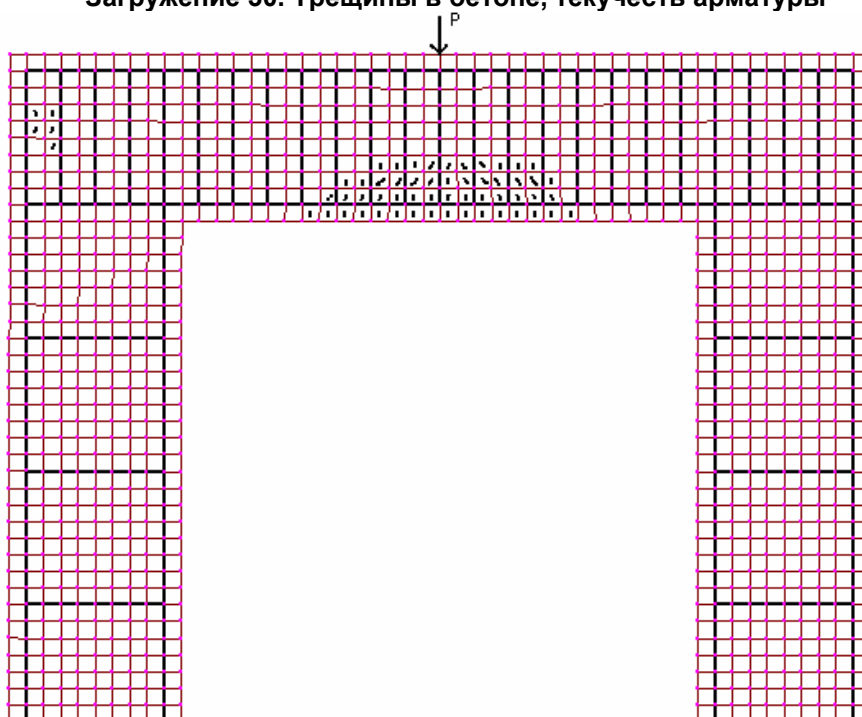


Рис. 6.25. Трещинообразование на 30 ступени

Загрузка 30. Продольные силы в кН  
макс. = 32.27; мин. = - 4.73

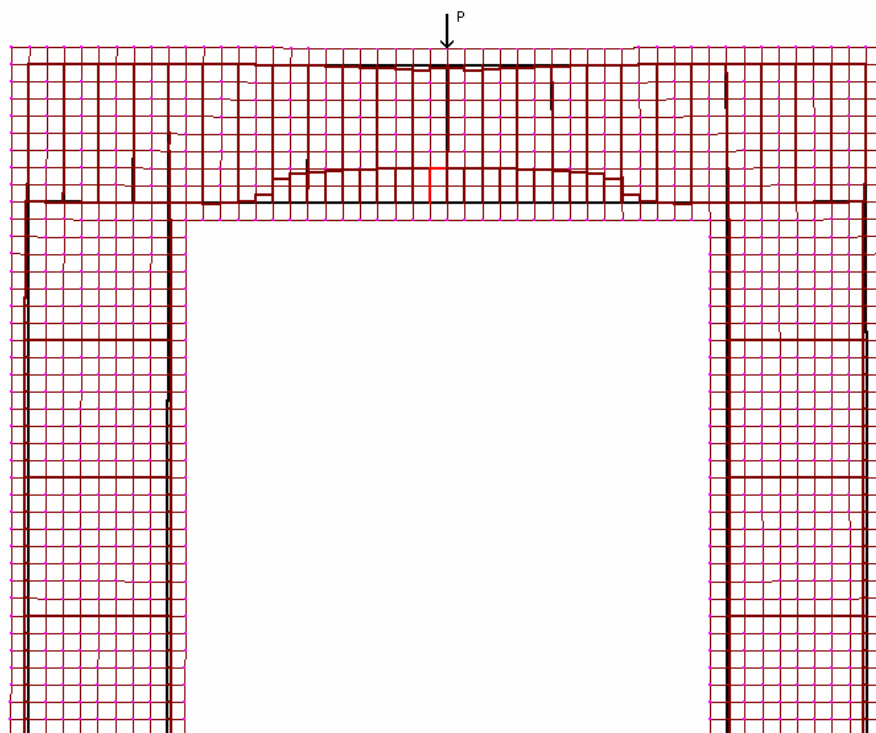


Рис. 6.26. Усилия в арматуре на 30 ступени

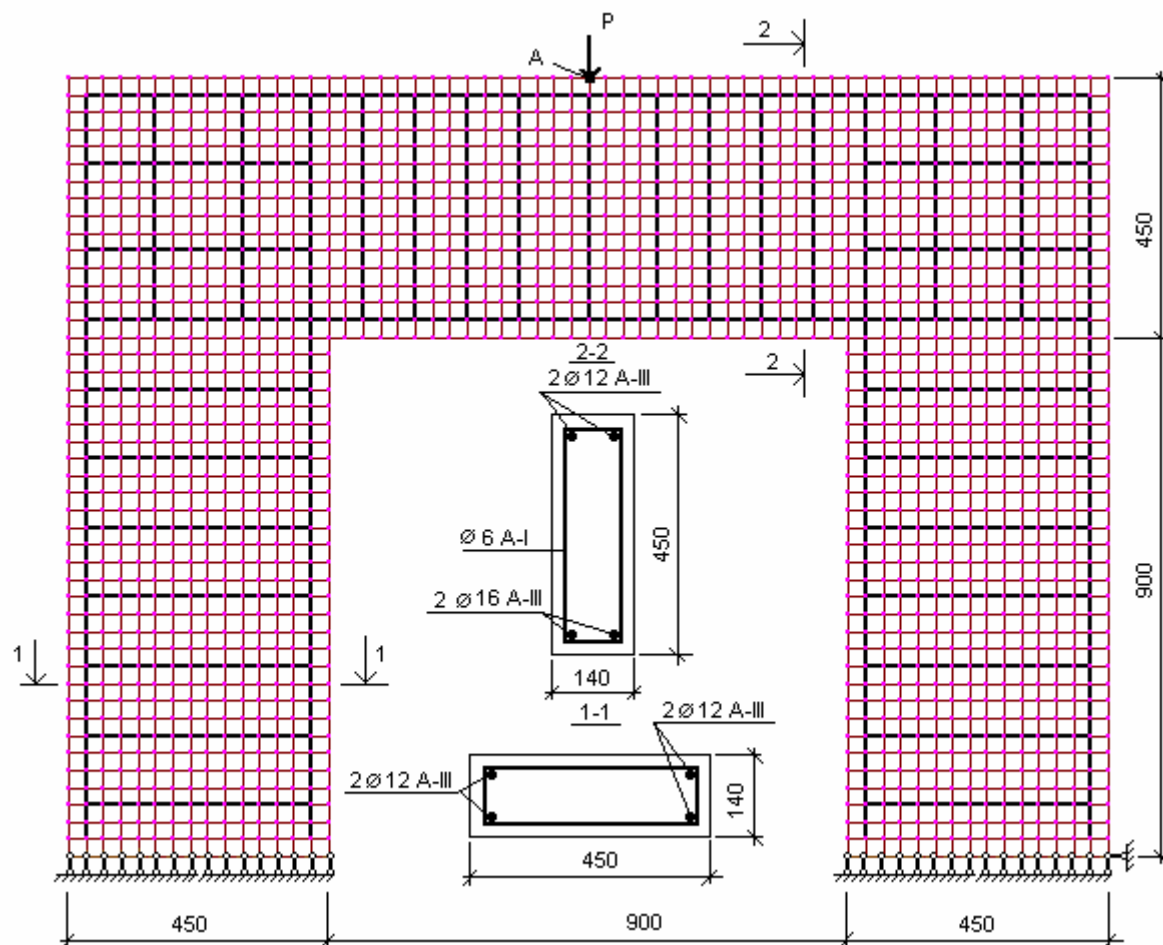


Рис. 6.27. Расчетная схема рамы № 2

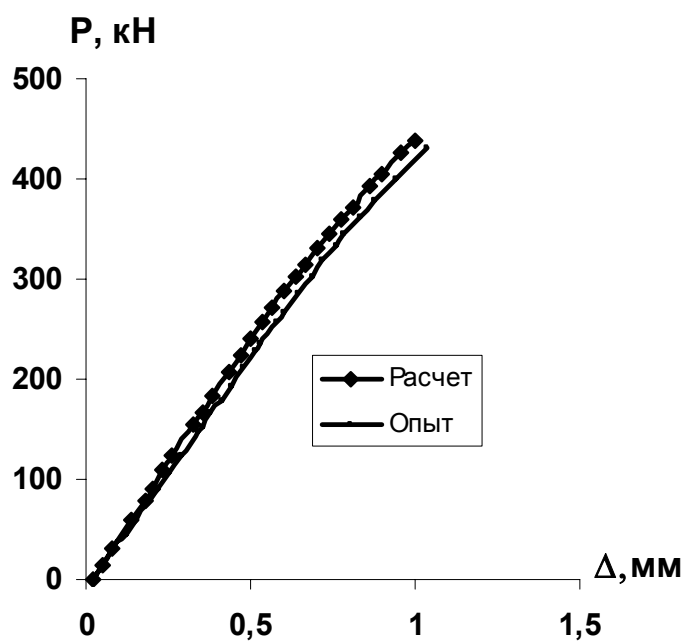


Рис. 6.28. Вертикальное перемещение точки А

Загружение 15. Напряжения  $\sigma_x$  в МПа

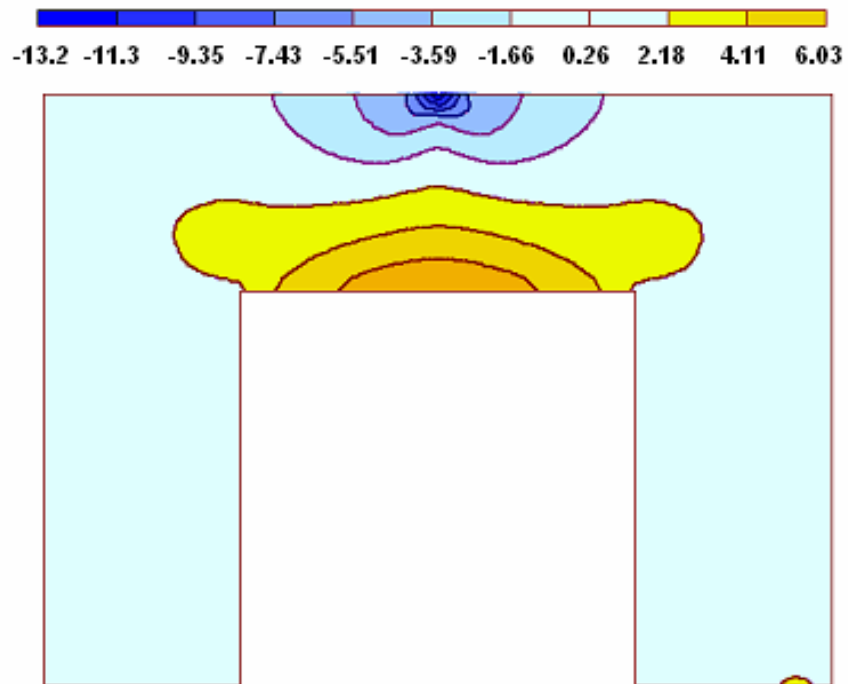


Рис. 6.29. Напряжения  $\sigma_x$  на 15 ступени

Загружение 15. Напряжения  $\sigma_y$  в МПа

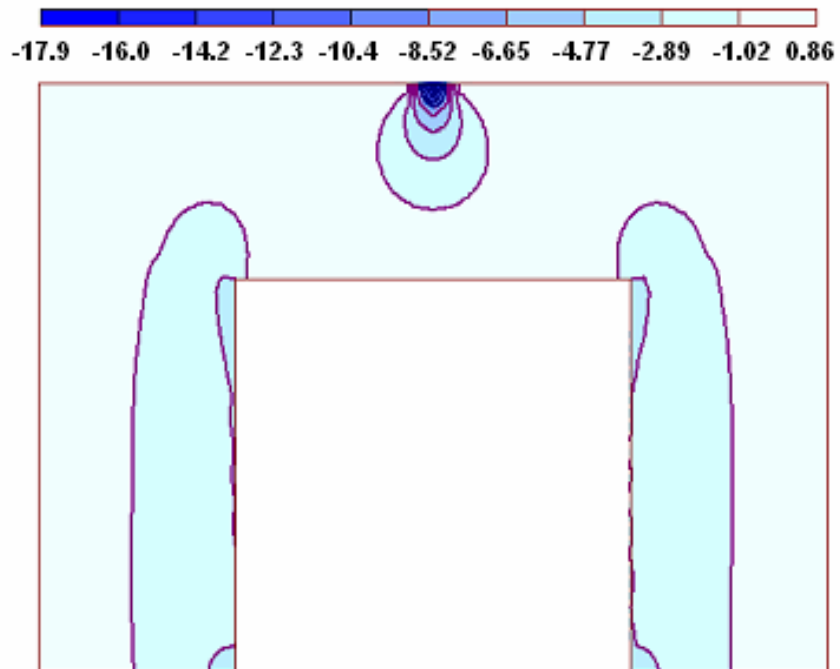


Рис. 6.30. Напряжения  $\sigma_y$  на 15 ступени

Загружение 15. Напряжения  $\sigma_{xy}$  в МПа

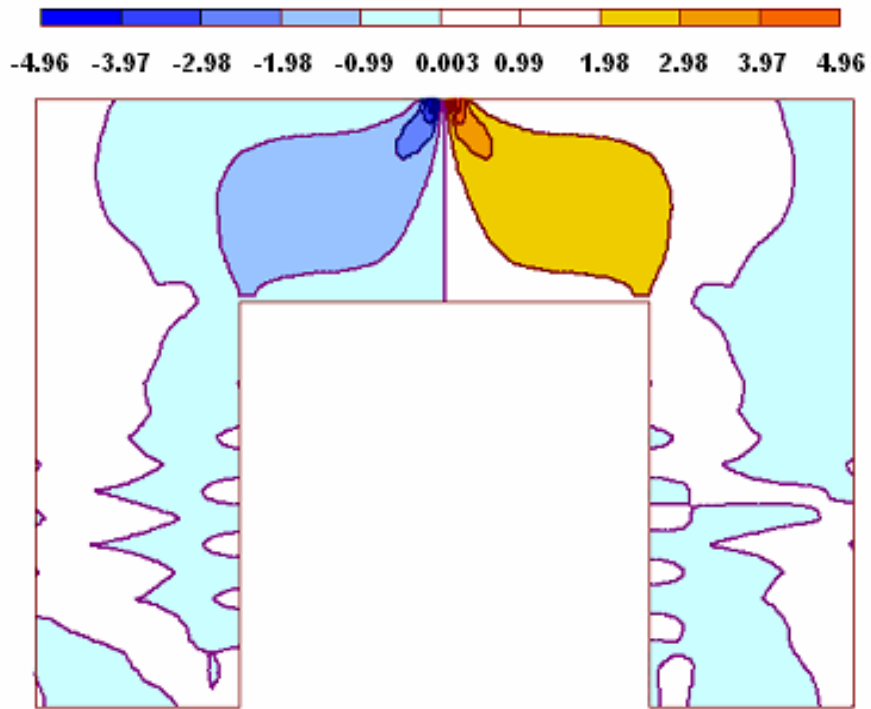


Рис. 6.31. Напряжения  $\sigma_{xy}$  на 15 ступени

Загружение 3. Трещины в бетоне, текучесть арматуры

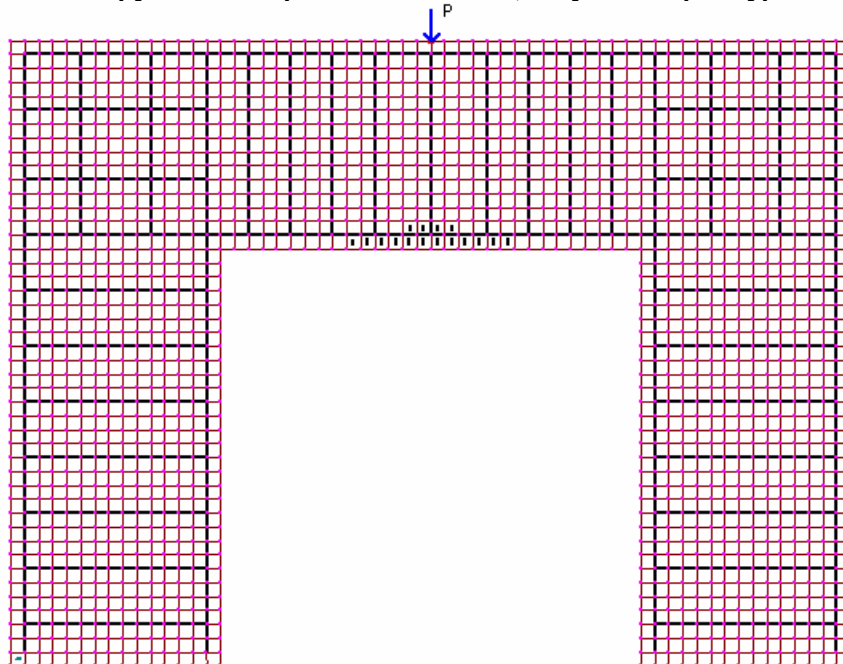


Рис. 6.32. Трещинообразование на 3 ступени

Загружение 3. Продольные силы в кН  
макс. = 3,918; мин. = - 6,844

