Г. Зейферт и В. Трельфалль

Топология

R&C Dynamics
RXD
Москва • Ижевск

2001

УДК 515

Интернет-магазин

MATHESIS

http://shop.rcd.ru

- **физика**
- **математика**
- **биология**
- **техника**

Внимание!

Новые проекты издательства РХД

- Электронная библиотека на компакт-дисках
  http://shop.rcd.ru/cdbooks
- Эксклюзивные книги — специально для Вас любая книга может быть отпечатана в одном экземпляре
  http://shop.rcd.ru/exclusive

РФФИ

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту №01–01–14111

Зейферт Г., Трельфалль В.
Топология. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, 448 стр.

Книга представляет собой классическую монографию по топологии, принадлежащую перу известных немецких математиков. В ней с большим мастерством разобрана теория гомологий, — ее суждение является лучшей в мировой литературе. Разобраны также более специальные вопросы топологии.

Хотя за прошедшие годы многие разделы несколько устарели, книга не утратила своего значения и остается наиболее наглядным и ясным изложением основных идей топологии.

Для математиков, механиков, физиков, студентов и аспирантов университетов, специалистов.

ISBN 5-93972-068-4

© НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001

http://rcd.ru

Оглавление

Предисловие ко второму русскому изданию 6

Предисловие к русскому переводу 6

Предисловие авторов 8

Глава I. **Наглядный материал** 10
§ 1. Основная задача топологии 10
§ 2. Замкнутые поверхности 15
§ 3. Изотопия, гомотопия, гомология 24
§ 4. Многообразия высших размерностей 27

Глава II. **Симплициальный комплекс** 33
§ 5. Окрестностные пространства 33
§ 6. Отображения 37
§ 7. Подмножества евклидовых пространств 43
§ 8. Отождествление 47
§ 9. n-мерный симплекс 52
§ 10. Полиэдры и их симплициальные подразделения (симплициальные комплексы) 59
§ 11. Схема симплициального комплекса 62
§ 12. Конечные и однородные комплексы. Многообразия . . . 66
§ 13. Барицентрическое подразделение 68
§ 14. Примеры полиэдров и комплексов 70

Глава III. **Группы Бетти** 80
§ 15. Алгебраические комплексы 80
§ 16. Граница, цикл 82
§ 17. Гомологичные алгебраические комплексы 85
§ 18. Группы Бетти 89
§ 19. Вычисление групп Бетти в простейших случаях 92
§ 20. Слабые гомологии 95
§ 21. Вычисление групп Бетти при помощи матриц инциденций 98
§ 22. Кусочные алгебраические комплексы 106
§ 23. Алгебраические комплексы и числа Бетти по модулю 2 . 110
§ 24. Псевдомногообразия и ориентируемость 117

Глава IV. **Симплициальное приближение** 122
§ 25. Особый симплекс 122
§ 26. Особые алгебраические комплексы 125
§ 27. Особые группы Бетти 127
§ 28. Теорема о симплициальном приближении. Инвариантность симплициальных групп Бетти 131
§ 29. Призмы в евклидовом пространстве 132
§ 30. Доказательство теоремы о симплициальном приближении 138
§ 31. Деформации и симплициальные приближения отображений 149

Глава V. **Локальные свойства** 158
§ 32. Локальные группы Бетти полиэдра 158
§ 33. Инвариантность размерности 165
§ 34. Инвариантность однородности комплекса 166
§ 35. Инвариантность границы 167
§ 36. Инвариантность псевдомногообразия и ориентируемости 168

Глава VI. **Топология поверхностей** 170
§ 37. Замкнутые поверхности 170
§ 38. Приведение к канонической форме 176
§ 39. Основная теорема топологии поверхностей 182
§ 40. Ограниченные поверхности 184
§ 41. Группы Бетти поверхностей 188

Глава VII. **Фундаментальная группа** 194
§ 42. Фундаментальная группа 194
§ 43. Примеры 202
§ 44. Группа симплициальных путей симплициального комплекса 205
§ 45. Группа симплициальных путей поверхностного комплекса 210
§ 46. Образующие и соотношения 214
§ 47. Линейчатые комплексы и замкнутые поверхности 217
§ 48. Фундаментальная группа и одномерная группа Бетти . . 220
§ 49. Свободные деформации замкнутых путей 224
§ 50. Фундаментальная группа и деформация отображения . . 227
§ 51. Фундаментальная группа в точке 227
§ 52. Фундаментальная группа составного полиэдра 228

Глава VIII. **Накрывающий полиэдр** 233
§ 53. Неразветвленный накрывающий полиэдр 233
§ 54. Основной и накрывающий пути 237
§ 55. Накрывающий полиэдр и подгруппа фундаментальной группы 241
§ 56. Универсальный накрывающий полиэдр 248
§ 57. Регулярное накрытие 250
§ 58. Группа монодромии 254

Глава IX. **Трехмерные многообразия** 261
§ 59. Общие свойства 261
§ 60. Представление трехмерных многообразий посредством многогранников 263
§ 61. Группы Бетти 270
§ 62. Фундаментальная группа 274
§ 63. Диаграмма Хегора (Heegaard) 280
§ 64. Ограниченные трехмерные многообразия 283
§ 65. Построение трехмерных многообразий при помощи узлов 286

Глава X. **n-мерные многообразия** 291
§ 66. Звездный комплекс 291
§ 67. Клеточный комплекс 298
§ 68. h-многообразия 302
§ 69. Закон двойственности Пуанкаре 309
§ 70. Индексы пересечения клеточных алгебраических комплексов 315
§ 71. Дуальные базы 318
§ 72. Клеточная аппроксимация 325
§ 73. Индексы пересечения особых алгебраических комплексов 329
§ 74. Инвариантность индекса пересечения 332
§ 75. Примеры 343
§ 76. Ориентируемость и двусторонность 348
§ 77. Коэффициенты зацепления 353

Глава XI. **Непрерывные отображения** 361
§ 78. Степень отображения 361
§ 79. Формула следа 364
§ 80. Формула неподвижных точек 367
§ 81. Приложения 369

Глава XII. **Вспомогательные сведения из теории групп** . 374
§ 82. Образующие и соотношения 374
§ 83. Гомоморфное отображение и дополнительная группа . . 379
§ 84. Коммутирование групп 382
§ 85. Свободное и прямое произведения 383
§ 86. Абелевы группы 387
§ 87. Нормальная форма целочисленных матриц 395

Примечания 399

Указатель литературы 418

Предметный указатель 436

Предисловие ко второму русскому изданию

Мы предприняли переиздание этой замечательной книги в целях восполнить пробел в классической литературе по топологии — разделу математики, получившего более бурное развитие в XX-веке. Эта книга до сих пор остается наиболее полным и доступным руководством по теории гомологий, топологии двумерных и трехмерных многообразий. В ней изложены основные сведения по фундаментальным группам и теории гомотопий.

С современными аспектами топологии можно будет ознакомиться по книге С. П. Новикова «Топология», которая скоро появится в нашем издательстве. Тем не менее книга Зейферта, Трельфалля, несомненно, еще долгое время будет играть роль наиболее прозрачного изложения основных идей и методов топологии, а также является замечательным введением в эту область математики.

Предисловие к русскому переводу

Книга Зейферта и Трельфалля «Lenrbuch der Topologie» является, несомненно, лучшим из существующих в настоящее время сочинений, посвященных основным вопросам топологии полиэдров и, в частности, многообразий. Она соединяет полную строгость и точность изложения с большой наглядностью его и в этом отношении является единственным произведением топологической литературы.

Она, несомненно, является лучшим источником, из которого математик, не связанный в своей работе с теоретико-множественными концепциями, а также механик, физик, химик могут познакомиться с топологией. В частности, эта книга содержит в себе полную трактовку элементарной топологии двух, трех и n-мерных многообразий.

Помимо тех вопросов, на которые указывают авторы книги в своем предисловии, вне поля их внимания целиком осталась теоретико-множественная топология, а также большая часть топологии непрерывных отображений полиэдров (из которой дано только понятие степени отображения, хопфово обобщение формулы Эйлера – Пуанкаре и простейший случай общей формулы для неподвижных точек полиэдров). В настоящее время и основы теоретико-множественной топологии (я имею в виду прежде всего элементарные предложения теории топологических и метрических пространств), и теория непрерывных отоб-

ражений полиэдров и многообразий составляют необходимые составные части, так сказать, «топологического минимума». Оба эти раздела топологии с достаточной полнотой изложены в книге Александров–Hopf, Topologie I,* к которой я и отсылаю читателя с замечанием, что книга Зейферта–Трельфалля и книга, написанная совместно Хопфом и мною, имея в качестве общей части элементарную теорию гомологий для полиэдров, в основном хорошо дополняют друг друга, так что изучение обеих книг действительно гарантирует читателю основательное владение предметом.

При этом не могу не отметить, что книга Александров–Hopf написана гораздо более отвлеченно и менее наглядно, но зато значительно более систематично и полно, чем книга Зейферта–Трельфалля. Поэтому первое знакомство с топологией надо начинать именно с Зейферта–Трельфалля. Различие между обеими книгами особенно типично в теории гомологии полиэдров, изложенной и здесь и там: у Зейферта–Трельфалля — очень наглядно и педагогично, но в применении лишь к простейшим полям коэффициентов, тогда как Хопф и я даем полное изложение теории для любого поля коэффициентов (которая сейчас необходима во всех более глубоких топологических исследованиях, будь то понтрягинская теория непрерывных групп, колмогоровская общая теория двойственности или теория размерности).

Кстати, что касается названных теорий, а также упоминаемой Зейфертом и Трельфаллем в их предисловии теории проекционных спектров, то они войдут во второй том топологии, издаваемой Хопфом и мною. Топологию же многообразий мы предполагаем включить лишь в третий том.

При всем том, как бы ни пополнялась в ближайшие годы топологическая литература, несомненно, что еще долгое время книга Зейферта–Трельфалля вполне сохранит свое значение лучшей книги для первого чтения по топологии.

П. Александров

*Имеется ввиду книга Alexandroff P., Hopf H. Topologie, Berlin, Springer, 1935.

Предисловие авторов

Первым поводом к составлению предлагаемого учебника послужил курс лекций, прочитанный одним из нас (Трельфаллем) в Высшей технической школе в Дрездене. Однако материал этих лекций вошел в книгу только частично. Основное содержание книги выкристаллизовалось впоследствии, при тесном общении и ежедневном обмене мыслями между обоими авторами.

Топология — наука, находящаяся в настоящее время в своем расцвете. Желая дать введение в топологию и обзор основных ее результатов, мы не смогли бы считать нашу цель достигнутой, перечислив с возможно большей полнотой общие теоремы и приведя их доказательства. Напротив, мы считали необходимым подробно остановиться на основных понятиях топологии и систематически развить методы, которые кажутся нам особенно плодотворными. Изложение основных понятий и методов сопровождается разбором большого числа примеров.

Никаких специальных предварительных знаний у читателя этой книги не предполагается. Небольшое число общеизвестных теорем, которыми мы пользуемся не давая их доказательств, снабжены в подстрочных примечаниях указаниями литературы, где эти доказательства приведены именно в той форме, в какой это требуется. Мы ограничиваемся изложением комбинаторной или алгебраической топологии, однако пользуемся, стараясь обойти возможно дальше теоретико-множественные трудности, смешанным методом. Поэтому в центре наших рассмотрений стоит введенное Брауэром понятие симплициального комплекса и многообразия. Для читателя, незнакомого с теорией групп и с употребляемыми в ней в настоящее время обозначениями, мы приводим в последней главе сопоставление всех применяемых из этой теории сведений; с содержанием этой главы нужно ознакомиться между чтением второй и третьей глав книги. Мы старались сделать чтение отдельных глав книги по возможности независимым друг от друга. Особое внимание обращено на составление подробного алфавитного предметного указателя. В примечаниях в конце книги даны указания дальнейшей литературы и приведены некоторые дополнительные сведения; эти примечания должны облегчить возможность перехода к дальнейшему изучению теорий, которые в книге не могли быть развиты подробно. На некоторых теориях — ввиду ограниченного объема книги — мы совсем не могли остановиться. Из них нам было особенно жалко опускать закон двойственности Александе-

ра и теорию замкнутых множеств и проекционных спектров Александрова. Мы надеемся заполнить эти пробелы в следующем томе, если только в промежутке другие учебники топологии не исчерпают этих вопросов.

Дрезден, январь 1934 г. *Г. Зейферт, В. Трельфалль*

Цифры в квадратных скобках относятся к указателю литературы, расположенному авторами в алфавитном порядке, маленькие цифры, стоящие наверху, указывают на примечания в конце книги.

Глава I
Наглядный материал*

§ 1. Основная задача топологии

Топология изучает свойства геометрических фигур, не меняющиеся при взаимно однозначных и взаимно непрерывных отображениях. (Такие отображения называются топологическими.) Под геометрической фигурой мы понимаем пока множество точек трехмерного пространства** (или пространства более высокого числа измерений); отображение фигуры является непрерывным, если оно осуществляется в какой-нибудь декартовой системе координат этого пространства при помощи непрерывных функций. Эти функции не должны быть определены во всех точках пространства, а могут быть заданы лишь в точках отображаемой фигуры. Свойства, не меняющиеся при топологических отображениях, называются топологическими свойствами фигуры.

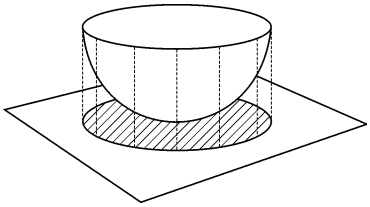


Рис. 1

Две фигуры, допускающие топологическое отображение одной на другую, называются *гомеоморфными*. Например, полусфера и круг гомеоморфны, так как при помощи ортогонального проектирования полусфера топологически отображается на круг (на рис. 1 круг этот заштрихован). Вообще поверхности, которые могут быть деформированы одна в другую посредством изгибания, растяжения и сжатия, как например, поверхности шара, куба и эллипсоида, или плоское кольцо и боковая поверхность цилиндра, гомеоморфны. Нетрудно привести сколько угодно примеров гомеоморфных фигур, в том числе и таких, в которых гомеоморфность не видна сразу. Так, гомеоморфны евклидова плоскость и сфера с одной выкинутой точкой («проколотая» сфера), — одну можно топологически отобразить на другую при помощи стереографической проекции. Каждая из этих фигур сверх того гомеоморфна внутренности круга (§ 6, 2-й и 3-й примеры).

---

*В смысле элементарно геометрическом, т. е. без всяких бесконечно удаленных точек.

**Эта глава дает обзор элементарных геометрических образов, лежащих в основе топологического исследования, и имеет лишь вводный характер, не претендующий на полную математическую строгость рассуждений.

Вообще говоря, труднее доказать, что две фигуры не гомеоморфны. Ясно, что точка и отрезок негомеоморфны, так как обе эти фигуры не могут быть отображены одна на другую даже только взаимно однозначно. Легко убедиться также и в том, что отрезок и окружность нельзя топологически отобразить друг на друга. В самом деле, если A, B, C, три точки окружности, то A может быть непрерывным движением по окружности переведено в B, не попадая по пути в C. Это свойство окружности при топологических отображениях должно сохраняться. Отрезок, однако, им не обладает, так как при непрерывном переводе одного конца отрезка в другой нельзя миновать, например, середины отрезка*.

Но такого рода элементарные рассуждения уже недостаточны, когда мы сравниваем круг с шаром. Если мы, например, характеризуем круг тем, что в нем существуют замкнутые кривые, разбивающие его на две части, то нам нужно показать, что никакая замкнутая кривая не разбивает шар на две части. Почему, однако, замкнутая кривая не может оыть расположена внутри шара таким образом, что она проходит через все точки какой-нибудь поверхности, разбивающей шар на две части? На самом деле это не может произойти, но это вовсе не очевидно.

Таким образом простейшие соображения, вроде тех, при помощи которых мы доказали, что отрезок и круг топологически различны, не дают еще возможности установить негомеоморфность круга, шара и соответствующих образов высшего числа измерений (доказательство этого см. в § 33).

Гомеоморфизм играет такую же роль в топологии, как *конгруэнтность* в элементарной геометрии. Так же, как две конгруэнтные фигуры не являются существенно различными с точки зрения элементарной геометрии, две гомеоморфные фигуры, т. е. две фигуры, допускающие топологическое отображение одной на другую, не являются существенно различными с точки зрения топологии. Однако в то время как две конгруэнтные фигуры всегда могут быть переведены одна в другую конгруэнтным отображением *всего* пространства самого на себя, для гомеоморфных фигур может и не существовать топологического отображения всего пространства, переводящего одну из фигур в другую. Так, например, топологическим отображением всего пространства самого на себя окружность не может быть переведена ни в какую *зауз-ленную кривую*, даже в простейшую из таких кривых, изображенную на рис. 2 (стр. 12). Несмотря на это обе кривые гомеоморфны, так так точки узла можно взаимно однозначно и непрерывно отобразить на

*Другое доказательство: если A есть любая точка окружности, то множество, оставшееся от окружности по удалении точки A, связно (в том, например, смысле, что всякие две его точки можно соединить простой дугой, принадлежащей целиком этому множеству). Это свойство, очевидно, должно сохраняться при топологических отображениях; между тем отрезок им не обладает. (*Прим. ред.*)

точки окружности, а при установлении гомеоморфности имеют значение только эти точки, а не точки всего объемлющего пространства.

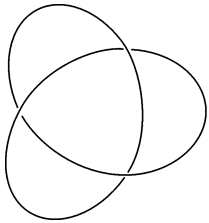


Рис. 2

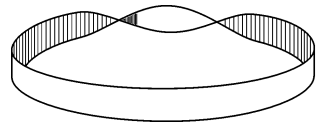


Рис. 3

Точно так же гомеоморфны, но не могут быть переведены одна в другую топологическим отображением всего пространства на себя. Простая замкнутая лента и такая же лента, закрученная на угол, кратный 2π (рис. 3). Гомеоморфность этих фигур легко установить, разрезав каждую ленту и отнеся друг другу соответствующие точки двух получившихся после разрезания конгруэнтных полосок.

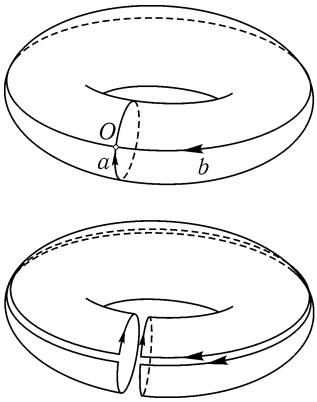


Рис. 4

Узел и окружность, закрученная и незакрученная лента являются топологически эквивалентными фигурами, отличающимися только тем, *как они вложены* в трехмерное пространство. Различие между ними исчезает, если рассматривать трехмерное пространство как подпространство четырехмерного и допустить деформации в этом последнем. Тогда узел и окружность можно деформировать друг в друга без самопересечений, подобно тому как в трехмерном пространстве это можно сделать, например, с окружностью и эллипсом[1].

Мы в дальнейшем будем поэтому различать «*внутренние*» топологические свойства фигуры,В т. е. свойства, не изменяющиеся *при всех* топологических отображениях, от остальных свойств, зависящих оттого, как фигура помещена в пространстве, и неменяющихся лишь при топологических отображениях всего пространства.

Поясним это различие еще на одном примере. При вращении окружности вокруг прямой, лежащей в плоскости окружности, но не пересекающей ее, получается поверхность, называемая *тором*. Через любую точку O тора проходит образующая окружность a. Мы будем

называть ее *меридианом* тора. Кроме того, через точку O проходит окружность b, описываемая этой точкой при вращении (рис. 4). Назовем ее *параллелью*. Если допускать лишь топологические преобразования всего пространства, то меридиан и параллель тора существенно отличаются друг от друга. В самом деле, меридиан можно стянуть в точку, оставаясь внутри тора, а параллель нельзя. Поэтому фигура, состоящая из тора и меридиана на нем, не может быть переведена посредством топологического отображения всего пространства на себя в фигуру, состоящую из тора и параллели. Однако это различие между меридианом и параллелью не является внутренним свойством тора, так как тор можно топологически отобразить на себя (хотя и не деформацией) таким образом, что меридиан и параллель поменяются ролями. В самом деле, представим себе тор в виде эластичной трубки и разрежем ее вдоль a и b. Получившуюся после разрезов поверхность мы можем затем, изгибая и растягивая ее, расправить в плоский квадрат (рис. 5). Поворот этого квадрата на 180° вокруг своей диагонали является топологическим отображением квадрата на себя, при котором a и b меняются местами. Этому повороту соответствует отображение тора самого на себя, обладающее требуемым свойством.

Еще один типичный пример различия между внутренними топологическими свойствами фигуры и свойствами, зависящими от расположения в пространстве, дает ориентируемость и двусторонность поверхностей, с которыми мы встретимся в следующем параграфе.

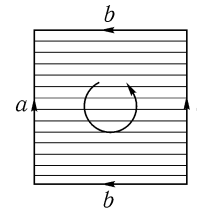


Рис. 5

Различие между внутренними *топологическими* свойствами напоминает различие между внутренними *метрическими* свойствами поверхности в дифференциальной геометрии и противопоставляемыми им свойствами фигуры, состоящей из поверхности и всего пространства. Первые не зависят от положения поверхности в пространстве и определяются первой фундаментальной формой поверхности; вторые же определяются второй фундаментальной формой.

Основная проблема топологии заключается в установлении того, гомеоморфны ли две данные фигуры, и в классификации, там где это возможно, всех негомеоморфных между собой фигур. Хотя имеются разработанные теории, изучающие любые подмножества евклидовых пространств*, мы не будем заниматься фигурами в таком широком смысле слова, — это привело бы нас к нежелательным теоретико-множественным усложнениям. Достаточно узким, чтобы избежать этих усложнений, и достаточно широким, чтобы рассматривать почти все интересные фигуры, является введенное Брауэром топологическое понятие полиэдра, сужающееся в дальнейшем к понятию многообразия.

* Литературу см. у Tietze – Veitoris [8] I.

Таким образом мы будем заниматься не теоретико-множественной топологией, а *топологией полиэдров* и *многообразий*[*].

Свойством, отличающим полиэдр от любого точечного подмножества пространства, является его триангулируемость. Полиэдр есть множество, составленное из конечного или счетного числа отрезков,треугольников, тетраэдров или соответствующих ячеек («клеток») более высокого числа измерений, причем клетки могут и не быть прямолинейными. Это образование мы не обязаны считать расположенным непременно в каком-нибудь пространстве, — вернее, при желании можем вовсе не рассматривать объемлющего пространства. Требование триангулируемости исключает из рассмотрения большинство так называемых патологических множеств; благодаря этому достигается близость к объектам непосредственного геометрического созерцания.

Полиэдрами являются, например, все римановы поверхности, евклидовы пространства любых размерностей, так же как их открытые подмножества, алгебраические кривые и поверхности, проективная плоскость и проективное пространство, все евклидовы и неевклидовы пространственные формы (Raumformen) и области разрывности (Diskontinuitätsbereiche) метрических групп движения, далее — пространства положений и фазовые пространства (Lagen- and Phasenraüme) механических систем и т. д.

Для того чтобы приблизиться к решению основной проблемы топологии, мы будем разыскивать топологические инвариантные свойства полиэдров, поддающиеся выражению в обычных математических терминах, свойства, которые должны будут служить нам отличительными признаками полиэдров. Важнейшими такими свойствами, стоящими в центре нашего исследования, являются группы гомологий и фундаментальная группа полиэдра.

Рассмотрим сначала, однако, в какой мере основная проблема поддается решению без этих вспомогательных средств. С этой целью постараемся разобрать непосредственно частный случай основной проблемы, именно выяснить, какие существуют негомеоморфные замкнутые поверхности.

---

[*] С изложенными здесь точками зрения трудно согласиться. Прежде всего едва ли основной проблемой топологии в настоящее время является установление того, гомеоморфны ли две данные фигуры или нет. Так поставленный вопрос воспринимается как основной лишь в топологии поверхностей (где он благополучно решается) и в топологии трехмерных многообразии (где он еще очень далек от решения). Только субъективными интересами авторов (работы которых относятся главным образом к трехмерным многообразиям) можно объяснить данное ими определение «основной проблемы топологии». В современной топологии вообще нет одной основной проблемы, а имеется множество различных основных проблем, идущих во многих направлениях.

Столь же мало может претендовать на объективность мнение авторов о том, что полиэдры охватывают «почти все» интересные фигуры. О всех этих вопросах см. *Александров – Hopf*, Topologie I, введение и конец 3-й главы. (*Прим. ред.*)

§ 2. Замкнутые поверхности

В предыдущем параграфе мы показали, как, разрезав тор вдоль меридиана и параллели, можно превратить его в плоский квадрат. Этот квадрат, при условии, что его противоположные стороны рассматриваются как эквивалентные, т. е. не считаются различными, называется *фундаментальным многоугольником* или *многоугольником Пуанкаре* для тора. Он полностью определяет тор, по крайней мере в смысле его внутренних топологических свойств. Неопределенными остаются, напротив, его метрические свойства и свойства расположения, вроде величины площади тора, положения его в пространстве и т. п. Но как раз этими свойствами *топология поверхностей* не занимается. С точки зрения топологии поверхностей все торы, получающиеся из фундаментального многоугольника при помощи изгибания и склеивания соответствующих сторон, совершенно одинаковы, так что, например, тор вращения с этой точки зрения ничем не отличается от замкнутой заузленной трубки. Мы примем возможность разрезания поверхности в один или несколько многоугольников за основу определения замкнутой поверхности, именно под замкнутой поверхностью мы будем понимать фигуру, получающуюся из конечного числа многоугольников попарным склеиванием их сторон. Тем самым замкнутая поверхность получает независимое от объемлющего пространства существование, как двумерное многообразие, — понятие, точное определение которого мы дадим позже.

Превращение тора в квадрат приводит нас к аналогичному представлению всего бесконечного ряда замкнутых поверхностей многоугольниками с попарно приведенными в соответствие сторонами. С этой целью сделаем в торе отверстие, вырезав из него, например, какой-нибудь кружок. Пусть граница l этого кружка проходит через точку O. Деформируя тор с отверстием, мы легко можем придать ему вид *ручки* (рис. 6). Вместо того чтобы вырезать отверстие в торе, мы можем вырезать его в квадрате, представляющем тор (рис. 7); в этом случае, разрезав границу l этого отверстия в точке O, мы получим пятиугольник (рис. 8). Этот пятиугольник, очевидно, получается из ручки, если мы разрежем ее вдоль кривых a и b и затем расправим. Пятиугольник имеет одну «свободную» сторону-границу отверстия l, остальные его стороны попарно соответствуют друг другу.

Возьмем теперь две ручки; разрежем каждую из них указанным способом, чтобы из нее получился пятиугольник и склеим оба пятиугольника вдоль «свободных» сторон l (рис. 9). Мы получим, как показано на рис. 10, восьмиугольник с попарно приведенными в соответствие сторонами. При склеивании соответствующих сторон друг с другом все восемь вершин многоугольника сливаются в одну точку и получается поверхность, напоминающая поверхность кренделя, — мы будем называть ее *двойным тором*[2]. Стороны, соответствующие друг другу,

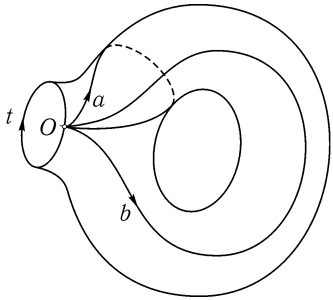


Рис. 6

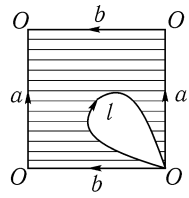


Рис. 7

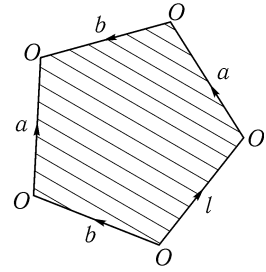


Рис. 8

обозначены на рисунке одинаковыми буквами так же, как это было сделано для тора. Склеивание надо производить таким образом, чтобы направления, указанные стрелками, совпадали. Такие обозначения дают нам возможность описать одной формулой соответствие, установленное между сторонами многоугольника, а вместе с тем и рассматриваемую замкнутую поверхность. В самом деле, будем двигаться в определенном направлении по границе многоугольника и будем снабжать каждую сторону показателем $+1$, если она пробегается в направлении, указанном стрелкой, и показателем -1, если она пробегается в противоположном направлении (показатель $+1$ мы будем большей частью опускать). В случае двойного тора при произвольном направлении обхода восьмиугольника и при ориентации сторон, указанной на рис. 10, получается выражение

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}.$$

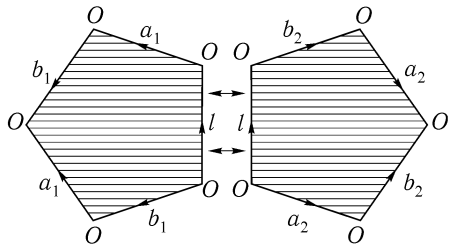


Рис. 9

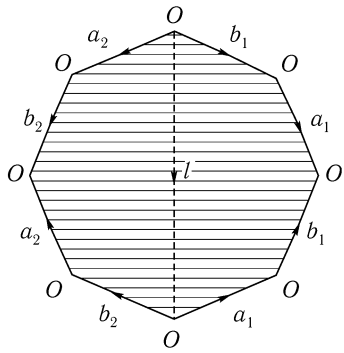


Рис. 10

Вырезав в двойном торе круглое отверстие с границей, проходящей. через точку O, мы можем приделать к нему еще одну ручку. Склеивание соответствующих многоугольников вдоль «свободных» сторон дает двенадцатиугольник. Так как двойной тор можно посредством деформации, не меняющей его топологической структуры, превратить в сферу с двумя ручками, то этот двенадцатиугольник представляет нечто иное, как сферу с тремя ручками.

В общем случае $4h$-угольник представляет разрезанную *сферу с h ручками*, или, что то же, *тор* с $h-1$ *ручками*. Обе эти фигуры не являются топологически различными, так как одна может быть получена из другой посредством деформации, $4h$-угольник есть не что иное, как фундаментальный многоугольник сферы с h ручками. Попарное соответствие его сторон определяется формулой

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_h b_h a_h^{-1} b_h^{-1}, \qquad (h)$$

показывающей, в каком порядке расположены ориентированные стороны многоугольника, когда мы проходим в каком-нибудь направлении его границу. Каждой последовательности четырех сторон $a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$ соответствует ручка; если отделить эти четыре стороны от многоугольника, разрезав его вдоль диагонали l, то мы получим представляющий эту ручку пятиугольник. Также и *сфере* ставится в соответствие некоторый фундаментальный многоугольник, который после отождествления его сторон можно взаимно однозначно и непрерывно отобразить на сферу. Именно, разрезав сферу вдоль дуги a с концами O и P, мы получим двуугольник с граничной окружностью

$$aa^{-1}. \qquad (0)$$

В противоположность остальным фундаментальным многоугольникам этот двуугольник содержит две различные, т. е. не отождествленные точки O и P (рис. 11). Чтобы получить поверхность, топологически эквивалентную сфере, мы должны сомкнуть обе стороны двуугольника, повернув их вокруг точек O и P, как если бы в этих точках были шарниры.

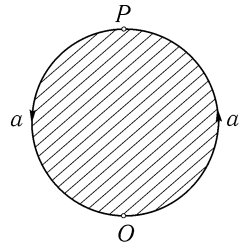


Рис. 11

Сферой с h ручками ($h = 0, 1, 2, \dots$) исчерпывается только половина всех топологически различных замкнутых поверхностей. Вторая половина получается при помощи листа Мебиуса. *Лист Мебиуса* представляет собой замкнутую ленту, закрученную на угол, равный π (рис. 12). Такая лента описывается, например, отрезком c с началом O и концом P при вращении этого отрезка вокруг непересекающей его оси; при этом вращение должно происходить таким образом, чтобы отрезок оставался постоянно в одной плоскости с осью

вращения и за время полного оборота этой плоскости поворачивался бы в ней на угол π вокруг своей середины M.

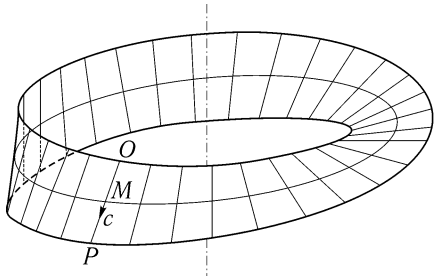


Рис. 12

Разрезав лист Мебиуса вдоль отрезка c, мы получим прямоугольник с границей

$$cr'cr''^{-1}$$

и с двумя различными (неэквивалентными) вершинами O и P (рис. 13). Две свободные стороны r' и r'' вместе образуют границу листа Мебиуса — непрерывную замкнутую линию, являющуюся топологической окружностью, т. е. кривой, гомеоморфной окружности. Две другие стороны c' и c'' примыкают друг к другу. Однако они входят теперь в границу четырехугольника не с различными показателями, как было в случае ранее рассмотренных фундаментальных многоугольников, а с одинаковыми. Поэтому говорят, что они поставлены в соответствие второго рода друг с другом, в противоположность имевшему место выше соответствию первого рода.

Граница ручки, как и листа Мебиуса, состоит из одной топологической окружности. Обе поверхности отличаются тем, что ручка в евклидовом пространстве является *двусторонней* поверхностью, а лист Мебиуса — *односторонней*. Под этим понимается следующее: если бы муха передвигалась по листу Мебиуса, не переползая его границы, — например, вдоль средней линии листа, — то в некоторый момент она очутилась бы вновь в исходной точке, но в положении антипода к своему начальному положению. Таким образом, лист Мебиуса, в противоположность ручке, не имеет двух разделенных границей сторон, одну из которых можно выкрасить, например, в черный цвет, а другую — в белый, так что различные цвета примыкают друг к другу лишь вдоль границы. Лист Мебиуса имеет одну единственную сторону.

На это можно было бы справедливо возразить, что односторонность не определена нами как внутреннее свойство поверхности и поэтому нет никакого основания утверждать невозможность топологиче-

ского отображения ленты, закрученной на угол π, на незакрученную. Заставим, однако, передвигаться по поверхности вместо мухи маленькую снабженную стрелкой окружность с тремя отмеченными точками 1 2 3. Поверхность при этом нужно представлять себе как не имеющую толщины. Тогда при обходе вокруг листа Мебиуса кружок возвращается в исходное положение перевернутым, так что точки 1 2 3 совпадают теперь с точками 3 2 1 (рис. 13). Поверхность, обладающая таким свойством, называется *неориентируемой*. В противном случае поверхность называется *ориентируемой*, так как тогда заданную при помощи маленькой окружности со стрелкой ориентацию окрестности какой-нибудь точки можно однозначно перенести на окрестность любой другой точки поверхности. Ориентируемость является внутренним свойством поверхности. О двусторонности, напротив, можно говорить лишь в том случае, если поверхность расположена в трехмерном пространстве. Двусторонность зависит от того, каким образом поверхность расположена и потому ее не нужно смешивать с ориентируемостью.

Действительно, как мы позже покажем, ориентируемую поверхность можно таким образом поместить в некоторое неевклидово трехмерное пространство, что она будет в ней односторонней (§ 76). Как из ручки можно сделать замкнутую поверхность тора, заклеив отверстие ручки кругом или, другими словами, склеив ручку с продырявленной сферой вдоль их границ, так из листа Мебиуса можно получить замкнутую поверхность, склеив его границу с границей круга. Эту поверхность мы условно будем называть «замкнутым листом Мебиуса». Произвести такое склеивание без самопересечений поверхности в трехмерном пространстве невозможно (§ 64). Однако можно показать, что в четырехмерном пространстве оно уже осуществимо[3]. Впрочем для *внутренних* топологических свойств этой замкнутой поверхности возможность вложения ее в то или иное пространство совершенно несущественно. Мы можем полностью изучить эти свойства, топологически отобразив границу круга на границу (обычного) листа Мебиуса и рассматривая соответствующие точки как не отличающиеся друг от друга. Вблизи каждой из этих точек замкнутый лист Мебиуса имеет такое же строение, как обыкновенный кусок плоскости. Вопрос о том, помещается ли определенная таким образом поверхность *целиком* в *пространстве* или возможно ли в *пространстве* осуществить склеивание вдоль граничных окружностей, остается при этом в стороне.

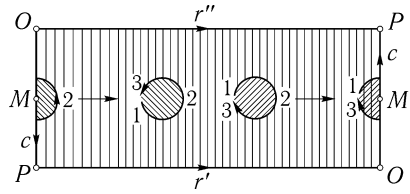


Рис. 13

Замкнутый лист Мебиуса является наряду со сферой одной из важнейших замкнутых поверхностей математики — так называемой: *проективной плоскостью.*

В проективной геометрии проективную плоскость определяют обыкновенно не как замкнутый лист Мебиуса, а при помощи дополнения евклидовой плоскости несобственной прямой. При таком понимании точкам проективной плоскости в какой-нибудь проективной системе координат взаимно однозначно соответствуют системы отношений, определяемые тремя действительными числами $x_1 : x_2 : x_3$, причем исключается лишь система $0 : 0 : 0$. Если рассматривать x_1, x_2, x_3 как однородные декартовы координаты*, так что $x = \frac{x_1}{x_3}$ и $y = \frac{x_2}{x_3}$ представляют обыкновенные декартовы координаты на евклидовой плоскости, то эта последняя плоскость присоединением несобственной (бесконечно-удаленной) прямой с уравнением $x_3 = 0$ превращается в замкнутую проективную плоскость.

