

1. Динамическое представление сигналов

1.1. Аналоговые и дискретные сигналы

Информация передаётся в виде сообщений. Каждое сообщение имеет некий материальный носитель — сигнал (электрический, пневматический или любой другой). Таким образом, *сигнал* — это физический процесс, отображающий некоторую информацию. Определённый параметр этого процесса (например, напряжение или частота) изменяется в соответствии с передаваемой информацией.

Аналоговый сигнал является функцией непрерывного¹ времени (рис. 1.1 а).

Дискретный по величине сигнал (рис. 1.1 б) может принимать не любые, а только определённые значения из заданного набора $\{x_m\}$ допустимых значений. Часто эти значения расположены на одинаковом расстоянии друг от друга. Разница между соседними допустимыми значениями дискретного сигнала называется *шагом квантования*. Благодаря квантованию (дискретизации по величине) улучшается помехоустойчивость, так как можно безошибочно принимать сигнал на фоне помех, уровень которых меньше половины шага квантования.

Дискретный по времени сигнал (рис. 1.1 в) описывается решетчатой функцией (дискретной последовательностью) $x[t_n]$, значения которой определены только в некоторые моменты времени t_n (где $n = 0, 1, 2, \dots$). Обычно эти моменты следуют друг за другом с одинаковым интервалом Δ , называемым *шагом дискретизации* по времени. Тогда можно выбрать начало отсчёта так, чтобы начальный момент t_0 был равен нулю и, следовательно, $t_n = n \cdot \Delta$. Значения $x[t_n]$ называются *отсчётами сигнала*. Величина $\phi = 1/\Delta$, обратная шагу дискретизации по времени, называется *частотой дискретизации*.

Сигнал, дискретный как по величине, так и по времени, называется *цифровым* (рис. 1.1 г). Он имеет некоторое (обычно конечное) множество возможных значений и определён в дискретные моменты времени.

1.2. Элементарные сигналы

Для описания сигналов используют *математические модели*.

Динамическим представлением называется описание сигнала в виде функции времени. При этом часто применяют два *элементарных сигнала* — функцию Дирака и функцию Хевисайда.

1. Функция Хевисайда. Рассмотрим сначала функцию (рис. 1.2 а)

$$\eta(t, \tau) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < -\tau/2, \\ 0,5 + t/\tau, & \text{если } -\tau/2 \leq t \leq \tau/2, \\ 1, & \text{если } t > \tau/2, \end{cases} \quad (1.1)$$

описывающую переход некоторого параметра сигнала из “нулевого” состояния в “единичное”, совершающийся за время τ по линейному закону. В пределе при $\tau \rightarrow 0$ этот переход будет совершаться мгновенно.

Функция, равная нулю при $t < 0$ и единице при $t > 0$, называется *функцией включения* или *функцией Хевисайда*² (рис. 1.2 б):

$$\sigma(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \eta(t, \tau) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0; \\ 1, & \text{если } t > 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

При $t = 0$ обычно считают $\sigma(0) = 0,5$ (или 1). В приложении ?? приведено интегральное представление (п. zprg:heavint) для функции Хевисайда (см. с. ??).

Смещённой функцией включения $\sigma(t - t_0)$ называют функцию, “начавшуюся” в момент времени $t_0 \neq 0$ (рис. 1.2 в):

$$\sigma(t - t_0) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < t_0; \\ 1/2, & \text{если } t = t_0; \\ 1, & \text{если } t > t_0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Функция Хевисайда используется для описания разрывных и/или ограниченных во времени сигналов.

Пример 1.1 Прямоугольный импульс амплитудой 10 В и длительностью 3 с может быть представлен следующим образом (рис. 1.3)

$$x(t) = 10 \cdot (\sigma(t) - \sigma(t - 3)). \quad (1.4)$$

Пример 1.2 Синусоидальный сигнал с амплитудой 4 В и периодом 5 с, начавшийся в момент времени $t_0 = 3$ с, запишется в следующем виде (рис. 1.4):

$$x(t) = 4 \cdot \sigma(t - 3) \cdot \sin(2\pi t/5 - 6\pi/5).$$

Фазовая задержка $6\pi/5$ необходима, если в момент $t = 3$ рассматриваемый сигнал не имеет разрыва.

Функция Хевисайда имеет разрыв первого рода³ и поэтому недифференцируема. Однако, её производную можно определить как предел производной функции перехода (1.1)

$$\frac{d\sigma}{dt} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{d}{dt} \eta(t, \tau). \quad (1.5)$$

Производная функции перехода является кусочно-непрерывной и представляет собой прямо-

¹Заметим, что понятие непрерывности для сигналов отличается от аналогичного понятия для функций: в первом случае имеется в виду континуальность аргумента, а во втором — непрерывность самой функции.

²Оливер Хевисайд (Oliver Heaviside) — английский физик, инженер-электротехник (1850–1925).

³Функция $f(t)$ имеет разрыв в точке t_0 , если не равны друг другу левый и правый пределы: $f(t_0 - 0) = \lim_{t \rightarrow t_0 - 0} f(t)$ и $f(t_0 + 0) = \lim_{t \rightarrow t_0 + 0} f(t)$. Если левый и правый пределы оба не равны бесконечности, то это разрыв первого рода, в противном случае — разрыв второго рода.

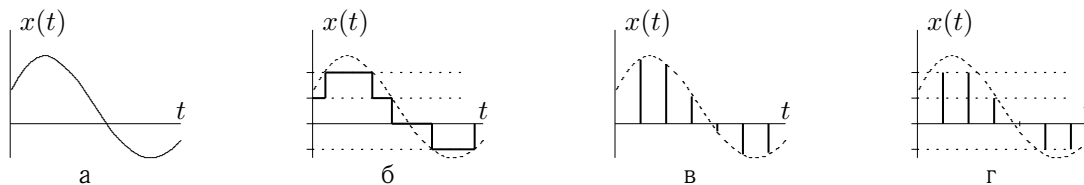


Рис. 1.1. Классификация сигналов: а) аналоговый; б) дискретный по величине; в) дискретный по времени; г) цифровой сигнал

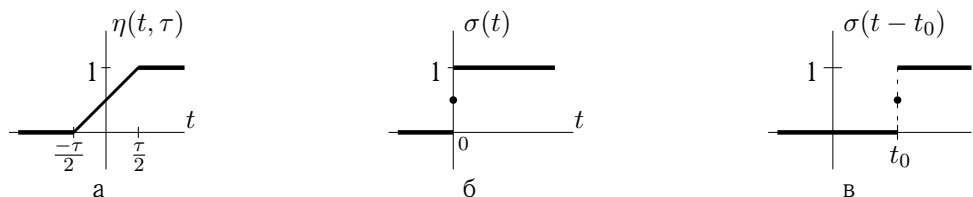


Рис. 1.2. Графики сигналов: а) функция перехода длительностью τ ; б) функция включения (ступенька Хевисайда); в) смещённая функция включения

угольный импульс длительностью τ (рис. 1.5 а):

$$p(t, \tau) = \frac{\sigma(t + \frac{\tau}{2}) - \sigma(t - \frac{\tau}{2})}{\tau} = \begin{cases} 0, & t < -\tau/2; \\ 1/\tau, & -\tau/2 \leq t \leq \tau/2; \\ 0, & t > \tau/2. \end{cases} \quad (1.6)$$

При $\tau \rightarrow 0$ высота импульса $1/\tau \rightarrow \infty$, а площадь импульса (произведение длительности на амплитуду) независимо от τ остаётся равной единице: $\int_{-\infty}^{\infty} p(t, \tau) dt = 1$.

2. Функция Дирака. Предел

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} p(t, \tau) \quad (1.7)$$

называется *дельта-функцией Дирака*¹ (рис. 1.5 б). Согласно формуле (1.6) функция Дирака является производной функции Хевисайда:

$$d\sigma/dt = \delta(t). \quad (1.8)$$

Аналогично определяют *смещённую (задержанную) функцию Дирака* (рис. 1.5 в)

$$\delta(t - t_0) = \lim_{\tau \rightarrow 0} p(t - t_0, \tau). \quad (1.9)$$

Она равна нулю всюду, кроме точки $t = t_0$, где она равна бесконечности. Площадь такого бесконечно высокого импульса при любом t_0 равна единице (*нормировка дельта-функции*):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = \int_{t_0 - \varepsilon_1}^{t_0 + \varepsilon_2} \delta(t - t_0) dt = 1, \quad (1.10)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ — любые положительные числа.

Размерность функции $\delta(x)$ обратна размерности переменной x , поэтому функция $\delta(t)$ временного аргумента t имеет размерность частоты $1/c$ [это следует из формулы нормировки (1.10)].

Сжатый (растянутый) во времени импульс² $\delta(at)$ имеет площадь

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(\xi)}{a} d\xi = 1/a.$$

Данное равенство доказывается заменой переменных $\xi = at$.

При $a < 0$ выполняется $\delta(at) = \delta(|a|t)$ (так как функция Дирака чётная³), поэтому $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$.

3. Обобщённые функции. Для определения ступеньки Хевисайда иногда выгодно использовать какую-нибудь непрерывно-дифференцируемую функцию, например, функцию Ферми (рис. 1.6 а)

$$\eta_F(t, \tau) = \frac{1}{1 + \exp(-t/\tau)}; \quad \sigma(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \eta_F(t, \tau). \quad (1.11)$$

Если определить функцию Хевисайда как предел функции Ферми, то $\delta(t) = d\sigma/dt$ можно определить как предел производной функции Ферми (рис. 1.6 б)

$$\frac{d}{dt}\sigma(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{d}{dt}\eta_F(t, \tau) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\exp(-t/\tau)}{\tau(1 + \exp(-t/\tau))^2}. \quad (1.12)$$

Для определения функции Дирака с помощью предельного перехода $\tau \rightarrow 0$ могут быть использованы также другие функции, например, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\tau} \exp(-t^2/2\tau^2)$ или $\frac{\sin(t/\tau)}{\pi t/\tau}$.

Производные любого порядка от функции Дирака можно определить с помощью предельного перехода $\tau \rightarrow 0$ через производные функции Ферми:

$$\frac{d^n \delta}{dt^n} = \frac{d^{n+1} \sigma}{dt^{n+1}} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{d^{n+1} \eta_F}{dt^{n+1}}. \quad (1.13)$$

Первая производная функции Дирака называется *дублет* (рис. 1.7). Она равна $+\infty$ при $t = 0 - 0$ и $-\infty$ при $t = 0 + 0$.

Дельта-функция и её производные относятся к классу так называемых *обобщённых функций*⁴. Из-за своей сингулярности (нулевой ширины и бесконечной высоты), они могут использоваться только под знаком интеграла.

¹Поль Дирак (Paul Dirac) — английский физик-теоретик (1902 – 1984).

²Покажите, что сжатию соответствует $a > 1$, а растяжению $0 < a < 1$.

³Функция $f(t)$ называется чётной, если она симметрична относительно оси ординат, то есть если выполняется: $f(-t) = f(t)$.

⁴Владимиров В.С. Обобщённые функции в математической физике. 2-е изд. – М., 1979.

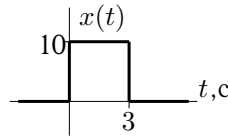


Рис. 1.3. Прямоугольный импульс амплитудой 10 В и длительностью 3 с

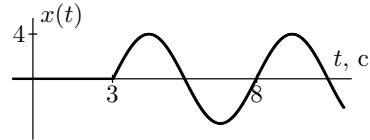


Рис. 1.4. Синусоидальный сигнал, “начавшийся” в момент времени $t = 3$ с

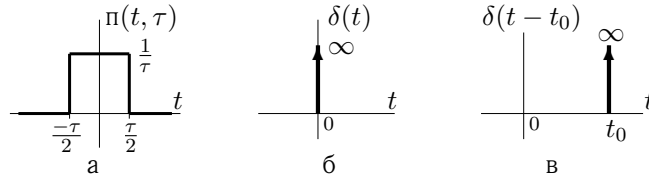


Рис. 1.5. а) функция $p(t, \tau)$; б) дельта-функция Дирака (дельта-импульс); в) задержанный дельта-импульс

1.3. Динамическое представление сигналов

1. Представление с помощью функции Дирака. Рассмотрим произвольный сигнал $x(t)$. Аппроксимируем его прямоугольными импульсами (рис. 1.8 а) шириной $\Delta = t_{k+1} - t_k$, высота которых совпадает со значением сигнала $x(t)$ в точках $t_k = k \cdot \Delta$, ($k = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$):

$$x(t) \approx \tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t_k) (\sigma(t - t_k + \Delta/2) - \sigma(t - t_k - \Delta/2)), \quad (1.14)$$

Умножим и разделим данное выражение на Δ . Устремим длительность импульсов Δ к нулю. Дискретная переменная t_k в пределе перейдёт в непрерывную переменную (обозначим её через τ); разности $\Delta = t_{k+1} - t_k$ в пределе будет соответствовать дифференциал $d\tau$; прямоугольные импульсы $(\sigma(t - t_k + \Delta/2) - \sigma(t - t_k - \Delta/2)) / \Delta$ при $\Delta \rightarrow 0$ по определению “превратятся” в дельта-функции $\delta(t - t_k)$, а сумма в пределе даст интеграл

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau. \quad (1.15)$$

Выражение (1.15) носит название *фильтрующего свойства*¹ дельта-функции. Интеграл вида (1.15) называется *свёрткой* и обозначается $x(t) * \delta(t)$. В общем случае свёртка $x(t) * y(t)$ определяется следующим образом:

$$x(t) * y(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) y(\tau) d\tau \equiv y(t) * x(t) \quad (1.16)$$

(коммутативность легко доказывается заменой переменных $\xi = \tau - t$).

Так как $\delta(t)$ — чётная функция, то $\delta(\tau - t) = \delta(t - \tau)$ (точка означает дифференцирование по времени).

¹Функция $x(t)$ должна быть непрерывной в точке t . Выражение (1.15) может быть также доказано с помощью известной в курсе математического анализа теоремы о среднем.

$\delta(t - \tau)$, поэтому

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(\tau - t) d\tau. \quad (1.17)$$

Поскольку δ -импульс имеет бесконечно малую длительность, то пределы интегрирования могут быть сужены:

$$\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = x(t), \quad (1.18)$$

где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число.

Технически устройство, выделяющее мгновенное значение сигнала $x(t_0)$, может быть представлено в виде умножителя и интегратора (рис. 1.9):

$$x(t_0) = \int x(t) \delta(t - t_0) dt.$$

Т. к. согласно фильтрующему свойству δ -функции

$$\sigma(t) = \sigma(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t - \tau) \delta(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau,$$

то по определению первообразной получаем, что при дифференцировании функции Хевисайда получается дельта-функция Дирака:

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} = \delta(t). \quad (1.19)$$

Данное свойство может быть использовано при дифференцировании функций, имеющих разрыв первого рода в точках t_k , т.е. таких функций, у которых предел слева $x(t_k - 0) = x_k^-$ не равен пределу справа $x(t_k + 0) = x_k^+$. Разность $h_k = x_k^+ - x_k^-$ называется *скачком функции* в точке t_k . Если величины всех скачков конечны, то представляя $x(t)$ в виде суммы непрерывной функции $x_H(t)$ и промасштабированных ступенек $\sigma(t - t_k)$:

$$x(t) = x_H(t) + \sum_k h_k \sigma(t - t_k),$$

получим

$$dx/dt \equiv \dot{x}(t) = \dot{x}_H(t) + \sum_k h_k \delta(t - t_k) \quad (1.20)$$

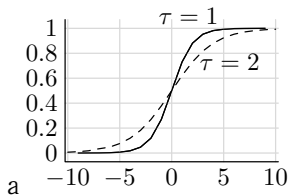


Рис. 1.6. Функция Ферми (а) и её производная (б)

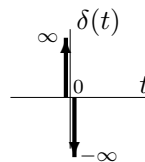
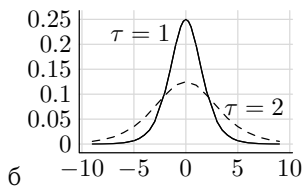


Рис. 1.7. Производная функции Дирака (дублет)

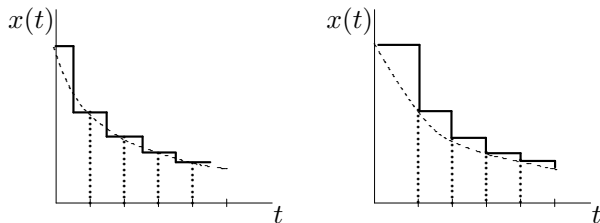


Рис. 1.8. Динамическое представление сигнала: а) с помощью функции Дирака; б) с помощью функции Хевисайда

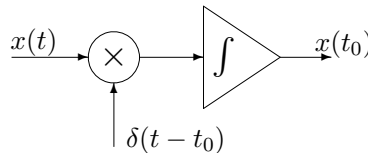


Рис. 1.9. Устройство для выделения мгновенного значения сигнала

Например, функция (1.4) имеет производную $10 \cdot (\delta(t) - \delta(t-3))$.

2. Представление с помощью функции Хевисайда. С другой стороны, любой сигнал $x(t)$ может быть приближённо представлен в виде следующих друг за другом ступенек (рис. 1.8 б):

$$\begin{aligned} x(t) &\approx \tilde{x}(t) = x(t_0)\sigma(t-t_0) + \\ &+ (x(t_1) - x(t_0))\sigma(t-t_1) + \\ &+ (x(t_2) - x(t_1))\sigma(t-t_2) + \dots = \\ &= x(t_0)\sigma(t-t_0) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} (x(t_k) - x(t_{k-1}))\sigma(t-t_0 - k\Delta), \end{aligned}$$

где шаг по времени $\Delta = t_{k+1} - t_k$. При $\Delta \rightarrow 0$ дискретную переменную $t_0 + k\Delta$ можно заменить непрерывной переменной τ (где $t_0 < \tau < \infty$), малые приращения $(x(t_k) - x(t_{k-1}))$ “превратятся” в дифференциал $dx = (dx/d\tau) \cdot d\tau$, а сумма в пределе даст интеграл Дюамеля:

$$x(t) = x(t_0)\sigma(t-t_0) + \int_{t_0}^{\infty} \frac{dx(\tau)}{d\tau} \sigma(t-\tau) d\tau. \quad (1.21)$$

Итак, непрерывный сигнал может быть представлен в виде интеграла по времени с помощью функций Дирака [свёртка (1.16)] или Хевисайда [интеграл Дюамеля (1.21)].

Пример 1.3 Рассмотрим экспоненциально убывающий импульс $x(t) = A e^{-\alpha t} \cdot \sigma(t)$. По формуле (1.21) получаем

$$\begin{aligned} x(t) &= A\sigma(t) - \alpha A \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \sigma(t-\tau) d\tau = \\ &= A\sigma(t) - \alpha A \int_0^t e^{-\alpha \tau} d\tau, \end{aligned}$$

т. к. $\sigma(t-\tau) = 0$ при $t-\tau < 0$.

Как и следовало ожидать, высота элементарных ступенек, из которых складывается данный сигнал, убывает

по экспоненте.

3. Динамическое представление производной сигнала по времени. Теперь рассмотрим, какой смысл имеет производная $\dot{\delta}(t)$ дельта-функции. Для этого возьмём свёртку некоторого сигнала $x(t)$ с производной дельта-импульса. Интегрируем по частям:

$$\begin{aligned} x(t) * \dot{\delta}(t) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) \frac{d\delta(\tau)}{d\tau} d\tau = \\ &= x(t-\tau) \delta(\tau) \Big|_{\tau=-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) (-\dot{x}(t-\tau)) d\tau. \end{aligned}$$

Т. к. $\delta(\xi)|_{\xi=\pm\infty} = 0$, то считая сигнал $x(t)$ ограниченным по амплитуде и используя фильтрующее свойство дельта-функции, получим

$$x(t) * \dot{\delta}(t) = \dot{x}(t) * \delta(t) = \dot{x}(t) \equiv \frac{dx(t)}{dt}. \quad (1.22)$$

Производная дельта-функции (иногда называемая *дублетом*, см. рис. 1.7) является нечётной: $\dot{\delta}(-t) = -\dot{\delta}(t)$, поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \dot{\delta}(t) dt = -\dot{x}(0). \quad (1.23)$$

В общем случае можно доказать, что

$$x(t) * \frac{d^n \delta(t)}{dt^n} = \frac{d^n x(t)}{dt^n}. \quad (1.24)$$

Таким образом, производная дельта-функции любого порядка выделяет производную подынтегральной функции соответствующего порядка в тот момент времени, где сосредоточена дельта-функция (*обобщённое фильтрующее свойство*). Производные дельта-функции порядка n являются чётными функциями при чётном n и нечётными функциями при нечётном n .

