**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»**

А.Д. ИЗОТОВ, Ф.И. МАВРИКИДИ

ФРАКТАЛЫ:
ДЕЛИМОСТЬ ВЕЩЕСТВА КАК СТЕПЕНЬ СВОБОДЫ В МАТЕРИАЛОВЕДЕНИИ

С А М А Р А 2011

УДК 53:51
ББК 22.3
И 387

Рецензенты: декан факультета физ.-мат. и естеств. наук Российского университета дружбы народов д-р хим. наук, проф. *В.В. Давыдов;*
гл. науч. сотрудник ИОНХ РАН д-р хим. наук, проф. *А.А. Левин*

Изотов А.Д.
И 387 **Фракталы: делимость вещества как степень свободы в материаловедении:** монография / *А.Д. Изотов, Ф.И. Маврикиди*. – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2011. – 128 с.: ил.

ISBN 978-5-7883-0834-0

Предлагаемая книга является результатом совместной работы – как практической, так и учебной – химика-материаловеда (первый автор) и прикладного математика (второй) с конца 1995 года, направленной на понимание разрыва между наблюдаемостью и моделируемостью – почему химические процессы далеко не всегда воспроизводятся формальными методами?

Исходным пунктом осознания проблемы явилась известная мысль И.В. Тананаева о необходимости введения координаты размера частиц как отдельной степени свободы материальных преобразований. Фракталы самым непосредственным образом содержат эту координату под видом скейлинга, понимаемого как *"углубления в детали"*, которую авторы назвали *"координатой или степенью свободы делимости материи"*. На ней в дополнение в известной масштабной инвариантности наблюдается *"масштабная вариативность* свойств частиц веществ.

Книга является введением в эту расширенную версию фрактальной геометрии. Основной акцент сделан на демонстрации двойной феноменологии – материальной и математической, и возможности сопряжения понятий формальных терминов с понятиями материаловедения, которое проходит по теории измерений.

Книга может быть полезной как для студентов-материаловедов старших курсов, аспирантов, так и для исследователей, использующих в работе идеи фрактальной геометрии.

УДК 53:51
ББК 22.3

ISBN 978-5-7883--0834-0

© Самарский государственный аэрокосмический университет, 2011

СОДЕРЖАНИЕ

Введение…….. 4
1. Междисциплинарность материаловедения…….. 8
2. Научная проблема создания материалов……... 9
3. Антиномия материи: апории Зенона, нарушение симметрии……. 11
4. Фракталы: координата делимости материи…….. 14
5. Функциональная асимметрия в природе и фракталы…….. 16
6. Фракталы: эмпирическое рассмотрение……... 19
7. Фракталы и нелинейная динамика…… 25
8. Теоретическая информатика – связь с фракталами……. 32
9. Классика фракталов: физика и информатика……... 38
10. Лексикографическое дерево: перекрёсток физики, информатики и математики…….. 48
11. Делимость и *p*-адические числа……... 56
12. К теории измерений фрактальных объектов…….. 85
13. Голографическая модель материи…… 90
14. Геометрия как параметр……... 97
Заключение…….. 107
Приложение 1…….. 109
Приложение 2…….. 113
Список литературы...…….. 119

ВВЕДЕНИЕ

Во второй половине XX века произошло знаменательное событие – было обнаружено математическое содержание в типичных, всюду существующих и повсеместно наблюдаемых материальных объектах, в их геометрии, структуре и поведении. Зазвучала идея фрактальной геометрии Природы. Если учесть, что физико-математическая наука всячески избегала подобного натурализма, концентрируясь на сингулярных и изолированных объектах, то значение этого события – введение в круг научных понятий и представлений фрактальной геометрии – трудно переоценить.

Фрактальная геометрия долго оставалась, и во многом эта тенденция сохраняется и поныне, в тени идеи сведения всех научных дисциплин к математической физике. Эта идея и составляла содержание «новой физики» – кибернетики, прогремевшей и угасшей параллельно с нарастанием фрактальных идей во второй половине XX века. Лишь по завершении этого этапа стало очевидным, что те задачи, которые устояли перед кибернетикой, могут иметь и иные основания для своего решения – общность фрактальной структуры материи.

Развитие идеи фрактальности материи привело к тому, что термин фракталы стал пониматься как синоним естественности, как единая топология объектов и явлений естественных наук. И здесь возникла необычная познавательная дилемма. Принято считать, что законы Природы имеют математический вид. Но тогда что делать? Следует ли считать естественные объекты внеприродными или их математическое описание неадекватным?!

Математическое содержание фрактальных феноменов в настоящее время почти полностью состоит из физических представлений. К классике фрактальной теории сегодня относят те её стороны, которые удалось свести к одной из стандартных теорий математической физики – статистической механике, термодинамике, теории броуновского движения и т.д. В тени физики фракталов пока остаётся бурное развитие теоретической информатики (*theoretical computer science* – TCS). Несмотря на то, что понятие информации прочно утвердилось в науке и сегодня происходит конвергенция методов математической физики и информатики, по инерции эта «компьютерная наука» рассматривается

более как вспомогательная дисциплина, призванная разрабатывать алгоритмы и программы для воплощения физических теорий.

Компьютерные методы генерации фрактальных образов пока не подняты до естественного явления, достойного занять место в ряду фундаментальных теорий Природы. Также не получила широкой известности глубокая мысль Э. Джейнса, имеющая непосредственное отношение к материаловедению, о том, что компьютер как физическая система должен быть согласован со статистической физикой, термодинамикой, квантовой теорией и теорией информации [1].

Компьютер как физическое явление можно вообще рассматривать как пример фрактальной теории материи. Цифровые компьютеры – это усечённые, приближённые фракталы, поэтому они наследуют почти всё из арсенала фрактальной теории. Здесь скейлинг, или масштабная инвариантность, принимает, с одной стороны, вид миниатюризации его материальной базы, с другой стороны – это независимость основных информационных операций от материалов и/или их масштабов. По результату работы программы невозможно определить на какой материальной базе она выполнялась, так же как по микрофотографии фрактала невозможно определить его физико-химическую природу, является он материальным или математическим.

Эта универсальность цифровых компьютеров имеет теоретическую основу – вычислительную универсальность машин Тьюринга. Сегодня она воплощена в их предметной универсальности и разнообразии функций. Свойство предметной и ситуационной гибкости компьютеров, то есть их способность порождать любые тексты и выполнять любые вычисления – это то, чего всегда не хватало теориям «гладкой математики». Можно вспомнить начало развития вычислительной техники, когда недолгое время цифровые, то есть фрактальные, компьютеры конкурировали с аналоговыми, созданными на идее воплощения дифференциальных уравнений математической физики. Результат сегодня очевиден – функции аналоговых поглощены цифровыми.

Также очевидно то, что развитие материальной базы вычислительной техники как увеличения диапазона скейлинга, принявшего вид миниатюризации материальных компонентов, за последние десятилетия привело к гигантскому расширению её возможностей, причем не только в объёме памяти и быстродействии, но более выразительных

«несчитающих» её функций – способах генерации, визуального моделирования и исследования образов природных явлений. Эта ветвь играет большую роль в медицине, географии, геологии, биологии. В технике она составляет основу автоматизации проектирования сложных систем.

Для математической физики информатика является тем же, что и физика для информатики – вспомогательной дисциплиной. Причём очевидно, что происходит взаимное обогащение этих дисциплин теоретическими результатами. Развитие материальной базы компьютеров способствует эволюции математических теорий, которые, в свою очередь обеспечивают материальную науку новыми методами. Немного преувеличивая, можно сказать, что сегодня компьютер – это материя, сконструированная из своих теорий и свойств. Поэтому компьютеры демонстрируют тот факт, что материя может быть понята как синтез теорий, описывающих её различные проявления.

Вопросы, к которым подводит это явление параллелизма фракталов и компьютеров, можно сформулировать следующим образом – как может подобная вездесущесть и универсальность быть вне законов природы? И, обратно, возможно ли в исследовании материальных объектов использовать весь набор теорий – физических и информационных, которые представляет современный компьютер?

С точки зрения химической науки и материаловедения изъян современной фрактальной теории в том, что масштабная инвариантность, то есть однородность геометрических свойств, которая широко эксплуатируется, в химии сопряжена с обратным явлением – масштабной детерминированностью, то есть зависимостью химических свойств веществ от величин и диапазона масштабов. Очевидно, что именно в этом диапазоне химия исследует свойства материалов как эффект совместного действия различных физических теорий. Этот факт был отмечен в опыте применения фрактальной геометрии в химии, но развития, насколько известно авторам, не получил.

Точка зрения предлагаемой работы и состоит в том, чтобы показать возможность формального описания этой масштабной зависимости свойств материалов. Эта зависимость есть не что иное, как зависимость свойств веществ от размеров частиц. В химии известно предложение И.В. Тананаева считать размер частиц четвёртым изме-

рением, столь же фундаментальным, как объём, давление и температура.

Формализация этой идеи составляет суть введения координаты делимости вещества как отдельной степени свободы изменения размеров и описание тех формальных математических методов, которые оказываются причастными к этой координате. Эмпирическим, экспериментальным базисом служат факты фрактальной геометрии.

Основам фрактальной теории посвящено много превосходных книг разного уровня как общего плана [2], так и более специальных [3]. Кроме того в многочисленных специальных монографиях и статьях наличествуют главы, посвященные фрактальным версиям теорий. Фракталы часто появляются в связи с ренормгрупповыми методами, универсальностью и критическими явлениями в фазовых переходах, статистической физике и неупорядоченных системах. Фрактальная тематика занимает значительный объём в недавно вышедших энциклопедиях нелинейной науки и сложных систем [4].

Поэтому классике предмета в данной работе уделяется немного внимания. В основном это обзорная информация, призванная продемонстрировать экстенсивно-интенсивную двойственность природы фракталов, сочетающую протяженность материи с её делимостью, и сформировать точку зрения, из которой влияние размеров на свойства веществ становится прозрачным. Эта точка зрения является отправной для дальнейших построений. Бинарность фракталов уходит корнями в античность и связана с именем Платона и апориями Зенона, которые в современной науке приобрели вид парадоксов теории множеств и «пропасти между дискретным и непрерывным» описаниями в физике. Интерес к этой древней теме не исчезает, чему свидетельство постоянное появление публикаций, анализирующих её с самых разных позиций – от истории науки до современных теорий физики [5].

Основной акцент изложения перенесён на описание взаимодействия физики и информатики, которое проходит по координате размера или делимости материи как внутренней степени свободы вещества. В качестве введения в основы подхода можно рекомендовать книгу [6], содержащую подробное изложение физических и информационных теорий, составляющих проблему сложности фрактальной материи и связей между ними.

1. МЕЖДИСЦИПЛИНАРНОСТЬ МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЯ

Материя является одной из основных категорий в жизни и деятельности человека. Человеческое познание всегда было направлено на постижение её проявлений и свойств. Разнообразие материальных объектов простирается от космических и геологических масштабов до микро- и наноуровня. Наука о материалах является одним из столпов современной цивилизации, обеспечивая прогресс и решение самых разных проблем. Прогресс техники, создание новых медицинских препаратов, развитие средств связи и коммуникаций, становление и выход на практические нужды космической техники – всё это немыслимо без развитой науки о материалах.

Современное развитие материаловедения, его выход на рубежи наномасштабов поставило эту науку в центр экологических, гуманитарных и политических проблем [7]. Их новизна, сложность и многоаспектность соответствующим образом отражаются в науке о материи, которая носит существенно мультидисциплинарный характер.

Наряду с классическими физико-химическими методами исследования наблюдается становление и развитие теории сложности, призванной усовершенствовать теоретические представления о материи посредством синтеза математических методов [6]. Отличительная особенность этого направления состоит в расширении методов исследований неклассическим аппаратом – геометрией иерархических структур и фракталов, теории динамических систем и символической динамики, теоретической информатики и формальных языков, имитационных моделей и клеточных автоматов, компьютерных систем.

Наибольшую известность в этом направлении получила идея Р. Фейнмана о моделировании физики на компьютерах и инфинитезимальных машинах [8], которая и привела, собственно, к становлению науки о наноматериалах и, в более широком плане, цифровому направлению в философии и физике материи *(digital philosophy, digital physics-англ.)*. Практика реализации этой идеи показывает, что классические физические методы – механики сплошных сред, статистические и вероятностные теории имеют общую область с методами теоретической информатики – теорией формальных языков и алгоритмов, теорией алгоритмической сложности, математической логики. И сегодня уже

не кажется удивительным появление работ, в которых квантовая механика, например, исследуется методами теории вычислительных структур. Недавно было обнаружено информационное содержание в космологии и физике высоких энергий, которое стало известно как голографический принцип – физические процессы в некотором объёме вещества могут быть порождены и закодированы информацией, записанной на его границе [9]. Этот принцип в физике конденсированной среды имеет аналогии и направлен на реализацию информационной идеи в обычных масштабах и уровнях энергии [10].

Простое перечисление разделов математических методов, участвующих сегодня в материаловедении и призванных отобразить спектр свойств веществ, показывает, что наука о материи должна носить синтетический характер, который позволил бы связать различные математические теории для адекватного описания физически связанных и коррелированных проявлений её свойств на всех масштабных уровнях и во всём поле междисциплинарных приложений.

Традиционная механико-математическая парадигма привела к фрагментированным теориям в материаловедении и оказалась малоэффективной для формального отображения всей широты спектра проблем и свойств материи. Становление и развитие фрактальных представлений о материи [11] открывает новые возможности для разработки синтетических теорий. Будучи единой, трансдисциплинарной геометрией объектов и процессов разной природы, фракталы являются представителями формальных структур со столь же универсальными свойствами. По своему математическому содержанию фракталы являются общими для двух главных ветвей науки о материи – физике и теоретической информатике.

Цель настоящей работы – очертить контуры этого синтеза, указать его общенаучное, физическое и математическое содержание в применении к задачам науки и технологии о материалах.

2. НАУЧНАЯ ПРОБЛЕМА СОЗДАНИЯ МАТЕРИАЛОВ

В настоящее время математическое моделирование в материаловедении проходит при посреднической роли физики. В науке очень большой вес имеет эксперимент. Принципиальное отличие экспери-

мента от классической теории в том, что он даёт возможность измерения или получения заданной характеристики как функции совокупного действия разнокачественных и формально несводимых другу к другу факторов – тепловых, механических, полевых, дискретных. Эксперимент призван восполнять недостатки и слабости теории, он имеет синтетический характер, который дополняет взаимную изолированность формальных теорий, дающих только фрагментарное описание (см. Приложение 1).

В технологии материалов есть две основные задачи. Первая задача есть способ создания по методу «снизу вверх» – свойства целого образца зависят от его строения и состава. Вторая – «сверху вниз» – внутренняя структура, зависит от поведения целого и его окружения. С общенаучной точки зрения эти задачи материаловедения есть вариант проблемы Единое-Многое, сформулированной Платоном и известной в современной науке как проблема «части и целого». Ее формулировка в различных вариантах сводится к следующей:

«Требуется формально описать, смоделировать взаимозависимость свойств целого образования и его частей, подсистем. Как интегральные характеристики системы возникают из локальных и, обратно, как свойства на микроуровне определяются интегральными».

В материаловедении она принимает вид задачи нахождения формальной связи свойств вещества со свойствами его атомно-молекулярной структуры. В случае положительного решения она могла бы сформировать единый подход к решению двух основных задач. В физике аналогичная проблема известна как задача трёх и более тел. Но ситуация в химической технологии существенно сложнее. Для полного решения задачи необходимо, очевидно, включение в модель информации о свойствах, содержащихся в периодической таблице Д.И. Менделеева. Нерешённость этой проблемы математическими средствами ограничивает возможности теории-кандидата.

Опыт решения задачи Единое-Многое следующий. Платон пришел к выводу, что целостное образование должно быть описано двумя несводимыми друг другу и неотделимыми друг от друга способами – сплошностью, то есть единством, и дискретностью, или множественностью [12]. И уже в наше время, во второй половине XX века, в период бурной математизации наук, развития кибернетики и системного

анализа, когда была предпринята масштабная попытка создания новой физики, то есть сведения всего естественно-научного знания, в том числе и химии, к физике, проблема части и целого оказалась в центре внимания. Как показал опыт, решение этой задачи методами математической физики не достигло цели.

Причина видится в том, что её решение предпринималось в евклидовом, физическом пространстве, которое, согласно теореме Гельмгольца [13] допускает лишь те движения и преобразования объектов, которые описывают механику деформируемого твёрдого тела. Причём это описание имеет локальный характер, то есть справедливо «в малом», для физически бесконечно малого объёма. Движения частей этого малого объёма, его взаимодействие с различными масштабами пространства, проявление различных физико-химических свойств никак не отражаются теорией.

Проблема Единое-Многое является не только проблемой материаловедения, но и инженерных, гуманитарных, социальных наук, лингвистики, биологии и т.д. С точки зрения фрактальной структуры материи неуспех «новой физики» объясняется тем, что не была учтена бинарность материи, которую сегодня можно рассматривать как синоним естественности, общую топологию вариантов проблемы Единое-Многое.

Тем самым, поместив задачу о конструировании материалов в её контекст, мы оказываемся в неразрывной связи с ними и попадаем в перекрёсток междисциплинарных связей. В этой сети связей технологические проблемы могут оказаться частью более общей проблемы – социальной, политической, медицинской, экологической и выступать как организующие цели.

3. АНТИНОМИЯ МАТЕРИИ: АПОРИИ ЗЕНОНА, НАРУШЕНИЕ СИММЕТРИИ

Рассмотрим как выглядит проблема Единое-Многое подробнее. В истории науки она известна как апории Зенона Элейского, который придал ей вид логических парадоксов или антиномий. Этимология слова «антиномия» не есть «ошибка», «неразрешимость противоре-

чия». Его точный перевод – «противоречие двух законов». Тем самым путь к решению этой проблемы заключается в нахождении и формализации двух законов, двух причин, формирующих объект. В нашем случае – фрактальный объект.

Проблема Единое-Многое в формулировке Зенона выглядит так: «Зенон, передают, говорил, что если кто-нибудь определил ему, что такое единое (из которых состоит многое), он мог бы сказать, что такое сущее» [14]. Тем самым эта проблема суть проблема формального совмещения разделения и связанности, дискретности и непрерывности, неделимости (целого) – делимости (его же).

С точки зрения математики апории Зенона сводятся к проблеме согласования двух способов задания множества, которое является формальным эквивалентом материального объекта. Известно, что множество можно задать как «сверху вниз», как целое, описанием свойства, общего его элементам, так и «снизу вверх» – перечислением его элементов. И эти способы оказались несводимы к какому-либо одному из них.

Становится очевидным, что в формализации проблемы «часть и целое» недостаёт формального описания процесса деления целостного образования – вещества, системы. Но этот процесс не является простой арифметической операцией. Поясним это. Рассмотрим лист бумаги, выкрашенный с одной стороны в черный цвет. Запустим (мысленно) процесс его деления, дискретизации или квантования. Очевидно, мы с частями листа пройдем по шкале уменьшающихся размеров его частей, молекул, атомов… Вопрос: куда при этом девается его двухцветность? И в какой момент, на каком интервале размеров его частей, уровне иерархии деления она исчезнет? Описанный процесс есть материаловедческий вариант Зеноновой апории «Дихотомия». В исходном варианте исчезает движение, в нашем примере – свойства (цвет).

Далее. Возьмем образец вещества, отличающегося нужными свойствами – прочностью, теплопроводностью, электропроводностью. Проделаем тот же мысленный эксперимент и дойдем до элементарных частиц материи. Куда и когда исчезнут свойства вещества? Очевидно, что при обратном движении – «снизу вверх» возникает вопрос – откуда и когда возникают новые свойства вещества?

Эта упрощенная версия антиномии есть иллюстрация к одной из основных задач материаловедения – познанию размерных эффектов в строении и свойствах материалов. В науке этот эффект известен как нарушенная симметрия в способе формализации – оказалось невозможным, после редукции объекта к его элементарным частям формально вывести из них его свойства как целостного образования. Иными словами, на разных масштабах размеров вещество проявляет различные свойства [15]. Иерархия как геометрия делимости материи оказывается физическим фактором, детерминирующим её свойства [16]. Сложность ситуации в том, что иерархия не входит в набор физических переменных, не детектируется приборами, делимость не рассматривается и не формализуется математически как отдельная степень свободы.

Эти логические пути «снизу вверх» и «сверху вниз» типичны для всех естественных наук. На одном полюсе превалирует материальность – молекулярная биология, физико-химические методы в геологии, физические методы географии, количественные методы в экономике и т.д. Противоположный полюс размеров формируется качественным разнообразием – теориями эволюционного характера в науках.

Эти рассуждения можно проиллюстрировать следующим образом. Фрактальный объём вещества (рис.1, вверху) представляет собой, с одной стороны, сплошное неделимое единое целое (слева), а с другой – многое, то есть составное образование (справа). В физике и материаловедении составные объекты обычно называются ансамблями частиц или атомно-молекулярными структурами. В этом случае исходные объекты называются кластерами.

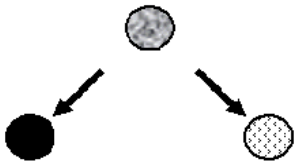


Рис. 1. Антиномия материи

Соответственно теории делятся на детерминированные и статистические. Проблеме их согласования посвящены работы И.Р. Пригожина.

Итерация этой антиномии уводит вглубь материи – «элементарным» частицам, состоящим из «более элементарных», которые, в свою очередь, состоят из ещё более фундаментальных и т.д. (рис. 2, слева направо, сверху вниз).

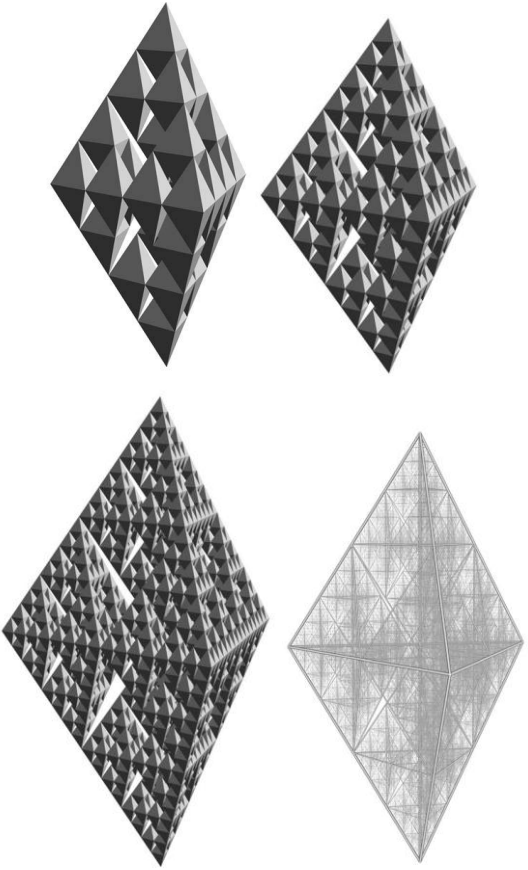


Рис.2. Антиномия материи (продолжение)
(Lipscomb S. Fractals and Universal Sets in Dimension Theory. Springer 2009, Ch.2.)

4. ФРАКТАЛЫ: КООРДИНАТА ДЕЛИМОСТИ МАТЕРИИ

С появлением теории фракталов ситуация получила новый импульс. Была зафиксирована типичность фрактального строения как материальных объектов, так и фазовых пространств математических теорий. Фракталы оказались общим объектом для физики и математики,

то есть их природа оказалась бинарной – материально-символьной. Это значит, что двойные, фрактальные представления материального объекта, будучи оснащены соответствующим математическим аппаратом, дают надежду на решение. Здесь возникает подходящая атмосфера, в которой часть и целое, вещество и его атомно-молекулярная структура оказываются связанными причинно-следственными связями.

Фрактал в переводе с латинского означает «дробимый», «фрагментированный». Фрактальное множество понимается как формальный представитель делимого материального объекта, части которого, в свою очередь, делимы – и так до бесконечности. На делимость материи как особое её свойство внимание было обращено лишь недавно, когда появился ряд обобщающих работ как в рамках фрактальной теории, так и с общенаучных позиций [17].

Неформальное описание фракталов сводится к следующему. Фрактальное строение материи универсально и независимо от физико-химической природы объектов – это и биология, и неживая материя. Универсальность продолжается и на математические сущности – числа, функции, фазовые пространства. Тонкодисперсная материя *(finely divided matter- англ.)* имеет ту же геометрию, что и зернистые, гранулированные *(coarse – grained space-англ.)* математические фазовые пространства. Поэтому ряду физических размеров «агрегат – кластер – молекула – атом – элементарные частицы» соответствует ряд фрактальных (под)множеств уменьшающегося диаметра.

Такую параллель можно считать обнадёживающей. Подобно тому, как уподобление движения планет движению материальных точек или идеальных шаров привело к прогрессу астрономии, звуковых явлений, волновому движению воздуха – прогрессу акустики, света – электромагнитному полю, появилась квантовая механика, сходство фрактального строения материи и математики можно попытаться развить в формальную теорию. Это общий принцип математического моделирования реальных систем – модель или расчётная схема должна воспроизводить (в идеале) или быть подобной (гомоморфной) геометрии исследуемого объекта [18].

Фрактальный характер строения не зависит от масштабов – по микрофотографии невозможно определить масштаб наблюдения и

природу материи. Образец вещества любой физической природы и химического состава является горой в миниатюре.

По отношению к привычным способам представления объектов фракталы можно уподобить следующему шагу в математическом описании – «наведению резкости» на евклидов образ, когда становятся всё более отчётливыми детали его внутреннего строения (рис. 3). Это явление известно как масштабная симметрия в физике и как скейлинг, «заглядывание вглубь» *(zooming in – англ.)* или углубление в детали в теории фракталов.

Рис 3. Наведение резкости, появление деталей строения (схема)

Фракталы – двойной взгляд на объект. Объект виден целиком, как Единое, и в деталях, как Многое, своего строения (структуры) и окружения (внешних связей). Обычно эти два взгляда изучаются в физико-математических науках раздельно. Фрактальность возникает при одновременном восприятии /измерении/ изучении/ моделировании в двух режимах – как целого объекта, так и его строения сразу на нескольких масштабах (в пределе – во всех масштабах). Этому взгляду соответствует основная пара теорий – механика сплошной среды и статистическая физика.

5. ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ АСИММЕТРИЯ В ПРИРОДЕ И ФРАКТАЛЫ

Мы всегда наблюдаем объекты как бы двумя способами. Первый – мы видим его целиком, выделенным из окружения (рис. 4). Второй – мы можем различать в его строении детали, части, скопления молекул, атомов. Эти части, в свою очередь, при увеличении разрешающей способности наблюдения предстают как составные. И так далее. В зависимости от природы вещества подобный процесс может продолжаться

более или менее длительным образом. Тем самым перед взором предстает картина чередования целостности и дискретности, непрерывности и делимости, рассеяния и концентрации.

Рис. 4. Типичный фрактал

В данных всех естественных наук можно обнаружить эти два процесса, которые известны под различными именами: конвергенция и дивергенция, энтропия – негэнтропия, диспергирование – коагуляция, диффузия – агрегация, сгущение – разрежение, гомогенизация – дифференциация. Их совместное проявление и дает картину делимой материи, делает возможным наблюдение с различной разрешающей способностью.

Конвергенция создает плотные объекты, это путь снизу вверх. Дивергентные процессы – измельчают, дробят, рассеивают их – это путь сверху вниз. И по данному образцу материала невозможно сказать как он был образован – то ли конвергентными, то ли дивергентными процессами. Эта пара процессов геометрически изображена как сходящиеся стрелки к вершинам и как расходящиеся (рис. 5).

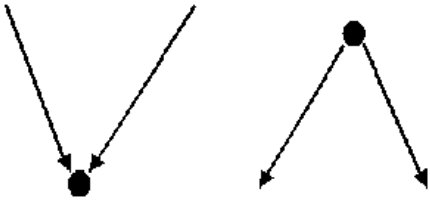


Рис. 5. Конвергенция – дивергенция

Такая ситуация известна как морфологическая симметрия – они тождественны по геометрии – и функциональная асимметрия – они противоположны по действию. Причем каждый из этих процессов яв-

ляется условием существования другого. Непрерывность есть условие осуществления делимости, делимость – предпосылка непрерывности. Эта универсальная пара образует универсальную же геометрию – фрактальную геометрию природы. Её известные образы – усечённые, физические фракталы. Дивергентные процессы ведут к все более диспергированным средам, конвергентные – к плотным объектам. В конвергентных объектах можно различить составную дивергентную структуру, дивергентные объекты состоят из плотных частиц. Инвариантом является физическая ситуация – тела, окружённые полями и содержащие поля внутри себя. Такими примитивами являются, например, атом – ядро, окружённое электронной оболочкой, клетка – ядро, погружённое в протоплазму. В теории это детерминированное описание, сопряжённое с необходимостью учёта флуктуаций, случайных возмущений.