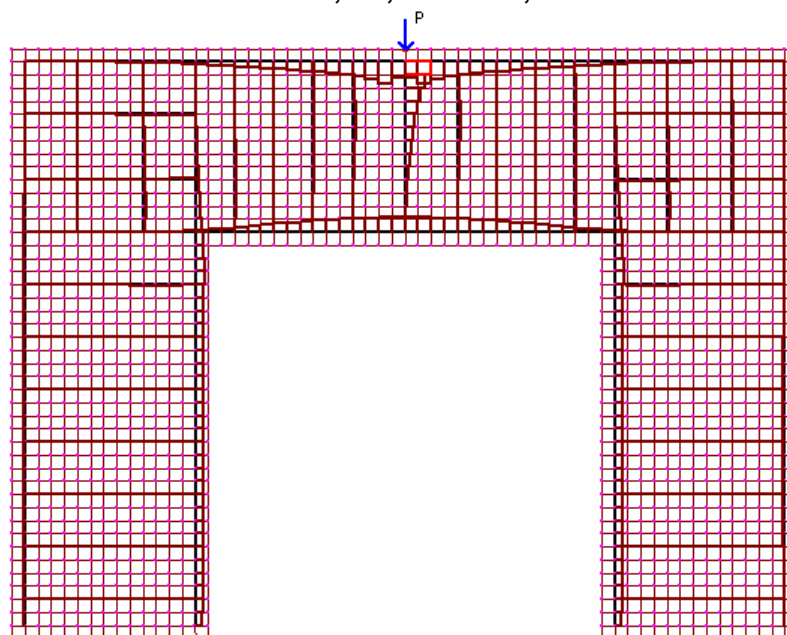


Рис. 6.33. Усилия в арматуре на 3 ступени

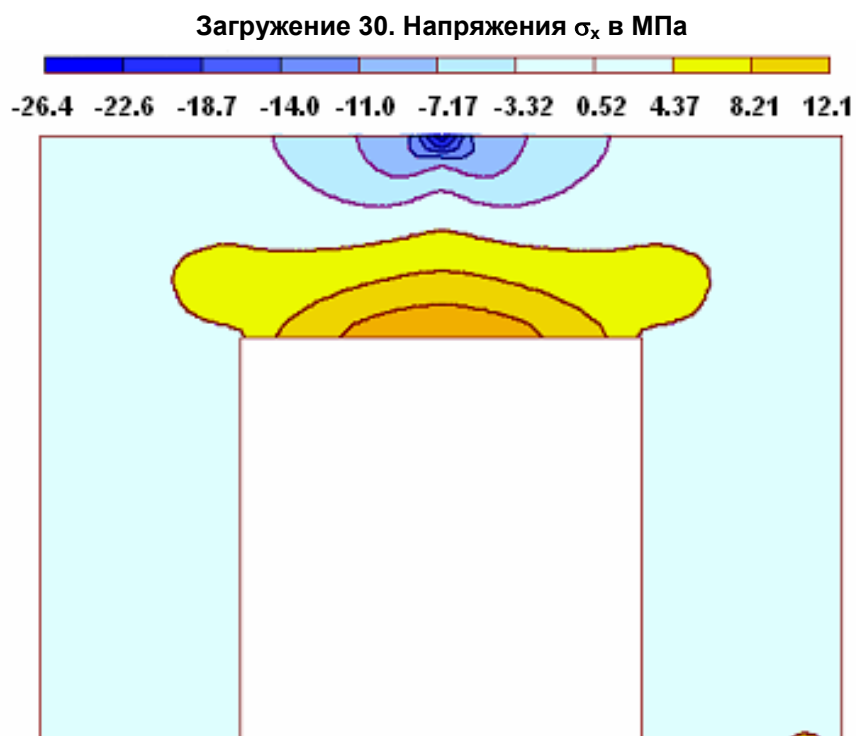


Рис. 6.34. Напряжения  $\sigma_x$  на 30 ступени

Загружение 30. Напряжения  $\sigma_y$  в МПа

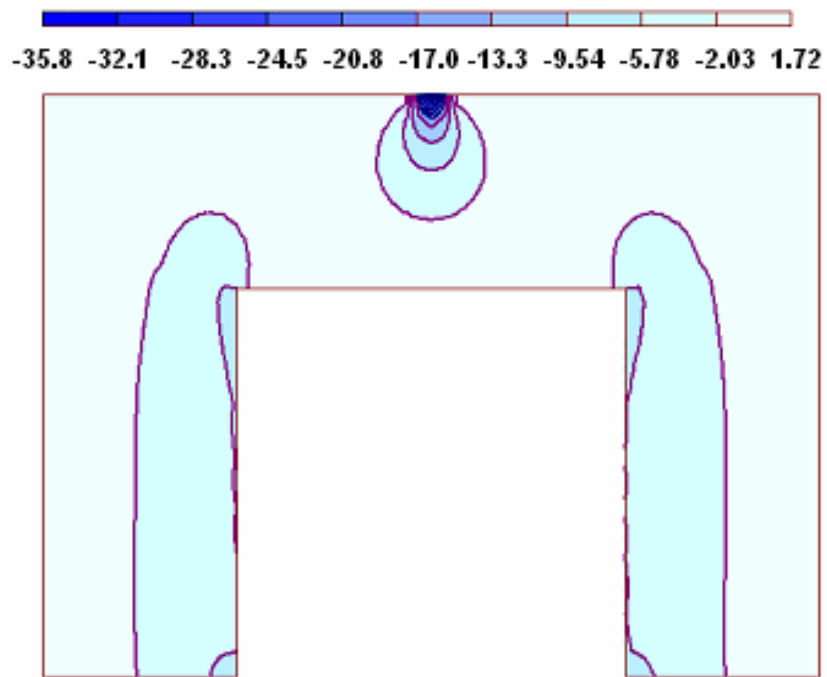


Рис. 6.35. Напряжения  $\sigma_y$  на 30 степени

Загружение 30. Напряжения  $\sigma_{xy}$  в МПа

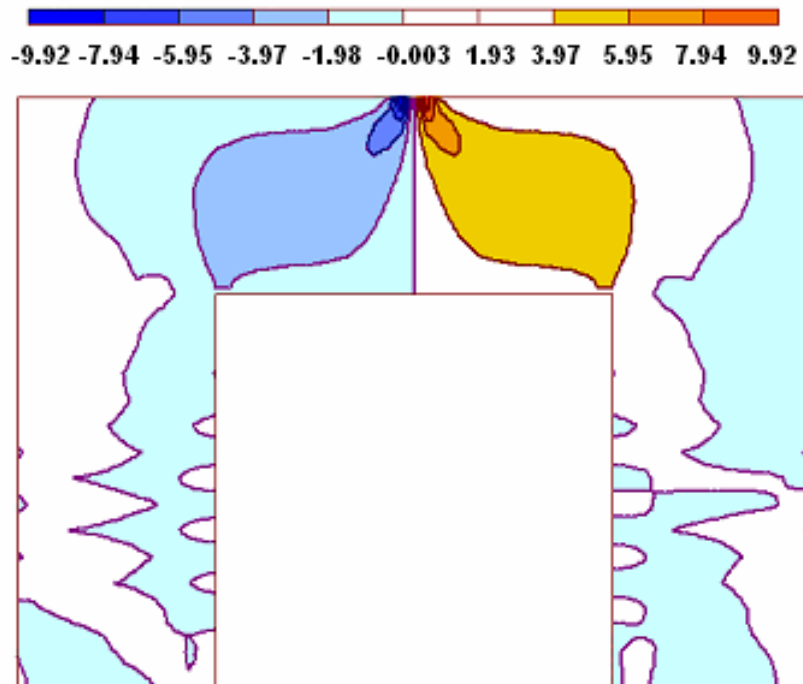


Рис. 6.36. Напряжения  $\sigma_{xy}$  на 30 степени

**Загрузка 10. Трещины в бетоне, текучесть арматуры**

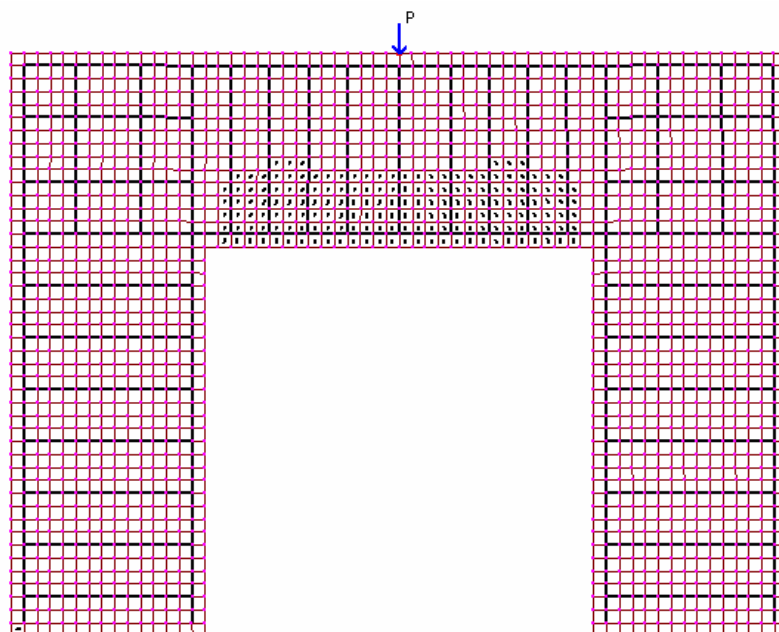


Рис. 6.37. Трещинообразование на 10 ступени

**Загрузка 10. Продольные силы в кН  
макс. = 13.85; мин. = - 23.91**

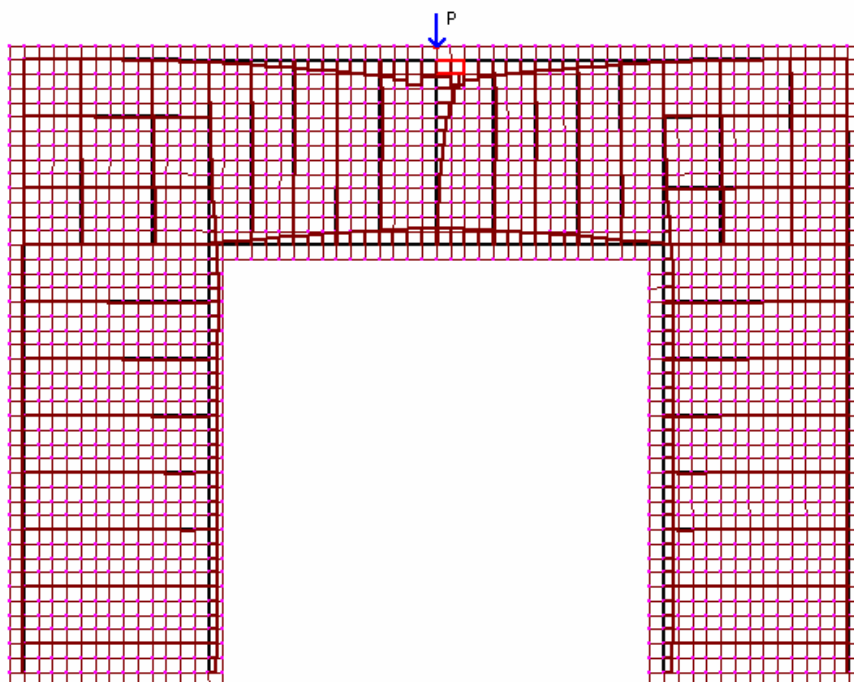


Рис. 6.38. Усилия в арматуре на 10 ступени



## СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Александровский С.В. Расчет бетонных и железобетонных конструкций на изменение температуры и влажности с учетом ползучести. – М.: Стройиздат, 1973. – 432 с.
2. Ахвердов И.Н. Основы физики бетона.– М.: Стройиздат, 1981. - 464 с.