Используя формулу (1.19) и дифференцируя (??)¹ по t под знаком интеграла, можно получить инте-

¹См. приложение ??, с. ??.

гральное представление для функции Дирака:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{st} ds. \quad (1.25)$$

Задача 1.1 Вычислите свёртку следующих сигналов:

- 1) $e^{-at}\sigma(t)$ и $e^{-bt}\sigma(t)$;
- 2) $e^{-j\omega_1 t}\sigma(t)$ и $e^{-j\omega_2 t}\sigma(t)$;
- 3) $e^{-a+j\omega_1 t}\sigma(t)$ и $e^{-a+j\omega_2 t}\sigma(t)$;
- 4) $e^{j\omega_1 t}$ и $e^{j\omega_2 t}$;
- 5) $e^{-at} \cos \omega_1 t \cdot \sigma(t)$ и $e^{-bt} \cos \omega_2 t \cdot \sigma(t)$.

2. Векторное представление сигналов

2.1. Нормированные, метрические и гильбертовы пространства

1. Пространство сигналов. Дискретный сигнал x_n , заданный своими отсчётами в моменты времени t_n ($n = 1, 2, \dots, N$), может быть представлен в виде точки в N -мерном пространстве, координаты которой совпадают с отсчётами сигнала. Если число отсчётов устремить к бесконечности, то придём к бесконечномерному *функциональному пространству* (пространству функций или пространству непрерывных сигналов). Таким образом, сигнал, заданный всеми своими значениями в различные моменты времени, может быть представлен в виде элемента (радиус-вектора, точки) многомерного (или бесконечномерного) пространства. В данном разделе мы обсудим некоторые важные для теории сигналов геометрические понятия, являющиеся предметом исследования *функционального анализа*.

Говорят, что множество (элементов, функций, сигналов) имеет *структуру*, если между элементами множества установлены соотношения или над ними определены некоторые операции. Множество, наделённое структурой, называется *пространством*. Обычно определяют операции сложения и вычитания сигналов, а также операцию умножения сигнала на число (масштабирование). Для того, чтобы множество сигналов с определёнными соответствующим образом операциями сложения, вычитания и/или умножения являлось пространством, необходимо, чтобы множество было замкнуто относительно этих операций, то есть взвешенная сумма $\alpha x + \beta y$ элементов x и y рассматриваемого множества также должна являться элементом данного множества. По этой причине, например, не является пространством множество импульсов амплитудой не больше 10 В.

2. Метрическое пространство. Пространство \mathbb{A} называется *метрическим*, если для любой пары его элементов x и y задано вещественное число $d(x, y)$, часто обозначаемое $\|x - y\|$ и имеющее смысл расстояния между элементами, причём должны выполняться следующие аксиомы:

- 1) свойство неотрицательности:
 $\forall x, y \in \mathbb{A} : d(x, y) \geq 0$;
- 2) свойство идентичности:
 $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- 3) свойство симметрии:
 $d(x, y) = d(y, x)$;
- 4) неравенство треугольника:
 $\forall x, y, z \in \mathbb{A} : d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

Заметим, что расстояние — всегда вещественное число, даже если рассматриваются комплексные сигналы. На одном и том же множестве можно задать различные *метрики* (способы вычисления расстояния), при этом получаются разные пространства.

Если рассматривается пространство непрерывных функций (сигналов), определённых на отрезке $a \leq t \leq b$, то метрику часто задают в виде

$$d_k(x, y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^k dt \right)^{1/k}, \quad (2.1)$$

где k выбирают равным единице:

$$d_1(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt, \quad (2.2)$$

двум (*евклидова метрика*):

$$d_2(x, y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^2 dt \right)^{1/2} \quad (2.3)$$

или бесконечности:

$$d_\infty(x, y) = \sup_{t \in T} |x(t) - y(t)|. \quad (2.4)$$

Заметим, что при выборе метрики в интегральном виде, расстояние между двумя сигналами оказывается равным нулю, если они равны *почти всюду*, т. е. отличаются друг от друга на счётном множестве изолированных точек (говоря математическим языком — на множестве меры нуль), так как эта разница не вносит вклад в интеграл, имеющий смысл площади фигуры, образованной при вычитании данных сигналов.

Если рассматриваются дискретные сигналы, заданные в виде наборов n вещественных чисел ($x, y \in \mathbb{R}^n$), или векторы, определённые своими координатами в некотором базисе, то во всех формулах для вычисления метрики интеграл заменяется на сумму:

$$d_k(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^k \right)^{1/k}. \quad (2.5)$$

Если рассматривается множество n -значных двоичных слов (комбинации нулей и единиц длиной n), то используют *расстояние Хемминга* — число несовпадающих символов в словах x и y :

$$d_H(x, y) = \sum_{i=1}^n ((x_i + y_i) \bmod 2). \quad (2.6)$$

Например, $d_H(1 \underline{1} 0 1 \underline{0}, 1 \underline{0} 0 1 \underline{1}) = 2$.

Покажите самостоятельно, что для перечисленных способов задания метрики выполняются аксиомы 1–4.

Отображение элементов множества в числовое значение (скаляр) называется *функционалом*. Таким образом, метрика — это функционал.

3. Нормированное пространство. Аналогично метрике определяется *норма*, имеющая смысл длины вектора. Пространство \mathbb{A} называется *нормированным*, если для любого элемента x этого пространства задано вещественное число $\|x\|$, причём выполняются аксиомы:

- 1) $\|x\| \geq 0$;
- 2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- 3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, где λ — число;
- 4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Если рассматриваются комплексные сигналы, то норму часто задают в виде

$$\|x\| = \left(\int x(t) \cdot x^*(t) dt \right)^{1/2}. \quad (2.7)$$

Квадрат нормы называют *энергией сигнала* E_x . Для вещественных сигналов комплексное сопряжение можно опустить:

$$\|x\| = \left(\int x^2(t) dt \right)^{1/2}. \quad (2.8)$$

Если на множестве сигналов задана операция вычитания, то метрику можно задать в виде нормы разности сигналов. В этом случае говорят, что *метрика согласована с нормой*.

4. Линейное пространство сигналов. Часто на множестве сигналов вводят структуру линейного пространства. *Линейное пространство* \mathbb{L} (векторное пространство) — это множество объектов-векторов с определёнными операциями сложения векторов $x + y$ и умножения вектора на число (скаляр) λx , замкнутое относительно этих операций, т. е.

$$\forall x \in \mathbb{L} \Rightarrow (\lambda \cdot x) \in \mathbb{L},$$

$$\forall x, y \in \mathbb{L} \Rightarrow x + y \in \mathbb{L},$$

причём должны выполняться следующие аксиомы:

- 1) коммутативность сложения векторов:

$$x + y = y + x$$

и умножения вектора на скаляр:

$$\lambda x = x\lambda;$$

- 2) ассоциативность сложения векторов:

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

и умножения вектора на скаляр:

$$(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x);$$

- 3) дистрибутивность умножения на скаляр относительно сложения векторов:

$$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$$

и дистрибутивность умножения на вектор относительно сложения скаляров:

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x;$$

- 4) существование нулевого вектора:

$$\forall x \in \mathbb{L} : x + y = x \Leftrightarrow y \equiv 0;$$

- 5) существование противоположного вектора (для любого x существует ему противоположный):

$$\forall x \in \mathbb{L} \exists y \in \mathbb{L} : x + y = 0 \Leftrightarrow y \equiv -x;$$

- 6) унитарность умножения на скаляр:

$$\forall x \in \mathbb{L} : 1 \cdot x = x.$$

Линейное пространство может быть как действительным, так и комплексным (в последнем случае все сигналы и числа могут принимать комплексные значения).

5. Скалярное произведение сигналов. Наконец, по аналогии с обычным векторным пространством, в линейном пространстве сигналов задают *скалярное (внутреннее) произведение* $\langle x, y \rangle$ — функционал, отображающий упорядоченную пару элементов пространства x и y на множество вещественных или комплексных чисел, причём должно выполняться:

- 1) $\langle x, y \rangle \geq 0$;
- 2) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$;
- 3) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$; $\langle x, \lambda y \rangle = \lambda^* \langle x, y \rangle$;
- 4) $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$.

Линейное пространство, в котором введено скалярное произведение, называют *гильбертовым*¹.

С помощью скалярного произведения можно ввести понятие нормы сигнала:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad (2.9)$$

в этом случае говорят, что *норма порождена скалярным произведением*. В комплексном гильбертовом пространстве непрерывных сигналов скалярное произведение задают обычно в виде

$$\langle x, y \rangle = \int x(t) y^*(t) dt, \quad (2.10)$$

где звёздочка означает комплексное сопряжение.

Для дискретных сигналов интеграл заменяют суммой:

$$\langle x, y \rangle = \sum_i x_i y_i^*. \quad (2.11)$$

Угол φ_{xy} между сигналами x и y определяется согласно равенству

$$\cos \varphi_{xy} = \frac{\operatorname{Re} \langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}. \quad (2.12)$$

Два сигнала называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю. Можно доказать, что из равенства $\pm 90^\circ$ угла между комплексными сигналами ещё не следует их ортогональность. Действительно, рассмотрим на некотором отрезке T постоянные сигналы $x(t) = a + jb$ и $y(t) = c + jd$. Их скалярное произведение

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \int_T (a + jb)(c - jd) dt = \\ &= \int_T ((ac + bd) + (-ad + bc)) dt = \\ &= (ac + bd + j(bc - ad)) \cdot T; \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re} \langle x, y \rangle = (ac + bd) \cdot T.$$

Если $\varphi_{xy} = \pm \pi/2$, то $\operatorname{Re} \langle x, y \rangle = 0$, но мнимая часть $(bc - ad) \cdot T$ может быть не равна нулю.

Для гильбертова пространства справедливо *неравенство Коши-Буняковского* (иногда называемое *неравенством Шварца*):

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|. \quad (2.13)$$

¹Более точное определение гильбертова пространства можно найти в курсе функционального анализа, например: Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа.— М., 1982.

Доказательство. Рассмотрим неравенство

$$\langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle \geq 0$$

(оно выполняется благодаря свойству 1 скалярного произведения, здесь λ — скаляр). Раскрывая левую часть данного неравенства, получим:

$$\langle x, x \rangle - 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle \geq 0.$$

Квадратный трёхчлен (относительно λ) неотрицателен, следовательно, дискриминант отрицателен или равен нулю:

$$\langle x, y \rangle^2 - \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle \leq 0,$$

откуда и следует неравенство Коши–Буняковского.

□

Рассмотрим несколько примеров использования векторного представления сигналов.

Пример 2.1 Аппроксимация четверть-волны косинусоиды прямоугольным импульсом той же амплитуды (рис. 2.1 а).

Предположим, что требуется подобрать длительность t_1 прямоугольного импульса

$$y(t) = A(\sigma(t) - \sigma(t - t_1)),$$

чтобы расстояние между ним и сигналом

$$x(t) = A \cos(\pi t / 2t_0) (\sigma(t) - \sigma(t - t_0))$$

было как можно меньше.

Найдём сначала энергию исходного сигнала:

$$\|x(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = A^2 \int_0^{t_0} \cos^2 \frac{t\pi}{2t_0} dt.$$

Здесь мы использовали формулу

$$\cos^2 \alpha = (1 + \cos 2\alpha) / 2.$$

Получаем, что энергия равна

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \frac{A^2}{2} \int_0^{t_0} dt + \frac{A^2}{2} \int_0^{t_0} \cos \frac{t\pi}{t_0} dt = \\ &= \frac{A^2 t}{2} \Big|_0^{t_0} + \frac{A^2 t_0}{2\pi} \sin \frac{t\pi}{t_0} \Big|_0^{t_0} = \frac{A^2 t_0}{2}. \end{aligned}$$

откуда норма $\|x\| = A\sqrt{t_0/2}$. Аналогично находятся энергия и норма прямоугольного импульса:

$$\|y\|^2 = A^2 \int_0^{t_1} dt = A^2 t_1; \quad \|y\| = A\sqrt{t_1}.$$

Скалярное произведение

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(t) dt = A^2 \int_0^{\min(t_0, t_1)} \cos \frac{\pi t}{2t_0} dt = \\ &= A^2 \frac{2t_0}{\pi} \sin \frac{2\pi t}{2t_0} \Big|_0^{\min(t_0, t_1)} = \frac{2A^2 t_0}{\pi} \cdot \sin \frac{\pi \cdot \min(t_0, t_1)}{2t_0}. \end{aligned}$$

При $t_1 < t_0$ получаем

$$\langle x, y \rangle = \frac{2A^2 t_0}{\pi} \sin \frac{\pi t_1}{2t_0},$$

а при $t_1 \geq t_0$ взаимная энергия равна

$$\langle x, y \rangle = \frac{2A^2 t_0}{\pi},$$

т. к. $\sin \pi/2 = 1$.

Наконец, найдём квадрат расстояния (энергию разности сигналов)

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \langle x - y, x - y \rangle = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 = \\ &= \begin{cases} \frac{A^2 t_0}{2} + A^2 t_1 - \frac{4A^2 t_0}{\pi} \cdot \sin \frac{\pi t_1}{2t_0} & \text{при } t_1 < t_0; \\ \frac{A^2 t_0}{2} + A^2 t_1 - \frac{4A^2 t_0}{\pi} & \text{при } t_1 \geq t_0. \end{cases} \end{aligned}$$

Для нахождения минимума приравняем нулю производную $\|x - y\|^2$ по t_1 .

При $t_1 < t_0$:

$$\frac{d}{dt_1} \|x - y\|^2 = A^2 \left(1 - 2 \cos \frac{t_1 \pi}{2t_0} \right) = 0,$$

откуда получаем что $\cos(\pi t_1 / 2t_0) = 1/2$, следовательно $\pi t_1 / 2t_0 = \pi/3$ и длительность прямоугольного импульса должна быть равна $t_1 = 2t_0/3$. При этом расстояние между сигналами

$$\|x - y\| = A\sqrt{t_0(7/6 - 2\sqrt{3}/\pi)} \approx 0,253 A\sqrt{t_0}.$$

При $t_1 \geq t_0$ квадрат расстояния $\|x - y\|^2$ линейно увеличивается при увеличении t_1 , следовательно, минимум достигается при $t_1 = t_0$, но при этом

$$\|x - y\| = A\sqrt{t_0(1,5 - 4/\pi)} \approx 0,476 A\sqrt{t_0},$$

что больше предыдущего значения. Итак, окончательно получаем, что

$$t_1 = 2t_0/3.$$

На рис. 2.2 показана программа, реализующая вычисление длительности прямоугольного импульса, аппроксимирующего четверть волны косинусоидального сигнала.

Пример 2.2 Аппроксимация прямоугольного импульса другим прямоугольным импульсом (рис. 2.1 б).

Рассмотрим прямоугольный импульс $x(t)$ амплитудой A_0 и длительностью t_0 :

$$x(t) = A_0(\sigma(t) - \sigma(t - t_0))$$

и прямоугольный импульс амплитудой A_1 и длительностью t_1 :

$$y(t) = A_1(\sigma(t) - \sigma(t - t_1)).$$

Нетрудно найти, что

$$\|x(t)\| = A_0\sqrt{t_0}; \quad \|y(t)\| = A_1\sqrt{t_1};$$

$$\langle x, y \rangle = A_0 A_1 \min(t_0, t_1);$$

$$\|x - y\| = (A_0^2 t_0 + A_1^2 t_1 - 2A_0 A_1 \min(t_0, t_1))^{1/2}.$$

При $t_0 \leq t_1$ расстояние

$$\|x - y\| = (A_0^2 t_0 - 2A_0 A_1 t_0 + A_1^2 t_1)^{1/2},$$

а при $t_0 \geq t_1$:

$$\|x - y\| = (A_0^2 t_0 - 2A_0 A_1 t_1 + A_1^2 t_1)^{1/2}.$$

Если обозначить $t_1/t_0 = \tau$, $A_1/A_0 = \alpha$, то при $\tau \geq 1$:

$$\|x - y\|^2 = A_0^2 t_0 (1 - 2\alpha + \alpha^2 \tau),$$

а при $\tau \leq 1$:

$$\|x - y\|^2 = A_0^2 t_0 (1 - 2\alpha\tau + \alpha^2 \tau).$$

Теперь найдём такое τ , при котором $\|x - y\|^2 = \min$.

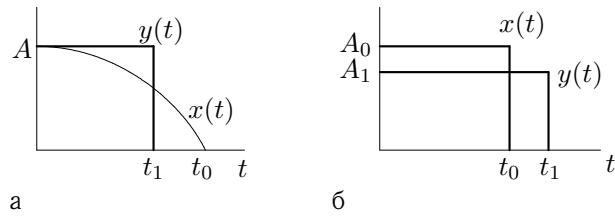


Рис. 2.1. Аппроксимация сигналов

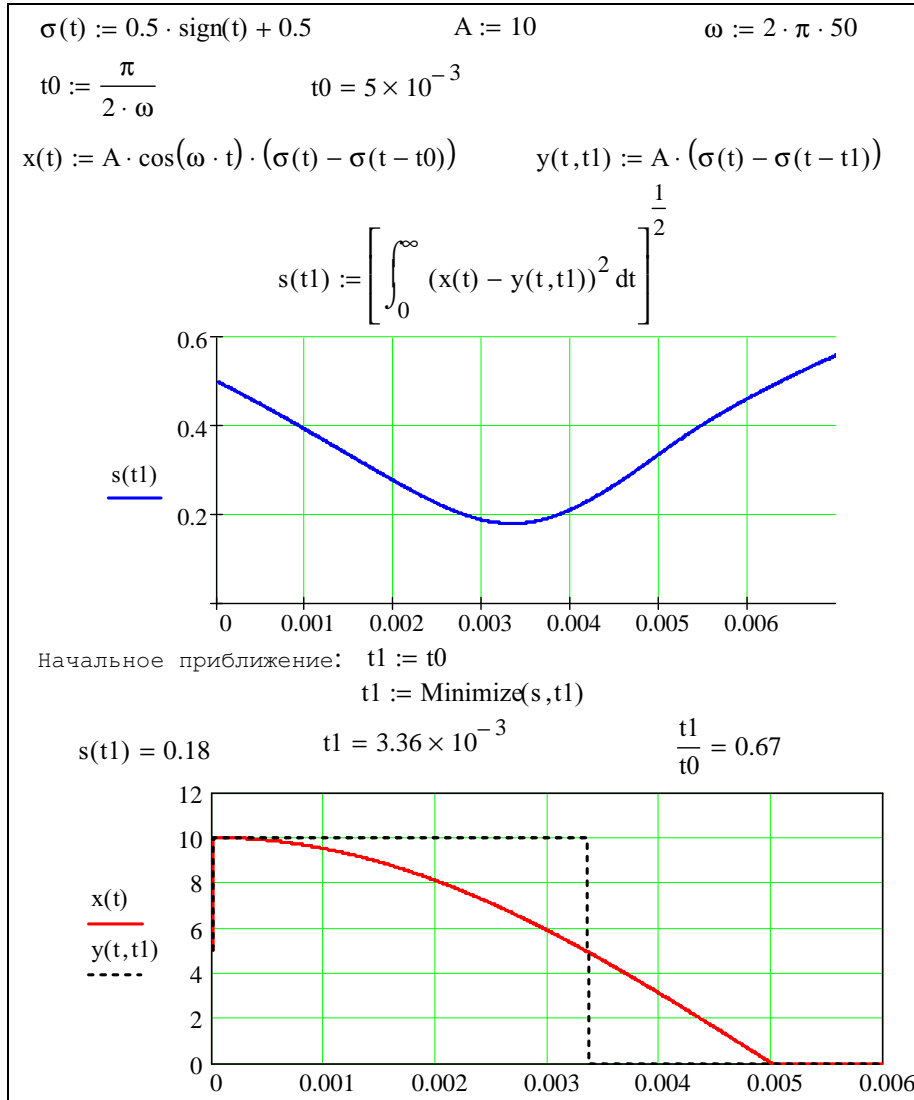


Рис. 2.2. Аппроксимация четверть-волны косинусоиды прямоугольным импульсом той же амплитуды (программа для MathCAD)

При $\tau \geq 1$ расстояние $\|x - y\|$ линейно увеличивается с ростом τ , поэтому точке минимума соответствует $\tau = 1$, следовательно, $t_0 = t_1$, при этом

$$\|x - y\| = A_0(1 - \alpha)\sqrt{t_0}.$$

При $\tau \leq 1$ возможны следующие варианты:

1) если $\alpha < 2$, то $\|x - y\|^2$ линейно уменьшается с увеличением τ и тогда минимум достигается опять при $\tau = 1$;

2) если $\alpha > 2$, то $\|x - y\|^2$ линейно увеличивается с увеличением τ и минимум соответствует $\tau \rightarrow 0$ (очень короткий импульс), но при этом $\|x - y\| \rightarrow A_0\sqrt{t_0}$, т.е. больше, чем в первом случае;

3) если $\alpha = 2$, то расстояние $\|x - y\| = A_0\sqrt{t_0}$ при любом τ , что снова больше, чем при $\tau = 1$.