Поэтому природные объекты имеют неправильные, негладкие формы и очертания – каждый участок, каждая линия видятся составными. Это и есть фрактальная геометрия – инвариант действия пары универсальных природных процессов. Действие только одного дивергентного процесса приводит к точным фракталам – нульмерным множествам, то есть объектам, которые не имеют никаких физических свойств – они невидимы и потому необнаружимы для прямых измерений.

Тем самым фрактальное пространство как бы содержит в себе возможности реализации технологии создания материалов. Дивергентные процессы являются причинностью «сверху вниз», конвергентные – «снизу вверх». В настоящее время эти способы остаются вне поля формальной теории и принадлежат экспериментальной науке, поскольку, как было отмечено выше, делимость не входит в число движений, допускаемых теоремой Гельмгольца.

Отдельно рассмотрим вопрос о свойствах материалов. Нетрудно видеть, что с увеличением уровня разрешения наблюдения, т.е. уменьшением размера частиц материи, меняются ее свойства. Тем самым координата размера выделяется как отдельная степень свободы в исследовании материалов. При движении вещества по ней происходит изменение его свойств от механических, упругих, молекулярных, атомных до квантовых. Эти явления отражаются в теории различными на-

званиями параметров – размерностями физических величин, различными уравнениями. Поэтому координата размера – это еще и координата свойств частиц материи, внутренняя степень свободы вещества.

В данном образце при фиксированных условиях проявляются сразу несколько масштабов, диапазон размеров и свойств, которые, очевидно, принадлежат к различным областям теоретической науки. В этом и заключается вся сложность теории материи и соответственно технологии материаловедения. Иными словами, проблема части и целого в материаловедении является двумерной по смыслу. В ней выделяются две линии – числовая и качественная, которые, к тому же, оказываются взаимосвязанными.

6. ФРАКТАЛЫ: ЭМПИРИЧЕСКОЕ РАССМОТРЕНИЕ

Фракталам как делимой, фрагментированной материи в математике соответствуют такие же делимые фрагментированные множества. Тонкодисперсная материя имеет аналог в виде разрежённых, нульмерных по терминологии математики, множеств. Как оказалось, универсальности фракталов соответствует известная в математике универсальность нульмерных множеств.

Объекты и формы, которые привычно описываются гладкими функциями, при ближайшем рассмотрении являют собой нерегулярные, пористые, гранулированные, сетевые структуры, которые при увеличении разрешающей способности наблюдения не сводятся к гомогенным, однородным образам. Поэтому поведение физических величин на них отличается неоднозначностью и ограничено, как правило, определёнными пространственно-временными рамками.

Пример 1. Рассмотрим, например, измерение какой-либо удельной величины (плотности) вещества [11, p.8]. Мы выделяем физически бесконечно малый объем V массы m в материале и подсчитываем плотность $\rho = \dfrac{m}{V}$. Положим $V \to 0$.

Нетрудно понять как плотность будет вести себя. Область $\Delta = x_1 - x_2$ – это область так называемой промежуточной асимптотики, где имеет смысл пользоваться ρ как физической величиной (рис. 6). В области

$V < \Delta$ сказывается атомно-молекулярная структура, и соответствующие уравнения или соотношения, содержащие плотность массы, попросту теряют смысл.

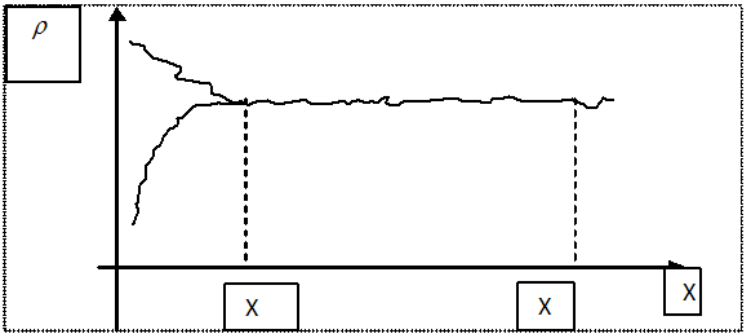


Рис. 6. Промежуточная асимптотика

Пример 2. (образование форм). Как мы выяснили, материальные объекты могут образовываться двумя путями, двумя совместно действующими причинами *conv – div*, «сверху вниз» или «снизу вверх». Как заметил С. Улам, разлет частиц при делении и/или слияние их при уплотнении, то есть в конвергентном процессе, почти всегда будут происходить по негладким, недифференцируемым траекториям. Столь же нетипично то, что, сталкиваясь, частицы будут разлетаться, в дивергентном процессе, по гладким траекториям, что было замечено первооткрывателем броуновского движения Перроном (рис. 7). В итоге путь частицы в среде, окруженной другими частицами, выглядит поразному при различных увеличениях – гладкая траектория при одних временных масштабах наблюдения при их уменьшении становится изломанной, точно так же как появляются новые детали при наведении резкости.

Тем самым естественное образование непрерывных линий форм и траекторий движения порождает изломанные, негладкие, недифференцируемые функции. Этот факт имеет точное соответствие в математике – теорема Банаха-Мазуркевича утверждает, что «почти все непрерывные функции оказываются «недифференцируемыми». Гладкость и

дифференцируемость есть исключительное явление как в природе, так и в математике – контрматематическая, казалось бы, природа естественных объектов на самом деле является типично математической.

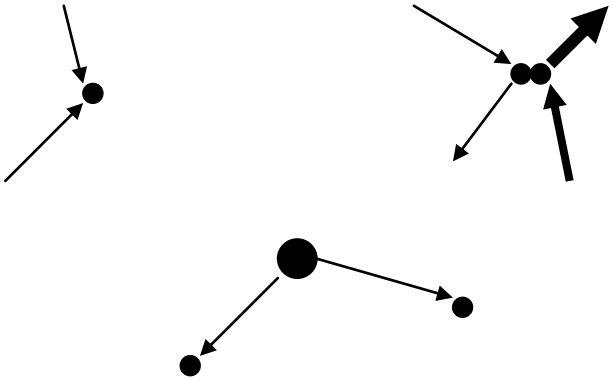


Рис. 7. Траектории частиц. Динамическая природа фрактальной геометрии

Поэтому физические величины, параметры и функции содержат в себе множества иррегулярностей, особых точек, разрывов производных, роль которых нарастает при увеличении разрешающей способности и которые меняют свой физический смысл на разных масштабах. Так, например, плотность массы или заряда переходит в плотность распределения вероятностей. Объемы переходят в поверхности, поверхности – в линии, линии – в точки. Поэтому для естественных объектов имеют точный смысл такие метафоры как «вспенённый объем», «поверхность, состоящая из поверхностей», «толстые линии», «кластеры» вместо материальных точек, твёрдых тел, поверхностей раздела. Иными словами на макроуровне фрактал – это тело, на мезоуровне фрактальный объём совпадает со своей поверхностью, а в пределе деления/квантования – с элементарными частицами.

Включив образование форм в причинную атмосферу процессов дивергенции – конвергенции, мы тем самым неявно включаем в рассмотрение свойств материи взаимодействия, окружающую среду и/или внутреннюю структуру и динамику тел, объектов и процессов. Это значит, что мы оказываемся в области нестационарности, «вдали от равновесия». Естественные фракталы дают многочисленные примеры,

подтверждающие эту точку зрения. Рассмотрим типичную береговую линию, один из популярных примеров фрактальной геометрии.

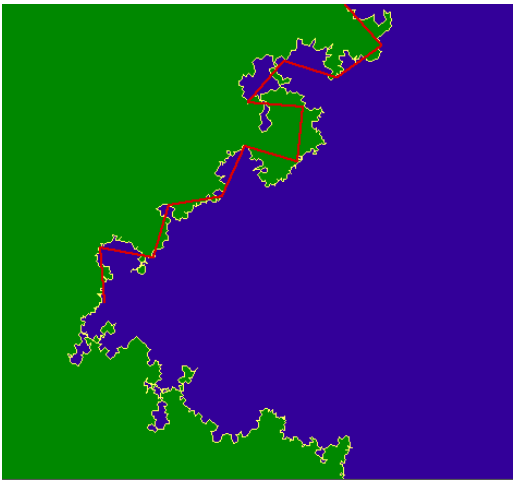


Рис. 8. Типичная береговая линия

Мы видим крайне изломанную траекторию как линию раздела двух взаимодействующих сред – моря и суши. Если мы отвлечемся от географического смысла рисунка, то перед нами окажется граница раздела двух фаз – просачивания, перемешивания одной фазы в другую. Эта промежуточная область и есть область фракталов, или как её называют «границей или лезвием хаоса». На следующем рисунке показана более развитая картина.

Рис. 8.1. Лезвие хаоса

Как было установлено многочисленными исследованиями в материаловедении, видимые, физические фракталы, есть следы нестационарных процессов взаимодействия, то есть имеют динамическую природу [19].

Тем самым фрактальная материя является порождением процессов взаимодействия, в которых участвуют механическое движение вместе с универсальной парой формообразующих процессов *conv-div*, создающих её «снизу вверх» и «сверху вниз». Следовательно, реальные материалы существуют на границе хаоса и поэтому бинарность их строения естественна. Широко известные математические фракталы и методы исследования их свойств в том виде, как они преподносятся в руководствах, оторваны от этой картины взаимодействий. Поэтому их значение для практики материаловедения ограничено.

Нетрудно понять, что получится, если дополнить постоянное действие сил *conv* – *div* процессами механических перемещений. Траектории этих трёх причин образуют сеть, узлы которой в свою очередь должны рассматриваться (под увеличением) как кластеры, то есть составные, представляющие собой такие же сети. Это пространство называется масштабно-инвариантной сетью *(scale-free network- англ.)* или деревоподобной решёткой (рис. 9).

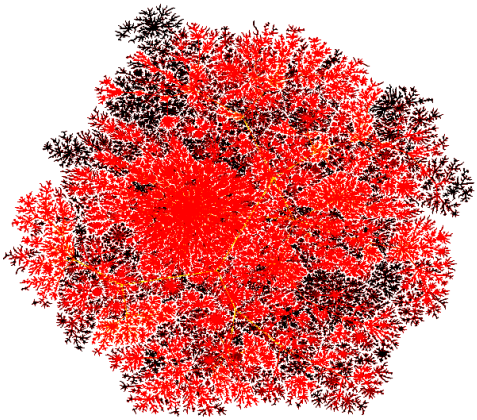


Рис. 9. Масштабно-инвариантная сеть. Общий вид

В этом пространстве точки являются кластерами, которые, в свою очередь, представляют из себя масштабно-инвариантные сети

(рис. 10). Наиболее известный пример – сеть Интернет. Аббревиатура WWW – «всемирная паутина» имеет также смысл Worlds Within Worlds – «миры внутри миров».

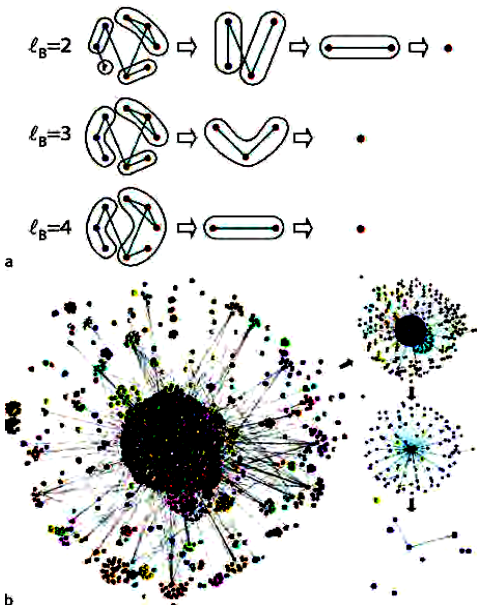


Рис. 10. Масштабно инвариантная сеть. Образование кластеров
(Meyers R.A. *Encyclopedia of Complexity and Systems Science*. Springer, 2010)

В сложных гетерогенных средах ей соответствуют случайные графы. В теории конденсированной материи – графы Кэли, решетки Бравэ. Сети продолжают универсальность фракталов в физике на геометрию взаимодействия и, в теории, на информатику. Они являются универсальными вычислительными структурами, эквивалентами машин Тьюринга и клеточных автоматов и составляют один из разделов «цифровой философии» с её идеей программируемой материи [20]. Сегодня эта парадигма представлена нейрокомпьютерами, нейросетевой идеологией моделирования.

Сети являются столь же вездесущими, как и фракталы. Они появляются в физике, биологии, социальной сфере, экономике [21].

Представим себе, что мы поместились в такой сетевой мир, то есть включили внутреннюю координату размера в описание простран-

ства и материи. Что может происходить с кластером фрактальной, то есть делимой, материи? В зависимости от его природы вещества возможны следующие движения:

- перемещение по дугам как целое, механическое движение;
- деформация, изменение структуры и формы;
- движение вглубь, диспергирование, квантование с изменением свойств;
- движение вверх и слияние с другими кластерами, рост и захват;
- уплотнение слиянием элементарных частиц, рождение;
- рассеяние материи излучением элементарных частиц.

Тем самым мы на качественном уровне, используя данные физики, смогли увидеть возможные трансформации материальных образований, расширив теорию Гельмгольца процессами, которые специфичны для химической науки – изменение свойств, потеря и захват электронов, изменение структуры и топологии, рост и т.д.

В этом, собственно, и заключается фрактальный способ наблюдения: видеть объект в двух режимах – глазами и руками как целое и «вооружённым» умом, теоретически – как части и взаимодействия, т.е. как составленным парой *conv* – *div*. Фрактальный объект можно уподобить учебнику физики, который человек держит в руках. Закрытый – он является предметом с механическими свойствами. Открытый – погружает в пространство свойств материи. В этой двойной оптике мы и будем изучать фракталы применительно к материаловедению в отличие от прямого применения физических теорий к фрактальной геометрии реальных материалов.

7. ФРАКТАЛЫ И НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА

Мы описали выше эмпирический, опытный путь, каким можно прийти к объяснению феномена и свойствам фрактальной геометрии. Существует два теоретических источника этой идеи – нелинейная динамика и теоретическая информатика. Оба этих источника являются двумя полюсами нелинейности. Коротко их опишем с целью выявить то общее, что их объединяет.

Нелинейные зависимости – уравнения, динамические системы, давно известные в математике и представляющие собой богатейшую область. Ее даже называют границей между искусством и наукой из-за красоты образов, которые порождаются ею [22]. Нелинейные зависимости – это процессы с обратной связью, или автореферентные процессы. Их общий вид:

$$x = F(x, c),$$

где c – параметр.

Этим зависимостям соответствуют логические формулы:

$$(x = A) \wedge (A = F(x, c)) \quad \Leftrightarrow \quad A \wedge \neg A$$

здесь знак $\neg$ означает отрицание утверждения A.

Последняя формула является логическим выражением антиномии материи и известна как отрицание закона исключенного третьего. Для теории фракталов именно здесь начинается логика, здесь возникают вычислительные проблемы и теоретические перспективы.

Из этих зависимостей получаются так называемые рекуррентные итеративные зависимости, общие физике, теоретической информатике и логике:

$$x_{n+1} = F(x_n, c) \qquad x_0 = a \qquad c, a = \text{const}.$$

Результатом этой динамики является последовательность точек, множество на оси OX или в плоскости XOY:

$$M = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\},$$

которое проявляет свойства, характерные для фракталов и хаоса. Различные виды функции $F(x, c)$ дают различные фрактальные образы. Рассмотрим примеры. Каждый из них имеет большую литературу в нелинейной динамике и теории хаоса.

1. Множество Мандельброта (рис. 11) (*Mandelbrot set – англ.*)

$$x_{n+1} = x_n^2 + c,$$

где x, c – комплексные числа.

Это множество является одним их самых сложных в математике и послужило Р. Пенроузу мотивом для формулирования гипотезы о существовании нерекурсивной, то есть невычислительной ветви математики.

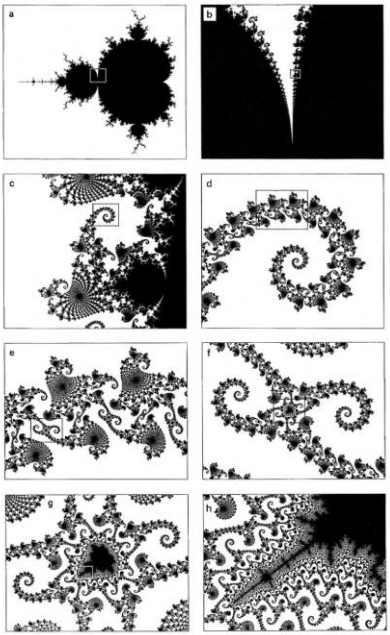


Рис. 11. Множество Мандельброта на нескольких масштабах

2. Модель роста популяции – уравнение Ферхьюлста. Логистическое уравнение (*Logistic equation – англ.*)

Пусть x_0 – начальная численность популяции, x_n – ее численность через n лет. Если R – коэффициент прироста, зависящий от численности x_n, т.е.

$$R = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n} \text{ и } R = r(1 - x_n),$$

где r – константа, то динамика численности примет вид:

$$x_{n+1} = (1 + r)x_n - rx_n^2.$$

Как показывает анализ поведения этой траектории, оно весьма сложно и сильно зависит от r. Оно известно как сценарий перехода к хаосу путём «удвоения периода», хорошо исследовано и имеет богатую литературу ввиду широкого спектра приложений логистического уравнения (рис. 12).

В материаловедении такой оказывается динамика растворения оксидов [23].

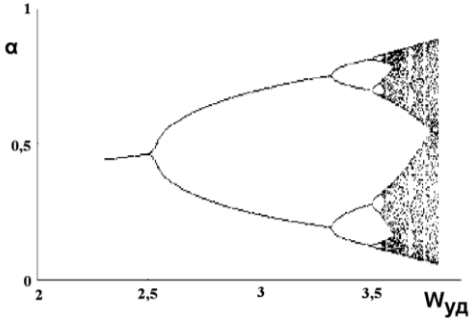


Рис. 12. Удвоение периода. Логистическое уравнение

3. Модель Лоренца в метеорологии (рис. 13) (*Lorentz attractor – англ*)

Это исторически первая модель, в которой было обнаружено существование хаоса. Она представляет собой систему простых нелинейных уравнений. В настоящее время она используется как основа подхода к описанию явлений в конденсированной среде [24].

$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x) \\ y' = \rho x - y - xz \\ z' = -\beta x + xy \end{cases}$$

где σ, ρ, β – управляющие параметры

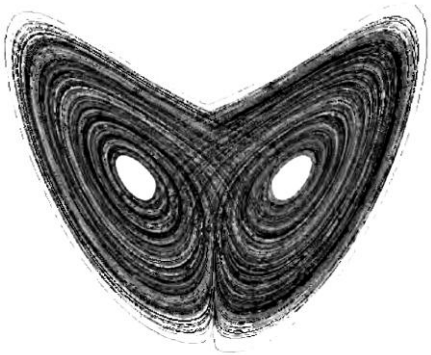


Рис. 13. Аттрактор (бабочка) Лоренца (*Nikkiel S. Iterated Function Systems for Real-Time Image Synthesis*. Springer, 2007)

4. Отображение «треугольник» (рис. 14) (*binary tent map-англ.*)

$$Z_{n+1} = \begin{cases} aZ_n & Z_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ a(1 - Z_n) & Z_n \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Это отображение тесно связано с аттрактором Лоренца. Оно является графиком его максимумов. Как самостоятельная нелинейная зависимость оно также приводит к фрактальному распределению точек на оси.

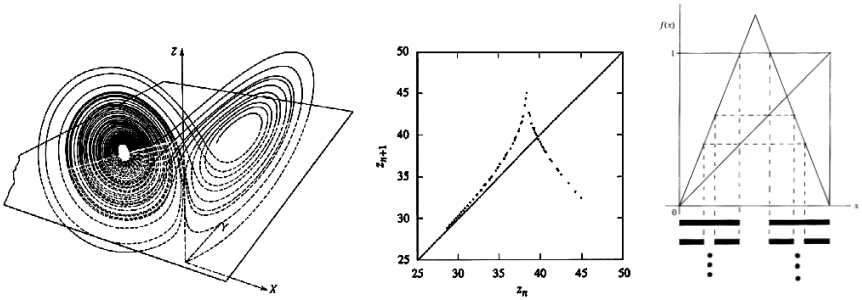


Рис. 14 Отображение «треугольник»

5. Двумерное диссипативное преобразование пекаря (рис. 15) *(baker's transform-англ.)*

$$\left.\begin{matrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{matrix}\right\} = \begin{cases} 2 \cdot x_n \\ a \cdot y_n / 2 & x_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 2 \cdot x_{n-1} \\ a \cdot y_n + \frac{1}{2} & x_n \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

a – параметр

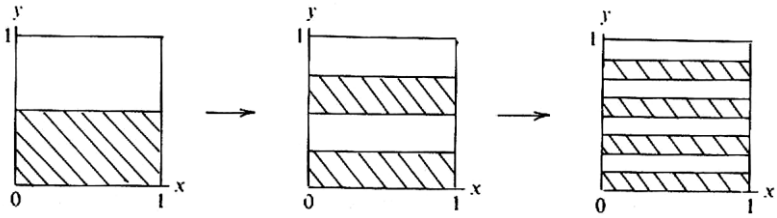


Рис. 15. Преобразование пекаря

6. Сдвиг Бернулли (Bernoulli shift-англ.)

$$x_{n+1} = 2x_n \pmod 1$$

$$x_{n+1} = \begin{cases} 2nx_n & 0 \le x_n \le 1/2 \\ 2x_{n-1} & 1/2 \le x \le 1 \end{cases}$$

Представляет собой одномерный вариант преобразования пекаря.

7. Множество Кантора (рис. 16) (*Cantor set – англ.*)

Оно образуется вырезанием средних третей их единичного интервала на оси *OX*. Это множество часто упоминается в связи с фрактальной природой материи.

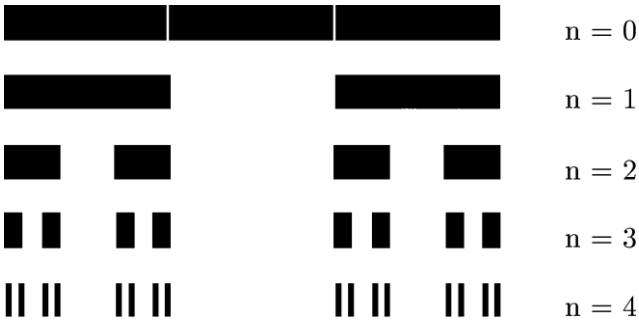


Рис. 16. Канторово совершенное множество С

Общим свойством этих и других динамических систем является то, что они фрагментируют начальное фазовые пространства, т.е. действуют «сверху вниз», порождая фрактальное их распределение. Это так называемые диссипативные динамические системы. Все они моделируются движениями строк символов, бесконечных в обе стороны, которые известны как сдвиг Бернулли:

$$a = \ldots a_{-n} a_{-n+1} a_{-n+2} \ldots a_{-1} a_0 a_1 a_2 \ldots a_m \ldots,$$

которые кодируют фрагментацию множества. Формальной особенностью этой модели является то, что в пространстве бесконечных в обе стороны строк строки конечной длины кодируют ограниченный диапа-

зон масштабов. Их движение существенно различно в зависимости от того, происходит оно вправо или влево. Вправо они действуют конвергентно, моделируют увеличение порядка, влево – включают дивергентные процессы, происходит увеличение неопределённости. Это явление подробно рассмотрено И.Пригожиным с точки зрения наведения моста между динамикой и термодинамикой [25].

Если априори принимать фрактальную структуру материи, то пространство строк представляется более подходящим кандидатом на роль пространства процессов материальных превращений, нежели евклидово. В этом пространстве естественным образом возникает координата делимости, при движении по которой происходит изменение размера материальных образований. Это и есть та область, в которой нелинейная динамика пересекается с формальными языками теоретической информатики. Пространство строк является основным в этой науке.

Здесь возникает задача, не решенная до сих пор – возможно ли по данному состоянию материи восстановить динамическую систему, которая порождала бы ее? В этом случае оказалось бы возможным привлечение мощного аппарата теории динамических систем. Однако проблематичность прямого использования нелинейной динамики в материаловедении заключается в различии исходных теоретических позиций. Нелинейные зависимости принадлежат аксиоматической математике, которая исключает координату делимости, а задачи технологии материалов начинают с объектов, то есть множеств, в которых делимость является существенной степенью свободы.

Как было показано многочисленными исследованиями, идея нелинейности через фрагментацию фазового пространства ведет от классических моделей консервативных систем ньютоновой механики через статистические зависимости и диссипативные системы термодинамики к дискретным моделям – клеточным автоматам и, далее, к формальным языкам теоретической информатики [26].

Поскольку теоретическая информатика не относится к традиционно изучаемым дисциплинам цикла физико-химических наук, сделаем небольшое отступление и остановимся на её значении для дальнейшего изложения.

8. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ИНФОРМАТИКА – СВЯЗЬ С ФРАКТАЛАМИ

Перенося рассмотрение из евклидова пространства в фрактальное, мы оказались в пространстве теоретической информатики. Это пространство, называемое доменами, и теории, основанные на них *(domain theory-англ.)*, явилось ответом на неадекватность евклидова континуума для рекурсивных и нелинейных процессов, которые, как мы видели, порождают бесконечное фрагментирование как материи, так и фазовых пространств. Поэтому представляется логичным в этом случае не игнорировать теорию доменов, а воспользоваться теми ее результатами, которые на сегодняшний день могут быть приобщены к задачам материаловедения.

Основным пространством компьютерных наук и методов является канторово совершенное множество C – множество двоичных строк произвольной длины, то есть имеет фрактальную природу. Этот факт составляет содержание математической универсальности компьютеров – пространство состояний компьютера теоретически есть пространство всех бинарных строк, то есть C.

Теориями информатики являются формальные языки. Формальный язык состоит из алфавита – множества символов, слов – конечного числа символов алфавита, и собственно языка – конечного или бесконечного множества слов, состоящих из символов алфавита. Объединение символов в слова и слов в язык происходит по определённым правилам, различие между которыми и определяет свойства и выразительные способности языка.

К формальным языкам относится вся логическая и вычислительная техника математических теорий и методов. Множества истинности и значений их выражений являются типичными и разнообразными фракталами. Поэтому неразрывная связь фрактально-хаотических образов с вычислительными процедурами закономерна и отражает существо дела. Фрактальность этих процедур основана на явлении языковой номинации или формально-языковой определимости. Увеличению числа итераций в нелинейных зависимостях, приводящих к продолжающейся фрагментации пространства, сопутствует увеличение длины

строк – формальных выражений, определяющих их положение в иерархии. Это удлинение и есть аналог удлинения/уточнения формальной определимости.

Сегодня теоретическая информатика вышла далеко за пределы вспомогательной дисциплины. В её рамках построены аналоги физических теорий и методов, которые вносят новое понимание явлений. В этой науке разработаны различные техники представления реальных объёмов, тел и поверхностей различной сложности. Эта та часть теории материи вообще, которая полностью отсутствует в гладкой математике, где, как например в механике сплошной среды, объёмы тел и сред считаются заданными. Благодаря информатике можно изучать объект одновременно как целое и как структуру из своих составных частей. В этом её теоретическое преимущество по сравнению с классической математикой – она «видит» объект в оптике проблемы Единое-Многое.

Новыми и так же важными являются логические проблемы, которые обычно опускаются в физико-химическом образовании в пользу дифференциальных уравнений и считающих методов (см. Приложение 1) [27].

Теоретическая информатика служит вторым источником порождения фрактальных фигур и объектов. Здесь работают оба принципа «сверху вниз» и «снизу вверх». «Сверху вниз» информатика кодирует нелинейную динамику. В основе информационного алгоритмического подхода «снизу вверх» к построению геометрических подобий образов фрактальных природных объектов послужила аналогия между формальными языками и древовидной геометрией растений.

8. Примеры порождения фракталов «снизу вверх»

L-системы. Наиболее известны *L*-системы (по имени биолога А. Линдемайера), которые используются для описания роста биологических объектов: деревьев, растений, органов человека, колоний микроорганизмов и неорганических материальных объектов, в которых угадывается древовидная и сетевая структура. Если модели нелинейной динамики создают фракталы делением, то есть квантованием, диспергированием исходного материала, то *L*-системы создают их посред-

ством генерации событий – ветвлением, слиянием. То есть действуют в обратном направлении, с противоположного конца плотности объектов.

L-системы представляют собой тройку:

$$L = (A_x, A_l, P),$$

где A_x – аксиома, начальный объект (клетка, исток, зерно); A_l – алфавит, геометрические шаблоны, которые формируют образ; P – продукции, правила, определяющие формирование последовательности строк, составленных из элементов алфавита.

В итоге последовательность целостного образования выглядит как на рис. 17.