Рассматривая x_1, x_2, x_3 как декартовы координаты трехмерного *пространства*, мы тем самым приведем точки проективной плоскости во взаимно однозначное соответствие с проходящими через начало координат прямыми пространства.

Докажем теперь топологическую эквивалентность многообразия этих прямых с многообразием точек, составляющих замкнутый лист Мебиуса. Опишем вокруг центра пучка прямых сферу радиуса 1. Каждая прямая пучка пересечет ее в двух диаметрально-противоположных точках. Отсюда следует, что точки проективной плоскости отображаются взаимно однозначно и непрерывно на пары диаметрально-противоположных точек единичной сферы, т. е. мы можем рассматривать проективную плоскость как совокупность всех пар диаметрально-противоположных точек сферы. Чтобы представить себе проективную плоскость, достаточно поэтому взять нижнюю половину сферы и считать ее точки точками проективной плоскости, имея при этом ввиду, что переходу через границу нижней полусферы — экватор — соответствует перескакивание в диаметрально-противоположную точку экватора. Если спроектировать теперь ортогонально нижнюю полусферу на касательную к ней в южном полюсе S плоскость E (рис. 14), то проективная плоскость отобразится на единичный круг, у которого отождествлены диаметрально-противоположные точки границ. Каждая пара диаметрально-противоположных точек границы соответствует при этом точке несобственной (бесконечно-удаленной) прямой, присоединение которой к евклидовой плоскости превращает ее в замкнутую поверхность — проективную плоскость.

Из рассмотренного отображения следует, *во-первых*, эквивалентность проективной плоскости с замкнутым листом Мебиуса. Вырежем

* *G. Kowalewski*, Analytische Geometrie (Leipzig, 1923) § 14, стр. 32. Основные факты проективной геометрии в соответствующей нашему изложению форме можно найти, например, в книге Клейна «Неевклидова геометрия» (ОНТИ, 1935 г.) гл. 1; прекрасное изложение основ проективной геометрии (сразу в n измерениях) в аналитической форме можно найти в книге *Schreier – Sperner*, Einführung in die analytische Geometrie und Algebra, 2 том, Projektve Geometrie.

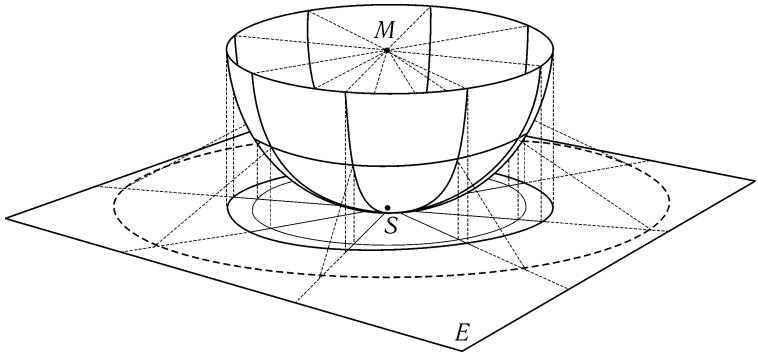


Рис. 14

из круга полоску, ограниченную двумя параллельными равноотстоящими от центра отрезками r' и r'' (рис. 15) и двумя дугами граничной окружности; отождествляя диаметрально-противоположные точки этих дуг, мы получим лист Мебиуса. Два остающихся сегмента круга, соединенные краями b, образуют замыкающий лист Мебиуса круг с границей $r'r''$ (рис. 16).

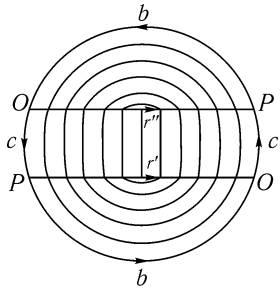


Рис. 15

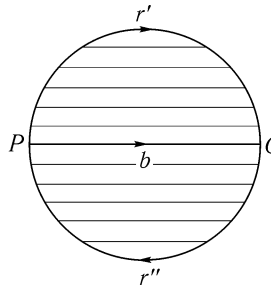


Рис. 16

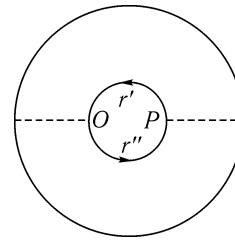


Рис. 17

Как проективную плоскость можно представлять замкнутым листом Мебиуса, так и, обратно, обычный лист Мебиуса можно рассматривать как проективную плоскость, в которой вырезано отверстие. Отсюда получается новое представление листа Мебиуса*. Так как с точки зрения топологии безразлично, где именно мы вырежем в проективной плоскости круглое отверстие, то можно вырезать его в середине кру-

*Теперь, после того как установлено топологическое тождество замкнутого листа Мебиуса с проективной плоскостью, мы больше не будем употреблять термин «замкнутый лист Мебиуса».

га, изображающего проективную плоскость после отождествления каждой пары его диаметрально-противоположных граничных точек; мы получим таким образом данное на рис. 17 представление листа Мебиуса. Диаметрально-противоположные точки внешнего граничного круга нужно отождествить. Внутренний круг образует границу листа Мебиуса. Связь с обычной формой листа Мебиуса (рис. 13) легко устанавливается, если мы разрежем нашу модель на две половины вдоль пунктирных линий и соединим обе половины вдоль внешних полуокружностей.

Во-вторых, отображение на круг дает нам *фундаментальный многоугольник проективной плоскости*. Нужно только рассматривать как многоугольник, а именно как двуугольник, единичный круг, ограниченный двумя сторонами a и a. Отождествление диаметрально-противоположных точек границы выражается формулой

$$aa.$$

При этом начало стороны a совпадает с ее концом в точке O проективной плоскости (рис. 18), а сторона a является образом проективной прямой, разрезанием вдоль которой проективная плоскость превращается в фундаментальный многоугольник.

Таким образом, проективная плоскость включается в ряд замкнутых поверхностей, которые можно представить посредством фундаментальных многоугольников. Что проективная плоскость менее известна в качестве замкнутой поверхности евклидова пространства, чем, например, тор, объясняется тем, что она, как и все замкнутые неориентируемые поверхности, не помещается без самопересечений в евклидовом пространстве (доказательство см. в § 64).

Из топологической эквивалентности листа Мебиуса, проективной плоскости с вырезанным в ней отверстием и кругового кольца с отождествленными диаметрально-противоположными точками одной из его граничных окружностей следует, что безразлично, заклеить ли круглое отверстие какой-нибудь замкнутой поверхности листом Мебиуса, продырявленной проективной плоскостью, или отождествить диаметральные граничные точки этого отверстия; во всех трех случаях мы получим одну и ту же новую поверхность. Мы будем называть заклеенное таким образом круглое отверстие *пленкой Мебиуса*[*].

Теперь уже нетрудно получить все недостающие нам замкнутые поверхности; для этого нужно только заклеивать пленками Мебиуса разное число круглых дырок, прорезанных в обыкновенной сферической поверхности. Мы поступим с ними так же, как выше поступали с ручками. Именно, вырежем в проективной плоскости (рис. 18) отверстие с границей l, проходящей через точку O. Разрезав границу этого

[*] Подробное описание имеющих здесь место наглядных соотношений можно найти в книге *Hilbert – Cohn – Vossen*, Anschauliche Geometrie, Berlin, 1932, на стр. 279. (Русский перевод: *Д. Гильберт* и *С. Кон-Фоссен*, Наглядная геометрия, ОНТИ, 1936, стр. 275 и далее).

отверстия в точке O, мы превратим фундаментальный многоугольник проективной плоскости в треугольник с границей a_1a_1l. Соединяя два таких треугольника с границами a_1a_1l и $a_2a_2l^{-1}$ вдоль «свободных» границ и опуская линию соединения l, мы получим четырехугольник с границей $a_1a_1a_2a_2$ (рис. 19), который является фундаментальным многоугольником сферы с двумя пленками Мебиуса.

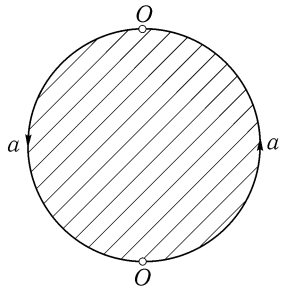


Рис. 18

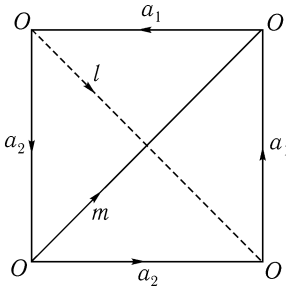


Рис. 19

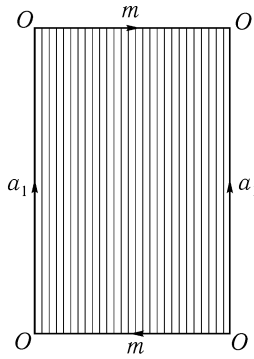


Рис. 20

Эта поверхность известна под названием «*бутылки Клейна*» или «*ориентируемого тора*». Если разрезать фундаментальный многоугольник вдоль диагонали m (отличной от линии соединения l) на два треугольника и вновь соединить их вдоль сторон a_2, получится новый четырехугольник (рис. 20) с границей $a_1ma_1^{-1}m$, представляющий, очевидно, ту же самую поверхность. Такой четырехугольник можно рассматривать, изогнув его так, чтобы края a_1 совпали, — как цилиндр (рис. 21). Однако в этом цилиндре отождествляются не точки граничных окружностей, переходящие друг в друга при сдвиге: параллельном образующей (это привело бы к обычному *ориентируемому* тору), а точки, переходящие друг в друга при повороте на 180° вокруг перпендикуляра x к оси цилиндра, восстановленного в ее середине.

Осуществлять такое отождествление в евклидовом пространстве окружностей можно лишь в том случае, если допускать самопересечение цилиндра (рис. 22). Если мы разрежем бутылку Клейна в продольном направлении, она распадется на два листа Мебиуса, один из которых показан на рис. 23.

Заклеивая k отверстий в сфере пленками Мебиуса, мы получим замкнутую поверхность, которую можно представить в виде фундаментального многоугольника с границей

$$a_1a_1a_2a_2\dots a_ka_k. \qquad (k)$$

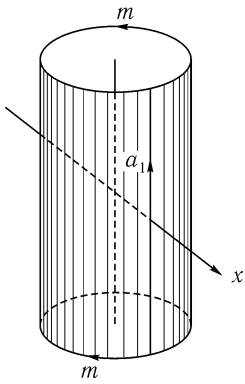


Рис. 21

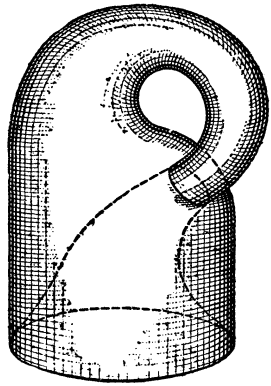


Рис. 22

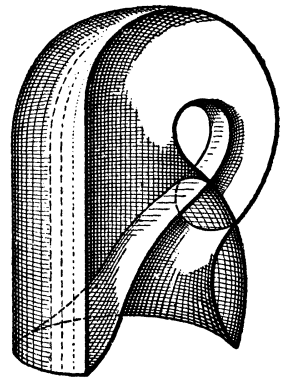


Рис. 23

Мы не знаем еще, исчерпывают ли получаемые таким образом поверхности весь класс замкнутых поверхностей. Точно так же мы не доказали, что среди них не существует топологически эквивалентных поверхностей. Первый вопрос решается без труда в положительном смысле; мы разберем его в § 38. Для доказательства же топологической неэквивалентности полученных поверхностей (§ 39) приходится пользоваться понятием групп Бетти и топологической инвариантностью этих групп.

Мы перечислили не все поверхности, а только замкнутые. Каждая из них характеризуется тем, что она не имеет границы и ее можно покрыть конечным числом многоугольников. Поверхности, для замощения которых требуется бесконечное множество многоугольников, называются бесконечными[4]. К ним принадлежат, например, евклидова плоскость или однополостный гиперболоид, рассматриваемые в евклидовом пространстве.

§ 3. Изотопия, гомотопия, гомология

Методы, при помощи которых мы будем доказывать негомеоморфность многообразий, например, замкнутых поверхностей, — основываются, грубо говоря, на классификации образов низших размерностей, расположенных в этих многообразиях. Поясним это на простейших примерах кривых и поверхностей.

Рассмотрим сначала кривые без двойных точек и с определенным направлением обхода, т. е. топологические образы ориентированной окружности. Такие замкнутые кривые можно классифицировать следующим образом: две кривые a и b считаются эквивалентными, если

их можно деформировать одну в другую *на поверхности*, на которой они расположены. При этом мы имеем сначала в виду так называемые *изотопные* деформации, т. е. такие, при которых все промежуточные положения, принимаемые кривой a при переходе в b, являются опять кривыми *без двойных точек*. Кривые a и b называются тогда изотопными. Например, два какие-нибудь одинаково ориентированные меридиана на торе изотопны. Точно так же изотопны плоские кривые I и II на рис. 24; кривые I и III, однако, уже не изотопны. Изотопные деформации, с трудом поддающиеся математической обработке, будут в дальнейшем играть второстепенную роль по сравнению с гомотопными.

При гомотопной деформации кривой a и b не требуется, чтобы все промежуточные положения представляли кривые без двойных точек; более того, a при переводе в b может иметь какие угодно самопересечения. Если кривые a и b (теперь уже нет необходимости налагать на них требование не иметь двойные точки) переводятся одна в другую гомотопной деформацией, то они называются гомотопными, точнее — *свободно гомотопными* (frei homotop). Изотопные кривые являются, естественно, гомотопными.

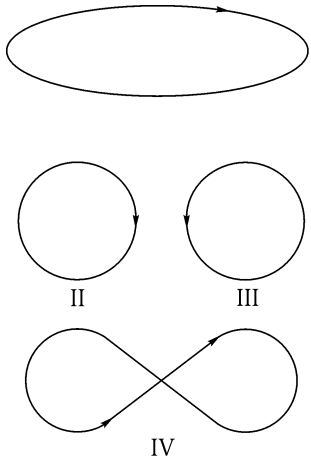


Рис. 24

Все четыре кривые, изображенные на рис. 24, на плоскости гомотопны друг другу, так как каждая из них даже гомотопна нулю, т. е. может быть стянута в точку. Негомотопны друг другу на торе, например, два противоположно ориентированные меридиана тора. Точно так же негомотопны на этой поверхности меридиан и параллель. Ни один из меридианов и параллелей не гомотопен нулю.

Гомотопность можно определить, не пользуясь понятием деформации, следующим образом. Две кривые a и b гомотопны на поверхности F друг другу в том случае, если существует непрерывное (не обязательно топологическое) отображение какого-нибудь кругового кольца (рис. 25) в F, переводящее две граничных окружности этого кольца $\overline{a}$ и $\overline{b}$ соответственно в a и b. Действительно, когда такое отображение существует, то переходу от $\overline{a}$ к $\overline{b}$ при помощи концентрических окружностей соответствует гомотопная деформация a в b, и обратно: если кривая a гомотопно переводится в b, то она при этом описывает «особое» кольцо, т. е. непрерывный образ кругового кольца.

Отсюда легко перейти к обобщению, приводящему к самой естественной и несомненно к самой важной классификации замкнутых кри-

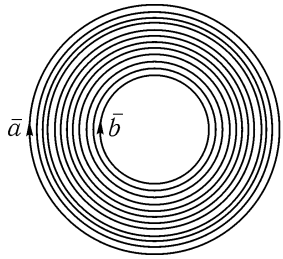


Рис. 25

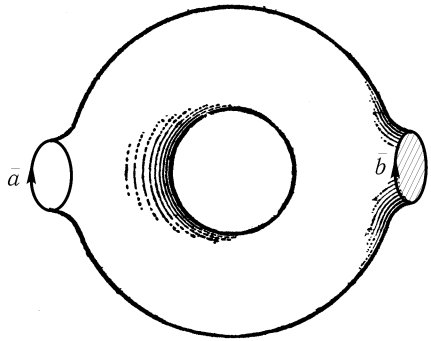


Рис. 26

вых, к классам гомологий. Нужно только кольцо, т. е. топологическую сферу с двумя отверстиями, заменить ориентируемой поверхностью любого рода h с двумя отверстиями (на рис. 26 показан случай $h = 1$) и отобразить ее непрерывно (не непременно взаимно однозначно) в F. Если это отображение можно осуществить так, что края отверстий $\overline{a}$ и $\overline{b}$ (ориентированные как на рисунке) переходят в две данные кривые a и b, то a и b называют гомологичными между собой. Так например, кривые a и b показанной на рис. 27 поверхности F (сфера с тремя ручками) гомологичны, так как они являются границей каждого из двух торов (с двумя отверстиями), на которые a и b разбивают F.

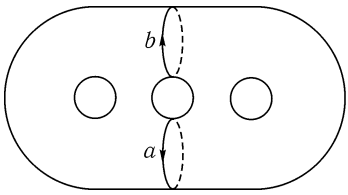


Рис. 27

Классы гомологий можно рассматривать, как мы позже покажем, как элементы некоторой абелевой группы — одномерной группы Бетти. Группа эта представляет топологический инвариант поверхности F. С помощью группы Бетти доказывается, что перечисленные в предыдущем параграфе поверхности являются топологически различными. На сфере, например, существует только один класс гомологических между собою кривых; на проективной плоскости два; группы же Бетти остальных замкнутых поверхностей бесконечны. Бегло намеченные здесь понятия нуждаются, естественно, в точном определении и доказательствах существования; это и составит в основном содержание следующих глав.

§ 4. Многообразия высших размерностей

В то время как вопрос о классификации топологически различных *поверхностей* решен полностью, для трех и большего числа измерений соответствующая проблема еще не решена. Уже трехмерные топологически различные *пространства* не поддаются такой классификации. Между тем вопрос о классификации образов высших размерностей интересен не только сам по себе; к нему приводятся некоторые проблемы из теории диференциальных уравнений и теории функций двух независимых комплексных переменных. Конечно, многомерные пространства не обладают такой наглядностью, как двумерные. В частности, все замкнутые ориентируемые двумерные многообразия, т. е. ориентируемые замкнутые поверхности, являются римановыми поверхностями алгебраических функций. Из трехмерных же замкнутых пространств в нетопологической математике играют роль прежде всего два пространства: проективное и сферическое.

Проективное пространство (действительное) получается, если мы дополняем евклидово пространство новыми точками так, чтобы во вновь получившемся множестве проективные преобразования были бы взаимна однозначны. Достигнуть этого можно, замкнув евклидово пространство несобственной плоскостью*. Проективное пространство, в противоположность евклидову, является замкнутым пространством, его можно покрыть конечным числом тетраэдров (§ 14).

Точно так же, замкнув евклидово пространство таким образом, чтобы конформные отображения стали в нем взаимно однозначны, мы получим *сферическое пространство*[**].

Одним из конформных отображений является отображение взаимными радиусами-векторами (инверсия), при котором центр единичной сферы (сфера инверсии) не имеет образа в евклидовом пространстве. Чтобы получить сферическое пространство, достаточно дополнить евклидово пространство только образом этой точки (вместо того чтобы дополнить точками целой несобственной плоскости). Такое замыкание пространства является аналогией замыкания комплексной плоскости, превращающего эту плоскость в сферу комплексного переменного. Мы еще вернемся к этому вопросу в § 14[5].

Элементами других многомерных многообразий, встречающихся в математике, часто являются не геометрические точки, а предметы иного рода. Мы уже познакомились выше с одним двумерным многообразием, состоящим не из точек, именно с множеством всех неориентированных прямых, проходящих через одну точку трехмерного евклидо-

*Точное определение проективного пространства можно найти в уже цитированной книге *Schreier – Sperner* или у *Александрова – Hopf'a*, стр. 264.

**F. *Klein*, Höhere Geometrie, § 50, Berlin, 1926 (готовится русский перевод); *W. Blaschke*, Differentialgeometrie I, § 40, Berlin, 1921 (имеется русский перевод, ОНТИ, 1935).

ва пространства. Это многообразие можно так отобразить на проективную плоскость, что «близкие» прямые будут переходить в «близкие» точки. Другие примеры получатся при рассмотрении всевозможных конфигураций (положений) какой-нибудь механической системы.

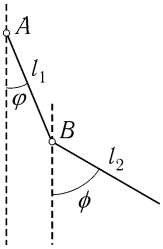


Рис. 28

Особенно простой случай дает, например, *плоский двойной маятник*. Он состоит из двух соединенных плоским шарниром B твердых стержней l_1 и l_2, один из которых подвешен свободным концом к неподвижной точке A (рис. 28). В остальном стержни, образующие двойной маятник, могут свободно перемещаться в плоскости. Всевозможные положения, принимаемые маятником, можно описать при помощи двух углов, образуемых каждым из стержней с вертикальным направлением. Каждому положению маятника ставятся в соответствие два значения параметров φ и ψ, определенных с точностью до числа, кратного 2π. Поэтому, если мы возьмем квадрат, лежащий на плоскости $\varphi\psi$ со стороной, равной 2π, и отождествим в нем противоположные стороны, то получим геометрическую модель для совокупности всех положений маятника. Но квадрат с отождествленными противоположными сторонами с топологической точки зрения есть тор. Таким образом, между положениями двойного маятника и точками тора устанавливается взаимно однозначное соответствие, при котором близким точкам тора соответствуют мало отличающиеся друг от друга положения маятника. *Периодическое* движение маятника, т. е. такое, при котором маятник возвращается в исходное положение, отображается тогда на замкнутую кривую, расположенную на торе[6].

Вместо плоских шарниров в точках A и B можно рассматривать сферические шарниры. Всевозможные положения получающегося таким образом *сферического двойного маятника* можно отобразить на совокупность пар точек двух сфер, так что мало отличающимся положениям маятника соответствуют близкие пары точек обеих сфер. Каждое положение определяется четырьмя параметрами, например, географической широтой и долготой на каждой сфере; поэтому «пространство конгруэнции» сферического двойного маятника является четырехмерным многообразием.

Другим примером четырехмерного многообразия является совокупность всех ориентированных прямых трехмерного проективного пространства, которую, как мы сейчас покажем, также можно отобразить на совокупность пар точек двух сфер и которая поэтому топологически совпадает с только что рассмотренным четырехмерным многообразием.

Представим себе наше действительное проективное пространство вложенным в комплексное проективное пространство, точками которого являются все системы отношений четырех комплексных чисел $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$, за исключением системы $0 : 0 : 0 : 0$. Мы утверждаем, что множество ориенти-

рованных действительных прямых можно отобразить взаимно однозначно и непрерывно на точки нулевой сферы

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$$

(все эти точки комплексы, т. е. имеют комплексные координаты). Каждая действительная прямая пересекает нулевую сферу в двух различных сопряженных комплексных точках P и $\overline{P}$, и обратно: каждая пара сопряженных комплексных точек нулевой сферы определяет соединяющую их действительную прямую g. Если P_1, P_2, P_3 три действительные точки на g, то ориентацией g определяется некоторый их циклический порядок, например $P_1P_2P_3$. Так как двойные отношения

$$(PP_1P_2P_3) = \lambda \quad \text{и} \quad (\overline{P}P_1P_2P_3) = \overline{\lambda}$$

представляют комплексные (и при этом не действительные) сопряженные числа, то одно из них, например λ, имеет положительную мнимую часть.

Это свойство двойного отношения λ остается неизменным при циклической перестановке точек P_1, P_2, P_3, так как

$$(PP_2P_3P_1) = \frac{1}{1-\lambda} \quad \text{и} \quad (PP_3P_1P_2) = \frac{\lambda - 1}{\lambda}.$$

Вместе с тем ориентированной прямой g однозначным образом соответствует точка P. Противоположно ориентированной прямой g соответствует тогда точка $\overline{P}$, так как

$$(PP_1P_3P_2) = \frac{1}{\lambda}$$

имеет отрицательную мнимую часть. Таким образом установлено взаимно однозначное соответствие между ориентированными прямыми и точками нулевой сферы. Как известно, существуют два семейства комплексных прямых, расположенных на нулевой сфере*. Пусть r какая-нибудь прямая «правого» и l «левого» семейства. Через каждую точку P нулевой сферы проходит в точности одна прямая левого [правого] семейства, пересекающая $r[l]$ в определенной точке $P_r[P_l]$. Каждой точке P сферы соответствует поэтому взаимно однозначно пара точек, состоящая из одной точки на r и одной на l. Наше утверждение, что ориентированные действительные прямые проективного пространства взаимно однозначно соответствуют совокупности пар точек двух сфер, будет доказано, если мы покажем, что совокупность всех точек $r[l]$, т. е. совокупность всех (комплексных и действительных) точек проективной прямой топологически эквивалентна действительной сфере. В этом можно убедиться, введя на проективной прямой систему проективных координат $\mu_1 : \mu_2$. Точка $\mu_1 : \mu_2$ пробегает тогда все возможные комплексные числа, включая ∞, т. е. все точки комплексной числовой сферы.

*При допущении точек с комплексными координатами доказательство этого факта ничем не отличается от обычного рассуждения, при помощи которого в аналитической геометрии доказывается существование двух семейств прямых на однополостном гиперболоиде.

Таким образом, подобно пространству конфигураций сферического маятника, многообразие всех действительны ориентированных прямых проективного пространства отображено на многообразие пар точек двух сфер, так что мало отличающимся в смысле положения и ориентации прямым соответствуют близкие пары точек обеих сфер.

Не только *положения* механических систем, но и *состояния движения* их приводят к многомерным многообразиям, называемым *фазовыми пространствами*[7]. Под состоянием движения материальной точки подразумевается при этом ее положение в пространстве вместе с ее скоростью, определенной по величине и направлению. Пусть, например, материальная точка вынуждена двигаться в поле силы тяжести по некоторой фиксированной сфере и пусть она обладает неизменным запасом энергии, составленным из кинетической и потенциальной энергии и настолько большим, что точка может достигнуть самой высокой точки сферы. Каждое состояние движения определяется тогда положением точки на сфере, — что дает два параметра, — и направлением скорости, — что дает еще один параметр. Величину скорости здесь не надо принимать во внимание, так как она полностью определяется заданным общим количеством энергии и положением точки на сфере.

Таким образом, между состояниями движения точки и направленными линейными элементами сферы устанавливается взаимно однозначное соответствие. Рассматриваемое фазовое пространство является трехмерным многообразием; как мы увидим в § 14 (задача 2), оно может быть отображено на трехмерное проективное пространство. При этом состояния движения точки соответствуют точкам (действительного) трехмерного проективного пространства так, что мало отличающиеся друг от друга состояния движения отображаются в соседние точки проективного пространства.

Уже рассматривая проективную плоскость как фигуру, склеенную из круга и листа Мебиуса, мы отбросили обычное представление о фигуре, как о множестве точек евклидова пространства, и воспользовались абстрактным определением поверхности.

Если вложение двумерных многообразий в пространство еще может быть оправдано соображениями наглядности, то при рассмотрениях многообразий высшего числа измерений, элементы которых не являются точками, мы уже вынуждены отказаться от такого вложения. Представление таких многообразий точечными множествами и помещение их в многомерное евклидово пространство было бы, вообще говоря, искусственным приемом, не приносящим большой пользы. Но, отбрасывая вложение в евклидово пространство, мы одновременно лишаемся возможности пользоваться данным выше определением топологического отображения и гомеоморфизма, так как непрерывность отображения двух фигур мы определили вначале как непрерывность отображающих функций, имеющих аргументами координаты евклидова пространства. Необходимо поэтому уяснить себе понятие непрерыв-

ности, не пользуясь функциями координат. Ведь когда мы доказывали, что пространство конфигураций двойного маятника эквивалентно тору, мы не определили точно, что это означает. Поэтому нам нужно теперь установить, в чем выражается непрерывность, если мы отказываемся пользоваться функциями координат.

Что же общего имеют пространства конфигураций и фазовые пространства с точечными множествами евклидова пространства и что дает нам возможность говорить о их непрерывных отображениях? В этих пространствах известно, какие элементы конфигурации (или состояния движения) являются близкими к произвольному данному элементу. Для каждого элемента существуют подмножества, — которые могут быть выбраны, конечно, многими способами, — образующие *окрестности* этого элемента (этой точки). Взаимно однозначное отображение является взаимно непрерывным, т. е. топологическим, если оно переводит окрестности в окрестности. Между точками сферы и точками тора можно установить взаимно однозначное соответствие, так как эти множества имеют одинаковые мощности. Однако обе поверхности не гомеоморфны, так как нельзя установить такого взаимно однозначного соответствия, при котором окрестность переходит в окрестность. Таким образом, выделение окрестностей является минимальным требованием, налагаемым на множество математических предметов, чтобы это множество стало объектом топологического исследования, обладало бы известными пространственными свойствами. В евклидовом пространстве, например, в качестве окрестностей данной точки можно выделить любое множество, содержащее целиком некоторый описанный вокруг этой точки шар. В зависимости от того, как велик выбранный шар, мы получим большую или меньшую окрестность. В сферическом пространстве окрестность имеющейся здесь несобственной точки должна содержать все точки, находящиеся вне некоторого достаточно большого шара. Окрестность проективной прямой должна содержать все прямые, лежащие внутри достаточно «тонкого» однополостного гиперболоида, для которого данная прямая является осью и т. д.

Сведя понятие топологического отображения к понятию окрестности, мы освобождаемся от необходимости рассматривать фигуры как подмножества объемлющего пространства; напротив, тогда о самом этом пространстве можно говорить, как об объекте, равноправном с другими фигурами, обладающими пространственными свойствами и изучаемыми топологией — вроде замкнутых поверхностей, например. Если мы поэтому определим пространство в геометрии как непрерывное точечное множество, — а мы хотим исходить именно из такого определения, то оказывается, что сущность пространства самым глубоким образом связана с понятием окрестности. Мы познакомимся дальше с важными понятиями и предложениями, которые не имеют отношения ни к расстоянию, ни к прямолинейности, ни даже к размерности пространства. Однако, если речь идет о множестве точек, рассматри-

ваемом как пространство, то всегда должно быть установлено, какие точки лежат вблизи от любой заданной. Точечное множество, для которого не установлено ничего, кроме окрестностей точек, мы будем называть *окрестностным пространством* (§ 5).

Понятие окрестности служит прежде всего для того, чтобы дать математическое обоснование наиболее общему понятию о пространстве, — другими словами, чтобы конструировать пространство, освободив его от некоторых интуитивных представлений и сведя его построение к основным понятиям современной теории множеств. Понятие окрестностного пространства имеет в математике чрезвычайно широкую область применения: всякий раз, когда в множестве математических объектов могут быть выделены окрестности, удовлетворяющие известным аксиомам, мы имеем право говорить об этом множестве как о пространстве в наиболее общем смысле слова; тогда понятия и предложения, установленные для произвольного окрестностного пространства, переносятся в область рассматриваемых объектов.

Если захотим теперь, по образцу синтетической геометрии, точно обосновать намеченные нами при этих предварительных рассмотрениях понятия и предложения, подчинив их теории окрестностных пространств, то мы должны подойти к ним с другой точки зрения и прежде всего отказаться от всяких непосредственно наглядных представлений. В ближайших главах связь между общими исследованиями и геометрическими проблемами, рассмотренными в этой первой главе, будет раскрываться лишь случайно, на примерах. Лишь начиная с VI главы — с топологии поверхностей — геометрические проблемы в узком смысле слова выступят опять на первый план. Однако материал ближайших глав не исчерпывается целиком рассмотрениями исключительно общих окрестностных пространств. Напротив того, уже в ближайшей главе мы обратимся к изучению окрестностных пространств весьма специального типа — к уже упомянутым полиэдрам. Между очень широким понятием окрестностного пространства, введенным нами в круг наших рассмотрений, и понятием полиэдра находят место понятия теоретико-множественной топологии. Теоретико-множественная топология изучает свойства топологических пространств[*] и их подмножеств в том числе и теорию размерности[**] В этой книге мы не будем заниматься теоретико-множественной топологией[***].

[*] См. F. Hausdorf [I], [2] и Александров [16].

[**] См. Tietze – Vietoris [8], V и Nöbeling [1].

[***] По всем вопросам, затронутым в этом параграфе, см. *Александров – Hopf*, Topologie I, гл. I, § 1 и след.

Глава II
Симплициальный комплекс

§ 5. Окрестностные пространства

Конечное или бесконечное непустое множество математических предметов, — точек множества, — называется окрестностным пространством, если для каждой точки определены некоторые подмножества, называемые ее окрестностями. Эти окрестности должны удовлетворять следующим двум аксиомам*.

Аксиома A. *Для каждой точки P окрестностного пространства существует по крайней мере одна окрестность; каждая окрестность точки P содержит P.*

Окрестность точки P окрестностного пространства $\boldsymbol{M}$ мы будем обозначать через

$$\boldsymbol{U}(P \mid \boldsymbol{M}).$$

Аксиома B. *Вместе с окрестностью $\boldsymbol{U}(P \mid \boldsymbol{M})$ всякое подмножество пространства $\boldsymbol{M}$, содержащее эту окрестность, является окрестностью точки P.*

---

*Избранные здесь аксиомы окрестностного пространства и неудачны и неупотребительны. Ставить понятие окрестности в основу понятия топологического пространства вообще мало целесообразно (так как одно и то же топологическое пространство может быть определено различными системами окрестностей). Если желать возможно меньше удаляться от намерений авторов и в то же время сохранить ту общую перспективу в теории топологических пространств, которая может считаться в настоящее время окончательно установленной, то наиболее быстро ведет к цели следующий путь.

Рассмотрим множество E элементов, называемых точками. Предположим, что в этом множестве определены некоторые подмножества, называемые открытыми множествами, и при том так, что выполнены следующие условия:

I. Все множество E и пустое множество являются открытыми.

II. Сумма любого множества открытых множеств и пересечение конечного числа открытых множеств есть открытое множество.

Множество E с определенными в нем открытыми подмножествами называется топологическим пространством. Любое подмножество A множества E называется окрестностью точки P, если имеется открытое множество, содержащее P и содержащееся в A.

Было бы правильным заменить везде понятие окрестностного пространства, как оно вводится автором, формулированным сейчас понятием топологического пространства. Так как, однако, для целен этой книги выбор между двумя этими понятиями по существу не имеет значения, то не будет беды, если в ней остается неудачное само по себе понятие окрестностного пространства. По всем этим вопросам см. *Александров – Hopf*, Topologie, гл. I и II. (*Прим. ред.*)

Примерами окрестностных пространств могут служить: 1. Множество $\boldsymbol{M}$ всех целых чисел, в которых окрестность каждого числа определена как любое подмножество $\boldsymbol{M}$, содержащее это число. 2. То же множество, если окрестность числа определена в нем как любое подмножество $\boldsymbol{M}$, содержащее само число, ему предшествующее число и непосредственно за ним следующее число. 3. То же множество, если за (единственную) окрестность каждой точки принято все множество.

Эти примеры приведены лишь с целью показать, насколько общим является понятие окрестностного пространства; сами по себе они не имеют никакого значения в дальнейших исследованиях[8]. Напротив, весьма важным является пример n-мерного евклидова пространства $\boldsymbol{R}^n$. Его точками служат совокупности действительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $\boldsymbol{R}^n$ состоит из всех таких совокупностей[9]. *Под окрестностью точки* $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ *мы понимаем всякое подмножество* $\boldsymbol{R}^n$, *содержащее все внутренние точки произвольного куба, центром которого является* $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$, т. е. все точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющие неравенствам

$$|x_i - \overline{x}_i| < \eta \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Другими словами, подмножество представляет окрестность точки $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ в том и только в том случае, если существует η такое, что η-куб вокруг $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ принадлежит рассмотренному подмножеству. В частности, само $\boldsymbol{R}^n$ является окрестностью для каждой из его точек. Определив таким образом окрестности, мы превращаем наше евклидово пространство в окрестностное.

Расстояние между двумя точками $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ определяется как неотрицательное число

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_i)^2}. \tag{2}$$

Пользуясь понятием расстояния, можно дать следующее определение окрестности точки, эквивалентное уже рассмотренному: окрестность точки $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ есть всякое подмножество $\boldsymbol{R}^n$, содержащее все точки произвольной шаровой окрестности нашей точки. При этом шаровой окрестностью называется совокупность точек, расстояние которых до $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ меньше произвольно выбранного положительного ε, т. е. совокупность точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющих неравенству

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_i)^2 < \varepsilon^2. \tag{3}$$

В частности, за окрестность точки может быть принята сама шаровая окрестность. Такую окрестность мы будем иногда называть

(шаровой) ε-окрестностью точки $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$; в зависимости от величины ε мы получаем большую или меньшую ε-окрестность. В обыденной речи под окрестностью точки подразумевается совокупность близких к ней точек. Для нас же всякое множество является окрестностью, если только оно содержит все точки какой-нибудь достаточно малой шаровой окрестности.