Итак, при равной длительности прямоугольных импульсов ($t_0 = t_1$) обеспечивается минимальное расстояние между ними, независимо от их амплитуды.

Теперь найдём α , при котором $\|x - y\|^2 = \min$, считая τ заданным. Приравняв нулю производную $\frac{d}{d\alpha} \|x - y\|^2$, при $\tau \geq 1$ получаем $A_1 = A_0 t_0 / t_1$, а при $\tau \leq 1$ получаем $\alpha = 1$, т.е. $A_1 = A_0$ независимо от длительности импульсов t_0 и t_1 .

2.2. Базис в пространстве сигналов

Напомним несколько определений из линейной алгебры.

Пусть $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ — набор скаляров, $\{x_i\}_{i=1}^n$ — на-

бор векторов линейного пространства сигналов. *Линейная комбинация векторов* x_i с коэффициентами α_i — это вектор, полученный по правилу

$$y = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i.$$

Набор скаляров называют *тривиальным*, если все элементы набора равны нулю.

Набор векторов x_i называют *линейно независимым*, если их линейная комбинация равна нулю лишь в случае, когда набор скаляров α_i тривиален, т. е. если нельзя выразить какой-нибудь вектор из набора через линейную комбинацию остальных.

Набор векторов x_i *линейно зависим*, если существует нетривиальный набор скаляров α_i , такой что

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0.$$

Другими словами, набор линейно зависим, если имеется вектор из этого набора, равный линейной комбинации остальных:

$$x_k = -\frac{1}{\alpha_k} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \alpha_i x_i.$$

Набор ортогональных ненулевых векторов x_i линейно независим. Данное утверждение можно доказать, приравняв к нулю линейную комбинацию $\sum_k \alpha_k x_k$:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle 0, x_i \rangle = \left\langle \sum_k \alpha_k x_k, x_i \right\rangle = \sum_k \alpha_k \langle x_k, x_i \rangle = \\ &= \alpha_i \langle x_i, x_i \rangle = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0. \end{aligned}$$

Набор векторов x_i линейного пространства называют *полным*, если любой вектор y , принадлежащий данному пространству, можно представить в виде некоторой линейной комбинации векторов из этого набора:

$$y = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i.$$

Теорема 2.1 Если из полного набора вычеркнуть те векторы, которые выражаются через линейную комбинацию остальных, то получится по-прежнему полный набор, но уже линейно независимый.

Доказательство. (Метод прополки). Пусть $\{x_i\}_{i=1}^n$ — полный набор в некотором линейном пространстве \mathbb{L} . Пусть некоторый вектор x_k выражается через линейную комбинацию остальных. Вычеркнем x_k из набора $\{x_i\}_{i=1}^n$, тогда после приведения подобных членов в разложении y вместо x_k останется линейная комбинация пока не вычеркнутых векторов x_i , но уже с другими коэффициентами. И так до тех пор, пока не окажется ни одного x_k , представимого через линейную комбинацию остальных. □

Полный линейный независимый набор векторов линейного пространства называется *базисом* этого пространства.

Любой вектор можно представить в виде ли-

нейной комбинации базисных векторов. Выбор базиса неоднозначен. Так, любой из векторов базиса x_k можно заменить на λx_k (где $\lambda \neq 0$) или прибавить к любому вектору базиса линейную комбинацию остальных.

Если к базису добавить любой вектор, то получившийся набор будет уже линейно зависимым (данное утверждение следует из полноты базиса и определения линейной зависимости). Если $\{x_i\}_{i=1}^n$ — полный набор в линейном пространстве \mathbb{L} , а $\{y_i\}_{i=1}^m$ — линейно независимый набор в \mathbb{L} , то $n \geq m$.

Если набор $\{x_i\}_{i=1}^n$ — базис в \mathbb{L} , а набор $\{y_i\}_{i=1}^m$ — некоторый другой базис в \mathbb{L} , то $n = m$. Число векторов в базисе называют *размерностью* линейного пространства (таким образом, размерность не зависит от выбора базиса).

Коэффициенты $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ в разложении любого вектора $y \in \mathbb{L}$ по векторам базиса $\{x_i\}_{i=1}^n$ называются *координатами* вектора y в этом базисе. Координаты зависят от выбора базиса. При сложении векторов (умножении вектора на скаляр) его соответствующие координаты также складываются (умножаются на скаляр).

Все приведённые утверждения справедливы и для линейного пространства сигналов.

Часто удобно некоторый сигнал $x(t)$ рассматривать не как функцию, заданную бесконечным числом своих значений в различные моменты времени, а работать со счётным количеством коэффициентов α_i разложения $x(t)$ по некоторым базисным сигналам $\eta_i(t)$:

$$x(t) = \sum_i \alpha_i \eta_i(t). \quad (2.14)$$

Такое разложение называется *обобщённым рядом Фурье*¹, а коэффициенты α_i — *спектральными коэффициентами*. Набор спектральных коэффициентов образуют *спектр сигнала*. Число базисных функций и, следовательно, число спектральных коэффициентов обычно бесконечно. Заметим, что динамическое представление сигналов — частный случай векторного, соответствующего выбору базисных сигналов в виде дельта-функций или ступенек Хевисайда.

Набор сигналов называют *ортогональным*, если все их попарные скалярные произведения равны нулю, т. е. если $\langle \eta_i, \eta_k \rangle = 0$ для любых $i \neq k$. Набор называют *ортонормированным*, если $\langle \eta_i, \eta_k \rangle = \delta_{ik}$, где *символ Кронекера*

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

Теорема 2.2 Если базисные сигналы $\eta_i(t)$ ортогональны, то спектральные коэффициенты в

¹Жан Батист Жозеф Фурье (Fourier) — французский математик (1768–1830).

разложении (2.14) находятся по формуле

$$\alpha_i = \frac{\langle x, \eta_i \rangle}{\langle \eta_i, \eta_i \rangle}. \quad (2.15)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \langle x, \eta_k \rangle &= \left\langle \sum_i \alpha_i \eta_i, \eta_k \right\rangle = \\ &= \sum_i \alpha_i \langle \eta_i, \eta_k \rangle = \alpha_k \langle \eta_k, \eta_k \rangle. \end{aligned}$$

□

Для ортонормированного базиса

$$\alpha_i = \langle x, \eta_i \rangle, \quad (2.16)$$

т. к. $\langle \eta_i, \eta_i \rangle = \|\eta_i\|^2 = 1$.

Найдём набор коэффициентов α_i , при котором ряд $\sum \alpha_i \eta_i(t)$ наилучшим образом аппроксимирует сигнал $x(t)$, т. е. при котором минимально расстояние $\|x(t) - \sum \alpha_i \eta_i(t)\|$. Энергия ошибки

$$\begin{aligned} 0 \leq \left\| x - \sum_i \alpha_i \eta_i \right\|^2 &= \left\langle x - \sum_i \alpha_i \eta_i, x - \sum_i \alpha_i \eta_i \right\rangle = \\ &= \langle x, x \rangle - \sum_i \alpha_i \langle \eta_i, x \rangle - \sum_i \alpha_i^* \langle x, \eta_i \rangle + \\ &+ \sum_i \alpha_i \alpha_i^* \langle \eta_i, \eta_i \rangle. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\langle x, \eta_i \rangle / \langle \eta_i, \eta_i \rangle = x_i;$$

$$\|\eta_i\| = \sqrt{\langle \eta_i, \eta_i \rangle} = A_i.$$

Тогда получаем

$$\|x\|^2 - \sum_i \alpha_i A_i^2 x_i^* - \sum_i \alpha_i^* A_i^2 x_i + \sum_i \alpha_i \alpha_i^* A_i^2.$$

Прибавим и вычтем $\sum_i \|x\|^2$, тогда энергия ошибки

$$\begin{aligned} \|x\|^2 - \sum_i |x_i|^2 + \sum_i (\alpha_i A_i - x_i) \cdot (\alpha_i A_i - x_i)^* &= \\ = \|x\|^2 - \sum_i |x_i|^2 + \sum_i |\alpha_i A_i - x_i|^2. \end{aligned}$$

Минимум ошибки $\|x\|^2 - \sum_i |x_i|^2$ достигается при $\alpha_i = x_i/A_i$. Таким образом, коэффициенты (2.15) ряда Фурье (2.14) обеспечивают наилучшую аппроксимацию произвольного сигнала по векторам набора η_i . При этом энергия ошибки аппроксимации равна

$$\left\| x - \sum_i x_i \eta_i \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_i |x_i|^2 \geq 0.$$

Отсюда следует *неравенство Бесселя*:

$$\sum_i |x_i|^2 \leq \|x\|^2 \quad (2.17)$$

— сумма квадратов коэффициентов разложения сигнала по любому набору векторов $\eta_i(t)$ не больше квадрата нормы этого сигнала. Для полной системы векторов η_i неравенство Бесселя обращается в равенство (условие полноты набора η_i):

$$\sum_i \frac{|\langle x, \eta_i \rangle|^2}{\|\eta_i\|^2} = \|x\|^2. \quad (2.18)$$

Таким образом, энергия сигнала складывается из энергий всех его спектральных компонент.

Теорема 2.3 Для полной ортонормированной системы векторов η_i известно равенство *Парсеваля*:

$$\langle x, y \rangle = \sum_i \langle x, \eta_i \rangle \cdot \langle \eta_i, y \rangle. \quad (2.19)$$

Доказательство. Выполним разложение сигналов $x(t)$ и $y(t)$ по базисным сигналам:

$$x = \sum_i \langle x, \eta_i \rangle \eta_i; \quad y = \sum_k \langle y, \eta_k \rangle \eta_k.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \left\langle \sum_i \langle x, \eta_i \rangle \eta_i, \sum_k \langle y, \eta_k \rangle \eta_k \right\rangle = \\ &= \sum_i \sum_k \langle x, \eta_i \rangle \cdot \langle y, \eta_k \rangle^* \cdot \langle \eta_i, \eta_k \rangle = \\ &= \sum_i \langle x, \eta_i \rangle \cdot \langle \eta_i, y \rangle, \end{aligned}$$

т. к. $\langle \eta_i, \eta_k \rangle = \delta_{ik}$. □

Аппаратный способ нахождения коэффициентов разложения сигнала в обобщённый ряд Фурье показан на рис. 2.3. В схеме используются умножители и интеграторы.

2.3. Разложение периодических сигналов в ряд Фурье

Наиболее часто используемый базис, по которому раскладывают другие сигналы, — это система экспонент с мнимым показателем

$$\left\{ \eta_k(t; \omega_1) = A e^{jk\omega_1 t} \right\}_{k=0, \pm 1, \pm 2, \dots} \quad (2.20)$$

с кратными частотами¹ $k\omega_1$. Разложение сигнала по данному базису называется *гармоническим анализом*.

Докажем сначала, что набор функций (2.20) является ортогональным на отрезке $[t, t+T]$, где $T = 2\pi/\omega_1$, и найдём амплитуду A , при которой он становится ортонормированным.

Скалярное произведение двух произвольно взятых сигналов $\eta_n(t)$ и $\eta_m(t)$ из рассматриваемого набора

$$\begin{aligned} \langle \eta_n, \eta_m \rangle &= \int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega_1}} A^2 e^{j\omega(n-m)t} dt = \\ &= \frac{A^2}{j\omega_1(n-m)} e^{j\omega(n-m)t} \Big|_t^{t+\frac{2\pi}{\omega_1}} = \\ &= \frac{A^2}{j\omega_1(n-m)} e^{j\omega(n-m)t} \left(e^{j\omega(n-m)2\pi} - 1 \right) = \\ &= \frac{A^2 e^{j\omega(n-m)t} e^{j(n-m)\pi}}{j\omega_1(n-m)} \left(e^{j(n-m)\pi} - e^{-j(n-m)\pi} \right) = \\ &= \frac{2A^2 e^{j\omega(n-m)t} e^{j(n-m)\pi}}{\omega_1(n-m)} \cdot \frac{e^{j(n-m)\pi} - e^{-j(n-m)\pi}}{2j} = \\ &= \frac{2A^2}{\omega_1(n-m)} e^{j(n-m)(\omega_1 t - \pi)} \sin((n-m)\pi). \end{aligned}$$

При $n \neq m$ базисные сигналы ортогональны: $\langle \eta_n, \eta_m \rangle = 0$, т. к. $\sin \pi k = 0$.

При $n = m$ неопределённость $0/0$ раскрывается по правилу Лопиталья (или разложением в ряд Тей-

¹Напомним, что круговая частота $\omega = 2\pi f$ измеряется в рад/с.

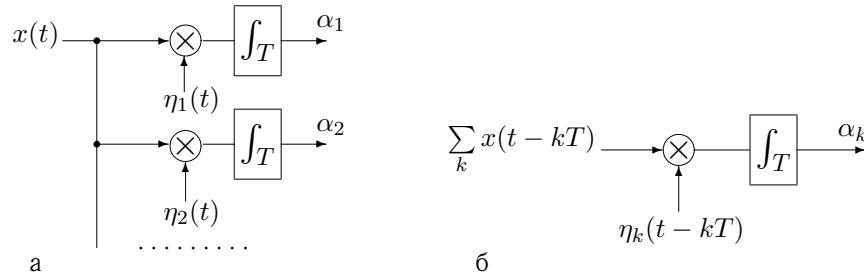


Рис. 2.3. Параллельная (а) и последовательная (б) схема устройства для вычисления спектральных коэффициентов

лора): вычисляем производные числителя и знаменателя функции

$$\langle \eta_n, \eta_m \rangle = \frac{2A^2}{\omega_1} \cdot \frac{\sin(k\pi)}{k},$$

где $k = n - m = 0$. Получаем, что при $k = 0$:

$$\langle \eta_n, \eta_m \rangle = \frac{2A^2}{\omega_1} \cdot \frac{\pi \cos(k\pi)}{1} = \frac{2A^2 \pi}{\omega_1}.$$

Если выбрать $2A^2\pi/\omega_1 = 1$, т.е. $A = \sqrt{\omega_1/2\pi} = 1/\sqrt{T}$, то получим ортонормированный набор:

$$\langle \eta_n, \eta_m \rangle = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m; \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

Теперь найдём коэффициенты разложения (спектральные коэффициенты) некоторой периодической с периодом T функции $x(t)$ по ортонормированному базису

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j2\pi kt/T} \right\}_{k=0, \pm 1, \pm 2, \dots} \quad (2.21)$$

Используя (2.16), получаем

$$\alpha_k = \langle x(t), \eta_k(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_T x(t) e^{-j\frac{2\pi kt}{T}} dt,$$

где интеграл берётся по любому отрезку длиной T , например, от 0 до T или от $-T/2$ до $T/2$ (при этом значение интеграла не изменяется). Итак, если сигнал $x(t)$ имеет период T , то его можно представить в виде бесконечной суммы

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \cdot \exp\left(j\frac{2\pi kt}{T}\right); \\ \alpha_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) \cdot \exp\left(-j\frac{2\pi kt}{T}\right) dt \end{cases} \quad (2.22)$$

Данное разложение называется *рядом Фурье* в комплексной форме, а слагаемые данного ряда — *гармониками* сигнала $x(t)$.

Здесь мы не доказали полноту набора (2.20), но известно, что для равномерной сходимости ряда Фурье достаточно, чтобы сигнал $x(t)$ был непрерывным, а его первая производная по времени — кусочно-непрерывна. Если сигнал имеет разрывы первого рода (в пределах периода число таких разрывов, а также число экстремумов сигнала должно быть конечно), то ряд Фурье в точках разрыва t_i сходится к среднему арифметическому $(x(t_i - 0) + x(t_i + 0))/2$. При этом по обе стороны от точки разрыва наблюдаются всплески около 9% от величины скачка функции в точке разрыва (*явление Гиббса*), т.е. сходимость уже не является равномерной.

Из (2.22) следует, что в случае действительного сигнала $x(t)$ спектральные коэффициенты (амплитуды гармоник) удовлетворяют равенству $\alpha_{-k} = \alpha_k^*$ (см. задачу 3 на с. 16). Т.к. по формуле Эйлера

$$\begin{aligned} \frac{e^{j\frac{2\pi kt}{T}} + e^{-j\frac{2\pi kt}{T}}}{2} &= \cos \frac{2\pi kt}{T}; \\ \frac{e^{j\frac{2\pi kt}{T}} - e^{-j\frac{2\pi kt}{T}}}{2j} &= \sin \frac{2\pi kt}{T}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

то рассмотренный базисный набор комплексных экспонент (2.21) в случае действительных сигналов $x(t)$ эквивалентен набору тригонометрических функций:

$$\frac{1}{\sqrt{T}}, \left\{ \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{2\pi kt}{T}, \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{2\pi kt}{T} \right\}_{k=1, 2, \dots} \quad (2.24)$$

— каждая пара гармоник с номерами k и $-k$ ($k \neq 0$) раскладывается на взвешенную сумму $a_k \cos(2\pi kt/T) + b_k \sin(2\pi kt/T)$.

Таким образом, действительный T -периодический сигнал можно представить в виде суммы

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2\pi kt}{T} + b_k \sin \frac{2\pi kt}{T} \right), \quad (2.25)$$

где спектральные коэффициенты вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_T x(t) dt; & a_k &= \frac{2}{T} \int_T x(t) \cos \frac{2\pi kt}{T} dt; \\ (k = 1, 2, \dots) & & b_k &= \frac{2}{T} \int_T x(t) \sin \frac{2\pi kt}{T} dt. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Данное разложение называется *рядом Фурье в тригонометрической форме*. Амплитуда нулевой гармоники (величина постоянной составляющей сигнала, т.е. его среднее значение) в обеих формах записи одинакова: $\alpha_0 = a_0$, а амплитуды остальных гармоник связаны соотношением $\alpha_k = (a_k - jb_k)/2$ (см. задачу 11 на с. 16). Если известны α_k , то a_k и b_k можно найти по формулам:

$$\begin{aligned} a_k &= \alpha_k + \alpha_{-k} = 2 \operatorname{Re} \alpha_k; \\ b_k &= j(\alpha_k - \alpha_{-k}) = -2 \operatorname{Im} \alpha_k. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Гармоника с частотой $\omega_k = 2\pi k/T = \omega_1 k$ имеет амплитуду $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = 2|\alpha_k|$ и начальную фазу $\varphi_k = \arg \alpha_k = -\arctg(b_k/a_k)$, поэтому ряд Фурье для действительного сигнала можно переписать в

амплитудно-фазовой форме:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi kt/T + \varphi_k). \quad (2.28)$$

Пример 2.3 Разложить в ряд Фурье последовательность однополярных прямоугольных импульсов (меандр, рис. 2.4) амплитудой A , симметричную относительно начала отсчёта времени $t = 0$, скважность (отношение периода T к длительности импульса τ) равна $q = T/\tau$.

Постоянная составляющая

$$a_0 = \frac{A}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dt = \frac{A\tau}{T} = A/q;$$

амплитуды остальных гармоник

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{2A}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \cos \frac{2\pi kt}{T} dt = \frac{2A}{T} \frac{T}{2\pi k} \sin \frac{2\pi kt}{T} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \\ &= \frac{2A}{\pi k} \sin \frac{\pi k\tau}{T} = \frac{2A}{\pi k} \sin \frac{\pi k}{q}; \end{aligned}$$

т. к. $\cos(\pi k\tau/T) = \cos(-\pi k\tau/T)$, то

$$b_k = \frac{2A}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \sin \frac{2\pi kt}{T} dt = 0.$$

Получаем ряд Фурье для рассматриваемого сигнала в тригонометрической форме:

$$x(t) = \frac{A}{q} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi k/q)}{\pi k/q} \cos \frac{2\pi kt}{T} \right).$$

Т. к. все $b_k = 0$, то согласно формуле (2.27) коэффициенты ряда Фурье в комплексной форме будут равны $\alpha_k = a_k/2$.

Спектральная диаграмма для меандра скважности 2 изображена на рис. 2.4 б (показаны коэффициенты разложения α_k , которые в данном случае имеют нулевую мнимую часть и в два раза меньше, чем коэффициенты a_k). Как видим, все чётные гармоники (кроме нулевой) равны нулю. На рис. 2.4 в показан сигнал, образованный суммой гармоник с номерами $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ (пунктирная кривая), и с номерами $k = 0, \pm 1, \dots, \pm 10$ (сплошная линия). Хорошо видно явление Гиббса — всплески по обе стороны от точек разрывов.