3. Бажант З. Эндохронная теория неупругости и инкрементальная теория пластичности// Механика деформируемых твердых тел. Направление развития. – М.: Мир, 1983. – С. 189-229.
4. Байков В.Н., Сигалов Э.Е. Железобетонные конструкции. – М.:Стройиздат, 1985. – 728 с.
5. Баженов В.А., Гуляр О.И., Рутковский В.А. Методика чисельного моделювання нелінійного деформування та руйнування просторових залізобетонних конструкцій// Строительные конструкции//Межвед.н.-т. сб., вып. 59 - Киев: НИИСК, 2003. – С.157-162.
6. Балан Т.А., Клованич С.Ф. Определяющие соотношения для бетона при сложном, непропорциональном нагружении и нагреве // Строительная механика и расчет сооружений. – 1987. – № 2. – С. 39-44.
7. Бамбура А.Н., Гурковский А.Б. К построению деформационной теории железобетона стержневых систем на экспериментальной основе// Строительные конструкции//Межвед.н.-т. сб. «Научно-технические проблемы современного железобетона», вып.59. - Киев: НИИСК, 2003. -С. 121-130.
8. Барашиков А.Я., Барабаш В.Н., Журавський А.Д. Диаграмма деформирования бетона при одно- и двухосном сжатии// Строительные конструкции. –вып.43. – Киев: Будівельник, 1990. – С. 85-99.
9. Бате К., Вильсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.
10. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. – М.: Высшая школа, 1961.- 538 с.
11. Бениаминов Д.М. Определяющие уравнения хрупких деформаций горных пород и бетонов // Строительная механика и расчет сооружений. - 1984, - № I. - С. 22 - 27.
12. Берг О.Я. Физические основы теории прочности бетона и железобетона. - М.: Госстройиздат, 1961. – 96 с.
13. Бидный Г.Р. Расчет железобетонных конструкций методом конечных элементов. - Кишинев: Штиинца, 1979. - 224 с.
14. Бидный Г.Р., Колчин С.Ф., Клованич С.Ф. Матричный метод решения задач строительной механики. – Кишинев: Штиинца, 1980. –308 с.
15. Бидный Г.Р., Клованич С.Ф., Осадченко К.А. Расчет железобетонных конструкций при сложном нагружении методом конечных элементов // Строительная механика и расчет сооружений. - 1986. - № 5. - С. 22 - 26.
16. Бич П.М. Вариант теории прочности бетона // Бетон и железобетон. - 1980. - № 6. - С. 28 - 29.