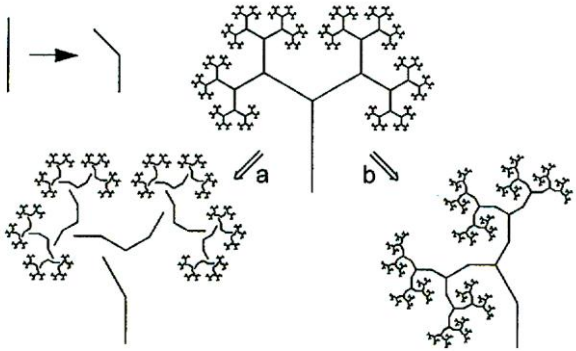


Рис. 17. Действие *L*-систем

Разнообразие *L*-систем наследует разнообразие формальных языков, которое лежит в их основе – иерархии Хомского. Две основные группы языков составляют регулярные, контекстно-независимые и контекстно-зависимые. В регулярных формирование строк не зависит от окружения символа и определяется только предварительно заданным правилом. В контекстно-зависимых выбор правила зависит от ближайших соседей символа. Этой группе соответствуют процессы с памятью в физике.

Также возможны варианты детерминированных *L*-систем, где выбор правила однозначен, и недетерминированных, со случайным выбором правил формирования. Существуют две большие разновидности этой техники – последовательные и параллельные процессы.

Обобщением L-систем является конструктивная геометрия тел, которая представляет собой четверку, первые два члена которой те же, что и у L – систем.

Const. Solid Geom. = (A_x, A_l, P, B),

но здесь в определении языка появляется B набор логических булевых операций, определяющих возможные композиции преобразований. Набор правил P также расширяется. Часто синтаксические правила дополняются правилом геометрических преобразований или движений в пространстве.

Приведём примеры физических процессов, порождающих (пред)фрактальные образования. Они могут рассматриваться как физические варианты компьютерного порождения и агрегации событий по принципу «снизу вверх».

9. Фрактальное (дробное) броуновское движение – *fBM*

Дробное, фрактальное броуновское движение есть по сути дела воспроизведение многократного столкновения – разлёта частиц, которое является воплощение процессов конвергенции – дивергенции (см. выше).

Основными предметными моделями, основанными на fBm, являются диффузионно-ограниченные агрегации DLA и реакционно-ограниченные агрегации RLA.

10а. Агрегация, направляемая диффузией – DLA, diffusion-limited aggregation

Процесс создания/моделирования заключается в порождении частиц различной формы и размера, которые затем начинают двигаться в пространстве броуновским образом с различными параметрами смещения и дисперсии. Начальная структура неподвижна. Блуждая вокруг нее, частица может либо примкнуть к ней, либо уйти из области насовсем. Прилипшие частицы формируют разрастающуюся клетку – агрегат (рис. 18). Для включения этого процесса часто используется уравнение Лапласа второго порядка.

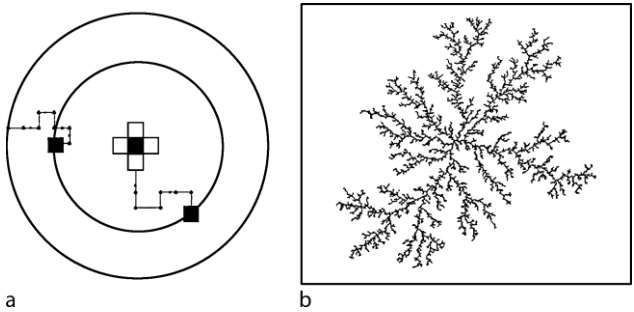


Рис. 18. Образование DLA кластера

10б. Агрегация, направляемая реакцией – RLA, reaction-limited aggregation

Механика этого процесса аналогична DLA, только процесс движения-прилипания управляется химическими параметрами. Он обусловлен природой химической связи между молекулами, участвующими в реакции, стереохимическими ограничениями, энергетикой реакции.

Теория подобных процессов не поддается систематическому описанию из-за крайне сложной геометрии поверхностей. Поэтому геометрия является, по сути, отдельным независимым параметром в лабораторных и промышленных экспериментах. В реальных условиях, как правило, присутствует целый спектр различных форм поверхностей и/или их дефектов. Это многообразие порождает спектр свойств материалов, участвующих в процессе. Будучи внутренним параметром, геометрия не поддается описанию классическими методами – исчезает при усреднении или каком-либо виде анализа.

Практически можно говорить лишь о зависимости числа свойств материалов и/или особенностей реагирующих поверхностей от уровня наблюдения/масштаба измерения [28]:

$$\textit{число свойств} \approx \textit{масштаб}^{\,D},$$

где D – фрактальная размерность процесса (см. ниже).

Поэтому число исследуемых свойств является функцией методов и техники измерений, характера взаимодействия двух сред с фрактальной зоной контакта. Одномасштабное и узкоспециализированное измерение и описание теряют смысл.

Исходная модель RLA А.Тьюринга (1952 г.) реакции-диффузии двух веществ: активатора A и ингибитора I выглядит следующим образом:

$$\frac{dA}{dt} = F(A, I) + D_A \nabla^2 A + j_A,$$

$$\frac{dI}{dt} = G(A, I) + D_I \nabla^2 I + j_I,$$

где A, I – концентрации активатора и ингибитора; F, G – функции кинетики реакций; ∇^2, A, I – диффузионные члены; $j_{A,I}$ – производство (источники и стоки) веществ.

Для заданного начального распределения эта система может порождать различные паттерны / структуры. Она легла в основу теории диссипативных структур И. Пригожина.

В итоге теория материи располагается на шкале плотности или, что то же, размеров частиц, между абсолютно твердыми телами теоретической механики и безмассовыми, нематериальными формальными языками теоретической информатики, нульмерными пространствами символической динамики.

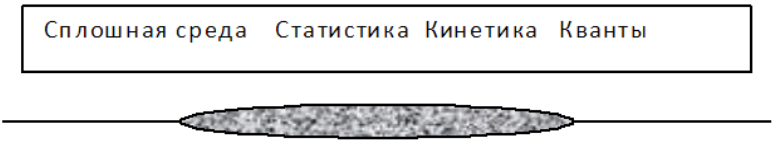


Рис. 19. Материя в диапазоне размеров

В ней одновременно зафиксированы следы двух базовых процессов: «сверху вниз», то есть диспергирование, квантование, диффузия, измельчение, и «снизу вверх», или агрегация, коагуляция, ветвление, рост. Соответственно набор инструментов исследования ее свойств включает традиционные теории статистической физики, вероятности и формальных языков.

В этой картине не участвуют специфические химические теории связи, сродства, периодический закон Менделеева. Это является общим изъяном математических методов физики и геометрического подхода

фрактальной теории. Возможно, дело в том, что периодический закон Менделеева является единственным законом природы, не имеющим математического выражения.

Рис. 20. Геометрия вязких пальцев и диэлектрического пробоя

По всем этим вопросам имеется обширная литература [29].

9. КЛАССИКА ФРАКТАЛОВ: ФИЗИКА И ИНФОРМАТИКА

Рассмотрим структуру теории фракталов, объединив два ее истока – физику и теоретическую информатику.

Потребности практики вызывают нужду в числовых характеристиках фрактальных объектов. Поэтому речь в первую очередь должна идти о способах измерения и получения их физических характеристик.

Фрактальные объекты условно можно разделить на два класса: статические и динамические. Статические – это формы распределения вещества: текстуры и структуры материалов любой физико-химической природы. Динамические – это траектории движения частиц, которые являются вариантом броуновского движения: линии тока жидкости и газа (чаще всего при турбулентном режиме), движение малых частиц в сложных, гетерогенных и пористых средах, а также колебания цен на биржах, кардиограммы, энцефалограммы и иные показатели деятельности органов.

Большое количество примеров обоего рода доставляют физико-химические процессы, медицинская томография, рентгеноструктурный анализ веществ, данные аэрофотосъемки, геодезические исследования.

Как статические, так и динамические фракталы в измерениях предстают как чисто геометрические объекты, расположенные в евклидовом пространстве. Измерения фракталов следуют основному принципу в математике – приближать сложные вещи последовательностью простых, эталонных, иррегулярные – регулярными с последующим переходом к пределу. В качестве регулярных эталонов меры используются отрезки, квадраты и диски, кубы и шары в зависимости от размерности объемлющего пространства.

В основе этого процесса измерения лежит так называемая аксиома Архимеда, или принцип исчерпания, которая гласит, что любой отрезок на числовой оси может быть покрыт, то есть измерен, процессом сложения необходимого количества отрезков любой наперёд заданной меньшей длины. В двух и трехмерном случае процесс измерения считается завершённым, если установлено взаимнооднозначное соответствие между множеством, которое получено комбинацией эталонов и измеряемым объектом.

Для фракталов принцип исчерпания в своём начальном варианте оказывается недостаточным. Специфика измерений фрактальных форм заключается в том, что эти последовательности сложения эталонных длин нужно организовывать по двум «логически ортогональным» направлениям – «вширь» по евклидову пространству и «вглубь» по внутренней координате размера делимости вещества. Тем самым исходный объект воспроизводится как нарастающий каскад копий эталонов. Теоретически, в пределе, эта последовательность исчерпывает поведение геометрии объекта и может быть сведена к одному числу, искомой его характеристике. Неформально говоря, измерение фрактала в евклидовом пространстве аналогично извлечению ценной породы из руды и установлению её процентного содержания.

Основными числовыми характеристиками фрактальных объектов являются их мера Хаусдорфа и фрактальная размерность Хаусдорфа – Безиковича.

Рассмотрим для начала измерение обычных объектов. Мера – это формальный способ превращения геометрического объекта в распределение некоторой физической величины, площади, объёма, заряда, плотности или концентрации вещества и т.п. При этом каждой точке геометрического множества – носителя физического свойства тем или

иным образом приписывается число, равное величине данного свойства. Полученное множество значений этого свойства, распределённое по геометрии объекта, представленное функцией, и называется его мерой. Меры представляются функциями от координат точек этого множества.

Меры эталонных единиц измерений задаются. Мера отрезка линии длиной ε μ_1 пропорциональна ε, $\mu_1 \propto \tilde{n}_1 \cdot \varepsilon$. Для квадратного участка плоскости $\mu_2 \propto \tilde{n}_2 \cdot \varepsilon^2$, для плоского круга $\mu_2 \propto \pi \cdot r^2$, для трёхмерных куба и шара $\mu_3 \propto c_3 \cdot \varepsilon^3$ и $\mu_3 \propto \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$. В принципе возможно задание иных геометрий эталонных мер, но эти стандартные являются общепринятыми. В общем случае мера множества имеет вид

$$M = N_\varepsilon \cdot \varepsilon^n = c_n \cdot \varepsilon^{-n} \cdot \varepsilon^n = \text{const},$$

где N_ε – число эталонов размера ε, порывающих множество; n – его топологическая размерность $n = 1, 2, 3$ для линии, плоскости или объёма.

В качестве примера рассмотрим измерение участка поверхности произвольной, но гладкой формы. Для этого будем покрывать участок эталонами различной топологической размерности. При покрытии поверхности линейными эталонами, получим

$$M = c \cdot \varepsilon^{-2} \cdot \varepsilon^1 \propto c \cdot \varepsilon^{-1} \to \infty \quad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

Измерение кубическими эталонами даёт

$$M = c \cdot \varepsilon^{-2} \cdot \varepsilon^3 \propto c \cdot \varepsilon^1 \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

То есть линейными мерами невозможно завершить измерение поверхности, а кубические меры её «не видят». Это простейшая иллюстрация проблемы измерения фракталов – требуется совпадение топологии эталона измерения с топологией множества. Существует критический показатель степени размера эталона, при котором величина меры множества оказывается конечной:

$$M = \sum c_d \cdot \varepsilon^d = \begin{Bmatrix} 0 & d > D \\ \mu & d = D \\ \infty & d < D \end{Bmatrix}.$$

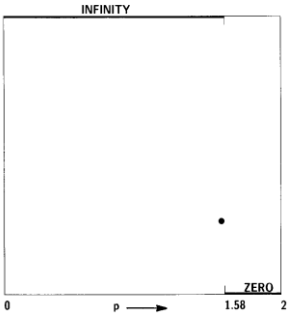


Рис.21. Размерность меры – скачкообразное поведение
(Barnsley M. F. *Fractals Everywhere*. AP, 1988)

Величина D называется размерностью меры или фрактальной размерностью. Как следует из определения, её поведение является некорректным по терминологии математической физики. И строго говоря, D не допускает никаких приближённых вычислений – ошибка в любом знаке приближения радикально меняет её величину. Поэтому теоретическое вычисление фрактальных характеристик не всегда возможно и требует дополнительных регуляризирующих предположений из теории вычислимости и представляет отдельную главу науки о фракталах [30]. На практике предельные переходы всегда обрываются конечной величиной диапазонов масштабов – скейлинга, конечной делимостью материала.

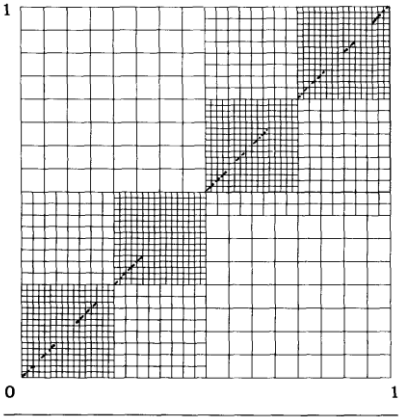


Рис. 22. Процедура измерения фрактальной размерности канторова множества C (диагональ квадрата). Уплотняющаяся сетка покрывающих эталонов представлена вложенными квадратами (Barnsley M.F. *Fractals Everywhere*. Ac.Press, 1988)

Для фракталов, которые содержат лакуны (пустоты и дыры) на всех масштабах «целочисленные» измерения оказываются неадекватными. Процедура измерения фрактальных объектов как статических, так и динамических, описанная выше, приводит к определению фрактальной размерности:

$$D = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N_\varepsilon(\varepsilon)}{\log \, 1/\varepsilon}.$$

Эта формула асимптотически эквивалентна степенной зависимости

$$N \cong \text{const} \cdot \varepsilon^{-D}.$$

Здесь D – фрактальная размерность, которая, как правило, получается нецелым числом.

За этой формулой скрыто четыре типа связей в зависимости от того, являются ли величины, входящие в эту формулу дискретными или непрерывными (и даже восьми – если учесть характер константы, но это, как правило, не отмечается в литературе). Общей природой этих формул является то, что они получаются из непосредственных измерений двух типов характеристик. Они связывают глобальную характеристику объекта с его локальными параметрами, которые появляются при том или ином способе его декомпозиции. Причём этот способ задан, как правило, самой структурой объекта, то есть обнаруживается на внутренней координате размера. Примерами таких мер могут служить соотношения:

объем – поверхность (аллометрические зависимости);

частота – амплитуда (фликкер – шум);

размер кластера – число частиц (масса кластера);

длина сигнала – частота (анализ текстовых сигналов).

Фрактальная размерность D характеризует плотность материи в объекте. Она имеет локальный характер и может изменяться от точки к точке в пределах объема вещества. Степень концентрации всего объема в объемлющем пространстве – мера разреженности вещества – дается фрактальной коразмерностью. Если N – топологическая размерность пространства, то

$$D_K = N - D.$$

Фрактальная размерность имеет множество вариантов. Стандартной является приведенная выше размерность Хаусдорфа – Безиковича. Кроме нее пользуются размерностью деления (division dimension) Булигана – Минковского, химической, реакционной. Часто показатель любой степенной зависимости, извлечённой из анализа фрактала данной физико-химической природы, трактуют как соответствующую фрактальную размерность. Все они, однако, используют тот же математический прием приближения иррегулярного множества каскадом простых эталонов.

Практически измерение фрактальной размерности осуществляется при помощи квадро-деревьев *(quadtrees)* (рис. 23). Эта техника представляет собой регулярное квантование объекта посредством организации внутренней координаты размера. Геометрический образ фрактального объекта заключается в квадрат. Далее квадрат разбивается на четыре равновеликих части. Отбрасывается те, которые не содержит частей объекта. Оставшиеся части, в свою очередь, разбиваются на четыре части каждая, из которых отбрасываются пустые. С оставшимися повторяется описанная процедура. В итоге образуется покрытие фрактала квадратами уменьшающегося размера во всё более увеличивающемся числе, то есть воспроизводится процесс вычисления размерности Хаусдорфа – Безиковича.

Рис. 23 Квадро-древесная техника
(Nikkiel S. *Iterated Function Systems for Real-Time Image Synthesis*. Springer, 2007)

Очевидным образом можно в свете нашего подхода рассматривать D как результат конкуренции двух процессов – слияние частиц в массовое образование и распад его на мелкие. Формализация этого конкурентного равновесия в подходящих терминах позволила бы расширить интерпретацию D в направлении ее связи с конкретикой процессов создания вещества с одной стороны. В терминах дифференциальных уравнений эта модель известна как модель реакции – диффузии. Для более общего случая образования материала одновременно снизу вверх и сверху вниз модели пока нет.

Роль фрактальной размерности на сегодняшний день заключается в уточнении числовых характеристик веществ и их свойств. Особенно важным в этом направлении является уточнение критических параметров процессов структурных трансформаций в неравновесных областях [24, 31].

Следующей характеристикой фрактальных структур, имеющей непосредственный физический смысл, является лакунарность *(lacunarity – англ.)* – степень «дырявости» их внутреннего пространства. Смысл лакунарности в том, что в дополнение к фрактальной размерности D как меры заполнения его объема материей она дает степень заполненности его полями. Размер лакун непосредственным образом определяет длину свободного пробега частиц и соответственно удельный вес, который играют поля в формировании физико-химических свойств материала. Она может быть различной для фракталов с одинаковыми значениями D и D_K.

Лакунарность можно вычислять различными версиями статистических методов. На каждом уровне разрешения размеры лакун могут быть определены средние величины и дисперсия их размеров и другие вероятностно-статистические параметры, соответствующие особенностям задачи [32].

Лакунарность как негатив фрактальному распределению материи также представляет собой фракталоподобный объект. В отличие от материального фрактала, который в пределе исчезает, лакунарность – растущий фрактал. Наибольший ее вес приходится на уровни с наименьшим размером частиц. Имея в виду задачи материаловедения, заметим, что сведение лакунарности к одной интегральной числовой характеристике имеет ограниченный смысл, т.к. при этом исчезает ее

полевая интерпретация как геометрии распределения физических полей в объеме материала.

Мультифракталы. Представим теперь, что объект составной – состоит из двух фракталов с размерностями $D_1 > D_2$. Тогда очевидно, что из-за иррегулярного поведения размерности меры (см. выше) процесс измерения с эталоном ε^{d_0} выделит/измерит только ту его часть, для которой $d_0 = D = \max\{D_1, D_2\}$. Этот пример можно обобщить и на композитные фракталы с размерностями

$$D_0 < D_1 < D_2 < ... < D_n .$$

Очевидно, что для полного воспроизведения структуры и свойств такого фрактала потребуется набор эталонов и процессов измерений с различными степенями d: $\varepsilon^{d_0}, \varepsilon^{d_1}, \varepsilon^{d_2} ..., \varepsilon^{d_n}$. Последовательность значений $d_0, d_1, ...d_n$ можно рассматривать как некоторую функцию f – спектр размерностей подмножеств, а весь процесс измерения задать формулой

$$N(\varepsilon) = \varepsilon^{-f} .$$

Физические и химические фракталы, появляющиеся в материаловедении, отличаются от геометрических тем, что их геометрия является носителем каких-либо свойств – электрического заряда, плотности, массы, тепло- и электропроводности и т.д. Часто распределение физической величины по геометрическому носителю описывается распределением вероятностей $P(x)$, значение которых зависит от точки. Распределение вероятностей является универсальным способом введения меры на множестве. Если выбран тот же эталон ε, что и для носителя, то

$$P(x) \sim \varepsilon^{\alpha}$$

получается аналогичная приведенной выше степенная зависимость. Точно так же, как и для геометрического носителя $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ для составных фракталов.

Теперь иррегулярность геометрии переносится на иррегулярность физической характеристики, распределенной на фракталах. Для

единообразного описания иерархической природы явления вводится производящая функция

$$\chi(\varepsilon) = \sum_i P_i^q,$$

где P_i – плотность вероятности для i-го квадрата эталона, $P_i = 0$ для пустого эталона, параметр $-\infty < q < \infty$.

Для $q = 0$ $\chi(\varepsilon) = N$ – числу эталонов меры, необходимому для покрытия носителя. Для $\varepsilon \to 0$ наибольший вклад в $\chi_q(\varepsilon)$ дает подмножество с доминирующим содержанием квадратов P_i. Изменение параметра q собирает элементы покрытия с большей плотностью физической величины:

$q \to \infty$ наиболее вероятно, плотное подмножество,

$q \to 0$ наименее вероятно, разреженное подмножество.

Тем самым спектр f_q определяет подмножество фрактала, видимое при разрешении q, т.е. с размерностью $f(q)$. Остальные части фрактала выключаются поведением хаусдорфовой меры. Внутри него выделяется доля распределенной физической величины $\alpha(q)$. В итоге число эталонов, измеряющих распределение, равно

$$N_q(\varepsilon) = \varepsilon^{\alpha_q - f(q)} = \varepsilon^{\alpha_q} \cdot \varepsilon^{-f(q)}$$

при непрерывном изменении параметра q. В итоге получается производящая функция вида

$$\chi_q(\varepsilon) \approx \varepsilon^{(q-1)D_q},$$

D_q – обобщение размерности порядка q, или

$$\chi_q(\varepsilon) \approx \int \varepsilon^{q\alpha - f(\alpha)} d\alpha.$$

Построение этой функции составляет содержание мультифрактального формализма, который так же, как фрактальная размерность, используется для построения физических характеристик материалов [Встовский Г.В. в сб. [31]].

Термодинамический формализм. Поскольку последовательное деление вещества и/или его иерархическое строение дают на каждом

этапе, уровне иерархии набор частиц, то к нему могут быть применены принципы термодинамики и статистической физики. Эта тема хорошо развита и впервые появилась как термодинамическая аналогия поведения динамических систем (в частности, сдвиг Бернулли).

Сложность ее применения на практике в том, что кодирование фрагментов материи не имеет общего рецепта и сама иерархия трудно восстановима по непосредственным данным.

В обозначениях техники мультифракталов приведем словарь «фракталы – термодинамика».

Фракталы	**Смысл в статистической механике**
код $s_i = 1001 \ldots 101$	микросостояние
n	число спинов, длина строки
$n \to \infty$	термодинамический предел
β	обратная температура
ε_j	размер частиц в единицах L $\varepsilon = \dfrac{l}{L}$
$\varepsilon_j^{\beta} = \exp\left(-\beta E_j^n\right)$	множитель Больцмана
$\sum \varepsilon_j^{\beta}$	статистическая сумма
E	энергия/спин (в микросостоянии)
W	число микросостояний
S	энтропия/спин
F	свободная энергия/спин

Здесь

$$E(s_j) = -\frac{1}{n}\ln \varepsilon_j,$$

$$W(n, E) \propto \exp(S(E) \cdot n,$$

$$\beta \cdot F(\beta)|_{\beta=0} = -K_0,$$

$$\sum \varepsilon_j^{\beta} \propto \exp(-\beta \cdot F(\beta) \cdot n,$$

$j = 1 \ldots W_k$ – индекс по микросостояниям [26 Ch.7; 33].

В заключение этого раздела отметим, что существуют аналоги фрактальной размерности, меры, вероятности и мультифрактального

формализма над пространствами строк, которые, однако, пока не нашли применения [34]. Интерпретация этих конструкций – дело дальнейшей работы.

Как видно, теория фракталов так же, как и другие науки, имеет два полюса. Одни из них представляет стремление охарактеризовать объект одним числом, одной функцией. Здесь располагаются методы вычисления фрактальной размерности и/или какой – либо интегральной физической величины.

Второй описывает фрактал как распределённый объект. Здесь типичными являются варианты термодинамического формализма и теоретической информатики. Имитация образования фракталов наподобие DLA представляет синтез этих крайностей.

Из приведенных примеров фракталов и техники их измерения видна основа конвергенции понятий физики и информатики. Она может быть представлена следующим образом. Во всех этих примерах появляется иерархическое дерево, которое является инвариантом процессов делимости и которое формирует физические параметры (см. термодинамический формализм).

Поэтому основной структурой фрактальной теории является канторово совершенное множество C и его вариации. Это множество также имеет двойной смысл. В физике это классический пример материального фрактала, а в информатике – это пространство формальных языков, строк символов. Наиболее известны и употребительны двоичные строки, составленные из нулей и единиц, основной материал всех теорий. Их универсальность, пожалуй, главное наследие кибернетики.

10. ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКОЕ ДЕРЕВО: ПЕРЕКРЁСТОК ФИЗИКИ, ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИКИ

Фрагментация материи и фазовых пространств в нелинейной динамике и структура формальных языков в теоретической информатике имеют общую геометрическую структуру бинарного лексикографического дерева. В теории фракталов оно известно как итеративная система функций *(iterated function system, IFS – англ.)* [35]. Как было показано [11], лексикографическое дерево возникает при всех нелинейных

зависимостях, генерирующих фрактальные множества. Появляются в теории также и другие, не бинарные, деревья. Но мы, имея ввиду то, что любое дерево всегда может быть отображено в двоичное или закодировано, как в компьютере, двоичными строками, ограничимся бинарным.

Если в нелинейной динамике это дерево остаётся в тени аналитических зависимостей, то в теоретической информатике оно является естественным и основным типом данных формальных языков и теорий.

Рассмотрим образование канторова множества, канторовой пыли.

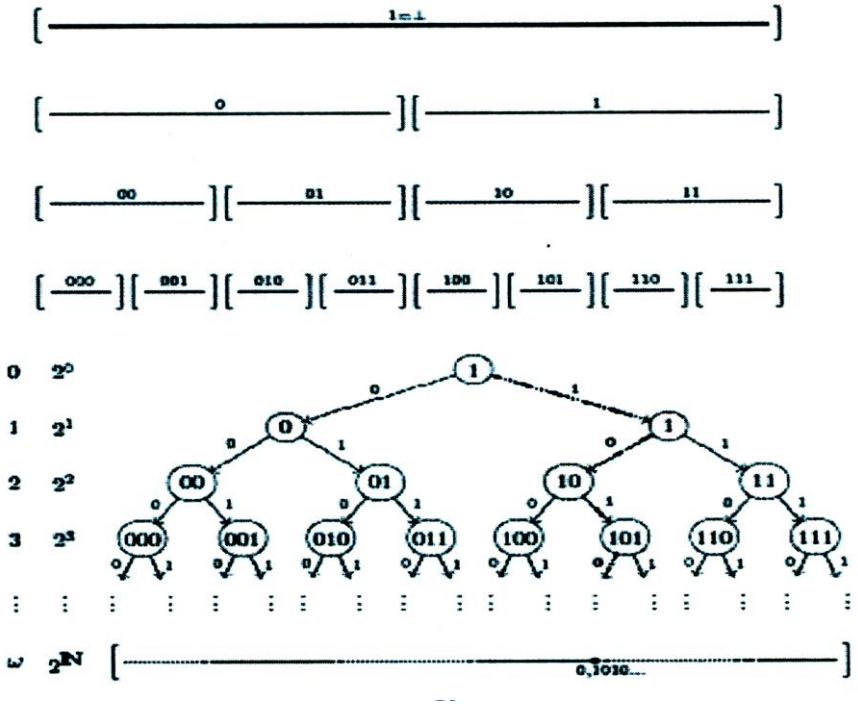


Рис. 24. Образование канторовой пыли совместно с бинарным лексикографическим деревом. Итеративная система функций
(Verelst K. *Zeno's Paradoxes*.// arXiv:0606639v1 [math.HO] 2006)

На рис. 24 показано последовательное измельчение все увеличивающегося числа частей целого (отрезки) совместно со способом их кодирования символами 0 и 1, которое в пределе приходит к Канторову

множеству C. Точки $x \in C$ имеют координату (адрес) в этом дереве в виде строки $x = 0101\ldots1..$, которая получается при движении по одному из путей ветвления дерева с образованием последовательности нулей и единиц. Растущие последовательности двоичных строк показаны в вершинах деления. Слева степенями двойки показаны размеры фрагментов деления на данном уровне иерархии. Показатель степени двойки равен номеру уровня иерархии деления. Отрезок вверху символизирует целый объект, внизу – фрактал, результат бесконечного дробления исходного отрезка.

Связь между фрагментами материи – величинами отрезков деления и строками символов на лексикографическом дереве осуществляется итеративной системой функций *(iterated function system – IFS).* Этот момент важен в нашем изложении, поэтому рассмотрим эту систему подробнее.