Пример 2.4 Найдём спектр последовательности треугольных импульсов (рис. 2.5 а), симметричных относительно начала отсчёта времени, амплитудой A , длительностью τ , следующих друг за другом с периодом T .

В пределах одного периода, на отрезке $t \in [-T/2, T/2]$:

$$x(t) = \begin{cases} A(2t/\tau + 1) & \text{при } -\tau/2 \leq t \leq 0; \\ A(-2t/\tau + 1) & \text{при } 0 \leq t \leq \tau/2. \end{cases}$$

Раскладывая в ряд Фурье, получим

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\omega_1 kt} dt = \\ &= \frac{A}{T} \int_{-\tau/2}^0 \left(\frac{2t}{\tau} + 1 \right) e^{-j\omega_1 kt} dt + \\ &+ \frac{A}{T} \int_0^{\tau/2} \left(-\frac{2t}{\tau} + 1 \right) e^{-j\omega_1 kt} dt = \\ &= \frac{2A}{T\tau} \left(\int_{-\tau/2}^0 t e^{-j\omega_1 kt} dt - \int_0^{\tau/2} t e^{-j\omega_1 kt} dt \right) + \\ &+ \frac{A}{T} \left(\int_{-\tau/2}^0 e^{-j\omega_1 kt} dt - \int_0^{\tau/2} e^{-j\omega_1 kt} dt \right). \end{aligned}$$

Первые два интеграла берутся по частям:

$$\begin{aligned} \int t e^{-\alpha t} dt &= -\frac{1}{\alpha} \int t de^{-\alpha t} = \\ &= -\frac{1}{\alpha} \left(t e^{-\alpha t} - \int e^{-\alpha t} dt \right) = \\ &= -\frac{1}{\alpha} \left(t e^{-\alpha t} + \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} \right) = -\frac{1}{\alpha^2} e^{-\alpha t} - \frac{t}{\alpha} e^{-\alpha t}, \end{aligned}$$

в результате получим:

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{2A}{T\tau} \left[\frac{1}{\omega_1^2 k^2} e^{-j\omega_1 kt} - \frac{t}{j\omega_1 k} e^{-j\omega_1 kt} \right] \Big|_{-\tau/2}^0 - \\ &- \frac{2A}{T\tau} \left[\frac{1}{\omega_1^2 k^2} e^{-j\omega_1 kt} - \frac{t}{j\omega_1 k} e^{-j\omega_1 kt} \right] \Big|_0^{\tau/2} - \\ &- \frac{A}{T} \frac{1}{j\omega_1 k} e^{-j\omega_1 kt} \Big|_{-\tau/2}^0 - \frac{A}{T} \frac{1}{j\omega_1 k} e^{-j\omega_1 kt} \Big|_0^{\tau/2} = \\ &= \frac{2A}{T\tau} \left[\frac{1}{\omega_1^2 k^2} - \frac{1}{\omega_1^2 k^2} e^{j\omega_1 k\tau/2} - \frac{\tau}{2j\omega_1 k} e^{j\omega_1 k\tau/2} \right] - \\ &- \frac{2A}{T\tau} \left[\frac{1}{\omega_1^2 k^2} e^{-j\omega_1 k\tau/2} - \frac{\tau}{2j\omega_1 k} e^{-j\omega_1 k\tau/2} - \frac{1}{\omega_1^2 k^2} \right] - \\ &- \frac{A}{jT\omega_1 k} \left(1 - e^{j\omega_1 k\tau/2} + e^{-j\omega_1 k\tau/2} - 1 \right) = \\ &= \frac{4A}{T\tau\omega_1^2 k^2} - \frac{2A}{T\tau\omega_1^2 k^2} \left(e^{j\omega_1 k\tau/2} + e^{-j\omega_1 k\tau/2} \right) = \\ &= \frac{4A}{t\tau\omega_1^2 k^2} \left(1 - \cos(\omega_1 k\tau/2) \right) = \frac{AT}{\pi^2 k^2 \tau} \left(1 - \cos \frac{\pi k\tau}{T} \right). \end{aligned}$$

При $k = 0$ неопределённость $0/0$ устраняется, если разложить $\cos \alpha$ в ряд Тейлора

$$\cos \alpha = 1 - \alpha^2/2 + \dots,$$

откуда

$$\alpha_0 = \frac{AT}{\pi^2 k^2 \tau} \frac{\pi^2 k^2 \tau^2}{2T^2} = \frac{A\tau}{2T}.$$

Итак,

$$\alpha_0 = \frac{A\tau}{2T}; \quad \alpha_k = \frac{AT}{\pi^2 k^2 \tau} \left(1 - \cos \frac{\pi k\tau}{T} \right), \quad k = 1, 2, \dots$$

Например, рассмотрим сигнал $x(t)$ при $T = 8$, $\tau = 6$, $A = 3$. Тогда

$$\alpha_0 = 9/8; \quad \alpha_1 = \frac{3 \cdot 8}{\pi^2 6} \left(1 - \cos \frac{3\pi}{4} \right) = \frac{4}{\pi^2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right);$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\pi^2}; \quad \alpha_3 = \frac{4}{9\pi^2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{8}{9\pi^2}; \quad \alpha_4 = \frac{1}{4\pi^2}; \dots$$

Если раскладывать $x(t)$ в ряд Фурье по тригонометрическим функциям, то

$$a_k = \alpha_k + \alpha_{-k} = 2\alpha_k; \quad b_k = j(\alpha_k - \alpha_{-k}) = 0,$$

а при разложении в ряд Фурье в амплитудно-фазовой форме:

$$A_k = a_k = 2\alpha_k; \quad \varphi_k = 0.$$

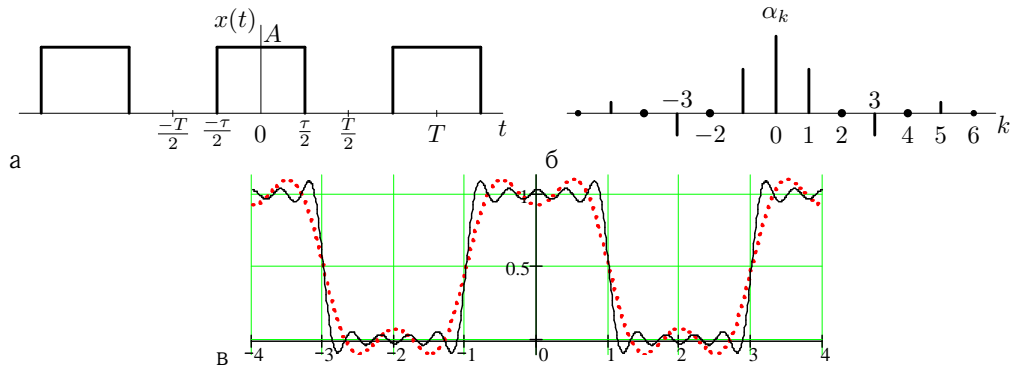


Рис. 2.4. Разложение меандра в ряд Фурье: а) исходный сигнал; б) спектральная диаграмма; в) результат суммирования первых гармоник: $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ (пунктир); $k = 0, \pm 1, \dots, \pm 10$ (сплошная линия)

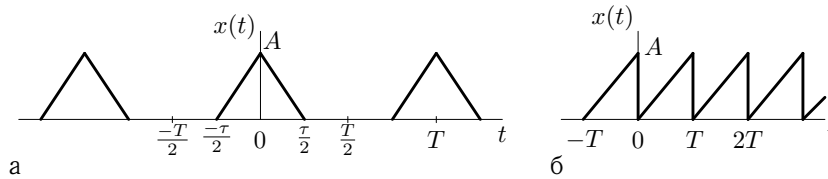


Рис. 2.5. Разложение в ряд Фурье последовательности треугольных импульсов: а) симметричные треугольные импульсы; б) пилообразные импульсы

Пример 2.5 Спектр пилообразного сигнала лучаем (рис. 2.5 б):

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{At}{T} dt = A/2; \\
 a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T \frac{At}{T} \cos \frac{2\pi kt}{T} dt \\
 b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T \frac{At}{T} \sin \frac{2\pi kt}{T} dt.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{2}{T} \left(\int_{-T/2}^0 x(t) \cos \frac{2\pi kt}{T} dt + \int_0^{T/2} x(t) \cos \frac{2\pi kt}{T} dt \right) = \\
 &= \frac{2}{T} \left(\int_{T/2}^0 x(-t) \cos \frac{2\pi k(-t)}{T} d(-t) + \int_0^{T/2} x(t) \cos \frac{2\pi kt}{T} dt \right) = \\
 &= \frac{2}{T} \left(\int_{T/2}^0 x(t) \cos \frac{2\pi kt}{T} dt + \int_0^{T/2} x(t) \cos \frac{2\pi kt}{T} dt \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Подобные интегралы берутся по частям:

$$\begin{aligned}
 \int_0^T t \sin at dt &= \frac{-1}{a} \int_0^T t d \cos at = \\
 &= \frac{-1}{a} t \cos at \Big|_0^T + \frac{1}{a} \int_0^T \cos at dt = \\
 &= \left(\frac{-1}{a} t \cos at + \frac{1}{a^2} \sin at \right) \Big|_0^T = \\
 &= \frac{1}{a^2} \sin aT - \frac{T}{a} \cos aT
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 b_k &= \frac{2}{T} \frac{A}{T} \left(\frac{T^2}{4\pi^2 k^2} \sin 2\pi k - \frac{T^2}{2\pi k} \cos 2\pi k \right) = \\
 &= 0 - \frac{2AT^2}{2T^2\pi k} = -\frac{A}{\pi k}.
 \end{aligned}$$

Коэффициенты a_k найдите самостоятельно.

Пример 2.6 Докажем, что если сигнал чётный, т. е. если $x(-t) = x(t)$, то все коэффициенты $b_k = 0$ (где $k = 0, 1, 2, \dots$), а если нечётный, т. е. если $x(-t) = -x(t)$, то все коэффициенты $a_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots$).

Например, для нечётного сигнала, выполняя замену переменных $t \rightarrow -t$ и используется чётность косинуса, по-

Для чётного сигнала равенство нулю коэффициентов b_k доказывается аналогично.

Задание 2.1 Решите следующие задачи:

1. Дан график спектральных компонент α_k разложения в комплексный ряд Фурье. Как нарисовать графики для коэффициентов разложения в амплитудно-фазовой форме?

2. Найдите коэффициенты для ряда Фурье (во всех трёх формах) и нарисуйте линейчатый спектр (амплитудный и фазовый) для следующих сигналов:

а) однополярная пила амплитудой A и периодом T , возрастающая от 0 до aT ($0 < a \leq 1$);

б) однополярная пила с амплитудой A , убывающая от 0 до aT ($0 < a \leq 1$);

в) треугольные импульсы положительной полярности, начало отсчёта времени совпадает с вершиной импульса, амплитуда A , период T , длительность импульса aT ; $a < 1$;

г) $x(t) = |A \cos \omega t|$;

д) $x(t) = |A \sin^3 \omega t|$;

е) $x(t) = A \cos^2 \omega t$;

ж) $x(t) = A \cos \Omega t \cdot \sin \omega t$, где $\omega/\Omega = k$ — целое число (тогда сигнал имеет период $T = 2\pi/\Omega$);

$$\text{з) } x(t) = A \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\sigma(t-kT) - \sigma(t-kT-\tau)) \cdot \cos \omega t;$$

$$T = 2\pi n/\omega > \tau; \quad \tau < T;$$

$$\text{и) } x(t) = A \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\sigma(t-kT) - \sigma(t-kT-\tau)) \cdot \sin \omega t;$$

$$T = 2\pi n/\omega > \tau; \quad \tau < T;$$

$$\text{к) } x(t) = A \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\sigma(t-kT) - \sigma(t-kT-\tau)) \cdot (t-kT)^2;$$

$$\tau < T;$$

л) однополярный несимметричный треугольный сигнал, возрастающий от $-aT$ до 0 и убывающий от 0 до bT ($0 < a, b \leq 1/2$);

м) трапецевидный периодический сигнал, линейно возрастающий от 0 до aT , остающийся постоянным от aT до bT и линейно убывающий от bT до T ($a < b < 1$).

3. Докажите, что спектральные коэффициенты вещественного сигнала удовлетворяют соотношению: $\alpha_{-k} = \alpha_k^*$.

4. Докажите, что действительные части $\text{Re } \alpha_k$ и амплитуды спектральных коэффициентов $|\alpha_k|$ вещественно-четных функций аргумента k , а мнимые составляющие $\text{Im } \alpha_k$ и фазовые углы $\arg \alpha_k$ — нечетными.

5. Докажите, что коэффициенты разложения α_k четного действительного сигнала имеют нулевую мнимую часть и что тригонометрическая форма ряда Фурье для такого сигнала содержит только косинусоиды.

6. Докажите, что коэффициенты разложения α_k нечетного вещественного сигнала — чисто мнимые и что тригонометрическая форма ряда Фурье для такого сигнала содержит только синусоиды.

7. Периодическая функция называется нечетно-гармонической, если её представление в ряд Фурье содержит только нечетные гармоники с номерами $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$. Докажите, что необходимым и достаточным условием для того, чтобы функция $x(t)$ была нечетно-гармонической, является равенство $x(t - T/2) = -x(t)$.

8. Периодическая функция называется четно-гармонической, если её представление в ряд Фурье содержит только четные гармоники с номерами $0, \pm 2, \pm 4, \dots$. Докажите, что необходимым и достаточным условием для того, чтобы функция $x(t)$ была четно-гармонической, является равенство $x(t - T/2) = x(t)$.

9. Докажите, что любой сигнал можно представить в виде суммы четно-гармонической и нечетно-гармонической составляющих.

10. Нарисуйте график какой-нибудь четно-гармонической и нечетно-гармонической функции.

11. Докажите, что $\alpha_k = (a_k - jb_k)/2$.

12. Докажите переход от ряда Фурье в тригонометрической форме к ряду Фурье в амплитудно-фазовой форме.

2.4. Преобразование Фурье

Если сигнал $x(t)$ определен на некотором отрезке $[t_1; t_2]$, а вне этого отрезка $x(t) = 0$, то можно считать любой отрезок длиной $T \geq (t_2 - t_1)$ периодом рассматриваемого сигнала и раскладывать его в ряд Фурье (2.22):

$$x(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi kt/T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi kt/T} dt.$$

Ряд Фурье в этом случае сходится к периодической функции, полученной периодическим продолжением рассматриваемого сигнала за пределы отрезка, на котором производится интегрирование.

Устремим период к бесконечности: $T \rightarrow \infty$, тогда частота первой гармоники $\omega_1 = 2\pi/T \rightarrow 0$. При этом частотный интервал между соседними гармониками $\Delta\omega = \omega_1 \rightarrow 0$. В пределе дискретная переменная $k\omega_1$ “превратится” в непрерывную ω , а $\Delta\omega$ — в дифференциал $d\omega$; в результате, записывая ряд Фурье в комплексной форме, получим

$$x(t) = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ \omega_1 \rightarrow 0}} \frac{\omega_1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_1 t} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_1 t} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} x(t) dt \right) d\omega.$$

Интеграл в скобках называют (*прямым*) *преобразованием Фурье* сигнала $x(t)$:

$$\mathcal{F}\{x(t)\} \equiv X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (2.29)$$

а внешний интеграл — *обратным преобразованием Фурье*:

$$\mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\} \equiv x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.30)$$

Результат прямого преобразования (Фурье-образ) называют *спектральной плотностью (спектром)* сигнала. Действительно, если взять малый интервал $\Delta\omega$ вокруг некоторой частоты ω_k , то получим $N = \Delta\omega/\omega_1 = \Delta\omega/(2\pi/T)$ спектральных компонент внутри этого промежутка с практически одинаковыми частотами; складывая их, как будто они имеют одинаковую частоту, получим амплитуду

$$\alpha_k = \frac{N}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega_k t} dt =$$

$$= \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega_k t} dt = X(\omega_k) \frac{\Delta\omega}{2\pi}.$$

Таким образом, отдельные гармоники при рассмотренном предельном переходе “сливаются” и величина $X(\omega_k)$ характеризует плотность их распределения возле частоты ω_k .

Для того, чтобы существовала пара преобразований Фурье (2.29–2.30) для сигнала $x(t)$, достаточно одновременного выполнения следующих условий (*условия Дирихле*):

1) сигнал $x(t)$ должен быть абсолютно интегрируемым:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

— глобальное условие, оно обеспечивает сходимость интеграла (2.29);

2) сигнал $x(t)$ должен иметь конечное число максимумов и минимумов и конечное число точек разрыва первого рода на любом конечном интервале — локальные условия, они обеспечивают сходимость интеграла (2.30).

Вместо абсолютной интегрируемости можно потребовать квадратичную интегрируемость, т. е. конечность энергии сигнала, что предпочтительнее, т. к. имеет конкретный физический смысл и всегда выполняется в реальных системах.

Заметим, что в литературе существуют и другие способы определения пары преобразований Фурье. Часто используются (благодаря своей симметричности) следующие пары преобразований:

$$\begin{cases} X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt; \\ x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{cases} \quad (2.31)$$

или

$$\begin{cases} X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt; \\ x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df. \end{cases} \quad (2.32)$$

2.5. Свойства преобразования Фурье

1. Линейность. Образ линейной комбинации сигналов есть линейная комбинация (с теми же коэффициентами) образов каждого сигнала в отдельности:

$$\mathcal{F}\left\{\sum_i \alpha_i x_i(t)\right\} = \sum_i \alpha_i \mathcal{F}\{x_i(t)\} = \sum_i \alpha_i X_i(\omega)$$

(следует из линейности интеграла).

2. Спектр смещённого сигнала:

$$\mathcal{F}\{x(t - \tau)\} = e^{-j\omega\tau} \mathcal{F}\{x(t)\}.$$

Доказательство. Делая в интеграле

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) e^{-j\omega t} dt$$

замену переменных $t - \tau \rightarrow \xi$, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\xi) e^{-j\omega\xi} e^{-j\omega\tau} d\xi = e^{-j\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt.$$

3. Смещение спектральной характеристики:

$$X(\omega + \Omega) = \mathcal{F}\{e^{-j\Omega t} x(t)\}.$$

Доказательство.

$$X(\omega + \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j(\omega + \Omega)t} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} e^{-j\omega t} dt.$$

4. Спектр производной:

$$\mathcal{F}\{\dot{x}(t)\} = j\omega X(\omega) = j\omega \mathcal{F}\{x(t)\},$$

где $\dot{x}(t) \equiv dx/dt$.

Доказательство. Выполняя интегрирование по частям, получим

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}(t) e^{-j\omega t} dt = \\ & = x(t) e^{j\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} x(t) (-j\omega) e^{-j\omega t} dt = \\ & = j\omega \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \end{aligned}$$

т. к. если существует преобразование Фурье сигнала $x(t)$, то

$$x(t) \cdot e^{j\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

5. Спектр интеграла. Если сигнал имеет нулевую постоянную составляющую

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) d\tau = 0,$$

то

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right\} = \frac{X(\omega)}{j\omega} = \frac{\mathcal{F}\{x(t)\}}{j\omega}.$$

Доказательство. Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right) e^{-j\omega t} dt = \\ & = -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{j\omega} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt. \end{aligned}$$

6. Спектр свёртки. Образ свёртки двух сигналов равен произведению образов данных сигналов:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x(t) * y(t)\} &= \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(t - \tau) d\tau\right\} = \\ &= \mathcal{F}\{x(t)\} \cdot \mathcal{F}\{y(t)\}. \end{aligned}$$

Доказательство. В кратном интеграле

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) y(\tau) d\tau\right) e^{-j\omega t} dt = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) dt\right) d\tau \end{aligned}$$

замена переменных $t - \tau \rightarrow \xi$ приводит к

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\xi) e^{-j\omega\xi} d\xi\right) e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ & = \left(\int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau\right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\xi) e^{-j\omega\xi} d\xi\right). \end{aligned}$$

7. Спектр произведения. Спектр произведения сигналов равен свёртке спектров исходных сигналов, делённой¹ на 2π :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x(t) \cdot y(t)\} &= \frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\xi) \cdot Y(\omega - \xi) d\xi \end{aligned}$$

(доказывается аналогично предыдущему свойству).

8. Дифференцирование спектра:

$$dX(\omega)/d\omega = -j t x(t).$$

Доказательство.

$$\frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) (-jt) e^{-j\omega t} dt.$$

9. Масштабирование:

$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \frac{1}{|a|} X(\omega/a).$$

Доказательство. Выполним в интеграле

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt$$

¹Некоторые из рассмотренных свойств изменят свой вид, если вместо пары определений (2.29) и (2.30) для преобразования Фурье использовать какой-либо другой вариант. Например, если использовать определение (2.32), то в данном свойстве исчезнет коэффициент 2π .