17. Бич П.М. Деформативность бетонов при плоском напряженном состоянии//Вопросы строительства и архитектуры. – Минск, 1977, вып.7. – С.87-92.
18. Болотин В.В., Гольденблат И.И., Смирнов А.Ф. Строительная механика. Современное состояние и перспективы развития. - М.: Стройиздат, 1972. - 192 с.
19. Бондаренко В.М., Бондаренко С.В. Инженерные методы нелинейной теории железобетона. - М.: Стройиздат, 1982. - 287 с.
20. Бруснецов Г.Н. О расчете железобетонных конструкций с трещинами при плоском напряженном состоянии // Строительная механика и расчет сооружений. - 1980. - № 6. - С. 31 - 33.
21. Васильев П.И., Кононов Ю.М., Чирков Я.Н. Железобетонные конструкции гидротехнических сооружений. - Киев-Донецк: Вища школа, 1981. - С. 318 - 319.
22. Вахненко П.Ф., Павліков А.М., Горик О.В., Вахненко В.П. Залізобетонні конструкції. – Київ: Вища школа, 1999. –508 с.
23. Гвоздев А.А. Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия. - М.: Стройиздат, 1949. - 248 с.
24. Гвоздев А.А., Карпенко Н.И. Работа железобетона с трещинами при плоском напряженном состоянии // Строительная механика и расчет сооружений. - 1965. - № 2. - С. 20 - 23.
25. Гениев Г.А., Киссюк В.Н., Тюпин Г.А. Теория пластичности бетона и железобетона. - М.: Стройиздат, 1974. - 316 с.
26. Городецкий А.С., Здоренко В.С. Расчет железобетонных балок-стенок с учетом образования трещин методом конечных элементов // Сопротивление материалов и теория сооружений. -Киев: Будівельник, 1975. - Вып. 57. - С. 59 - 66.
27. Городецкий А.С, Шмуклер В.С., Бондарев А.В. Информационные технологии расчета и проектирования строительных конструкций. –Киев-Харьков, 2003. – 889 с.
28. Гольшев А.Б. Курс лекцій з основ розрахунку будівельних конструкцій і з опору залізобетону. – Киев, 2004. 340 с.
29. Гришин А.В., Федорова Е.Ю. Нелинейные динамические задачи расчета портовых гидротехнических сооружений. – Одесса: Изд-во ОНМУ, 2002. – 125 с.
30. Драгон А., Мруз З. Континуальная модель пластически хрупкого поведения скальных пород и бетона // Механика деформируемых твердых тел. Направления развития. - М.: Мир, 1983. - С. 163 - 188.
31. Ерхов М.И. Теория идеально пластических тел и конструкций. - М.: Наука, 1978. - 352 с.
32. Завьялов Г.Г., Козак А.Л. Соотношения метода конечных элементов для армированных конструкций с учетом трещинообразования // Сопротивление материалов и теория сооружений. - Киев: Будівельник, 1978. - Вып.32. - С. 69 - 73.

33. Залесов А.С. и др. Расчет железобетонных конструкций по прочности, трещиностойкости и деформациям - М.: Стройиздат, 1988.
34. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
35. Здоренко В.С. Расчет железобетонных континуальных конструкций с учетом образования трещин методом конечных элементов // Соппротивление материалов и теория сооружений. - Киев: Будівельник, 1976. - Вып. 29. - С. 89 - 101.
36. Дорофеев В.С., Коломийчук Г.П. Учет влияния специфических свойств железобетона при расчете пологих оболочек//Вестник ОГАСА, вып. 17.- Одесса, 2005. - С. 70-76.
37. Ильюшин А.А. Пластичность. - М.: АнСССР, 1963. - 424 с.
38. Ивлев В.В., Быковцев Г.И. Теория упрочняющегося пластического тела. – М.: Наука, 1971.-231 с.
39. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона. - М.: Стройиздат, 1996. – 416 с.
40. Карпенко Н.И., Карпенко С.Н. О построении более совершенной модели деформирования железобетона с трещинами при плоском напряженном состоянии // II Всероссийская (Международная) конференция по бетону и железобетону «Бетон и железобетон – пути развития». – 5-9 сентября, 2005, М. – С.431-444.
41. Карпенко Н.И., Карпенко С.Н. К построению физических соотношений в инкрементальной форме для расчета железобетонных конструкций с трещинами//1-я Всероссийская конференция по проблемам бетона и железобетона «Бетон на рубеже третьего тысячелетия», Книга 2, М., 2001. – С.711-717.
42. Карпенко Н.И., Клованич С.Ф. Определяющие соотношения для железобетона с трещинами при термосиловых воздействиях // Строительная механика расчет сооружений. - 1983. - № 2. - С. 6 - 11.
43. Карпенко Н.И., Ярин Л.И., Кукунаев В.С. Расчет элементов стен методом конечных разностей / Под ред. К.В.Михайлова // Новое о прочности железобетона. - М.: Стройиздат, 1977. – С. 141 - 165.
44. Карпенко С.Н. О построении общего метода расчета железобетонных плоских конструкций в конечных приращениях//II Всероссийская (Международная) конференция по бетону и железобетону «Бетон и железобетон – пути развития». – 5-9 сентября, 2005, М. – С.422-430.
45. Качанов Л.М. Основы теории пластичности.- М.: Наука, 1969.- 420 с.
46. Карякин А.А., Оатул А.А. Расчет железобетонных балок-стенок методом конечных элементов // Изв. вузов. Сер. Строит. и архит. - 1977. - № 3. - С. 4 - 9.
47. Кислокий В.Н., Козак А.Л., Отрашевский В.В., Сахаров А.С. "Прочность-75". Система математического обеспечения расчета пространственных конструкций. - Киев: РФАП АН СССР, № 3874, 1975. - 108 с.

48. Климов Ю.А. Сучасні методи розрахунку залізобетонних конструкцій за граничними станами другої групи. Навчальний посібник. – К.:КНУБА, 2001. – 46 с.

49. Клованич С.Ф. Модель деформирования бетона при длительном трехосном нагружении и нагреве // Строительная механика и расчет сооружений. - 1988. - № 6. - С. 21-24.

50. Клованич С.Ф. Механика железобетона в расчетах конструкций// Строительные конструкции//Межвед.н.-т. сб., вып. 52.- Киев: НИИСК, 2000. – С.107-115.

51. Клованич С.Ф., Карпенко С.Н. О расчете пространственных железобетонных конструкций методом конечных элементов// Сборник трудов международной научно-практической конференции "Бетон и железобетон в третьем тысячелетии": Ростовский государственный строительный университет.- Ростов-нв Дону, 2000. – С.179-184.

52. Клованич С.Ф. Компьютерное моделирование процесса деформирования пространственных железобетонных конструкций с трещинами// Вестник Одесского национального морского унив., вып.8, Одесса, 2002. – С.88-95.

53. Клованич С.Ф. Модель прочности и деформаций бетона и грунта при сложном напряженном состоянии// Строительные конструкции//Межвед.н.-т. сб., вып. 59.- Киев: НИИСК, 2003. -С. 163-170.

54. Клованич С.Ф. Метод конечных элементов в нелинейной механике грунтов и бетонов//Строительные конструкции//Межвед.н.-т. сб., вып. 61.- т.1- Киев: НИИСК, 2004.

55. Клованич С.Ф., Мироненко И.Н. Вариант модели пластичности бетона // Будівельні конструкції // Міжвід.н.-т. зб., вип. 62.-т.2.- Київ: НДІБК, 2005. – С. 18-24.

56. Клованич С.Ф., Мироненко И.Н. Неоднородные конечные элементы для расчета железобетонных конструкций //Вісник ДонНАБА – Макіївка: ДонНАБА - 2005. – вип.. 2005-8(56). – С.147-152.

57. Клованич С.Ф., Мироненко И.Н. Семейство изопараметрических неоднородных конечных элементов // Материалы международной научн.-практ. конференции «Структурообразовании, прочность и разрушение композиционных материалов и конструкций». – Одесса: Вестник ОГАСА - 2005. - вып.20 – С.155 - 164.

58. Клованич С.Ф., Мироненко И.Н. Учет пластичности бетона в расчетах железобетонных конструкций // Вісник ОДАБА – Одеса: ОДАБА – 2005.- вип.17. – С.106-115.

59. Клованич С.Ф., Мироненко И.Н. Расчет железобетонных конструкций на основе теории пластичности бетона // Збірник наукових статей «Дороги і мости» - Київ: ДерждорНДІ – 2006. – вип.6. – С.43-54.

60. Козак Л.А. Исследование процесса трещинообразования в осесимметричных железобетонных конструкциях при термосиловых воздействиях: Дис. ... канд. техн. наук. - Киев, 1981. - 150 с.