Чрезвычайно важным классом окрестностных пространств, содержащим как частный случай все евклидовы пространства, являются *метрические пространства*. Под метрическим пространством понимают некоторое множество $\boldsymbol{R}$, для любых двух элементов которого A, B определено неотрицательное число $\rho(A, B)$, расстояние между точками A и B, так что выполнены следующие условия («аксиомы метрического пространства»):

I (Аксиома тождества.) $\rho(A, B) = 0$ тогда и только тогда, когда точки A и B совпадают.

II (Аксиома симметрии.) $\rho(A, B) = \rho(B, A)$.

III (Аксиома треугольника.) Для любых трех точек A, B, C имеет место соотношение

$$\rho(A, B) + \rho(B, C) \geqslant \rho(A, C).$$

Если A есть точка метрического пространства, а ε — положительное число, то множество всех точек X таких, что $\rho(A, X) < \varepsilon$, называется шаровой окрестностью точки A с радиусом ε (или просто ε-окрестностью) и обозначается $\boldsymbol{U}(A, \varepsilon)$.

Всякое множество в метрическом пространстве $\boldsymbol{R}$, содержащее некоторую шаровую окрестность точки A, будем называть окрестностью этой точки.

Пусть даны два множества $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. Под их *суммой* $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ понимается множество всех точек, принадлежащих либо $\boldsymbol{A}$, либо $\boldsymbol{B}$, либо им обоим, а под *пересечением* — множество точек, принадлежащих одновременно и $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. Если пересечение двух множеств пусто, то это значит, что множества не имеют общих точек. Такие множества называют иногда *непересекающимися*.

Пусть теперь $\boldsymbol{N}$ есть непустое подмножество окрестностного пространства $\boldsymbol{M}$. Мы условимся раз навсегда считать окрестностью $\boldsymbol{U}(Q \mid \boldsymbol{N})$ точки Q, принадлежащей $\boldsymbol{N}$, пересечение какой-либо окрестности $\boldsymbol{U}(Q \mid \boldsymbol{M})$ с подмножеством $\boldsymbol{N}$. Тем самым мы делаем само $\boldsymbol{N}$ окрестностным пространством. В самом деле, аксиома A, очевидно, выполнена. Аксиома B также выполнена, так как всякое подмножество $\boldsymbol{V}$ множества $\boldsymbol{N}$, содержащее $\boldsymbol{U}(Q \mid \boldsymbol{N})$, является пересечением окрестности $\boldsymbol{U}(Q \mid \boldsymbol{M}) + \boldsymbol{V}$ точки Q в $\boldsymbol{M}$ с множеством $\boldsymbol{N}$, следовательно, является окрестностью точки Q в $\boldsymbol{N}$. Таким образом *всякое непустое подмножество окрестностного пространства можно рассматривать как окрестностное пространство.*

В частности, *благодаря сделанному условию, все подмножества евклидова пространства* (окрестности в котором определены выше), *в том числе все кривые и поверхности трехмерного пространства, становятся окрестностными пространствами с полностью определенными в них окрестностями.*

Пусть, например, $\boldsymbol{M}$ есть прямая $\boldsymbol{R}^1$, $\boldsymbol{N}$ — множество точек $0 \leqslant x < 1$. Какое-нибудь подмножество $\boldsymbol{U}$ множества $\boldsymbol{N}$ является окрестностью $\boldsymbol{U}(O \mid \boldsymbol{N})$ точки $x = 0$, если существует ε такое, что все точки $0 \leqslant x < \varepsilon$ принадлежат подмножеству $\boldsymbol{U}$.

Пусть теперь $\boldsymbol{N}$ любое, быть может и пустое, подмножество окрестностного пространства $\boldsymbol{M}$ и P — точка $\boldsymbol{M}$. P называется

точкой накопления подмножества $\boldsymbol{N}$, если каждая окрестность $\boldsymbol{U}(P \mid \boldsymbol{M})$ точки P содержит бесчисленное множество точек $\boldsymbol{N}$;

граничной точкой $\boldsymbol{N}$, если в каждой окрестности $\boldsymbol{U}(P \mid \boldsymbol{M})$ лежат как точки $\boldsymbol{N}$, так и точки, не принадлежащие $\boldsymbol{N}$;

внутренней точкой $\boldsymbol{N}$, если существует состоящая только из точек $\boldsymbol{N}$ окрестность $\boldsymbol{U}(P \mid \boldsymbol{M})$. В этом случае P непременно принадлежит $\boldsymbol{N}$.

Совокупность всех граничных точек образует *границу* $\boldsymbol{N}$. Каждая точка $\boldsymbol{N}$ является либо граничной, либо внутренней точкой.

В рассмотренном выше примере подмножества $\boldsymbol{N}$, $0 \leqslant x < 1$, на прямой $\boldsymbol{M}$ все точки $0 \leqslant x \leqslant 1$ суть точки накопления $\boldsymbol{N}$, $x = 0$ и $x = -1$ — граничные точки и точки $0 < x < 1$ — внутренние точки $\boldsymbol{N}$. Пустое множество не имеет ни точек накопления, ни граничных, ни внутренних точек. Если $\boldsymbol{N}$ совпадает с $\boldsymbol{M}$, то все точки $\boldsymbol{N}$ являются внутренними точками.

Подмножество $\boldsymbol{N}$ пространства $\boldsymbol{M}$ называется *открытым* относительно $\boldsymbol{M}$, если *никакая* граничная точка $\boldsymbol{N}$ не принадлежит $\boldsymbol{N}$ и *замкнутым*, если *все* граничные точки принадлежат $\boldsymbol{N}$. Всякое окрестностное пространство $\boldsymbol{M}$ является (если его рассматривать как свое собственное подмножество) одновременно открытым и замкнутым, так как все его точки являются внутренними. Вообще же надо помнить, что свойство какого-нибудь множества $\boldsymbol{N}$ быть замкнутым или открытым есть свойство по отношению к объемлющему пространству $\boldsymbol{M}$ (могущему и совпадать с $\boldsymbol{N}$). Подмножество $\boldsymbol{N}$, например, может не быть открытым относительно $\boldsymbol{M}$, но может быть открытым относительно какого-нибудь подмножества $\boldsymbol{M}'$ множества $\boldsymbol{M}$, содержащего множество $\boldsymbol{N}$ (например, $\boldsymbol{N}$ всегда открыто относительно самого себя).

Отрезок $o \leqslant x \leqslant 1$ есть замкнутое множество прямой, $0 < x < 1$ — открытое множество. Множество же $0 \leqslant x < 1$ не является ни замкнутым, ни открытым. Пустое подмножество, так же как подмножество $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{M}$, является одновременно открытым и замкнутым.

Очевидно, что сумма любого числа открытых подмножеств есть опять открытое подмножество, пересечение любого числа замкнутых подмножеств замкнуто.

Открытое подмножество характеризуется также тем, что оно содержит целиком некоторую окрестность каждой своей точки. Замкнутое подмножество можно характеризовать поэтому как множество, дополнительное к некоторому открытому*.

Под *замыканием* подмножества N пространства M понимают пересечение всех содержащих N замкнутых подмножеств M. Замыкание N есть наименьшее замкнутое подмножество пространства M, содержащее N.

Обратим внимание на различие между понятиями граничной точки подмножества и предельной точки последовательности. Бесконечная последовательность (в которой одна и та же точка может встречаться много раз) сходится к некоторой точке, называемой предельной точкой последовательности, если в любой заданной окрестности этой точки лежат почти все точки последовательности (т. е. все за исключением конечного числа). При положенном нами в основу общем понятии окрестностного пространства может случиться, что сходящаяся последовательность сходится к различным точкам**, чего не может произойти в евклидовых пространствах.

§ 6. Отображения

Если каждой точке P окрестностного пространства A ставится в соответствие в точности одна точка P' пространства B, то говорят, что этим задается однозначное *отображение* T пространства A в пространство B. Точка $P' = T(P)$ называется *образом* точки P; множество A', состоящее из образов всех точек A, называется *образом множества* A.

A' есть подмножество B, которое может совпадать со всем B. Если образы каждых двух различных точек A различны, то отображение A в B называется *взаимно однозначным*. В этом случае существует *обратное отображение* A' на A, ставящее в соответствие каждой точке P' ее прообраз P. Обратное отображение обозначается через T^{-1}. Обычно говорят об отображении множества A в множество B, если все образы точек A образуют подмножество B (быть может совпадающее с B). Если же каждая точка B наверное является образом какой-нибудь точки A, т. е. если $A' = B$, то говорят об отображении пространства A **на** пространство B.

Пусть отображение T переводит A в подмножество пространства B, а B в свою очередь посредством отображения U переводится

** *Дополнительным* к подмножеству N множества M называется множество точек M, не принадлежащих N. Дополнительное множество обозначают через $M-N$.*

*** Если, например, под единственной окрестностью каждой точки понимать все множество, то всякая бесконечная последовательность сходится к любой точке множества.*

в подмножество окрестностного пространства $\boldsymbol{C}$. При этом получается отображение $\boldsymbol{A}$ в $\boldsymbol{C}$. Это отображение называется *произведением отображений* T и U и обозначается через UT [сомножители пишутся именно в таком порядке, так как образом точки P является $U\big(T(P)\big) = UT(P)$].

Отображение $\boldsymbol{A}$ в $\boldsymbol{B}$ называется *непрерывным в точке* P *пространства* $\boldsymbol{A}$, если для каждой окрестности $\boldsymbol{U}(P' \mid \boldsymbol{B})$ образа P' существует окрестность $\boldsymbol{U}(P \mid \boldsymbol{A})$, образ которой целиком принадлежит $\boldsymbol{U}(P' \mid \boldsymbol{B})$. Отображение называется *непрерывным*, если оно непрерывно в каждой точке.

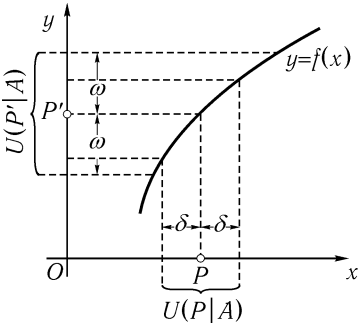


Рис. 29

Это определение является обобщением классического определения непрерывности. В самом деле, функция $y = f(x)$, осуществляющая отображение оси x в другую прямую, ось y, называется непрерывной в точке $P = \overline{x}$, если для каждого наперед заданного $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x в интервале $|x - \overline{x}| < \delta$ имеет место соотношение $\big|f(x) - f(\overline{x})\big| < \varepsilon$. Но это и значит, что для каждой наперед заданной ε-окрестности $\boldsymbol{U}(P' \mid \boldsymbol{B})$ образа $y = f(x)$ должна существовать δ-окрестность $\boldsymbol{U}(P \mid \boldsymbol{A})$ прообраза $\overline{x}$, отображающаяся целиком в ε-окрестность (рис. 29).

В более общем случае каждое отображение T подмножества $\boldsymbol{A}$ m-мерного евклидова пространства $\boldsymbol{R}^m$ с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_m$ на подмножество $\boldsymbol{A}'$ пространства $\boldsymbol{R}^n$ с координатами $y_1, y_2, \ldots, y_n$ можно осуществить при помощи n функций

$$y_k = f_k(x_1, x_2, \ldots, x_m) \ (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Теорема I. *Отображение T непрерывно в том и только в том случае, когда непрерывны отображающие функции* (1).

Как известно, функция нескольких переменных $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ называется непрерывной в точке $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_m$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех точек области определения функция f, координаты которых $x_1, x_2, \ldots, x_m$ удовлетворяют неравенствам

$$|x_i - \overline{x}_i| < \delta,$$

имеет место неравенство

$$\big|f(x_1, x_2, \ldots, x_m) - f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_m)\big| < \varepsilon.$$

Доказательство. Назовем δ-кубической окрестностью $\boldsymbol{W}_\delta(P \mid \boldsymbol{A})$ точки P множества $\boldsymbol{A}$ множество всех точек $\boldsymbol{A}$, лежащих внутри δ-куба вокруг P. В каждой окрестности $\boldsymbol{U}(P \mid \boldsymbol{A})$ находится некоторая δ-кубическая окрестность (если только δ достаточно мало), так как $\boldsymbol{U}(P \mid \boldsymbol{A})$ есть пересечение $\boldsymbol{A}$ с некоторой окрестностью $\boldsymbol{U}(P \mid \boldsymbol{R}^m)$, а эта последняя содержит δ-куб.

a) Пусть отображение T непрерывно. Пусть $\boldsymbol{W}_\varepsilon(P' \mid \boldsymbol{A}')$ — заданная ε-кубическая окрестность образа P' точки P. В силу непрерывности T существует окрестность $\boldsymbol{U}(P \mid \boldsymbol{A})$, образ которой лежит в $\boldsymbol{W}_\varepsilon(P' \mid \boldsymbol{A}')$. В $\boldsymbol{U}(P \mid \boldsymbol{A})$ лежит некоторая δ-кубическая окрестность, отображающаяся таким образом в заданную ε-кубическую окрестность; а это и значит, что отображающие функции (1) непрерывны.

b) Предположим теперь, наоборот, что непрерывны отображающие функции. Любая окрестность $\boldsymbol{U}(P' \mid \boldsymbol{A}')$ содержит ε-кубическую окрестность $\boldsymbol{W}_\varepsilon(P' \mid \boldsymbol{A}')$. В силу непрерывности отображающих функций существует δ-кубическая окрестность $\boldsymbol{W}_\delta(P \mid \boldsymbol{A})$, образ которой целиком принадлежит $\boldsymbol{W}_\varepsilon(P' \mid \boldsymbol{A}')$, следовательно, и подавно принадлежит $\boldsymbol{U}(P' \mid \boldsymbol{A}')$. Таким образом T непрерывно.

Теорема II. *Если отображение окрестностного пространства $\boldsymbol{A}$ в окрестностное пространство $\boldsymbol{B}$ непрерывно, то непрерывно также отображение $\boldsymbol{A}$ на подмножество $\boldsymbol{A}'$, являющееся образом $\boldsymbol{A}$ в пространстве $\boldsymbol{B}$. Обратно, из непрерывности отображения $\boldsymbol{A}$ на $\boldsymbol{A}'$ следует непрерывность отображения $\boldsymbol{A}$ в $\boldsymbol{B}$.*

Доказательство. Любая окрестность $\boldsymbol{U}(P' \mid \boldsymbol{A}')$ есть пересечение окрестности $\boldsymbol{U}(P' \mid \boldsymbol{B})$ с $\boldsymbol{A}'$. Если $\boldsymbol{A}$ отображено в $\boldsymbol{B}$ непрерывно, то существует окрестность $\boldsymbol{U}(P \mid \boldsymbol{A})$, образ которой целиком лежит в $\boldsymbol{U}(P' \mid \boldsymbol{B})$, а следовательно, и в пересечении $\boldsymbol{U}(P' \mid \boldsymbol{B})$ с $\boldsymbol{A}'$, т. е. целиком лежит в $\boldsymbol{U}(P' \mid \boldsymbol{A}')$. Так как $\boldsymbol{U}(P' \mid \boldsymbol{A}')$ взято произвольно, то это значит, что отображение $\boldsymbol{A}$ на $\boldsymbol{A}'$ непрерывно. Пусть теперь, обратно, отображение $\boldsymbol{A}$ на $\boldsymbol{A}'$ непрерывно и пусть дана произвольная окрестность $\boldsymbol{U}(P' \mid \boldsymbol{B})$. Образуем окрестность $\boldsymbol{U}(P' \mid \boldsymbol{A}')$, равную пересечению $\boldsymbol{U}(P' \mid \boldsymbol{B})$ с $\boldsymbol{A}'$. В силу непрерывности отображения $\boldsymbol{A}$ на $\boldsymbol{A}'$ существует окрестность $\boldsymbol{U}(P \mid \boldsymbol{A})$, образ которой целиком принадлежит $\boldsymbol{U}(P' \mid \boldsymbol{A}')$, следовательно, тем более $\boldsymbol{U}(P' \mid \boldsymbol{B})$. Из теоремы II следует, что для определения непрерывности безразлично, берутся ли окрестности $\boldsymbol{P}'$ в $\boldsymbol{A}'$ или в $\boldsymbol{B}$.

Теорема III. *Если $\boldsymbol{A}$ отображено на $\boldsymbol{A}'$ непрерывно и при этом подмножество $\boldsymbol{N}$, принадлежащее $\boldsymbol{A}$, переходит в подмножество $\boldsymbol{N}'$, принадлежащее $\boldsymbol{A}'$, то отображение $\boldsymbol{N}$ на $\boldsymbol{N}'$ тоже непрерывно.*

Доказательство. В силу непрерывности отображения $\boldsymbol{A}$ на $\boldsymbol{A}'$ для каждой окрестности $\boldsymbol{U}(P' \mid \boldsymbol{A}')$ точки P' (P' — образ точки P, принадлежащей $\boldsymbol{N}$) существует окрестность $\boldsymbol{U}(P \mid \boldsymbol{A})$, отображающаяся

в $\boldsymbol{U}(P' \mid \boldsymbol{A}')$. Пересечение $\boldsymbol{U}(P \mid \boldsymbol{A})$ с $\boldsymbol{N}$ есть окрестность P в $\boldsymbol{N}$, также отображающаяся в $\boldsymbol{U}(P' \mid \boldsymbol{A}')$. Таким образом отображение $\boldsymbol{N}$ в $\boldsymbol{A}'$ непрерывно, а тогда в силу предыдущей теоремы непрерывно и отображение $\boldsymbol{N}$ на $\boldsymbol{N}'$.

Теорема IV. *Если отображения $\boldsymbol{A}$ на $\boldsymbol{A}'$ и $\boldsymbol{A}'$ на $\boldsymbol{A}''$ непрерывны, то отображение $\boldsymbol{A}$ на $\boldsymbol{A}''$ тоже непрерывно.*

Доказательство очевидно.

Отображение T пространства $\boldsymbol{A}$ на $\boldsymbol{A}'$ называется *топологическим* в том случае, если оно взаимно однозначно и непрерывно вместе со своим обратным отображением T^{-1}. Если $\boldsymbol{U}(P \mid \boldsymbol{A})$ окрестность точки P, то в силу непрерывности отображения T^{-1} существует окрестность $\boldsymbol{U}(P' \mid \boldsymbol{A}')$, отображающаяся в $\boldsymbol{U}(P \mid \boldsymbol{A})$. Поэтому образ $\boldsymbol{U}(P \mid \boldsymbol{A})$ при отображении T есть множество, содержащее $\boldsymbol{U}(P' \mid \boldsymbol{A}')$, т. е. снова некоторая окрестность P'. Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема V. *Топологическое отображение, так же как и его обратное, переводит окрестности в окрестности; обратно, всякое взаимно однозначное отображение, обладающее этим свойством, является топологическим отображением.*

Мы говорим о тонологическом отображении $\boldsymbol{A}$ в $\boldsymbol{B}$, если $\boldsymbol{A}$ топологически отображается на подмножество $\boldsymbol{A}'$ пространства $\boldsymbol{B}$ (причем $\boldsymbol{A}'$ может совпадать с $\boldsymbol{B}$). Два окрестностных пространства называются *гомеоморфными*, если одно из них можно топологически отобразить на другое.

Теоремы III и IV остаются справедливыми, если вместо того, чтобы говорить в них о непрерывных отображениях, мы будем говорить о топологических. Отсюда следует, в частности, что два окрестностных пространства, гомеоморфные третьему, гомеоморфны между собой (транзитивность гомеоморфности).

Нас будут интересовать только такие свойства окрестностных пространств и их подмножеств, которые не меняются при топологических отображениях. Например, свойство подмножества евклидова пространства быть прямой линией не принадлежит к их числу, так как при топологическом отображении на другое евклидово пространство прямолинейность, вообще говоря, теряется. Напротив, свойство подмножества окрестностного пространства $\boldsymbol{M}$ быть *окрестностью* точки P является топологически инвариантным свойством, так как при топологическом отображении $\boldsymbol{M}$ на $\boldsymbol{M}'$ окрестность точки P пространства $\boldsymbol{M}$ переходит в окрестность образа P' пространства $\boldsymbol{M}'$. То же самое имеет место относительно понятий *граничная точка, внутренняя точка, точка накопления* подмножества, *предельная точка* последовательности, *открытое подмножество, замкнутое подмножество.*

Действительно, рассмотрим, например, свойство точки R пространства $\boldsymbol{M}$ быть граничной точкой подмножества $\boldsymbol{N}$ этого пространства. Покажем, что это свойство сохраняется при топологическом отображении $\boldsymbol{M}$ на $\boldsymbol{M'}$, т. е. если это отображение переводит $\boldsymbol{N}$ в $\boldsymbol{N'}$, а R в R', то R' является граничной точкой $\boldsymbol{N'}$. Для доказательства заметим, что окрестности R в $\boldsymbol{M}$ и R' в $\boldsymbol{M'}$ соответствуют взаимно однозначно друг другу; но тогда в каждой окрестности точки R' имеются как точки $\boldsymbol{N'}$, так и точки, не принадлежащие $\boldsymbol{N'}$, так как соответствующее утверждение выполняется для каждой окрестности R в $\boldsymbol{M}$.

Аналогично доказывается топологическая инвариантность остальных из указанных понятий.

Свойство отображения множества $\boldsymbol{A}$ в $\boldsymbol{B}$ быть *непрерывным* или *топологическим* также топологически инвариантно; другими словами, если мы заменим $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ гомеоморфными им окрестностными пространствами $\boldsymbol{A'}$ и $\boldsymbol{B'}$, то соответствующее отображение $\boldsymbol{A'}$ в $\boldsymbol{B'}$ также является непрерывным или, соответственно, топологическим.

Пример 1.

Топологическое отображение отрезка $0 \leqslant x \leqslant 1$ *прямой на отрезок* $0 \leqslant y \leqslant 1$ *другой прямой.* По теореме I отображение осуществляется непрерывной функцией $y = f(x)$. Функция эта должна, кроме того, каждое значение между 0 и 1 принимать в точности один раз. Из анализа известий, что такая функция либо монотонно возрастает, либо убывает. Отсюда следует, что $f(x)$ при $x = 0$ принимает свое наименьшее или наибольшее значение, т. е. граничные точки одного отрезка соответствуют граничным точкам другого.

Пример 2.

Стереографическая проекция проколотой сферы на евклидову плоскость. Единичная сфера

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

как подмножество трехмерного евклидова пространства является сама окрестностным пространством; она остается окрестностным пространством и в том случае, если мы «проколем» ее, т. е. выбросим из нее какую-нибудь одну точку, например северный полюс $(0, 0, 1)$. Проколотая сфера гомеоморфна евклидовой плоскости.

Топологическое отображение устанавливается, например, при помощи стереографической проекции сферы из северного полюса на евклидову плоскость $x_3 = 0$, т. е. на плоскость экватора. Отображение взаимно однозначно, так как единственная точка сферы, которая при этом не имеет образа, — северный полюс, — из сферы выброшен.

Для того чтобы показать непрерывность отображения сферы на плоскость, мы должны для любой окрестности точки P' плоскости найти такую окрестность ее прообраза P, которая отображается целиком в данную окрестность точки P'. Но любая окрестность точки P' всегда содержит ε'-окрестность (круг с центром в P'). Рассмотрим сферический сегмент с центром в точке P, являющийся — как пересечение сферы с пространственной ε-окрестностью — окрестностью точки P. При стереографической проекции такой

сегмент отображается, как известно, на круг, внутри которого, но, вообще говоря, не в центре, лежит P'. Этот сегмент можно выбрать настолько малым, что он отобразится внутрь заданной ε'-окрестности точки P',

Точно так же показывается, что наше отображение непрерывно и в направлении от плоскости к сфере. Поэтому оно является топологическим отображением.

Воспользовавшись теоремой I, можно дать другое доказательство, показав, что отображающие функции в данном случае непрерывны. Для того чтобы различать координаты отображаемых точек и их образов, введем в плоскости экватора систему координат $\xi_1\xi_2$, совпадающую с x_1x_2. Тогда отображающие функции (сразу в n-мерном случае!) определяются формулами:

$$\xi_i = \frac{r}{r - x_n} x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1);$$

$$x_i = \frac{2r^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_{n-1}^2 + r^2} \xi_i,$$

$$x_n = \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_{n-1}^2 - r^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_{n-1}^2 + r^2} r,$$

причем r есть радиус сферы, в нашем случае равный 1.

Эти формулы определяют функции однозначные и непрерывные во всех точках проколотой сферы и плоскости экватора.

Пример 3.

Евклидова плоскость гомеоморфна внутренности круга. Для того чтобы получить топологическое отображение, можно, например, спроектировать нижнюю полусферу без ограничивающего ее большого круга двумя способами на евклидову плоскость, касающуюся полусферы в южном полюсе S (рис. 14 стр. 21), — один раз посредством центральной проекции из центра сферы M, второй раз — посредством ортогональной проекции. Оба отображения суть отображения топологические, а так как два топологических отображения, выполненных одно за другим, дают снова топологическое отображение, то этим устанавливается топологическое соответствие между точками евклидовой плоскости и внутренними точками единичного круга.

Упражнения: 1. Докажите, что цилиндрическая поверхность конечной высоты h (без обеих граничных окружностей), однополостный гиперболоид пространства, круговое кольцо (без краев) и сфера без двух точек гомеоморфны друг другу.

2. Пусть граничная окружность круга топологически отображена на себя. Покажите, что это отображение можно дополнить до топологического отображения всего круга на себя.

3. Пусть $\boldsymbol{M}$ — подмножество евклидова пространства и P не принадлежащая $\boldsymbol{M}$ точка. Докажите, что если P является граничной точкой $\boldsymbol{M}$, то она является одновременно точкой накопления, и обратно.

§ 7. Подмножества евклидовых пространств

Окрестностные пространства, которыми мы будем заниматься в дальнейшем, гомеоморфны подмножествам евклидовых пространств. Структура таких пространств более специальна, чем структура окрестностных пространств общего типа. Это находит свое выражение в том, что для подмножеств евклидовых пространств справедливы многие предложения, которые не могут быть выведены только из аксиом A и B § 5. Поэтому мы посвятим настоящий параграф рассмотрению окрестностных пространств $\boldsymbol{M}$, являющихся подмножествами евклидовых пространств.

На основании определения окрестности в евклидовом пространстве (стр. 34) и определения окрестности в подмножестве (стр. 35), подмножество $\boldsymbol{N}$ пространства $\boldsymbol{M}$ в том и только в том случае является окрестностью $\boldsymbol{U}(P \mid \boldsymbol{M})$ точки P в $\boldsymbol{M}$, если $\boldsymbol{N}$ принадлежат все точки $\boldsymbol{M}$, расстояние которых до P меньше некоторого $\varepsilon > 0$. Совокупность всех точек $\boldsymbol{M}$, удаленных от P меньше чем на ε, т. е. пересечение описанного вокруг P ε-шара, с множеством $\boldsymbol{M}$, называется *ε-окрестностью* $\boldsymbol{U}_\varepsilon(P \mid \boldsymbol{M})$. $\boldsymbol{U}_\varepsilon(P \mid \boldsymbol{M})$ есть, очевидно, открытое относительно $\boldsymbol{M}$ подмножество $\boldsymbol{M}$, так как в неравенстве (3) § 5 стоит знак $<$, а не $\leqslant$.

Важным свойством, которым обладает каждое подмножество $\boldsymbol{M}$ евклидова пространства, но не каждое окрестностное пространство, является следующее свойство: для любых двух различных точек P и Q, принадлежащих $\boldsymbol{M}$, существуют непересекающиеся окрестности (т. е. окрестности без общих точек). Такие окрестности мы получим, если возьмем, например, пересечения с $\boldsymbol{M}$ двух достаточно малых ε-шаров вокруг точек P и Q.

Отсюда следует, что сходящаяся последовательность, т. е. последовательность, почти все точки которой лежат в любой окрестности точки P, имеет P единственной предельной точкой. В самом деле, в силу существования непересекающихся окрестностей почти все точки последовательности не могут лежать в каждой окрестности P и одновременно в каждой окрестности какой-нибудь другой точки Q.

Из предложений относительно подмножеств евклидовых пространств, обычно доказываемых в анализе, нам понадобятся в дальнейшем теоремы о точке накопления, о максимуме непрерывной функции и о равномерной непрерывности.

Теорема I (принцип точки накопления). *Каждое бесконечное ограниченное подмножество евклидова пространства имеет по крайней мере одну точку накопления*[*].

[*] Доказательство можно найти, например, в книге *K. Knopp*, Funktionentheorie, часть I, стр. 22 (Göschen 1926). Доказательство, данное в этой книге для случая двух измерений, легко переносится на n-мерный случай.

Бесконечным называется множество, содержащее бесконечно много точек. Подмножество евклидова пространства ограничено, если абсолютные величины координат всех его точек не превосходят некоторое конечное число*.

Теорема II. *Непрерывный образ ограниченного замкнутого множества евклидова пространства в другом евклидовом пространстве есть также ограниченное и замкнутое множество.*

Доказательство. Предположим, что непрерывный образ $\boldsymbol{M}'$ ограниченного замкнутого множества $\boldsymbol{M}$ не является ограниченным замкнутым множеством. Тогда существует состоящая только из различных точек $\boldsymbol{M}'$ последовательность $P_1', P_2', \ldots$, либо вовсе не имеющая точки накопления, либо сходящаяся к предельной точке $\overline{R}$, не принадлежащей $\boldsymbol{M}'$. Выберем для каждой точки P_i' какой-нибудь из ее прообразов P_i в $\boldsymbol{M}$. По предположению множество $P_1, P_2, \ldots$ имеет принадлежащую $\boldsymbol{M}$ точку накопления R. В каждой окрестности ее образа R' лежит бесконечно много точек последовательности $P_1', P_2', \ldots$, что противоречит предположениям, сделанным относительно этой последовательности. Отсюда непосредственно вытекает следующая теорема:

Теорема III (принцип максимума). *Непрерывная функция, заданная на ограниченном замкнутом подмножестве евклидова пространства, достигает своего наименьшего и наибольшего значения.*

Это следует из того, что функция осуществляет непрерывное отображение подмножества на числовую прямую.

Теорема о равномерной непрерывности может быть сформулирована следующим образом.

Теорема IV. *Пусть ограниченное замкнутое подмножество $\boldsymbol{A}$ евклидова пространства непрерывно отображено в окрестностное пространство $\boldsymbol{B}$ и пусть каждой точке Q пространства $\boldsymbol{B}$ произвольно поставлена в соответствие некоторая определенная окрестность $\boldsymbol{U}^*(Q \mid \boldsymbol{B})$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что образ δ-окрестности каждой точки P множества A целиком покрывается окрестностью $\boldsymbol{U}^*(Q \mid \boldsymbol{B})$ надлежащим образом выбранной точки Q.*

Доказательство. Допустим, что теорема неверна. Рассмотрим последовательность чисел $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{i}, \ldots$ В силу нашего предположения для каждого δ из чисел этой последовательности существует

*Метрическое пространство, в котором всякое бесконечное множество имеет по крайней мере одну точку накопления, называется компактным. Читателю предоставляется доказать, что множество, лежащее в каком-либо евклидовом пространстве тогда и только тогда образует компактное метрическое пространство, если оно замкнуто и ограничено.

точка P_i, $\frac{1}{i}$-окрестность которой не отображается ни в какую окрестность $\boldsymbol{U}^*(Q \mid \boldsymbol{B})$. Так как $\boldsymbol{A}$ ограничено и замкнуто, последовательность $P_1, P_2, P_3, \ldots$ имеет в $\boldsymbol{A}$ точку накопления P. Пусть $\boldsymbol{U}^*(P' \mid \boldsymbol{B})$ заданная окрестность образа P' этой точки; тогда в силу непрерывности отображения существует окрестность $\boldsymbol{U}(P \mid \boldsymbol{A})$, образ которой лежит в $\boldsymbol{U}^*(P' \mid \boldsymbol{B})$. Но $\boldsymbol{U}(P \mid \boldsymbol{A})$ содержит бесчисленное множество точек последовательности P_i. Поэтому при достаточно большом i $\frac{1}{i}$-окрестность точки P_i целиком лежит в $\boldsymbol{U}(P \mid \boldsymbol{A})$, а образ этой окрестности также целиком лежит в $\boldsymbol{U}^*(P' \mid \boldsymbol{B})$, что противоречит сделанному предположению.

Допустив теперь, что множества $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ совпадают и соответствующее непрерывное отображение является тождественным, мы получим как следствие теорему:

Теорема V. *Пусть каждой точке Q замкнутого ограниченного множества $\boldsymbol{A}$ евклидова пространства отнесена произвольная ее окрестность $\boldsymbol{U}^*(Q \mid \boldsymbol{A})$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что δ-окрестность каждой точки P множества $\boldsymbol{A}$ целиком покрывается выбранной окрестностью $\boldsymbol{U}^*(Q \mid \boldsymbol{A})$ некоторой точки Q.*

Обычно теорема о равномерной непрерывности формулируется так:

Теорема VI. *Пусть ограниченное замкнутое подмножество $\boldsymbol{A}$ евклидова пространства отображается однозначно и непрерывно в другое евклидово пространство $\boldsymbol{B}$. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что любые две точки $\boldsymbol{A}$, расстояние между которыми $< \delta$, переходят в две точки $\boldsymbol{B}$, находящиеся на расстоянии меньше ε.*

Доказательство. Выберем в теореме IV за окрестность $\boldsymbol{U}^*(Q \mid \boldsymbol{B})$ каждой точки Q пространства $\boldsymbol{B}$ $\frac{\varepsilon}{2}$-окрестность точки Q. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что δ-окрестность любой точки $\boldsymbol{A}$ отображается в такую $\frac{\varepsilon}{2}$-окрестность надлежащим образом выбранной точки Q. Если расстояние между двумя точками P_1 и P_2 пространства $\boldsymbol{A}$ меньше δ, то P_2 принадлежит δ-окрестности точки P_1, а так как образ δ-окрестности в $\boldsymbol{A}$ покрывается $\frac{\varepsilon}{2}$-окрестностью в $\boldsymbol{B}$, то образы P_1' и P_2' находятся в $\boldsymbol{B}$ на расстоянии $< \varepsilon$.

Приведем еще несколько предложений относительно подмножеств евклидовых пространств, которыми нам придется воспользоваться в дальнейшем.

Теорема VII. *Пусть $\boldsymbol{M}$ подмножество евклидова пространства (или гомеоморфно такому подмножеству), P — точка $\boldsymbol{M}$, Ω —*

окрестность P относительно $\boldsymbol{M}$, Ω_1 — окрестность P относительно Ω. Тогда Ω_1 является также окрестностью точки P относительно $\boldsymbol{M}$.

Доказательство. Ω как окрестность точки P в множестве $\boldsymbol{M}$ содержит ε-окрестность $\boldsymbol{U}_\varepsilon(P \,|\, \boldsymbol{M})$. Точно так же Ω_1 содержит δ-окрестность $\boldsymbol{U}_\delta(P \,|\, \Omega)$. Пусть η — число, меньшее каждого из радиусов ε и δ. Тогда $\boldsymbol{U}_\eta(P \,|\, \boldsymbol{M})$ принадлежит Ω и $\boldsymbol{U}_\eta(P \,|\, \Omega)$ принадлежит Ω_1. Вместе с тем $\boldsymbol{U}_\eta(P \,|\, \boldsymbol{M})$ принадлежит также Ω_1. Таким образом, Ω_1 содержит все точки $\boldsymbol{M}$, находящиеся от P на расстоянии $< \eta$, а потому является окрестностью P относительно $\boldsymbol{M}$.

Пусть теперь $\boldsymbol{N}$ есть подмножество $\boldsymbol{M}$. Замыкание $\boldsymbol{N}'$ подмножества $\boldsymbol{N}$ относительно $\boldsymbol{M}$ было определено на стр. 37 как пересечение всех содержащих $\boldsymbol{N}$ замкнутых подмножеств из $\boldsymbol{M}$. В частности, все граничные относительно $\boldsymbol{M}$ точки $\boldsymbol{N}$ принадлежат $\boldsymbol{N}'$. Более того: *замыкание $\boldsymbol{N}'$ состоит в точности из $\boldsymbol{N}$ и его границы $\overline{\boldsymbol{N}}$*. Чтобы убедиться в правильности этого утверждения, нужно показать, что сумма $\boldsymbol{N} + \overline{\boldsymbol{N}}$ представляет замкнутое подмножество $\boldsymbol{M}$. Пусть R есть граничная относительно $\boldsymbol{M}$ точка суммы $\boldsymbol{N} + \overline{\boldsymbol{N}}$. Любая ε-окрестность $\boldsymbol{U}_\varepsilon(R \,|\, \boldsymbol{M})$ содержит точку множества $\boldsymbol{N} + \overline{\boldsymbol{N}}$, являющуюся либо точкой $\boldsymbol{N}$, либо граничной точкой $\overline{R}$ множества $\boldsymbol{N}$. В последнем случае $\overline{R}$ находится на расстоянии, меньшем ε от R, а так как существуют точки $\boldsymbol{M}$, лежащие *сколь угодно близко* к $\overline{R}$ (определение граничной точки!), то оказывается, что в обоих случаях существуют точки $\boldsymbol{N}$, находящиеся от R меньше, чем на ε, т. е. R является граничной точкой $\boldsymbol{N}$ и принадлежит $\overline{\boldsymbol{N}}$. Таким образом доказывается, что граница $\boldsymbol{N}$ относительно $\boldsymbol{M}$ есть замкнутое подмножество $\boldsymbol{M}$.