замену переменных $at \rightarrow \xi$, получим

$$\frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} x(\xi) e^{-j\omega\xi/a} d\xi$$

10. Сопряжённая симметрия. Если сигнал действительный, то $X(\omega) = X^*(-\omega)$. Другими словами, если записать образ действительного сигнала в виде суммы действительной и мнимой частей

$$X(\omega) = X_{\text{Re}}(\omega) + j X_{\text{Im}}(\omega),$$

то $X_{\text{Re}}(\omega)$ — чётная функция, а $X_{\text{Im}}(\omega)$ — нечётная.

Доказательство. Заменяя экспоненту с мнимым показателем тригонометрическими функциями по формуле Эйлера, пару преобразований Фурье можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (X_{\text{Re}} + j X_{\text{Im}}) \cdot (\cos \omega t + j \sin \omega t) d\omega; \\ X(\omega) &= X_{\text{Re}}(\omega) + j X_{\text{Im}}(\omega) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot (\cos \omega t - j \sin \omega t) dt. \end{aligned}$$

Приравнявая действительные и мнимые части последнего равенства получим, что функция

$$X_{\text{Re}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(\omega t) dt$$

является чётной благодаря чётности косинуса, а функция

$$X_{\text{Im}}(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(\omega t) dt$$

является нечётной благодаря нечётности синуса. Следовательно,

$$\begin{aligned} X^*(-\omega) &= X_{\text{Re}}(-\omega) - j X_{\text{Im}}(-\omega) = \\ &= X_{\text{Re}}(\omega) + j X_{\text{Im}}(\omega) = X(\omega). \end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что для действительного сигнала $x(t)$ модуль образа $|X(\omega)|$ — чётная, а аргумент $\arg X(\omega)$ — нечётная функция. Действительно, если

$$X(\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)},$$

то

$$X(\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = X^*(-\omega) = A(-\omega) e^{-j\varphi(-\omega)},$$

откуда

$$A(-\omega) = A(\omega); \quad \varphi(-\omega) = -\varphi(\omega).$$

11. Обращение времени. Обращение временной шкалы эквивалентно обращению шкалы частот и сдвигу на 180° начальных фаз всех спектральных компонент: $\mathcal{F}\{x(-t)\} = -X(-\omega)$.

Доказательство. Выполним в интеграле

$$\mathcal{F}\{x(-t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(-t) e^{-j\omega t} dt$$

замену переменных $t \rightarrow -\xi$, получим

$$- \int_{-\infty}^{\infty} x(\xi) e^{j\omega \xi} d\xi = -X(-\omega).$$

12. Чётная симметрия. Если сигнал чётный, т. е. $x(t) = x(-t)$, то спектральная плотность также чётная: $X(\omega) = X(-\omega)$.

Доказательство. Сделаем замену переменных $t \rightarrow -t$ в интеграле

$$X(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt$$

и воспользовавшись чётностью $x(t)$, получим

$$X(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(-t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = X(\omega).$$

Заметим, что если $x(t)$ — чётная и действительная функция, то $X(\omega)$ — также чётная и действительная (докажите самостоятельно).

13. Нечётная симметрия. Спектральная плотность нечетного сигнала также является нечётной функцией, т. е. если $x(-t) = -x(t)$, то $X(\omega) = -X(-\omega)$. Если сигнал является нечётным и действительным, то его Фурье-образ — нечётная и чисто мнимая функция (докажите самостоятельно).

14. Дуальность времени и частоты. Если $\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega)$, то $\mathcal{F}\{X(t)\} = 2\pi x(\omega)$.

Доказательство. Выполним в интеграле (2.30) замену переменных $t \rightarrow -\xi$, $\omega \rightarrow \eta$, получим равенство

$$2\pi x(-\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\eta) e^{-j\eta\xi} d\eta,$$

откуда при замене $\eta \rightarrow t$, $\xi \rightarrow \omega$ следует, что $X(t)$ является образом сигнала $2\pi x(\omega)$.

15. Формула Релея. Связь между скалярным произведением сигналов и их спектров

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \frac{1}{2\pi} \langle X(\omega), Y(\omega) \rangle = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot Y^*(\omega) d\omega \end{aligned}$$

— аналог равенства Парсеваля для периодических сигналов (докажите самостоятельно, расписывая образы X и Y по определению и изменяя порядок интегрирования).

Существуют специальные таблицы преобразований Фурье различных функций и рассмотренные свойства позволяют в большинстве случаев без вычисления интегралов свести рассматриваемую задачу к табличной.

Иногда для действительных сигналов рассматривают пару вещественных преобразований Фурье с положительными частотами: *косинус-преобразование Фурье*:

$$X_c(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t dt \quad (2.33)$$

и *синус-преобразование Фурье*:

$$X_s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \omega t dt. \quad (2.34)$$

В этом случае обратное преобразование

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (X_c(\omega) \cos \omega t + X_s(\omega) \sin \omega t) d\omega. \quad (2.35)$$

Докажите данное равенство самостоятельно, рас-

писывая комплексные функции в виде суммы действительной и мнимой части:

$$X(\omega) = X_{\text{Re}}(\omega) + j X_{\text{Im}}(\omega) = X_c(\omega) - j X_s(\omega);$$

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$

Если сигнал $x(t)$ действительный и чётный (или определён только при положительных или только при отрицательных t), то $X_s(\omega) = 0$ (это следует из свойства чётной симметрии) и, таким образом, существует взаимно-однозначное соответствие между сигналом и его косинус-преобразованием. Если же сигнал вещественный и нечётный (или определён только при положительных или только при отрицательных t), то $X_c(\omega) = 0$ и, таким образом, существует взаимно-однозначное соответствие между сигналом и его синус-преобразованием.

2.6. Преобразование Фурье неинтегрируемых функций

Рассмотрим сигналы, для которых не выполняется условие абсолютной интегрируемости, но для которых, тем не менее, можно определить спектральную плотность.

Пример 2.7 Экспонента с мнимым показателем: $x(t) = e^{j\omega_0 t}$.

Предположим, что существует $\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega)$ и запишем обратное преобразование Фурье

$$e^{j\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{-j\omega t} dt.$$

Используя фильтрующее свойство дельта-функции, получаем, что

$$X(\omega) = 2\pi \delta(\omega - \omega_0).$$

Итак,

$$\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\} = 2\pi \delta(\omega - \omega_0).$$

Заметим, что мы нашли значение несобственного интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega - \omega_0)t} dt = 2\pi \delta(\omega - \omega_0).$$

Отсюда следует, что

$$\mathcal{F}\{\cos \omega_0 t\} = \pi \left(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0) \right);$$

$$\mathcal{F}\{\sin \omega_0 t\} = -j\pi \left(\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0) \right).$$

Пример 2.8 Постоянный сигнал $x(t) = 1$. Данный случай сводится к предыдущему при нулевой частоте ($\omega_0 = 0$). Тогда

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt = 2\pi \delta(0).$$

Пример 2.9 Экспоненциально убывающий импульс $x(t) = e^{-\alpha t} \sigma(t)$. Спектральная плотность при $\alpha > 0$:

$$X(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} dt = \frac{-1}{\alpha + j\omega} e^{-(\alpha + j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha + j\omega}.$$

Пример 2.10 Спектр функции Хевисайда. При $\alpha = 0$ сигнал из примера 2.9 “превращается” в ступеньку Хевисайда $x(t) = \sigma(t)$ и формальное интегрирование даёт

спектр $X(\omega) = 1/j\omega$. Однако, эта чисто мнимая нечётная функция должна быть спектральной плотностью действительной нечётной функции, тогда как $\sigma(t)$ не является ни чётной, ни нечётной; кроме того, функция Хевисайда $\sigma(t)$ содержит постоянную составляющую $1/2$, следовательно, её спектр содержит сингулярную составляющую $\pi\delta(\omega)$. На самом деле

$$\mathcal{F}\{\sigma(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}.$$

Это может быть доказано, если рассмотреть функцию

$$x(t) = \text{sgn}(t) \cdot e^{-\alpha|t|} = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t > 0, \\ -e^{\alpha t}, & t < 0. \end{cases}$$

Её спектральная плотность

$$X(\omega) = - \int_{-\infty}^0 e^{(\alpha - j\omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} dt =$$

$$= - \int_0^{\infty} e^{(-\alpha + j\omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} dt =$$

$$= \frac{-1}{\alpha - j\omega} + \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{-2j\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$$

(здесь мы использовали замену переменных $t \rightarrow -t$).

При $\alpha \rightarrow 0$:

$$X(\omega) = \frac{-2j}{\omega} = \frac{2}{j\omega},$$

а сам сигнал

$$x(t) = \text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ -1, & t < 0. \end{cases}$$

Таким образом¹, $\mathcal{F}\{\text{sgn}(t)\} = 2/j\omega$. Но т. к.

$$\sigma(t) = \frac{1}{2} \text{sgn}(t) + \frac{1}{2},$$

то используя свойство линейности преобразования Фурье, а также результат примера 2.8, получим

$$\mathcal{F}\{\sigma(t)\} = \pi\delta(\omega) + 1/j\omega,$$

что и требовалось доказать.

2.7. Преобразование Хартли

Преобразование Хартли является аналогом преобразования Фурье, но его преимущество в том, что действительный сигнал $x(t)$ отображается в действительный образ $X_H(\omega)$. Введём обозначение

$$\text{cas}(\omega t) = \cos(\omega t) + \sin(\omega t).$$

Образ Хартли определяется формулой

$$H\{x(t)\} \equiv X_H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \text{cas}(\omega t) dt. \quad (2.36)$$

Расписывая тригонометрические функции через экспоненты мнимого аргумента, получаем, что образ Хартли $X_H(\omega)$ действительного сигнала $x(t)$ связан с образом Фурье $X(\omega) = X_{\text{Re}}(\omega) + j X_{\text{Im}}(\omega)$:

$$X_H(\omega) = \frac{1}{2} (X(\omega) + X(-\omega)) + \frac{j}{2} (X(\omega) - X(-\omega)) =$$

$$= X_{\text{Re}}(\omega) - X_{\text{Im}}(\omega) = X_c(\omega) + X_s(\omega).$$

¹Этот же результат следует и из интеграла (??) на с. ???. Заметим, что из соотношения $\mathcal{F}\{\text{sgn } t\} = 2/j\omega$, используя принцип дуальности, можно получить, что $\mathcal{F}\{2/jt\} = 2\pi \text{sgn}(-\omega) = -2\pi \text{sgn}(\omega)$, откуда $\mathcal{F}\{1/t\} = -j\pi \text{sgn}(\omega)$

Здесь мы учли ранее доказанные свойства чётности действительной части $X_{\text{Re}}(\omega)$ и нечётности мнимой части $X_{\text{Im}}(\omega)$ образа Фурье действительного сигнала.

Обратное преобразование Хартли:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_H(\omega) \text{cas}(\omega t) d\omega. \quad (2.37)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} & \int X_H(\omega) \text{cas}(\omega t) d\omega = \\ & = \int \left(X_{\text{Re}}(\omega) - X_{\text{Im}}(\omega) \right) \left(\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} + \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \right) d\omega = \\ & = \frac{1}{2} \int \left(X_{\text{Re}}(\omega) + j X_{\text{Im}}(\omega) \right) e^{j\omega t} d\omega + \\ & + \frac{1}{2} \int \left(X_{\text{Re}}(\omega) - j X_{\text{Im}}(\omega) \right) e^{-j\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

Первый интеграл согласно (2.30) равен $\pi x(t)$, а для второго, делая замену переменной интегрирования $\omega \rightarrow -\omega$ и используя чётность действительной и нечётность мнимой части образа Фурье, получим

$$\frac{1}{2} \int \left(X_{\text{Re}}(\omega) e^{j\omega t} + j X_{\text{Im}}(\omega) e^{j\omega t} \right) d\omega = \pi x(t),$$

откуда сумма обоих интегралов равна $2\pi x(t)$, что и приводит к (2.37). \square

2.8. Аналитический сигнал и преобразование Гильберта

В теоретических исследованиях удобно использовать ещё одно представление сигналов: в виде суммы двух компонент, одна из которых содержит только положительные, а другая — только отрицательные частоты:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 X(\omega) e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Назовём функцию

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.39)$$

аналитическим сигналом, отвечающим вещественному сигналу $x(t)$. Тогда в разложении (2.38) первый интеграл можно с помощью замены переменных $\omega \rightarrow -\xi$ представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 X(\omega) e^{j\omega t} d\omega &= \frac{-1}{2\pi} \int_{\infty}^0 X(-\xi) e^{-j\xi t} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} X(-\xi) e^{-j\xi t} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} X^*(\xi) e^{-j\xi t} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\infty} X(\xi) e^{j\xi t} d\xi \right)^* = \frac{1}{2} \tilde{x}^*(t) \end{aligned}$$

(здесь использован принцип сопряжённой симметрии), в результате формула (2.38) запишется в виде

$$x(t) = \frac{1}{2} (\tilde{x}(t) + \tilde{x}^*(t)).$$

Мнимая часть аналитического сигнала $\hat{x}(t) = \text{Im} \tilde{x}(t)$ называется *сопряжённым сигналом* по отношению к исходному $x(t)$. Таким образом, аналитический сигнал — это комплексная функция, действительная часть которой совпадает с исходным вещественным сигналом, а мнимая — представляет собой сопряжённый сигнал:

$$\tilde{x}(t) = x(t) + j \hat{x}(t) = |\tilde{x}(t)| e^{j\varphi(t)}.$$

Модуль аналитического сигнала $|\tilde{x}(t)|$ называется *огibaющей*; $\varphi(t) = \text{arctg}(\hat{x}(t)/x(t))$ — *локальной фазой*; $f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt}$ — *локальной частотой* сигнала $x(t)$.

В силу линейности преобразования Фурье

$$\tilde{X}(\omega) = X(\omega) + j \hat{X}(\omega).$$

Спектральная плотность аналитического сигнала согласно (2.39) равна нулю на отрицательных частотах и в два раза больше спектральной плотности исходного сигнала на положительных частотах:

$$\tilde{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(t) e^{-j\omega t} dt = \begin{cases} 2X(\omega), & \omega \geq 0; \\ 0, & \omega < 0. \end{cases}$$

Поэтому спектральная плотность сопряжённого сигнала

$$\begin{aligned} \hat{X}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(t) e^{-j\omega t} dt = \\ &= -j \text{sgn}(\omega) \cdot X(\omega) = \begin{cases} -j X(\omega), & \omega \geq 0; \\ j X(\omega), & \omega < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Устройство для получения сопряжённого сигнала из исходного можно представить в виде некоторой системы, умножающей спектр исходного сигнала на $-j \text{sgn}(\omega)$, где $\text{sgn}(\omega)$ — знаковая функция, равная +1 при положительном аргументе и -1 при отрицательном. Другими словами, данная система осуществляет сдвиг фаз всех спектральных компонент на 90° в области отрицательных частот и на -90° в области положительных частот (такую систему называют *квадратурным фильтром*).

Переходя от произведения спектров к свёртке сигналов, запишем сигнал в виде $x(t) = x(t) * \mathcal{F}^{-1}\{-j \text{sgn}(\omega)\}$. Используя результат примера 2.10 на с. 19 и принцип дуальности, получим, что $\mathcal{F}^{-1}\{-j \text{sgn}(\omega)\} = 1/\pi t$, следовательно, сопряжённый и исходный сигналы связаны соотношением

$$\hat{x}(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\xi)}{t - \xi} d\xi. \quad (2.40)$$

С другой стороны, т. к. $X(\omega) = j \text{sgn}(\omega) \hat{X}(\omega)$, то

$$x(t) = -\hat{x}(t) * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{x}(\xi)}{\xi - t} d\xi. \quad (2.41)$$

Формулы (2.40) и (2.41) определяют пару *преобразований Гильберта*: прямое $\hat{x}(t) = \mathcal{H}\{x(t)\}$ и обратное $x(t) = \mathcal{H}^{-1}\{\hat{x}(t)\}$.

Функция $1/(t - \xi)$, называемая *ядром интегрального преобразования*, имеет разрыв при $t = \xi$, поэтому все интегралы понимаются в смысле *глав-*

ного значения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\xi)}{t-\xi} d\xi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{t-\varepsilon} \frac{x(\xi)}{t-\xi} d\xi + \int_{t+\varepsilon}^{\infty} \frac{x(\xi)}{t-\xi} d\xi \right).$$

В тех точках, где исходный сигнал достигает экстремума (максимума или минимума), сопряжённый сигнал проходит через нуль. Графически это можно объяснить тем, что ядро преобразования Гильберта нечётно, а сигнал в точке экстремума локально можно считать четной функцией, в результате происходит компенсация площадей фигур, определённых подынтегральным выражением. Например,

$$\mathcal{H}\{\cos(\omega t)\} = \sin(\omega t) \cdot \operatorname{sgn}(\omega);$$

$$\mathcal{H}\{\sin(\omega t)\} = -\cos(\omega t) \cdot \operatorname{sgn}(\omega).$$

2.9. Корреляционный анализ сигналов

При обработке сигналов часто важно выяснить степень их отличия друг от друга. Данная задача решается методами *корреляционного анализа*.

Напомним, что скалярное произведение сигналов $\langle x(t), y(t) \rangle$ называют *взаимной энергией* данных сигналов. Согласно формуле Релея взаимная энергия

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)Y^*(\omega) d\omega.$$

Функция $W_{xy}(\omega) = X(\omega)Y^*(\omega)$ называется *взаимным энергетическим спектром* сигналов $x(t)$ и $y(t)$. Она характеризует степень сходства сигналов в частотной области: модуль этой функции достигает максимума на тех частотах, где спектры сигналов перекрываются и имеют одинаковые фазы, и минимума — где отсутствуют спектральные составляющие хотя бы одного из сигналов или где они находятся в противофазе.

Итак, взаимная энергия сигналов определяется их взаимным энергетическим спектром

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{xy}(\omega) d\omega.$$

Данная формула показывает, что в формирование взаимной энергии наибольший вклад вносят те частотные области, где максимален их взаимный энергетический спектр.

Обратное преобразование Фурье от взаимного энергетического спектра

$$\begin{aligned} K_{xy}(\tau) &\equiv \mathcal{F}^{-1}\{W_{xy}(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{xy}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) Y^*(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) (Y(\omega) e^{-j\omega\tau})^* d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) Y_{\tau}^*(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t-\tau) dt \end{aligned}$$

называется *взаимной функцией корреляции* сигналов $x(t)$ и $y(t)$. Здесь мы использовали свойство преобразования Фурье задержанного сигнала $Y_{\tau}(\omega) = \mathcal{F}\{y(t-\tau)\} = Y(\omega) \cdot e^{-j\omega\tau}$ и формулу Релея.

Взаимная функция корреляции

$$K_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t-\tau) dt = \langle x(t), y(t-\tau) \rangle,$$

как и взаимный энергетический спектр, характеризуется степенью сходства сигналов $x(t)$ и $y(t)$, но только не в частотной, а во временной области. Так, если сигнал $y(t)$ “очень похож” на сдвинутый во времени сигнал $x(t)$, т. е. если $y(t) \approx x(t-\tau')$, то при значении аргумента $\tau = \tau'$ функция корреляции достигает своего максимума. Если совпадение сигналов полное: $y(t) = x(t-\tau')$, то этот максимум окажется равен взаимной энергии E_{xy} .

Заменой переменных $t-\tau \rightarrow t$ можно доказать, что

$$\begin{aligned} K_{xy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t-\tau) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y^*(t)x(t+\tau) dt = K_{yx}^*(-\tau). \end{aligned}$$

Для действительных сигналов знак комплексного сопряжения можно опустить. Из неравенства Коши-Буняковского следует, что

$$|K_{xy}(\tau)| = |\langle x(t), y(t-\tau) \rangle| \leq \|x(t)\| \cdot \|y(t-\tau)\|,$$

откуда $K_{xy}(\tau) \leq \|x(t)\| \cdot \|y(t)\|$, поскольку норма сигнала не изменяется при его сдвиге во времени.

Пример 2.11 Рассмотрим два экспоненциальных импульса, задержанных друг относительно друга на время t_0 :

$$x(t) = e^{-\alpha t} \sigma(t); \quad y(t) = e^{-\alpha(t-t_0)} \sigma(t-t_0).$$

Спектры этих импульсов

$$X(\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega}; \quad Y(\omega) = \frac{e^{-j\omega t_0}}{\alpha + j\omega}.$$

Взаимный энергетический спектр

$$W_{xy}(\omega) = X(\omega)Y^*(\omega) = \frac{e^{j\omega t_0}}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Взаимная функция корреляции

$$K_{xy}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\left\{ \frac{e^{j\omega t_0}}{\alpha^2 + \omega^2} \right\} = \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha \cdot |\tau+t_0|}.$$

Здесь мы использовали свойство задержки и тот факт, что Фурье-образом импульса $x(t) = \exp(-\alpha \cdot |t|)$ является функция $X(\omega) = 2\alpha/(\alpha^2 + \omega^2)$. Разумеется, для вычисления функции корреляции можно было также использовать формулу свёртки.