Последовательное уменьшение (сжатие) длин отрезков C_k представим как действие функций. Например:

$$f_0(x) = \frac{x}{3}, \quad f_1(x) = \frac{x+2}{3}.$$

Тогда для отрезка $[0,1] \subset R$

$$C_1 = [0, \frac{1}{3}], \; C_2 = [\frac{2}{3}, 1].$$

$$C_2 = [0, \frac{1}{9}], \; C_3 = [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}], \; C_3 = [\frac{5}{9}, \frac{6}{9}],$$

$$C_4 = [\frac{8}{9}, \frac{9}{9}] \text{ и т.д.}$$

Общая формула

$$C_{k-1} = f_0[C_k] \cup f_1[C_k] \quad \text{k =0, 1, 2, …}$$

Тогда фрактальный аттрактор такой динамической системы, состоящей из двух функций $f_0(x)$ и $f_1(x)$, удовлетворяет самоподобному уравнению

$$C = f_0[C] \cup f_1[C].$$

В общем случае нескольких функций $f_1 \ldots f_n$ с коэффициентами сжатия $r_1 \ldots r_n$ соответственно (в нашем примере $r_1 = \frac{1}{3}$ $r_2 = \frac{1}{3}$), фрактальный аттрактор системы IFS = $(X, f_1, \ldots, f_n)$, обозначаемый *A*, удовлетворяет уравнению:

$$A = f_1(A) \cup f_2(A) \cup \ldots \cup f_n(A).$$

Если сравнить это уравнение с привычным типом уравнений математической физики, которые выписываются для бесконечно малого физического объема и имеют точечный характер, то видно, что уравнение для *A* имеет выраженный распределённый, дивергентный вид. Оно описывает аттрактор как состоящий одновременно из процессов, описываемых функциями $f_1 \ldots f_n$. Второе его отличие – автореферентность или самоприменимость. Итеративная система представляет знакомую нам комбинацию дивергентного процесса – в виде расходящихся ветвей дерева, и конвергентных процессов – сжимающих функций, действующих вдоль каждой ветви.

Продолжим рассмотрения. В первом примере цифры 0 и 1 использовались лишь как метки набора функций f_0 и f_1, которые действовали как сжатия. Но посмотрим на эту же конструкцию с другой стороны. Символы (не цифры!) 0 и 1 часто рассматриваются в теоретической информатике как элементы алфавита, состоящего из двух букв {0, 1}. Тогда бинарное дерево оказывается пространством двоичных строк некоторого формального языка $\sum = \{\sigma_1, \sigma_2\}^N$. Теории, уравнения и формулы, выражающие физические зависимости в компьютерном представлении, являются такими строками.

Основное действие языка в физическом пространстве называется языковой номинацией, определением или выделением объекта, области в нем. Размеру этой области соответствует некоторое число. Тогда слово, состоящее из букв, производит последовательное выделение в области её части – подобласти, в ней – следующее, и т.д. Поэтому каждая буква в слове действует как сжатие. Тем самым слову $x = 101\ldots1$ длины *n* соответствует произведение коэффициентов сжатия каждой из букв – функций:

$$r_1 r_2 \ldots r_n = r_x .$$

Тем самым прежняя схема инвертируется: не функции помечаются символами, а символы помечаются сжимающимися отображениями. В итоге мы получаем второй облик итеративной системы функций – информационный:

$$IFS = (X, \sigma_{f_1}, \sigma_{f_2}, \ldots, \sigma_{f_n}) \qquad \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n\} \Sigma.$$

Каждой точке аттрактора соответствует единственная строка $x \in A \quad x = 101...1...$, которая называется адресом этой точки подобно почтовому адресу: страна – область – город – улица – дом – корпус – квартира или адресу файла в памяти компьютера – он всегда виден в адресной строке.

Для элементов $\omega, \sigma \in \Sigma \quad \sigma = \sigma_1\sigma_2...\sigma_n... \quad \omega = \omega_1\omega_2...\omega_n...$ определяется расстояние

$$d_\Sigma(\sigma, \omega) = 2^{-m}, \quad m = \min_i \{\sigma_i \neq \omega_i\}.$$

Например, если $\sigma = 1011...01...$, и $\omega = 10001...01..$ – две строки, то

$$d(\sigma, \omega) = 2^{-3},$$

т.к. $\sigma_1 = \omega_1$, $\sigma_2 = \omega_2$, $\sigma_3 \neq \omega_3$ $m = 3$ – есть длина пути до вершины по лексикографическому дереву, после которой σ и ω расходятся. Чем больше требуется работы для различения двух строк, чем выше требуемая точность измерения, тем ближе они в лексикографическом пространстве. Физические теории тем длиннее и сложнее, чем меньшей величины частицы они описывают.

Тем самым мы получаем соответствие точек аттрактора *A* физического пространства $\boldsymbol{R^3}$ и строк некоторого формального языка:

$$A: \Sigma \to R^3,$$

$$\sigma_1\sigma_2...\sigma_n \in \Sigma \quad \mapsto \quad x \in R^3.$$

Техника итеративной системы функций широко используется при конструировании фрактальных множеств на компьютерах. Современные реалистичные пейзажи в компьютерных играх – это аттракторы этой системы.

Последнее соответствие «бинарные строки → координаты R^3» означает, что всякая картина, образ на мониторе физического объекта могут рассматриваться как математический объект двойной природы.

Соответственно движения и изменения объекта могут быть описаны математически двойственным образом. В конструкции фракталов как топологических образах математических объектов оказались сопряженными физические R^3 и адресные Σ, то есть информационные, символические пространства. Соответственно физические движения, функции и параметры сопряжены с информационными, то есть трансформациями строк формального языка. Тем самым мы нащупали путь к формализации антиномии материи, о которой говорилось выше.

Рис. 26. Двойное представление объекта: фрактальный (слева) объем (справа) (Barnsley M.F. *Superfractals*. CUP, 2006)

Адресное пространство представляет собой полностью несвязное пространство (гомеоморфия канторову, см. рис. 26) Оно делает материю лабильной, трансформируемой. Она может принимать различные геометрические формы – как теоретической геометрии, так и природные: листья, деревья, живые организмы, текстура материалов. Тем самым три физических движения в R^3 – перенос, вращение и растяжение – дополняются набором трансформаций, которые являются предметом материаловедения (и других естественных наук).

Адресное пространство можно рассматривать как внутреннюю степень свободы вещества. По мере продвижения от корня дерева к концам его ветвей происходит уменьшение размеров – частей, т.е. его диспергирование. Это движение является одновременно и материальным преобразованием размеров, и преобразованием свойств вещества. Неформально говоря, это движение и физическое, и математическое.

Движение в обратном направлении – роста размеров – должно по идее обращать последовательность событий – появление свойств в обратном порядке.

Но здесь дело сложнее, ожидаемая симметрия не восстанавливается, она оказывается нарушенной. Рассмотрим этот момент подробнее. Движение по ветвям дерева можно изобразить поведением конечной строки $\sigma \in \sum$:

$$\sigma = \sigma_1 \sigma_2 ... \sigma_k .$$

Движению вниз соответствует сдвиг вправо – приписывается буква алфавита:

$$\sigma' = \sigma_1 \sigma_2 ... \sigma_k \sigma_{k+1} .$$

Движению вверх – сдвиг влево

$$\sigma'' = \sigma_{-1} \sigma_1 \sigma_2 ... \sigma_k .$$

Это есть хорошо известная динамическая система – сдвиг Бернулли (см. выше). Как было показано И. Пригожиным, сдвиг вправо – детерминистичен, сдвиг влево – полностью случаен. Левый крайний символ σ_{-1} появляется как результат случайного процесса – бросания кости или монеты. Сдвиг вправо моделирует флуктуации свойств, сдвиг влево – их бифуркации. При нарастании размеров частиц возможно появление непредвиденного свойства.

Для движения вправо $\sigma \to \sigma'$ $d_{\sum}(\sigma_{k+1}) = 2^{-k-1} \to 0$ – это сжимающая или реакционная координата. Для движения влево $\sigma \to \sigma''$ $d_{\sum}(\sigma_{-1}) = 2^n \to \infty$ – это растягивающая или диффузионная координата.

Тем самым метрика $d_{\sum}(\sigma, \omega)$ связывает формальные языки и символические пространства с пространством физическим. Метрика – это функция между двумя пространствами $\sum \to R$, ее аргументами являются строки Σ, значениями – числа *R*. Этот факт лежит в основе интерпретации строк символов/цифр действительными числами. Если предположить равенство коэффициентов сжатия $r_1 = r_2 = \ldots r_n$, то итеративную систему можно задать производящей функцией, содержащей

информацию о последовательности символов и степенях сжатия, которая аналогична степенному ряду

$$IFS = (X,\ \sigma_0 + \sigma_1 \cdot r + \sigma_2 \cdot r^2 + \ldots + \sigma_k \cdot r^k + \ldots).$$

Если $\sigma = 1011...1$, то этой строке соответствует действительное число $\sigma^* \in [0,1]$, которое получается следующим образом:

$$\sigma^* = 0 \cdot 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} + ...$$

Подобным и более сложным образом для двумерных и трехмерных областей можно вложить Σ в физическое тело. Поэтому каждая точка объема тела *P* может быть представлена двояким образом:

$$P \in R^3 \quad P = (x, y, z) \quad x, y, z \in R^3$$

$$P \in \Sigma \quad P = (\sigma_1, \sigma_2 ... \sigma_n ...) \quad \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n \ldots \in \Sigma.$$

И соответственно имеем два вида расстояния между точками *P* и *Q*.

$$\| P - Q \| = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + (z_p - z_q)^2}$$

и $$| P - Q | = \min_i \ \sigma_{ip} \neq \sigma_{iq}$$

На числовой оси эти метрики (их результаты) неотличимы – нельзя установить получена ли сложением меньших или делением большего.

Подведем итоги эмпирическому рассмотрению итеративной системы функций как основы фрактального строения материалов. Мы можем говорить о том, что фрактальное вещество состоит из двух субстанций – собственно материи и символов, носителями которых являются части его объёма, части его частей и т.д. Материя и символы неотделимы друг от друга так же, как части проблемы Единое-Многое. Материя – носитель энергии, символ – носитель свойств.

Явление делимости, представленное итеративной системой функций, представляет собой внутреннюю степень свободы материи. Точки на этой координате имеют смысл размера частицы вещества данного химического состава. Движение по ней является одновременно и материальным, и символическим, т.е. изменениям размера сопутствует изменение свойств. Оно детерминировано при измельчении, диспергировании вещества и полностью случайно при синтезе (агрегации, коагуляции).

Наконец последнее, связанное с лексикографическим деревом. Оно представляет собой *2*-адическую числовую систему Z_2. Эта связь с одной из двух основных числовых систем математики позволяет сильно расширить арсенал методов моделирования задач и связать разрозненные факты фрактальной геометрии в согласованную систему.

Переходим к изложению основных сведений об этих числах.

11. ДЕЛИМОСТЬ И *P*-АДИЧЕСКИЕ ЧИСЛА

Ввиду малой известности *p*-адической числовой системы для образования мы изложим подробно сведения о ней в параллели с интерпретацией в фрактальной геометрии.

Связь между геометрией, анализом и вычислительными методами в математике осуществляется числовыми системами. Они придают числовую и метрическую содержательность разнообразным геометрическим и материальным объектам теорий, на основе которой далее развиваются основные операции алгебры и анализа.

Такую связь для евклидова пространства осуществляют вещественные числа. Получается теория движений деформируемого твердого тела. Этой теории недостаточно для нужд материаловедения и химии. Включив делимость в теорию, мы перемещаемся в пространство фракталов. Для фрактальной геометрии более подходящими оказываются *p*-адические числа. *p*-адические числа формализуют явления, которые связаны с процессами бесконечного деления и изменения размеров частиц вещества. Тем самым они позволяют рассматривать делимости вещества в как один из естественных процессов, имеющий соответствие в арсенале математики.

Кроме того, *p*-адические числа делают более ясным само математическое понятие множества. Исходное представление теории – «множество есть набор хорошо различимых элементов», обычно мыслимых как собранное, не связано с конкретными представлениями физико-химической науки. Никто и никогда множества не собирал и не собирает. Основной объект – образец или объём материи – всегда дан как исходный, а вот «собирание» его есть одна из основных задач науки.

Исходным мотивом введения *p*-адических чисел в современную физику явилась гипотеза о флуктуациях пространства-времени на ма-

лых масштабах, которую предлагалось моделировать иррегулярностью, флуктуациями поля действительных чисел R как основу теории физических полей. Взамен прежних фундаментальных сущностей: полей, частиц, струн предлагается ввести единую субстанцию числового поля Q_p, которое способно воспроизвести флуктуации топологии и размерности пространства-времени, его метрики и сигнатуры [36]. Из этого видно, что базовой интерпретацией p-адических чисел в физике являются иррегулярные явления на микроуровне.

«В математической физике со времен Ньютона и Лейбница применяются вещественные числа. Если встречается какая-либо практическая задача, обычно для ее решения выписываются соответствующие уравнения, разумеется, над полем вещественных чисел R. Вопрос, почему нужно использовать именно вещественные числа, даже не задается….

Эти представления стали настолько привычными, что R^3 часто воспринимается как реальное физическое пространство. Мы хотели бы подчеркнуть, что евклидово пространство R^3 – это не более чем математическая модель для реального физического пространства…. Таким образом, мы приходим к выводу, что геометрия обычного евклидова и, более общо, риманова пространства неадекватно описывает свойства реального физического пространства на очень малых расстояниях. …

Имеется соответствие между геометрическим и аналитическим описанием при помощи числовых координат: условно говоря,

геометрия ←→ числовая система.

Введенные К.Гензелем в конце XIX века р-адические числа составляют неотъемлемую часть теории чисел, алгебраической геометрии и других разделов современной математики . …

Геометрия неархимедова пространства удивительно непохожа на евклидову геометрию …

Поле р-адических чисел Qp имеет естественную иерархическую структуру: каждый диск состоит из конечного числа непересекающихся дисков меньшего радиуса; поле Qp гомеоморфно канторовскому множеству на вещественной оси. …

Как хорошо известно, обычная евклидова геометрия описывается при помощи вещественных чисел….

Неархимедова геометрия и р-адический анализ применяются в физике не только для описания геометрии на малых расстояниях, но и в рамках традиционной теоретической физики для описания сложных систем типа спиновых стекол или фракталов. …

Мы надеемся, что p-адические числа найдут применения в таких областях, как теория турбулентности, биология, динамические системы, компьютеры, проблемы передачи информации, криптография и других естественных науках, в которых изучаются системы с хаотическим фрактальным поведением и иерархической структурой». [37, из введения].

Существует и более ранняя интерпретация этих чисел, которая в точности согласуется с фрактальной геометрией и её бинарными свойствами. Эта интерпретация шире физической и является более подходящей для нашей темы.

Её изложение можно начать с работ Д. Мириманоффа 1917–1921 гг. [38], который впервые связал явления нелинейности, делимости материи и парадоксальные явления в науке – апории Зенона, антиномии теории множеств. Его конструкция так называемых экстраординарных множеств в настоящее время развивается в теоретический информатике под видом нефундированных множеств [39]. Экстраординарные или нефундированные множества есть модели материальных объектов с бесконечно делимыми частями и элементами. Они обычны во фрактальной теории.

Пусть E – множество, E1 – один из его элементов, E2 – элемент, принадлежащий E1, и так далее. Последовательность от E к E1, от E1 к E2 называется спуском. Такой спуск обрывается, когда встречается неразложимый элемент. В этом случае спуск конечен, но он не обязан быть таковым…Я скажу, что множество ординарное, если оно допускает только конечный спуск; я назову его экстраординарным, если среди его спусков найдутся бесконечные» [1917, p.42].

Впервые на связь *p*-адических чисел с фрактальными множествами и физическими проблемами указал С. Улам в середине XX века. По его интерпретации *p*-адические числа являются инвариантами процессов бесконечного деления вещества и общей топологией различных областей Вселенной, включая объекты с противоположными свойствами, такими как, например, протон и электрон. Он заметил, что *p*-адическая топология совпадает с топологией канторова совершенного множества *C* и может рассматриваться как альтернатива континуальным теориям физики и возможности выражения физически осмысленных величин.

«Поочерёдно выступающие на передний план точки зрения «теории поля» и «элементарных частиц» представляют собой в данное время или

(топологически) евклидов континуум, в котором основные объекты являются функциями непрерывно меняющегося времени или частицы, внутреннее содержание которых не анализируется.

Интерпретация этих первично малых единиц пространства развивается через следующие стадии: атом становится ядром, окружённым электроном, ядро, в свою очередь выдвигает свои внутренние компоненты – нуклоны и далее; в настоящее время протоны и нейтрино, возможно, теряют своё право на статус «частиц», обнаруживая составные элементы. Всё это, так сказать, в стороны уменьшения. В то же время в направлении распределения физической Вселенной в целом тоже, по-видимому, существует такой итеративный процесс: звёзды оказываются собранными в скопления, скопления – в галактики. Существуют скопления галактик, сверхгалактик и, может быть, можно увидеть, что существует бесконечная иерархия на другом конце шкалы.

Поэтому, может быть, интересно вообразить такие процессы, продолжающиеся неограниченно и, в частности, рассмотреть случай, когда распределение массы (или энергии) продолжается всё время, не приводя в пределе к системе действительных чисел или евклидову континууму, в котором определено данное поле.

Напротив, вообще говоря, эти пределы будут подобны канторовому множеству и будут иметь топологию скорее p-адических, чем действительных чисел». [40, с. 106,120].

Мы приведём обзор выводов Улама, касающийся нашей темы [41]. Его выводы охватывают основные вопросы как собственно математические, так и общефизического значения.

Распространение анализа на описание комбинации дискретности с непрерывностью для физических свойств приводит к структуре канторова совершенного множества. Соответственно не только действительные числа характеризуют физически содержательные величины.

Множество материальных точек является ни евклидовым континуумом, ни набором дискретных точек. Модели канторова множества могут быть адекватны для физических моделей, которые топологически являются ни евклидовым континуумом (теория поля), ни соответствуют понятию элементарных частиц, внутренность которых далее не анализируется (как в современной теории кварков), то есть в случае, когда происходят непрекращающиеся процессы подразделения физических сущностей, таких как масса.

Подобные процессы приводят к распределениям типа канторова совершенного множества с топологией более соответствующей p-адическим, нежели вещественным числам.

Канторово множество важно и как модель конфигурационного пространства, так и фазового и, в конце концов, эта конструкция должна быть осуществлена в пространстве Минковского-Лоренца.

В этом случае физические структуры представляются с бесконечно увеличивающейся сложностью и аксиома регулярности теории не может быть удержана. Также теряет своё значение в физике и аксиома непрерывности СН.

По словам Улама: «похоже на то, что физические явления радикально меняют свои физические свойства в малом». Поэтому дальнейшая геометризация физики не может быть осуществлена простым обобщением понятий евклидовой геометрии, так как дифференциальная метрика никогда не отразит существенных свойств непрекращающихся процессов деления, но должна основываться на радикальных изменениях локальной топологии (так как в канторовом множестве).

... физика не была бы возможной, если электрон и протон не были бы во многом тождественны. Если это подобие или идентичность подмножеств Вселенной не существует, не могло бы быть никакой физики. [ibid, p.1781-1785].

Поясним некоторые вещи. Аксиома регулярности или аксиома фундирования есть математический эквивалент неделимости, атомизма. Это основная аксиома работающей теории множеств и аксиоматизируемых формальных теорий – математика рассматривает только регулярные множества и события. Физический смысл континуум гипотезы – непрерывность как связность. Отрицания этих аксиом составляют суть математики и логики фрактальной геометрии.

Так же как и фракталы, *p*-адические числа являются инвариантами процессов бесконечного деления материи. Этот факт не раз, в неявной или явной форме, переоткрывался [42].

В рассуждениях Мириманоффа и Улама ясно видно, что исходная субстанция множеств – материя, в которой процессом спуска или деления различаются части, уже дана и сама возможность выделения в ней частей есть её основное свойство. В отличие от канторова процесса собирания, множества Мириманоффа даны как исходные. Тем самым смысл понятия «множество» есть совокупность различимых фрагментов материи.

В 1984 году А.Н. Паршин указал на связь *p*-адических чисел с формальной логикой и свойствами систем, выражаемых формальными языками, высказал идею о необходимости объединения вещественных

и p-адических чисел для описания оппозиции «вещи – отношения» [43, примечание 17] и отметил 2-адические числа как модель мира идей Платона [44]. Фрактальность, то есть бесконечная делимость истинностного поля логических систем математики, была проиллюстрирована [45].

В статьях [46] обоснована алгоритмическая интерпретация p-адических чисел как объектов теоретической информатики. Тождество формальных языков и фракталов хорошо известно и продолжается как их изоморфизм с p-адическими числами.

Для нас важен вопрос связи вещественных и p-адических чисел как отражение антиномии материи. В мысли Г.Вейля эта проблема имеет вид сопряжения дискретного с непрерывным:

«Система действительных чисел подобна двуликому Янусу: с одной стороны – это совокупность (das Feld) алгебраических операций + и – и им обратных, с другой – континуальное многообразие, части которого связаны друг с другом непрерывно. Первый лик чисел алгебраический, второй топологический. Современная аксиоматика, при всей своей простоте, не терпит (в отличие от новейшей политики) подобного двусмысленного смешения войны и мира; она тщательно отделяет одну сторону от другой». [47, с. 26].

Связь вещественных и p-адических чисел в различных формах неоднократно обсуждалась в литературе [48, с. 209].

«Вещественная и арифметическая (т.е. p-адическая – Авт.) картины мира находятся в отношении дополнительности, напоминающем отношение между сопряжёнными наблюдаемыми в квантовой механике»

Ю.И. Манин видит возможность объединения свойств архимедовых и фрактальных свойств в адельной конструкции [48, с. 214].

Связь двух базовых числовых систем математики становится ясной в формальном изложении. С этих позиций – связи числовых систем, мы изложим основные факты о p-адических числах. Здесь также присутствуют их различные интерпретации.

Числовая асимметрия в математике. В математике известны две базовые, несводимые друг к другу числовые системы – вещественные R и p-адические числа Z_p. Обе числовые системы, рассмотренные с более общей, нежели вычислительная, точки зрения – топологии, геометрии, алгебры, теории решёток и порядка, логики – имеют много совпадающих черт, но и много кардинальных отличий [49; 50, p. 34, 280].

Фрактальная теория ввела в рассмотрение канторово совершенное множество *C*, обладающее универсальными свойствами. Синтаксис всех этих трёх множеств тождественен. Их элементы кодируются идентичным образом – строками бесконечной длины, которые являются разложением чисел в позиционной системе счисления по любой базе, простому числу *p*. В итоге математическая техника не способна к их различению – изоморфные множества считаются в математике копиями друг друга:

$$R \cong C \cong Z_2 .$$

Однако при сопоставлении видна разница. Вещественные числа связны, отражают протяжённость, *p*-адические и канторово множество полностью разрывны, моделируют делимость. Тем самым любая логическая формула, записанная в виде строки, обладает, как в языке, двойным смыслом. Она может указывать на материальные объекты, которые соответствуют вещественным числам и на идеальные, полевые сущности, соответствующие *p*-адическим.

Их теория и свойства во многом аналогичны теории вещественных чисел, но и во многом радикально от них отличаются. Это соотношение можно уподобить соотношению правой и левой рук. По отдельности отличить описанием правое от левого невозможно, разница видна только в паре [51].

Степенные ряды. *p*-адические числа являются числовым аналогом рядов Лорана и представляются формальными степенными рядами по степеням основания, равного одному их простых чисел *p* = 2, 3, 5, …, 13,…41,…:

$$x = a_{-n} \cdot p^{-n} + a_{-n+1} \cdot p^{-n+1} + \ldots + a_{-1} p^{-1} + a_0 +$$

$$+ a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \ldots + a_k \cdot p^k + \ldots = \sum_{i=-n}^{\infty} a_i \cdot p^i \qquad (1)$$

$$a_i \in A = \ 0, 1, 2, \ldots, p-1$$

При *n* = 0 это целые *p*-адические числа $x \in Z_p$, которые образуют кольцо, при *n* > 0 это поле *p*-адических чисел Q_p. Числа/символы в разложении (1) называются цифрами. Поэтому *p*-адические числа изоморфны степенным рядам и наследуют их универсальные свойства.

В частности, как следует из практики программирования, степенные ряды являются первичным материалом определения всех видов функций. Соответствие между p-адическими числами и степенными рядами от переменной t имеет вид $p^n \to t^n$. Форма (1) является также числовым и бескоординатным прототипом итеративной системы функций [50, p. 12-17].

Степенные ряды имеют не только функциональную интерпретацию, но им соответствуют также и степенные ряды матриц. Соответствие имеет вид $t^n \to M^n$. Тогда получаем двойственность

$$t^n \leftrightarrow p^n \leftrightarrow M^n$$

и $$\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \leftrightarrow \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot p^i \leftrightarrow \sum_{\varnothing=0}^{\infty} a_i M^i. \qquad (1a)$$

Матрицами обычно представляются распределённые объекты, их присутствие в теории столь же универсально, как и функций. Умножение матриц здесь не обычное, а кронекерово, которое моделирует делимость и представляет из себя двумерную итеративную систему функций (о нём ниже).

Геометрически – это то же лексикографическое дерево с p ветвями в каждой вершине.

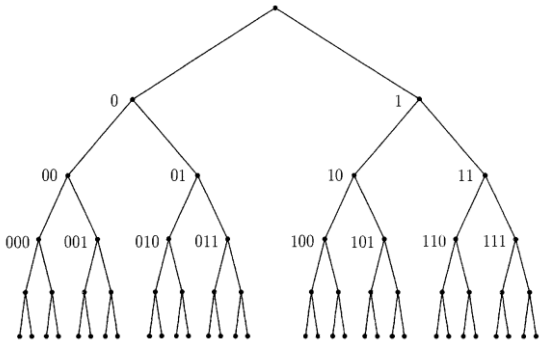


Рис. 27. Дерево 2-адических чисел p = 2. (Badii R., Politi A. *Complexity*. CUP, 1997.)

С точки зрения материаловедения имеет смысл их следующая интерпретация. Рассмотрим некоторый объект под прибором с увели-

чивающей разрешающей способностью. Сначала мы будем видеть целый кусок материала. Увеличив разрешение, увидим, что в поле зрения он окажется состоящим из нескольких частей. Которые, в свою очередь, при последующем увеличении разрешающей способности наблюдения распадутся на части. И так далее. Задача – дать описание объекта – куска вещества – при бесконечном увеличении, т.е. в пределе.

В этом рассуждении увеличительную силу прибора можно заменить разложением физико-химическими процессами, уточнение – удлинением формального описания.

В настоящее время физическая или иная, например химическая, интерпретация простых чисел остаётся открытым вопросом. В связи с делимостью материи можно высказать следующее соображение. Делимость на две части, то есть для $p = 2$, наиболее естественна, она как бы встроена в материю – на 2 всё всегда делится. Делимость на большее число частей требует синхронизации, которая должна обеспечиваться в каждом отдельном случае. Так, например, деление на 3 и более частей в данный момент времени может оказаться последовательностью делений на 2, если трехчастность не зафиксирована какими-либо физико-химическими причинами заранее. Иными словами, такое множественное деление несёт скрытую неустойчивость. Это, кстати, было главной причиной того, что вычислительная техника, основанная на троичной системе счисления, была вытеснена менее ёмкой двоичной.

При наличии таких предварительных условий на p как параметр делимости можно включить в описание сразу несколько простых чисел и перейти к адельной формулировке – комбинации параметров делимости $p_1, p_2, \ldots p_k$. Тогда можно видеть, что в действие вступают сразу несколько итеративных систем, физических процессов, веществ различной химической природы, формальных языков и, соответственно, множественная дополнительность в координатизации точек объёма тела. Здесь можно усмотреть химический аналог физическому мультифрактальному формализму – фрактал составлен из веществ различной химической природы, которая и обусловливает различие метрических характеристик – фрактальной размерности, лакунарности, формы размерности. Ввиду того, что, как известно, любое дерево можно фор-

мально закодировать двоичным, адельное усложнение мы пока оставляем в стороне.

Складывать бесконечный ряд *p*-адического числа бессмысленно. Все *p*-адические числа в обычном понимании бесконечно велики. Поэтому нужна содержательная интерпретация – надо указать с каким процессом или объектом они соотносятся и как операции над *p*-адическими числами моделируют изменения этих сущностей. Обращаться с ними как с конечным объектом, рациональным числом невозможно, так как при этом возникает вариант известной суперпроблемы – «осуществления бесконечного числа операций, то есть суммирование ряда *p*-адического числа, в конечное время». Эти задачи до сих пор не решены. Предлагаемые решения пока не получают общего признания.

Слова. Второе определение – в виде последовательности строки цифр/символов, аналогичной позиционной записи числа:

$$x = a_{-n} a_{-n+1} \ldots a_0 a_1 \ldots a_k \ldots$$

В этом случае множество *p*-адических чисел совпадает с декартовым произведением

$$X_p = \{0, 1, \ldots p-1\}^N. \qquad (2)$$

Наиболее известна в информатике экспонента двухэлементного множества:

$$X_2 = 2^N = \{0, 1\}^N = \{true, false\}^N = \{\wedge, \vee\}^N = \ldots$$

В качестве символов алфавита этого множества могут выступать любые сущности, связанные отношением отрицания-инволюции, например

$$\neg\wedge = \vee, \quad \neg\neg\wedge = \neg\vee = \wedge, \; \bullet = \neg\circ, \quad \neg\neg\bullet = \neg\circ = \bullet.$$

Первое представление употребляется в теории чисел и алгебре, второе – в теоретической информатике как основной тип данных. Здесь делимость выступает под видом формальной определимости.