Пусть $\boldsymbol{M}_1$ и $\boldsymbol{M}_2$ два непересекающиеся ограниченные замкнутые множества в $\boldsymbol{R}^n$ и $d(P_1, P_2)$ расстояние между точками P_1 из $\boldsymbol{M}_1$ и P_2 из $\boldsymbol{M}_2$. Нижняя граница δ всех расстояний $d(P_1, P_2)$ называется *расстоянием между множествами $\boldsymbol{M}_1$ и $\boldsymbol{M}_2$*. В силу замкнутости и ограниченности множеств $\boldsymbol{M}_1$ и $\boldsymbol{M}_2$ эта нижняя граница действительно достигается, причем, так как множества не пересекаются, она больше нуля.

Под *диаметром* множества в $\boldsymbol{R}^n$ понимается верхняя граница расстояний между любыми двумя точками этого множества. В случае замкнутых ограниченных множеств эта граница тоже всегда достигается, поэтому можно говорить о максимуме расстояний двух точек множества.

§ 8. Отождествление*

В геометрии часто приходится разбивать точки какого-нибудь окрестностного пространства на классы эквивалентных между собой точек и рассматривать эти классы как «точки» нового окрестностного пространства. Такое разбиение на классы получается, например, при параллельном проектировании точек евклидова пространства на плоскость: все точки пространства, проектирующиеся в одну точку плоскости, т. е. все точки проектирующей прямой, образуют один класс. Можно считать, что общая проекция точек такой прямой представляет все точки этого класса, при том так, что они уже не выступают как различные точки, но как тождественные со своей проекцией.

Другой пример! Пусть имеется группа трансляций (параллельных перемещений) евклидовой плоскости, образуемая сдвигами вдоль оси x, $x' = x + ka$ и вдоль оси y, $y' = y + k_1 b$ $(k, k_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Как эквивалентные будем рассматривать точки плоскости, переводящиеся друг в друга трансляциями группы, т. е. точки, координаты которых отличаются соответственно на числа, кратные числам a и b, и будем объединять такие точки в один класс. Если мы теперь выберем надлежащим образом из каждого класса по одному представителю, то эти представители заполнят внутренность прямоугольника, две его стороны и одну вершину (рис. 30), т. е. область, координаты точек которой удовлетворяют соотношениям $0 \leqslant x < a$, $0 \leqslant y < b$. Легко видеть, что «отождествление» всех эквивалентных точек превращает нашу плоскость в тор (§ 1), так как сторона $x = a$ эквивалентна стороне $x = 0$, а сторона $y = b$ — стороне $y = 0$.

Отождествление служит нам, между прочим, для того, чтобы склеивать плоские фигуры вдоль их сторон и получать таким образом поверхности. В качестве примера рассмотрим плоское множество, состоящее из двух треугольников (рис. 31). Будем считать эквивалентными точки, соответствующие друг другу при топологическом отображении какой-нибудь стороны одного треугольника на сторону другого. После отождествления эквивалентных точек из двух треугольников получается четыреугольник. Мы хотим теперь выразить понятие отождествления в терминах основных понятий теории множеств: множество, подмножество, соответствие.

Пусть точки окрестностного пространства $\boldsymbol{M}$ разбиты на классы (подмножества) таким образом, что каждая точка принадлежит в точности одному классу. Точки, принадлежащие одному классу, можно назвать *эквивалентными* точками. При этом мы допустим, что один класс может состоять, например, из одной только точки, в то время как другой содержит бесконечное число их. Составим новое мно-

*По всем вопросам этого параграфа см. *Александров – Hopf*, Topologie, гл. I и II особенно § 5 гл. I и § 2 гл. II.

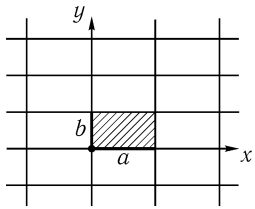


Рис. 30

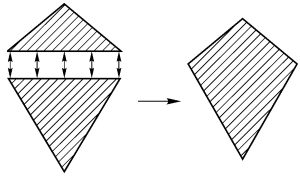


Рис. 31

жество $\boldsymbol{M}'$, «точками» которого являются классы эквивалентных точек $\boldsymbol{M}$. При этом мы получаем одновременно отображение пространства $\boldsymbol{M}$ на $\boldsymbol{M}'$, заключающееся в том, что точке P из $\boldsymbol{M}$ ставится в соответствие ее класс P' из $\boldsymbol{M}'$. Чтобы превратить $\boldsymbol{M}'$ в окрестностное пространство, нужно определить в нем окрестности. Это можно сделать следующим образом. Пусть P_1, $P_2, \ldots$ — все точки $\boldsymbol{M}$, отображающиеся в одну и ту же точку P' пространства $\boldsymbol{M}'$*. Выберем для каждой точки P_i окрестность $\boldsymbol{U}(P_i \,|\, \boldsymbol{M})$, отобразим сумму этих окрестностей $\boldsymbol{U}(P_1 \,|\, \boldsymbol{M}) + \boldsymbol{U}(P_2 \,|\, \boldsymbol{M}) + \ldots$ в $\boldsymbol{M}'$ и примем за окрестность $\boldsymbol{U}(P' \,|\, \boldsymbol{M}')$ образ этой суммы. Определенные таким образом в $\boldsymbol{M}'$ окрестности, очевидно, удовлетворяют аксиоме A. Они удовлетворяют также аксиоме B. Действительно, пусть $\boldsymbol{U}'$ есть подмножество $\boldsymbol{M}'$, содержащее $\boldsymbol{U}(P' \,|\, \boldsymbol{M}')$. Прообраз $\boldsymbol{U}$ множества $\boldsymbol{U}'$, т. е. совокупность всех точек, отображающихся в точки $\boldsymbol{U}'$, представляет окрестность $\overline{\boldsymbol{U}}(P_i \,|\, \boldsymbol{M})$ любого прообраза P_i точки P', так как $\overline{\boldsymbol{U}}(P_i \,|\, \boldsymbol{M})$ содержит окрестность $\boldsymbol{U}(P_i \,|\, \boldsymbol{M})$. Поэтому $\boldsymbol{U}'$ является образом суммы окрестностей $\overline{\boldsymbol{U}}(P_1 \,|\, \boldsymbol{M}) + \overline{\boldsymbol{U}}(P_2 \,|\, \boldsymbol{M}) + \ldots = \boldsymbol{U}$, т. е., в силу определения, окрестностью точки P'.

Говорят, что $\boldsymbol{M}'$, *так же как любое гомеоморфное* $\boldsymbol{M}'$ *окрестностное пространство, получается из* $\boldsymbol{M}$ *путем отождествления эквивалентных точек.*

Пусть M — гомеоморфное $\boldsymbol{M}$ окрестностное пространство и пусть эквивалентными точками M являются точки, соответствующие эквивалентным точкам $\boldsymbol{M}$. Отождествление эквивалентных точек M дает окрестностное пространство M′, очевидно гомеоморфное $\boldsymbol{M}'$.

Так как для каждой окрестности $\boldsymbol{U}(P' \,|\, \boldsymbol{M}')$ существует окрестность прообраза P_i именно $\boldsymbol{U}(P_i \,|\, \boldsymbol{M})$, целиком отображающаяся в $\boldsymbol{U}(P' \,|\, \boldsymbol{M}')$, то имеет место теорема:

Теорема I. *Отображение* $\boldsymbol{M}$ *на* $\boldsymbol{M}'$ *непрерывно.*

Пусть теперь, наоборот, окрестностное пространство $\boldsymbol{M}$ непрерывно отображено на какое-нибудь другое пространство $\boldsymbol{M}'$. Спрашивает-

* Точек P_1, $P_2, \ldots$ может быть и несчетное множество.

ся, в каком случае можно рассматривать $\boldsymbol{M}'$ как пространство, получившееся из $\boldsymbol{M}$ путем отождествления всех точек $\boldsymbol{M}$, переходящих в одну и ту же точку $\boldsymbol{M}'$. Ответ на это дает теорема:

Теорема II. *Пространство $\boldsymbol{M}'$, являющееся непрерывным образом окрестностного пространства $\boldsymbol{M}$, лишь в том случае получается из $\boldsymbol{M}$ путем отождествления всех точек с одинаковыми образами, когда образ суммы $\boldsymbol{U}(P_1 \mid \boldsymbol{M}) + \boldsymbol{U}(P_2 \mid \boldsymbol{M}) + \ldots$ является окрестностью точки P' пространства $\boldsymbol{M}'$. При этом $P_1, P_2, \ldots$ суть все точки $\boldsymbol{M}$, отображающиеся в P', и окрестности $\boldsymbol{U}(P_1 \mid \boldsymbol{M})$, $\boldsymbol{U}(P_2 \mid \boldsymbol{M}), \ldots$ выбраны как угодно.*

Доказательство. Нам нужно показать, что каждая окрестность $\boldsymbol{U}(P' \mid \boldsymbol{M}')$ является образом такой суммы $\boldsymbol{U}(P_1 \mid \boldsymbol{M}) + \boldsymbol{U}(P_2 \mid \boldsymbol{M}) + \ldots$ Вследствие предположенной непрерывности, для каждой точки P_i из точек $P_1, P_2, \ldots$ существует окрестность $\overline{\boldsymbol{U}}(P_i \mid \boldsymbol{M})$, отображающаяся в $\boldsymbol{U}(P' \mid \boldsymbol{M}')$. Множество $\boldsymbol{U}$, состоящее из всех переходящих в $\boldsymbol{U}(P' \mid \boldsymbol{M}')$ точек $\boldsymbol{M}$, содержит $\overline{\boldsymbol{U}}(P_i \mid \boldsymbol{M})$ как свое подмножество, а потому в силу аксиомы B само является окрестностью $\boldsymbol{U}(P_i \mid \boldsymbol{M})$ точки P_i. Поэтому $\boldsymbol{U}(P' \mid \boldsymbol{M}')$ представляет образ суммы окрестностей $\boldsymbol{U}(P_1 \mid \boldsymbol{M}) + \boldsymbol{U}(P_2 \mid \boldsymbol{M}) + \ldots$, что и требовалось доказать.

Отождествления точек могут производиться последовательно одно за другим; при этом почти очевидно, что результат всех отождествлений не зависит от того, *в каком порядке* мы их производим. Другими словами:

Если $\boldsymbol{M}'$ получается из $\boldsymbol{M}$ посредством отождествления эквивалентных точек, а $\boldsymbol{M}''$ таким же образом получается из $\boldsymbol{M}'$, то этим задается отображение $\boldsymbol{M}$ на $\boldsymbol{M}''$. Тогда $\boldsymbol{M}''$ можно получить непосредственно из $\boldsymbol{M}$, отождествив все точки $\boldsymbol{M}$, переходящие в одну точку $\boldsymbol{M}''$.

Доказательство. Точка P'' пространства $\boldsymbol{M}''$ есть образ точек $P_1, P_2, \ldots$ пространства $\boldsymbol{M}'$; P_i' в свою очередь есть образ точек $P_{i1}, P_{i2}, \ldots$ пространства $\boldsymbol{M}$. Отображение $\boldsymbol{M}$ на $\boldsymbol{M}''$ непрерывно. Поэтому в силу теоремы II достаточно показать, что $\sum\limits_i \sum\limits_j \boldsymbol{U}(P_{ij} \mid \boldsymbol{M})$ отображается на окрестность точки P''. Так как $\boldsymbol{M}'$ получается отождествлением точек $P_{i1}, P_{i2}, \ldots$, то $\sum\limits_j \boldsymbol{U}(P_{ij} \mid \boldsymbol{M})$ переходит в окрестность $\boldsymbol{U}(P_i' \mid \boldsymbol{M}')$. Далее, $\sum\limits_i \boldsymbol{U}(P_i' \mid \boldsymbol{M}')$ переходит в окрестность $\boldsymbol{U}(P'' \mid \boldsymbol{M}'')$, так как $\boldsymbol{M}''$ получается из $\boldsymbol{M}'$ отождествлением точек $P_1', P_2', \ldots$ Таким образом $\sum\limits_i \sum\limits_j \boldsymbol{U}(P_{ij} \mid \boldsymbol{M})$ отображается на окрестность $\boldsymbol{U}(P'' \mid \boldsymbol{M}'')$.

Теорема III. *Пусть, в частности, $\boldsymbol{M}$ является ограниченным замкнутым подмножеством евклидова пространства, причем точки*

этого подмножества разбиты на классы. Пусть, далее, $\boldsymbol{M}$ отображено однозначно и непрерывно на множество $\boldsymbol{M}'$ другого евклидова пространства так, что каждая точка $\boldsymbol{M}'$ является образом и что эквивалентные точки $\boldsymbol{M}$ переходят в одну и ту же точку $\boldsymbol{M}'$, а неэквивалентные — в различные точки $\boldsymbol{M}'$. Тогда $\boldsymbol{M}'$ получается из $\boldsymbol{M}$ отождествлением эквивалентных точек.*

Доказательство. По теореме II мы должны только показать, что если P_1, $P_2, \ldots$ суть все отображающиеся в P' точки $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{U}(P_i \mid \boldsymbol{M})$ произвольная окрестность P_i, то образ суммы $\boldsymbol{U}(P_1 \mid \boldsymbol{M}) + \boldsymbol{U}(P_2 \mid \boldsymbol{M}) + \ldots$ является окрестностью $\boldsymbol{U}(P' \mid \boldsymbol{M}')$. Очевидно, что этот образ есть подмножество $\boldsymbol{N}'$ множества $\boldsymbol{M}'$, содержащее P'. Предположим, что $\boldsymbol{N}'$ не является окрестностью P'. Тогда в каждой ε-окрестности точки P' существуют точки множества $\boldsymbol{M}'$, не принадлежащие $\boldsymbol{N}'$. В частности, для каждого ε из последовательности $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{i}, \ldots$ существует точка Q_i', принадлежащая $\frac{1}{i}$-окрестности P', но не принадлежащая $\boldsymbol{N}'$. Так как множество $\boldsymbol{M}$ ограничено и замкнуто, то последовательность $Q_1, Q_2, \ldots$ каких-нибудь прообразов точек $Q_1', Q_2', \ldots$ имеет по крайней мере одну точку накопления Q. Пусть Q' образ точки Q. В силу непрерывности отображения в каждой окрестности точки Q' содержится бесчисленное множество точек последовательности $Q_1', Q_2', \ldots$ Но эта последовательность имеет лишь одну точку накопления P', поэтому $Q' = P'$. Таким образом, Q является одной из точек последовательности $P_1, P_2, \ldots$, например точкой P_1. Отсюда следует, что множество точек $Q_1, Q_2, \ldots$ лежит в $\boldsymbol{U}(P_1 \mid \boldsymbol{M})$, т. е. бесчисленное множество точек $Q_1', Q_2', \ldots$ лежит в $\boldsymbol{N}'$. А это находится в противоречии с нашим предположением.

Мы можем теперь выяснить вопрос, в каком случае из непрерывности двух отображений из трех, связанных соотношением $\psi\varphi = \chi$ (сперва φ, а затем ψ!), вытекает непрерывность третьего отображения. Как уже было раньше замечено (§ 6), когда φ и ψ непрерывны, χ также непрерывно. Напротив, из непрерывности ψ и χ не следует непрерывность φ. В самом деле, если ψ, например, переводит все точки в одну, то при любом φ отображение χ непрерывно. Из теоремы III вытекает, однако, что непрерывность φ и χ при известных условиях влечет за собой непрерывность ψ. Именно имеет место следующее предложение.

Теорема IV. *Пусть φ — непрерывное отображение ограниченного замкнутого подмножества $\boldsymbol{M}$ евклидова пространства в другое евклидово пространство и пусть ψ — отображение (непрерывность которого не предполагается) образа $\boldsymbol{M}'$ в произвольное окрестностное пространство. Тогда, если $\boldsymbol{M}''$ есть образ $\boldsymbol{M}'$ и отображе-*

* При произвольном разбиении на классы это, конечно, не всегда возможно.

ние $\varphi\psi = \chi$ множества $\boldsymbol{M}$ на $\boldsymbol{M}''$ непрерывно, то ψ также непрерывно.

Доказательство. Пусть P' — произвольная точка $\boldsymbol{M}'$ и $P'' = \psi(P')$ ее образ в $\boldsymbol{M}''$. Пусть, далее, $P_1, P_2, \ldots$ все точки $\boldsymbol{M}$, отображающиеся посредством φ в P'. В силу непрерывности χ для каждой окрестности $\boldsymbol{U}(P'' \mid \boldsymbol{M}'')$ существуют окрестности $\boldsymbol{U}(P_1 \mid \boldsymbol{M})$, $\boldsymbol{U}(P_2 \mid \boldsymbol{M}), \ldots$, отображающиеся в $\boldsymbol{U}(P'' \mid \boldsymbol{M}'')$. Будем считать теперь все точки $\boldsymbol{M}$, переходящие в одну точку $\boldsymbol{M}'$, эквивалентными точками; по теореме III $\boldsymbol{M}'$ получается тогда из $\boldsymbol{M}$ отождествлением эквивалентных точек. Поэтому сумма окрестностей $\boldsymbol{U}(P_1 \mid \boldsymbol{M}) + \boldsymbol{U}(P_2 \mid \boldsymbol{M}) + \ldots$ переходит в окрестность $\boldsymbol{U}(P' \mid \boldsymbol{M}')$, которая в свою очередь отображается в $\boldsymbol{U}(P'' \mid \boldsymbol{M}'')$. Отсюда следует, что отображение ψ непрерывно в P', т. е. непрерывно в каждой точке множества $\boldsymbol{M}'$.

Предположим теперь, что отображение φ представляет взаимно однозначное и в направлении от $\boldsymbol{M}$ к $\boldsymbol{M}'$ непрерывное отображение. Положив $\psi = \varphi^{-1}$, мы видим, что $\psi\varphi$ есть тождественное отображение, т. е. наверное непрерывное. Но тогда и φ^{-1} непрерывно. Отсюда следует теорема:

Теорема V. *Непрерывное и взаимно однозначное отображение ограниченного замкнутого множества евклидова пространства непрерывно в обе стороны, т. е. является топологическим отображением.*

Пример 1.

Пусть $\boldsymbol{M}$ есть круг (рассматриваемый вместе с границей). Отождествив все точки его граничной окружности, мы получим сферу.

В самом деле, круг можно непрерывно отобразить на сферу так, что эквивалентные точки перейдут в одну и ту же точку сферы. Такое отображение получается, например, если мы отобразим каждый радиус круга, пробегаемый от центра к границе, на меридиан сферы, идущий из южного полюса в северный, причем конец каждого радиуса отобразим в одну и ту же точку — северный полюс. Но тогда по теореме III сфера получается путем отождествления всех точек круга, отображающихся в северный полюс.

Пример 2.

Примем за окрестность прямой g в множестве всех прямых, проходящих через фиксированную точку евклидова пространства, совокупность прямых, образующих круговой конус вокруг g (а также каждое подмножество прямых, содержащее такой конус); определенное при этом окрестностное пространство («точками» которого являются прямые) гомеоморфно окрестностному пространству, получающемуся из евклидовой сферы отождествлением ее диаметрально-противоположных точек. Это есть введенная в § 2 проективная плоскость.

Примечание. Во многих теоремах этого и предыдущего параграфа говорится о замкнутых ограниченных множествах евклидовых пространств.

В большинстве случаев в формулировках этих теорем возможно заменить замкнутые ограниченные подмножества евклидова пространства компактными метрическими пространствами (т. е. такими метрическими пространствами, в которых всякое бесконечное множество имеет хотя бы одну точку накопления). Читателю рекомендуется разобрать с этой точки зрения изложенные выше теоремы.

§ 9. n-мерный симплекс*

Пусть в m-мерном евклидовом пространстве $\boldsymbol{R}^m$ даны $n+1$ линейно независимых точек

$$P_0, P_1, \ldots, P_n \quad (0 \leqslant n \leqslant m).$$

Напомним, что $n+1$ точек называются линейно независимыми, если они не лежат ни в каком $(n-1)$-мерном линейном подпространстве**. Пусть координаты точки P_i будут

$$p_{i1}, p_{i2}, \ldots, p_{im} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Предположим, что в точку P_i помещена масса

$$\mu_i \geqslant 0, \tag{2}$$

причем так, что сумма всех масс равна 1:

$$\mu_0 + \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n = 1. \tag{3}$$

Центром тяжести этих масс является определенная точка X с координатами

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \sum_{i=0}^{n} \mu_i p_{i1}, \\ x_2 &= \sum_{i=0}^{n} \mu_i p_{i2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m &= \sum_{i=0}^{n} \mu_i p_{im}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

* Более подробно см. *Александров – Hopf.*

** Изложение основных понятий афинной геометрии, на котором мы здесь не останавливаемся, можно найти в книге *О. Шрейер* и *Е. Шпернер.* Введение в линейную алгебру в геометрическом изложении, том I, ОНТИ, 1934 г.

$\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$ называются *барицентрическими координатами* точки X; они связаны соотношениями (2) и (3). Совокупность всех точек X образует (прямолинейный) n-*мерный симплекс* $\boldsymbol{E}^n$ евклидова пространства $\boldsymbol{R}^m$.

$\boldsymbol{E}^n$ является, очевидно, *замкнутым* множеством евклидова пространства. Точки $P_0, P_1, \ldots, P_n$ называются *вершинами* n-мерного симплекса. Симплекс полностью определяется, если заданы его вершины. Поэтому вместо того, чтобы обозначать одной буквой $\boldsymbol{E}^n$, его часто обозначают, записывая его вершины.

Если вместо координат $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ввести другую декартову систему $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$, получающуюся из первой линейным преобразованием с неравным нулю детерминантом, то обе части каждого из равенств (4) преобразуются одинаково, и мы получим уравнения

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \sum_{i=0}^{n} \mu_i \pi_{i1}, \\ \xi_2 &= \sum_{i=0}^{n} \mu_i \pi_{i2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_m &= \sum_{i=0}^{n} \mu_i \pi_{im}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$\pi_{i1}, \pi_{i2}, \ldots, \pi_{im}$ суть координаты P_i в новой системе. Таким образом, координаты центра тяжести во всех системах (декартовых) координат выражаются одинаковыми формулами через барицентрические координаты.

В частности, координатную систему $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ можно выбрать так, чтобы $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ были координатами линейного пространства $\boldsymbol{L}^n$, в котором находится $\boldsymbol{E}^n$. Тогда все $\pi_{in+1}, \pi_{in+2}, \ldots, \pi_{im}$ будут равны нулю и система (5) обратится в

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \sum_{i=0}^{n} \mu_i \pi_{i1}, \\ \xi_2 &= \sum_{i=0}^{n} \mu_i \pi_{i2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_n &= \sum_{i=0}^{n} \mu_i \pi_{in}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Если, далее, принять векторы, идущие из точки P_0 в точки P_1, $P_2, \ldots$ $\ldots, P_n$, за базисные векторы координатной системы, то π_{ii} станут равными 1 для $i = 1, 2, \ldots, n$, а все остальные π_{ij} обратятся в нуль, и мы получим систему уравнений

$$\xi_1 = \mu_1, \quad \xi_2 = \mu_2, \ldots, \xi_n = \mu_n. \tag{7}$$

В такой координатной системе *барицентрические* координаты μ_1, $\mu_2, \ldots, \mu_n$ совпадают с *декартовыми*. Координаты точек $\boldsymbol{E}^n$ удовлетворяют неравенствам

$$\xi_1 \geqslant 0, \quad \xi_2 \geqslant 0, \ldots, \xi_n \geqslant 0,$$
$$\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n \leqslant 1.$$

Симплекс как подмножество евклидова пространства сам представляет окрестностное пространство. ε-окрестность какой-нибудь его точки состоит из точек пересечения симплекса с описанным вокруг этой точки ε-шаром. Нульмерный симплекс представляет одну точку, одномерный симплекс —отрезок, двумерный симплекс — треугольник, трехмерный симплекс — тетраэдр.

Множество точек симплекса, барицентрическая координата которых $\mu_n = 0$, образует $(n-1)$-мерный симплекс, так называемую $(n-1)$-мерную сторону $\boldsymbol{E}^{n-1}$ симплекса $\boldsymbol{E}^n$, противолежащую точке P_n. В самом деле, формулы (2)–(4) остаются справедливыми для этого множества, если только мы заменим в них n на $(n-1)$. Точно так же против вершины P_i лежит сторона $\boldsymbol{E}_i^{n-1}$.

k-мерной стороной симплекса $\boldsymbol{E}^n$ называется множество точек симплекса, для которых $n-k$ барицентрических координат равны нулю, а остальные $k+1$ координаты меняются в соответствии с формулами (2) и (3). k-мерная сторона также является *симплексом* $\boldsymbol{E}^k$. В частности, одномерные стороны симплекса называются его *ребрами*. Вершины k-мерной стороны являются одновременно вершинами симплекса $\boldsymbol{E}^n$; обратно, симплекс, натянутый на любые $k+1$ вершины $\boldsymbol{E}^n$, является k-мерной стороной симплекса. Поэтому существуют $\binom{n+1}{k+1}$ k-мерных сторон n-мерного симплекса.

$\boldsymbol{E}^n$ состоит из множества прямолинейных отрезков, соединяющих точки стороны $\boldsymbol{E}_n^{n-1}$ с противоположной вершиной P_n. В самом деле, для того чтобы получить центр тяжести всех $n+1$ масс, можно найти сначала центр тяжести масс $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$, — этот центр есть точка стороны $\boldsymbol{E}_n^{n-1}$, а затем определить центр тяжести сосредоточенной в этой точке массы $\mu_0+\mu_1+\ldots\mu_{n-1}$ и массы μ_n. Но центр тяжести этих двух масс лежит как раз на соединяющем отрезке. Для того чтобы показать, что *каждая* точка отрезка является точкой нашего n-мерного симплекса, заметим, что массу μ_n можно изменять от 1 до 0, не изменяя отношения остальных масс; при этом общий центр тяжести всех

масс передвигается по отрезку, соединяющему P_n с точкой противоположной стороны, определенной неизменным отношением n масс.

Пусть в евклидовом пространстве дано множество $\boldsymbol{M}$ и фиксированная точка P. Соединяя точку P со всеми точками множества $\boldsymbol{M}$ прямолинейными отрезками, мы будем говорить, что мы *проектируем* множество из центра проекций P. Совокупность всех соединяющих отрезков называется *проектирующий конусом*. Тогда по доказанному следует, что n-мерный симплекс получается проектированием его $(n-1)$-мерной стороны из противоположной вершины. Очевидно, n-мерный симплекс можно получить посредством последовательного проектирования из нульмерного симплекса: сначала мы проектируем одну вершину, например P_0, из другой, скажем, из P_1 и получаем ребро симплекса; далее проектируем это ребро из вершины P_2, и получаем двумерную сторону; продолжаем так далее до тех пор, пока проектированием $(n-1)$-мерной стороны из последней, не использованной еще в качестве центра проекции вершины P_n, мы не завершим образование всего симплекса $\boldsymbol{E}^n$.

Важным свойством n-мерного симплекса является его выпуклость. Под *выпуклым множеством* евклидова пространства понимают множество, содержащее целиком наряду со всякими двумя своими точками также и соединяющий их отрезок. Пусть $\boldsymbol{L}^r$ — линейное пространство наинизшей размерности, содержащее данное выпуклое множество. *Размерностью* выпуклого множества называют размерность такого линейного пространства.

Выпуклое множество размерности r непременно содержит внутренние по отношению к $\boldsymbol{L}^r$ точки, так как в ней имеется $r+1$ линейно независимых точек, а вместе с ними целый r-мерный симплекс, содержащий внутренние по отношению к $\boldsymbol{L}^r$ точки. Мы называем множество граничных внутри $\boldsymbol{L}^r$ точек выпуклого множества *границей выпуклого множества*, а внутренние по отношению к $\boldsymbol{L}^r$ точки — *внутренними точками* множества. Позже (в главе V) мы покажем, что точки границы и внутренние точки выпуклого замкнутого множества различаются *внутренними топологическими* свойствами, не зависящими от расположения множества в евклидовом пространстве. Необходимо различать внутренние точки выпуклого множества от точек выпуклого множества внутренних по отношению к некоторому объемлющему пространству. Внутренние точки выпуклого множества лишь в том случае являются внутренними и по отношению к объемлющему пространству, когда размерность объемлющего пространства совпадает с размерностью выпуклого множества. В противном случае *каждая* точка выпуклого множества является граничной точкой в объемлющем пространстве. Нульмерное выпуклое множество состоит из одной внутренней точки.

Если мы будем проектировать замкнутое выпуклое множество $\boldsymbol{B}$ из какой-нибудь точки, то получающийся при этом проектирующий

конус также является замкнутым выпуклым множеством. В самом деле, любые две точки проектирующего конуса Q_1 и Q_2 проектируются в некоторые (вообще говоря не однозначно определенные) точки $\boldsymbol{B}$. Эти последние можно соединить отрезком, целиком лежащим в $\boldsymbol{B}$. Проектирующий конус этого отрезка содержит отрезок, соединяющий Q_1 и Q_2.

Так как точка P_0 представляет нульмерную выпуклую область, а n-мерный симплекс получается из P_0 последовательным проектированием, то n-мерный симплекс сам является выпуклым телом (т. е. ограничейным, замкнутым, выпуклым множеством, размерность которого, очевидно, равна n), n-мерный симплекс представляет, сверх того, наименьшее выпуклое тело, содержащее все вершины симплекса. Говорят, что симплекс есть *выпуклое замыкание* $n+1$ точек (вершин симплекса). Как выпуклое тело, n-мерный симплекс имеет определенную границу: она состоит, очевидно, из всех сторон симплекса. Остальные точки симплекса являются его внутренними точками. Нульмерный симплекс не имеет границы; он состоит из одной внутренней точки.

Всякий симплекс имеет вполне определенный *центр*, т. е. точку, барицентрические координаты которой равны:

$$\mu_0 = \mu_1 = \ldots = \mu_n \Big(= \frac{1}{n+1}\Big).$$

Линейное (афинное) *отображение* n-мерного симплекса $\boldsymbol{E}^n$ на r-мерный симплекс $'\boldsymbol{E}^r$ $(r \leqslant n)$ определяется следующим образом: мы отображаем сначала вершины $\boldsymbol{E}^n$ в вершины $'\boldsymbol{E}^r$, т. е. каждой вершине симплекса $\boldsymbol{E}^n$ ставим в соответствие вершину симплекса $'\boldsymbol{E}^r$, причем так, чтобы каждая вершина $'\boldsymbol{E}^r$ являлась образом по крайней мере одной вершины $\boldsymbol{E}^n$. Если теперь какая-нибудь точка $\boldsymbol{E}^n$ является центром тяжести определенных масс, помещенных в вершины $\boldsymbol{E}^n$, то мы такие массы помещаем в вершины $'\boldsymbol{E}^r$-образы соответствующих вершин $\boldsymbol{E}^n$, и образом нашей точки считаем центр тяжести этих масс. Отображение $\boldsymbol{E}^n$ на $'\boldsymbol{E}^r$ называется *вырождающимся*, если $r < n$. В этом случае по крайней мере две вершины $\boldsymbol{E}^n$ отображаются в одну вершину $'\boldsymbol{E}^r$. Если же $r = n$, то отображение является топологическим. При линейном отображении симплекса $\boldsymbol{E}^n$ на $'\boldsymbol{E}^r$ каждая сторона $\boldsymbol{E}^n$ линейно отображается на сторону симплекса $'\boldsymbol{E}^r$, «натянутую» на вершины $'\boldsymbol{E}^r$-образы соответствующих вершин $\boldsymbol{E}^n$. Если поэтому две вершины отображаются в одну, то натянутое на них ребро целиком переходит в эту вершину.

Для того чтобы аналитически выразить линейное отображение $\boldsymbol{E}^n$ на $'\boldsymbol{E}^r$, выберем в каждом из линейных пространств $\boldsymbol{L}^n$ и $'\boldsymbol{L}^r$, несущих $\boldsymbol{E}^n$ и $'\boldsymbol{E}^r$, систему декартовых координат $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ и, соответственно, $'\xi_1, '\xi_2, \ldots, '\xi_r$. Пусть

$$\pi_{ij} \quad (i = 0, 1, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n)$$

суть координаты вершин $P_0, P_1, \ldots, P_n$ симплекса $\boldsymbol{E}^n$, а

$$'\pi_{ik} \quad (i = 0, 1, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, r)$$

— координаты их образов $'P_0, 'P_1, \ldots, 'P_n$, причем некоторые из этих образов могут, естественно, совпадать. Координаты центра тяжести помещенных в точки $P_0, P_1, \ldots, P_n$ масс $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$ в силу уравнений (4) равны:

$$\xi_1 = \sum_{i=0}^{n} \mu_i \pi_{i1}, \quad \xi_2 = \sum_{i=0}^{n} \mu_i \pi_{i2}, \ldots, \quad \xi_n = \sum_{i=0}^{n} \mu_i \pi_{in}. \tag{8}$$

В соответствии с этим центр тяжести масс $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$, помещенных в образы $'P_0, 'P_1, \ldots, 'P_n$, имеет координаты:

$$'\xi_1 = \sum_{i=0}^{n} \mu_i {}'\pi_{i1}, \quad '\xi_2 = \sum_{i=0}^{n} \mu_i {}'\pi_{i2}, \ldots, \quad '\xi_r = \sum_{i=0}^{n} \mu_i {}'\pi_{ir}. \tag{9}$$

Решая систему уравнений (8) совместно с уравнением (3)

$$\mu_0 + \mu_1 + \ldots + \mu_n = 1$$

относительно масс $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$ (вследствие линейной независимости точек $P_0, P_1, \ldots, P_n$ это возможно) и подставляя их величины в (9), получим систему линейных соотношений вида:

$$'\xi_1 = \sum_{j=0}^{n} \alpha_{1j} \xi_j, \quad '\xi_2 = \sum_{j=0}^{n} \alpha_{2j} \xi_j, \ldots, \quad '\xi_r = \sum_{j=0}^{n} \alpha_{rj} \xi_j.$$

Таким образом линейное отображение симплекса $\boldsymbol{E}^n$ на $'\boldsymbol{E}^r$ осуществляется однозначно определенным линейным отображением линейного пространства $\boldsymbol{L}^n$ на $'\boldsymbol{L}^r$.

О симплексе говорят, что он *ориентирован*, если задан некоторый определенный порядок его вершин. При этом считаем, что два порядка вершин симплекса, отличающиеся четной перестановкой*, определяют одну и ту же ориентацию симплекса. Мы будем обозначать ориентированные симплексы в отличие от неориентированных светлыми латинскими буквами. Пусть, например, ориентированный симплекс E^n определяется порядком вершин $P_0, P_1, \ldots, P_n$. Это записывается так:

$$E^n = +(P_0 P_1 \ldots P_n).$$

*См., например, *Ван-дер-Варден*, Современная алгебра, ГТТИ 1934 г., стр. 28.

Если мы поменяем местами две какие-нибудь вершины, например P_0 и P_1, то ориентация симплекса изменится. Противоположно ориентированный симплекс обозначается через

$$-E^n = -(P_0P_1 \dots P_n) = +(P_1P_0 \dots P_n).$$

При обозначении неориентированного симплекса посредством вершин мы не будем писать знака:

$$\boldsymbol{E}^n = (P_0P_1 \dots P_n).$$

Данное нами определение ориентации связано с тем, что линейное отображение n-мерного симплекса на себя, определенное перестановкой вершин симплекса, имеет положительный или отрицательный детерминант в зависимости от того, является ли эта перестановка четной или нечетной. В самом деле, каждая перестановка $n+1$ вершин может быть получена, как известно, при помощи транспозиций, т. е. перестановок двух вершин. Но линейное отображение, осуществляющее перестановку двух вершин, скажем, P_1 и P_2, имеет отрицательный детерминант. Чтобы убедиться в этом, возьмем P_0 за начало координат и ребра, идущие из P_0 в другие вершины, — за базисные векторы системы координат. В такой системе координат отображение имеет вид:

$$x_1' = x_2, \quad x_2' = x_1, \quad x_3' = x_3, \dots, \quad x_n' = x_n,$$

т. е. имеет детерминант, равный -1. Это доказательство неприменимо при $n = 1$, но утверждение остается справедливым.

Все четные перестановки вершин правильного тетраэдра геометрически отличаются от нечетных перестановок тем, что они могут быть осуществлены вращениями тетраэдра вокруг своего центра.

С целью формальных упрощений мы введем также ориентацию нульмерных симплексов. Эта ориентация заключается в том, что мы приписываем нульмерному симплексу знак плюс или минус.

Для $n = 1$ ориентация $+(P_0P_1)$ определяет некоторое направление на отрезке, по отношению к которому P_0 является «начальной вершиной», P_1 — «конечной». Поэтому ориентированный одномерный симплекс можно обозначать отрезком со стрелкой, идущей в направлении от начальной вершины к конечной. Для $n = 2$ последовательность вершин $+(P_0P_1P_2)$ и получающиеся из нее при помощи четных перестановок последовательности $+(P_1P_2P_0)$, $+(P_2P_0P_1)$ образуют одно и то же циклическое расположение вершин, т. е. они определяют некоторое направление обхода треугольника. Поэтому ориентация треугольника может быть задана окружностью со стрелкой. Для $n = 3$ ориентация $+(P_0P_1P_2P_3)$ определяет винтовое направление. Винт, идущий из вершины к противолежащей стороне (грани), при вращении, соответствующем последовательности остальных вершин, оказывается правым или левым винтом в зависимости от ориентации тетраэдра.