Как видно из полученного результата, функция взаимной корреляции рассмотренных сигналов достигает своего максимума при $\tau = -t_0$, что соответствует задержке на τ первого импульса или сдвигу вперёд во времени на ту же величину второго импульса, что и следовало ожидать.

При $x(t) = y(t)$ формула взаимной энергии даёт энергию сигнала $E_x = \langle x(t), x(t) \rangle$, а функция

$$W_x(\omega) = X(\omega)X^*(\omega) = |X(\omega)|^2$$

в этом случае является действительной (даже для комплексных сигналов) и называется *энергетическим спектром* сигнала $x(t)$ или *спектральной плотностью энергии*. Энергетический спектр содержит информацию о периодических компонентах сигнала $x(t)$, т. е. зависит от его амплитудного спектра,

но не зависит от его фазового спектра. По формуле Релея

$$E_x = \langle x(t), x(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \|x(t)\|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) d\omega$$

Данная формула показывает, что энергия сигнала может быть представлена в виде суммы энергий всех его гармоник.

В случае действительного сигнала энергетический спектр является чётной действительной функцией, поэтому вместо $W_x(\omega)$ часто используют функцию физической (положительной) частоты $\mathcal{W}_x(\omega) = 2W_x(\omega)$, где $\omega \geq 0$. В этом случае во всех интегралах по ω нижний предел интегрирования следует выбирать равным 0.

Обратное преобразование Фурье от энергетического спектра

$$K_x(\tau) \equiv \mathcal{F}^{-1}\{W_x(\omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t - \tau) dt \equiv \langle x(t), x(t - \tau) \rangle$$

называется *функцией автокорреляции* сигнала $x(t)$.

Эта функция вещественна для вещественных сигналов и характеризует степень сходства самого сигнала и его сдвинутой во времени копии. При нулевом значении аргумента $K_x(\tau)$ равна энергии сигнала: $K_x(0) = E_x > 0$. Из неравенства Коши–Буняковского следует, что при всех значениях своего аргумента $K_x(\tau)$ никогда не превышает энергии сигнала: $K_x(\tau) \leq K_x(0) = E_x$. Заменой переменных в интеграле можно доказать, что функция автокорреляции является чётной, т. е. $K_x(-\tau) = K_x(\tau)$.

2.10. Кепстральный анализ

Все рассмотренные ранее преобразования сигналов имели линейный характер. Опишем нелинейную обработку сигналов, называемую кепстральным анализом.

Комплексным кепстром сигнала $x(t)$ называется обратное преобразование Фурье от логарифма его Фурье-образа $X(\omega)$:

$$K_x(q) = \mathcal{F}^{-1}\{\text{Ln } X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Ln } X(\omega) e^{j\omega q} d\omega \quad (2.42)$$

Если записать Фурье-образ в амплитудно-фазовой форме $X(\omega) = |X(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$, то главное значение комплексного логарифма $\text{Ln } X(\omega) = \ln |X(\omega)| + j\varphi(\omega)$ является комплексной функцией частоты, действительная часть которой представляет собой логарифм амплитудного спектра $\ln |X(\omega)|$ (чётная функция для действительного сигнала), а мнимая — фазовый спектр $\varphi(\omega)$ (нечётный для действительного сигнала).

Термин “кепстр” образован перестановкой букв в слове “спектр” (в англоязычной литературе аргумент q называют “quefrequency”).

Кроме комплексного кепстра, рассматривают так-

же *кепстр мощности*

$$C_x(q) = \mathcal{F}^{-1}\{\ln W_x(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln W_x(\omega) e^{j\omega q} d\omega, \quad (2.43)$$

являющийся действительной чётной функцией в случае действительного сигнала, так как действительным и чётным является энергетический спектр $W_x(\omega)$. Кепстр мощности содержит информацию о периодических компонентах сигнала $x(t)$, но не зависит от его фазового спектра.

Хотя аргумент q в обоих определениях имеет размерность времени, это особое, *кепстральное* время, поскольку кепстр в любой момент q зависит от исходного сигнала, определённого своими значениями во все моменты “обычного” времени $-\infty < t < \infty$.

Кепстральный анализ получил распространение при обработке сигналов, представляющих собой свёртку двух функций времени, кепстры мощности которых являются неперекрывающимися на оси q импульсами. В подобной ситуации фазовый спектр функций может не учитываться.

Следует отметить, что кепстр можно вычислить не для любого сигнала. Для сигналов с конечной энергией

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) d\omega < \infty,$$

откуда следует, что при $|\omega| \rightarrow \infty$ энергетический спектр $W_x(\omega) \rightarrow 0$. Но тогда при $|\omega| \rightarrow \infty$ обращается в бесконечность $|\ln W_x(\omega)|$ и интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\ln W_x(\omega)| d\omega$$

расходится. Это противоречие в некоторых практических задачах обходят заменой пределов интегрирования $\pm\infty$ граничными частотами $\pm\omega_{\text{гр}}$, в пределах которых заключена основная доля энергии сигнала и значение логарифма ограничено.

Пример 2.12 Найдём кепстр дельта-импульса $x(t) = A\delta(t)$. Т. к. $X(\omega) = A$, то

$$K_x(q) = C_x(q)/2 = \delta(q) \ln A.$$

При $A = 1$ кепстр равен 0.

Задание 2.2 Решите следующие задачи:

1. Выведите формулу для вычисления образа Фурье интеграла от сигнала с ненулевой постоянной составляющей.

2. Найдите образы Фурье следующих функций, нарисуйте графики исходного сигнала и его спектральной плотности:

- $x(t) = A(1 - e^{-at}) \cos \omega t$;
- $x(t) = A(\sigma(t) - \sigma(t - \tau)) \sin \omega t$;
- $x(t) = A e^{-at} \cos \omega t$;
- $x(t) = \frac{A}{\tau} t(\sigma(t) - \sigma(t - \tau))$;
- $x(t) = A \sin \Omega t \cos(\omega t + \varphi_0)$; $\Omega \ll \omega$;
- $x(t) = A e^{-t/\tau}(\sigma(t) - \sigma(t - T))$;
- $x(t) = \frac{At}{T} e^{-t/\tau}(\sigma(t) - \sigma(t - T))$;
- $x(t) = A \cos \frac{\pi t}{T}(\sigma(t) - \sigma(t - T))$;
- $x(t) = A \cos^2(\omega t + \varphi_0)$;
- $x(t) = A(1 - e^{-at})$; $a > 0$;
- $x(t) = A(\sigma(t) - \sigma(t - T)) + \frac{Bt}{T}(\sigma(t) - \sigma(t - T))$;

- м) $x(t) = A e^{st}$; $s = \alpha + j\omega$;
 н) $x(t) = A e^{st}(\sigma(t) - \sigma(t - T))$; $s = \alpha + j\omega$;
 о) $x(t) = A(1 - e^{-at}) \cos \omega t (\sigma(t) - \sigma(t - 2\pi/\omega))$.

3. Найдите и изобразите на графике образы Хартли для сигналов из задачи 2.

4. Перепишите свойства преобразования Фурье для случая, когда используются симметричные формулы (2.32).

5. Найдите и изобразите на графиках аналитические и сопряжённые сигналы для сигналов из задачи 2.

6. Интегрируя формулу (2.40) как свёртку, покажите, что $X(\omega) = -j X(\omega) \operatorname{sgn}(\omega)$.

7. Докажите, что преобразование Фурье аналитического сигнала $\tilde{x}(t)$ равно нулю при отрицательных частотах.

8. Определим чётную и нечётную части вещественного сигнала $x(t)$ следующими формулами:

$$x_{\text{чёт}}(t) = (x(t) + x(-t))/2; \quad x_{\text{нечёт}}(t) = (x(t) - x(-t))/2.$$

Запишем образ Фурье сигнала $x(t)$ как сумму действительной и мнимой частей: $X(\omega) = X_{\text{Re}}(\omega) + j X_{\text{Im}}(\omega)$. Докажите следующие утверждения:

- а) $X_{\text{Re}}(\omega) = \mathcal{F}\{x_{\text{чёт}}(t)\}$;
 б) $X_{\text{Im}}(\omega) = \mathcal{F}\{x_{\text{нечёт}}(t)\}$;

в) если сигнал $x(t) = 0$ при $t < 0$ (т. е. если сигнал может быть записан в виде $x(t) = x(t) \cdot \sigma(t)$), то действительная и мнимая части спектральной плотности связаны преобразованием Гильберта $X_{\text{Im}}(\omega) = \mathcal{H}\{X_{\text{Re}}(\omega)\}$, при этом сам сигнал $x(t)$ и действительная часть его образа Фурье $X_{\text{Re}}(\omega)$ связаны соотношением

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X_{\text{Re}}(\omega) + j \mathcal{H}\{X_{\text{Re}}(\omega)\}\},$$

т. е. сигнал $x(t)$ полностью определяется своей чётной частью $x_{\text{чёт}}(t)$.

9. Докажите следующие свойства преобразования Гильберта:

- а) линейность;
 б) образ смещённого сигнала равен смещённому образу: $\mathcal{H}\{x(t - \tau)\} = \hat{x}(t - \tau)$;
 в) повторное преобразование даёт отрицательный исходный сигнал: $\mathcal{H}\{\mathcal{H}\{x(t)\}\} = -x(t)$;
 г) чётный исходный сигнал имеет нечётный образ, а нечётный сигнал — чётный образ;
 д) свойство подобия: $\mathcal{H}\{x(at)\} = \hat{x}(at)$;
 е) сохранение энергии: $\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int \hat{x}^2(t) dt$;
 ж) ортогональность: $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \hat{x}(t) dt$;
 з) преобразование свертки: $\mathcal{H}\{x(t) * y(t)\} = \hat{x}(t) * \hat{y}(t)$.
 и) Докажите формулу (2.35).

к) Докажите, что $K_{xy}(\tau) = K_{yx}^*(-\tau)$.

л) Докажите, что $K_x(\tau) = K_x(-\tau)$.

10. Докажите, что $\mathcal{H}\{\cos(\omega t)\} = \sin(\omega t) \cdot \operatorname{sgn}(\omega)$; $\mathcal{H}\{\sin(\omega t)\} = -\cos(\omega t) \cdot \operatorname{sgn}(\omega)$.

11. Найдите взаимную корреляционную функцию двух прямоугольных импульсов разной длительности и амплитуды.

12. Найдите автокорреляционные функции сигналов из задачи 2.

13. Найдите комплексный кепстр и кепстр мощности для сигналов из задачи 2.

14. Для некоторого периодического сигнала известны коэффициенты α_k его разложения в ряд Фурье. Найдите спектральную плотность данного сигнала.

3. Сигналы с ограниченным спектром

3.1. Сигналы с прямоугольным спектром

Линии связи имеют конечную *полосу пропускания*, поэтому спектр принимаемых сигналов всегда ограничен.

Рассмотрим сигнал с прямоугольным спектром шириной¹ Ω (*идеальный низкочастотный сигнал*, ИНЧС, рис. 3.1 а):

$$S(\omega) = S_m \cdot [\sigma(\omega + \Omega) - \sigma(\omega - \Omega)] = \begin{cases} 0, & \omega < -\Omega; \\ S_m, & -\Omega \leq \omega \leq \Omega; \\ 0, & \omega > \Omega. \end{cases}$$

Найдём сам сигнал, для которого вычислим обратное преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} S_m e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{S_m}{2\pi} \frac{1}{jt} \Big|_{-\Omega}^{\Omega} = \frac{S_m}{\pi t} \frac{e^{j\Omega t} - e^{-j\Omega t}}{2j} = \\ &= \frac{S_m}{\pi t} \sin \Omega t = S_m \frac{\Omega}{\pi} \operatorname{sinc} \Omega t, \end{aligned}$$

где $\operatorname{sinc} x \equiv \frac{\sin x}{x}$.

Теперь рассмотрим *идеальный полосовой сигнал* (ИПС, рис. 3.1 в):

$$S(\omega) = \begin{cases} S_m, & \omega_0 - \Omega \leq \omega \leq \omega_0 + \Omega; \\ 0, & \omega \notin [\omega_0 - \Omega; \omega_0 + \Omega]. \end{cases}$$

Найдём сам сигнал $s(t)$:

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{S_m}{2\pi} \left(\int_{-\omega_0 - \Omega}^{-\omega_0 + \Omega} e^{j\omega t} d\omega + \int_{\omega_0 - \Omega}^{\omega_0 + \Omega} e^{j\omega t} d\omega \right) = \\ &= \frac{S_m}{2\pi} \left[\frac{1}{jt} (e^{j(-\omega_0 + \Omega)t} - e^{-j(-\omega_0 + \Omega)t} + \right. \\ &\quad \left. + e^{j(\omega_0 + \Omega)t} - e^{j(\omega_0 - \Omega)t}) \right] = \\ &= \frac{S_m}{\pi t} \frac{1}{2j} \left[(e^{j\Omega t} - e^{-j\Omega t}) e^{-j\omega_0 t} + \right. \\ &\quad \left. + (e^{j\Omega t} - e^{-j\Omega t}) e^{j\omega_0 t} \right] = \\ &= \frac{2S_m}{\pi t} \sin \Omega t \cos \omega_0 t = 2S_m \frac{\Omega}{\pi} \operatorname{sinc} \Omega t \cos \omega_0 t \end{aligned}$$

— радиопульс с частотой ω_0 и огибающей $2S_m \frac{\Omega}{\pi} \operatorname{sinc} \Omega t$.

Заметим, что амплитуда ИНЧС и ИПС прямо пропорциональна ширине спектра Ω .

¹Часто для действительных сигналов вместо спектра (2.29) рассматривают энергетический спектр, являющийся действительной функцией положительной (физической) частоты, ширина такого спектра в два раза меньше, а высота — в два раза выше.

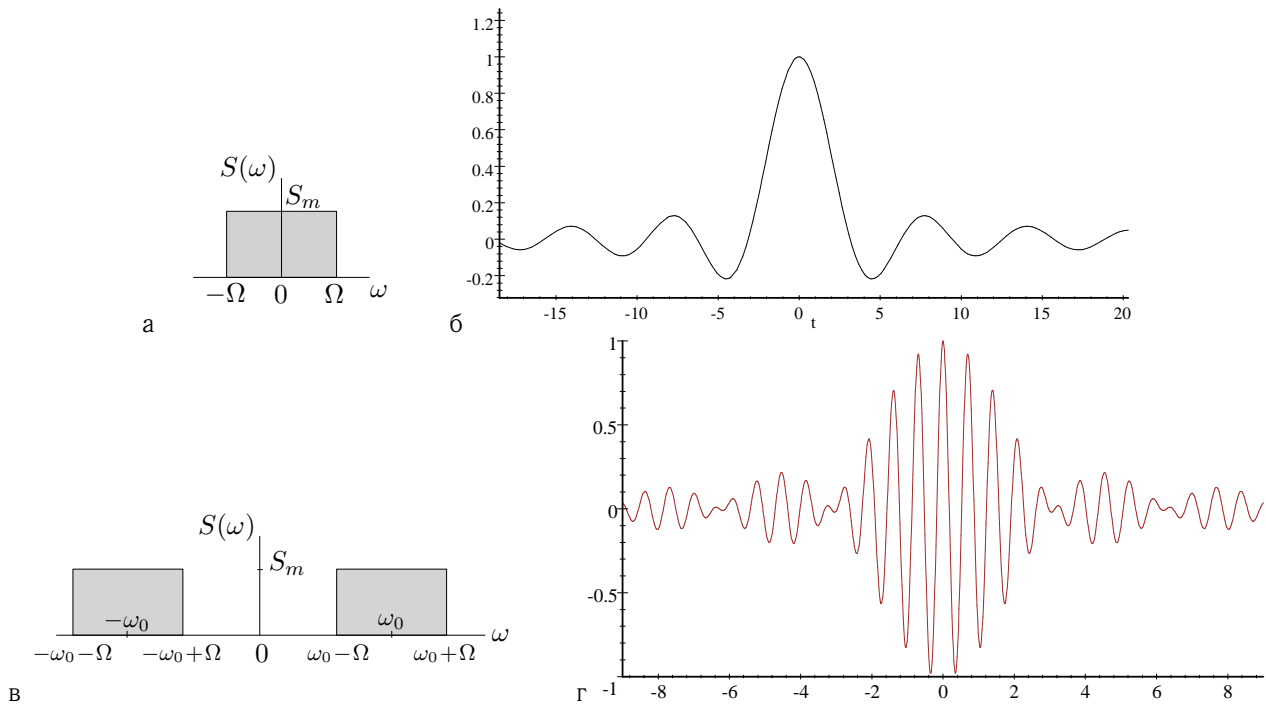


Рис. 3.1. Примеры сигналов с ограниченным спектром: а) идеальный низкочастотный сигнал; б) его спектр; в) идеальный полосовой сигнал; г) его спектр

3.2. Базис В.А. Котельникова

Докажем ортогональность ИНЧС, сдвинутых относительно друг друга на $t_0 = \pi k / \Omega$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$. Действительно, рассмотрим два сигнала: $x(t) = A \operatorname{sinc} \Omega t$ и $y(t) = A \operatorname{sinc} \Omega(t - t_0)$. Если $y(t) = x(t - t_0)$, то спектр сдвинутого сигнала

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0) e^{-j\omega t} dt.$$

Выполним замену переменных $t - t_0 = \xi$, $t = t_0 + \xi$; $dt = d\xi$, получим

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\xi) e^{-j\omega(t_0 + \xi)} d\xi = \\ &= e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\xi) e^{-j\omega \xi} d\xi = e^{-j\omega t_0} X(\omega). \end{aligned}$$

По формуле Релея скалярное произведение сигналов

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot Y^*(\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{A\pi}{\Omega} \right)^2 e^{j\omega t_0} d\omega = \\ &= \frac{A^2 \pi}{2\Omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t_0} d\omega = \frac{A^2 \pi}{\Omega^2} \cdot \frac{e^{j\Omega t_0} - e^{-j\Omega t_0}}{2jt_0} = \\ &= \frac{A^2 \pi}{\Omega^2} \frac{\sin \Omega t_0}{t_0} = \frac{A^2 \pi}{\Omega} \operatorname{sinc} \Omega t_0. \end{aligned}$$

Таким образом, $\langle x, y \rangle = 0$ при $\Omega t_0 = \pm \pi k$ ($k = 1, 2, \dots$). Минимальный сдвиг, при котором x и y ортогональны, равен $t_0 = \pm \pi / \Omega = \pm 1 / (2F)$, где $F = \Omega / (2\pi)$ — ширина спектра (Гц).

Теперь докажем, что набор функций $c_k(t, \Omega) = A \operatorname{sinc}(\Omega t - \pi k)$, образованных из импульсов $c_0(t) = A \operatorname{sinc}(\Omega t)$ сдвигом на время $t_0 = \pi k / \Omega$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$), является базисом в пространстве сигналов, спектр которых ограничен отрез-

ком $[-\Omega; \Omega]$. Сначала докажем ортогональность: $\langle c_{k1}, c_{k2} \rangle = 0$ при $k_1 \neq k_2$. Используя свойство преобразования Фурье задержанного сигнала, получаем, что

$$\mathcal{F}\{c_k(t)\} = \exp(-j\omega \pi k / \Omega) \mathcal{F}\{c_0(t)\},$$

а по формуле Релея имеем:

$$\begin{aligned} \langle C_{k1}, C_{k2} \rangle &= \frac{1}{2\pi} \langle \mathcal{F}\{C_{k1}\}, \mathcal{F}\{C_{k2}\} \rangle = \\ &= \frac{1}{2\pi} \langle e^{-j\omega \pi k_1 / \Omega} \mathcal{F}\{c_0\}, e^{-j\omega \pi k_2 / \Omega} \mathcal{F}\{c_0\} \rangle = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \frac{A\pi}{\Omega} e^{-j\omega \pi k_1 / \Omega} \cdot \frac{A\pi}{\Omega} e^{-j\omega \pi k_2 / \Omega} d\omega = \\ &= \frac{A^2 \pi}{2\Omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{j\omega \pi (k_2 - k_1)}{\Omega}} d\omega = \\ &= \frac{A^2 \pi}{\Omega^2} \frac{\Omega}{\pi(k_2 - k_1)} \frac{(e^{j\pi(k_2 - k_1)} - e^{-j\pi(k_2 - k_1)})}{2j} = \\ &= \frac{A^2}{\Omega(k_2 - k_1)} \sin(\pi(k_2 - k_1)) = \\ &= \frac{A^2 \pi}{\Omega} \operatorname{sinc}(\pi(k_2 - k_1)) = 0 \end{aligned}$$

при $k_2 \neq k_1$, т. к. $\sin \pi k = 0$ ($k = k_2 - k_1$).