Эта идея порождения *p*-адических чисел последовательными определениями изложена Л.А. Калужниным. Она в явном виде вводит формальную определимость как процесс (вы)деления сущностей в числовом поле. Эта схема обща итеративной системе функций и логике. В качестве сжатий она использует сжимающие свойства правила *Modus Ponens*, разделяющего множества истинности последовательности пре-

дикатов – формул, утверждений, теорий, выражающих отношение эквивалентности на числовом поле.

Для всякого $\varepsilon > 0$ отношение $D_\varepsilon(x, y) = \left| x - y \right|_p \leq \varepsilon$ есть отношение эквивалентности на поле K с неархимедовым абсолютным значением $\left| x \right|_p$. Когда $\varepsilon \to 0$, пробегая положительные вещественные числа, то соответствующие предикаты $D_\varepsilon(x, y)$ пробегают серию всё более тонких эквивалентностей (порождая всё более тонкие различия).

$$D_{\varepsilon^{-3}}(x, y) \supset D_{\varepsilon^{-2}}(x, y) \supset \ldots \supset D_0(x, y) \supset D_\varepsilon(x, y) \supset D_{\varepsilon^2}(x, y) \supset \ldots$$

[52, с.347-348].

Заменив в этих рассуждениях предикат, выражающий метрическую неразличимость на логический предикат, множество неразличимости – на множество истинности этого предиката, “$\varepsilon \to 0$” – на последовательное применение правила Modus Ponens, в его смысле логического выделения истинности, поле K – на совокупность строк итеративной системы функций, получим последовательный процесс определимости. В последнем случае неархимедово нормирование порождается конкатенацией, куда оно входит под видом сдвига строки. Очевидно, что схема Калужнина есть формализация спусков Миримановффа.

Арифметика при таком подходе не теряется, только принимает другой вид. Вместо сложения можно рассматривать конкатенацию строк конечных длины [53].

Если $x = a_1 a_2 \ldots a_k,\ y = b_1 b_2 \ldots b_n$ две строки, то их конкатенация $x \circ y$ определяется через сложение следующим образом:

$$x \circ y = a_1 a_2 \ldots a_n + 2^{n+1}(b_1 b_2 \ldots b_n) = a_1 a_2\ a_n b_1 b_2 \ldots b_n.$$

Множитель 2^{n+1} – сдвиг на *n* позиций строки *y*. Сдвиг (скейлинг по фрактальной терминологии) и конкатенация (сложение) являются простейшими базовыми операциями компьютерной арифметики, причем физически реализуемыми и соответствующими булевой алгебраической структуре операций. Умножение и деление это уже программы, то есть мини-теории базовых физических операций.

Пример. $x \in Z_2$ в виде конкатенации букв, то есть как символический объект:

$$x_1 = a_1$$

$$x_2 = a_0 + 2a_1 = a_0 a_1$$

$$x_3 = a_0 a_1 + 2^2 a_2 = a_0 a_1 a_2$$

...

$$x_n = a_0 + 2a_1 + 2^2 a_2 + 2^3 a_3 + ... + 2^n a_n =$$

$$= a_0 + 2(a_1 + 2(a_2 + 2(a_3 + ... + 2(a_n)...))) = a_0 a_1 a_2 ... a_n$$

Последовательность x_1, x_2, $\ldots x_n$ приближает x_n. С точки зрения информатики эта последовательность является последовательностью частичных информационных содержаний x_n. Иными словами, здесь налицо иерархия свойств веществ, выражаемых символически.

Измерения и величины. Величины p-адических чисел определяются метриками на Q_p двух видов – аддитивной и мультипликативной.

Аддитивная версия:

$$\forall x \in Q_p \quad \nu_p(x): Q_p \to N \qquad \nu_p(x) = ord_p(x) = -n$$

в разложениях (1) и (2) (3)

$$\nu_p(xy) = \nu_p(x) + \nu_p(y)$$

и $\nu_p(x+y) \geq \min \quad \nu_p(x) + \nu_p(y)$

Мультипликативная версия:

$$|x|_p^\alpha : Q_p \to R \quad |x|_p^\alpha = p^{-\alpha \cdot n}, \quad \alpha > 0$$

$$|x \cdot y|_p^\alpha = |x|_p^\alpha \cdot |y|_p^\alpha \tag{4}$$

и $|x+y|_p^\alpha \leq \max \quad |x|_p^\alpha, |y|_p^\alpha$

Эта норма называется неархимедовой или ультраметрикой. Из её определения видно, что она действует избирательно, различает позиции, то есть является формальным аналогом оператора скейлинга. Физически она действует как энтропийный, дивергентный процесс. Смысл p-адических величин виден на лексикографическом дереве. Как

непрерывные они есть величины частей деления, то их есть размеров и, одновременно, как дискретные – количества этих фрагментов на n-ном уровне иерархии.

В ультраметрике умножение на p есть сжатие (на a_i – вращение).

$$\left| p \cdot x \right|_p^{\alpha} = p^{-1} \left| x \right|_p^{\alpha}$$

Поле Q_p является двойственным объектом. Как топологическая алгебра оно есть, с одной стороны, модель материи – фрактал, с другой – числовая система. Тем самым оно является числами со свойствами материи или материи с числовыми свойствами. Свойства метрик на Q_p играют главную роль в согласовании алгебраических и топологических свойств p-адических чисел.

Следующее свойство ультраметрики вплотную подводит к известной апории Зенона «Ахиллес и черепаха» и феномену «бесконечное в конечном» – сжатие натурального ряда:

$$\left| n \right|_p \le 1 \quad \forall n \in N .$$

Соответственно (3) и (4) различаются аддитивная прямая R^+ и мультипликативная прямая R^* . Соответствие между этими прямыми [50, p.23]

$$n \to p^n \quad \nu_p(x) = \alpha \cdot n = -\log \left| x \right|_p^{\alpha \cdot n} . \tag{5}$$

Им соответствуют свои аддитивная и мультипликативная (редко упоминаемая) формы аксиомы Архимеда. Аксиома Архимеда является общей формальной схемой метода исчерпания – измерения, координатизации, алгоритмических процессов, доказательств и т.п. С этой точки зрения разложения (1) и слова (2) есть варианты этой аксиомы, записанные для шкалы измерений по базе p. В p-адическом анализе варианты аксиомы Архимеда слиты в утверждениях «множество натуральных чисел плотно в Z_p» и «множество рациональных чисел плотно в Z_p».

Для различных p = 2, 3, …,43… справедлива формула произведения, адельная формула:

$$\left| x \right|_{\infty} \cdot \prod_{p \ge 2} \left| x \right|_p = 1 \quad \forall x \in Q . \tag{6}$$

Отсюда для выбранного фиксированного числа p, например $p = 2$, получаем

$$|x|_\infty |x|_2^{-d} \approx \mathrm{const}(n),$$

где const (n) – постоянная, зависящая от длины строки.

В последнем соотношении метрик узнаются степенные зависимости, которых много в материаловедении [54] и в физике конденсированных сред. Общий вывод из сказанного – подобные зависимости, полученные простыми измерениями и связанные степенной формой, имеют числовую природу, которая проистекает из иерархической, фрактальной структуры материи. Наиболее интересным оказывается степенная связь между числом свойств материалов и уровнями диспергирования вида число свойств = уровни разрешения^{D} (см. выше).

Инволюция. Из (1) видно, что «правильная» запись вещественного числа получается из p-адической отражением относительно десятичной точки [55, с.15; 56]. Это эквивалентно позиционной записи по обратной базе p^{-1} либо переключению смысла p – с деления на протяжение и обратно. Поэтому связь вещественных и p-адических чисел понимается как проявление двойственности строки символов и, в частности, одного символа простого числа p.

Последний, геометрический, способ – это прочтение разложения (1) с двух разных сторон листа бумаги. При взгляде «на лист» видим p-адические числа, при взгляде «из листа» – вещественные. Эту двойственность изобразим конечной в обе стороны строкой (причина в теореме Островского, о чём позже):

$$x_*^* = a_{-n}p^{\pm n} + a_{-n+1}p^{\pm n \mp 1} + \ldots + a_0 + a_1 p^{\pm 1} + a_2 p^{\pm 2} + \ldots + a_k p^{\pm k}. \qquad (7)$$

В этой записи двойные знаки степеней p символизируют возможность восприятия строки в двух смыслах. Как вещественное число (3) есть точка, момент времени как p-адическое – распределённый объект.

Конечно, эта операция имеет смысл, если символы в разложении обладают свойством зеркальной симметрии, то есть не меняют своего вида при чтении слева направо и справа налево. Таковы, например, привычные символы нуля и единицы, логическая пара $\wedge$ – конъюнкции и $\vee$ – дизъюнкции.

Такие операции порядка 2 называются инволюциями. Это инверсия в геометрии, взятие обратного элемента в теории групп, противоположного в арифметике, отрицание в логике, обращение стрелок в

теории решёток и порядка, различные утверждения о двойственности – проективной, Фурье, Стоуна, Понтрягина и т.д. В целом – это инволютивный антиизоморфизм, сопрягающий свойства числовых систем, главные из которых – топология, метрики и порядок. Таким образом, строка цифр из алфавита (0,1, … , p-1) может представлять элементы четырех типов:

- степенные ряды;
- действительные числа;
- p-адические числа;
- слова формального языка, то есть алгоритмы и логику.

Числовая асимметрия в природе. Вещественные и p-адические числа являются формальным аналогом функциональной асимметрии природы, заключающейся в дополнительности конвергенции и дивергенции. p-адические связываются с дивергентными процессами, а вещественные – с конвергентными. Иными словами позиционная запись с различением позиций, то есть код программы, есть p-адическое число, если же в ней произведены все операции сложения, то это вещественное число. Это (зеркальное) различие числа как материальной точки и как строки или последовательности не проговаривается явно, хотя и повсеместно присутствует в математике.

Это есть неявная двойственность формализации в основаниях математики. Таким образом. все четыре облика строк символов имеют общую основу – тождество алфавитных и числовых систем, и различное воплощение. В p-адической физике эта двойственность известна как принцип инвариантности физических законов при смене числового поля [37], который позволяет переносить формулировки из вещественной области в p-адическую.

Числовая дополнительность. Дополнительность R и Q_p делает два пополнения поля рациональных чисел Q сопряжёнными. Число

$$x^* = a_{-n}a_{-n+1}\ldots a_0 a_1 \ldots a_k$$

при $n \to \infty$ стремится к p-адическому одновременно с числом

$$x_* = a_{-k}a_{-k+1}\ldots a_0 a_1 \ldots a_n ,$$

которое стремится в вещественному.

Такое толкование связи есть возможный вариант дополнительности числовых систем, указанной Ю.И. Маниным. В техническом отношении оно сходно с представлениями данных в гибридных вычислительных системах [57] и модели q – мира [58]. В этих представлениях строка состоит из двух частей, соответствующих вещественным и p-адическим числам соответственно. Общим решением такой связи является существование порога, ниже которого действует p-адическая геометрия, выше – евклидова. В нашей модели обе числовые системы сопряжены и порога нет.

В настоящей работе, следуя идеям Улама и Паршина, принимается двойной, материально-символьный, смысл числа, который, по-видимому, отсутствует в p-адической физике [59]. Следование ему приводит к нужному синтезу формальных методов. Для целей химической технологии он может рассматриваться как материнская структура, аналогичная теории множеств математической физики.

Таким образом, мы будем считать дополнительностью (или асимметрией) R и Q_p инволюцию между двумя интерпретациями одной и той же строки. Мы называем эту связь чисел «зеркальной», имея ввиду метафору гиперболического или «турбулентного зеркала» *(turbulence mirror – англ.)*, сопрягающего разные топологии истины, которое присутствует в литературе по сложности и хаосу [60]. В одном направлении оно сжимает, уплотняет, в другом – растягивает, то есть рассеивает, делит. Доступным для наблюдения оказывается строка символов/цифр конечной длины – конечный код Гензеля или рациональное число соответственно. Это есть числовой образ функциональной асимметрии.

В нашей интерпретации инволюция взаимнооднозначна, будучи синтаксической операцией. Асимметрия связана только с различием топологий. Тем самым Q_p допускает три взгляда на свою сущность. Первый – «всё делимо» и Q_p нульмерно. Второй – «всё связно» и Q_p есть просто вещественные числа. Третий – комбинированный, наблюдаются и вещественные и p-адические числа. Формальное представление чисел и определение метрик архимедовой и ультраметрической не дают средств для различения топологий, как и символ p для различения процессов конвергенции и дивергенции.

Информатика. Интерпретация *p*-адических чисел в виде слов (2) связывает их с формальными языками теоретической информатики – совпадает синтаксис и топология [61] и теорией доменов *(domain theory)* [62]. Тем самым расширяется двойственность итеративной системы функций и строк.

Операции над строками – это прежде всего, конкатенация и подстановка. Остальные операции те же, что и над строками итеративной системы функций [63].

При этой интерпретации универсальные свойства канторова множества, фракталов и 2-адических чисел трансформируются в универсальные свойства вычислительной парадигмы машин Тьюринга [64].

Теорема Островского [65, p.22] о двойственности функции измерения имеет ключевое значение для приложений.

Поле рациональных чисел допускает только два вида нормирования: обычный, архимедов – $|x|_\infty$ ИЛИ *p*-адический, неархимедов – $|x|_p^\alpha$ $\alpha > 0$, модули.

Эта теорема обычно прочитывается как «третьего не дано» в *p*-адической физике [66, с.7], т.е. в исключающем значении союза ИЛИ. В нашей модели естественным является ИЛИ по типу конъюнкции, объединяющее оба типа нормирования в бинарном пространстве модели.

В связи с этой теоремой и двойственным характером рациональных чисел возникает вопрос об их природе, что такое число вообще. Ответ, который предлагает фрактальная теория, следующий – рациональные числа соответствуют физическим, усечённым фракталам [67]. Общая алфавитная основа вещественных, *p*-адических чисел и естественных языков нашей модели расширяет смысл числа вообще до семиотической двойственности – и материя и символы. Иными словами *p*-адический мир – есть тот же физический, но содержащий логику и информацию, субстанцией которых являются границы объектов.

Естественность и необходимость использования в теориях пары метрики совместно прямо следует из теоремы Островского.

$$\forall x \in Q \quad x = p^k \cdot \frac{a}{b} \quad p - \text{не} \quad \text{делит} \quad a \cdot b, \quad a, b \in N$$

$$|x|_\infty = p^k \frac{a}{b}, \quad |x|_p = p^{-k}.$$

Отсюда

$$\forall \frac{a}{b} \quad 0 \neq \frac{a}{b} \in Q \quad \Leftrightarrow \quad |x|_\infty \cdot |x|_p = \frac{a}{b} \neq 0. \tag{8}$$

То есть обе числовые системы следует рассматривать совместно, раздельное рассмотрение означает обнуление одной из метрик. Как следует из (8), это недопустимо в измерениях.

Рассмотрим «информационную» форму этой теоремы, т.е. для *p*-адических чисел. Для строки конечной длины

$$x = a_0\, a_1\, a_2 \ldots a_k$$

возможны два метода измерения. Вещественный, конвергентный, когда ведущей оказывается цифра старшего разряда (сложение в позиционной записи) и *p*-адический, дивергентный – ведущей оказывается цифра младшего (старшего в инволюции) разряда (операция деления начинается с младшего разряда числа). Например:

$$|1024|_\infty \approx 1 \cdot 10^3 \quad |1024|_2 = 2^{-10}.$$

Тем самым из (4) получаем двойную характеризацию рациональных чисел, соответствующую функциональной асимметрии модели:

$$\forall x \in Q \quad \exists X \in Q_p \quad x = |X|_\infty \cdot |X|_p. \tag{9}$$

Эта формула аналогична представлению рациональных чисел правильными дробями, но для альтернативного представления чисел строками цифр сразу из натурального ряда [69, с.339]. Знаменатель здесь заменён *p*-адической метрикой.

Мы ограничимся базой $p = 2$, поскольку это число общо материальным и идеальным процессам. Деление на 2 предшествует счёту и «встроено» в материю. В то же время деление на $p > 2$ требует синхронизации процесса на 3, 5, … частей. Без этого условия получается череда делений на 2 (поэтому вычислительная техника, основанная на

более ёмкой троичной системе счисления, оказалась неустойчивой). В этом случае (9) примет вид аналога адельной формулы (6):

$$\forall x \in Q \quad \exists X \in Q_p \quad x = \left| X \right|_\infty \cdot \left| X \right|_2 . \tag{10}$$

В компьютерном варианте (10) означает, что для получения рационального числа его сначала нужно записать в позиционном виде, а затем сложить цифры разрядов.

Геометрия и топология p-адических чисел. Поля Q_p и кольца Z_p являются нульмерными множествами. Все они гомеоморфны друг другу и канторову триадному совершенному множеству C (Q_p за исключением одной точки), которое изоморфно Z_2. Гомеоморфизм нульмерных множеств означает, что их свойства не зависят от формы и линейных размеров объектов и/или их изменений, то есть от движения. Тем самым существует только одно нульмерное множество, которое в физическом пространстве Z_2 присутствует глобально. Говоря языком фрактальной геометрии Z_2 – самоаффинный фрактал, то есть фрактал, сохраняющий свою структуру при физических движениях – перемещении, вращении, растяжении.

Нульмерные множества есть множества границ, а не телесных объектов, и поэтому они являются экстраординарными множествами Д. Мириманоффа. Канторово множество С канторовым является только по названию, но не по генезису.

Универсальность. Междисциплинарность фракталов имеет точное формальное соответствие. Всякое компактное метрическое пространство есть непрерывный образ C . C, Z_p и Q_p – полностью несвязные метрические пространства (множества). Компактными пространствами обычно представляются физические сущности.

Как было показано, нульмерные множества способны проекцией порождать материальные объекты любой формы [69] и любые тексты, имитируя универсальную машину Тьюринга, которая является парадигмой математической техники [70]. Справедливость этих утверждений сегодня реализована в современных компьютерах, которые являются воплощением фрактальной геометрии и бинарной асимметрии p-адических чисел.

Кривая Пеано. Факт, формализующий самоподобие фракталов и рефлексивность множеств p-адических чисел [65, p.225,227,229].

$$\forall\, n \in N,\ \forall\, p = 2, 3, \ldots, 43, \ldots$$

$$Q_p \cong Q_p \times Q_p \times \ldots \times Q_p = Q_p^n \qquad (11)$$

и

$$Z_p \cong Z_p \times Z_p \times \ldots \times Z_p = Z_p^n$$

Кривая Пеано естественным образом возникает при структурировании многомерных данных в компьютерных информационных системах [71, гл.3].

Шаром в метрическом пространстве радиуса r с центром в a называется множество

$$B_r(a) = \quad x \in X : d(x, a) \le r$$

$$d(x, a) = \left| x - a \right|_\infty \quad X = R \qquad (12)$$

$$d(x, a) = \left| x - a \right|_p \quad X = Q_p \text{ или } X = Z_p$$

В ультраметрическом пространстве:

- каждая точка шара является его центром;
- если два шара имеют общую точку, то один содержится в другом;
- диаметр шара не превосходит его радиуса;
- все треугольники равносторонние, ультраметрика ведёт себя как порядок величины [50, p.70].

Шарами в ультраметрическом пространстве моделируются материальные объекты и/или уровни иерархии их последовательного деления. В евклидовом пространстве шар может иметь любую форму, соответствующую форме данного объекта.

Шары в Q_p и Z_p являются одновременно и открытыми, и замкнутыми множествами *(closed and open – clopen sets)*. Расстояние между шарами B_1 и B_2

$$d(B_1, B_2) = d(x_1, x_2) \quad \forall\, x_1 \in B_1,\ x_2 \in B_2 \qquad (13)$$

(аналог потенциала поля).

Множество Q_p является проективной прямой. Неформально проективную двойственность можно увидеть из разложения (1), если «включить» инволюцию. Если в (1) «смотреть на лист» т.е. видеть

p-адические числа как строки, то вещественные перейдут в точку. Взгляд «из листа» увидит правильно записанные вещественные числа, а p-адические при этом исчезнут. Тем самым точки разворачиваются в линию, линия сжимается в точку. В таком виде проективная двойственность аналогична паре «координата – импульс». Эта глобальная двойственность физически в вычислениях известна как двойственность Фурье. Подробнее об этом в [72].

Решётки и сети. Так как синтаксис R и Z_2 совпадают, а в R множество интервалов является полной непрерывной решёткой [73], то Z_2 является полной и непрерывной решёткой шаров. По построению связи R и Z_2 порядок на решётках взаимнообратный. На бинарном дереве при движении от корня к ветвям образуются 2-адические числа, при обращении направления движения – вещественные (проективный и индуктивный пределы соответственно).

В силу $Z_2 \cong IFS\{0,1\}$ 2-адические числа могут рассматриваться как иерархическая нейросеть. Такие сети могут порождать непрерывные функции (теорема Колмогорова и её обобщение), и этот ход рассуждений приводит в интерпретации 2-адических чисел как пространства непрерывных функций над собой [74]. Согласно сетевому представлению 2-адические числа являются частично упорядоченным множеством – направленным непрерывным частичным порядком *(directed continuous partial order – dcpo)*.

Свободные моноиды и шары в Z_p. [50, p.11-12]. Здесь сопряжённость двух видов чисел выражена как сопряжённость слова – моноида или строки символов и материи – шара.

Если $a = a_0 + a_1 p + \ldots + a_n p^n + \ldots = s_n + p^{n+1} \cdot \alpha$ и $B_r(a)$ – шар радиуса $r = p^{-n}$ с центром в a. Множество строк $s = a_0 a_1 a_2 \ldots a_n$ – называется моноидом M_p над алфавитом $S = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$. Моноид M_p имеет различные матричные представления $M_p \to GL_n(Z_2)$. Для $n = 2$

$$s \mapsto T_s = \begin{pmatrix} p & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad s \in S .$$

Тогда

$$T_{a_0}T_{a_1}\ldots T_{a_n}=\begin{pmatrix} p^{n+1} & s_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где длине слова соответствует степень определителя, радиусу шара – его величина, центру – элемент верхнего правого угла. Тем самым определено соответствие шары – слова – аффинные преобразования

$$B_r(a)\leftrightarrow a_0a_1a_2\ldots a_n\leftrightarrow T_n\,. \qquad (14)$$

Инъекция $M\to GL_2(Z_p)$ является основой построения евклидовых моделей p-адических чисел.

В нашей интерпретации (15) есть та же двойственность строки, которая появилась в итеративной системе функций и связи числовых систем.

Евклидовы образы. Согласно общей позиции модели – переносу теории на фрактальные, нульмерные множества, мы будем рассматривать (под)множества вещественных чисел как вторичные по отношению к p-адическим и говорить о способах их порождения из Q_p или Z_p. Это соответствует способам генерации материальных объектов – вещей, предметов.

Базовым способом являются измерения двумя метриками. Первый определяет мультипликативную прямую, второй – аддитивную. Тем самым пространство вещественных чисел формируется как двумерное, аналогичное комплексным. Поэтому становится явной бинарная, то есть аддитивная и мультипликативная, структура Q_p.

Евклидовы образы p-адических чисел, порождаемые итеративной системой функций, являются, как известно, фракталами. Основу этой техники составляет увеличивающий поток, то есть набор функций вида $\left\{e^{-\alpha\cdot i\cdot\ln p}\right\}_{i=1}^{\infty}$ [75], в котором узнаётся последовательность значений ультраметрики $\left\{x\right|_p^{\alpha}=p^{-\alpha\cdot n}=e^{-\alpha\cdot n\cdot\ln p}$ и увеличения разрешающей силы наблюдения.

Существуют различные варианты этой техники [76]. Сюда же можно отнести многочисленные иллюстрации порождения фракталь-

ных образов вариантами итеративной системы функций [63, 77] и обработки изображений [78].

Наиболее прозрачной и последовательной представляется техника А. Роберта [50, p.12-17], из которой мы приведём в качестве иллюстрации лишь основную формулу:

$$\varphi_{\nu,b} : Z_p \mapsto E \quad \sum_{i\geq 0} a_i \cdot p^i \mapsto \theta \cdot \sum_{i\geq 0} \frac{\nu(a_i)}{b^{i+1}} \quad b \geq p \tag{15}$$

Здесь $\nu(a_i)$ – векторизованные цифры, параметры сдвига, задающие разметку евклидова пространства *E*, а θ – масштабный множитель, задающий диаметр фрактального множества, поле его порождения. Сравнивая (15) с (9) и (10), положив $b = p^{\alpha}$ $\alpha \geq 1$, видим, что это есть форма теоремы Островского – порождения рациональных чисел последовательными ультраметрическими измерениями. Различные наборы параметров сдвига и масштаба порождают различные визуальные образы фракталов. Евклидовы образы Q_p получаются трансляцией образов Z_p.

Основная идея нашей модели заключается в переносе исследований из евклидова пространства во фрактальное. Этому соответствует первичность *p*-адических чисел. Вещественные числа и соответствующие им материальные объекты получаются при таком подходе как порождение *p*-адических. Именно этому и соответствуют способы генерации фрактальных образов. Тем самым вся материя оказывается по необходимости имеющей фрактальную структуру.

В литературе известна критика Л. Каданоффа, сравнившего фрактальную геометрию с зоопарком красивых образов, не имеющих физического содержания [79]. В двойной вещественно – *p*-адической модели материи, однако, способы генерации этих образов оказываются сугубо физическими процессами. А как иначе компьютер или Природа могут их генерировать?

Бинарная структура Q_p. Бинарная структура роля *p*-адических чисел неявно содержит указание на дополнительность числовых систем в рамках единого пространства [50]. Она состоит из аддитивной и мультипликативной частей.

Аддитивная часть. Часть $\lfloor x \rfloor = \sum_{i \geq 0} a_i \cdot p^i \in Z_p$ разложения (1) называется целой частью числа. По нашей интерпретации это дисконтинуальное, несвязное множество, то есть фрактал.

Часть $\langle x \rangle = \sum_{i<0} a_i \cdot p^i \in Z \lfloor p^{-1} \rfloor$ разложения (1) по обратной базе называется дробной частью числа. В нашей интерпретации дробная часть представляет вещественные, рациональные числа. Тогда

$$x = \lfloor x \rfloor + \langle x \rangle \quad Q_p = Z_p \oplus Z_{p^{-1}}.$$

Пересечение множеств – слагаемых в правой части проявляет двойной смысл натуральных чисел Z:

$$Z_p \bigcap Z_{p^{-1}} = Z.$$

Например, число 2 есть одновременно и отрезок длины 2 на вещественной оси и индекс ветвления на бинарном лексикографическом дереве.

Поэтому можно говорить о Q_p как о прямой сумме

$$Q_p = Z_p \oplus Z_{p^{-1}} = Z_p \oplus inv\, Z_p = Z_p \oplus R.$$

Физический смысл Q_p появляется, если удвоить смысл натурального числа p как сложения для вещественных чисел и как деления, т.е. умножения на p^{-1}, для p-адических. То есть рассматривать Q_p как конвергентно-дивергентное представление материи. Рассмотрим пример.

Пример. Рассмотрим эксперимент. По команде наблюдателя, производящего счёт «1, 2, 3, ..., n,...» один человек укладывает кирпичи в стену, второй молотком крошит единственный кирпич. Оба следуют счёту и, значит, воспроизводят натуральный ряд. Но воплощения этих процессов счёта прямо противоположны. В первом варианта растёт площадь, или масса, во втором – убывает. Итог первого – связное массивное образование, второго – дискретное.

В этом примере демонстрируется двойственность понятия натурального числа и формальная неотличимость двух процессов – деления и сложения. Первый вариант есть реализация стандартного, экстенсивного, натурального ряда – дробные p-адические числа. Формализацией второго являются целые p-адические числа.

Это означает, что p-адический ряд рассматривается как символическая запись процесса деления некоторого целого. Цифры a_i в позиционной записи в этом случае маркируют последовательные части, а степени базы p^n – определяют характерный размер частицы или уровень иерархии деления.

$$Z_p = \bigcup_{i \geq 0} p^i \cdot Z_p \,.$$

То для всего Q_p получаем (16)

$$Q_p = \bigcup_{i \geq 0} p^i \cdot (\, Z_p \oplus inv\, Z_p)$$

Мультипликативная структура. Отображение $x \mapsto |x|_p = p^{\nu}$ $\nu = ord_p x$ определяет отображение $Q_p \to (R_{\cdot}^{\times})_+ = R_{>0}$ в группу по умножению положительных вещественных чисел, мультипликативную прямую.

Рефлексия. Отдельно выделим рефлексивные свойства пространства Z_p. Будучи числовым эквивалентом фрактальной геометрии, p-адические числа являются самоподобным или рефлексивным пространством. Из известных четырёх основных физических симметрий – сдвига, растяжения, вращения и инверсии (теорема Лиувилля) – самоподобие может производиться только инверсией, которая не входит в арсенал физико-математического моделирования и считается несобственным движением пространства. Она и осуществляет автореферентные движения пространства, реализуя принцип «каждое в каждом», который не может быть воспроизведен движениями материальных деформируемых тел (теорема Гельмгольца), но оказывается естественным для нульмерных множеств, то есть для полевых, нематериальных сущностей.