До сих пор мы рассматривали симплексы, расположенные в *евклидовом пространстве*, и линейные отображения их. Если теперь *топологически* отобразить такой n-мерный симплекс $\boldsymbol{e}^n$ на окрестностное пространство $\boldsymbol{M}$ (так, что каждая точка $\boldsymbol{M}$ является образом некоторой точки $\boldsymbol{e}^n$), то получается при этом образ симплекса $\boldsymbol{e}^n$, который мы будем называть также симплексом, точнее *топологическим симплексом* $\boldsymbol{E}^n$, а $\boldsymbol{e}^n$ будем называть прообразом $\boldsymbol{E}^n$. Рассматривая то же окрестностное пространство $\boldsymbol{M}$ как образ другого прообраза $\overline{\boldsymbol{e}}^n$, *мы считаем получающиеся при этом топологические симплексы* $\boldsymbol{E}^n$ *и* $\overline{\boldsymbol{E}^n}$ *одинаковыми в том только случае, когда* $\boldsymbol{e}^n$ *можно отобразить линейно на* $\overline{\boldsymbol{e}^n}$ *так, что соответствующие при этом отображении друг другу точки переходят в одну и ту же точку* $\boldsymbol{M}$. При этом на топологические симплексы переносятся с их прообразов понятия вершины, i-мерной стороны, центра, прямолинейного отрезка, границы, внутренней точки. Нельзя, однако, говорить о расстоянии двух точек топологического симплекса, так как при линейном отображении одного симплекса на другой расстояние между точками меняется. *Прямолинейные* симплексы евклидова пространства, с которыми мы до сих пор имели дело, так же могут рассматриваться, как топологические симплексы. В этом случае образ и прообраз совпадают и отображение является тождественным. Если в дальнейшем речь идет о симплексе, то при этом всегда подразумевается топологический симплекс. В зависимости от обстоятельств он может оказаться, естественно, прямолинейным.

Спроектировав, например, поверхность тетраэдра на описанную вокруг тетраэдра сферу, мы переводим четыре прямолинейных симплекса двух измерений в четыре топологических симплекса, расположенных на сфере (сферические треугольники).

Задавая порядок вершин топологического симплекса, мы можем ориентировать его совершенно так же, как прямолинейный, именно, двумя противоположными способами.

Нетрудно представить себе, что понимается под *линейным отображением двух топологических симплексов* $\boldsymbol{E}^n$ и $'\boldsymbol{E}^n$. Это — топологическое отображение, при котором прообразы поставленных в соответствие точек переходят друг в друга линейным отображением прямолинейных симплексов $\boldsymbol{e}^n$ на $'\boldsymbol{e}^n$.

§ 10. Полиэдры и их симплициальные подразделения (симплициальные комплексы)*

Из симплексов составляются полиэдры. Полиэдры являются окрестностными пространствами, составляющими объект нашего даль-

*См. *Александров – Hopf*, гл. III.

нейшего изучения. В главах II–V, VII, VIII, XI мы изучим свойства общих полиэдров. Главы VI, IX, X посвящены полиэдрам специального вида — многообразиям. Таким образом, во всех последующих рассмотрениях центральное место будут занимать полиэдры.

Полиэдр является окрестностным пространством, для которого существует симплициальное разбиение. Симплициальное разбиение окрестностного пространства $\boldsymbol{K}$ определяется следующим образом. Пусть $\boldsymbol{K}$ покрыто конечным или счетным числом симплексов размерностей от 0 до n-топологических образов прямолинейных симплексов. К множеству этих симплексов должны принадлежать вместе с каждым симплексом все его стороны. Симплексы образуют *симплициальное разбиение* окрестностного пространства, если выполняются следующие четыре условия:

(k_1) *Каждая точка пространства принадлежит по крайней мере одному симплексу.*

(k_2) *Каждая точка принадлежит лишь конечному числу симплексов.*

(k_3) *Два симплекса либо не имеют общих точек, либо один из них является стороной другого, либо они имеют общую сторону, являющуюся пересечением обоих симплексов.*

Здесь нужно вспомнить определение равенства топологических симплексов. Так, например, чтобы два топологических двумерных симплекса комплекса $\boldsymbol{K}$ имели общую сторону, недостаточно еще, чтобы при топологическом отображении в полиэдр двух треугольников — прообразов этих симплексов — две стороны этих треугольников отобразились в одно и то же множество точек комплекса $\boldsymbol{K}$. Отображение треугольников в $\boldsymbol{K}$ должно быть таким, чтобы переходили в одну и ту же точку $\boldsymbol{K}$ точки этих сторон, отнесенные друг другу при *линейном* (а не при любом топологическом) отображении одной стороны на другую.

(k_4) *Если P — точка окрестностного пространства $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{U}(P|\boldsymbol{E}_1)$, $\boldsymbol{U}(P\,|\,\boldsymbol{E}_2), \ldots,$ $\boldsymbol{U}(P\,|\,\boldsymbol{E}_r)$ — окрестности P внутри всех симплексов симплициального разбиения $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$, …, $\boldsymbol{E}_r$*, которым P принадлежит, то сумма*

$$\boldsymbol{U}(P\,|\,\boldsymbol{E}_1) + \boldsymbol{U}(P\,|\,\boldsymbol{E}_2) + , \ldots, + \boldsymbol{U}(P\,|\,\boldsymbol{E}_r)$$

является окрестностью $\boldsymbol{U}(P\,|\,\boldsymbol{K})$ точки P в $\boldsymbol{K}$.

Если окрестностное пространство $\boldsymbol{K}$ можно разбить на симплексы так, чтобы выполнялись эти четыре условия, то такое пространство называется *полиэдром***. Пусть из различных способов, которыми полиэдр может быть разбит на симплексы, выбран *один* определенный.

*Размерности симплексов $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$, …, $\boldsymbol{E}_r$ могут меняться от 0 до n. Индексы размерности, которые мы ставим всегда наверху, здесь опущены.

**Таким образом, *полиэдр* — это множество точек, могущее быть разбитым на симплексы; *комплекс* — это множество симплексов и их сторон, входящих в такое разбиение. Только что определенные полиэдры естественно называть *топологиче-*

Множество всех симплексов такого разбиения и всех их сторон называется *симплициальным разбиением полиэдра* $\boldsymbol{K}$.

Если $\boldsymbol{K}$ есть комплекс, полученный при симплициальном разбиении полиэдра $\boldsymbol{P}$, то мы будем часто полиэдр $\boldsymbol{P}$ обозначать через $\overline{\boldsymbol{K}}^*$. Два симплекса комплекса $\boldsymbol{K}$ называются *инцидентными*, если один из них является стороной другого. Симплициальный комплекс называется n-*мерным*, если он содержит по крайней мере один n-мерный симплекс, но не содержит симплексов высших размерностей.

Лемма. *Множество* $\boldsymbol{K}$ *евклидова пространства* $\boldsymbol{R}^m$, *состоящее из конечного или счетного числа прямолинейных симплексов размерностей от* 0 *до* n, *является евклидовым полиэдром, если для симплексов и их сторон, кроме условия* (k_3), *выполнено еще следующее условие:*

(p) *для каждой точки* K *существует окрестность, имеющая общие точки только с конечным числом симплексов.*

Доказательство. $\boldsymbol{K}$ как подмножество евклидова пространства представляет окрестностное пространство. Заданные симплексы и их стороны образуют симплициальное разбиение $\boldsymbol{K}$. В самом деле, кроме (k_3), очевидно, выполняются условия (k_1) и (k_2) и остается доказать только (k_4). Окрестность $\boldsymbol{U}(P \mid \boldsymbol{E}_i)$ [см. условие (k_4)] содержит некоторую ε_i-окрестность точки P относительно $\boldsymbol{E}_i$, образованную из всех точек $\boldsymbol{E}_i$, удаленных от P в $\boldsymbol{R}^m$ меньше чем на ε_i. Выберем η положительным, меньшим чем $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r$ и сверх того настолько малым, чтобы η-окрестность точки P имела общие точки только с симплексами $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \ldots, \boldsymbol{E}_r$, — это возможно по условию леммы. Тогда η-окрестность точки P относительно $\boldsymbol{K}$ представляет подмножество суммы $\boldsymbol{U}(P \mid \boldsymbol{E}_1) + \boldsymbol{U}(P \mid \boldsymbol{E}_2) + \ldots + \boldsymbol{U}(P \mid \boldsymbol{E}_r)$, т. е. эта сумма представляет окрестность P относительно $\boldsymbol{K}$. Тем самым доказано, что условие (k_4) также выполняется.

Пример 1.

Сфера есть полиэдр, так как по последней лемме совокупность сторон

скими или криволинейными полиэдрами. В отличие от криволинейных полиэдров назовем *евклидовым* полиэдром множество, лежащее в некотором евклидовом пространстве и являющееся суммой конечного или счетного числа прямолинейных симплексов, удовлетворяющих условиям (k_1), (k_2), (k_3) предыдущей страницы.

Как мы увидим ниже, всякий топологический полиэдр гомеоморфен некоторому евклидову полиэдру; это предложение дает возможность при изучении топологических свойств полиэдров ограничиваться евклидовыми полиэдрами.

Заметим еще, что конечные евклидовы полиэдры [т. е. такие, которые могут быть разбиты на конечное число симплексов, удовлетворяющих условиям (k_1), (k_2), (k_3)] могут быть определены, как множество точек, являющихся суммами конечного числа симплексов (пересекающихся между собою как угодно). О всех этих вещах см. *Александров – Hopf*, гл. III.

*В тех случаях, когда это не может вызвать недоразумений, мы при обозначении полиэдра будем опускать черту.

прямолинейного тетраэдра евклидова пространства представляет Симплициальный комплекс, который можно проектированием топологически отобразить на сферу, описанную вокруг центра тетраэдра. Топологический образ поверхности тетраэдра дает симплициальное разбиение сферы. Другие симплициальные разбиения того же комплекса получаются, если мы возьмем вместо тетраэдра, например, октаэдр или икосаэдр. Сравните с § 14.

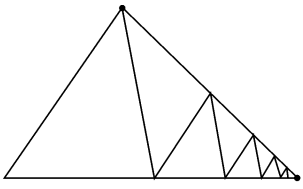


Рис. 32

Пример 2. Евклидова плоскость представляет полиэдр, так как ее можно замостить, например, равносторонними треугольниками.

Пример 3. Отдельный треугольник евклидовой плоскости естественно также является полиэдром $\boldsymbol{K}$. Однако разбиение его на бесчисленное множество треугольников, показанное на рис. 32, уже не есть симплициальное разбиение, так как для точки P не выполняется условие (k_4). В самом деле, сумма $\boldsymbol{U}(P \mid \boldsymbol{E}_1) + \boldsymbol{U}(P \mid \boldsymbol{E}_2) + \ldots + \boldsymbol{U}(P \mid \boldsymbol{E}_r)$, о которой говорится в условии (k_4), не является здесь окрестностью $\boldsymbol{U}(P \mid \boldsymbol{K})$, так как она состоит только из точки P, — кроме нульмерного симплекса P никакой другой симплекс такого разбиения точку P не содержит. Другие примеры приведены в § 14.

Покажем еще, так как это нам в дальнейшем понадобится, как симплициальный комплекс может быть построен из отдельных симплексов при помощи *отождествления*. Представим себе, что прообразы всех симплексов симплициального разбиения расположены в евклидовом пространстве достаточно высокого числа измерений. Эти прообразы, которые мы можем предполагать не имеющими попарно общих точек, образуют вместе окрестностное пространство $\boldsymbol{M}$, отображенное непрерывно на $\boldsymbol{K}$, так как каждый отдельный симплекс отображен даже топологически на подмножество $\boldsymbol{K}$. Если теперь мы будем считать эквивалентными и отождествим все точки, имеющие один и тот же образ в $\boldsymbol{K}$, то мы получим как раз симплициальный комплекс $\boldsymbol{K}$. В самом деле, выберем в $\boldsymbol{M}$ какую-нибудь окрестность каждого из прообразов произвольной точки комплекса $\boldsymbol{K}$; в силу условия (k_4) образ суммы этих окрестностей представляет окрестность образа. Поэтому, по теореме II § 8, $\boldsymbol{K}$ получается из $\boldsymbol{M}$ отождествлением эквивалентных точек.

§ 11. Схема симплициального комплекса

Из свойства (k_3) вытекает, что если имеются два различных симплекса симплициального комплекса, то все вершины одного из них не могут совпадать со всеми вершинами другого, т. е. хотя бы один из симплексов имеет по крайней мере одну вершину, не принадлежащую

другому симплексу. Поэтому симплициальный комплекс определяется всеми своими вершинами, если мы дадим так называемую *схему* комплекса, т. е. укажем на какие из них должны быть натянуты симплексы*. Схема комплекса, изображенного на рис. 33 и состоящего из треугольника и отрезка, имеет такой вид:

$$(P_0P_1P_2);\ (P_0P_1);\ (P_1P_2);\ (P_2P_0);\ (P_2P_3);\ (P_0);\ (P_1);\ (P_2);\ (P_3).$$

Позже мы выведем для описания комплекса схемы иного рода, — так называемые матрицы инциденций.

Если схемы двух симплициальных комплексов $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{K}'$ одинаковы, то комплексы являются симплициальными разбиениями гомеоморфных полиэдров $\overline{\boldsymbol{K}}$ и $\overline{\boldsymbol{K}'}$. Более того, полиэдры $\overline{\boldsymbol{K}}$ и $\overline{\boldsymbol{K}'}$ могут быть топологически отображены один на другой так, что симплексы $\boldsymbol{K}$ линейно переводятся в симплексы $\boldsymbol{K}'$. Для того чтобы осуществить такое топологическое отображение, заметим сначала, что всякая точка P комплекса $\boldsymbol{K}$ является внутренней точкой в точности одного симплекса симплициального разбиения, так как по условию (k_1) P принадлежит *по крайней мере* одному симплексу и является поэтому либо внутренней точкой этого симплекса, либо внутренней точкой одной из его сторон. Однако в силу условия (k_3) не существует двух комплексов, имеющих P своей внутренней точкой.

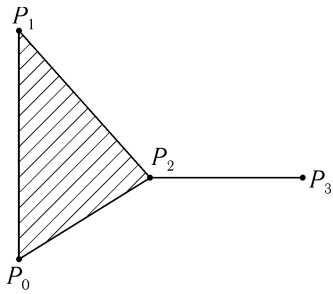


Рис. 33

Пусть теперь $\boldsymbol{E}$ есть симплекс комплекса $\boldsymbol{K}$, имеющий P своей внутренней точкой. Найдем вершины комплекса $\boldsymbol{K}'$, соответствующие вершинам $\boldsymbol{E}$. Эти вершины являются вершинами симплекса $\boldsymbol{E}'$, линейно отображенного (благодаря соответствию вершин) на $\boldsymbol{E}$. Отнесем теперь точке P в полиэдре $\overline{\boldsymbol{K}'}$ точку P' — образ точки P при этом линейном отображении симплекса $\boldsymbol{E}$ на симплекс $\boldsymbol{E}'$. Этим мы осуществляем взаимно однозначное отображение точек полиэдра $\overline{\boldsymbol{K}}$ на точки $\overline{\boldsymbol{K}'}$. Докажем, что это отображение топологическое. В самом деле, если $\boldsymbol{U}(P' \mid \boldsymbol{K}')$ есть окрестность P' в $\boldsymbol{K}'$ и $\boldsymbol{E}'_1, \boldsymbol{E}'_2, \ldots, \boldsymbol{E}'_r$ — симплексы, содержащие P', то пересечение $\boldsymbol{U}(P' \mid \boldsymbol{K}')$ с симплексом $\boldsymbol{E}'_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ в силу определения окрестности в подмножестве окрестностного пространства есть окрестность $\boldsymbol{U}(P' \mid \boldsymbol{E}'_i)$ точки P' в симплексе $\boldsymbol{E}'_i$. Так как симплекс $\boldsymbol{E}_i$ посредством сконструированного линейного отображения топологически отображается на $\boldsymbol{E}'_i$, то окрестности $\boldsymbol{U}(P' \mid \boldsymbol{E}'_i)$ соответствует окрестность $\boldsymbol{U}(P \mid \boldsymbol{E}_i)$ в $\boldsymbol{E}_i$. По условию (k_4)

*См. по этому поводу понятие поля вершин, *Александров – Hopf*, гл. IV.

сумма $\boldsymbol{U}(P \mid \boldsymbol{E}_1) + \boldsymbol{U}(P \mid \boldsymbol{E}_2) + \ldots + \boldsymbol{U}(P \mid \boldsymbol{E}_r)$ является тогда окрестностью точки P в $\boldsymbol{K}$. Ее образ в $\boldsymbol{K}'$ принадлежит $\boldsymbol{U}(P' \mid \boldsymbol{K}')$. Таким образом, отображение непрерывно в направлении от $\boldsymbol{K}$ к $\boldsymbol{K}'$. Но так как $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{K}'$ совершенно равноправны между собой, то это отображение непрерывно и в противоположном направлении, т. е. представляет топологическое отображение.

Пусть нам дано состоящее из конечного или счетного числа элементов множество $\boldsymbol{W}$, в котором определены некоторые «отмеченные» подмножества. Разберем, в каком случае это множество служит схемой n-мерного симплициального комплекса в том смысле, что элементы $\boldsymbol{W}$ взаимно однозначно соответствуют вершинам комплекса, а отмеченные подмножества — совокупностям вершин симплексов. Для этого, очевидно, необходимо, чтобы выполнялись следующие три условия:

(Cx_1) Каждое подмножество отмеченного подмножества является снова отмеченным подмножеством, так как вместе с каждым симплексом все его стороны принадлежат симплициальному комплексу.

(Cx_2) Каждое отмеченное подмножество состоит максимум из $n+1$ элементов.

(Cx_3) Каждый элемент входит только в конечное число отмеченных подмножеств, — в силу условия (k_2).

Чтобы показать, что эти условия также достаточны, построим в $(2n+1)$-мерном евклидовом пространстве $\boldsymbol{R}^{2n+1}$ соответствующий прямолинейный комплекс. С этой целью установим взаимно однозначное соответствие между элементами множества $\boldsymbol{W}$ и точками $P_1, P_2, \ldots$ пространства $\boldsymbol{R}^{2n+1}$, причем потребуем, чтобы эти точки удовлетворяли следующим условиям:

(1) Они не имеют точки накопления.

(2) При $k \leqslant 2n+1$ на каждые $k+1$ точек можно натянуть единственное k-мерное линейное пространство. Другими словами, минимальное линейное пространство, в котором лежат любые $k+1$ точек, есть пространство k измерений.

Оба условия всегда можно выполнить. В самом деле, пусть первые r точек $P_1, P_2, \ldots, P_r$ уже выбраны в соответствии с условием (2). Возьмем за P_{r+1} точку, у которой первая координата x_1 по крайней мере на 1 отличается от каждой из координат x_1 точек $P_1, P_2, \ldots, P_r$ и которая не лежит ни в одном из линейных пространств, натянутых на каждые k из точек $P_1, P_2, \ldots, P_r$ $(r \leqslant 2n+1)$. Последнее условие всегда выполнимо, так как каждое из конечного числа этих избегаемых линейных пространств имеет размерность самое большее $2n$. Но тогда условие (2) выполняется и для точек $P_1, P_2, \ldots, P_{r+1}$; отсюда следует, что и вся последовательность может быть подобрана надлежащим образом.

Условие (1) выполняется в виду того, что в случае бесконечного числа точек $P_1, P_2, \ldots$ их координаты x_1 неограниченно возрастают.

Отнесем теперь каждому отмеченному подмножеству, состоящему

из $p+1$ элементов множества $\boldsymbol{W}$, симплекс, натянутый на соответствующие этим элементам точки последовательности $P_1, P_2, \ldots$. Мы получим таким образом конечное или бесконечное множество $\boldsymbol{K}$ прямолинейных симплексов размерностей от 0 до n, расположенных в $\boldsymbol{R}^{2n+1}$. Пользуясь леммой § 10, легко доказать, что $\boldsymbol{K}$ — комплекс. Рассмотрим два симплекса $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{E}^p$ и $\boldsymbol{E}^q$. Если $k+1$ — число вершин, принадлежащих по крайней мере одному из симплексов $\boldsymbol{E}^p$, $\boldsymbol{E}^q$, то $k+1 \leqslant 2n+2$, так как $p \leqslant n$, $q \leqslant n$. По условию (2) на эти $(k+1)$ вершин натягивается k-мерный симплекс $\boldsymbol{E}^k$, сторонами которого являются $\boldsymbol{E}^p$ и $\boldsymbol{E}^q$. Поэтому $\boldsymbol{E}^p$ и $\boldsymbol{E}^q$ либо не имеют общих точек, либо имеют своим пересечением общую сторону.

Мы должны далее показать, что для каждой точки Q из $\boldsymbol{K}$ существует окрестность, имеющая общие точки только с конечным числом симплексов. Опишем вокруг Q шар произвольного радиуса $\varepsilon > 0$. Пусть $\overline{x}_1$ есть координата x_1 точки Q. В $\boldsymbol{K}$ существует только конечное число вершин с координатами x_1, меньшими, чем $\overline{x}_1 + \varepsilon$. По ($\mathrm{Cx}_3$) существует лишь конечное число симплексов $\boldsymbol{K}$, инцидентных с этими вершинами, и только эти симплексы могут иметь общие точки с ε-шаром, описанным вокруг Q.

Отсюда, по лемме § 10, следует, что $\boldsymbol{K}$ есть комплекс. Что комплекс $\boldsymbol{K}$ имеет схему $\boldsymbol{W}$, следует непосредственно из способа его построения.

Мы доказали вместе с тем следующее предложение:

Каждый n-мерный комплекс можно прямолинейно вложить в $(2n+1)$-мерное евклидово пространство, т. е. для каждого n-мерного комплекса существует в $\boldsymbol{R}^{2n+1}$ прямолинейный комплекс с той же схемой.

Из доказанного очевидно следует теорема:

Теорема. *Всякий n-мерный полиэдр гомеоморфен некоторому евклидову полиэдру, лежащему в $(2n+1)$-мерном евклидовом пространстве.*

Существует основывающееся на понятии схемы комплекса *чисто комбинаторное* построение топологии, которому мы в этой книге следовать не будем. При таком построении комплекс не является только целесообразным средством описания полиэдра, определенного как окрестностное пространство, а, напротив, служит самостоятельным предметом исследования. Посредством так называемых «элементарных преобразований», например комбинаторных подразделений, комплекс преобразуется в другие комплексы. Эти элементарные преобразования играют роль гомеоморфных отображений; в дальнейшем в топологии поверхностей нам представится случай разобрать пример элементарного преобразования (см. стр. 174). В чисто комбинаторной топологии симплекс можно не считать заполненным непрерывным пространственным веществом, — он представляет просто отмеченное множество, состоящее из конечного числа вершин. В такой топологии исходным

объектом изучения являются счетное число вершин схем и их отмеченные подмножества, а единственными операциями — элементарные преобразования. Для нас же исходным объектом служат непрерывные множества точек и их окрестности, основной операцией — непрерывные отображения*[10].

§ 12. Конечные и однородные комплексы. Многообразия

Симплициальный комплекс называется *конечным* или *бесконечным*, смотря по тому, составлен ли он из конечного или бесконечного числа симплексов. Если $\boldsymbol{K}$ — конечный комплекс, то в полиэдре $\overline{\boldsymbol{K}}$ каждое бесконечное множество точек имеет по крайней мере одну точку накопления, так как тогда существует по крайней мере один симплекс, содержащий бесконечное число точек множества. Если, напротив, $\boldsymbol{K}$ — бесконечный комплекс, то центры всех его симплексов представляют пример бесконечного подмножества полиэдра $\overline{\boldsymbol{K}}$ без точки накопления в $\overline{\boldsymbol{K}}$. Действительно, если P — какая-нибудь точка полиэдра $\overline{\boldsymbol{K}}$, то симплексы $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$, ..., $\boldsymbol{E}_r$, к которым P принадлежит, образуют по условию (k_4) окрестность точки P. Эта окрестность содержит только конечное число точек нашего множества, именно — центры симплексов $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$, ..., $\boldsymbol{E}_r$ и их сторон. Поэтому понятия «конечный» и «бесконечный» комплексы оказываются *топологически инвариантными*; *полиэдр, допускающий в качестве симплициального разбиения конечный симплициальный комплекс, не может быть гомеоморфен полиэдру «бесконечному», т. е. полиэдру, который есть сумма симплексов бесконечного комплекса* (ср. с примером 3 § 10). Мы имеем право, таким образом, говорить просто о конечном или бесконечном полиэдре. «Прокалывая» сферу, т. е. удаляя из нее одну точку, мы превращаем конечный полиэдр, образуемый сферой, в бесконечный, именно — в евклидову плоскость (см. стр. 41).

Выберем произвольное непустое множество симплексов симплициального комплекса. Эти симплексы вместе со всеми своими сторонами образуют *подкомплекс* $\boldsymbol{K}_1$ комплекса $\boldsymbol{K}$. Очевидно, подкомплекс есть также симплициальный комплекс.

Подкомплекс $\boldsymbol{K}_1$ называется *изолированным* (в $\boldsymbol{K}$), если каждый симплекс из $\boldsymbol{K}$, имеющий своей стороной какой-нибудь симплекс из $\boldsymbol{K}_1$, также принадлежит к комплексу $\boldsymbol{K}_1$. Для каждого комплекса $\boldsymbol{K}$ существует определенное максимальное число τ изолированных подкомплексов; на это максимальное число изолированных подкомплексов $\boldsymbol{K}$ можно разбить лишь одним способом (τ может быть равно ∞). Если $\tau = 1$, то комплекс $\boldsymbol{K}$ называется *связным*. Связный симплициальный комплекс характеризуется, очевидно, тем, что две любые вершины

*По этим вопросам см. *Александров – Hopf*, гл. IV.

его P и Q можно соединить *путем*, состоящим из ребер комплекса, т. е. последовательностью ориентированных ребер, из которых первое имеет P своим началом, последнее имеет Q своим концом и начало каждого следующего ребра совпадает с концом предыдущего (*реберный путь*).

Изолированный подкомплекс можно характеризовать *топологически инвариантно* как непустое подмножество $\boldsymbol{K}_0$ комплекса $\boldsymbol{K}$ такое, что $\overline{\boldsymbol{K}}_0$ является одновременно открытым и замкнутым в $\overline{\boldsymbol{K}}$; этому последнему условию эквивалентно требование, что $\overline{\boldsymbol{K}}_0$ не имеет границы.

Доказательство. Если $\boldsymbol{K}_0$ — изолированный подкомплекс, то $\overline{\boldsymbol{K}}_0$, очевидно является непустым подмножеством без границы. Пусть, обратно, $\boldsymbol{N}$ — произвольное непустое подмножество $\overline{\boldsymbol{K}}$, не имеющее в $\overline{\boldsymbol{K}}$ границы. Если P — точка подмножества $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{E}^i$ какой-нибудь симплекс $\boldsymbol{K}$, содержащий P, то $\boldsymbol{E}^i$ целиком принадлежит $\boldsymbol{N}$. В самом деле, допустим, что P' — не принадлежащая к $\boldsymbol{N}$ точка $\boldsymbol{E}^i$. Приведем в линейное соответствие точкам прямолинейного отрезка PP' значения параметра s, изменяющегося от 0 до 1, и рассмотрим верхнюю границу $\overline{s}$ значений параметра, соответствующих всем принадлежащим к $\boldsymbol{N}$ точкам отрезка. В каждой окрестности точки $\overline{P}$, соответствующей значению $\overline{s}$, находятся как точки, принадлежащие к $\boldsymbol{N}$, так и точки, ему не принадлежащие, т. е. $\overline{P}$ есть граничная точка $\boldsymbol{N}$, что противоречит предположению. Этим доказано, что $\boldsymbol{N} - \overline{\boldsymbol{K}}_0$, где $\boldsymbol{K}_0$ — подкомплекс комплекса $\boldsymbol{K}$, содержащий вместе с каждой точкой P все симплексы $\boldsymbol{K}$, к которым P принадлежит. Поэтому $\boldsymbol{K}_0$ есть изолированный подкомплекс.

Из полученной топологической характеристики изолированных подкомплексов следует также *топологическая инвариантность понятия «связный» и топологическая инвариантность числа* τ.

n-мерный симплициальный комплекс называется *однородным*, если каждый k-мерный симплекс его $(k < n)$ является стороной по крайней мере одного n-мерного симплекса. В противном случае комплекс называется *неоднородным*. Под *границей* однородного n-мерного комплекса понимают совокупность всех его $(n-1)$-мерных симплексов, инцидентных с нечетным числом n-мерных симплексов*. Если, например, однородный комплекс состоит из четырех плоских треугольников, примыкающих к одной общей стороне подобно тому, как страницы книги примыкают к ее корешку, то граница комплекса состоит из всех сторон треугольников, за исключением их общей стороны. Такое определение границы комплекса согласуется с данным выше, на стр. 56, определением границы симплекса, так как отдельный симплекс является однородным комплексом. Точно так же данному здесь определению границы удовлетворяет граница выпуклого множества (стр. 55) и граница эле-

*Это так называемая *граница по модулю* 2.

мента (стр. 71). Это будет доказано ниже (стр. 72), когда мы выясним, что выпуклая область и элемент являются однородными комплексами.

Топологическую инвариантность понятий «n-мерный», «однородный», «граница» мы сможем доказать лишь позже (в главе V). Так как размерность комплекса топологически инвариантна, то целесообразно отмечать ее посредством *верхнего индекса*: $\boldsymbol{K}^n$. Для размерности нуль (но только для нее) ясно уже и сейчас, что она топологически инвариантна: нульмерный комплекс $\boldsymbol{K}$ состоит только из изолированных точек, каждая из которых является своей собственной окрестностью в $\overline{\boldsymbol{K}}$, а это не имеет места ни для каких комплексов высших размерностей.

Особый интерес среди полиэдров представляют многообразия. n-мерный полиэдр называется *многообразием*, если для каждой его точки существует окрестность, которую можно топологически отобразить на внутренность n-мерного шара. Заметим, что внутренность n-мерного шара образуется точками n-мерного евклидова пространства, координаты которых удовлетворяют неравенству $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 < 1$. В качестве примера одномерного многообразия может служить окружность; примером двумерного многообразия является сфера. Напротив, круг (с границей) не является многообразием, так как его граничные точки, как мы покажем в главе V, не подчиняются наложенному условию относительно окрестностей. Точно так же множество всех точек, лежащих на ребрах тетраэдра, не является одномерным многообразием.

Многообразия представляют весьма естественные образования — уже трехмерное евклидово пространство является многообразием. Несмотря на это, многообразия более чем трех измерений представляют много трудностей для изучения (§ 68).

§ 13. Барицентрическое подразделение

В дальнейшем мы будем изучать свойства полиэдра, исходя из данного произвольного симплициального разбиения его. Другими словами, нас интересуют те свойства комплексов, являющихся симплициальными разбиениями одного и того же полиэдра, которые общи всем таким комплексам.

Мы не в состоянии в настоящее время дать общей характеристики всех возможных разбиений одного и того же комплекса. Однако,чтобы достигнуть нашей цели, мы должны все же научиться из данного симплициального разбиения получать при помощи подразделений другие разбиения комплекса. Лишь имея возможность подразделить данное разбиение как угодно мелко, мы сможем связать его с любым другим разбиением и с самим полиэдром (см. IV главу).

Подразделение симплициального комплекса состоит в том, что

каждый симплекс разбивается на меньшие, частичные симплексы так, что опять получается симплициальный комплекс. Нам понадобится в дальнейшем только некоторое определенное подразделение, так называемое *барицентрическое*. Оно получается следующим образом: сперва мы подразделяем все ребра симплициального комплекса, вводя их центры в качестве новых вершин; тогда каждое ребро распадается на два одномерных симплекса. Затем из центра каждого двумерного симплекса мы проектируем прямыми линиями уже подразделенные граничные симплексы его (т. е. ребра). При этом центр топологического симплекса определяется с помощью прямолинейного симплекса-прообраза (стр. 59). Точно так же и проектирование подразделенных ребер производится в прообразе и затем переносится на топологический симплекс. Таким образом каждый двумерный симплекс разбивается на 6 частичных двумерных симплексов (проектирующим конусом одномерного симлекса является двумерный симплекс). Далее мы проектируем из центра каждого трехмерного симплекса его уже подразделенные стороны и получаем из каждого такого симплекса 4! частичных трехмерных симплекса, а также новые двумерные и одномерные симплексы и один новый нульмерный симплекс — центр проекций. Таким же образом мы продолжаем и дальше, до n-мерных симплексов включительно. Рис. 34 показывает барицентрическое подразделение двумерного симплекса.

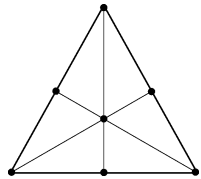


Рис. 34

Барицентрическое подразделение симплициального комплекса $\boldsymbol{K}$ представляет снова симплициальный комплекс. Это следует, например, из леммы § 10, если мы предположим, что комплекс $\boldsymbol{K}$ прямолинейно вложен в евклидово пространство и там подразделен.

Так как барицентрическое подразделение симплициального комплекса снова есть комплекс, то мы можем опять барицентрически подразделить его. Таким образом мы приходим к g-кратным барицентрическим подразделениям. Выбирая g достаточно большим, мы можем сделать частичные симплексы как угодно малыми. Точнее, имеет место следующее предложение:

Лемма. *Всякий частичный симплекс g-кратного барицентрического подразделения n-мерного прямолинейного симплекса $\boldsymbol{E}^n$ помещается в симплексе, расположенном подобно с симплексом $\boldsymbol{E}^n$ и уменьшенном по сравнению с $\boldsymbol{E}^n$ в $\left(\frac{n}{n+1}\right)^g$ раз.*

Доказательство. Достаточно доказать лемму для случая $g = 1$ и затем для общего случая применить ее последовательно g раз. Пусть $\boldsymbol{e}^n$ — один из симплексов барицентрического подразделения симплекса $\boldsymbol{E}^n = (P_0P_1 \dots P_n)$. Не делая существенных ограничений, мы можем считать, что вершины M_0, M_1, …, M_n симплекса $\boldsymbol{e}^n$ являются

как раз центрами сторон (P_0), (P_0P_1), ..., $(P_0P_1\ldots P_n)$. Барицентрические координаты точки M_i (см. стр. 56) таковы:

$$\mu_0 = \mu_1 = \ldots = \mu_i = \frac{1}{i+1}, \quad \mu_{i+1} = \mu_{i+2} = \ldots = \mu_n = 0. \tag{1}$$

В декартовой системе координат $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, базисные векторы которой идут из P_0 в вершины $P_1, P_2, \ldots, P_n$, координаты $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ точек $M_0, M_1, \ldots, M_n$ совпадают соответственно с барицентрическими координатами $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_b$ (стр. 54).

$\boldsymbol{E}^n$ определен неравенствами:

$$\xi_1 \geqslant 0,\ \xi_2 \geqslant 0, \ldots, \xi_n \geqslant 0, \quad \xi_1 + \xi_1 + \ldots + \xi_n \leqslant 1. \tag{2}$$

Рассмотрим теперь симплекс $'\boldsymbol{e}^n$, определяемый неравенствами:

$$\xi_1 \geqslant 0,\ \xi_2 \geqslant 0, \ldots, \xi_n \geqslant 0, \quad \xi_1 + \xi_1 + \ldots + \xi_n \leqslant \frac{n}{n+1}, \tag{3}$$

расположенный с $\boldsymbol{E}^n$ подобно, но уменьшенный по сравнению с ним в $\frac{n}{n+1}$ раз.

Координаты (1) точек M_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ удовлетворяют неравенствам (3). Поэтому вершины $\boldsymbol{e}^n$, а вследствие выпуклости и весь симплекс $\boldsymbol{e}^n$, целиком принадлежит $'\boldsymbol{e}^n$.

Упражнение. Пусть точки окрестностного пространства разбиты на симплексы так, что выполняются условия (k_1), (k_2) и (k_4) и каждые два симплекса либо не имеют общих точек, либо инцидентны, либо имеют одну или несколько общих сторон. Докажите, что барицентрическим подразделением всех симплексов можно превратить такое пространство в комплекс. (При помощи метода полной индукции по отношению к размерности комплекса покажите, что для барицентрического подразделения выполнено также условие (k_3) § 10, т. е. что два симплекса барицентрического подразделения, имеющие общие точки, примыкают друг к другу лишь вдоль одной целой общей стороны.)