61. Козачевский А.И. Модификация деформационной теории пластичности бетона и плоское напряженное состояние железобетона с трещинами // Строительная механика и расчет сооружений. - 1983. - № 4. - С. 12 - 16.
62. Колчин Г.Б., Клованич С.Ф., Чебан Г.А. К построению поверхности прочности структурно-неоднородных материалов при сложном напряженном состоянии // Теоретическая и прикладная механика. - Вып. 19. - Харьков: Вица школа, 1988. -С. 20 - 24.
63. Корсун В.И. Расчет конструкций на температурные и силовые воздействия с учетом неоднородности свойств материалов: Дис. ... докт. техн. наук / ДГАСА - Макеевка, 2004. – 365с.
64. Кричевский А.П. Расчет железобетонных инженерных сооружений на температурные воздействия. - М.: Стройиздат, 1984. -148 с.
65. Круглов В.М. Нелинейные соотношения и критерий прочности бетона в трехосном напряженном состоянии // Строительная механика и расчет сооружений. - 1987. - № I. - С. 40 - 44.
66. Круглов В.М., Козачевский А.И. Об одном варианте деформационной теории пластичности бетона в шаговом расчете конструкций методом конечных элементов // Исслед. работы искусств. сооружений. - Новосибирск, 1980. - С. 15 - 19.
67. Кудашов В.И., Устинов В.М. Расчет пространственных железобетонных конструкций с учетом физической нелинейности и трещинообразования // Строительная механика и расчет сооружений. - 1981. - № 4. - С. 6 - 10.
68. Кукунаев В.С. Учет сил распора в железобетонных плитах в стадиях с трещинами // Бетон и железобетон. - 1985. - № 8. - С. 37 - 38.
69. Леви М.И. К расчету железобетонных перекрытий и фундаментов МКЭ // Строительная механика и расчет сооружений. - 1979. - № 5. - С. 62 - 66.
70. Левин В.М., Стеблянок Л.В. Физические зависимости для железобетона при плоском напряженном состоянии и заданных деформациях//Строительные конструкции//Межвед.н.-т. сб. «Научно-практические проблемы современного железобетона», вып.50 - Киев: НИИСК, 1999. -С.139-144.
71. Леньшин В.П. Расчет железобетонных конструкций методом неоднородных конечных элементов // Строительная механика и расчет сооружений, - 1979. - № 6. - С. 38 - 41.
72. Лейтес Е.С. К построению теории деформирования бетона, учитывающей нисходящую ветвь диаграммы деформирования материала // Новые исследования элементов железобетонных конструкций. - М.: НИИЖБ, 1982. - С. 24 - 32.
73. Лейтес Е.С. К уточнению одного из условий прочности бетона // Поведение бетонов и элементов железобетонных конструкций при воздействии различной длительности. - М.: - НИИЖБ Госстроя СССР, 1980. - С. 37 - 40.

74. Лейтес Е.С. Построение модели деформирования бетона на основе теории пластического течения // Строительная механика и расчет сооружений. - 1987. - № 2. - С. 36 - 39.
75. Ленский В.С. Современные вопросы и задачи пластичности в теоретическом и прикладных аспектах // Упругость и неупругость / МГУ. - 1978. - Вып. 5. - С. 65 - 96.
76. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. - М.: Наука, 1977. - 416 с.
77. Лифшиц М.Б. Вариант условия прочности бетона // Изв. вузов. Сер. Строительство и архитектура. - 1982. - № 5. - С. 12 - 15.
78. Лолейт А.Ф. Новый проект норм // Доклад на I Всесоюзной конференции по бетону и железобетону 20 - 25 апреля 1930 г. в Москве / Тр. конф. - М.: 1931.
79. Лукша А.К. Прочность трубобетона. - Минск: Вышэйша школа, 1977. - 96 с.
80. Максименко В.П. Применение нелинейного шагового процессора «Ли́ра-Степ» для оценки реального состояния сооружений// Будівельні конструкції. – 2001. –вып.54. – С.439-446.
81. Молодченко Г.А., Сиротинко А.Н. Практическая оценка жесткости железобетонных элементов с трещинами//Строительные конструкции//Межвед.н.-т. сб., вып. 59 - Киев: НИИСК, 2003. – С.342-345.
82. Московитин В.В. Циклические нагружения элементов конструкций. - М.: Наука, 1981. - 344 с.
83. Мурашев В.И. Трещиностойкость, жесткость и прочность железобетона. -М.: Машстройиздат, 1958. - 268 с.
84. Назаренко В.Г. Развитие основ теории расчета железобетонных конструкций с учетом особенностей режимного нагружения: Дис. ... докт. техн. Наук / ВЗИСИ. - ., 1989. – 248 с.
85. Нахди П.М. Соотношения между напряжениями и деформациями в пластичности и термопластичности // Механика. - 1962, - № I. - С. 87 - 133.
86. Ноткус А.- И.И. Вариант единой теории пластичности для бетона и металла / Научн. тр. вузов Лит. ССР // Железобетонные конструкции. - 1980. - Вып. 10. - С. 73 - 82.
87. Ноткус А.- И.И., Кудзис А.П. О применении теории малых упруго-пластических деформаций и теоретическое обоснование условия прочности // Тр. Вильнюс, инж.-строит. ин-та. - Вильнюс, 1977. - № 8. - С. 21 - 30.
88. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. – Киев: Изд-во «Сталь», 2002. – 600 с.
89. Писаренко Г.С., Лебедев А.А. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. - Киев: Наукова думка, 1976. - 416 с.
90. Писаренко Г.С., Можаровский Н.С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести, справочное пособие. - Киев: Наукова думка, 1981. - 496 с.

91. Постнов В.А., Хархурим И.Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. – Л.: Судостроение, 1974. - 342 с.
92. Прокопович И.Е., Зедгенидзе В.А. Прикладная теория ползучести. - М.: Стройиздат, 1980. - 240 с.
93. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. - М.: Наука, 1966. - 752 с.
94. Рейсс Э. Учет упругой деформации в теории пластичности // Теория пластичности. - М.: Изд-во иностр. лит., 1948. - С. 206 - 222.
95. Рекомендации по определению прочностных и деформационных характеристик бетона при не одноосных напряженных состояниях. - М.: НИИЖБ Госстроя СССР, 1985. - 72 с.
96. Сахаров А.С., Бобров Р.К. Метод конечных элементов в исследовании напряженно-деформированного состояния железобетонных конструкций с учетом образования трещин // Сопротивление материалов и теория сооружений. - Киев: Будівельник, 1977. - Вып. 30. - С. 10 - 17.
97. Сахаров А.С., Козак А.Л. Методика численного моделирования процесса разрушения железобетонных сосудов высокого давления при нестационарных термосиловых воздействиях // Надежность и долговечность машин и сооружений. – Киев, 1988. - № 14. – С. 46 – 52.
98. Сегалов А.Е. Расчет элементов стен с трещинами методом конечных элементов // Новое о прочности железобетона/ Под ред. К.В. Михайлова. - М.: Стройиздат, 1977. - С. 243 - 247.
99. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. II. - М.: Наука, 1974. - 655 с.
100. СНиП 2.03.01-84. Бетонные и железобетонные конструкции / Госстрой СССР. - М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1985. - 79 с.
101. Соломин В.И., Шматков С.Б. Об учете нелинейных деформаций железобетона и грунта при расчете круглых фундаментных плит // Основания, фундаменты и механика грунтов. - 1976. - № 3. С. 36 - 39.
102. СП 52-101-2003. Бетонные и железобетонные конструкции без предварительного напряжения арматуры. – М.: ГУП НИИЖБ, ФГУП ЦПП, 2004. – 53 с.
103. Филин А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела. - М.: Наука, 1975. - Т. I. - 832 с.
104. Филоненко-Бородич М.М. Об условиях прочности материалов, обладающих различным сопротивлением растяжению и сжатию // Инж. сборник. - 1954. - Вып. 19 - С. 36 – 48.
105. Фомин С.Л. Диаграммы состояния арматуры для расчета железобетонных конструкций при нормальных и высоких температурах // Строительные конструкции // Межвед. н.-т. сб. «Научно-технические проблемы современного железобетона», т.1. - Киев: НИИСК, 2005. - С. 375-379.
106. Хечумов Р.А., Пахомов В.Л. Учет нелинейной работы бетона при расчете сухой защиты реактора в виде толстостенного цилиндра // Вопросы атомной науки и техники. Проектир. и строительство. - М., 1988. - С. 3 - 8.