Междисциплинарная универсальность фракталов в p-адических числах выглядит как формальная их универсальность, которая позволяет объединить все основные ингредиенты математической техники – логику, геометрию, динамические системы [80].

В этом и состоит содержание формального эквивалента проблемы «часть и целое», который составляют p-адические числа. Непрерывность с дискретностью в p-адике образуют дополнительную пару. Соответственно формальная теория движения объекта синтезирует оп-

позитные теории математики – детерминизм различных уравнений и статистику.

Философская интерпретация. Вернёмся к общей проблеме Единое-Многое, о которой говорилось в начале. *p*-адические числа являются полностью несвязным компактным топологическим пространством, то есть это некая целостность, состоящая из отдельных частей, например шаров, которые, в свою очередь, как целостности складываются из меньших частей. Это позволяет принять эти числа в качестве формального аналога проблемы Единое-Многое. Делимость вообще присутствует во всех парадоксах [81].

На этой основе становится возможным расщепление антиномии материи и парадоксальной логики Зеноновых апорий. Как показывает анализ [14] в них парадоксальность возникает как следствие отсутствия формализации делимости. Поэтому в одном их утверждении сливаются Единое и Многое, часть и целое – в апории «О множестве»; локальное и глобальное – в апории «О месте места»; противоположно направленные процессы – в Дихотомии, Стреле, Ахиллесе и черепахе; нульмерность, разрывность и связность, протяжённость – в Стадии. В итоге одно формальное утверждение приводит к прямо противоположным численным результатам. Такой подход к апориям позволяет придать им физическое содержание.

В этом пространстве парадоксальная логика апорий Зенона предстаёт как оппозиция двух явно формулируемых законов и теряет логическую тупиковость.

Пример. Рассмотрим уравнение $y = 2 \cdot x$*, которое описывает движение точки. Но здесь имеем в виду действие двух сил – перемещения и деления. Это выражение годится как для выражения линейного пути, так и для ветвящегося процесса на дереве. В первом случае коэффициент 2 означает скорость линейного перемещения, во втором – скорость деления, число потомков, ветвей дерева. В первом случае движение связно-непрерывно, во втором – разрывно. Нетрудно показать уже геометрически, что чем продолжительнее деление, тем меньше оказывается путь, проходимый точкой по прямой. Поэтому Ахиллес догонит черепаху, если его путь не будет бесконечно делиться, и стрела благополучно достигнет цели. В этом суть апории как математического принципа дуальности – одна и та же формула пригодна для конкурирующих процессов.*

Ещё один вариант двойственности – хорошо известный компьютерный принцип неразличимости операторов и операндов, чисел и слов, является точным воплощением числовой асимметрии в компьютерах. Любая двоичная строка, например “101”, в конвергентном представлении – цифры складываются – представляет число 5. В дивергентном – цифры различаются, представляет собой код, то есть слово. Кодами в информатике представляются команды (операторы), формулы, алгоритмы, свойства, задачи и многое другое. Подробнее об этом [82].

Суммируем. Бинарная числовая структура вмещает две базовые числовые системы – вещественные R и p-адические Q_p числа.

$$R \leftrightarrow Q_p \leftrightarrow Z_p .$$

Физически эта бинарность имеет вид:

материя $\leftrightarrow Q_p \leftrightarrow$ *символ*

или

тела $\leftrightarrow Q_p \leftrightarrow$ *границы*

В качестве единой базы систем счисления принимается число $p = 2$, и теория переносится в поле диадических чисел Q_2**.** Его аддитивная часть воспроизводит вещественные (под)множества R и материальные объекты, мультипликативная Z_2 – фрактальные или идеальные сущности. Геометрия является локально евклидовой, глобально – проективной.

$$P^2(R) = R^2 \cup P^1(R) \Leftrightarrow R^2 \cup Z_2 = Q_2, \tag{17}$$

Антиномия материи выражается отрицанием закона исключённого третьего, общим принципом дополнительности:

$$\begin{gathered} R \leftarrow Q_2 \rightarrow Z_2, \qquad R = inv\, Z_2, \\ R = \neg Z_2, \quad Q_2 = Z_2 \wedge \neg Z_2 \end{gathered} \tag{18}$$

Материальные объекты порождаются двумя числовыми метриками. Вещественная $|x|_\infty$ и p-адическая $|x|_2^D$ связаны степенной зависимостью

$$|x|_\infty = C \cdot |x|_2^{-D} = C \cdot 2^{-D}, \tag{19}$$

где D – фрактальная размерность.

Метрика $|x|_2^D$ различает уровни иерархии, вещественная $|x|_\infty$ выделяет материальные объекты. Структура системы становится кластерной.

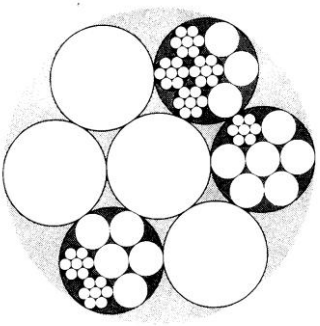


Рис. 28. Строение множества Z_7 (Schilhoff W. H. *Ultrametric Calculus*. CUP, 1984)

Материальные объекты в этой схеме получают двойное представление. Первое – видимое физическое, представленное вещественными числами, второе – невидимое информационное, логическое, представленное *p*-адическими. В итоге каждый объект есть комбинация информации и материи

$$K = a_i\, a_{i+1} \ldots a_k\, (2^{k+1} Z_2) \qquad (20)$$

Строка в (20) есть информационная координата объекта размером $2^{-(л+1)D}$. В практике измерений её соответствуют размерности физических величин.

Неопределённость, случайность. Последний по порядку, но не по значению есть вопрос о моделировании случайности. Здесь идее модели первичности *p*-адических чисел соответствует первичное же понимание случайности как непредвиденности. Непредвиденность, непредсказуемость, невычислимость, недоказуемость имеют общий смысл неформализуемости или непредикативности в терминах логики.

Математика имеет своим материнским понятием понятие определимости. Переменная, функция, множество, событие определимы, если можно предъявить формулу, алгоритм, уравнение, теорию, которые исчерпывающим образом описывают их свойства. Неформально:

определимые переменные стоят слева от знака равенства, их можно заменить в теории другими, эквивалентными переменными и/или формулами.

В математике известна так называемая пропасть между дискретным и непрерывным и радикальное различие вероятности и детерминированности. Понятия этих областей несводимы друг к другу, взаимно невыразимы.

В нашей модели такой неопределимой функцией является ультраметрика [49]. В вещественном анализе она просто отсутствует, в логике делимость также не входит в набор правил. Лишь в функциональном анализе она присутствует под видом sup-нормы, входящей в теорию функций как самостоятельная функция.

Аналогичную аксиоматику, повторяющую свойства ультраметрики, имеет мера возможности в теории сложных систем, в рамках которой устанавливается её связь с обычным понятием вероятности [83].

Мы будем пользоваться лишь первичной интерпретацией ультраметрики, отметив её связь с вероятностью следующим образом. Множество строк нулей и единиц в разложении чисел может представлять как последовательность независимых испытаний – бросаний монеты, так и p-адическое число с данной величиной ультраметрики. Первое представление ведёт к обычному понятию вероятности, второе, сопряжённое с ним, к неопределённости, выражаемой свойством неопределимости ультраметрики.

Как следует из аксиом теории возможностей, эта мера неопределённости согласована с решёточной структурой и, соответственно, с булевой алгеброй. Её значение для сложных систем следует из представления Q_p как трансляции своих копий – она более адекватна открытым системам. Величина ультраметрики имеет локальный характер и не зависит от окружения в евклидовом пространстве. Тем самым её включение в уравнения не должно вызывать сложностей.

Непредикативность обычного понятия вероятности также очевидна – её локальное значение зависит от разбиения всей области. Поэтому введение вероятностной меры на множестве является неразрешимой задачей [84, с.80-81], что и доказывает практика применения теории вероятностей – равномерное распределение является единственным априорным способом введения вероятностной меры.

12. К ТЕОРИИ ИЗМЕРЕНИЙ ФРАКТАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ

Связь формальных методов математики с предметной областью идет через методы измерений. Любая модель, не продолженная моделью измерений, которая призвана связывать параметры модели с параметрами техники и методов измерений, повисает в воздухе и ее результаты остаются внутренними и недоступными той науке, для которой эта модель строилась.

В общей теории измерений также можно видеть двойственность природы величин. Она восходит к теоремам О.Гёльдера о двух способах представления измерений – экстенсивном и интенсивном (мультпликативном). Эта теорема является предшественницей теоремы Островского.

Именно, согласно теореме Гёльдера (1901г.), существует два способа формального представления измерений – аддитивная прямая действительных чисел $\langle R, +, \geq, 0 \rangle$ и мультипликативная прямая действительных чисел $\langle R, \times, \geq, 1 \rangle$ [85]. С другой стороны, также известно, что все физические переменные можно свести к измерению длины и времени [86].

Согласно этой бинарности измеряемые величины распадаются на два класса, которые в разных контекстах именуются по разному: экстенсивными и интенсивными, ковариантными и контравариантными, продольными и поперечными [87, гл. 2.3, 3.2]. Естественность проявления канонически сопряжённых величин – пространства и времени, как результата действия фрактальной геометрии, которое аналогично преобразованиям Фурье и Лапласа, впервые, по-видимому, акцентирована в [88, Ch.2].

В нашей модели, объединяющей две числовые системы R и Z_2, естественно сопоставить этому делению пару соответствующих им метрик. Метрики и являются базовыми функциями для разработки методов предметных измерений.

Рассмотрим этот ход рассуждений. В арифметике два числа x и y считаются тем более близкими (и даже равными), чем на большую степень простого числа p они делятся:

если $x = p^m \dfrac{a}{b} \quad y = p^k \dfrac{c}{d}$,

где $\dfrac{a}{b}, \ \dfrac{c}{d}$ – несократимые дроби, то $|x|_p^\alpha = p^{-\alpha \cdot m}$ и $|y|_p^\alpha = p^{-\alpha \cdot k}$ – есть выражения их *p*-адических величин, которая, по теореме Островского, является второй, наряду с обычным модулем $|x|_\infty$, из двух возможных, допускаемых рациональными числами. Здесь $\alpha > 0$ соответствует фрактальной размерности и физически означает скорость убывания размеров частиц при делении образца.

Тогда

$|x|_p^\alpha \approx |y|_p^\alpha$, если $m \approx k$ и если, например, $m >> 1$ или $m \to \infty$, то $|x|_p^\alpha \to 0$, то есть большие числа становятся *p*-адически малыми.

Отсюда формальное выражение двойственности числа. Из теоремы Островского, следует, что рациональное число можно представить как совместное действие процессов деления и сложения, которые выражаются через два натуральных ряда и двойной смысл представления *p*-адического числа

$$\frac{a}{b} = |x|_\infty \cdot |x|_p \quad x - \text{ рациональное число.}$$

Двойной смысл натурального числа приводит к теории измерений с двумя типами переменных. С точки зрения физико-химии их значение состоит в том, что они вводят в теорию исчерпывающий набор формальных математических моделей измерения – архимедовы и неархимедовы, т.е вещественные $|x|_\infty$ и *p*-адические $|x|_p$ величины, которые должны быть согласованы с физико-химическими измерениями и параметрами. В первом приближении эта пара видится аналогом пары интенсивные – экстенсивные переменные в физико-химии [89, гл. III, с.91]. Эти переменные обычно априори рассматриваются как независимые, в то время как из формальной схемы измерения следует необходимость рассмотрения их во взаимной связи.

Основа этой аналогии в том, что архимедова метрика аддитивна,

$$|a+b|_\infty = |a|_\infty + |b|_\infty = |a| + |b| \le 2 \cdot \max\{|a|_\infty, |b|_\infty\},$$

неархимедова – субаддитивна

$$|a+b|_p \le \max\{|a|_p, |b|_p\}.$$

Это можно сопоставить с делением термодинамических переменных на экстенсивные и интенсивные. В термодинамике к первому типу относятся естественные переменные: ***S*** – энтропия, ***V*** – объем, ***M*** – масса, ***N*** – число частиц. Ко второму: ***T*** – температура, ***P*** – давление, **μ(*J*)** – химический потенциал. Детальная теория измерений в таком удвоенном варианте является делом отдельной работы.

В нашей модели *R* соответствует архимедовой метрике, Z_2 – неархимедовой ультраметрике. Способы измерений в общем можно строить с точки зрения связи двух этих способов измерений, исключительность которых известна из алгебры как исключительность числовых систем *R* и Z_2 и теоремы Островского [65].

Ввиду того, что из гиперболического характера связи метрик

$$|x|_\infty = \frac{\text{const}}{|x|_p}$$

следует

$$\frac{d|x|_\infty}{d|x|_p} = -\frac{\text{const}}{|x|_p^2} \ne 0 \text{ и } \frac{d|x|_p}{d|x|_\infty} = -\frac{\text{const}}{|x|_\infty^2} \ne 0,$$

одна из них может рассматриваться как движение относительно другой, т.е. два пространства *R* и Z_2 являются парой: координата – Z_2, импульсы – ***R***. Конечно, в качестве метрик были взяты две простейшие функции. На самом деле метрик существует множество. Но все они делятся на эти два сопряженных класса.

Связь между ними осуществляется преобразованием Лежандра, которое аналогично переходу из пространства координат в пространство импульсов в теоретической механике [90, с.59]. Стандартное преобразование Лежандра использует дифференцируемые функции, однако

существует его вариант и для недифференцируемых зависимостей, который пригоден для фрактальных множеств [91, p.65-68].

Можно показать, что эта пара функций метрик соответствует общему принципу двойственности между двумя базовыми пространствами и, тем самым, осуществляет преобразование Лежандра. Изложим эту идею схематически.

Как следует из рассмотрения связи между целым объёмом/объектом и его частями, которая появляется в вычислении фрактальной размерности и на лексикографическом дереве

$$|x|_\infty = \sum |x|_p \propto \int_V |x|_p$$

Здесь $|x|_p$ как доля целого имеет смысл дифференциала $|x|_p \propto d(|x|_\infty)$.

Рассмотрим функцию $f(t) = \int_0^t |x|_p d\xi = |x|_\infty$. Преобразование Лежандра заключается в минимизации функции $F(s,t) = s \cdot t - f(t)$, которая задаёт переход к новой переменной s. Дифференцируя, получаем

$$\frac{dF}{dt} = s - |x|_p = 0.$$

Эта параллель между типами измерительных функций и физико-химических переменных позволяет ставить задачу дальнейшей разработки и обоснования расширенной теории измерений.

Заканчивая раздел о p-адических числах, можно сказать, что в нашей интерпретации не вводится новое пространство, отличное от физического, но придаётся физическому дополнительная координата, позволяющая вскрыть те его свойства и возможности описания, которые не наблюдаются при вещественном анализе. Разница в том, что в таком, химическом, пространстве появляется сеть границ материальных образований, их частей, частей их частей и т.д. Именно на границах возникают физические взаимодействия и именно границы являются тем символическим пространством, в котором существуют формальные теории. Чем меньше характерный размер частиц, тем длиннее и сложнее теории, описывающие физическую картину.

p-адические числа имеют общую алфавитную основу с вещественными числами, но в численном выражении обладают дополнительными свойствами. Вещественная связность и непрерывность дополняются разрывностью, протяжённость – делимостью, евклидова геометрия – неевклидовой, проективной и т.д. Их структура в точности совпадает со структурой формальных языков теоретической информатики, которые в виде теорий, законов, уравнений, формул являются выражением свойств вещества.

Поэтому материальные и символические характеристики вещества представляются неразделимыми как в зеркальной паре. Иными словами, *p*-адические числа это те же вещественные, но с дополнительными свойствами.

Дискретно-непрерывный фрактальный объем может рассматриваться наряду с итеративной системой функций, *p*-адическими числами и нейросетями – эквивалентами универсальных машин Тьюринга как решетка с точки зрения общей теории решеток и порядка [92]. Эта решеточно-теоретическая схема согласуется с логикой квантовой механики, т.е. продолжается на область исчезающе малых размеров. Эта логика состоит из утверждений о подмножествах гильбертова пространства, которые образуют частично упорядоченное множество или решетку [93].

Этот рассмотренный ряд результатов, согласованный идеей бинарности фракталов, приводит к двойственности Стоуна, которая играет связующую роль между физикой и информатикой. Как показал Стоун, строение булевых алгебр и пространств типа *p*-адических чисел тождественно. Утверждения о фрактальной материи и о булевых алгебрах получаются друг из друга простой переформулировкой [94]. Поскольку булева алгебра лежит в основе всей формальной техники, порождающей теории, уравнения, формулы, то теорема Стоуна означает сопряженность топологических трансформаций материального (фрактального) объекта с преобразованиями теорий и уравнений. Этими объектами в физике отображаются свойства веществ, частиц и полей. Поэтому теорема Стоуна неявно дает основу для разработки моделей различных эффектов, возникающих на координате делимости.

13. ГОЛОГРАФИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАТЕРИИ

Известно, что реальные материалы представляют собой термодинамические системы, состоящие из двух компонент – полей и конденсированной, плотной материи. С математической точки зрения они являются комбинацией дискретных систем – атомно-молекулярных решеток, графов и непрерывных свойств полей. Такие гибридные системы уже исследуются в теоретической информатике [95].

Так называемые физические фракталы являются усечёнными и, потому, материальными, наблюдаемыми объектами. Однако фрактальная идея может быть использована также и для воспроизведения полей, то есть невидимых сущностей [96]. Им соответствуют точные фракталы, точная масштабная симметрия. Для объединения этих сущностей процесс анализа переносится во фрактальное или p-адическое пространство – время с дальнейшим использованием двойственного характера p-адических чисел.

В работе [97] показано, как треугольник Серпинского, содержащий большие лакуны (дыры) превратить в однородную полевую сущность. Для этого в процессе итерации образования фрактала происходит не только самоподобное деление заполненных треугольников (частей на n-ном уровне иерархии), но и самоподобное же заполнение лакун копиями всего целого треугольника (фрактала). Получающийся фрактал является масштабно-инвариантным с бесконечной глубиной скейлинга, однородным – он остается тождественным при аддитивных преобразованиях, плотным в евклидовом пространстве – присутствует в сколь угодно малой окрестности точки. Поэтому для ренормгруппового подхода сохраняется трансляционная симметрия.

Эту схему можно применить к любому из известных математических фракталов. В пределе делимости исчезает различие между конкретными формами – треугольниками, кругами, квадратами или фигурами неправильной геометрии. Пространство приобретает рассеянную, иррегулярную структуру канторова множества точек, в которой каждая область подобна всему пространству.

Таким образом воспроизводится фрактальная структура материи Вселенной от кластеров галактик до (размера ~ 5 Мпс) до субъядерных масштабов (~ 10^{-13} см). Эта конструкция, по сути, вводит в евклидово

пространство свернутую координату размера – делимость как степень свободы. Тем самым структура пространства приобретает бинарную физико-информационную природу.

И это пространство имеет смысл выбрать для их теоретического описания. Оно состоит из двух подпространств – лексикографического дерева с его интерпретацией в виде p-адических чисел, и привычного евклидова пространства. Их комбинация в теории фракталов известна как самоаффинные фракталы – фракталы, равномерные по протяжённости. Они сохраняют все основы физического движения, установленные теоремой Лиувилля – сдвиг, растяжение, вращение и инверсию, и расширяет анализ аппаратом теоретической информатики. Из этих симметрий и состоит итеративная система функций. Соответственно вещественно-значные методы анализа дополняются методами и анализом p-адических чисел.

Фрактальная идея строения материи и практика теорий материаловедения показывают, что нет никакой необходимости ограничивать аппарат только вещественными числами. Решать нужно задачи науки о материалах, а не избранные задачи одного из разделов чистой математики. Введение, например, ультраметрических пространств в теорию показывает их физическую содержательность [98].

Тем самым паре материя-поле можно сопоставить пару: вещественные R – p-адические числа Z_2 и перейти к описанию вещества как термодинамической системы алгебраическими, топологическими и решеточными структурами, которые согласованы с эмпирией фрактальной теории. Эта возможность следует также из того факта, что все теории поля используют вещественные числа и функции, которые по технике доказательства теоремы Гёделя о неполноте – арифметизации синтаксиса теорий, могут быть заменены арифметикой строк. Выразительные потенции обоих систем одинаковы. Недавно эта идея – моделирования физических полей алгебраическими – высказана и в применении к задачам материаловедения [99].

Суммируем рассуждения. Введение координаты делимости в набор степеней свободы вещества означает введение лексикографического дерева и p-адических чисел в дополнение к вещественным. Бесконечной делимости, нулевым размерам соответствуют безмассовые частицы и физические поля. Их математические характеристики – точ-

ные фракталы, канторова пыль – нульмерные множества. Известно, что классические фракталы – канторово совершенное множество С как нульмерное множество имеет универсальные свойства. Мы приводим их в связи с целями изложения.

1. Любое подмножество в R^3 можно получить проекцией из нульмерного [69, 100]. То есть объект любой формы порождается фракталом.

2. Итеративная система функций, рассматриваемая как динамическая система и ее аттрактор – нульмерное канторово множество – кодируют язык любой машины Тьюринга [70]. Это значит, что любая формальная теория, любое свойство вещества также содержится в фрактальной материи.

3. По теореме М.Стоуна о двойственности булевых алгебр и фрактальных пространств эти два универсальных свойства фрактальной материи неразрывно связаны и взаимно обусловлены. Её смысл в том, что булева алгебра BA – основа логической и считающей техники, изоморфна системе 2-адических чисел и канторову множеству С. Схематично

$$BA \cong Z_2 \cong C.$$

Тем самым движение по координате размера сопровождается изменением как физических характеристик, так и свойств фрагментов материи, которые выражаются теориями, уравнениями и формулами. Этим на качественном уровне отражаются размерные зависимости, которые являются одним их центральных явлений в материаловедении.

Сведём качественные рассуждения в общую формулу. В её основе лежит универсальность канторова совершенного множества, которое является не только классическим примером материального фрактала, но и присутствует во многих разделах математики. Канторово множество C, как не раз было показано, изоморфно Z_2 отличается от Q_2 отсутствием одной точки.

Идея синтеза в том, что с каждым присутствием $\tilde{N} \cong Z_2$ в одном из разделов математики связывается одно из свойств материи, которое моделируется теорией этого раздела, и которая также имеет ту же числовую структуру и топологию $\tilde{N} \cong Z_2$.

Вся совокупность этих граней множества образует расширенное физико-химическое пространство, включающее процессы различной (теоретической) природы:

$$C \cong C_{matter} \cong \exp(C) \cong 2^C \cong Z_2 \cong [IFS \equiv \{0,1\}^N] \cong$$

$$\cong [Z_2 \to Z_2] \cong C(Z_2,\ Z_2) \cong H \cong C_{Bool} \cong C_{Stone} \equiv C,$$

здесь знаки эквивалентности (изоморфизма) означают по порядку слева направо:

C_{matter} – модель делимой материи – из фрактальной теории;

C является экспоненциально полным, т.е все преобразования материи не меняют её числовой основы [101].

Такое распределение материи представляет собой спектр функций истинности булевой алгебры [102].

Это материя, обладающая числовыми свойствами, Z_2 есть топологическая алгебра [50].

Такое строение материи (нульмерное, фрактальное) совпадает с формальными языками теоретической информатики, является областью для вычислительных структур (итеративная система функций – IFS, является центральной техникой порождения фракталов) [63, 92]. Это символическое пространство, область действия символической динамики.

Как решётка она совпадает с пространством непрерывных функций над собой [103].

Такой числовой или алгебраический образ материи представим своим полем непрерывных функций по теореме Стоуна [94].

Множество 2-адических чисел представляет собой гильбертово пространство с ортонормированным базисом в виде системы ван дер Пата [50, p. 179-195].

В таком виде материя является также и булевой алгеброй – основой символьной техники (по той же теореме Стоуна).

Фрактальное распределение материи как эквивалентное, по формулировке М.Стоуна, булевой алгебре, носит название стоунового пространства. Стоуново пространство символических объектов есть оборотная сторона канторова множества как фрактальной модели материи.

Упомянутая теорема Стоуна, связывающая фрактальную материю с пространством логических выводов, означает естественность связи нефизических сущностей – свойств веществ с материальными характеристиками. То есть движение материи сопровождается движением свойств. Эта теорема может рассматриваться как основная в фрактальной теории химической (и биологической) материи, имеющая смысл материального эквивалента функциональных свойств или функционального эквивалента материальных преобразований. Приведенная цепочка изоморфизмов, то есть формальных тождеств, есть её расширенный вариант, вскрывающий и формализующий в основе причинную связь структуры (решётки) со свойствами вещества.

Здесь ясно видна одна особенность модели, которая имеет прямое отношение к заявленному воспроизведению свойств. Мы привыкли пользоваться вещественными и рациональными числами как материалом (аргументами) для считающей техники. Уравнения, формулы и алгоритмы в курсах всегда рассматриваются как нечто другое. Они и составляют «начинку» более сложных, навороченных объектов – линейных, функциональных и топологических пространств, множеств, логик, геометрий.

Подмножествами и подпространствами вещественных, рациональных и комплексных чисел разных геометрических форм обычно моделируется структура и форма материальных объектов. Затем на неё навешивается то или иное функциональное пространство и геометрия. В математической физике – это обычно пространство непрерывных функций и евклидова геометрия. Этот арсенал оказался плохо приспособленным к фрактальной геометрии и феноменологии связей свойств и материи.

Но возможен и существует в математике, хотя и не входит в общее образование, более широкий взгляд на действительные (также и комплексные и p-адические) числа. Именно: они могут рассматриваться как алгебры, функциональные и топологические пространства. Тем самым как модели материальных объектов они несут информацию об уравнениях и связях переменных, получаемых измерением.

Если моделировать фракталы числовой асимметрией – сопряжением вещественных и p-адических, то эти факты оживают и приобретают нетривиальный и физически содержательный смысл. Числовые

системы становятся одновременно и материей и её свойствами. То есть материальные трансформации оказывается причиной символических и наоборот. Это и выражает голографическая схема или нелинейная модель материи.

Пространство непрерывных функций $Z_2 \to Z_2 \cong C(Z_2, Z_2)$ можно рассматривать как пространство направлений, задаваемых их градиентами, то есть как полевые сущности. Эта идея – моделирования полей *p*-адическими числами, выдвинута в *p*-адической физике [36]. Поэтому, поскольку нульмерных множеств много не бывает, а существует только одно, голограмма представляет числовую модель поля, общего материальным и идеальным, символическим объектам. Поля есть сущности общие физике и нефизическим наукам – биологии, геологии, географии.

Получилось пространство с геометрией подобной листу Мёбиуса: движение слева направо приводит от материи к пространству символов. Именно все процессы – символические, материальные – протекающие в одном из перечисленных пространств делят общий ресурс – фрактальный объём С. Это соответствует метафоре фрактальной геометрии – «процессы, состоящие из процессов», «системы, состоящие из систем», «поверхности, состоящие из поверхностей». Тем самым универсальный процесс делимости получил формальное воплощение в универсальности фракталов и *p*-адических чисел.

Рассмотрим физическую конкретизацию модели как подход к формальному моделированию вещества в химии. Идея заключается в использовании рефлексивного свойства пространства *p*-адических чисел, которое известно как кривая Пеано и заключается в изоморфизме этого пространства произведению счётного числа своих копий:

$$Q_2 \quad \cong \quad Q_2 \times Q_2 \times Q_2 \times \ldots \times Q_2 = Q_2^N .$$

И, соответственно,

$$Z_2 \quad \cong \quad Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \times \ldots \times Z_2 = Z_2^N .$$

Поэтому, поскольку структура Q_2 по построению бинарна, то есть

$$Q_2 = R \oplus Z_2 ,$$

получаем

$$R \oplus Z_2 = (Z_2 \times Z_2 \times \ldots Z_2) \oplus R^N .$$

Размерность N многомерного пространства R^N вещественных чисел совпадает с числом сомножителей в скобках. В этом выражении каждый сомножитель имеет смысл отдельной теории из числа тех, которые привлекаются для исследования вещества. Поставим в соответствие каждому из этих сомножителей его отдельную интерпретацию в цепочке изоморфизмов – поля напряжений, потоков тепла, электронов, проводимостей разного рода. Это позволяет совместить в одной модели физические теории, символические преобразования и схемы, результаты теории решёток для атомно-молекулярной структуры, методы гильбертова пространства и банаховых алгебр функций. Общим ресурсом такой семантически многомерной модели является экстенсивно-интенсивная переменная – фрактальный объём, который стоит в левой части.