Теперь найдём нормировку: $\langle c_k(t), c_k(t) \rangle = 1$. Т. к. по правилу Лопитала

$$\operatorname{sinc}(0) = \frac{\sin x}{x} \Big|_{x=0} = \frac{(\sin x)'}{x'} \Big|_{x=0} = \frac{\cos x}{1} \Big|_{x=0} = 1,$$

то

$$\langle c_k, c_k \rangle = \frac{A^2 \pi}{\Omega} \operatorname{sinc}(0) = \frac{A^2 \pi}{\Omega}.$$

Следовательно, $A^2 \pi / \Omega = 1$, откуда $A = \sqrt{\Omega / \pi}$. Та-

ким образом, система сигналов

$$\begin{aligned} c_k(t, \Omega) &= \sqrt{\frac{\Omega}{\pi}} \operatorname{sinc}\left(\Omega\left(t - \frac{\pi k}{\Omega}\right)\right) = \\ &= \sqrt{\frac{\Omega}{\pi}} \operatorname{sinc}(\Omega t - \pi k) \end{aligned}$$

является ортонормированной:

$$\langle c_k, c_j \rangle = \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j; \\ 0, & k \neq j. \end{cases}$$

Тогда обобщённый ряд Фурье для сигнала $x(t)$:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k c_k(t, \Omega), \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \langle x(t), c_k(t, \Omega) \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) c_k(t, \Omega) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} X(\omega) C_k^*(\omega) d\omega. \end{aligned}$$

Т. к.

$$\mathcal{F}\{c_k(t)\} \equiv C_k(\omega) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{\Omega}} e^{-j\omega k\pi/\Omega}, & -\omega \leq \omega \leq \Omega; \\ 0, & \omega \notin [-\Omega; \Omega], \end{cases}$$

то

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \sqrt{\frac{\pi}{\Omega}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} X(\omega) e^{j\omega k\pi/\Omega} d\omega = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{\Omega}} x(k\pi/\Omega) = \sqrt{\frac{\pi}{\Omega}} x(k/2F), \end{aligned}$$

где $F = \Omega/(2\pi)$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$).

Тогда ряд (3.1) можно записать в виде

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(\pi k/\Omega) \operatorname{sinc}(\Omega t - \pi k). \quad (3.2)$$

Итак, мы получили разложение сигнала по базису Котельникова, однако, необходимо ещё доказать полноту данного базиса.

Теорема 3.1 (В.А. Котельников¹) Если $x(t)$ — сигнал, спектр которого ограничен частотами $-\Omega \leq \omega \leq \Omega$, то он может быть разложен в ряд (3.2).

Доказательство. Допустим, спектр сигнала $x(t)$ сосредоточен в полосе $[-\Omega; \Omega]$ не полностью и ряд Котельникова

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(\pi k/\Omega) \operatorname{sinc}(\Omega t - \pi k)$$

даёт ошибку $s(t) = y(t) - x(t)$. Т. к. спектры сигналов y и s не перекрываются, то $\|s\|^2 = \|x\|^2 - \|y\|^2$. Действительно,

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} (y + s)(y + s)^* dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (yy^* + ss^* + 2ys^*) dt = \\ &= \|y\|^2 + \|s\|^2 + 2\langle y, s \rangle = \\ &= \|y\|^2 + \|s\|^2 + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) S^*(\omega) d\omega. \end{aligned}$$

Норма ошибки

$$\begin{aligned} \|s(t)\| &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) S^*(\omega) d\omega \right)^{1/2} = \\ &= \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) S^*(\omega) d\omega \right)^{1/2} = \\ &= \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) X^*(\omega) d\omega \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

т. к. спектр действительного сигнала симметричен. Здесь $S(\omega)$ — часть спектра сигнала $x(t)$ вне полосы $[-\Omega; \Omega]$; $X(\omega) = Y(\omega) + S(\omega)$.

Для ограниченного спектра $S(\omega) \equiv 0$ и ряд Котельникова даёт точное представление сигнала. \square

Таким образом, если известны отсчёты сигнала, взятые через равные промежутки времени $1/(2F) = \pi/\Omega$ (*c частотой Котельникова–Найквиста*), и спектр сигнала не содержит частот выше Ω , то сигнал может быть полностью восстановлен, т. е. по формуле (3.2) могут быть получены значения сигнала во все остальные моменты времени. Заметим, что для моментов времени $t_k = \pi k/\Omega$ ряд (3.2) чисто формален — все слагаемые, кроме одного, равны нулю.

3.3. Принцип неопределённости

Рассмотрим, как связаны между собой длительность сигнала и ширина его спектра. *Длительностью сигнала* назовём величину:

$$\Delta T = 2 \cdot \left(\frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 x^2(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt} - \left(\frac{\int_{-\infty}^{\infty} t x^2(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt} \right)^2 \right)^{1/2}. \quad (3.3)$$

Из теории вероятностей известно, что если $\rho(t)$ является функцией распределения плотности вероятности некоторой случайной величины, то среднее значение этой величины вычисляется по формуле

$$t_0 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t \rho(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \rho(t) dt}, \quad (3.4)$$

а дисперсия равна

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta T}{2} \right)^2 &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (t^2 - t_0^2) \rho(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \rho(t) dt} = \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 \rho(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \rho(t) dt} - t_0^2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Таким образом, если считать $\rho(t) = x^2(t)$ (т. к. плотность распределения вероятности должна быть положительной величиной, а сигнал $x(t)$ может принимать отрицательные значения), то вторую дробь в определении ΔT можно считать квадратом средней величины сигнала $x^2(t)$.

С точки зрения механики твёрдого тела t_0 можно интерпретировать как координату центра тяжести массы, распределённой вдоль оси t по закону $\rho(t) = x^2(t)$, а ΔT — как удвоенную величину радиуса инерции².

¹Владимир Александрович Котельников (1908) — советский учёный, радиотехник.

²Напомним, что радиус инерции равен расстоянию от центра тяжести, на котором надо сконцентрировать всю массу, равную $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(t) dt$, чтобы получить тот же момент инерции.

Аналогично определим в частотной области *полосу сигнала*

$$\Delta\Omega = 2 \cdot \left(\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |X(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega} \right)^{1/2} \quad (3.6)$$

Здесь среднее значение ω_0 равно 0 благодаря симметричности спектра действительного сигнала.

Заметим, что возможны и другие способы определения длительности или полосы сигнала. Самый простой из них заключается в том, что учитывают только тот промежуток времени, где сигнал (или его спектр) превышает уровень 70,7% от своего максимального значения. Или учитывают тот промежуток времени (полосу частот), где сосредоточена определённая доля энергии сигнала.

Произведение длительности сигнала на ширину его спектра называется *базой сигнала*.

Принцип неопределённости: для любого действительного сигнала $x(t)$ произведение его длительности на полосу не может быть меньше некоторой величины, которая одинакова для всех сигналов и зависит только от способа определения длительности и полосы. Так, если ΔT и $\Delta\Omega$ находятся по формулам (3.3) и (3.6), то база любого сигнала не может быть меньше 2:

$$\Delta T \cdot \Delta\Omega \geq 2. \quad (3.7)$$

Доказательство. Перенесём для удобства начала отсчёта времени в центр сигнала: $t_0 = 0$ и нормируем сигнала так, чтобы его энергия была равна 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} (\Delta T)^2 &= 4 \int_{-\infty}^{\infty} t^2 x^2(t) dt; \\ (\Delta\Omega)^2 &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |X(\omega)|^2 d\omega. \end{aligned}$$

Используя свойство преобразования Фурье: $\mathcal{F}\{\dot{x}(t)\} = j\omega \mathcal{F}\{x(t)\}$, получим что

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |X(\omega)|^2 d\omega &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} (\dot{x}(t))^2 dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}\{\dot{x}(t)\})^2 d\omega. \end{aligned}$$

Тогда квадрат базы сигнала

$$\begin{aligned} (\Delta T)^2 \cdot (\Delta\Omega)^2 &= 16 \int_{-\infty}^{\infty} t^2 x^2(t) dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (\dot{x}(t))^2 dt = \\ &= 16 \|t x(t)\|^2 \cdot \|\dot{x}(t)\|^2 \end{aligned}$$

(обращаем внимание, что это верно только для нормированного и центрированного сигнала).

Используя неравенство Коши–Буняковского

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq |x|^2 \cdot |y|^2,$$

получаем, что

$$(\Delta T)^2 \cdot (\Delta\Omega)^2 \geq 16 \left| \int_{-\infty}^{\infty} t x(t) \dot{x}(t) dt \right|^2.$$

Интегрируем по частям:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} t x(t) \dot{x}(t) dt &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} t d(x^2(t)) = \\ &= \frac{1}{2} \left(t x^2(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt \right) = \frac{1}{2} (0 - 1) = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

используя тот факт, что если интегралы, по которым определяется длительность сигнала, существуют, а $x(t)$ — сигнал с единичной энергией, то $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \pm\infty$.

Таким образом, $(\Delta T)^2 \cdot (\Delta\Omega)^2 \geq 4$, откуда $\Delta T \cdot \Delta\Omega \geq 2$ — чем больше длительность сигнала, тем уже его спектр и наоборот. \square

Найдём сигнал, база которого минимальна: $\Delta T \cdot \Delta\Omega = 2$. Чтобы неравенство Коши–Буняковского превратилось в равенство, надо, чтобы угол между сигналами был равен 0 (или 180°), т. е. $k \cdot t x(t) = \dot{x}(t)$, иначе $\dot{x}(t)/x(t) = kt$; $\frac{d}{dt} \ln x(t) = kt$, откуда $\ln x(t) = kt^2/2 + const$. Получаем, что сигнал с минимальной базой $x(t) = const \cdot e^{kt^2/2}$. При $k < 0$ это — гауссовский импульс (рис. 3.2).

Принцип неопределённости для сигналов является частным случаем общего принципа неопределённости, известного в квантовой механике.

Можно также доказать, что если сигнал ограничен во времени (т. е. равен нулю вне некоторого промежутка времени), то его спектр не ограничен по частоте (т. е. не существует такого диапазона частот, вне которого спектральная плотность всюду равна нулю) и наоборот, если ограничен спектр, то неограничен сам сигнал.

3.4. Влияние ограничения сигнала по времени на его спектр

Предположим, что для обработки сигнала $x(t)$ использованы результаты его наблюдения в течение ограниченного промежутка времени длиной T . Вычислим спектр такого сигнала и сравним его со спектром исходного. Ограничение сигнала по времени эквивалентно умножению его на *функцию окна*

$$w(t_0, T) = \sigma(t - t_0) - \sigma(t - t_0 - T). \quad (3.8)$$

Как известно, спектр произведения сигналов равен свёртке спектров исходных сигналов, деленной на 2π :

$$\begin{aligned} X_w(\omega) &= \mathcal{F}\{w(t_0, T) \cdot x(t)\} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\xi) X(\omega - \xi) d\xi. \end{aligned}$$

Спектральная плотность функции окна

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{w(t_0, T)\} &\equiv W(\omega) = \int_{t_0}^{t_0+T} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{j\omega} \left(e^{-j\omega t} - e^{-j\omega(t_0+T)} \right) = \\ &= \frac{e^{-j\omega(t_0+\frac{T}{2})}}{j\omega} \left(e^{j\omega\pi/2} - e^{-j\omega\pi/2} \right) = \\ &= T \cdot e^{-j\omega(t_0+\frac{T}{2})} \text{sinc}(\pi\omega/2). \end{aligned}$$

Тогда спектр ограниченного по времени сигнала

$$X_w(\omega) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\xi(t_0+\frac{T}{2})} \text{sinc}(\xi\pi/2) X(\omega - \xi) d\xi$$

При $t_0 = T/2$ (т. е. если переместить начало от-

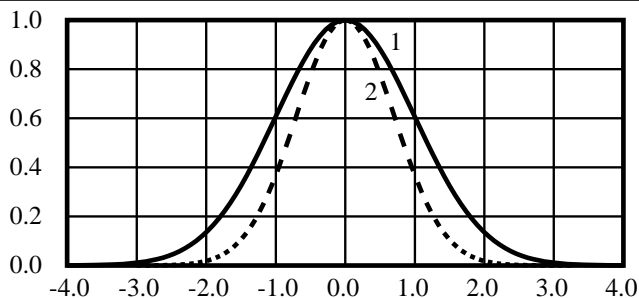


Рис. 3.2. Гауссов импульс $x(t) = \exp(-k t^2)$ при $k = 1$ (сплошная линия 1) и $k = 2$ (пунктирная линия 2)

счёта времени в центр окна) имеем

$$X_w(\omega) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(\xi T/2) X(\omega - \xi) d\xi = \frac{T}{2\pi} \text{sinc}(T\omega/2) * X(\omega). \quad (3.9)$$

Как следует из полученного результата, спектр исходного сигнала “сворачивается” с функцией $\text{sinc}(T\omega/2)$, основной “колокол” которой сосредото-

чен в интервале $t \in (-2\pi/T; 2\pi/T)$.

Таким образом, при ограничении сигнала по времени его спектр “размывается”, его “неровности” сглаживаются, усредняясь на интервале времени длиной $\approx 4\pi/T$. Из принципа дуальности времени и частоты можно заключить, что при ограничении спектра по частоте аналогично искажается сам сигнал.

4. Преобразование Лапласа

4.1. Двустороннее преобразование Лапласа

Иногда невозможно вычислить преобразование Фурье из-за того, что сигнал при $t \rightarrow \pm\infty$ изменяется экспоненциально и интеграл (2.29) не сходится. В этом случае можно умножить сигнал на экспоненциально затухающую функцию $\exp(-\sigma t)$ и вычислять преобразование Фурье взвешенного сигнала:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt; \quad s = \sigma + j\omega. \quad (4.1)$$

Данный интеграл обычно сходится в полосе $\sigma_1 < \text{Re } s < \sigma_2$. Тогда взвешенный сигнал имеет следующее представление:

$$x(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

откуда исходный сигнал

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(s) e^{st} ds \quad (4.2)$$

($ds = d\omega$, т. к. значение σ фиксировано).

Более распространена в литературе запись данного выражения в виде контурного интеграла комплексной переменной s :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_C X(s) e^{st} ds, \quad (4.3)$$

где контур интегрирования C (рис. 4.1) лежит в пределах области сходимости интеграла (4.1).

Определённая таким способом пара интегральных преобразований $x(t) \leftrightarrow X(s)$, устанавливающая взаимно-однозначное соответствие между сигналами (функциями времени) и их изображениями (функциями частоты), называется *двусторонним прямым и обратным преобразованием Лапласа*¹. Слово “дву-

стороннее” относится к симметричным пределам интегрирования в формуле (4.1).

Заметим, что если для сигнала $x(t)$ существует не только изображение по Лапласу $X(s)$, но и образ Фурье $X(\omega)$, то они переходят друг в друга подстановкой $s = j\omega$.

4.2. Одностороннее преобразование Лапласа

Обычно рассматриваются сигналы, начавшиеся в некоторый момент времени t_0 , т. е. равные нулю при $t < t_0$. Такие сигналы называются *физически реализуемыми (каузальными)*. Тогда удобно перенести начало отсчёта времени точку t_0 и считать, что сигнал тождественно равен нулю при всех отрицательных t . В этом случае нижний предел в интеграле (4.1) можно выбрать равным нулю и мы приходим к *одностороннему преобразованию Лапласа*

$$X(s) \equiv \mathcal{L}\{x(t)\} \equiv \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt. \quad (4.4)$$

Оператор \mathcal{L} отображает функцию времени $x(t)$ (*оригинал*) в функцию $X(s)$ (*изображение*) комплексной частоты

$$s = \sigma + j\omega; \quad e^{st} = e^{\sigma t} e^{j\omega t} = e^{\sigma t} (\cos \omega t + j \sin \omega t).$$

Для обозначения соответствия изображения своему оригиналу будем использовать двустороннюю стрелку: $x(t) \leftrightarrow X(s)$; оригиналы (функции времени) будем обозначать строчными буквами, а их изображения (функции частоты) — заглавными. Заметим, что интеграл (4.4) представляет собой скалярное произведение оригинала и экспоненты с комплексным показателем

$$\exp(-s^*t) = e^{-\sigma t} (\cos \omega t + j \sin \omega t).$$

¹Пьер Симон Лаплас (Laplace) — французский математик и физик (1749–1827).

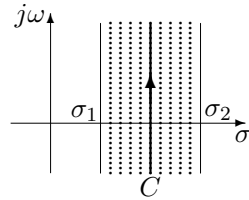


Рис. 4.1. Контур интегрирования на комплексной плоскости для вычисления обратного преобразования Лапласа

Можно доказать, что интеграл (4.4) сходится при $\operatorname{Re} s > C_0$, если сигнал $x(t)$ удовлетворяет следующим условиям: 1) непрерывен при $t \geq 0$ (причём непрерывность может быть нарушена лишь в отдельных точках, являющихся точкой разрыва первого рода) и число точек разрыва конечно на любом конечном интервале (другими словами, сигнал имеет счётное количество точек разрыва первого рода); 2) равен нулю при $t < 0$; 3) имеет ограниченный порядок роста, т. е. если существуют такие $M > 0$; $C_0 \geq 0$, что $x(t) < Me^{C_0 t}$ (C_0 называют *показателем роста*).

Действительно, при $C > C_0$:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\infty x(t) e^{-st} dt \right| &\leq \int_0^\infty |x(t)| \cdot |e^{-st}| dt < \\ &< \int_0^\infty Me^{C_0 t} |e^{-st}| dt < M \int_0^\infty e^{-(C-C_0)t} dt = \\ &= -M \cdot \frac{e^{-(C-C_0)t}}{C-C_0} \Big|_0^\infty = \frac{M}{C-C_0} < \infty, \end{aligned}$$

здесь C_0 называется также абсциссой абсолютной сходимости, т. к. сходится интеграл $\int_0^\infty |x(t) \exp(-st)| dt$. Изображение по Лапласу в полуплоскости абсолютной сходимости $\operatorname{Re} s > C_0$ является аналитической функцией.

Обратное преобразование Лапласа определяет интегралом Меллина

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s) e^{st} ds; \quad t > 0. \quad (4.5)$$

Этот интеграл сходится, если функция $X(s)$ является аналитической при $\operatorname{Re} s > C_0$ и равномерно стремится к нулю при $|s| \rightarrow \infty$, $C_0 \leq c \leq \operatorname{Re} s$ (относительно $\arg s$) и если интеграл $\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s) ds$ сходится абсолютно. При этом можно доказать, что $\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{x(t)\}\} = x(t)$ почти всюду, а в точках разрыва t_i :

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{x(t_i)\}\} = (x(t_i + 0) + x(t_i - 0))/2.$$

Контур интегрирования в (4.5), называемый иногда *контуром Бромвича*, представляет собой бесконечную прямую на комплексной плоскости s , параллельную мнимой оси и оставляющую слева от себя все особые точки подынтегральной функции.

Для доказательства формулы (4.5) воспользуемся динамическим представлением сигнала (1.15), в котором дельта-функцию заменим её интегральным

представлением (1.25):

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) d\tau \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{s(t-\tau)} ds.$$

Меняем местами порядок интегрирования и сужаем пределы интегрирования по времени (т. к. рассматриваемые сигналы равны 0 при отрицательных значениях t , получим

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \left(\int_0^\infty x(\tau) e^{-s\tau} d\tau \right) e^{st} ds = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s) e^{st} ds, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

В дальнейшем, если не оговорено противное, будем рассматривать одностороннее преобразование Лапласа. Заметим, что если сигнал $x(t) = 0$ при $t < 0$, то оба преобразования Лапласа равны друг другу, а если существует преобразование Фурье $X(\omega)$, то оно получается из двустороннего образа по Лапласу подстановкой $s = j\omega$.