107. Чихладзе Э.Д., Арсланханов А.Д. Теория деформирования сталебетонных плит//Межвед. н.-т. сб. «Совершенствование методов расчета и проектирования конструкций и сооружений». – Харьков: ХарГАЖТ, 1996.- вып. 27. – с.4-39.
108. Шмуклер В.С., Лучковский И.Я. Учет полной диаграммы « $\sigma_b - \varepsilon_b$ » в алгоритме расчета железобетонных элементов//Строительные конструкции//Межвед.н.-т. сб., вып. 59 - Киев: НИИСК, 2003. – С.143-150.
109. Шмуклер В.С., Бондарев А.В.. Учет специфики деформирования железобетонных конструкций в условиях сложного напряженного состояния//Сб. тр. ХДТУБА, вып. 20 – Харьков, 2003. – С.233-244.
110. Яременко А.Ф., Мельник А.Я. Длительное деформирование железобетонных дисков с трещинами// Строительные конструкции. - Киев: Будивельник, 1979, -Вып. 35. - С. 40-44.
111. Яременко А.Ф., Балдук П.Г. Механика материалов и конструкций. – Одесса, 2001. – 254 с.
112. Яшин А.В. Критерий прочности и деформирования бетона при простом нагружении для различных видов напряженных состояний // Расчет и конструирование железобетонных конструкций. -М.: Стройиздат, 1977. - С. 48 - 57.
113. Яшин А.В. Теория прочности и деформаций бетона с учетом его структурных изменений и длительности нагружения // Новые исследования элементов железобетонных конструкций при различных предельных состояниях. - М., 1982. - С. 3 - 24.
114. Яшин А.В. Рекомендации по определению прочностных и деформационных характеристик бетона при неодноосных напряженных состояниях / НИИЖБ. - М., 1985. - 72 с.
115. Allwood R.J., Bajarwan A.A. A new method for modeling reinforcement and bond in finite element analysis of reinforced concrete//Int. J. of Numerical Method in Engeneering. –1989. – P. 833-844.
116. Ahmad S.H., Shah S.P. Complete Triaxial Stress-Strain Corver for Concrete//J.Struct. Div. ASCE. - 1982. - v. 108. - № 4. - P. 728 – 742.
117. Argiris J.H., Faust G., Szimmat J., Warnke P., Willam K. Resent development in the finite element analysis of prestressed concrete reactor vessels// Nucl.Eng.Dec.,28. – 1974. – P.42-75.
118. Bathe K.-J. Ramaswamy S. On Three-Dimensional Nonlinear Analysis of Concrete Structures // Nucl. Eng. and Des. - 1979. - v. 52. - № 3. - P. 385 - 409.
119. Bergan P.G., Holand I. Nonlinear Finite Element Analysis of Concrete Structures // Comput. Mech. Appl. Mech. and Eng. - 1979. - v. 17-18. - № 2. - p. 443 - 467.
120. Buyukozturk O., Shareef S.S. Constitutive modeling of Concrete in finite Element Analysis // Comput. and Struct. - 1985. - V. 21. - № 3. - P. 581-610.
121. Cedolin L., Crutzen Y.R.J., Dei Poly S. Triaxial Stress-Strain Relationship for Concrete // J. Eng. Mech. Div. ASCE. - 1977. – v. 103. - EM3. - P. 423-439.



122. Cedolin L., Dei Poli S. Finite Element Studies of Shear-Critical R/C Beams // J. Eng. Mech. Div. ASCE. - 1977. - v. 103. – EM3. - P. 395-410.
123. Chang T.Y., Taniguchi H., Chen W.-F. Nonlinear Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Panels // J. Struct. Eng. (USA). – 1987. – v. 113. - № 1. – P. 122 – 140.
124. Chen A.C.T., Chen W.-F. Constitutive Relations for Concrete // J. Eng. Mech. Div. ASCE. – 1975. – v. 101. – EM4. – P. 465 – 481.
125. Chen W.-F., Han D.J. A five – Parameter Mixed Hardening Model for Concrete Materials // Plasticity Today. Modeling, Meth. And Appl. – London, New York. – 1985. – P. 1 – 19.
126. Chen W.-F., Ting E. Constitutive Models for Concrete Structures // J. Eng. Mech. Div. ASCE. – 1980. – v. 106. - № 1. – P. 1 – 19.
127. Cervenka V. Constitutive Models for Cracked Reinforced Concrete // ACI Journal. – 1985. – v. 82. - № 6. – P. 877 – 882.
128. Cervenka V. Inelastic Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Panels Under Inplane Loads: Ph.D....dis/Dept. Civ. Eng. Univ. Colorado. – Boulder, 1970. – 20 p.
129. Darwin D., Pecknold D.A. Nonlinear Biaxial Stress-Strain Law for Concrete // J. Eng. Mech. Div. ASCE. - 1977.-v. 103. - EM2. - P. 229 - 241.
130. Dei Poli S. Present State of Some basic Researchers on Concrete: The behavior Until Failure, Under Multiaxial Stresses // J. Ital. Cem. - 1980. - v. 50. № 9. P. 633 – 658.
131. Delgado C., Fargueta F., Fernandes-Prada M. A new finite element to analyze bond behaviour in the presence of transverse pressure//5-th Int. Conf. AMCM-2005.
132. Discussion of a Paper by S.Popovics "A Review of Stress - Strain Law for Concrete // ACI Journal, Proc. - 1970. – v. 67. - № 9. - P. 752 – 756.
133. Elwi A.A., Hrudey T.M. Finite element model for curved embedded reinforcement//J. of Eng. Mech.- 1988.- Jan.- 115(4): 470-754.
134. Elwi A.A. Murray D.W. Hypoelastic Concrete Constitutive Relationship // J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE. - 1979. – v. 105. – № 4. P. 633 – 641.
135. Fardis M.N., Alabe B., Tassoulas D.L., Monotonic and Cyclic Constitutive law for Concrete // J. Eng. Mech. - 1983. – v. 109. - № 2. - P. 516-536.
136. Gedling J.S., Mistry N.S., Welch A.K. Evaluation of Material Models for Reinforced Concrete Structures // Comput. And Struct. 1986. v. 24. – № 2. – P. 225 – 232.
137. Gerstle K.H. Simple Formulation of Triaxial Concrete Behavior // ACI Journal. - 1985. - № 5. - P. 382-387.
138. Gerstle K.H. Ingreffea A.R., Murray D., Nilson A.H., Mirza M.S. Subcommittee 2 on finite element analysis of reinforced concrete. Technical report//ASCE Struct. Eng. Div. –1982.
139. Gerstle K.H. and other. Behavior of Concrete Under Multiaxial Stress Strain // J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE. - 1980. – v. 106. - № 6. – P. 1383 – 1403.

140. Grayson R. Stevens L.K. Nonlinear Analysis of Structural System of Steel and Concrete // Proc. 3rd Int. Conf. in Australia on finite Elem. Meth. - 1979. - P. 179 - 196.
141. Grootenboer H.J. Leyten S.F.C.H., Blaauwendrood J. Numerical Models for Reinforced Concrete Structures in Plain Stress // Heron. - 1981. - v. 26. - № 1. - 83 p.
142. Han D.J., Chen W.-F. Plasticity Model for Concrete // Mech. Mater. - 1985. - v. 4. - № 3. - P. 283 - 310.
143. Hand F.R., Pecknold D.A., Schnobrich W.C. Nonlinear Layered Analysis of R.C. Plates and Sheets // J. Struct. Div. ASCE. - 1973. - v. 99. - ST 7. - P. 1491 - 1505.
144. Hansen E., Willam K., Carol I. A two-surface anisotropic damage/plasticity model for plain concrete// Proc.of Int.Conf. Fracture Mech. Of Concrete Materials, Paric, May 28-31, 2001 – pp. 549-556.
145. Hartl H., Handel C. 3D finite element modeling of reinforced concrete structures// Graz Univ. of Technol., Inst. Of Structural Concrete, Austria, 2000.- P.1-10
146. Hirai H. Modelling of Elastoplastic Behavior of Concrete Based on a Non - Associative Flow Rule // Mech. Fac. Eng. Kumamoto Univ. - 1988. - v. 32. - № 2. - P. 131 - 141.
147. Kotsovos M.D. A Mathematical Description of the Strength Properties of Concrete Under Generalized Stress // Mag. Concrete Res. - 1979. - v. 31. - № 108. - P. 151 – 158.
148. Kotsovos M.D. Newman J.B. Generalized Stress-Strain Relations for Concrete // J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE. - 1978. - v. 104. - № 4. - P. 845 - 856.
149. Kupfer H.B., Gerstle K.H. Behavior of Concrete Under Biaxial Stresses // J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE. - 1997. - v. 99. - EM4. - P. 853 - 856.
150. Launay P., Grachon H. Strain and Ultimate Strength of Concrete Under Triaxial Stress // Proc. 1st Int. Conf. Struct. Mech. React. Technol., Berlin. – 1971. – Pap H 1/3.
151. Lin F.B., Bazant Z.P., Chern J.C., Marchertas A.H. Concrete Model With Normality and Sequential Identification // Comput. and Struct. - 1987. - v. 26. - № 6. – P. 1011 - 1025.
152. Lin C.S., Scordelis A.C. Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Shells of General Form // J. Struct. Div. ASCE. - 1975. - v. 101. – ST3. - P. 523 - 538.
153. Liu T.C.Y., Nilson A.H., Slate F.O. Biaxial Stress-Strain Relationship for Concrete // J. Struct. Div. ASCE. - 1972. - v. 98. - ST5. - p. 1025 - 1034.
154. Lutz L.A. Analysis of Stress in Concrete Hear a Reinforcing Bar Due To Bond and Transverse // ACI Journal. -1979. - №10. - P. 778 – 787.
155. Marti P. Limit analysis and design of coccrete and masonry structures//5-th Int. Conf. AMCM-2005.