Это фрактальное представление поля как синтеза различных полей – электрического, магнитного, теплового, поля скоростей и т.д. Каждое Z_2 соответствует одному из них. Тем самым каждому Z_2 соответствует своя физическая теория поля, свой формализм. Общее уравнение поля имеет голографический характер, то есть каждое измерение его специальными приборами выявляет свою физику, подобно тому как световая голограмма проявляется при монохроматическом освещении. Вещественным числам соответствуют плотности, частицы, p-адическим – полевые компоненты. Для электрического – это электроны и напряженность поля, для теплового – молекулы и температура и т.д.

Отсюда ясна логико-топологическая структура модели. Она имеет вид антиномичной или несовместной системы уравнений:

$$Z_2(|x|_\infty) = Z_2 = Z_2(|x|_2).$$

Здесь Z_2 как чисто геометрическая сущность – объём тела определённой формы, преобразуется под действием двух причин. С одной стороны это конвергентные процессы, отображаемые левым членом, с другой – дивергентные – членом справа.

Тем самым в общем уравнении воспроизводится лежандрова, то есть двойственная, структура термодинамики – экстенсивные и интенсивные переменные (см. выше).

В итоге мы получаем полевую основу для уравнений состояния и, соответственно, термодинамических потенциалов, которые, как из-

вестно, являются суммой произведений экстенсивных и интенсивных величин. Это так для основных уравнений в естественных переменных – давления, объема, числа частиц, энтропии, температуры и химического потенциала.

С одной стороны, модель воспроизводит базовые положения термодинамики, с другой – новый формальный облик целостной материи подталкивает к поиску адекватных методов её моделирования. Если рассматривать фрактальный объём как поверхность, имеющей информационную числовую природу, то описанная модель находится в согласии с голографическим принципом в космологии – науке о мега масштабах материи (см. Введение), пригодным для энергий и масштабов науки о материалах. Здесь можно ожидать новых следствий, полученных формальным путем.

14. ГЕОМЕТРИЯ КАК ПАРАМЕТР

Выше отмечалась детерминированность свойств веществ от масштаба, которая составляет специфику материаловедения. Суть этой проблемы в том, что не только внешний размер, но и структура образца, его внутренняя геометрия оказывают влияние на его свойства и функциональные характеристики. Такая двойственность недоступна стандартным методам моделирования. Понятие структуры или объёма является первичным и неформализуемым в математической физике. Поэтому, например, теории сплошных сред часто начинаются с фразы «рассмотрим некоторый объём, состоящий из точек …».

Выходом из затруднения может служить формализация антиномии материи, решением которой является понятие фрактального объёма. Такой объём как целое может быть включён в стандартные модели сплошных сред и одновременно, как составной, – в статистические теории. В этом случае общая схема антиномичного уравнения (см. выше) примет вид:

$$D(a, x, t) = V(t, \tau) = S(a^*, x^*, \tau),$$

в котором слева стоит формулировка краевой задачи, определяющей внешнее воздействие, справа – формулировка статистической модели, отражающей внутреннюю динамику. Соответственно сопряжены вре-

менные и физические переменные моделей. Исходным пунктом для вывода уравнений служат, по идеологии модели, интегральные соотношения. Интегральные соотношения несут информацию о суммировании некоторой распределённой величины, то есть неявно основаны на той же конвергентно-дивергентной схеме модели. Например, для закона сохранения массы, в виде

$$m = \int_V \rho \cdot f \cdot dV \approx \sum_i \rho_i \cdot f_i \cdot w_i ,$$

где $\rho,\ f,\ w$ – плотность массы, плотность функции распределения вероятностей и элементы объёма соответственно, дифференцированием по всем трём переменным можно получить такое самодвойственное дифференциальное уравнение, в котором объём движется в двумерном времени (t, τ). В этом случае производная по времени имеет смысл дивергенции по двум временным осям.

Подробная разработка такой модели включает в себя двойные определения переменных, функций, производных и интегралов и является делом отдельной работы. Мы, чтобы остаться в рамках основной идеи, ограничимся более простой схемой, которая заключается в прямом переходе от дифференциальных уравнений к их матричным аналогам.

Матрицы относятся к некоммутативным числовым объектам [55, гл. 2]. Матрицами могут быть представлены не только линейные преобразования координат и векторов, конечно-разностные схемы краевых задач, но и структуры распределённых объектов задаются матрицами смежности, расстояния, иерархическими. Их числовая, алгебраическая делает возможным перенесение на распределённые системы многого из основных положений физики.

Неформально говоря, если какое-то уравнение верно для элементарного объёма, то оно верно для каждого из аналогичных объемов, составляющих структуру, заданную своей матрицей смежности и, следовательно, для всей их совокупности.

В этом случае исходными формулировками, допускающими такой приём, служат именно интегральные соотношения. Матричное исчисление есть, по сути, их дискретный аналог, аналогичный разностным схемам решения дифференциальных уравнений. Обычно эти

схемы рассматриваются как аппроксимация гладких зависимостей. Однако на фрактальных структурах, где гладкости нет по определению, ситуация с адекватностью обратная. Гладкие функции стоит рассматривать как огрубление, сглаживание, регуляризация или усреднение иррегулярных распределений, что, очевидно, является привычной практикой.

Распределённый или фрактальный объём есть чисто геометрическое понятие, его порождение и преобразования хорошо изучены в теоретической информатике. Для этого разработано большое количество алгоритмов компьютерной графики, имеющих надежную математическую основу в виде итеративной системы функций, динамических систем и теории меры. Конструктивная геометрия тел *(constructive solid geometry)*, имеющая целью воспроизведение реальных трёхмерных объектов, является развитием этой техники и также основана на этой математике.

Для целей настоящей работы мы отметим лишь общую числовую основу всех вариантов этой техники. Они основаны на представлении фрактальной материи строками символов, то есть 2-адическими числами. Этот приём приводит, как говорилось выше, к технике итеративной системы функций и, соответственно, к матрицам, элементами которых являются *p*-адические числа.

Общая формула числа из канонического представления *p*-адических чисел (1) имеет вид произведения вещественной и информационной части:

$$x = p^{D \cdot n}(a_0 + a_1 p + \ldots + a_k p^k + \ldots) = p^{D \cdot n}\xi .$$

Аналогично матрицы как числовые объекты, состоящие из набора чисел этого вида, можно представить в виде

$$M = M_R \circ M_Z .$$

элементами которых являются вещественная и *p*-адическая части числа соответственно, а умножение является поэлементным, адамаровым умножением матриц.

$$A = B \circ C \quad a_{ij} = b_{ij} \cdot c_{ij} .$$

Вещественная матрица M_R преобразуется обычными матричными преобразованиями, информационная M_Z – кронекеровым умножением матриц.

Основой применения матриц служит аналогия между фрагментированием объема на отдельные части и разложением гильбертова пространства на ортогональные дополнения. Тогда весь объект рассматривается как тензорное произведение этих подпространств.

Основные факты кронекерова или тензорного умножения матриц [104].

1. Для двух произвольного порядка матриц *A* и *B* размеров $m \times n$ и $p \times q$ соответственно

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a \begin{bmatrix} 1\,2\,3 \\ 4\,5\,6 \\ 7\,8\,9 \end{bmatrix} & b \begin{bmatrix} 1\,2\,3 \\ 4\,5\,6 \\ 7\,8\,9 \end{bmatrix} \\ c \begin{bmatrix} 1\,2\,3 \\ 4\,5\,6 \\ 7\,8\,9 \end{bmatrix} & d \begin{bmatrix} 1\,2\,3 \\ 4\,5\,6 \\ 7\,8\,9 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\ 2a\ 3a & b\ 2b\ 3b \\ 4a\ 5a\ 6a & 4b\ 5b\ 6b \\ 7a\ 8a\ 9a & 7b\ 8b\ 9b \\ & \\ c\ 2c\ 3c & d\ 2d\ 3d \\ 4c\ 5c\ 6c & 4d\ 5d\ 6d \\ 7c\ 8c\ 9c & 7d\ 8d\ 9d \end{bmatrix}$$

определено их кронекерово произведение. Результат умножения – матрица размера. Физически – это дивергентный процесс деления исходного объекта, заданного матрицей инциденций и расстояний.

2. Кронекерово произведение некоммутативно. Как дивергентный процесс оно необратимо.

$$A \otimes B = C \quad \Rightarrow C \otimes B^{-1} = (A \otimes B) \otimes B^{-1} = A \otimes (B \otimes B^{-1}) = A \otimes I_{n \times n}$$

где *n* – порядок *B*. Для нашего примера

$$A \otimes I_{3\times 3} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & d \end{bmatrix} \neq A$$

Тем самым получается матричный аналог для явления нарушения симметрии в физике конденсированной среды [15].

3. Кронекерово произведение совместимо с обычным матричным умножением. Сохраняются также понятия собственных чисел и векторов, которые легко получаются из правил умножения.

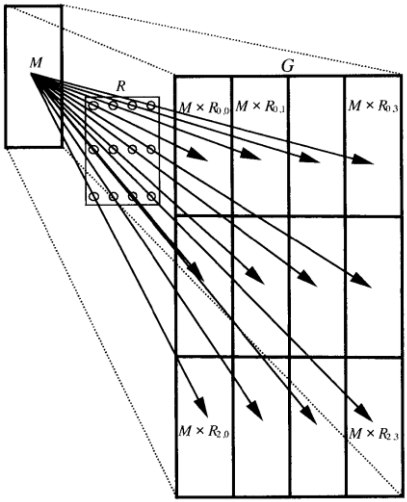
$$C = A \otimes B \quad \Rightarrow \quad \Lambda_C = \left[\lambda^C_{ij} \right] = \left[\lambda^A_i \cdot \lambda^B_l \right].$$

4. Исходная матрица смежности структуры под действием этого умножения преобразуется в матрицу смежности новой структуры [105].

5. Как видно из примера, физическое действие кронекерова умножения аналогично действию многомерной итеративной системы функций. Известна связь дивергентной геометрии матриц кронекерова умножения и фракталов [106, Ch. IX, X] и [107, Ch.IX, P.162].

Фрактальные свойства кронекерова произведения ясны из рисунка [106].

а) Кронекерово произведение – двумерная итеративная система функций.

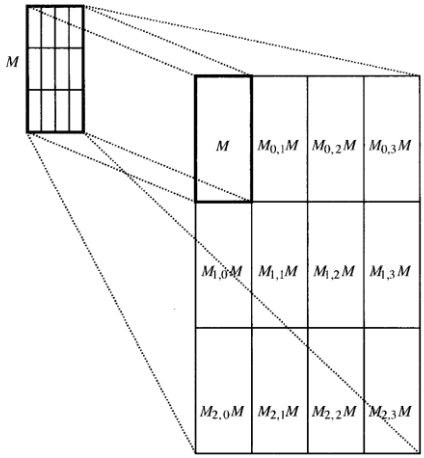


Макроскопический вид матрицы $G = M \otimes R$.

b) Рефлексивная, самоподобная матрица

$$\underset{M}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}} \qquad \underset{M^{(2)}}{\left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ \hdashline 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}$$

Фрактальная матрица $M^{(2)}$



Самоподобие фрактальной матрицы.

Рис. 29. Фракталы и Матрицы

6. Кронекерово произведение появляется в многих разделах вычислительной науки [108], в задачах статистической и квантовой механики [109].

7. Дифференциальные и интегральные операции осуществляются поэлементно, так же как и для обычных матриц. Для нас интересными являются представление интегральных соотношений физики. Например, вычисление кратного интеграла по объёму выглядит следующим образом:

$$\iiint F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \approx \sum_i \sum_j \sum_k w_i^x \cdot w_j^y \cdot w_k^z \cdot F(x_i, y_j, z_k) =$$

$$= \quad (w^x \otimes w^y \otimes w^z)^T \cdot F(x \otimes y \otimes z).$$

Подставляя в это выражение вместо подынтегральной функции $F = \rho \cdot f$, где $\rho -$ плотность вещества, f – плотность распределения вероятности, придем к выражению для распределённой массы. Дифференцированием этого выражения можно получить матричный вид уравнения сохранения массы.

8. Действие кронекерова умножения как физического процесса деления материи, как движения по координате размеров частиц ведёт к увеличению размеров матриц, к уменьшению размеров её элементов. В пределе получаются бесконечномерные матрицы как операторы в гильбертовом пространстве квантовой механики [15 гл.2]. Тем самым матричная интерпретация делимости материи оставляет инвариантной ось размеров.

В связи с разрывной геометрией фракталов естественно считать первичными векторно-матрично-тензорные зависимости. Матричные вычисления основаны на базовых операциях компьютерной математики – сдвиге и сложении, которые являются физически реализуемыми. В этом случае физические величины оказываются вычислимыми посредством физических же процессов, а не программами вычислений интегралов и функций, и поэтому становится более прозрачной их связь с трансформациями материального объекта. Тем самым цифровая философия материи получает подкрепление со стороны физики, а компьютерная техника моделирования материалов становится физическим процессом.

С учётом этой информации рассмотрим эволюцию фрактального объёма, то есть структуры с матрицей смежности V. Согласно изложенному эволюция объёма происходит по двум временным осям – внешнему t и внутреннему по оси размеров – τ. Поэтому

$$V(t,\,\tau) = V_R(t) \circ V_Z(\tau)$$

и, соответственно,

$$dV = \frac{dV_R}{dt}\,dt + \frac{dV_Z}{d\tau}\,d\tau \cdot$$

Структура объема на N-й стадии деления получается итерацией кронекерова умножения матрицы M_Z обобщённой итеративной системы функций вида

$$V_Z(\tau = N) = M_Z \otimes M_Z \otimes \ldots \otimes M_Z = M_Z^{\otimes N}$$

и

$$V^N(t,\tau) = V_R(t) \circ M_Z^{\otimes N}.$$

Совокупность элементарных объёмов представляются матрицей

$$\left| V^N(t,\tau = N) \right|_p = \left[v_{ij} \right|_p = V_R(t) \circ \left[\left| m_{ij} \right|_p^D \right]^N,$$

где D – фрактальная размерность. Элементы степени матрицы M_Z кодируются 2-адическими строками, представляющими пути по дереву делимости или разложение индексов в позиционный числовой ряд (см. рис).

$$(i, j) = a_{0i}\, a_{1i} \ldots a_{N-1i}\, a_{Ni} a_{N+1j} \ldots$$

Тогда координата оси размеров $l_N = -\ln 2^{-D \cdot N} = D \cdot N$. С матрицей объёма оказывается сопряжённой символическая матрица свойств $P_N = \left[a_0 a_1 \ldots a_N \right)_{ij}$. Каждому диапазону значений координат размера соответствует своя теория. Упрощая различные теории, выражающие свойства вещества, на оси размеров можно расположить следующим образом:

“механика твёрдого тела – теория упругости и пластичности – молекулярная динамика – теория диффузии – кинетическая теория – квантовая механика”.

Диапазонам размеров соответствуют перекрывающиеся теории, совместно действующие свойства. Формально это отображается матрицей свойств P.

Эволюция вещественной части объёма $V_R(t)$ отражается матрицей общего вида M_R, которая является матричным аналогом модели внешнего воздействия

$$V_K(t_1) = M_R \cdot V_R(t)$$

с обычным матричным умножением. Представим эволюцию для наглядности в асимметричном виде (см. рис.)

$$V(t,\tau) = M_R(t)V_0(t=0,\tau=0)\otimes M_Z(\tau).$$

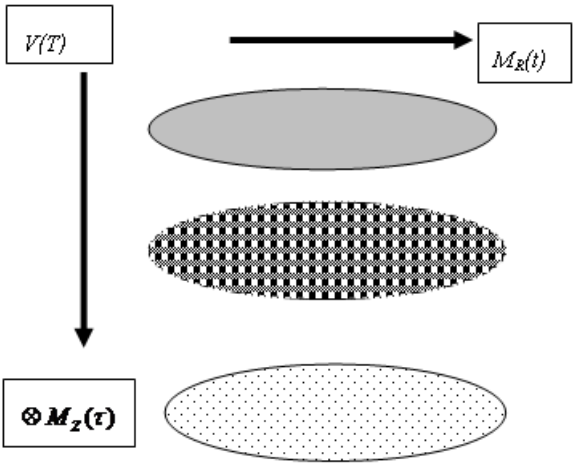


Рис. 30. Двумерная семантика модели

Это соотношение является матричным уравнением эволюции фрактального объёма. Осталось включить в модель голограмму.

Из рефлексивных свойств пространства следует соотношение $p^{\pm\alpha}Z_p \cong p^{\pm\beta}Z_p$. Здесь коэффициенты $p^{\pm\alpha} = l$ играют роль координаты на оси размеров, детерминирующих свойства вещества.

Пространство непрерывных функций $C(Z_2,Z_2)$ является, очевидно, полем градиентов и интерпретируется как одно из известных физических полей: напряжений – P, температуры – T, скоростей потока частиц диффузии (электронов, молекул и т.п.) – D, электрического – E, магнитного – M. Тогда

$$V(t,\tau) \cong C(Z_2,Z_2) \cong l_1 \cdot Z_2^P \times l_2 \cdot Z_2^T \times l_3 \cdot Z_2^D \times l_4 \cdot Z_2^E \times l_5 \cdot Z_2^M .$$

и уравнение эволюции дополняется уравнением динамики свойств

$$V(t,\tau) = M_R(t)\cdot C(Z_2,Z_2)\otimes M_Z(\tau).$$

Обычно распределённые физические величины представляются мерами на множестве, в данном случае на объёме V. Картина преобразования мер под действием матриц хорошо изучена. Мы отметил лишь особенности. Меры, как и все физические величины, имеют каждая свою область промежуточной асимптотики на оси размеров частиц, то есть существуют в ограниченном диапазоне на этой оси. Вне этой области мера, выражающая одно из свойств, исчезает и сменяется другой. Это явление отображается техникой кронекерова умножения.

Матричный анализ в изложенном двойном смысле богат вычислительными и аналитическими схемами. Целью работы было выяснение принципиальной возможности и адекватности его применения к задачам технологии материалов. Разработка вычислительной схемы предполагает разработку теории измерений и является делом отдельной работы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исходным пунктом изложения явился эмпирический факт двойственности природы фрактальных объектов – экстенсивно-интенсивной и материально-символьной, которая представляется адекватной задачам химической технологии. С этой точки зрения фракталы предстают как инвариант взаимодействий процессов, имеющих различную физическую природу, но сходную логико-топологическую бинарную конвергентно-дивергентную структуру. Это, в свою очередь, позволяет для описания свойств фрактальной материи привлечь явным образом теории математической физики как теории, участвующие в формировании свойств вещества.

Поэтому для описания физико – химического пространства создания материалов использовано расширение физического пространства фрактальным, в его представлении *p*-адическими (в частности 2-адическими) числами.

Такое расширение имеет соответствие в формальной технике, которое было названо числовой асимметрией или числовой дополнительностью. Этот подход позволяет воспроизвести присущую фракталам бинарность во всех основных ингредиентах математической модели – числовой системе, логике, геометрии, пространстве – времени, функциональных зависимостях, теории измерений и динамике объектов. Это делает возможным совмещение формальных техник, отражающих различные свойства материального образования.

Достоинством такого шага является то, что в описание удаётся включить те результаты, которые не могут быть включены в модель при традиционном физико-математическом подходе.

Главным здесь является двойственность Стоуна, которую можно считать узлом связи между физикой, математикой и информатикой. Вполне логичным было бы начать изложение теории фракталов именно с этого результата. Известная максима М. Стоуна – «Нужно всё топологизировать!» в точности соответствует современной конвергенции материи (физика) и символа (булевы алгебры) как двух основных компонент фрактальной теории.

Второй положительный момент заключается в том, что в одной модели становится возможным совмещение как в голограмме различ-

ных физических теорий. И, поэтому, удержать в модели всё положительное, достигнутое наукой.

Третий плюс в том, что методы теоретической информатики позволяют включить в модель внутреннюю геометрию объёма образца и, тем самым, сопрячь его динамику с внешними воздействиями.

Как следствие, предложенный подход воспроизводит совместное действие различных физических факторов, в том числе и структуры вещества, которое составляет суть эксперимента и проявляется в процессе эксплуатации изделий. Это открывает возможность разработки методов моделирования материалов с привлечением известных результатов математической физики и теоретической информатики, компьютерных систем эксперимента.

Представление специфики химического пространства осью размеров частиц не учитывает, конечно, собственно химической природы вещества, то есть в модели отсутствует информация, содержащаяся в таблице Менделеева, что очевидно, ограничивает возможности предлагаемого подхода.

Точнее как делимость, так и синтезируемость веществ не всегда происходит чисто механическим путём. Наиболее содержательным было бы включение в теорию специфически химической информации – свойств веществ, теорий химического сродства и связи. Однако, как отмечалось выше, этот недостаток является общим для всех математических моделей. Поэтому эта линия развития бинарности остаётся открытой проблемой.

Работа выполнена в рамках программы ОХНМ РАН «Создание новых металлических, керамических стекло-, полимерных и композиционных материалов».

Авторы благодарят кандидата химических наук Н.М. Пичугину, а также Е.А. и В.О. Изотовых за помощь при работе над данной книгой.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Использование методов фрактальной геометрии для анализа кинетических кривых растворения оксидов металлов

Для обсуждения кинетических данных растворения оксидов металлов широко использовались модели, основанные на участии в процессе всей поверхности частиц оксидов или растворения по активным центрам. При моделировании процессов изменения поверхности растворяющихся частиц вводится фрактальность объема и поверхности, так как процесс растворения может протекать в трех-, двух-, и одномерном пространстве, что соответствует "сжимающимся" объему, поверхности и линии.

Растворение частицы любой формы в таких моделях описывается уравнениями, которые учитывают уменьшение поверхности такой частицы (S) и изменение фрактальной размерности растворяющегося пространства (d).

Задача сводится к нахождению зависимости доли растворенного оксида (α) от времени (t). Для этого объем растворяющейся частицы с исходным радиусом $R_0 - x$ разобьем на слои толщиной dx, находящиеся на расстоянии ($R_0 - x$). Примем, что доля растворенного каждого слоя в момент t равна $\alpha(x, t)$. Тогда:

$$\alpha(x,t) = \frac{dV}{V_0} dx, \qquad (П1.1)$$

где $dV \cdot dx$ – растворенный объем; V_0 – исходный объем растворяющихся частиц. Объем растворяющегося пространства в виде сферы (куба) можно представить как $V_0 = \varphi_1 R_0^3$, для цилиндра с высотой h, растворяющегося с боковой поверхности $V_0 = \varphi_2 R_0^3 h$ и торца $V_0 = \varphi_3 R_0 h$ (φ_1, φ_2, φ_3 – постоянные, характеризующие форму растворяющегося пространства).

В общем виде растворяющийся объем любой частицы можно выразить в виде многомерного пространства, имеющего фрактальную размерность d.

В этом случае

$$V_0 = \varphi R_0^d ,$$

а $$dV = d\varphi(R_0 - x)^{(d-1)} \cdot dx . \qquad (П1.2)$$

Долю растворенного оксида α к моменту времени t выразим в виде:

$$\alpha = \int_0^R \frac{dV}{V_0} dx = d \int_0^R \frac{(R_0 - x)^{(d-1)}}{R_0^d} dx. \qquad (П1.3)$$

Вводя для удобства безразмерные параметры $\tau = W_i t/R_0$ (безразмерное время), где $W_i = x$ – скоростъ растворения оксида, $\xi = x/R_0$ (относительная длина), и учитывая, что пределы интегрирования x изменяются от 0 до R, а ξ от 0 до τ, найдем зависимость α от τ:

$$\alpha = \int_0^\tau \frac{d(R_0 - x)^{(d-1)}}{R_0^d} d\xi = d \int_0^\tau (1 - \frac{x}{R_0})^{d-1} =$$
$$= d \int_0^\tau (1 - \xi)^{d-1} d\xi = 1 - (1 - \tau)^d \qquad (П1.4)$$

Для трехмерного процесса растворения (d = 3) имеем:

$$1 - (1 - \alpha)^{1/3} = \tau = \frac{W_i}{R_0} t , \qquad (П1.5)$$

для двумерного – (d = 2):

$$1 - (1 - \alpha)^{1/2} = \tau = \frac{W_i}{R_0} t \qquad (П1.6)$$

и одномерного – (d = 1):

$$\alpha = \tau = \frac{W_i}{R_0} t . \qquad (П1.7)$$

Продифференцировав уравнение П1.4, найдем, что скорость растворения оксидных фаз ($d\alpha/d\tau$) можно представить в виде:

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = d(1 - \alpha)^{(d-1)/d} . \qquad (П1.8)$$

Для определения изменения поверхности растворяющейся частицы от приведенного времени данные представили в виде зависимости α от приведенного времени $t / t_{0,5}$.

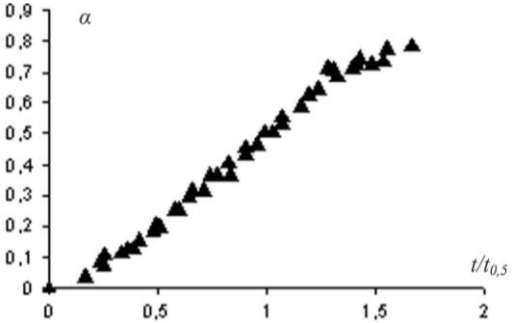


Рис. П1.1. Зависимость доли растворенного оксида α от приведенного времени на примере никеля (II) и оксида никеля (III)

Найденные закономерности позволили установить влияние фрактальной геометрии на величину скорости растворения, а также выяснить, что изменение поверхности определяется выражением $f(\alpha) = (1 - \alpha)^{3/5}$ и указывает на ее монотонное уменьшение в процессе растворения. Дробное значение растворяющегося объема частицы только приближается к сфере, то есть процесс протекает преимущественно по двум координатам с частичным участием третьей, а значение величины d меньшее единицы, указывает на то, что процесс растворения протекает только по активным центрам.

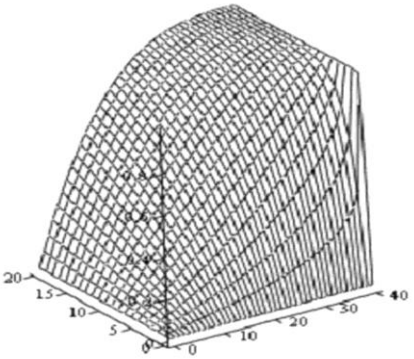


Рис. П1.2. Модель «сжимающегося фрактального объема»: общий вид зависимости

$$\alpha = 1 - (-t)^{\alpha}$$

Вопросы влияния на процесс растворения различных факторов (T, концентрации растворителя, потенциала и т.д.) выносятся за рамки данного анализа.

Список литературы к приложению 1

1. Анализ кинетических данных растворения оксидов металлов с позиций фрактальной геометрии / И.Г. Горичев, А.Д. Изотов, А.И. Горичев и др. // Журнал физической химии, 1999. Т.73. № 10. С. 1802-1808.

2. Использование представлений фрактальной геометрии при анализе кинетических данных растворения оксидов металлов в кислых средах / И.Г. Горичев, А.Д. Изотов, Т.К. Атанасян и др. / Научные труды МПГУ. Сер. Естественные науки. – М.: Прометей, 2000. С. 264-267.

3. Изучение кинетики растворения оксидов никеля (2), никеля (3) в кислых растворах / Н.М. Пичугина, А.М. Кутепов, И.Г. Горичев и др. // Теоретические основы химической технологии, 2002. Т.36. №5. С. 533-543.

4. Использование фрактальной модели цепного механизма для анализа кинетики растворения оксида железа (3) в хлороводородной кислоте / А.Е. Частухин, А.Д. Изотов, А.М. Кутепов и др. // Теоретические основы химической технологии, 2003. Т. 37. №6. С. 636-640.

5. Моделирование растворения оксида меди (II) в сернокислых растворах в присутствии добавок аммиака и комплексонов / О.Н. Плахотная, А.Д. Изотов, В.В. Батраков и др. // Теоретические основы химической технологии, 2005. Т. 39. №2. С. 85-89.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Логические проблемы фрактальной геометрии

Опыт математического моделирования и описания фрактальных объектов показал, что они, как правило, не укладываются в механико-математическую парадигму. Кривые и поверхности неспрямляемы, поведение – непредсказуемо, параметризация неустойчива. Лишь при дополнительных ограничениях, введении регулярности – на глубину скейлинга, предположении точного или ограниченно искаженного самоподобия *(bounded distortion- англ.)* их удается удовлетворительно описать. Такими являются исключительно искусственные, математические фракталы – кривые Серпинского, континуум Менгера, кривая Коха и им подобные. Для естественных образований ничего математически перспективного получить не удаётся. Вместо точных значений размерности, например, достижимыми оказываются лишь границы её величины, причём как физическими, так и информационными методами.

Эта картина есть признак неполной формализуемости – объект сохраняет существенные степени свободы, не вошедшие в математическое описание, формулы, уравнения, теории. На практике это выглядит как фрагментарное описание, когда одному и тому же параметру соответствуют различные теории, отличающиеся друг от друга теми допущениями, которые заложены в их основу. Неполная или, напротив, множественная формализуемость являются признаком сложности строения и поведения объекта. Наши предыдущие рассмотрения показывают, что в физической теории фракталов игнорируется делимость – координата размера, внутренняя степень свободы. В любом объеме вещества конечного размера, очевидно, содержится бесконечная часть лексикографического дерева.