§ 14. Примеры полиэдров и комплексов

Полиэдр является весьма общим понятием. Чтобы дать представление об его объеме, рассмотрим некоторые наиболее известные и важные окрестностные пространства и докажем, что они являются полиэдрами. В дальнейшем мы сможем воспользоваться этими пространствами в качестве простейшего иллюстративного материала.

n-мерный элемент

Множество точек n-мерного евклидова пространства $\boldsymbol{R}^n$, коорди-

наты которых удовлетворяют неравенству

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1 \quad (n \geqslant 1), \tag{1}$$

образуют *единичный шар* евклидова пространства. Топологический образ такого шара называется *n-мерным элементом*. Точки, для координат которых в соотношении (1) имеет место знак равенства, образуют границу шара или, после соответствующего топологического отображения, *границу элемента* (см. стр. 55). Топологическая характеристика границы будет дана в главе V.

Выпуклым *n-мерным телом* называется замкнутое выпуклое множество $\boldsymbol{B}^n$ в $\boldsymbol{R}^n$, содержащее внутренние точки.

Теорема. *Выпуклое n-мерное тело $\boldsymbol{B}^n$ есть n-мерный элемент.*

Для доказательства опишем вокруг внутренней точки O множества $\boldsymbol{B}$ шар $\boldsymbol{k}$, целиком принадлежащий $\boldsymbol{B}$, и обозначим границу этого шара через $\overline{\boldsymbol{k}}$ (рис. 35). Покажем сначала, что луч, выходящий из O, встречает границу $\overline{\boldsymbol{B}}$ множества $\boldsymbol{B}$ в точности в одной точке. Так как $\boldsymbol{B}$ — ограниченное множество, то луч встречает границу $\boldsymbol{B}$ по крайней мере в одной точке. Но $\overline{\boldsymbol{B}}$ как граница $\boldsymbol{B}$ является замкнутым подмножеством $\boldsymbol{R}^n$ (стр. 46); поэтому среди точек $\overline{\boldsymbol{B}}$, лежащих на луче, существует точка, наиболее удаленная от O. Назовем ее $\overline{P}$. Все точки отрезка $O\overline{P}$, за исключением $\overline{P}$, являются внутренними точками $\boldsymbol{B}$. В самом деле, мы можем соединить точку $\overline{P}$ прямыми линиями со всеми точками шара $\boldsymbol{k}$; тогда, вследствие выпуклости $\boldsymbol{B}$, все соединяющие отрезки будут принадлежать $\boldsymbol{B}$ и вокруг каждой точки отрезка $O\overline{P}$ можно будет описать шар, целиком принадлежащий $\boldsymbol{B}$, именно — шар, расположенный подобно с шаром $\boldsymbol{k}$ по отношению к центру подобия $\overline{P}$.

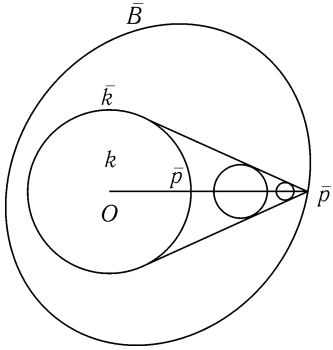


Рис. 35

Обозначим точку пересечения луча $O\overline{P}$ с $\overline{\boldsymbol{k}}$ буквой $\overline{p}$. Ставя в соответствие точкам $\overline{P}$ точки $\overline{p}$, мы задаем взаимно однозначное отображение границы $\overline{\boldsymbol{B}}$ на $\overline{\boldsymbol{k}}$. Это отображение непрерывно в направлении $\overline{p} \to \overline{P}$. В самом деле, если бы отображение не было непрерывно в какой-нибудь точке $\overline{p}$, то для некоторой заданной окрестности $\boldsymbol{U}(\overline{P} \,|\, \overline{\boldsymbol{B}})$ существовала бы сходящаяся к точке $\overline{p}$ последовательность точек $\overline{p}_1, \overline{p}_2, \ldots$ на $\overline{\boldsymbol{k}}$, образы которых $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots$ лежали бы вне $\boldsymbol{U}(\overline{P} \,|\, \overline{\boldsymbol{B}})$. Эти образы имеют на $\overline{\boldsymbol{B}}$ точку накопления. Так как эта точка накопления должна лежать на луче $O\overline{P}$, то ею может быть лишь $\overline{P}$, т. е.

почти все точки $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots$ лежат в $\boldsymbol{U}(\overline{P} \mid \overline{\boldsymbol{B}})$, что противоречит нашему предположению. По теореме V, стр. 51, наше отображение непрерывно тогда и в направлении от $\overline{P} \to \overline{p}$, т. е. является топологическим. Отображение $\overline{\boldsymbol{B}}$ на $\overline{\boldsymbol{k}}$ можно дополнить до отображения всего множества $\boldsymbol{B}$ на шар $\boldsymbol{k}$, для этого достаточно отрезки $O\overline{P}$ линейно отобразить на отрезки $O\overline{p}$.

Так как прямолинейный n-мерный симплекс представляет выпуклое тело евклидова пространства $\boldsymbol{R}^n$, то его можно топологически отобразить на шар. Таким образом доказано, что *шар, а вместе с тем и n-мерный элемент, является полиэдром.*

n-мерная сфера $\boldsymbol{S}^n$

Множество точек $(n+1)$-мерного евклидова пространства $\boldsymbol{R}^{n+1}$, координаты которых удовлетворяют соотношению

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_{n+1}^2 = 1 \quad (n \geqslant 0),$$

называется *b-мерной единичной сферой в $\boldsymbol{R}^{n+1}$*. Топологический образ ее называется просто *n-мерной сферой* или *n-мерным сферическим пространством* и обозначается через $\boldsymbol{S}^n$. Нульмерной сферой является пара точек.

Мы доказали выше существование топологического отображения выпуклого тела $\boldsymbol{B}^{n+1}$ на $(n+1)$-мерный единичный шар, при котором граница $\boldsymbol{B}^{n+1}$ отображается на границу шара. Вследствие этого граница *$(n+1)$-мерного выпуклого тела $\boldsymbol{B}^{n+1}$ представляет n-мерную сферу.* В частности, n-мерная сфера гомеоморфна границе $(n+1)$-мерного симплекса. Отсюда мы получаем сразу простейшее симплициальное разбиение n-мерной сферы. Для $n = 2$ это разбиение состоит из четырех граней тетраэдра.

Нам понадобится в дальнейшем, наряду с этим тетраэдральным разбиением, еще другое симплициальное разбиение сферы $\boldsymbol{S}^n$, представляющее обобщение на n измерений октаэдрального разбиения двумерной сферы. Пусть

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n+1}$$

суть единичные векторы, идущие из начала координат 0 пространства $\boldsymbol{R}^{n+1}$ в точки

$$(1, 0, 0, \ldots, 0),\ (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, 0, \ldots, 1).$$

На векторы

$$\varepsilon_1\mathbf{v}_1, \varepsilon_2\mathbf{v}_2, \ldots, \varepsilon_{n+1}\mathbf{v}_{n+1} \quad (\varepsilon_k = \pm 1) \tag{2}$$

можно «натянуть» $(n+1)$-мерный симплекс, именно симплекс, вершины которого суть точка O и концы векторов (2). Таких симплексов существует столько же, сколько имеется комбинаций знаков в (2),

т. е. 2^{n+1}. Каждые два из этих симплексов либо пересекаются по стороне, натянутой на их общие векторы, либо имеют лишь одну общую точку — начало координат O; в последнем случае векторы одного $(n+1)$-мерного симплекса противоположны по знакам векторам другого. В силу леммы § 10 эти 2^{n+1} симплексов образуют симплициальный комплекс. Легко видеть, что этот комплекс представляет выпуклое тело, следовательно, $(n+1)$-мерный элемент. Граница его, n-мерная сфера, состоит из 2^{n+1} n-мерных симплексов, имеющих вершинами концы векторов (2). Эти симплексы образуют «октаэдральное» разбиение n-мерной сферы. В противоположность тетраэдральному оно симметрично относительно центра, т. е. при отображении

$$x_1' = -x_1,\ x_2' = -x_2, \ldots,\ x_{n+1}' = -x_{n+1}$$

октаэдральное разбиение переходит само в себя. Такое отображение переводит диаметрально-противоположные точки сферы друг в друга. Линейное пространство («плоскость») $x_{n+1} = 0$ разбивает n-мерную сферу на две полусферы. Эти полусферы не что иное, как n-мерные элементы, — в этом можно убедиться, проектируя их, например, параллельно оси x_{n+1} на «плоскость» $x_{n+1} = 0$. Таким образом, n-мерную сферу можно получить из двух n-мерных шаров, топологически отображая их границы друг на друга и отождествляя соответствующие точки[11]. n-мерная сфера получается также, если мы отождествим те граничные точки n-мерного шара

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1,$$

которые являются зеркальными отображениями друг друга в экваториальной плоскости $x_n = 0$. В самом деле, экваториальная плоскость разбивает шар на два n-мерных элемента, отождествление границ которых дает сферу.

Проколотая n-мерная сфера, т. е. сфера, из которой удалена одна точка, гомеоморфна евклидову пространству $\boldsymbol{R}^n$ — это вытекает из того, например, что формулы стереографической проекции (стр. 41) справедливы для любой размерности n.

Дополним $\boldsymbol{R}^n$ несобственной (или бесконечно удаленной) точкой, — образом центра проекции. Окрестности этой точки нужно определить как образы окрестностей центра проекции на n-мерной сфере, т. е. как множества точек $\boldsymbol{R}^n$, лежащих вне сферы достаточно большого радиуса и включающих, естественно, самое несобственную точку. Пополненное одной бесконечно удаленной точкой n-мерное пространство взаимно однозначно (и притом топологически) отображается при помощи стереографической проекции уже на всю n-мерную сферу. Таким образом, можно сказать, что присоединение одной несобственной точки к евклидову пространству превращает его в сферу.

Симплициальная звезда $\boldsymbol{S}\mathbf{t}^n$

В дальнейшем нам придется неоднократно пользоваться так называемыми *симплициальными звездами*. Пусть $\boldsymbol{K}^{n-1}$ — $(n-1)$-мерный конечный симплициальный комплекс. Симплициальной звездой называется n-мерный симплициальный комплекс $\boldsymbol{S}\mathbf{t}^n$, схема которого получается из схемы комплекса $\boldsymbol{K}^{n-1}$ следующим образом: берется новая вершина O и из каждого i-мерного симплекса $\boldsymbol{E}^i = (P_0P_1\dots P_i)$ комплекса $\boldsymbol{K}^{n-1}$ образуют $(i+1)$-мерный симплекс $(OP_0P_1\dots P_i)$. Точка O называется центром, а комплекс $\boldsymbol{K}^{n-1}$ — *краем* симплициальной звезды. Необходимо иметь в виду различие между краем звезды и границей симплекса или выпуклой области. Так, например, если звездой является симплекс, то край такой звезды не совпадает с границей симплекса. В качестве примера симплициальной звезды могут служить все симплексы симплициального комплекса, имеющие одну общую вершину. На рис. 36 дан пример двумерной звезды $\boldsymbol{S}\mathbf{t}^2$; симплексы ее края $\boldsymbol{K}^1$ отмечены жирными линиями и точками.

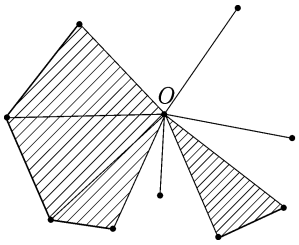


Рис. 36

Каждая выпуклая n-мерная область евклидова пространства $\boldsymbol{R}^n$, граница которой есть комплекс $\boldsymbol{S}^{n-1}$, состоящий из прямолинейных $(n-1)$-мерных симплексов, порождает звезду $\boldsymbol{S}\mathbf{t}^n$. В самом деле, будем проектировать прямолинейные граничные симплексы из какой-нибудь внутренней точки области. В силу леммы §10 (относительно комплексов евклидова пространства) при этом получается n-мерный комплекс, являющийся симплициальной звездой, так как его схема совпадает со схемой некоторой звезды $\boldsymbol{S}\mathbf{t}^n$.

n-мерное проективное пространство $\boldsymbol{P}^n$

Рассмотрим окрестностное пространство, «точками» которого являются прямые, проходящие через начало координат O $(n+1)$-мерного евклидова пространства $\boldsymbol{R}^{n+1}$ $(n \geqslant 2)$. Окрестности в нем определим следующим образом: мы берем евклидову окрестность какой-нибудь точки, лежащей на прямой g, и окрестностью самой прямой g считаем совокупность всех прямых, проходящих через точки этой евклидовой окрестности (и через точку O). В частности, прямые, соединяющие O со всеми точками ε-шара, описанного вокруг какой-нибудь точки, взятой на прямой g, отличной от O, образуют специальную окрестность g, — «круговой конус», имеющий g своей осью. Как мы сейчас покажем, такое окрестностное пространство $\boldsymbol{P}^n$, называемое *n-мерным проективным пространством*, есть полиэдр.

Прямая g пересекает единичную n-мерную сферу $\boldsymbol{S}^n$ пространства $\boldsymbol{R}^{n+1}$ в двух ее диаметрально-противоположных точках P_1 и P_2. *Если в множестве* $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{S}^n$ *всех точек* n*-мерной сферы считать эквивалентными диаметрально-противоположные точки сферы и отождествить их, то получается проективное пространство.* Но пары диаметрально-противоположных точек n-мерной сферы взаимно однозначно отображаются на прямые, из которых составлено $\boldsymbol{P}^n$. Для доказательства того, что $\boldsymbol{P}^n$ получается отождествлением этих пар, остается только показать, что сумме двух любых окрестностей $\boldsymbol{U}(P_1 \,|\, \boldsymbol{M})$ и $\boldsymbol{U}(P_2 \,|\, \boldsymbol{M})$ соответствует окрестность прямой g и что таким путем можно получить все окрестности g; мы предоставляем это читателю.

Проективное пространство $\boldsymbol{P}^n$ *можно получить также из* n*-мерного шара путем отождествления диаметрально-противоположных точек его границы* — $(n-1)$*-мерной сферы.* Такое представление $\boldsymbol{P}^n$ для $n = 2$ было рассмотрено в § 2. Оно переносится, очевидно, на случай произвольной размерности.

Координаты (действительные)

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n+1}$$

всех точек прямой, проходящей через начало координат пространства $\boldsymbol{R}^{n+1}$, отличаются лишь общим множителем пропорциональности. Поэтому такие прямые, а вместе с тем и точки проективного пространства, можно поставить во взаимно однозначное соответствие с системами отношений $n+1$ чисел, т. е. с числами $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n+1}$, определенными с точностью до отличного от нуля множителя пропорциональности. Исключается лишь система чисел, состоящая из одних нулей, так как такой системе не соответствует никакая определенная прямая. Окрестность точки проективного пространства $\overline{x}_1 : \overline{x}_2 : \ \ldots : \overline{x}_{n+1}$ составляется из всех точек $x_1 : x_2 : \ \ldots : x_{n+1}$, для которых при фиксированных значениях $\overline{x}_1,\ \overline{x}_2,\ \ldots,\ \overline{x}_{n+1}$ имеют место соотношения:

$$|x_1 - \overline{x}_1| < \varepsilon, \ldots,\ |x_{n+1} - \overline{x}_{n+1}| < \varepsilon,$$

так как этим точкам соответствуют все прямые, идущие из начала координат O пространства $\boldsymbol{R}^{n+1}$ в точки кубической окрестности точки $(\overline{x}_1,\ \overline{x}_2,\ \ldots,\ \overline{x}_{n+1})$. Величина такой окрестности зависит не только от точки проективного пространства $\overline{x}_1 : \overline{x}_2 : \ \ldots : \overline{x}_{n+1}$ и от выбора ε, но также и от величины общего множителя чисел $\overline{x}$.

Симплициальное разбиение проективного пространства $\boldsymbol{P}^n$ можно получить, переходя в октаэдральном разбиении n-мерной сферы $\boldsymbol{S}^n$ к барицентрическому подразделению (оно также симметрично относительно центра) и отождествляя диаметрально-противолежащие симплексы этого разбиения. Переход к барицентрическому подразделению

необходим, так как иначе нарушилось бы условие (k_3), которому должен удовлетворять симплициальный комплекс. В самом деле, любые два n-мерные симплекса октаэдрального разбиения $\boldsymbol{S}^n$ после отождествления диаметрально-противоположных точек имеют одни и те же вершины (см. упражнение в конце § 13).

Топологическое произведение

Топологическое произведение двух окрестностных пространств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ есть новое окрестностное пространство $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$, определяемое следующим образом: каждой паре точек, образованной из точки A пространства $\boldsymbol{A}$ и точки B пространства $\boldsymbol{B}$, ставится во взаимно однозначное соответствие точка $A \times B$ из $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$. Окрестность точки $\overline{A} \times \overline{B}$ состоит из совокупности всех точек $A \times B$ таких, что A лежит в некоторой окрестности точки $\overline{A}$ в $\boldsymbol{A}$, а B — в некоторой окрестности точки $\overline{B}$ в $\boldsymbol{B}$. Сверх того, каждое множество точек пространства $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$, содержащее такую совокупность, считается окрестностью $\overline{A} \times \overline{B}$.

Евклидова плоскость представляет топологическое произведение двух прямых, оси x_1 и оси x_2. Вообще, если $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ суть соответственно подмножества евклидовых пространств $\boldsymbol{R}^a$ и $\boldsymbol{R}^b$, то $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ можно рассматривать как подмножество евклидова пространства $\boldsymbol{R}^{a+b} = \boldsymbol{R}^a \times \boldsymbol{R}^b$. В самом деле, пусть

$$x_1, x_2, \ldots, x_a \qquad (A)$$

координаты точки A подмножества $\boldsymbol{A}$ в $\boldsymbol{R}^a$, и

$$x_{a+1}, x_{a+2}, \ldots, x_{a+b} \qquad (B)$$

координаты точки B подмножества $\boldsymbol{B}$ в $\boldsymbol{R}^b$. Тогда в качестве точки $A \times B$ мы выбираем точку $\boldsymbol{R}^{a+b}$ с координатами

$$x_1, x_2, \ldots, x_a, x_{a+1}, \ldots, x_{a+b}. \qquad (A \times B)$$

Очевидно, множество точек $A \times B$, рассматриваемых таким образом как подмножество пространства $\boldsymbol{R}^{a+b}$, есть окрестностное пространство, гомеоморфное топологическому произведению $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$.

Упражнение. Докажите, что если $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ суть выпуклые тела размерностей α и β в пространствах $\boldsymbol{R}^a$ и $\boldsymbol{R}^b$, то топологическое произведение $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$, рассматриваемое указанным способом в евклидовом пространстве $\boldsymbol{R}^{a+b}$, представляет выпуклое тело размерности $\alpha + \beta$. Граница этого тела составлена из топологического произведения границы $\boldsymbol{A}$ на $\boldsymbol{B}$ и границы $\boldsymbol{B}$ на $\boldsymbol{A}$.

Теорема. *Топологическое произведение двух полиэдров есть полиэдр.*

Доказательство. Поместим полиэдр $\overline{\boldsymbol{A}}$, заданный в некотором симплициальном разбиении $\boldsymbol{A}$, прямолинейно в евклидово пространство $\boldsymbol{R}^a$, а $\overline{\boldsymbol{B}}$ таким же образом в $\boldsymbol{R}^b$, — как показано на стр. 65, это всегда возможно. Тогда $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ есть подмножество евклидова пространства $\boldsymbol{R}^{a+b}$, именно — сумма произведений каждого из симплексов $\boldsymbol{A}$ на каждый из симплексов $\boldsymbol{B}$. Каждое произведение $\boldsymbol{E}^\alpha \times \boldsymbol{E}^\beta$ есть выпуклая область размерности $\alpha + \beta$, граница которой составлена из $(\alpha + \beta - 1)$-мерных областей $\boldsymbol{E}_\mu^{\alpha-1} \times \boldsymbol{E}^\beta$ и $\boldsymbol{E}^\alpha \times \boldsymbol{E}_\mu^{\beta-1}$ (см. предыдущее упражнение). При этом $\boldsymbol{E}_\mu^{\alpha-1}$ означает сторону $\boldsymbol{E}^\alpha$, а $\boldsymbol{E}_\mu^{\beta-1}$ — *сторону симплекса* $\boldsymbol{E}^\beta$. Симплициальное разбиение произведения $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ в пространстве $\boldsymbol{R}^{a+b}$ получается последовательным проектированием: сперва мы подразделяем одномерные выпуклые тела (прямолинейные отрезки), вводя их центры в качестве новых вершин. Считая далее, что $(k-1)$-мерные тела уже разбиты на симплексы, мы соединяем точки границы каждого k-мерного тела с какой-нибудь внутренней ее точкой (т. е. проектируем границу из внутренней точки). При этом получается симплициальное разбиение k-мерного тела. Разбив таким способом на симплексы тела всех размерностей, мы получим совокупность симплексов, удовлетворяющую всем условиям леммы § 10, т. е. симплициальное разбиение произведения $\overline{\boldsymbol{A}} \times \overline{\boldsymbol{B}}$.

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма.

Лемма. *Пусть топологическое произведение* $\overline{\boldsymbol{K}}^n \times \mathbf{t}$ *полиэдра* $\overline{\boldsymbol{K}}^n$ *на единичный отрезок* $0 \leqslant t \leqslant 1$ *отображено посредством* f *в полиэдр* $\overline{\mathbf{K}}^m$ *следующим образом: для каждой точки* P *полиэдра* $\overline{\boldsymbol{K}}^n$ *точки* $f(P \times 0)$ *и* $f(P \times 1)$ *принадлежат одному симплексу комплекса* $\mathbf{K}^m$*; отрезок же* $P \times \mathbf{t}$ *отображается линейно на отрезок, соединяющий* $f(P \times 0)$ *и* $f(P \times 1)$*. Тогда, если отображение* f *непрерывно отображает множества* $\overline{\boldsymbol{K}}^n \times 0$ *и* $\boldsymbol{K}^n \times 1$*, то* f *является непрерывным отображением всего произведения* $\overline{\boldsymbol{K}}^n \times \mathbf{t}$.

Доказательство. Представим $\overline{\boldsymbol{K}}^n$ как подмножество евклидова пространства $\boldsymbol{R}^a$ с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_a$. $\overline{\boldsymbol{K}}^n \times \mathbf{t}$ является тогда подмножеством пространства $\boldsymbol{R}^a \times \boldsymbol{R}^1$, где $\boldsymbol{R}^1$ — прямая с координатой t. Точно так же представим $\overline{\mathbf{K}}^m$ расположенным прямолинейно в пространстве $\boldsymbol{R}^b$ с координатами $y_1, y_2, \ldots, y_b$. Тогда отображение f осуществляется отображающими функциями

$$y_i(x_1, x_2, \ldots, x_a, t) = y_i(x_1, x_2, \ldots, x_a, 0)(1-t) + \\ + y_i(x_1, x_2, \ldots, x_a, 1)t \quad (i = 1, 2, \ldots, b).$$

Так как по предположению $y_i(x_1, x_2, \ldots, x_a, 0)$ и $y_i(x_1, x_2, \ldots, x_a, 1)$ суть непрерывные функции от $x_1, x_2, \ldots, x_a$ (см. стр. 38), то функция $y_i(x_1, x_2, \ldots, x_a, t)$ непрерывна относительно каждой из переменных, т. е. f есть непрерывная функция.

Упражнение. 1. Покажите, что отождествление всех граничных точек n-мерного шара дает сферу $\boldsymbol{S}^n$.

2. Поставив в соответствие каждой точке $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ топологического произведения $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ точку A пространства $\boldsymbol{A}$, мы получаем непрерывное отображение произведения $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ на $\boldsymbol{A}$.

3. Материальная точка вынуждена двигаться с постоянной скоростью a) на торе, b) на сфере. Покажите, что соответствующими фазовыми пространствами (§ 4) являются

a) Топологическое произведение тора на окружность.

b) Проективное пространство $\boldsymbol{P}^3$ трех измерений[12].

4. Докажите, что единичную трехмерную сферу, координаты точек которой в четырехмерное пространстве удовлетворяют уравнению

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1, \tag{3}$$

можно разбить на два конгруэнтных (т. е. переводящихся друг в друга посредством движения) трехмерных кольца

$$x_1^2 + x_2^2 \leqslant x_3^2 + x_4^2$$

и

$$x_1^2 + x_2^2 \geqslant x_3^2 + x_4^2$$

(трехмерным кольцом называется топологическое произведение круга на окружность, т. е. тор вместе с его «внутренностью»). Кольца эти имеют общими точки граничного тора, удовлетворяющие, кроме соотношения (3), еще уравнению

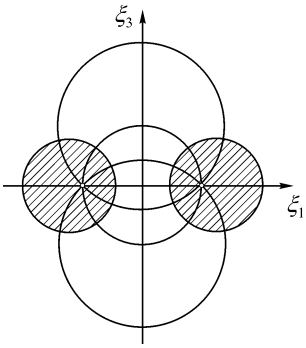


Рис. 37

$$x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2. \tag{4}$$

При стереографическом проектировании из северного полюса (0, 0, 0, 1) на экваториальную «плоскость» $x_4 = 0$, снабженную декартовыми координатами ξ_1, ξ_2, ξ_3, (стр. 42), граничный тор переходит в тор вращения, имеющий осью вращения ось ξ_3. Этот тор вращения разбивает тогда трехмерное сферическое пространство (получающееся из экваториальной «плоскости», если мы дополним ее образом северного полюса) также на два трехмерных кольца. Средняя линия первого есть единичная окружность плоскости ξ_1, ξ_2; средняя линия второго — ось ξ_3 (см. рис. 37). Средней линией трехмерного кольца, получающегося при вращении круга, называется окружность, описываемая центром — этого круга).

5. Тор, рассматривавшийся в предыдущем упражнении, допускает в сферическом пространстве деформацию самого на себя такую, что при этом меридианы переходят в параллели, а параллели в меридианы [эта деформация может быть даже осуществлена посредством сферического движения (см. стр. 12 и упражнения на стр. 220)].

6. Если в единичной трехмерной сфере отождествить диаметрально противоположные точки, т. е. перейти к проективному пространству $\boldsymbol{P}^3$, то рассматривавшийся тор переходит в однополостный гиперболоид, имеющий в проективных координатах $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ уравнение (4). Гиперболоид этот гомеоморфен тору и разбивает $\boldsymbol{P}^3$ также на два трехмерных кольца. Таким образом, как проективное, так и сферическое трехмерное пространство разбивается тором на два трехмерных кольца, переводимых друг в друга проективным, соответственно сферическим, движением. Проведите доказательство.

7. Докажите, что *каждое* (*непустое*) *открытое подмножество* n*-мерного евклидова пространства есть бесконечный комплекс.* (Такое подмножество можно исчерпать становящимися все мельче и мельче n-мерными кубами, которые затем можно подразделить симплициально.)

Глава III
Группы Бетти

Мы познакомились с понятием полиэдра и его симплициального разбиения. Все наши дальнейшие исследования связаны более или менее непосредственно с нерешенной до сих пор проблемой дать исчерпывающую топологическую классификацию полиэдров и с изучением свойств комплексов $\boldsymbol{K}$, являющихся их симплициальными разбиениями. При этом из свойств комплексов $\boldsymbol{K}$ для нас важны лишь те, которые общи всем комплексам, являющимся симплициальными разбиениями одного и того же полиэдра или двух гомеоморфных полиэдров. Такие свойства комплексов называются топологически инвариантными. Мы начнем с исследования свойств комплекса, заданного в качестве симплициального разбиения некоторого полиэдра, и докажем в следующей главе, что важнейшие из этих свойств — именно свойства, относящиеся к так называемым группам Бетти — топологически инвариантны.

Настоящая глава посвящена чисто *комбинаторным* рассмотрениям, — мы не пользуемся в ней нигде понятиями теории топологических пространств, как, например, окрестность, непрерывность и т. п. Более того, в этой главе мы можем представлять m-мерный комплекс $\boldsymbol{K}^n$ просто в виде его схемы, т. е. множества «вершин», в котором отмеченные подмножества определены как «симплексы», причем должны быть выполнены только условия (Сх$_1$)–(Сх$_2$) § 11. Для простоты мы будем рассматривать всегда только конечные комплексы.

§ 15. Алгебраические комплексы

В этом параграфе мы определим новое, крайне важное для всего дальнейшего понятие *алгебраического комплекса.* Во избежание путаницы, в тех случаях, где возможны недоразумения, мы будем называть симплициальные комплексы в том смысле, как мы их понимали до сих пор, *абсолютными комплексами.*

Вообразим себе, что некоторым k-мерным симплексам данного абсолютного комплекса $\boldsymbol{K}$ поставлены в соответствие некоторая ориентация и некоторое целое число. Пусть E_1^k, E_2^k, …, E_s^k полученные ориентированные симплексы и u_1, u_2, …, u_s поставленные им в соответствие целые числа. Тогда мы говорим, что имеем дело с алгебраическим комплексом $U^k = \sum u_i E_i^k$, в который входят ориентированные симплексы E_1^k, …, E_s^k с коэффициентами u_1, …, u_s. Сам *алгебраический комплекс* U^k определяется как *линейная форма* $\sum u_i E_i^k$, где симплексы E_i^k играют роль переменных («неопределенные» — Unbestimmte), а целые числа u_1, …, u_s являются коэффициентами.

Всегда можно считать, что в линейной форме $\sum u_i E_i^k$ участвуют *все* k-мерные симплексы E_i^k, так как если коэффициенты u_i были первоначально определены лишь для некоторых симплексов E_i^k, то для остальных мы соответствующие коэффициенты полагаем равными нулю.

Для того чтобы данное определение алгебраического комплекса; как линейной формы, было корректным с алгебраической точки зрения, необходимо ввести условие

$$(-u)(-E^k) = uE^k, \tag{1}$$

т. е. *ориентированный симплекс* E^k, *взятый с коэфициентом* u_k, *считается тождественным с противоположно ориентированным* (*сравнительно с* E^k) *симплексом* $(-E^k)$, *взятым с коэфициентом* $(-u)$.

Существо дела в понятии алгебраического комплекса заключается, очевидно, в том, что каждому k-мерному ориентированному симплексу E_i^k абсолютного комплекса $\boldsymbol{K}$ ставится в соответствие некоторое целое число u_i, причем симплексу $(-E_i^k)$ ставится в соответствие число $(-u_i)$.

Другими словами: k-мерный алгебраический комплекс данного абсолютного комплекса $\boldsymbol{K}$ есть функция $u(E^k)$, определенная для всех k-мерных ориентированных симплексов E_i^k комплекса $\boldsymbol{K}$ и удовлетворяющая следующим условиям:

(1) она принимает целочисленные значения, лишь для конечного числа симплексов отличные от нуля;

(2) функция $u(E^k)$ — нечетная, т. е.

$$u(-E^k) = -u(E^k).$$

Среди k-мерных алгебраических комплексов имеется нулевой комплекс, у которого все коэффициенты u_i [т. е. значения функции $u(E^k)$ для всех E_i^k] равны нулю.

Другим частным случаем алгебраического комплекса являются так называемые одночленные комплексы, у которых только один коэффициент отличен от нуля (т. е. лишь для одного симплекса E^k, рассматриваемого, конечно, с любой из его двух ориентации, функция $u(E^k)$ имеет значение $\neq 0$). Если этот коэффициент равен ± 1, то одночленный комплекс есть просто ориентированный симплекс.

Алгебраические комплексы можно складывать, как обыкновенные линейные формы: если

$$U^k = \sum u_i E_i^k,$$
$$V^k = \sum v_i E_i^k,$$

то

$$U^k + V^k = \sum (u_i + v_i) E_i^k \tag{2}$$

Таким образом k-мерные алгебраические комплексы абсолютного комплекса $\boldsymbol{K}$ образуют абелеву группу, которую мы обозначим через $\mathrm{L}^k(\boldsymbol{K})$.

Примечание I. Мы рассматривали лишь целые числа в качестве коэффициентов (значений функции). Определенные нами алгебраические комплексы поэтому иногда называют целочисленными.

Потребовав, чтобы наши коэффициенты u_i [значения наших функций $u(E^k)$] были элементами некоторой абелевой группы J — так называемого поля коэффициентов, мы получили бы совершенно аналогичным образом определение алгебраических комплексов по полю коэффициентов J. При этом попрежнему требуется выполнение условий (1) и (2).

В дальнейшем мы будем рассматривать почти исключительно лишь целочисленные комплексы.

Из других полей коэффициентов мы будем иметь дело только с конечной группой порядка 2, что приведет нас к так называемым алгебраическим комплексам по модулю 2.

Примечание II. Вопрос о том, определять ли алгебраический комплекс как линейную форму или как функцию, есть, конечно, вопрос терминологии. Несмотря на то, что язык функций более прост с логической точки зрения, мы будем в дальнейшем пользоваться языком линейных форм как более привычным.

§ 16. Граница, цикл

Пусть $\boldsymbol{E}^{k-1}$ — сторона ориентированного симплекса E^k. Ориентация симплекса E^k позволяет ввести в $\boldsymbol{E}^{k-1}$ определенную *«индуцированную» ориентацию*, устанавливаемую по следующему правилу: если P_0 вершина симплекса E^k, противоположная стороне $\boldsymbol{E}^{k-1}$ и $E^k = \varepsilon(P_0 P_1 \dots P_k)$, где $\varepsilon = +1$ или -1, то индуцированная ориентация симплекса $\boldsymbol{E}^{k-1}$ определяется выражением $\varepsilon(P_1 P_2 \dots P_k)$. Под *границей ориентированного* симплекса E^k понимают $(k-1)$-мерный алгебраический комплекс, образованный $(k-1)$-мерными сторонами симплекса E^k так, что каждая сторона входит в этот комплекс с индуцированной ориентацией и с коэффициентом 1. Пусть E_0^{k-1}, E_1^{k-1}, …, E_k^{k-1} обозначают произвольно ориентированные $(k-1)$-мерные симплексы — стороны симплекса E^k, тогда граница симплекса E^k представляет $(k-1)$-мерный комплекс

$$\dot{E}^k = \varepsilon \sum_{l=0}^{k} (-1)^l (P_0 P_1 \dots P_{l-1} P_{l+1} \dots P_k) = \sum_{l=0}^{k} \varepsilon_l E_l^{k-1}.$$

Здесь $\varepsilon_l = +1$ или -1 в зависимости от того, совпадает ли произвольно взятая ориентация стороны E_l^{k-1} с индуцируемой в ней ориентацией или нет. Мы будем обозначать границу симплекса (или вообще алгебраического комплекса) при помощи точки наверху. Под *границей* любого k-мерного алгебраического комплекса $U^k = \sum\limits_{\varkappa=1}^{\alpha^k} u_\varkappa E_\varkappa^k$ понимается сумма границ его отдельных k-мерных симплексов:

$$\dot{U}^k = \left(\sum_{\varkappa=1}^{\alpha^k} u_\varkappa E_\varkappa^k\right)^{\cdot} = \sum_{\varkappa=1}^{\alpha^k} u_\varkappa \dot{E}_\varkappa^k.$$

В соответствии с этим выполняются следующие правила:

$$(U^k \pm V^k)^{\cdot} = \dot{U}^k \pm \dot{V}^k, \tag{1}$$

$$(mU^k)^{\cdot} = m\dot{U}^k. \tag{2}$$

Кроме того, из

$$(mU^k)^{\cdot} = 0 \text{ и } m \neq 0 \text{ следует } \dot{U}^k = 0. \tag{3}$$

В самом деле, по формуле (2) $(mU^k)^{\cdot} = m\dot{U}^k = 0$, вследствие чего $\dot{U}^k = 0$.

Границу нульмерного алгебраического комплекса мы будем считать равной нулю по определению. Если граница k-мерного алгебраического комплекса равна нулю, то такой комплекс называется *циклом*. Таким образом каждый нульмерный комплекс есть цикл. Из формулы (1) вытекает, что сумма и разность двух циклов снова есть цикл. Поэтому k-мерные циклы образуют подгруппу Z^k группы L^k Для $k = 0$ Z^0 совпадает с L^0.

Относительно границы алгебраического комплекса имеет место следующая важная теорема.

Теорема. *Граница каждого алгебраического комплекса есть цикл.*

Доказательство. Так как граница комплекса есть сумма границ ориентированных k-мерных симплексов, то достаточно показать, что граница ориентированного симплекса E^k есть цикл. При этом можно считать, что $k > 1$, так как граница одномерного симплекса, будучи нульмерным комплексом является циклом по определению. Пусть

$$E^k = (P_0 P_1 \dots P_k) \quad (k > 1).$$

Пусть E^{k-2} есть какой-нибудь инцидентный с E^k $(k-2)$-мерный симплекс. Так как в символе $(P_0 P_1 \dots P_k)$ любые $(k-1)$ букв можно

при помощи четной перестановки перевести на последние места, то мы можем без всякого ограничения общности допустить, что вершинами симплекса E^{k-2} являются как раз P_2, P_3, ..., P_k. По определению границы

$$\dot{E}^k = (P_1P_2\dots P_k) - (P_0P_2\dots P_k) + \dots$$

Поэтому

$$(\dot{E}^k)^{\cdot} = (P_2\dots P_k) - (P_2\dots P_k) + \dots$$

Но никакие другие симплексы границы, кроме двух написанных, не содержат всех вершин $P_2, \dots, P_k$. Поэтому симплекс $(P_2\dots P_k)$ в $(\dot{E}^k)^{\cdot}$ не входит, т. е.

$$(\dot{E}^k)^{\cdot} = 0.$$

Пример.