156. Mroz Z. Mathematical Model of Inelastic Concrete Behavior // Inelasticity and Non - Linearity in Structural Concrete. - Univ. of Waterloo, Ontario, Canada, 1982. - P. 47 - 72.
157. Ngo D., Scordelis A.C. Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beam // ACI Journal. - 1967. - v. 64. - № 3. – P. 152 - 163.
158. Nilsen A.H. Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete by the Finite Element Method // ACI Journal. - 1968. – v. 65. - № 9. - P. 757 - 766.
159. Ohtani Y., Chen W.-F. Hypoelastic-Perfectly Plastic Model for Concrete Materials // Eng. Mech. - 1987. – v. 113. - № 12. - P. 1840 - 1860.
160. Ottozen N.S. A Failure Criterion for Concrete // J. Eng. Mech. Div. ASCE. – 1977. – v. 103. – NEM4. – P. 527 – 535.
161. Ottosen N.S. Nonlinear Finite Element Analysis of Concrete Structures // Ris. Rept. - 1980. - v. 411. - 186 p.
162. Owen D.R., Figueiras J.A., Damianic F. Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures Including Thermal Loading // Comput. Meth. Appl. Mech. and Eng. - 1983. - v. 41. - № 3. - P. 323-366.
163. Petersson P.-E. Crack Grows and Development of Fracture Zones in Plain Concrete and Similar Materials / Lunds Inst. of Technology. - 1981.
164. Phillips D.V., Wu Z.P. An oriented bar formulation with bond-slip// Proc.of Int.Conf.of. Num. Meth. In Eng.: Theory and Application. – 1990. – P. 320-328.
165. Phillips D.V., Zienkiewicz O.C. Finite Element Nonlinear Analysis of Concrete Structures // Inst. Civ. Eng. Proc. Pt2. - 1976. - v. 61. - III. - P. 59 - 88.
166. Podles K., Truty A. Nonlocal elasto-plastic model for concrete//5-th Int. Conf. AMCM –2005.
167. Popovics S.A. Review of Stress-Strain Relationship for Concrete // ACI Journal, Proc. - 1970. – v. 67. - № 9. - P. 243 – 248.
168. Prandtl L. Spannungsverteilung in Plastischen Korpern // Proc. of 1 st Int. Congr. of Appl. Mech. - 1924. - P. 43-54.
169. Rudnicki J.W.,Rice J.R. Conditions for the Localization of Deformation in Pressure - Sensitive Dilatant materials // J. Mech. Phys. Solids. – 1975. - v. 23. - P. 371 - 394.
170. Ruetz W. On the Deformation Behavior of Hardened Cement Pastes // RILEM Colloquium on the Influence of Time Upon Strength and Deformation of Concrete, - Munich. - Nov. - 1958.
171. Saennz I.P. Discussion of Equation to the Stress-Strain Corver of Concrete By P. Desai and S. Krishnan // ACI Journal, Proc. - 1964. – v. 61. - № 9, Sept. – P. 1229 - 1235.
172. Schreyer H.L., Babcock S.M. A Third - Invariant Plasticity Theory for Low-Strength Concrete // J. Eng. Mech. - 1985. - v. 111. - № 4. - P. 545 - 558.
173. Scordelis A.C. Computer Models for Nonlinear Analysis of Reinforced and Prestressed Concrete Structures // J. Prestr. Concr. Inst. – 1984. - № 6. - P. 116 - 135.

174. Sorensen S.I., Arnesen A. Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Using Endochronic Theory // Finite Element Nonlinear Mech. - 1978. - v. 1. - P. 167 - 189.
175. Suidan M., Schnobrich W.C. Finite Element Analysis of Reinforced Concrete // J. Struct. Div. ASCE. - 1973. - v. 99. - №ST10, Oct.
176. Thelandersson S. On the Multiaxial Behavior of Concrete Exposed to High Temperature // Nucl. Eng. and Des. - 1983. - v. 75. - № 2. - P. 271 - 282.
177. Thelandersson S. Modelling of Combined Thermal and Mechanical Action in Concrete // J. Eng. Mech. - 1987. - v. 118. - №6. – P. 893 – 906.
178. Wang T.-J., Wang C.-Z., Xia Z.-X. and other. An Experimental Investigation and Linear, Nonlinear Finite Element Analysis of the 1/10th Scale Model of Prestressed Concrete Reactor Vessel // Transact. 8th Int. Conf. on Struct. Mech. React. Technol. – 1985. - vol. H. - P. 27 - 30.
179. Willam K.J., Warnke E.P. Constitutive Model for the Triaxial Behavior of Concrete // Seminar of Concrete Structures Subjected to Triaxial Stresses, Bergamo, Italy. – 1974. – v. 19. – May. 17 – 19. – P. 3/1.
180. Zienkiewicz O.C., Oweh D.R.H., Phillips D.V., Nayak G.C. Finite Element method in Analysis of Reactor Vessels // Nucl. Eng. and Des. - 1972. - v. 20 - P. 507 - 541.
181. Zienkiewicz O.C., Villiappan S., King I. Elasto-Plastic Solution of Engineering Problems. Initial Stress, Finite Element Approach // Int. J. Num. Mech. Eng. - 1969. - № 1. - P. 75 - 100.
182. Zienkiewicz O.C. The Finite Element Method. Fifth edition. v.2. Solid Mechanics. – Butterworth-Heinmann, 2000. – 459 p.

## СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	
ГЛАВА 1. СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ.....	
1.1. Прочность и деформативность бетона при сложном напряженном состоянии.....	
1.2. Численные исследования бетонных и железобетонных конструкций при сложном напряженном состоянии.....	
ГЛАВА 2. МОДЕЛЬ ПЛАСТИЧНОСТИ БЕТОНА.....	
2.1. Общие соображения.....	
2.2. Предельная поверхность.....	
2.3. Поверхность нагружения.....	
2.4. Упрочнение.....	
2.5. Пластические модули.....	
ГЛАВА 3. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ БЕТОНА И ЖЕЛЕЗОБЕТОНА.....	
3.1. Постановка задачи механики железобетона. Система разрешающих уравнений.....	
3.2. Дискретизация области.....	
3.3. Матрицы жесткости конечных элементов. Узловые силы.....	
3.4. Разрешающее уравнение МКЭ.....	
3.5. Решение нелинейных задач.....	
ГЛАВА 4. КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ДЛЯ РАСЧЕТА БЕТОННЫХ И ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ.....	
4.1. Интерполяционные функции перемещений.....	
4.2. Однородные конечные элементы. Численное интегрирование.....	
4.3. Неоднородные конечные элементы.....	
4.4. Неоднородный конечный элемент для расчета железобетонных конструкций.....	
ГЛАВА 5. КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНАЯ МОДЕЛЬ ЖЕЛЕЗОБЕТОНА.....	
5.1. Инкрементальная формулировка.....	
5.2. Диаграмма деформирования арматуры.....	
5.3. Условия образования трещин. Схемы трещин.....	
5.4. Железобетон с трещинами.....	
5.5. Ширина раскрытия трещин, расстояние между трещинами.....	

ГЛАВА 6. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ.....	
6.1. Расчет железобетонных статически определимых балок.....	
6.2. Расчет железобетонных предварительно напряженных конструкций.....	
6.3. Расчет железобетонных рам.....	
СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	