Иррегулярное поведение физико-химических параметров и относительно небольшие успехи в развитии формальных теорий в материаловедении являются синдромом непроясненных логических проблем в их основаниях. Тому примеры вычисления фрактальной размерности и меры Хаусдорфа.

Логические проблемы, связанные с построением формальных моделей фрактальных объектов, имеют две причины. Первая из них

связана с прямым переносом методов дифференцируемой континуальной механики и анализа на множества, где эти две базовые предпосылки отсутствуют (см. рассуждения С.Улама).

Вторая – фундаментальные вопросы оснований математики, которые отсутствуют в классике математической физики и становятся понятными и очевидными в контексте фрактальной геометрии.

В качестве примера сложности первого типа рассмотрим постулируемое в механике сплошной среды уравнение количества движения системы материальных точек [1, с. 136-139]. Для каждой материальной точки справедливо уравнение Ньютона

$$m\frac{dv}{dt} = F, \qquad (П2.1)$$

где m – масса, v – скорость точки, F – действующая сила.

При переходе к трёхмерному случаю при определении скорости движения системы точек или элемента объема сплошной среды это уравнение принимает вид уравнения количества движения:

$$Q = \int_V \bar{v} \cdot \rho \, d\tau, \qquad (П2.2)$$

где Q – количество движения системы, V – объём, $\bar{v}$ – векторы скоростей частиц, ρ – плотность.

Сложность здесь в том, что в трёхмерном пространстве векторы скоростей нельзя, вообще говоря, складывать, образовывая интеграл, так как они могут образовывать скрещивающиеся прямые и, поэтому, их сумма не может сводиться к одному вектору или числу. Скорости являются скользящими, а не свободными векторами. Для механики реально сплошных сред проблем особых не возникает. Но для задач, где внутренняя структура является физическим фактором, проблема встаёт во всей полноте. Другой подход, основанный на попытке учесть всю возможную комбинаторику конфигураций аргументов в функциях, приводит к так называемому проклятию размерности – размерность задачи превосходит все мыслимые пределы, возраст Вселенной, размеры галактик, Земли и т.п. Это явление хорошо известно в дискретной математике, предметом которой и являются подобные распределённые объекты.

Вторая сложность видна в «оптике» теоретической информатики. Фракталы являются результатом совместного действия конвергентно-дивергентных причин и поэтому не сводятся к простым, гомогенным объектам. Так же, как в графах, сетях и решетках свойства фракталов определяются как их составом – узлами, кластерами, так и их взаимным расположением и взаимодействием в пространстве. Поэтому понятие материальной точки, бесконечно малого физического объема, отрезка, поверхности для них, вообще говоря, неадекватно, так же как и понятие абсолютно пустого пространства теоретической механики.

Более того, присутствие в материальных объектах скрытой сетевой структуры сильно осложняет математическое моделирование их свойств традиционными методами, основанными на логике «избегания противоречий». Сетевые структуры являются универсальными вычислительными устройствами, современные компьютеры являются их воплощением. Такие устройства способны к любым вычислениям в рамках любой теории. Однако, как было показано, универсальность тесно связана с противоречиями и парадоксами, которые и составляют сущность сложности синтетической теории материи.

Атомно-молекулярные структуры материаловедения также являются материальным воплощением этой ситуации, но имеют ещё одно усложняющее свойство. Такие распределённые объекты – решётки, сети, графы не являются математически определимыми, их невозможно включить в вычисления, выводы, логику и, поэтому, в теорию трансформации материи. Для таких распределённых множеств, говоря языком математики, невозможно определить основные арифметические операции над их элементами – сложение, умножение, вычитание и деление, которые для своего осуществления требуют свободного перемещения аргументов как соответствующих физических сущностей в пространстве.

Элементы распределённых структур можно уподобить числам, приклеенным к фиксированным точкам пространства. Это тот вклад в свойства материалов, который не учитывается формальной техникой, в частности статистическими теориями. Например, для них теряют теоремную надёжность классические понятия вероятностно-статистических методов, основанные на комбинаторике возможных состояний, так как получаемые величины не являются физически действующими,

они теряют координатную привязку. Например, средние величины, определяемые статистическими методами, не всегда существуют материально и не имеют координатной характеристики.

Действие атомно-молекулярных структур является уникальным, оно проявляется параллельно сразу во всём объёме образца. Тем самым геометрия объёма вещества и её особенности становятся физическим фактором. Специфика этого фактора в том, что объём не является привычной физической величиной, для него не существует «первых принципов», законов сохранения и т.д., с которых начинается вывод уравнений движения. К тому же фрактальный объём как область, в физическом пространстве допускающая двойную координатизацию, является, очевидным образом, экстенсивно-интенсивным параметром. С одной стороны, в евклидовых координатах он является телом, с другой, в *p*-адических – сложной поверхностью. Именно здесь, в атомно-молекулярных структурах, со всей очевидностью становится ясной связь физики и информатики.

Смысл введения понятий и методов теоретической информатики в физико-химическое содержание теорий материаловедения следующий. Внешней причиной этого шага является общность бинарного дерева для фрактальной материи и формальных языков. Однако за этим поверхностным совпадением стоит ряд недавно полученных результатов, которые имеют прозрачный физический смысл и делают видимыми логические сложности и перспективы моделирования.

К ним относятся вопросы выразительных способностей математических моделей. Наиболее близкими для физики являются вопросы вычислимости и разрешимости множеств и формальных теорий. Разрешимость множества означает возможность получения единственного решения, которое, к тому же, может быть эффективно вычислено. Фракталы относятся к неразрешимым множествам [2], поэтому стратегия моделирования должна строиться с учётом этого обстоятельства. Неразрешимость фрактальных множеств означает, что принцип неопределённости Гейзенберга в квантовой механике имеет точный аналог в логике и вычислимости – энтропийная, нечёткая составляющая, неединственность решения этих процессов неустранима. Иными словами неразрешимость есть теоретический аналог антиномии материи. Она всегда даёт решение в виде вилки или веера возможных продолжений.

Это, в свою очередь, означает, что, с одной стороны, безнадёжно добиваться единственности решений и любой, наперёд заданной точности вычислений, а с другой стороны – открывается возможность привлечения для моделирования практически всего спектра физико-математических теорий – геометрии, формальных теорий, динамических систем. Тем самым обеспечивается связь между физическими процессами и процессами вычислений, выводов и доказательств [3]. Неразрешимость и невычислимость оказываются типичными для материальной науки, источником неопределённости и случайности [4]. Эта линия исследований уже присутствует в теории квантовых вычислений. Замечательным фактом является независимость методов теоретической информатики от физико-химической природы материи [5] Биоинформатика и новые вычислительные парадигмы используют те же логические структуры [6].

В целом фрактальность как носитель неразрешимости расширяет принцип неопределенности, обосновывает и придаёт ему общенаучный статус. Поскольку в динамических уравнениях одновременно присутствуют координаты точек, функции от них и скорости среды в этих точках, значения которых не могут быть определены с одинаковой высокой точностью, то на фрактальных множествах горизонт предсказуемости значительно ограничен. Предсказуемость становится параметром, появление которого нужно диагностировать.

Недостатком существующей фрактальной теории является то, что несмотря на разительное несовпадение разрывной топологии её объектов со связной топологией вещественных чисел, исследование фракталов проводится на базе вещественнозначного анализа. Иррегулярность и разрывность моделируются регулярностью и связностью. Поэтому из всего спектра возможных явлений на фракталах теорией высвечиваются лишь те, которые допускают надежную континуальную формализацию.

Как представляется, совместное использование двух числовых систем R и Z_2 вместе с одновременным использованием двух метрик: архимедовой и ультраметрики, которое допускается теоремой Островского, с одновременным переносом теории во фрактальное p-адическое пространство, открывает возможности объединения двух феноменов – детерминизма и непредсказуемости – для создания более адекватных моделей материи.

Список литературы к приложению 2

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды. – М.: Наука, 1970. Т.1.

2. Dube S. Fractal Geometry, Turing Machines and Divide-and Conquer Recurrences // Theoretical Informatics and Applications v. 28, no. 3-3. P. 405-423.

3. Agnes C., Rasetti M. Undecidabikity and Chaos in Word-Coded Dynamics // Chaos, Solitons and Fractals v. 5, no.2, P.161-175, 1995; Wolfram S. Undecidability and Intractability in Theoretical Physics// Physical Review Letters v. 54, n. 8 1985, p.735-738; Wolfram S. Origin of randomness in Physical Systems // Physical Review Letters v. 55, n. 5 1985. P. 449-452.

4. Svozil K. Undecidability and Randomness in Physics. World Scientific, Singapure,1993.

5. Calude C. Information and Randomness. Springer, 2002.

6. Paun G., Rosenberg G., Salomaa A. DNA Computing. Springer, 1998.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Jaynes E.T. Information Theory and Statistical Mechanics// Phys.Rev. 106, 1957, P.120; его же Information Theory and Statistical Mechanics II // Phys.Rev. 108, 1957. P.171.

2. Mandelbrot B. The Fractal Geometry of Nature. Freeman, 1982; Le Mehaute A. Fractal Geometries. Theory and Applications. CRC Press, 1991; Bunde A., Havlin S. (eds.) Fractals in Science. Springer, 1994; Peitgen H.-O, Richter J., Saupe D. Fractals and Chaos. Springer, 2004; Barnsley M.F. Fractals Everywhere. Academic Press, 1988; Barnsley M.F. Superfractals. CUP, 2006; Flake G.W. The Computational Beauty of Nature. MIT Press, 1999; Gouyet J.-F. Physics and Fractal Structures. Springer, 1996; Mamford D., Series C., Wright D. Indra's Pearls. The Vision of Felix Klein. CUP, 2002; Федер Й. Фракталы. – М.: Мир, 1990; Falconer K.J. Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications. Wiley, 2003.

3. Jorgensen P.E.T. Analysis and Probability, Wavelets, Signals, Fractals. Springer Science + Business Media 2006; Kigami J. Analysis on Fractals. CUP, 2001; Ben-Abraham D., Havlin S. Diffusion and Reaction in Fractals and Disordered Systems. CUP, 2000; Avnir D. (ed.) The Fractal Approach to Heterogeneous Chemistry: Surfaces, Colloids, Polymers. Wiley, 1989; Rothschild W.G. Fractals in Chemistry. J.Wiley & Sons, 1998.

4. A. Scott (ed.) Encyclopedia of Nonlinear Science. Routledge, 2005; Meyers R.A. Encyclopedia of Complexity and Systems Science. Springer, 2010.

5. Dowden B. Zeno's Paradoxes // Internet Encyclopedia of Philosophy, Dec.2009; Huggett N. Zeno's Paradoxes// Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2004; Silagadze Z.K. Zeno Meets Modern Science // arXiv:0505042v1 [physics. pop-th] 5 May 2005; Паршин А.Н. Идеальные числа Платона // с сайта bfrz.ru, 2005.

6. Badii R., Politi A. Complexity. Hierarchical Structures and Scaling in Physics. Cambridge University Press, 1997.

7. D. Baird, A. Nordmann, J. Schummer (eds.) Discovery the Nanoscale. Amsterdam, IOP Press, 2004; Фостер Л. Нанотехнологии. Наука, инновации и возможности. – М.: Техносфера, 2008.

8. Feynmann R. Simulating Physics with Computers//Int. J. Theor. Phys. 21 (1982). P.467-488.

9. Bousso R. The Holographic Principle // Rev. Mod. Phys. 74, 825-874, 2002; Bekenstein J. Information in the Holographic Universe // Sci.Am. July, 2003.

10. Hartnoll S.A. Lectures on Holographic Methods for Condensed Matter Physics// arXiv 0903.324 v.3 [hep-th], 2010.

11. Mandelbrot B. The Fractal Geometry of Nature. Freeman, 1982.

12. Гайденко П.П. История греческой философии в её связи с наукой. – М.: Университетская книга, PER SE, 2000. Гл.V.

13. Гельмгольц Г. О фактах, лежащих в основаниях геометрии // Об основаниях геометрии / А.П. Норден (ред.). – М.: ГИТТЛ, 1956. С. 366-383.

14. Комарова В.Я. Учение Зенона Элейского. – ЛГУ, 1986.

15. Anderson P.W. More is Different // Science, (N. S), Vol. 177, No. 4047, 1972. P. 393-396.

16. Ellis G.F.R. Physics, Complexity and Causality // Nature 435 (2005). P.743.

17. Красный Л.И. Система делимости от Вселенной до микромира// Доклады РАН, 2002. Т. 383. № 6. С. 796-800.

18. Холл П. Вычислительные структуры. – М., 1978.

19. Malsai O., Lidar D., Biham O., Avnir D Scaling Range and Cut-toffs of Empirical Fractals // PRE 1997, v. 56, n. 3. P. 2816-2828.

20. Toffoli T., Margolus N. Programmable Matter: Concepts and Realizations // Physica D 47 (1991). P. 263-272.

21. Caldarelli G. Scale-Free Networks. Oxford University Press, 2003.

22. Пейтген Х.О., Рихтер Р.Н. Красота фракталов, 1989.

23. Изотов А.Д., Горичев И.Г., Панкратов Д.В. Вероятностные и фрактальные принципы вывода уравнений кинетики гетерогенных процессов растворения оксидов // Неорганические материалы, 2010. Т. 46. № 6. С. 738-744.

24. Олемской А.И., Кацнельсон А.А. Синергетика конденсированной среды. – М.: УРСС, 2010. Гл.1.

25. Пригожин И. От существующего к возникающему. – М.: Комкнига, 2006. Гл.10.

26. McCauley J.L. Fractals and Chaos. An Algorithmic Approach. CUP, 1995.

27. Edalat A. Dynamical Systems, Measures and Fractals via Domain Theory //Information and Computation 120 (1995), P. 32-42; Kurka P. Topological and Symbolic Dynamics. Paris SMF, 2003; Kurka P. Zero-Dimensional Dynamical Systems, Formal Languages and Universality // Theory of Computing Systems. 32 (1999). P.423-433; Fernau H. Valuations of Languages with Application to Fractal Geometry // Theory of Computing Systems 137(1995), P.177-217; Edalat A. Domains for Computation in Mathematics, Physics and Exact Real Arithmetic// Bull. Symb. Logic. V.3. N4. 1997. P.401-452; Merzenich W., Staiger L. Fractals, Dimension and Formal Languages. In Rosenberg G., Salomaa A., (eds) Developments in Languages Theory WC PC, 1994. P.262-277; Lecomte P., Rigo M. On the Representation of Real Numbers Using Regular Languages // Theory of Computing Systems 35 (2002). P.13-38; Edgar G.A. Measure, Topology, Fractal Geometry. Springer. 1992; Dube S. Undecidable Problems in Fractal Geometry // Complex Systems 7(1993). P. 423-444; Kulik K., Dube S. Encoding Images as Words and Languages// Int. J. of Algebra and Computation. Vol.3, N2, 1993. P. 211-236.

28. Avnir D., Gutfraind R., Farin D. Fractal Analysis in Heterogeneous Chemistry. In Bunde A., Havlin S. Fractals in Science. Springer, 1994. P. 229-257.

29. Meakin P. Fractal Scaling and Growth: Far From Equilibrium. CUP, 1998; Godreche G. Solids far From Equilibrium. Camb. N.Y., 1991; Sunder L.M. DLA: A Kinetic Critical Phenomenon // Contemporary Physics 41, 2000, 203-218; Halsey T.C. DLA: A Model for Pattern Formation // Physics Today, 53(4), 2000, 36-41; Gouyet J.-F. Physics and Fractal Structures. Springer, 1996.

30. Ker-I, Ko On the computability of fractal dimensions and Hausdorff measure // APAL 93 (1998) 195-216; Mattila P. Measures in Eucledean Spaces. Fractals and Rectifiability. CUP, 1995.

31. Оксогоев А.А. (ред.) Прикладная синергетика, фракталы и компьютерное моделирование структур. – Томск, 2002.

32. Plotnick R.E., Gardnes R.N., Hardsove W.W. Prestegaad K., Perlmutter M. Lacunarity analysis: A General technique for analysis of special Patterns // Phys.Rev.E. 1996. V.53. N5. P. 5461-5468/

33. Tel T. Fractals, Multifractals, Thermodynamics // Z. Naturforsh. 48A 1154, 1988.

34. Edgar G.A. Measure, Topology and Fractal Geometry. Springer, 1992; Edgar G.A. Integral, Probability and Fractal Measure. Springer, 1998.

35. Barnsley M.F. Fractals Everywhere. Academic Press, 1988.

36. Volovich I.V. Number Theory as Ultimate Physical Theory. Preprint CERN – TH. 4781/87, Genova, 1987, перепечатано в p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications 2010, Vol.2, N.1. P.77-87.

37. Владимиров В.С., Волович И.В., Зеленов Е.И. *p*-адический анализ и математическая физика. – М.: Наука, 1994.

38. Mirimanoff D. Les Antinomies de Russel et de Burali-Forti et le Probleme Foundamental de la Theorie des Ensembles // L'Ens. Math. 1917. V.19. P.37-52; его же Remarques sur La Theorie Des Ensembles et les Antinomies Cantoriennes-I // L'Ens. Math. V.19, 1917. P. 209-217; его же Remarques sur La Theorie Des Ensembles et les Antinomies Cantoriennes – II // L'Ens. Math. 1920-1921, Vol.21. C. 29-52.

39. Aczel P. Non-Well-Founded Sets. CSLI Lect. Notes 14, Stanford, 1988; Barwise J., Moss L. Vicious Circles: On the Mathematics of Non-Wellfounded Phenomena. CSLI Lect. Notes 60. Stanford, 1966.

40. Улам С. Нерешённые математические задачи. – М.: Наука, 1964.

41. Augenstein B. Links Between Set Theory and Physics// Chaos, Solitons and Fractals. V.7. N 11, 1996. P.1761-1798.

42. Barwise J., Moss L. Vicious Circles. The Mathematics of Non-Well-Founded Phenomena. CSLI Lect. 1996; Khrennikov A., Schumann A. p-Adic Physics, Non-Well-Founded Reality and Unconventional Computing // p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications, 2009. V. 2. N 4. P. 297-306.

43. Паршин А.Н. Размышления над теоремой Геделя // ИМИ, 2000. Вып. 5 (40).

44. Паршин А.Н. Идеальные числа Платона // С сайта bfrz.ru, 5.04.2006.

45. Grim P., Mar G., St.Dennis P. The Philosophical Computer. MIT Press, Bradford Books, 1998.

46. Vickers S. An Algorithmic Approach to p-Adic Numbers. In Main M., Melton A., Mislove M. (eds.) Mathematical Foundations of Programming Language semantics, LNCS v. 298, Springer, 1988, P.598-615; Vickers S. A Fixpoint Construction of the p-Adic Numbers. In Pitt D.H., Poigue A., Ryterhead D.E. (eds.) Category Theory and Computer Science. LNCS v. 283, Springer, 1987. P.270-289.

47. Вейль Г. Математическое мышление. – М.: Наука, 1989.

48. Манин Ю.И. Размышления об арифметической физике // Математика как метафора. – М.: МЦНМО, 2008. С. 209; Махалдиани Н. Динамика числовых полей и программа согласования пространства в теории полей и струн. – Дубна, 1989; Хренников А.Ю. Вещественно-неархимедова структура пространства-времени // ТМФ, 1991. Т. 86, №2. С.177-190; Зеленов Е.И. Об объединении вещественных и *p*-адических теорий. «p-Adic MathPhys – 2007» The Third Intern. Conf. on p-adic Mathematical Physics: from Planck-scale physics to complex systems and biology. Moscow, Russia, Oct. 1-6, 2007.

49. Macyntire A. Twenty Years of p-Adic Model Theory // Logic Colloqium'84. J.B. Paris, A.J. Wilkie, G.M. Wilmers (eds.), Elsevier, NH, 1986.

50. Robert A. A Course in p-Adic Analysis. Springer, 2000.

51. Гарднер М. Этот правый левый мир. – М.: Комкнига, 2007.

52. Калужнин Л.А. Введение в общую алгебру. – М.: Наука, 1973.

53. Quine W.V. Concatenation as Basis for Arithmetics // J.Symb. Logic 11(4), 1946. P. 105-114.

54. Смирнов Б.М. Физика фрактальных кластеров. – М.: Наука, 1990.

55. Кириллов А.А. Что такое число. – М.: Наука, 1993.

56. Pitkanen M. p-Adic TGD: Mathematical Ideas // arXiv: hep-th/9506097v.2, 1995.

57. Branicky M. Universal Computations and Other Capabilities of Hybrid and Continuous Dynamical Systems// TCS 138 (1995). P.67-100; Oorponen P. A Survey of Continuous-Time Computation Theory // In D.Z. Ku, K.-I Ko Advances in Algorithms, Languages and Complexity. Kluwer, 1997. P.209-224.

58. Haran S. Mysteries of Real Prime. Oxford U.P. 2001.

59. Dragovich B., Khrennikov A. Yu., Kozyrev S.V., Volovich I.V. On p-adic Mathematical Physics // arXiv:0904.4205v.1 [math-ph] 2009.

60. Peat F.David, Briggs J. Turbulent Mirror. Harper&Row, 1989.

61. Merzenich W., Staiger L. Fractal Dimension and Formal Languages. In G. Rosenberg, A. Salomaa Developments in Language Theory. World Scientific P.C. 1994, P.262-277; Fernau H. Valuations of Languages with Application to Fractal Geometry // TCS, 137(2), 1995. P. 177-217.

62. Vickers S. A Fixpoint Construction of p-Adic Domain // LNCS v. 283, Springer 1987, P.270-289; Vickers S. An Algorithmic Approach to p-Adic Numbers // LNCS v. 298, Springer, 1988. P.599-615.

63. Barnsley M.F. Superfractals. Cambridge U.P. 2006.

64. Kurka P. Zero Dimensional Dynamical Systems, Formal Languages and Universality // Theory of Comp. Syst. 32(4), 1999. P.423-433.

65. Schikhoff W.H. Ultrametric Calculus. Cambridge U.P. 1984.

66. Хренников А.Ю. Неархимедов анализ и его приложения. – М.: Физматлит, 2003.

67. Shenker O. Fractal Geometry is not Geometry of Nature // Stud. Hist. Phil. Sci. 1994, Vol.25, N.6. P. 967-981.

68. Успенский А.В. Лекции о вычислимых функциях. – М.: ГИФМЛ, 1960.

69. Falconer K. Digital Sundials, Paradoxical Sets and Vitushkin Conjecture // Math. Intelligencer. 9 (1987). P.24-27.

70. Dube S. Undecidable Problems in Fractal Geometry // Complex Systems 7(1993). P.423-44.

71. Александров В.В., Арсентьева В.А. Информация и развивающиеся структуры. – Л.: ЛНИВЦ, 1984.

72. Паршин А.Н. Дополнительность и симметрия // Вопросы философии, 2001. №4. С. 84-104; кн. Путь. Математика и другие миры. – М.: Добросвет, 2002. С.139-170.

73. Скотт Д. Теория решёток, типы данных и семантика // Данные в языках программирования. – М.: Мир, 1982.

74. Scott D. Continuous Lattices // Lawere F.W. (ed.) Toposes, Algebraic Geometry and Logic // Lecture Notes in Math. V.274, Springer, 1972. P.97-136.

75. Bedford T., Fisher A.M. On the Magnification of Cantor Sets and Their Limit Structures // Monatsh. Math. 121, 1996. P.11-40.

76. Chystyakov D.V. Fractal Geometry For Images of Continuous Map of p-Adic Numbers and p-Adic Solenoids into Eucledean Spaces // arXiv: math, DS/0202089 v.1, 2002, первая публикация ТМФ Т.109, №3. С.323-337, 1996; Khrennikov A., Radyna A. *p*-Adic Interpolation and Approximation of Continuous functions by Linear Combination of Shifts of p-Adic Valuations // J. Approx. Theory 120, 2003. P. 124-135; Cuoco A. Visualising p-Adic Integers // Amer. Math. Monthly 98, 1991. P. 355-364.

77. Nikiel S. Iterated Function Systems for Real-Time Image Synthesis. Springer, 2007.

78. Хренников А.Ю., Котович Н.В. Представление и сжатие изображений с помощью m – адической системы координат // ДАН, 2002. Т.387. №2. С.159-163.

79. Kadanoff L. Fractals: Where Is The Physics // Physics Today 39, 1986. P.6-7.

80. Agnes C., Rasetti M. Undecidabikity and Chaos in Word-Coded Dynamics // Chaos, Solitons and Fractals. V. 5, N.2, 1995. P.161-175.

81. Verelst K. Zeno's Paradoxes. A Cardinal Problem // arXiv:0606639v1 [math.HO] 2006.

82. Маврикиди Ф.И. К природе зеркальной симметрии // Ежегодник «Дельфис-2006». – М.: 2007. С.76; Маврикиди Ф.И. Апории Зенона и прикладная математика//Ежегодник «Дельфис-2007». – М.: 2008, С.84.

83. Дюбуа Д., Прад А. Теория возможностей. – М.: Радио и связь, 1990. Гл.1.

84. Натансон И.П. Теория функций действительного переменного. – М.: Наука, 1974.

85. Narens L. Abstract Measurement Theory. Cambridge Mass, 1985.

86. Brown B. A New Treatment of Analysis of Dimensions// Proc. Phys. Soc. 1941. V.53. P.418-453.

87. Петров А.Е. Тензорная методология в теории систем. – М.: Советское Радио, 1985.

88. Le Mehaute A. Fractal Geometries. CRC Press, 1991.

89. Мюнстер А. Химическая термодинамика. – М.: Мир, 1971.

90. Арнольд А. Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1989.

91. Beck C., Schlogl F. Thermodynamics of Chaotic Systems. CUP, 1995.

92. Davey B.A., Priestley H.A. Introduction to Lattices and Order. Cambridge University Press, 2002.

93. Birkhoff G., von Neumann J. The Logic of Quantum Mechanics // Annals of Math. 37, 1936. P. 823-843.

94. Stone M. The Theory of Representations of Boolean Algebras // Trans. of AMS, 1936. V.40. N2. P. 37-111; Stone M. Applications of the Theory of Boolean Rings to General Topology // Trans. AMS. Vol.41, N.3. 1937. P.375-481.

95. Van der Schaft A., Schumacher H. An Introduction to Hybrid Dynamical Systems. Springer, 2000.

96. Eyink K.G. Quantum Field Theory Models of Fractal Space Time // Commun. Math. Phys. 125 (1989), P.613-636; Nottale L. Fractal Space-Time and Microphysics. World Scientific, Singapore, 1993.

97. Altaisky M.V., Bednyakov V.A., Kovalenko S.G. Fractal Structure of Quantum Gravity and Relic Relation // Int. J. of Theor. Phys. V.55. N2.1986. P.253-262.

98. Олемской А.И., Флат А.Д. Использование концепции фрактала в физике конденсированной среды // УФН, 1993. Т.163. №12.С.1-50.

99. Домрачев Г.А., Лазарев А.И. Приложение теории алгебраических систем для создания иерархии структур твердых тел, образующихся при равновесных и неравновесных условиях // ФТТ, 1999. Т.41. Вып. 5. С.799-804.

100. Salzmann H. et.al. Classical Fields. CUP, 2007, th. 5.39-5.43.

101. Todorcevic S. Topics in Topology, Springer, 1997, Ch.4.

102. Givant S., Halmos P. Introduction to Boolean Algebras, Springer, 2009; th. 1.39-1.45, p.81 и далее.

103. Scott D. Data types as Lattices//SIAM J.Comput. 5(3),1976, P.522-576.

104. Graham A. Kronecker Product and Matrix Calculus. Ellis Horwood, 1981.

105. Leskovec J., Chakrabarti D., Kleinberg J., Faloutsos C., Ghahramani Z. Kronecker Graphs: An Approach to Modelling Networks // arXiv:0812.4905. V2. 2009.

106. Gazale M. Gnomon.Princeton U.P., 1999.

107. Steeb W.-H. Problems and Solutions in Introductory and Advance Matrix Calculus. WSPC, 2006.

108. Van Loan C. The Ubiquitous Kronecker Product // J. of Computational and Applied Mathematics vol. 3(2), 2001. P.149-167.

109. Steeb W.-H. Matrix Calculus and Kronecker Product with Applications and C++ Programs. WSPC, Singapore, 1997.

Научное издание

Изотов Александр Дмитриевич
Маврикиди Федор Иванович

ФРАКТАЛЫ:
ДЕЛИМОСТЬ ВЕЩЕСТВА КАК СТЕПЕНЬ СВОБОДЫ
В МАТЕРИАЛОВЕДЕНИИ

Монография

Подписано в печать 10.10.11. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Печ. л. 8,0.
Тираж 500 экз. Заказ .

ISBN 978-5-7883-0834-0

Самарский государственный
аэрокосмический университет.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского государственного
аэрокосмического университета.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.