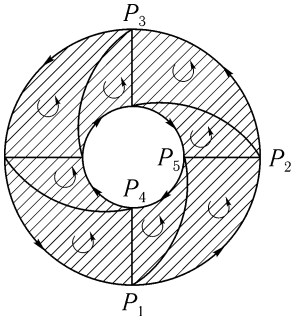


Рис. 38

Пусть $\boldsymbol{K}^n$ есть приведенный на рис. 38 комплекс $\boldsymbol{K}^2$, представляющий симплициальное разбиение *кругового кольца*. Треугольники комплекса $\boldsymbol{K}^2$, ориентированные как указано стрелками и взятые каждый с коэффициентом 1, образуют алгебраический комплекс U^2. Для того чтобы определить границу этого комплекса, рассмотрим последовательно все стороны треугольников. Сторона (P_1P_5) не входит в $\dot{U}^2$, так как единственные примыкающие к ней два треугольника, $+(P_4P_1P_5)$ и $+(P_2P_5P_1)$, индуцируют в ней противоположные ориентации, именно $+(P_1P_5)$ и $+(P_5P_1)$. Точно так же в $\dot{U}^2$ не входят (P_1P_4) и все остальные внутренние стороны треугольников. Напротив, к стороне внешнего контура (P_1P_2) примыкает только один треугольник $+(P_5P_1P_2)$, индуцирующий в ней ориентацию $+(P_1P_2)$. Поэтому $+(P_1P_2)$ входит в $\dot{U}^2$ с коэффициентом 1. Таким образом, $\dot{U}^2$ состоит из всех сторон внутреннего и внешнего контуров, причем каждую такую сторону нужно брать в ориентации, указанной стрелками с коэффициентом 1. Мы видим, что $\dot{U}^2$ есть действительно цикл. В данном случае уже стороны внешнего контура сами по себе образуют цикл B_a^1, так же как стороны внутреннего образуют цикл B_i^1. Сторона $+(P_1P_2)$, например, индуцирует в P_2 ориентацию $+(P_2)$, а сторона $+(P_2P_3)$ ориентацию $-(P_2)$, вследствие чего P_2, как и любая другая вершина, входит в $(\dot{U}^2)^{\cdot}$ с коэффициентом 0.

Примечание. В случае произвольного поля коэффициентов J понятие границы вводится следующим образом. Рассмотрим сначала «одночленный комплекс» uE^k, т. е. алгебраический комплекс, у которого только один симплекс имеет отличный от нуля коэффициент. Если граница ориентированного симплекса E^k есть $\sum_{i=0}^{k} E_i^{k-1}$, то полагаем

$$(uE^k)^{\cdot} = \sum_{i=0}^{k} uE_i^{k-1}.$$

После этого полагаем для *любого* алгебраического комплекса $U^k = \sum u_h E_h^k$:

$$\dot{U}^k = \sum (u_h E_h^k)^{\cdot}.$$

Пользуясь последовательно языком функций, определяем границу алгебраического комплекса $U^k = f(E^k)$ сразу в предположении любого поля коэффициентов следующим образом. Пусть E^{k-1} входит в границы ориентированных симплексов E_1^k, E_2^k, ..., E_s^k соответственно со знаками ε_1, ε_2, ..., ε_s; тогда определяем функцию $\dot{f}(E^{k-1})$ так:

$$\dot{f}(E^{k-1}) = \sum_{i=1}^{s} \varepsilon_i f(\dot{E}_i^k).$$

Этим определено значение функции $\dot{f}(E^{k-1})$ для любого $(k-1)$-мерного ориентированного симплекса (данного абсолютного комплекса K); эта функция удовлетворяет, как легко видеть, условиям § 15 и представляет собою, следовательно, $(k-1)$-мерный алгебраический комплекс поля коэффициентов J. Этот $(k-1)$-мерный алгебраический комплекс называется границей алгебраического комплекса $f(E^k)$. Читателю предоставляется самому убедиться в том, что это определение только по форме отличается от предыдущего.

§ 17. Гомологичные алгебраические комплексы

Из того, что граница алгебраического комплекса представляет цикл, не вытекает еще, что справедливо и обратное — что всякий цикл является границей некоторого алгебраического комплекса. Так, например, внешний контур B_a^1 кругового кольца, о котором мы только что говорили, не является границей никакого алгебраического комплекса на $\boldsymbol{K}^2$. Если k-мерный цикл U^k является границей $(k+1)$-мерного алгебраического комплекса U^{k+1} на $\boldsymbol{K}^n$, то говорят, что U^k ограничивает или *гомологичен нулю* на $\boldsymbol{K}^n$. Это обозначают так:

$$U^k \sim 0.$$

Точнее следовало бы написать:

$$U^k \sim 0 \text{ на } \boldsymbol{K}^n,$$

подразумевая под этим, что U^{k+1} лежит на $\boldsymbol{K}^n$ (т. е. U^{k+1} есть алгебраический подкомплекс комплекса $\boldsymbol{K}^n$). В соответствии с этим

$$U^k \sim 0 \text{ на } \boldsymbol{k},$$

если $\boldsymbol{k}$ есть подкомплекс комплекса $\boldsymbol{K}^n$, содержащий U^{k+1}. Если $U^k \sim 0$ на $\boldsymbol{k}$, то подавно $U^k \sim 0$ на $\boldsymbol{K}^n$; обратное может быть неверно.

Вообще два цикла или алгебраических комплекса называются *гомологичными* друг другу, если они отличаются друг от друга гомологичным нулю циклом, т. е. если их разность есть цикл, гомологичный нулю:

$$U^k \sim V^k, \text{ если } U^k - V^k \sim 0.$$

Соотношение $U^k \sim V^k$ называется *гомологией*.

Так как граница гомологичного нулю цикла, как и всякого цикла, равна 0, то из $U^k \sim V^k$ следует, что

$$(U^k - V^k)^{\cdot} = 0, \text{ т. е. } \dot{U}^k = \dot{V}^k.$$

Таким образом гомологичные друг другу алгебраические комплексы имеют одну и ту же границу.

Пусть

$$U^k \sim 0, \quad V^k \sim 0.$$

Тогда

$$U^k = \dot{U}^{k+1}, \quad V^k = \dot{V}^{k+1}.$$

По формуле (1) § 16

$$U^k \pm V^k = (U^{k+1} \pm V^{k+1})^{\cdot},$$

т. е.

$$U^k \pm V^k \sim 0.$$

Сумма и разность гомологичных нулю циклов снова есть цикл, гомологичный нулю. Отсюда следует, что гомологичные нулю k-мерные циклы образуют подгруппу H^k в группе Z^k всех k-мерных циклов. Таким образом гомологии можно складывать, вычитать и умножать на целые числа. Напротив, как мы сейчас увидим на примере, гомологии нельзя делить: *из* $mU^k \sim 0$ *не следует, вообще говоря,* $U^k \sim 0$. Далее, *из* $U^k \sim V^k$ *и* $V^k \sim W^k$ *следует* $U^k \sim W^k$, так как вместе с циклами $U^k - V^k$ и $V^k - W^k$ гомологична нулю и их сумма $U^k - W^k$. Поэтому все k-мерные циклы можно разбить на классы гомологичных между собой циклов, так называемые *классы гомологий*. Такой класс образуют, например, все гомологичные нулю k-мерные циклы.

Пример 1. Рассмотрим одномерные классы гомологий (разбитого на треугольники) кругового кольца (фиг. 38), причем будем пользоваться обозначениями и результатами предыдущего параграфа. Мы видели, что

$$\dot{U}^2 = B_a^1 + B_i^1.$$

Поэтому

$$B_a^1 + B_i \sim 0 \text{ или } B_a^1 \sim -B_i^1.$$

B_a^1 и $-B_i^1$ принадлежат, таким образом, одному и тому же классу гомологий. Покажем, что любой одномерный цикл U^1 гомологичен циклу B_i^1, взятому с некоторым коэффициентом. В самом деле, если U^1 содержит, например, сторону внешнего контура, то ее можно заменить двумя другими сторонами примыкающего к этой стороне треугольника, прибавляя к U^1 границу Δ^1 этого треугольника (надлежащим образом ориентированного). Так как $\Delta^1 \sim 0$, то мы получаем при этом цикл $'U^1$, гомологичный циклу U^1, не содержащий сторон внешнего контура. Если, далее, $'U^1$ содержит «диагональную» сторону, например $+(P_1P_5)$, то ее также можно заменить сторонами $+(P_1P_4) + +(P_4P_5)$. Поступая аналогично со всеми входящими в $'U^1$ диагональными сторонами, мы получим гомологичный U^1 цикл $''U^1$, не содержащий ни внешних, ни диагональных сторон. Но тогда $''U^1$ может содержать лишь стороны внутреннего контура. Если бы туда входила, например, «радиальная» сторона (P_5P_2) с каким-нибудь отличным от нуля коэффициентом, то соответственно ориентированная точка P_2 входила бы в $(''U^1)$ с таким же коэффициентом, так как в $''U^1$, кроме стороны (P_5P_2), не имеется никаких других сторон, инцидентных с P_2. Но $''U^1$ цикл, $(''U^1)\cdot = 0$; поэтому P_2 не может входить в $(''U^1)\cdot$, т. е. P_5P_2 не может входить в $''U^1$. Таким образом, $''U^1$ состоит целиком из сторон внутреннего контура. Легко видеть, что каждая из этих сторон входит в $''U^1$ с одним и тем же коэффициентом, так как иначе $''U^1$ не было бы циклом. Поэтому окончательно мы можем утверждать, что

$$''U^1 = mB_i^1,$$

где m — целое число.

Мы доказали, что каждый одномерный цикл рассматриваемого разбиения кругового кольца гомологичен одному из циклов

$$0,\ \pm B_i^1,\ \pm 2B_i^1,\ \pm 3B_i^1, \ldots$$

С другой стороны, никакие два из этих циклов не могут быть гомологичны друг другу. В самом деле, если

$$m'B_i^1 \sim m''B_i^1,$$

то $(m' - m'')B_i^1 = mB_i^1 \sim 0$. Докажем, что тогда непременно $m = 0$, т. е. $m' = m''$.

Пусть mB_i^1 является границей двумерного алгебраического комплекса. Какой-нибудь треугольник, примыкающий к стороне внутреннего контура, входит тогда в этот алгебраический комплекс также с коэффициентом m. Так как внутренние стороны, по условию, не входят в границу двумерного комплекса, то и все другие треугольники входят в этот комплекс с коэффициентом m, т. е. наш двумерный комплекс $= mU^2$. Граница его $= m(B_a^1 + B_i^1)$ и может быть равна mB_i^1, лишь когда $m = 0$. Таким образом показано, что круговое кольцо имеет бесчисленное множество одномерных классов гомологии, в качестве представителей которых могут быть взяты циклы вида mB_i^1.

Пример 2. Пусть $\boldsymbol{K}^n$ проективная плоскость $\boldsymbol{P}^2$, заданная в симплициальном разбиении, показанном на рис. 39. Заметим, что приведенный на

рисунке круг изображает проективную плоскость (§ 2) лишь после отождествления противоположных вершин и сторон его граничной окружности. При таком понимании рис. 39 представляет не что иное, как сокращенное описание схемы симплициального разбиения комплекса $\boldsymbol{P}^2$. Так, например, обе точки P на рисунке представляют одну и ту же точку проективной плоскости.

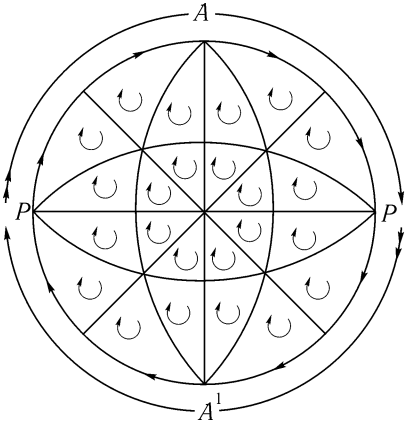


Рис. 39

Алгебраический комплекс A^1, состоящий из четырех ориентированных сторон верхней полуокружности, взятых каждая с коэффициентом единица, не отличается от алгебраического комплекса, составленного таким же способом из четырех нижних сторон. Если ориентировать все треугольники так, что два треугольника, примыкающие к общей стороне, лежащей внутри круга, индуцируют в ней противоположные ориентации, то получится двумерный алгебраический комплекс U^2, причем $\dot{U}^2 = 2A^1$. Поэтому $2A^1 \sim 0$. Легко видеть, что всякий двумерный комплекс, граница которого есть комплекс A^1, взятый с каким-нибудь коэффициентом, сам имеет вид kU^2. В самом деле, так как ни одна из средних сторон треугольников не может входить в границу такого комплекса, то каждый из треугольников должен входить туда с одним и тем же коэффициентом. Но граница комплекса kU^2 равна $+2kA^1$. Отсюда вытекает, что A^1 представляет одномерный цикл проективной плоскости (проективную прямую), не гомологичный нулю; но тот же цикл, взятый с коэффициентом 2, уже ~ 0. Таким образом мы видим, что из $2A^1 \sim 0$ еще не следует, что $A^1 \sim 0$. Всякий одномерный цикл U^1 проективной плоскости либо ~ 0, либо $\sim A^1$, т. е. проективная плоскость имеет только два одномерных класса гомологии. В самом деле, если цикл U^1 не лежит целиком на граничной окружности, то тем же способом, который мы применяли при изучении кругового кольца, мы можем заменить его циклом $'U^1$, гомологичным U^1 и лежащим целиком на периферии круга. Для этого нужно заменять шаг за шагом каждую среднюю сторону двумя другими сторонами примыкающего к ней треугольника (соответствующим образом выбранного и ориентированного). Так как $'U^1$ есть цикл, то он непременно представляет цикл A^1, взятый с некоторым коэффициентом. Если коэффициент этот четный, то $'U^1 \sim 0$. Итак, $'U^1$ и, следовательно, U^1 либо ~ 0, либо $\sim A^1$.

§ 18. Группы Бетти

С теоретико-групповой точки зрения классы гомологий представляют не что иное, как смежные классы разложения абелевой группы Z^k, состоящей из всех k-мерных циклов, по ее подгруппе H^k, образованной циклами, гомологичными нулю. В самом деле, два цикла U^k и V^k гомологичны тогда и только тогда, когда их разность гомологична нулю, т. е. когда они принадлежат одному и тому же смежному классу группы Z^k по подгруппе H^k. Поэтому, если под суммой двух классов гомологий H_1^k и H_2^k понимать класс гомологий, в котором находится сумма какого-нибудь цикла из H_1^k с каким-нибудь циклом из H_2^k, то k-мерные классы гомологий сами образуют абелеву группу. Эта группа, являющаяся дополнительной группой $\mathrm{Z}^k/\mathrm{H}^k$, называется k-мерной *группой Бетти* B^k симплициального комплекса $\boldsymbol{K}^n$. Поскольку мы изучаем лишь определенное симплициальное разбиение полиэдра, естественно возникает вопрос, почему мы рассматриваем именно эту дополнительную группу, а не дополнительную группу, скажем, всех k-мерных комплексов по подгруппе k-мерных циклов. Причина этого кроется в том, что группы Бетти любого выбранного симплициального разбиения являются топологическими инвариантами полиэдра. Предположение об их топологической инвариантности возникает само собой при рассмотрении уже простейших примеров: кругового кольца, проективной плоскости, тора (см. следующий параграф). Однако доказательство инвариантности вовсе не просто. Оно будет проведено в IV главе.

В то время как группы L^k, Z^k, H^k представляют собою решетки, т. е. *свободные* абелевы группы с конечным числом образующих, группа Бетти B^k, кроме нуля, может содержать, вообще говоря, и другие элементы конечного порядка. С другой стороны, B^k имеет также лишь конечное число образующих, как дополнительная группа абелевой группы Z^k с конечным числом образующих. Поэтому B^k есть прямая сумма конечного числа циклических групп — именно, p^k свободных циклических групп и ρ^k циклических групп, имеющих конечные порядки c_1^k, c_2^k, ..., $c_{\rho^k}^k$. При этом каждое число c^k можно считать делителем предыдущего (§ 86)*. Числа p^k и c_1^k, c_2^k, ..., $c_{\rho^k}^k$ однозначно определяются группой B^k и полностью характеризуют ее. p^k называется *k-ым (или k-мерным) числом Бетти*; c_1^k, c_2^k, ..., $c_{\rho^k}^k$ — *k-мерными коэффициентами кручения* симплициального комплекса $\boldsymbol{K}$. Название «коэффициенты кручения» может быть оправдано, как мы позже увидим, на примере пространства линзы (§ 61).

Рассмотрим образующий элемент каждого из $\rho^k + p^k$ циклических

*Напоминаем еще раз, что верхний индекс указывает размерность, а не является показателем степени.

прямых слагаемых групп B^k. Каждый из этих элементов представляет собою класс гомологий. Выберем по представителю из каждого класса. Мы получаем $\rho^k + p^k$ k-мерных циклов

$$A_1^k, \ldots, A_{\rho^k}^k, \quad B_1^k, \ldots, B_{p^k}^k. \tag{1}$$

Каждый k-мерный цикл U^k гомологичен тогда линейной комбинации этих циклов

$$U^k \sim \xi_1 A_1^k + \xi_2 A_2^k + \ldots + \xi_{\rho^k} A_{\rho^k}^k + \eta_1 B_1^k + \eta_2 B_2^k + \ldots + \eta_{p^k} B_{p^k}^k. \tag{2}$$

Так как $c_\mu^k A_\mu^k \sim 0$, то коэффициент ξ_μ^k можно выбрать положительным числом, меньшим чем c_μ^k: $0 \leqslant \xi_\mu < c_\mu^k$. Коэффициенты же η_ν не связаны никакими ограничениями. Очевидно, что при этих условиях коэффициенты ξ_μ, η_ν определяются циклом U^k однозначно. Составленная таким путем система $\rho^k + p^k$ k-мерных циклов (1) называется *k-мерной базой гомологий*.

Существование коэффициента кручения c_μ^k указывает на существование цикла, гомологичного нулю лишь в том случае, если он взят с коэффициентом, делящимся на c_μ^k.

Число Бетти p^k представляет максимальное число гомологично независимых циклов комплекса $\boldsymbol{K}^n$. k-мерные циклы $U_1^k, U_2^k, \ldots, U_r^k$ (взятые в конечном числе) называются *гомологично независимыми*, если между ними не существует никакого соотношения вида

$$t_1 U_1^k + t_2 U_2^k + \ldots + t_r U_r^k \sim 0$$

по крайней мере с одним отличным от нуля коэффициентом. Если же существует хоть одно такое соотношение, то они *гомологично зависимы*. Каждый из циклов A_μ^k базы гомологий (1) представляет цикл, гомологично зависимый сам по себе, так как $c_\mu^k A_\mu^k \sim 0$. Напротив, циклы $B_1^k, B_2^k, \ldots, B_{p^k}^k$ гомологично независимы, так как цикл

$$\eta_1 B_1^k + \eta_2 B_2^k + \ldots + \eta_{p^k} B_{p^k}^k$$

гомологичен нулю лишь в том случае, когда все η равны нулю. В комплексе $\boldsymbol{K}^n$ не может существовать больше, чем p^k гомологично независимых циклов, так как в силу соотношении (2) любой k-мерный цикл, взятый с надлежащей кратностью, например с кратностью c_1^k, гомологичен линейной комбинации p^k циклов $B_1^k, B_2^k, \ldots, B_{p^k}^k$.

Нульмерная группа Бетти связного симплициального комплекса есть всегда свободная циклическая группа. В качестве базы гомологий можно выбрать любой ориентированный нульмерный симплекс, например E_1^0. Пусть, действительно, $E_1^0, E_2^0, \ldots, E_{\alpha^0}^0$ суть все нульмерные

симплексы комплекса $\boldsymbol{K}^n$, ориентированные положительно (знаком $+$) и пусть

$$U^0 = u_1 E_1^0 + u_2 E_2^0 + \ldots + u_{\alpha^0} E_{\alpha^0}^0$$

есть произвольный нульмерный цикл. Соединим вершины E_1^0 и E_ν^0 путем, составленным из ребер (одномерных симплексов) комплекса — это можно сделать вследствие связности комплекса $\boldsymbol{K}^n$ — и ориентируем эти ребра так, чтобы каждые два ребра, примыкающие к общей вершине, индуцировали в ней противоположные ориентации. Ориентированный таким образом путь является уже одномерным комплексом U^1 и $\dot{U}^1 = \pm(E_1^0 - E_\nu^0)$, т. е. $E_\nu^0 \sim E_1^0$. Поэтому U^0 гомологичен симплексу E_1, взятому с коэффициентом $(u_1 + u_2 + \ldots + u_{\alpha^0})$. С другой стороны, цикл E_1^0, взятый с произвольным коэффициентом за исключением коэффициента 0, не может быть ~ 0, так как в границу любого одномерного симплекса одна вершина входит с коэффициентом $+1$, другая же с коэффициентом -1; сумма коэффициентов $= 0$, и то же самое имеет место для границы любого одномерного комплекса, т. е. для любого гомологичного нулю нульмерного цикла. Тем самым доказано, что E_1^0 есть база гомологий и нумерная группа Бетти является свободной группой с одной образующей. Нульмерные классы гомологий можно характеризовать еще проще при помощи *алгебраического значения* нульмерного цикла. Под алгебраическим значением нульмерного цикла мы понимаем сумму коэффициентов всех ориентированных положительно нульмерных симплексов, входящих в цикл. Тогда можно сказать, что в связном комплексе два нульмерных цикла гомологичны друг другу тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые алгебраические значения.

Столь же легко показать, что если $\boldsymbol{K}^n$ состоит из τ компонент (изолированных подкомплексов), то его нульмерная группа Бетти является свободной абелевой группой, имеющей τ образующих. Таким образом, *нульмерных коэффициентов кручения не существует.*

При $k > n$ группа Бетти B^k *состоит из одного нулевого элемента*, так как в этом случае имеется только *один* k-мерный класс гомологий, составленный из единственного существующего k-мерного цикла, именно, нулевого цикла. При $k = n$ классов гомологий имеется столько же, сколько n-мерных циклов, т. е. из $U^n \sim V^n$ можно заключить, что $U^n = V^n$. Это вытекает из того, что кроме нулевого $(n+1)$-мерного комплекса в K^n не существует никаких других $(n+1)$-мерных комплексов. Будем называть k-мерные комплексы $U_1^k, U_2^k, \ldots, U_r^k$ *линейно зависимыми* или *независимыми*, смотря по тому, существует или не существует для них линейное соотношение вида

$$t_1 U_1^k + t_2 U_2^k + \ldots + t_r U_r^k = 0$$

по крайней мере с одним отличным от нуля коэффициентом. Тогда можно сказать, что для $k = n$ понятие *линейной* зависимости эк-

вивалентно с понятием гомологической зависимости. Поэтому n-мерное число Бетти p^n равно максимальному числу линейно независимых n-мерных циклов, *n-мерные коэффициенты кручения равны нулю, так как из* $mU^n \sim 0$ *следует* $mU^n = 0$ и, если $U^n \pm 0$, то $m = 0$.

Остановимся коротко на том, как определяются группы Бетти для *бесконечных комплексов*. Алгебраический комплекс в этом случае составляется, как и раньше, из *конечного* числа симплексов. Граница, цикл и гомологии определяются так же, как для конечных комплексов. Элементами k-мерной группы Бетти являются классы гомологий k-мерных циклов. Однако группы Бетти бесконечного комплекса имеют, вообще говоря, бесконечное число образующих, так что их нельзя характеризовать числами Бетти и коэффициентами кручения.

§ 19. Вычисление групп Бетти в простейших случаях

1. Каждый одномерный цикл U^1 *кругового кольца* (стр. 86) гомологичен в этом кольце некоторому кратному цикла B_i^1, и никакое кратное этого цикла не ~ 0. Поэтому одномерная группа Бетти представляет свободную циклическую группу, базой гомологий которой является B_i^1. Как мы показали выше, B^0 также есть свободная циклическая группа. B^2 состоит только из нулевого элемента, так как в круговом кольце вообще не существует отличных от нуля двумерных циклов. Таким образом круговое кольцо имеет следующие числа Бетти:

$$p^0 = 1, \quad p^1 = 1, \quad p^2 = 0.$$

Коэффициенты кручения равны нулю для всех размерностей.

2. *Проективная плоскость* (стр. 87) имеет два одномерных, класса гомологий. B^1 представляет группу 2-го порядка. Базой гомологий является цикл A^1 (проективная прямая). Так как на проективной плоскости не существует двумерных циклов, то B^2 состоит только из нулевого элемента:

$$p^0 = 1, \quad p^1 = 0, \quad p^2 = 0.$$

Наконец, в этом случае имеется один одномерный коэффициент кручения, равный 2.

3. *Тор.* Пусть тор задан симплициальным разбиением квадрата (рис. 40) с отождествленными противоположными сторонами (стр. 13).

Ребра симплициального разбиения распадаются на внутренние и граничные. Внутренние ребра, в свою очередь, можно разбить на вертикальные, горизонтальные и диагональные. Для определения групп Бетти мы поступаем так же, как в случае кругового кольца.

I. Для каждого одномерного цикла U^1 существует гомологичный ему цикл, составленный целиком из граничных ребер. В самом деле, каждое внутреннее вертикальное или диагональное ребро, входящее в

цикл U^1, можно заменить двумя другими сторонами примыкающего к этому ребру справа треугольника; для этого достаточно прибавить к U^1 гомологичный нулю цикл — границу этого треугольника (надлежащим образом ориентированного). Точно так же каждую внутреннюю горизонтальную сторону можно заменить двумя сторонами примыкающего к ней снизу треугольника. После конечного числа таких замен мы получим гомологичный циклу U^1 цикл $'U^1$, лежащий целиком на границе квадрата. Так как $'\dot{U}^1 = 0$, то каждое из ориентированных ребер стороны a квадрата входит в $'U^1$ с одним и тем же коэффициентом, например α, а каждое из ребер стороны b — с одним и тем же коэффициентом β.

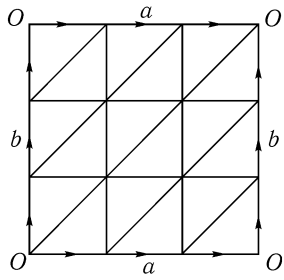


Рис. 40

Обозначим одномерный цикл, составленный из всех ребер стороны a, взятых с коэффициентом 1 в ориентации, указанной на рисунке, буквой a^1 и соответствующий цикл для стороны b — буквой b^1. Тогда

$$U^1 \sim {}'U^1 = \alpha a^1 + \beta b^1.$$

Таким образом, классы гомологий циклов a^1 и b^1 являются образующими одномерной группы Бетти.

II. Докажем, что $\alpha a^1 + \beta b^1 \sim 0$ лишь если $\alpha = \beta = 0$. Ориентируем все треугольники квадрата так, чтобы каждые два треугольника, примыкающие к внутреннему ребру, индуцировали в этом ребре противоположные ориентации. Граница двумерного алгебраического комплекса U^2, составленного из всех этих ориентированных треугольников, равна нулю, т. е. этот комплекс является циклом, потому что противоположные стороны квадрата на торе совпадают. Пусть теперь $\alpha a^1 + \beta b^1 \sim 0$. Этот одномерный цикл является границей двумерного алгебраического комплекса, содержащего все треугольники квадрата одинаковое число раз, так как внутренние ребра в границу не входят. Другими словами, $\alpha a^1 + \beta b^1$ является границей комплекса U^2, взятого с некоторым коэффициентом: $\alpha a^1 + \beta b^1 = (mU^2)^{\cdot}$. Но U^2 есть цикл, $(mU^2)^{\cdot} = 0$, следовательно, $\alpha a^1 + \beta b^1 = 0$. Циклы a^1 и b^1 не имеют общих одномерных симплексов. Поэтому $\alpha = \beta = 0$. Одномерная группа Бетти B^1 представляет свободную абелеву группу с двумя образующими, за базу гомологий которой можно принять циклы a^1 и b^1 (меридиан и экватор тора). B^0 и B^2 суть свободные циклические группы. Таким образом

$$p^0 = 1, \quad p^1 = 2, \quad p^2 = 1;$$

коэффициенты кручения отсутствуют.

Если бы квадрат, изображенный на рис. 40, был разбит на треугольники не тремя, а большим числом горизонтальных и вертикаль-

ных линий и соответствующим количеством диагональных линий, то получившийся при этом симплициальный комплекс имел бы, очевидно, те же группы Бетти. Вообще, если симплициальное разбиение тора не слишком сложно, то легко показать, что его группы Бетти такие же, какие только что были получены нами. Поэтому естественно возникает предположение, что группы Бетти вовсе не зависят от выбранного симплициального разбиения, а определяются тором как окрестностным пространством (как полиэдром). Однако пока мы этого еще не доказали (доказательство приведено в гл. IV), мы должны считаться с возможностью существования разбиений, ведущих к другим результатам, отличным от полученных выше.

4. *Симплициальная звезда.* Пусть $\boldsymbol{K}^n$ — симплициальная звезда с центром O и краем $\boldsymbol{K}^{n-1}$ и U^k — любой k-мерный цикл на $\boldsymbol{K}^n$ ($k > 0$). Покажем, что U^k можно заменить гомологичным ему циклом $'U^k$, не содержащим k-мерных симплексов края $\boldsymbol{K}^{n-1}$. В самом деле, если такой симплекс, например $E^k = \varepsilon(P_0P_1 \dots P_k)$ входит в U^k с коэффициентом u, то, вычитая из U^k границу симплекса

$$E^{k+1} = \varepsilon(OP_0P_1 \dots P_k),$$

умноженную на u, мы получим гомологичный U^k цикл, не содержащий E^k. Таким способом мы можем по очереди избавиться от всех принадлежащих $\boldsymbol{K}^{n-1}$ симплексов U^k, мы получим тогда цикл $'U^k \sim U^k$, у которого все k-мерные симплексы инцидентны с O. Но такой цикл $'U^k$ непременно $= 0$. Докажем это от противного: допустим, что в $'U^k$ входит симплекс $'E^k$ с коэффициентом $'u$. Тогда сторона $'E^{k-1}$ симплекса $'E^k$, противоположная вершине O, входит в $('U^k)^{\cdot}$ с тем же коэффициентом, так как $'E^k$ есть единственный k-мерный симплекс, имеющий $'E^{k-1}$ своей стороной и O вершиной. Но $('U^k)^{\cdot} = 0$, поэтому и $'u$ должно быть равно 0. Тем самым показано, что *при $k > 0$ каждый k-мерный цикл симплициальной звезды гомологичен нулю*:

$$p^0 = 1, \quad p^1 = p^2 = \dots = p^n = 0.$$

Коэффициенты кручения отсутствуют.

5. *n-мерный симплекс.* Так как n-мерный симплекс можно рассматривать как симплициальную звезду, центром которой является какая-нибудь вершина, а краем (звезды) — противоположная этой вершине сторона, то каждая группа Бетти n-мерного симплекса, за исключением нульмерной, состоит только из нулевого элемента.

6. *Сфера n измерений.* Возьмем в качестве исходного тетраэдральное симплициальное разбиение сферы (стр. 72). n-мерная сфера $\boldsymbol{S}^n$ представляет при этом границу $(n+1)$-мерного симплекса $\boldsymbol{E}^{n+1}$. Но тогда из пункта 5 следует, что всякий цикл U^k на $\boldsymbol{S}^n$ при $k > 0$ гомологичен нулю на $\boldsymbol{E}^{n+1}$, т. е. является границей алгебраического комплек-

са U^{k+1} , причем, за исключением случая, когда $k+1=n+1$, U^{k+1} сам лежит на $\boldsymbol{S}^n$. Таким образом (при $0<k<n$) $U^k\sim 0$ на $\boldsymbol{S}^n$.

Напротив, при $k=n$ U^{k+1} представляет комплекс, состоящий из одного ориентированного симплекса E^{n+1}, взятого с некоторым коэффициентом:

$$U^{k+1}=uE^{n+1},$$

так как в этом случае существует только один $(n+1)$-мерный симплекс. Поэтому

$$U^k=u\dot{E}^{n+1},$$

При $u\pm 0$ $u\dot{E}^{n+1}$ не может быть гомологичен нулю на $\boldsymbol{S}^n$, ввиду того что $\boldsymbol{S}^n$ имеет размерность n. Таким образом получается следующий результат: *каждая группа Бетти границы* $(n+1)$*-мерного симплекса, за исключением нульмерной и* n*-мерной, состоит только из нулевого элемента, нульмерная же* и n*-мерная группы являются свободными циклическими группами*:

$$p^0=1,\quad p^1=p^2=\ldots=p^{n-1}=0,\quad p^n=1.$$

Коэффициенты кручения равны нулю.

С простыми примерами комплексов, имеющих любое количество коэффициентов кручения, принимающих произвольные значения, мы встретимся при рассмотрении трехмерных многообразий (см. гл. IX, § 61 и упражнение 4 § 62).

§ 20. Слабые гомологии

В последовательность решеток L^k, Z^k, H^k можно вставить еще одну решетку H^k, состоящую из всех k-мерных циклов, каждый из которых, взятый с отличным от нуля коэффициентом, принадлежит группе H^k. Очевидно, такие циклы образуют свободную абелеву группу, так как если cU^k и dV^k входят в H^k $(c\neq 0,\ d\neq 0)$, то и $cd(U^k\pm V^k)$ принадлежат H^k, т. е. вместе с каждыми двумя циклами U^k и V^k принадлежит к H_0^k также их сумма и разность. H^k есть подгруппа группы H_0^k, а H_0^k, в свою очередь, является подгруппой Z^k. Действительно, cU^k входит в H^k и, следовательно, есть цикл, а тогда по формуле (3) § 16 и U^k представляет цикл. Мы получим последовательность решеток

$$\mathrm{L}^k,\quad \mathrm{Z}^k,\quad \mathrm{H}_0^k,\quad \mathrm{H}^k,$$

каждая из которых содержится в предыдущей.

Циклы, входящие в группу H_0^k, называются *слабо гомологичными нулю* (слабая гомологичность нулю обозначается так $\approx$). Таким образом

$$U^k\approx 0$$

означает, что существует целое число $c \neq 0$ такое, что $cU^k \sim 0$. Два алгебраических комплекса T_1^k и N_2^k называются *слабо гомологичными* друг другу,

$$T_1^k \approx T_2^k,$$

если их разность ≈ 0. Соотношение такого вида называется слабой гомологией.

Применимость по отношению к слабым гомологиям операций сложения, вычитания и умножения на целое число является только выражением групповых свойств группы H_0^k. Однако в противоположность обыкновенным, сильным, гомологиям, слабые гомологии можно также делить на отличное от нуля число. В самом деле

$$bW^k \approx 0 \tag{1}$$

означает, что $c(bW^k) \sim 0$ при некотором $c \neq 0$. Допустим, сверх того, что и $b \neq 0$. Но тогда $cbW^k \sim 0$, т. е.

$$W^k \approx 0. \tag{2}$$

Из (1) следует, таким образом, (2).

Рассмотрим разложение H_0^k по своей подгруппе H^k. Покажем, что *классами смежности* такого разложения являются элементы конечного порядка дополнительной группы $\mathrm{B}^k = \mathrm{Z}^k/\mathrm{H}^k$. В самом деле, каждый цикл из H_0^k, взятый с некоторым отличным от нуля коэффициентом, принадлежит к H^k. Обратно, каждый цикл, кратное которого есть цикл, гомологичный нулю, принадлежит H_0^k по определению. Поэтому H_0^k содержит классы гомологий конечного порядка и только эти классы, т. е. дополнительная группа $\mathrm{H}_0^k/\mathrm{H}^k$ есть подгруппа, составленная из элементов конечного порядка группы Бетти. Эта подгруппа называется *k-мерной группой кручения*. Ее порядок равен произведению k-мерных коэффициентов кручения.

Разлагая группу Z^k по подгруппе H_0^k, мы получаем разбиение всех циклов на классы слабо гомологичных друг другу циклов. Группа $\mathrm{Z}^k/\mathrm{H}_0^k$ называется *k-мерной приведенной группой Бетти* комплекса[13]. В силу теоретико-групповых соотношений (§ 83) приведенная группа Бетти $\mathrm{Z}^k/\mathrm{H}_0^k$ изоморфна дополнительной группе $(\mathrm{Z}^k/\mathrm{H}^k)/(\mathrm{H}_0^k/\mathrm{H}^k)$, т. е., *приведенную группу Бетти можно рассматривать как дополнительную группу (полной) группы Бетти* $\mathrm{B}^k = \mathrm{Z}^k/\mathrm{H}^k$, *по группе кручения* $\mathrm{H}_0^k/\mathrm{H}^k$. Но B^k представляет прямую сумму группы кручения и свободной абелевой группы с p^k образующими. Поэтому *приведенная группа Бетти сама есть свободная абелева группа с p^k образующими*. С помощью группы H_0^k осуществляется, таким образом, разложение группы Бетти на конечную часть — группу кручения, и бесконеч-

ную — приведенную группу Бетти. Подчеркнем, однако, что приведенная группа Бетти является, конечно, не подгруппой, а дополнительной группой группы Бетти.