Пример 4.1 Изображение функции Хевисайда:

$$x(t) = \sigma(t);$$

$$X(s) = \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s}; \quad (\operatorname{Re} s > 0).$$

Пример 4.2 Изображение экспоненциального импульса:

$$x(t) = e^{-\alpha t};$$

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_0^\infty e^{-(\alpha+s)t} dt = \frac{-1}{s+\alpha} e^{-(\alpha+s)t} \Big|_0^\infty = \\ &= \frac{1}{s+\alpha} \quad (\operatorname{Re} s > -\alpha). \end{aligned}$$

Пример 4.3 Изображение дельта-функции:

$$x(t) = \delta(t - t_0) \leftrightarrow X(s) = \int_0^\infty \delta(t - t_0) e^{-st} dt = e^{-st_0}.$$

При $t_0 = 0$

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{0-\varepsilon}^\infty \delta(t) e^{-st} dt = 1.$$

Пример 4.4 Изображения экспоненты мнимого аргумента и тригонометрических функций:

$$x(t) = A e^{j\omega t};$$

$$\operatorname{Re} x(t) = x_1(t) = A \cos \omega t;$$

$$\operatorname{Im} x(t) = x_2(t) = A \sin \omega t;$$

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_0^\infty A e^{j\omega t} e^{-st} dt = A \int_0^\infty e^{-t(s-j\omega)} dt = \\ &= \frac{A}{s-j\omega} = A \cdot \frac{s+j\omega}{s^2 + \omega^2}; \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}\{x_1(t)\} = \operatorname{Re} X(s) = \frac{As}{s^2 + \omega^2};$$

$$\mathcal{L}\{x_2(t)\} = \operatorname{Im} X(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Пример 4.5 Изображение экспоненциально затухающих гармонических колебаний:

$$x_1(t) = A e^{-\alpha t} \cos \omega t = A \operatorname{Re} e^{-(\alpha - j\omega)t};$$

$$x_2(t) = A e^{-\alpha t} \sin \omega t = A \operatorname{Im} e^{-(\alpha - j\omega)t};$$

$$X_1(s) = \frac{A(s + \alpha)}{(s + \alpha)^2 + \omega^2};$$

$$X_2(s) = \frac{A\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}.$$

4.3. Свойства преобразования Лапласа

Рассмотрим основные свойства одностороннего преобразования Лапласа, которые часто используются при анализе систем обработки сигналов и при вычислении оригиналов или их образов.

1. Линейность:

$$\mathcal{L}\left\{\sum_i \alpha_i x_i(t)_i\right\} = \sum_i \mathcal{L}\{\alpha_i x_i(t)\} \quad (4.6)$$

(доказательство следует из линейности интеграла).

2. Изображение смещённого сигнала:

$$\mathcal{L}\{x(t - t_0)\} = X(s) \cdot e^{-st_0}. \quad (4.7)$$

Доказательство. Сделаем замену переменных $t - t_0 = \xi$ в интеграле

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x(t - t_0) e^{-st} dt &= \int_0^\infty x(\xi) e^{-s(\xi + t_0)} d(\xi + t_0) = \\ &= e^{-st_0} \int_0^\infty x(\xi) e^{-s\xi} d\xi = e^{-st_0} X(s). \end{aligned}$$

3. Смещение изображения:

$$\mathcal{L}\{X(s + \alpha)\} = x(t) \cdot e^{-\alpha t}. \quad (4.8)$$

Доказательство.

$$\int_0^\infty x(t) e^{-\alpha t} e^{-st} dt = \int_0^\infty x(t) e^{-(s+\alpha)t} dt = X(s + \alpha).$$

4. Изображение производной:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = sX(s) - x(0), \quad (4.9)$$

где $x(0) \equiv x(t)|_{t=0}$ — начальное условие.

Доказательство. Интегрируем по частям

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} &= \int_0^\infty \frac{dx}{dt} e^{-st} dt = \\ &= x(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + s \int_0^\infty x(t) e^{-st} dt = \\ &= -x(0) + sX(s). \end{aligned}$$

В общем случае

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right\} &= s^n X(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}x'(0) - \dots - \\ &\quad - sx^{(n-2)}(0) - x^{(n-1)}(0) = \\ &= s^n X(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-i-1} x^{(i)}(0). \end{aligned} \quad (4.10)$$

5. Изображение интеграла:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t x(\xi) d\xi\right\} = X(s)/s. \quad (4.11)$$

6. Изображение свёртки:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x_1(t) * x_2(t)\} &= \mathcal{L}\left\{\int_0^\infty x_1(t - \tau) x_2(\tau) d\tau\right\} = \\ &= \mathcal{L}\{x_1(t)\} \cdot \mathcal{L}\{x_2(t)\}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(\int_0^\infty x_1(t - \tau) x_2(\tau) d\tau\right) e^{-st} dt &= \\ = \int_0^\infty x_2(\tau) \left(\int_0^\infty x_1(t - \tau) e^{-st} dt\right) d\tau. \end{aligned}$$

Сделаем замену переменных $t - \tau = \eta$, получим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x_2(\tau) \left(\int_0^\infty x_1(\eta) e^{-s(\eta + \tau)} d\eta\right) d\tau &= \\ = \int_0^\infty x_2(\tau) e^{-s\tau} d\tau \int_0^\infty x_1(\eta) e^{-s\eta} d\eta &= \\ = X_1(s) X_2(s). \end{aligned}$$

7. Дифференцирование изображения:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{dX(s)}{ds}\right\} = -tx(t); \quad (4.13)$$

$$\mathcal{L}\{t^n x(t)\} = (-1)^n \frac{d^n X(s)}{ds^n}. \quad (4.14)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} X(s) &= \frac{d}{ds} \int_0^\infty x(t) e^{-st} dt = \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{ds} x(t) e^{-st} dt = \\ &= - \int_0^\infty tx(t) e^{-st} dt = -\mathcal{L}\{tx(t)\} \end{aligned}$$

(дифференцировать под знаком интеграла можно благодаря его равномерной сходимости).

8. Масштабирование:

$$\mathcal{L}\{x(at)\} = \frac{1}{a} X(s/a) \quad (a > 0). \quad (4.15)$$

Доказательство. Сделаем замену переменных $at = \eta$ в интеграле

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x(at) e^{-st} dt &= \\ = \frac{1}{a} \int_0^\infty x(\eta) e^{-s\eta/a} d\eta &= \frac{1}{a} X(s/a). \end{aligned}$$

9. Теорема о начальном значении :

$$x(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s). \quad (4.16)$$

Доказательство. Используем свойство дифференцирования (4.13), получим при $s \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} &= \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{dx}{dt} e^{-st} dt = \\ &= \int_0^\infty \frac{dx(t)}{dt} \lim_{s \rightarrow \infty} e^{-st} dt = 0. \end{aligned}$$

10. Теорема о конечном значении:

$$\lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = x(\infty). \quad (4.17)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \mathcal{L} \left\{ \frac{dx}{dt} \right\} &= \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{dx}{dt} e^{-st} dt = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} \lim_{s \rightarrow 0} e^{-st} dt = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} dt = x(\infty) - x(0). \end{aligned}$$

Пример 4.6 Используя свойство дифференцирования изображения, найдём образ сигнала $x(t) = t \cos \omega t$:

$$X(s) = -\frac{d \mathcal{L}\{\cos \omega t\}}{ds} = -\frac{d}{ds} \left(\frac{s}{s^2 + \omega^2} \right) = \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}.$$

Пример 4.7 Аналогично для сигнала $x(t) = te^{-\alpha t}$ получаем

$$X(s) = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{e^{-\alpha t}\} = -\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s + \alpha} \right) = \frac{1}{(s + \alpha)^2}.$$

В общем случае можно доказать, что

$$\mathcal{L}\{t^n e^{-\alpha t}\} = \frac{n!}{(s + \alpha)^{n+1}}. \quad (4.18)$$

Пример 4.8 Используя свойство о изображении задержанного сигнала, найдём образ по Лапласу задержанной функции включения:

$$\mathcal{L}\{\sigma(t - \tau)\} = e^{-s\tau}/s. \quad (4.19)$$

Пример 4.9 Из предыдущего примера и из свойства линейности следует, что изображение прямоугольного импульса

$$\mathcal{L}\{\sigma(t) - \sigma(t - \tau)\} = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s\tau}}{s} = \frac{(1 - e^{-s\tau})}{s}. \quad (4.20)$$

Пример 4.10 Используя свойство дифференцирования, получаем, что

$$\mathcal{L}\{d\delta(t)/dt\} = s. \quad (4.21)$$

4.4. Вычисление обратного преобразования Лапласа

4.4.1. Теорема разложения Хевисайда

Пусть необходимо найти $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$, причём $Y(s)$ — дробно-рациональная функция, т.е.

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{\sum_{k=0}^m b_k s^k}{\sum_{k=0}^n a_k s^k}; \quad m < n. \quad (4.22)$$

Делением числителя и знаменателя на a_n всегда можно добиться, чтобы старший коэффициент a_n равнялся 1. Далее будем рассматривать только этот случай. Заметим, что невыполнение условия $a_n = 1$ является частым источником ошибок при вычислениях оригинала по известному изображению.

Полином в знаменателе степени n согласно основной теореме алгебры имеет n корней s_k ; при действительных коэффициентах a_k корни либо действительны, либо комплексно-сопряжены. Корни знаменателя называются *полюсами* функции $Y(s)$.

Если все n полюсов различны (т.е. не кратные), то полином можно представить в виде произведения

$$\sum_{k=0}^n a_k s^k = a_n \prod_{k=1}^n (s - s_k) = \prod_{k=1}^n (s - s_k). \quad (4.23)$$

Тогда дробно-рациональную функцию, если она правильная (т.е. если степень числителя меньше степени знаменателя), можно разложить на слагаемые (теорема разложения Хевисайда):

$$Y(s) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k s^k}{\prod_{k=1}^n (s - s_k)} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{s - s_k}, \quad (4.24)$$

где коэффициенты (вычеты) находятся по формуле

$$A_k = \left(Y(s) \cdot (s - s_k) \right) \Big|_{s=s_k}. \quad (4.25)$$

Если же имеются кратные полюсы, тогда разложение усложняется. Каждому p -кратному полюсу в разложении $Y(s)$ будут соответствовать p слагаемых:

$$\frac{A_1}{(s - s_k)^p} + \frac{A_2}{(s - s_k)^{p-1}} + \dots + \frac{A_p}{s - s_k}.$$

В этом случае коэффициенты, соответствующие каждому кратному полюсу, находятся по формуле

$$A_i = \frac{1}{(i-1)!} \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}} \left((s - s_k)^p \cdot Y(s) \right). \quad (4.26)$$

Пример 4.11 Например,

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)^3(s+2)} = \frac{A_1}{(s+1)^3} + \frac{A_2}{(s+1)^2} + \frac{A_3}{s+1} + \frac{A_4}{s+2}. \quad (4.27)$$

Во многих случаях вместо громоздкой формулы (4.27) выгодно использовать один из следующих способов.

Способ 1. Приведение к общему знаменателю и приравнивание коэффициентов при равных степенях s . Для изображения (4.27):

$$1 = A_1(s+2) + A_2(s+1)(s+2) + A_3(s+1)^2(s+2) + A_4(s+1)^3.$$

Раскрываем скобки:

$$\begin{aligned} 1 &= A_1 s + 2A_1 + A_2 s^2 + 3A_2 s + 2A_2 + \\ &+ A_3(s^2 + 2s + 1)(s + 2) + A_4(s^3 + 3s^2 + 3s + 1) = \\ &= A_1 s + 2A_1 + A_2 s^2 + 3A_2 s + 2A_2 + A_3 s^3 + 4A_3 s^2 + \\ &+ 5A_3 s + 2 + A_4 s^3 + 3A_4 s^2 + 3A_4 s + A_4 = \\ &= s^3(A_3 + A_4) + s^2(A_2 + 4A_3 + 3A_4) + \\ &+ s(A_1 + 3A_2 + 5A_3 + 3A_4) + (2A_1 + 2A_2 + A_4 + 2). \end{aligned}$$

Приравниваем коэффициенты при равных степенях s и получаем

$$\begin{aligned} A_3 + A_4 &= 0; & A_2 + 4A_3 + 3A_4 &= 0; \\ A_1 + 3A_2 + 5A_3 + 3A_4 &= 0; & 2A_1 + 2A_2 + A_4 + 2 &= 1. \end{aligned}$$

Решая систему линейных уравнений, находим, что $A_1 = 1$; $A_2 = -1$; $A_3 = 1$; $A_4 = -1$. Используя свойство

$$\mathcal{L}\{t^n e^{-\alpha t}\} = n!/(s + \alpha)^{n+1},$$

находим оригинал

$$y(t) = \frac{1}{2} t^2 e^{-t} - t e^{-t} + e^{-t} - e^{-2t}.$$

Способ 2. Разложение $Y(s) \cdot (s+1)^3$ в степенной ряд относительно $(s+1)$.

Используя разложение

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

при $x < 1$, получим

$$\begin{aligned} Y(s)(s+1)^3 &= \frac{1}{s+2} = \frac{1}{(s+1)+1} = \\ &= 1 - (s+1) + (s+1)^2 + \dots \end{aligned}$$

Тогда разложение изображения имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1 - (s+1) + (s+1)^2 + \dots}{(s+1)^3} = \\ &= \frac{1}{(s+1)^3} - \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+1} - \dots \end{aligned}$$

Коэффициент при $1/(s+2)$ находится обычным способом, т. к. полюс $s = -2$ не кратный.

Способ 3. По формуле (4.25).

Находим A_1 при старшей степени $1/(s+1)^3$, получаем

$$A_1 = \left(Y(s) \cdot (s+1)^3 \right) \Big|_{s=-1} = \frac{1}{s+2} \Big|_{s=-1} = 1;$$

затем вычитаем из $Y(s)$ найденный первый член разложения $1/(s+1)^3$, в результате полюс $s = -1$ будет лишь второго порядка:

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= \frac{1}{(s+1)^3(s+2)} - \frac{1}{(s+1)^3} = \frac{1 - (s+2)}{(s+1)^3(s+2)} = \\ &= \frac{-1}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{A_2}{(s+1)^2} + \frac{A_3}{s+1} + \frac{A_4}{s+2}; \\ A_2 &= \left(Y_1(s) \cdot (s+1)^2 \right) \Big|_{s=-1} = \frac{-1}{s+2} \Big|_{s=-1} = -1. \end{aligned}$$

Теперь вычитаем член $-1/(s+1)^2$, получим

$$\begin{aligned} Y_2(s) &= Y_1(s) + \frac{1}{(s+1)^2} = \\ &= \frac{-1 + s + 2}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}; \\ A_3 &= \left(Y_2(s) \cdot (s+1) \right) \Big|_{s=-1} = \frac{1}{s+2} \Big|_{s=-1} = 1 \\ A_4 &= \left(Y(s) \cdot (s+2) \right) \Big|_{s=-2} = -1. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем тот же результат, что и раньше.

Если степень полинома знаменателя не больше степени числителя, то дробно-рациональную функцию с помощью деления числителя на знаменатель можно представить в виде суммы полинома и правильной дробно-рациональной функции; оригиналом для первого будет являться сумма дельта-импульсов и их производных, а к последней может быть применён рассмотренный выше способ разложения на элементарные дроби.

Пример 4.12 Например, если образ

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{s^3 + 5s^2 + 9s + 1}{s^2 + 3s + 2} = \\ &= s + 2 + \frac{s-3}{s^2 + 3s + 2} = s + 2 - \frac{4}{s+1} + \frac{5}{s+2}, \end{aligned}$$

то оригинал

$$x(t) = \dot{\delta}(t) + 2\delta(t) - 4e^{-t}\sigma(t) + 5e^{-2t}\sigma(t).$$

4.4.2. Интеграл Меллина

В некоторых случаях для нахождения обратного преобразования Лапласа приходится вычислять интеграл Меллина (4.5), используя методы функции комплексного переменного. Если для изображения выполняются условия леммы Жордана (см. п. ?? на с. ??), то интеграл по бесконечной полуокружности, расположенной слева от мнимой оси, равен нулю при $t > 0$. Тогда интеграл Меллина может быть вычислен с помощью интегрирования по замкнутому контуру (рис. 4.2). Если все особенности изображения являются полюсами, то интеграл Меллина равен сумме вычетов относительно всех полюсов:

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s) e^{st} ds = \sum_{k=1}^n \operatorname{res} \left(X(s) e^{st} \right) \Big|_{s=s_k}.$$

В некоторых случаях вместо вычетов удобно использовать интегрирование по эквивалентному контуру, внутри которого расположены все полюса изображения, например, по окружности с центром в начале координат. Если изображение имеет точки разветвления, то необходимо выбрать эквивалентный контур с разрезами, чтобы точка разветвления оказалась вне контура, и провести интегрирование по каждому берегу разреза, но рассмотрение этих вопросов выходит за рамки нашего курса.

Пример 4.13 Необходимо найти оригинал $x(t)$, если известно изображение

$$X(s) = \frac{1}{(s+\alpha)^2}.$$

Эта функция имеет полюс $s = -\alpha$ кратности 2. По формуле (??) находим

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{d}{ds} (s+\alpha)^2 \cdot \frac{1}{(s+\alpha)^2} \cdot e^{st} \Big|_{s=-\alpha} = \\ &= t e^{-st} \Big|_{s=-\alpha} = t e^{-\alpha t}; \quad t > 0. \end{aligned}$$

Аналогичный результат уже был получен в примере 4.7 на с. 30 другим способом.

Пример 4.14 Рассмотрим функцию $X(s) = 1/s^n$, имеющую полюс кратности n при $s = 0$. Разложим экспоненту в ряд

$$\exp(st) = 1 + st + (st)^2/2! + (st)^3/3! + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(st)^k}{k!}.$$

Вычет относительно $s = 0$ будет равен коэффициенту при $1/s$ в разложении

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(st)^k}{k!} \right) / s^n,$$

т. е. при $k = n - 1$, откуда находим оригинал

$$x(t) = t^{n-1}/(n-1)!$$

Задание 4.1 Решите следующие задачи:

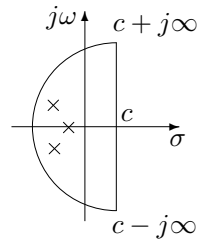


Рис. 4.2. Контур интегрирования на комплексной плоскости

1. Докажите, что следующие оригиналы имеют указанные изображения по Лапласу и область сходимости. Найдите область сходимости, где она не указана. Если оригинал $x(t)$ отличен от 0 при $t < 0$, рассматривайте двустороннее преобразование Лапласа. Нарисуйте график оригинала и покажите штриховкой на комплексной плоскости область сходимости.

а) $x(t) = e^{-\alpha t} \sigma(t) \leftrightarrow X(s) = 1/(s + \alpha); \operatorname{Re} s > -\alpha;$
 б) $x(t) = -e^{-\alpha t} \sigma(-t) \leftrightarrow X(s) = 1/(s + \alpha); \operatorname{Re} s < -\alpha;$

в) $x(t) = e^{-\alpha|t|}, \alpha > 0 \leftrightarrow X(s) = 2\alpha^2/(\alpha^2 - s^2); |\operatorname{Re} s| < \alpha;$

г) $x(t) = \sigma(t + T/2) - \sigma(t - T/2) \leftrightarrow X(s) = (e^{sT/2} - e^{-sT/2})/s$ при любых s ;

д) $x(t) = 1/(1 + t^2) \leftrightarrow X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-st}}{(1 + t^2)} dt;$

$s = j\omega$ (область сходимости — мнимая ось);

е) $x(t) = e^{t^2}$; изображение не существует (интеграл не сходится);

ж) $x(t) = e^{-t} - e^{-2t}, t > 0 \leftrightarrow X(s) = \frac{1}{(s + 1)(s + 2)}.$

з) $2e^{-t} - e^{-2t}, t > 0 \leftrightarrow X(s) = \frac{s + 2}{(s + 1)(s + 2)}.$

и) $\frac{1}{2\alpha}(e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}) = \frac{1}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha t, t > 0 \leftrightarrow \frac{1}{s^2 - \alpha^2};$

к) $x(t) = \frac{1}{2j\omega_0}(e^{(-\alpha + j\omega_0)t} - e^{(-\alpha - j\omega_0)t}) = \frac{e^{-\alpha t}}{\omega_0} \sin \omega_0 t, t > 0; X(s) = \frac{1}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2};$

л) $x(t) = \sigma(t) - 2 \cdot \sigma(t - 1) + \sigma(t - 2) = \begin{cases} 1; & 0 < t < 1; \\ -1; & 1 < t < 2; \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases} X(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-s})^2;$

м) $x(t) = \sin t - \sin(t - 2\pi) \cdot \sigma(t - 2\pi) = \begin{cases} \sin t, & 0 < t < 2\pi; \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases} X(s) = \frac{1}{s^2 + 1}(1 - e^{-2\pi s});$

н) $te^{-t} + e^{-t} = e^{-t}(1 + t); t > 0; \frac{s + 2}{(s + 1)^2};$

о) $x(t) = e^{-t} - 1 + t, t > 0; X(s) = \frac{1}{s^2(s + 1)};$

п) $x(t) = e^{-t}(\cos t - \sin t) \sigma(t); X(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 2}.$

2. Вычислите обратное преобразование Лапласа для образов, указанных в задаче 1 на с. 32.

3. Сформулируйте и докажите свойства двустороннего преобразования Лапласа, аналогичные рассмотренным в разделе 4.3.