Базу гомологий также можно разбить на базу кручений и базу слабых гомологий. Представим группу кручения в виде прямой суммы циклических групп порядков c_1^k, c_2^k, ..., $c_{\rho^k}^k$, где c_ν^k — k-мерные коэффициенты кручении. Выберем из каждой из этих групп по образующему элементу (которым служит определенный класс гомологий) и из каждого выбранного класса по одному представителю. Выбранные ρ^k циклов образуют *базу кручения*. Точно так же, представляя приведенную группу Бетти в виде прямой суммы p^k свободных циклических групп, выбирая из каждой по образующему элементу (которым служит класс слабо гомологичных между собой циклов) и затем по представителю каждого класса, мы получим p^k циклов, образующих *базу слабых гомологий*. Каждый цикл комплекса слабо гомологичен линейной комбинации этих p^k циклов. В базе гомологий

$$A_1^k,\ A_2^k,\ \ldots,\ A_{\rho^k}^k,\ B_1^k,\ B_2^k,\ \ldots,\ B_{\rho^k}^k,$$

введенной на стр. 90, A^k образуют базу кручения, B^k — базу слабых гомологий. Переход от одной базы слабых гомологий

$$B_1^k,\ B_2^k,\ \ldots,\ B_{p^k}^k$$

к другой

$$'B_1^k,\ 'B_2^k,\ \ldots,\ 'B_{p^k}^k$$

осуществляется при помощи унимодулярного преобразования с целочисленными коэффициентами

$$'B_\mu^k \approx \sum_{\nu=1}^{p^k} b_{\mu\nu} B_\nu^k \quad (\mu = 1,\ 2,\ \ldots,\ p^k).$$

В случае тора (§ 19, пример 3) база кручения отсутствует, — группа кручения состоит только из нулевого элемента. Базу слабых гомологий образуют циклы $a^1 (= B_1^1)$ и $b^1 (= B_2^1)$, медиан и параллель тора. В случае проективной плоскости (§ 19, пример 2) отсутствует база слабых гомологий, а база кручения состоит из цикла A^1 — проективной прямой.

Выпишем вместе все группы и решетки, встретившиеся нам до сих пор:

L^k — решетка k-мерных алгебраических комплексов;

Z^k — решетка k-мерных циклов;

H_0^k — решетка слабо гомологичных нулю k-мерных циклов;

H^k — решетка гомологичных нулю («сильно») k-мерных циклов;
$\mathrm{B}^k = \mathrm{Z}^k/\mathrm{H}^k$ — группа Бетти (полная);
$\mathrm{T}^k = \mathrm{H}_0^k/\mathrm{H}^k$ — группа кручения;
$\mathrm{B}_0^k = \mathrm{Z}^k/\mathrm{H}_0^k = \mathrm{B}^k/(\mathrm{H}_0^k/\mathrm{H}^k)$ — приведенная группа Бетти.

§ 21. Вычисление групп Бетти при помощи матриц инциденций

Выше мы дали *определение* групп Бетти. Теперь мы хотим показать общий прием, позволяющий, по крайней мере для конечного комплекса, *вычислить* эти группы. С этой целью представим, что все симплексы определенным образом ориентированы (нульмерные знаком $+$) и обозначены буквами

$$E_\varkappa^k \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, \alpha^k;\ k = 0, 1, \ldots, n);$$

тогда при $0 \leqslant k \leqslant n-1$ имеют место граничные соотношения

$$\dot{E}_\lambda^{k+1} = \sum_{\varkappa=1}^{\alpha^k} \varepsilon_{\varkappa\lambda}^k E_\varkappa^k \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, \alpha^{k+1}). \tag{1}$$

Матрицу

$$(\varepsilon_{\varkappa\lambda}^k) = \mathbf{E}^k \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

можно рассматривать как *таблицу с двойным входом*. Левый вход образуют ориентированные k-мерные симплексы, верхний вход — симплексы размерности $(k+1)$. На пересечении $\varkappa$-й строки с λ-м столбцом стоит коэффициент $\varepsilon_{\varkappa\lambda}^k$, показывающий, с какой ориентацией симплекс $E_\varkappa^k$ входит в границу симплекса E_λ^{k+1}. $\varepsilon_{\varkappa\lambda}^k$ равен $+1$ или -1, смотря по тому, имеет ли симплекс $E_\varkappa^k$ ориентацию, индуцированную симплексом E_λ^{k+1} или противоположную ей. Если же симплексы E_λ^k и E_λ^{k+1} вообще неинцидентны, то $\varepsilon_{\varkappa\lambda}^k = 0$. Матрица $\mathbf{E}^k$ называется *k-мерной матрицей инциденций* симплициального разбиения комплекса[14].

Матрицы инциденций $\mathbf{E}^0$ и $\mathbf{E}^1$ симплициального комплекса, состоящего из одного двумерного симплекса $\boldsymbol{E}^2$, при ориентациях, указанных на рис. 41, имеют вид:

$\mathbf{E}^0$	E_1^1	E_2^1	E_3^1
E_1^0	0	-1	-1
E_2^0	$+1$	0	$+1$
E_3^0	-1	$+1$	0

$\mathbf{E}^1$	E^2
E_1^1	$+1$
E_2^1	$+1$
E_3^1	-1

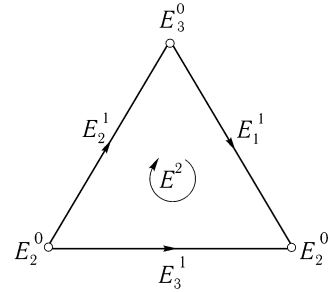


Рис. 41

Симплициальный комплекс полностью определяется матрицами инциденций. В самом деле, с помощью этих матриц мы можем узнать все $(k-1)$-мерные стороны симплекса $E_\varkappa^k$, для каждой такой стороны мы можем определить ее $(k-2)$-мерные стороны и т. д., пока мы не дойдем до вершин симплекса $E_\varkappa^k$. Таким образом матрицами инциденций определяется схема комплекса и, следовательно, сам комплекс. Поэтому все свойства комплекса должны получаться из матриц инциденций. Это справедливо, в частности, и для групп Бетти; мы покажем сейчас, как можно найти эти группы, зная матрицы инциденций.

Если в уравнении (1) $k > 0$, то, взяв границы обеих частей уравнения, мы получим соотношение

$$\left(\dot{E}_\lambda^{k+1}\right)^{\cdot} = \sum_{\varkappa=1}^{\alpha^k} \varepsilon_{\varkappa\lambda}^k \dot{E}_\varkappa^k = \sum_{\varkappa=1}^{\alpha^k} \varepsilon_{\varkappa\lambda}^k \sum_{\iota=1}^{\alpha^{k-1}} \varepsilon_{\iota\varkappa}^{k-1} E_\iota^{k-1} =$$

$$= \sum_{\iota=1}^{\alpha^{k-1}} \left(\sum_{\varkappa=1}^{\alpha^k} \varepsilon_{\iota\varkappa}^{k-1} \varepsilon_{\varkappa\lambda}^k \right) E^{k-1} = 0,$$

так как $\dot{E}_\lambda^{k+1}$ есть цикл. Но симплексы E_ι^{k-1} линейно независимы, поэтому каждый из коэффициентов в отдельности равен нулю:

$$\sum_{\varkappa=0}^{\alpha^k} \varepsilon_{\iota\varkappa}^{k-1} \varepsilon_{\varkappa\lambda}^k = 0 \quad (\iota = 1, 2, \ldots, \alpha^{k-1};\ \lambda = 1, 2, \ldots, \alpha^{k+1}).$$

Эту систему уравнений можно заменить, пользуясь обозначениями исчисления матриц*, *одним* уравнением

$$\mathbf{E}^{k-1}\mathbf{E}^k = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{2}$$

Эти уравнения являются арифметическим выражением того, что граница алгебраического комплекса есть цикл; ведь каждое из них в отдельности означает только, что граница границы $(k+1)$-мерного симплекса равна нулю.

Ориентированные симплексы

$$E_1^k, E_2^k, \ldots, E_{\alpha^k}^k$$

*См. *О. Шрейер* и *Е. Шпернер*, Теория матриц, ОНТИ, 1936.

образуют базу свободной абелевой группы L^k всех k-мерных алгебраических комплексов. Введем вместо них для каждой размерности $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ новую базу

$$\dot{U}_1^k, U_1^k, \ldots, U_{\alpha^k}^k.$$

Тогда для элементов новой базы имеют место граничные соотношения

$$\dot{U}_\lambda^{k+1} = \sum_{\varkappa=1}^{\alpha^k} {}'\varepsilon_{\varkappa\lambda}^k U_\varkappa^k, \tag{1'}$$

появляющиеся вместо соотношений (1) и дающие новые матрицы ${}'\mathbf{E}^k$. Для этих новых матриц также выполняются соотношения

$${}'\mathbf{E}^{k-1}{}'\mathbf{E}^k = 0,$$

вследствие того, что граница алгебраического комплекса, как и раньше, есть цикл. Постараемся теперь выбрать для каждой решетки L^k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ новую базу так, чтобы новые матрицы имели возможно более простую, каноническую форму H^k. Переход от исходной базы к новой мы будем производить последовательно, шаг за шагом. При этом каждый шаг будет заключаться в том, что мы меняем только *один* элемент базы *одной* определенной размерности. Замена осуществляется при помощи следующих двух *элементарных преобразований*:

a) заменой симплекса E_τ^t алгебраическим комплексом

$$U_\tau^t = E_\tau^t + E_\nu^t \quad (\tau \neq \nu),$$

b) заменой симплекса E_τ^t комплексом $U_\tau^t = -E_\tau^t$.

В результате преобразования a) все базисные элементы $U_\varkappa^k$, за исключением U_τ^t, совпадают с прежними базисными элементами $E_\varkappa^k$. Вследствие этого меняются только матрицы инциденций $\mathbf{E}^{t-1}$ и $\mathbf{E}^t$. В $\mathbf{E}^{t-1}$ изменению подвергается только τ-й столбец. Чтобы найти, как он меняется, составим $\dot{U}_\tau^t$:

$$\dot{U}_\tau^t = (E_\tau^t + E_\nu^t)^{\cdot} = \sum_{\sigma=1}^{\alpha^{t-1}} \left(\varepsilon_{\sigma\tau}^{t-1} + \varepsilon_{\sigma\nu}^{t-1}\right) U_\sigma^{t-1} = \sum_{\sigma=1}^{\alpha^{t-1}} {}'\varepsilon_{\sigma\tau}^{t-1} U_\sigma^{t-1},$$

т. е.

$${}'\varepsilon_{\sigma\tau}^{t-1} = \varepsilon_{\sigma\tau}^{t-1} + \varepsilon_{\sigma\nu}^{t-1}.$$

Таким образом, чтобы получить ${}'\mathbf{E}^{t-1}$, нужно прибавить к τ-му столбцу матрицы $\mathbf{E}^{t-1}$ ее ν-й столбец.

В матрице $\mathbf{E}^t$ в левом входе E_τ^t заменяется алгебраическим комплексом $U_\tau^t = E_\tau^t + E_\nu^t$, в то время как верхний вход остается без изменений. Составив

$$\begin{aligned}\dot{U}_\lambda^{t+1} = \dot{E}_\lambda^{t+1} &= \ldots + \varepsilon_{\tau\lambda}^t E_\tau^t + \ldots + \varepsilon_{\nu\lambda}^t E_\nu^t + \ldots = \\ &= \ldots + \varepsilon_{\tau\lambda}^t (E_\tau^t + E_\nu^t) + \ldots + (\varepsilon_{\nu\lambda}^t - \varepsilon_{\tau\lambda}^t) E_\nu^t + \ldots = \\ &= \sum_{\mu=1}^{\alpha^t} {}'\varepsilon_{\mu\lambda}^t U_\mu^t,\end{aligned}$$

мы видим, что

$$\begin{aligned}{}'\varepsilon_{\mu\lambda}^t &= \varepsilon_{\mu\lambda}^t \quad \text{для} \quad \mu \neq \nu, \\ {}'\varepsilon_{\nu\lambda}^t &= \varepsilon_{\nu\lambda}^t - \varepsilon_{\tau\lambda}^t,\end{aligned}$$

т. е. ${}'\mathbf{E}^t$ получается из $\mathbf{E}^t$ вычитанием τ-й строки из ν-й.

Элементарное преобразование b) изменяет знак в τ-м столбце матрицы $\mathbf{E}^{t-1}$ и в τ-й строке матрицы $\mathbf{E}^t$.

Заменив посредством элементарныхпреобразований базу E базой U, мы можем затем применить элементарное преобразование к базе U и заменить ее базой V. Матрицы ${}'\mathbf{E}^k$ подвергаются при этом таким же изменениям, как раньше матрицы $\mathbf{E}^k$. В частности, посредством преобразований a) и b) можно осуществить в $\mathbf{E}^t$ прибавление одной строки к другой. Чтобы прибавить, например, τ-ю строку к ν-й мы меняем знак τ-й строки, применяем преобразования a) и восстанавливаем затем первоначальный знак τ-й строки.

Отсюда следует, что с помощью элементарных преобразований a) и b) можно осуществить элементарные преобразования матрицы (сложение строк и столбцов, умножение строки или столбца на -1[*]). Посредством этих преобразований целочисленную матрицу можно привести к указанной в § 87 канонической форме. Каноническая форма матрицы имеет такой вид: на главной диагонали вверху слева стоят инвариантные множители, число которых равно рангу матрицы; все же остальные элементы матрицы в канонической форме равны нулю.

[*]Заметим, между прочим, что элементарные преобразования a) и b) являются частными случаямч целочисленных унимодулярных преобразований, переводящих базис E^t в новый базис U^t. Вообще из формулы (1) следует, что при таких преобразованиях ряд коэффициентов $\varepsilon_{\mathfrak{s}\tau}^{t-1}$ при фиксированном σ преобразуется по индексу τ когредиентно с E_τ^t, ряд же $\varepsilon_{\tau\lambda}^t$ преобразуется — при λ фиксированном — контрагредиентно (см. § 71). Так как мы в дальнейшем не будем пользоваться общими целочисленными унимодулярными преобразованиями, то мы ограничиваемся здесь элементарными преобразованиями. Можно показать, что каждое целочисленное унимодулярное преобразование можно свести к ряду преобразований a) и b). Однако, так как это нам в дальнейшем не понадобится, доказательство мы опускаем.

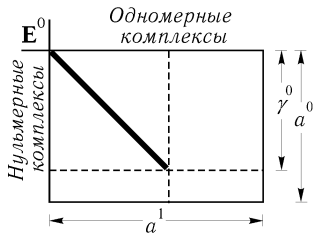


Рис. 42

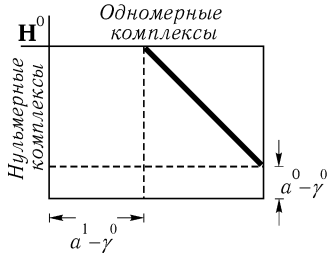


Рис. 43

Мы хотим теперь определенным образом *нормализировать*[*] матрицы инциденций. Начнем с того, что приведем матрицу $\mathbf{E}^0$ к указанной выше канонической форме (рис. 42). Применяя затем элементарные преобразования, мы можем переставить инвариантные множители так, чтобы они отсекали правый верхний угол матрицы $\mathbf{E}^0$ (рис. 43). Число инвариантных множителей равно рангу γ^0 матрицы $\mathbf{E}^0$. Производя указанную перестановку инвариантных множителей в $\mathbf{E}^0$, мы одновременно переставляем строчки матрицы $\mathbf{E}^1$, так как левый вход матрицы $\mathbf{E}^1$ совпадает с верхним входом матрицы $\mathbf{E}^0$. Но произведение $\mathbf{E}^0\mathbf{E}^1$, как мы знаем, равно нулю, поэтому последние γ^0 строк преобразованной матрицы $\mathbf{E}^1$ должны состоять сплошь из нулей.

Будем, далее, преобразовывать верхние $\alpha^1 - \gamma^0$ строчек матрицы $\mathbf{E}^1$. Их преобразованиям соответствуют преобразования первых $\alpha^1 - \gamma^0$ столбцов матрицы $\mathbf{E}^0$, а так как эти столбцы состоят сплошь из нулей, то величины $\varepsilon_{\iota\tilde{\varkappa}^0}$ не изменятся. Могут измениться лишь элементы верхнего входа. $\mathbf{E}^0$ примет при этом свою окончательную, нормальную форму, которую мы обозначим через $\mathbf{H}^0$. Далее, выполняя преобразования столбцов матрицы $\mathbf{E}^1$ (эти преобразования вообще не влияют на матрицу $\mathbf{H}^0$), мы приведем $\mathbf{E}^1$ к нормальной форме $\mathbf{H}^1$, в которой инвариантные множители занимают такое же положение, как в $\mathbf{H}^0$. Остальные матрицы, до $\mathbf{E}^{n-1}$ включительно, преобразовываются шаг за шагом таким же способом.

Приведенная *к нормальной форме* $\mathbf{H}^k$ матрица инциденций $\mathbf{E}^k$ имеет своими элементами сплошь нули, за исключением элементов, расположенных на диагональном отрезке, отсекающем верхний правый угол матрицы (рис. 44). На этом отрезке стоят сначала ρ^k отличных от 1 чисел $c_1^k, c_2^k, \ldots, c_{\rho^k}^k$, каждое из которых является делителем предыдущего и которые служат, как мы покажем, k-мерными коэффициентами кручения. Остальные числа этого отрезка суть $\gamma^k - \rho^k$ единиц.

[*] При нормализации не играет никакой роли то, что $\mathbf{E}^0, \mathbf{E}^1, \ldots, \mathbf{E}^{n-1}$ являются матрицами инциденций симплициального комплекса. Нам придется воспользоваться только соотношениями $\mathbf{E}^{k-1}\mathbf{E}^k = 0$.

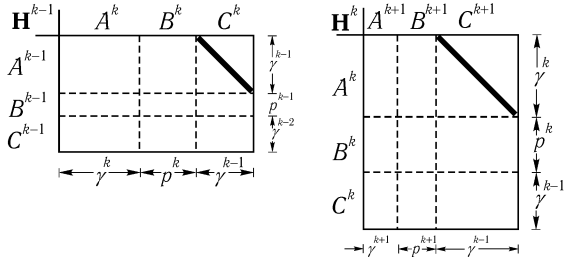


Рис. 44

Описанная нормализация матриц инциденций позволяет без труда прийти к цели, так как нормальные формы $\mathbf{H}^k$ дают возможность определить группы L^k, Z^k и H^k k-мерных алгебраических комплексов, циклов и циклов, гомологичных нулю, и затем найти группы Бетти. Мы покажем сейчас, как это производится.

Последние γ^{k-1} из k-мерных алгебраических комплексов, стоящих в верхнем входе матрицы $\mathbf{H}^{k-1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, имеют границу, отличную от нуля, так как в последних столбцах матрицы $\mathbf{H}^{k-1}$ стоят инвариантные множители c_1^{k-1}, c_2^{k-1}, $\ldots$, $c_{\gamma^{k-1}}^{k-1}$. Обозначим эти алгебраические комплексы буквами

$$C_1^k, C_2^k, \ldots, C_{\gamma^{k-1}}^k.$$

Пусть

$$A_1^k, A_2^k, \ldots, A_{\gamma^k}^k$$

суть первые γ^k из алгебраических комплексов левого входа матрицы $\mathbf{H}^k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$. Они являются, очевидно, циклами слабо гомологичными нулю (≈ 0). В самом деле, в последних γ^k столбцах $\mathbf{H}^k$ стоят инвариантные множители c_1^k, c_2^k, $\ldots$, $c_{\gamma^k}^k$. Поэтому граничные соотношения суть

$$\dot{C}_\lambda^{k+1} = c_\lambda^k A_\lambda^k \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, \gamma^k;\ k = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{3}$$

Алгебраические комплексы и циклы C^k и A^k не должны существовать непременно для каждого k от 0 до n. Так, для $k = 0$ C^0 не существует, ввиду того что каждый нульмерный комплекс есть цикл. Для $k = n$ отсутствуют A^k, так как в n-мерном комплексе не существует $(n+1)$-мерных симплексов и, следовательно, не может существовать слабо гомологичных нулю n-мерных циклов (кроме n-мерного нулевого комплекса). Ясно, что A^k и C^k отличны друг от друга, так как C^k

имеют не равную нулю границу, в то время как A^k суть циклы. Однако A^k и C^k, вообще говоря, еще не исчерпывают всех α^k элементов базы k-мерных алгебраических комплексов. Обозначим остальные элементы этой базы буквами

$$B_1^k,\ B_2,\ \ldots,\ B_{p^k}^k.$$

Эти элементы, очевидно, как и A^k, являются циклами, но не циклами, слабо гомологичными нулю. Их число

$$p^k = \alpha^k - \gamma^k - \gamma^{k-1} \tag{4}$$

при $0 < k < n$. При $k = 0$ $p^0 = \alpha^0 - \gamma^0$, при $k = n$ $p^n = \alpha^n - \gamma^{n-1}$. Если условиться, что $\gamma^{-1} = \gamma^n = 0$, то формула (4) будет иметь место при всех k от 0 до n.

Так как верхний вход матрицы $\mathbf{H}^{k-1}$ представляет *базу* решетки L^k всех k-мерных алгебраических комплексов ($k = 1, 2, \ldots, n$), то мы можем теперь каждый такой комплекс V^k записать в виде

$$V^k = \sum_{\gamma=1}^{\gamma^k} x_\lambda^k A_\lambda + \sum_{\mu=1}^{p^k} y_\mu^k B_\mu^k + \sum_{\nu=1}^{\gamma^{k-1}} z_\nu^k C_\nu^k.$$

A_λ^k и B_μ^k суть циклы. Поэтому V^k есть цикл только в том случае, если

$$\sum_{\nu=1}^{\gamma^{k-1}} z_\nu^k \dot{C}_\nu^k = \sum_{\nu=1}^{\gamma^{k-1}} z_\nu^k c_\nu^{k-1} A_\nu^{k-1} = 0,$$

а это может быть вследствие линейной независимости комплексов A_ν^{k-1} лишь в том случае, когда все $z_\nu^k = 0$. При $k = 0$ комплексы C_ν^0 отсутствуют и каждый цикл также представляется линейной комбинацией циклов A_λ^0 и B_μ^0.

Таким образом, при $k = 0, 1, \ldots, n$ свободная абелева группа Z^k всех k-мерных циклов представляет группу, имеющую своими образующими γ^k циклов A_λ^k и p^k циклов B_μ^k.

Переходим теперь к подгруппе H^k k-мерных циклов, гомологичных нулю. Для того чтобы k-мерный цикл

$$V^k = \sum_{\lambda=1}^{\gamma^k} x_\lambda^k A_\lambda + \sum_{\mu=1}^{p^k} y_\mu^k B_\mu^k \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{5}$$

был гомологичен нулю, нужно, чтобы он был границей $(k+1)$-мерного комплекса. Но $(k+1)$-мерные комплексы A_ρ^{k+1} и $B_\sigma^{(k+1)}$ суть циклы.

Поэтому V^k должен быть границей линейной комбинации комплексов C_λ^{k+1}.

$$V^k = \left(\sum_{\lambda=1}^{\gamma^k} z_\lambda^{k+1} C_\lambda^{k+1} \right)^{\cdot} = \sum_{\lambda=1}^{\gamma^k} z_\lambda^{k+1} c_\lambda^k A_\lambda. \tag{6}$$

Циклы A_λ^k и B_λ^k линейно независимы. Поэтому правые части уравнений (5) и (6) должны быть равны друг другу тождественно, откуда следует, что

$$x_\lambda^k = z_\lambda^{k+1} c_\lambda^k, \quad y_\mu^k = 0.$$

Таким образом, k-мерный цикл (5) тогда и только тогда гомологичен нулю, когда его коэффициенты удовлетворяют условиям

$$x_\lambda^k \equiv 0 \pmod{c_\lambda^k}, \quad y_\mu^k = 0. \tag{7}$$

Эти соотношения должны выполняться и при $k = n$, так как A^n отсутствуют и единственный гомологичный нулю n-мерный цикл есть n-мерный нулевой комплекс. Итак, два цикла V^k и $'V^k$ принадлежат к одному классу гомологий ($k = 0, 1, \ldots, n$) в том и только в том случае, когда

$$x_\lambda^k \equiv {}'x_\lambda^k \pmod{c_\lambda^k} \quad \text{и} \quad y_\mu^k = {}'y_\mu^k. \tag{8}$$

Если поэтому в равенстве (5) вместо коэффициентов x_λ^k взять их вычеты ξ_λ^k по модулю c_λ^k:

$$0 \leqslant \xi_\lambda^k < c_\lambda^k, \tag{9}$$

то получится соотношение

$$V^k \sim \sum_{\lambda=1}^{\rho^k} \xi_\lambda^k A_\lambda^k + \sum_{\mu=1}^{p^k} \eta_\mu^k B_\mu^k. \tag{10}$$

По условию (9) в этом соотношении отсутствуют все A_λ^k, для которых $c_\lambda^k = 1$, так что индекс λ в первой сумме пробегает значения от 1 до ρ^k, где ρ^k есть число отличных от 1 инвариантных множителей матрицы $\mathbf{E}^k$. В силу соотношений (8) коэффициенты ξ_λ^k и η_μ^k однозначно определяются циклом V^k.

Другими словами, из соотношений (7) и (8) следует, что порядки циклических подгрупп группы Бетти B^k, образующими которых являются циклы $A_1^k, A_2^k, \ldots, A_{\rho^k}^k$, равны соответственно $c_1^k, c_2^k, \ldots, c_{\rho^k}^k$. Циклические же подгруппы с образующими $B_1^k, B_2^k, \ldots, B_p^k$ суть свободные циклические группы. В силу (10) каждый элемент группы Бетти однозначно определяется как сумма элементов, взятых по одному из

каждой такой подгруппы. Таким образом B^k есть прямая сумма этих подгрупп. A_1^k, A_2^k, ..., $A_{\rho^k}^k$ образуют вместе с циклами B_1^k, B_2^k, ..., $B_{p^k}^k$ базу гомологий, циклы же B_1^k, B_2^k, ..., $B_{p^k}^k$ сами по себе представляют k-мерную базу слабых гомологий. $p^k = \alpha^k - \gamma^k - \gamma^{k-1}$ является числом Бетти, а c_1^k, c_2^k, ..., $c_{\rho^k}^k$ k-мерными коэффициентами кручения. Вместе с тем группы Бетти определены полностью, и мы получаем следующую теорему:

Теорема. *Пусть α^k есть число k-мерных симплексов симплициального комплекса $\boldsymbol{K}^n$ и γ^k — ранг матрицы инциденций $\mathbf{E}^k$. Тогда k-мерное число Бетти*

$$p^k = \alpha^k - \gamma^k - \gamma^{k-1}$$

($\gamma^{-1} = \gamma^n = 0$). k-мерными коэффициентами кручения являются отличные от единицы инвариантные множители матрицы $\mathbf{E}^k$; они отсутствуют, наверное, при $k = n$.

Числа Бетти и коэффициенты кручения называются иногда *численными инвариантами* комплекса, в противоположность другим математическим объектам, инвариантно связанным с комплексом, вроде фундаментальной группы (которая будет рассмотрена дальше).

§ 22. Кусочные алгебраические комплексы

Хотя теоретически группы Бетти всегда можно вычислить при помощи матриц инциденций, практически осуществить это по большей части трудно. Рассмотрим, например, приведенное на рис. 40 (стр. 93) симплициальное разбиение тора. Здесь $\alpha^0 = 9$, $\alpha^1 = 27$, $\alpha^2 = 18$. Таким образом приходится иметь дело с матрицами, имеющими по 27 рядов. Не говоря уже о приведении к каноническому виду, даже выписывание таких матриц представляет большую работу. Поэтому желательно иметь более простой способ вычисления численных инвариантов и групп Бетти. Такой способ мы получим, если в качестве элементов k-мерных комплексов будем рассматривать не отдельные симплексы, как до сих пор, а более сложные образования, которые мы будем называть кусками. Так же как из отдельных симплексов мы составляли симплициальные комплексы, мы будем из таких кусков составлять кусочные комплексы и с их помощью определять группы Бетти.

Итак, для каждой размерности $k = 0, 1, \ldots, n$ мы выбираем конечное число симплициальных комплексов, называемых *k-мерными кусками*,

$$Q_1^k, Q_2^k, \ldots, Q_{\overline{\alpha}^k}^k.$$

Для этих кусков должны выполняться следующие условия:

(Кус$_1$). Q_1^k, Q_2^k, …, $Q_{\overline{\alpha}^k}^k$ линейно независимы, т. е. из

$$t_1 Q_1^k + t_2 Q_2^k + \ldots + t_{\overline{\alpha}^k} Q_{\overline{\alpha}^k}^k = 0$$

следует всегда $t_1 = t_2 = \ldots = t_{\overline{\alpha}^k} = 0$. Это условие выполняется, например, если никакие два куска Q_i^k и Q_j^k не имеют общих k-мерных симплексов.

Линейная комбинация таких кусков называется *кусочным алгебраическим комплексом*. Так как куски линейно независимы, то два кусочных комплекса* $\sum t_\mu Q_\mu^k$ и $\sum {}'t_\mu Q_\mu^k$ равны (совпадают) тогда и только тогда, когда $t_1 = {}'t_1$, $t_2 = {}'t_2$, …, $t_{\overline{\alpha}^k} = {}'t_{\overline{\alpha}^k}$. Кусочные комплексы являются специальным образом составленными симплициальными комплексами, поэтому каждый кусочный комплекс имеет определенную границу и можно говорить о кусочных циклах и кусочных циклах, гомологичных нулю. Дальнейшие требования, налагаемые на кусочные комплексы, таковы:

(Кус$_2$). Граница $(k+1)$-мерного кусочного комплекса есть k-мерный кусочный комплекс. Очевидно, достаточно потребовать вместо этого, чтобы граница каждого $(k+1)$-мерного куска была бы k-мерным кусочным комплексом:

$$\dot{Q}_\lambda^{k+1} = \sum_{\varkappa=1}^{\overline{\alpha}^k} \overline{\varepsilon}_{\varkappa\lambda}^k Q_\varkappa^k \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, \overline{\alpha}^{k+1}). \tag{1}$$

(Кус$_3$). Для каждого k-мерного симплициального цикла существует кусочный цикл.

(Кус$_4$). Если k-мерный кусочный цикл гомологичен нулю, т. е. является границей $(k+1)$-мерного *симплициального* комплекса, то он является также границей $(k+1)$-мерного *кусочного* комплекса.

Условия (Кус$_1$)–(Кус$_4$) взаимно непротиворечивы, так как симплексы $\boldsymbol{K}^n$, взятые с какой-нибудь ориентацией, могут рассматриваться как куски специальной кусочной системы, для которой, очевидно, выполняются все четыре условия.

Для нахождения групп Бетти нужно теперь рассмотреть вместо симплициальных алгебраических комплексов, составленных из «мелких» элементов-симплексов, кусочные симплексы, образованные более «массивными» ячейками-кусками. Вычисление производится совершенно таким же способом, как раньше. Разница лишь в том, что исходным пунктом теперь являются не матрицы инциденций симплициального комплекса, а *матрицы кусочных инциденций*

$$(\overline{\varepsilon}_{\varkappa\lambda}^k) = \overline{\mathbf{E}}^k,$$

*Там, где это не может внести неясности, мы будем иногда вместо выражения «алгебраический комплекс» говорить просто «комплекс».

определяемые граничными соотношениями (1). Мы, однако, проведем вывод полностью, чтобы посмотреть, где именно приходится пользоваться условиями (Кус$_1$)–(Кус$_4$).

Рассмотрим границу обеих частей равенства (1), считая, что $k > 0$. Так как $\dot{Q}_\lambda^{k+1}$ есть цикл, то его граница равна нулю, то-есть:

$$\sum_{\varkappa=1}^{\overline{\alpha}^k} \sum_{\iota=1}^{\overline{\alpha}^{k-1}} \overline{\varepsilon}_{\varkappa\lambda}^{k} \overline{\varepsilon}_{\iota\varkappa}^{k-1} Q_\iota^{k-1} = 0.$$

Вследствие линейной независимости кусков Q_ι^{k-1}, это равносильно условию

$$\sum_{\varkappa=1}^{\overline{\alpha}^k} \overline{\varepsilon}_{\iota\varkappa}^{k-1} \overline{\varepsilon}_{\varkappa\lambda}^{k} = 0 \quad \text{или} \quad \overline{\mathbf{E}}^{k-1}\, \overline{\mathbf{E}}^{k} = 0.$$

Применяя к кускам Q^k, стоящим в левых и верхних входах матриц, унимодулярные преобразования, мы приведем, как в § 21, одновременно все матрицы $\overline{\mathbf{E}}^k$ к нормальным формам $\overline{\mathbf{H}}^k$. Кусочные комплексы, стоящие во входах матриц $\overline{\mathbf{H}}^k$, по-прежнему линейно независимы и для каждой размерности распадаются на три категории:

1. Комплексы $\overline{A}_\lambda^k$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, \overline{\gamma}^k)$. Это циклы слабо гомологичные нулю.

2. Комплексы $\overline{B}_\mu^k$ $(\mu = 1, 2, \ldots, \overline{p}^k)$. Это также циклы, но они не гомологичны нулю ни с каким отличным от нуля множителем.

3. Комплексы $\overline{C}_\nu^k$ $(\nu = 1, 2, \ldots, \overline{\gamma}^{k-1})$. Эти комплексы уже не являются циклами и

$$(\overline{C}_\nu^k)^{\cdot} = \overline{c}_\nu^{k-1}\, \overline{A}_\nu^{k-1}.$$

При этом $\overline{\gamma}^k$ есть ранг матрицы $\overline{\mathbf{E}}^k$, $\overline{c}_\nu^k$ суть инвариантные множители этой матрицы и $\overline{p}^k = \overline{\alpha}^k - \overline{\gamma}^k - \overline{\gamma}^{k-1}$ (считая, что $\overline{\gamma}^{-1}$ и $\gamma^n = 0$). Далее выводится, как и раньше, что всякий k-мерный кусочный *цикл* есть линейная комбинация циклов $\overline{A}_\lambda^k$ и $\overline{B}_\mu^k$. k-мерный же кусочный цикл, *гомологичный нулю*, т. е. в силу условия (Кус$_4$) являющийся границей $(k+1)$-мерного кусочного комплекса, есть линейная комбинация циклов $\overline{c}_\varkappa^k \overline{A}_\varkappa^k$. Таким образом каждый кусочный цикл, а следовательно, вследствие условия (Кус$_3$), и каждый симплициальный цикл, гомологичен одной и только одной линейной комбинации вида

$$\xi_1 \overline{A}_1^k + \xi_2 \overline{A}_2^k + \ldots + \xi_{\overline{\gamma}^k} \overline{A}_{\overline{\gamma}^k}^k + \eta_1 \overline{B}_1^k + \ldots + \eta_{\overline{p}^k} \overline{B}_{\overline{p}^k}^k,$$

где $0 \leqslant \xi_1 < \overline{c}_\lambda^k$, а η_μ — любое целое число. Но это значит, что те $\overline{A}^k$, для которых соответствующие инвариантные множители не равны едини-

це, вместе с $\overline{B}^k$ образуют k-мерную базу гомологий, а $\overline{B}^k$ в отдельности — базу слабых гомологий. Поэтому число Бетти

$$p^k = \overline{p}^k = \overline{\alpha}^k - \overline{\gamma}^k - \overline{\gamma}^{k-1}, \tag{2}$$

а коэффициенты кручения суть отличные от 1 инвариантные множители $c_\mu^k = \overline{c}_\nu^k$ матрицы $\overline{\mathbf{E}}^k$.

Пример 1. За кусочную систему *тора* (§ 19) можно взять вершину O, одномерные циклы a^1 и b^1 (меридиан и экватор тора) и двумерный комплекс (цикл) U^2, составленный из всех соответствующим образом ориентированных двумерных симплексов тора. Условие (Кус$_1$) выполняется, так как взятые k-мерные куски не имеют общих k-мерных симплексов. Условие (Кус$_2$) также выполняется, так как все наши куски суть циклы. Условие (Кус$_3$) выполняется при $k = 0$ вследствие того, что каждые два нульмерных симплекса связного комплекса гомологичны между собой; при $k = 1$ — вследствие того что по доказанному выше каждый одномерный цикл $\sim \alpha a^1 + \beta b^1$; при $k = 2$ — потому что все двумерные циклы являются кратными куска (цикла) U^2, образованного из всех двумерных симплексов нашей поверхности. Наконец, условие (Кус$_4$) также выполняется: при $k = 0$ единственный гомологичный нулю нульмерный кусочный цикл есть нулевой комплекс. При $k = 1$ то же самое показано в п. II на стр. 93. Наконец, двумерных циклов, гомологичных нулю (кроме нулевого комплекса), не существует. Кусочные матрицы инциденций имеют вид

$\overline{\mathbf{E}}^0$	a^1	b^1
O	0	0

$\overline{\mathbf{E}}^1$	U^2
a^1	0
b^1	0

Из этих матриц сразу получаются известные уже нам группы Бетти тора.

Пример 2. В качестве кусочной системы октаэдрального разбиения сферы (§ 14) можно взять две диаметрально-противоположные вершины экватора, две соединяющих эти вершины экваториальные полуокружности (каждая из этих полуокружностей состоит из двух одномерных симплексов) и две полусферы, на которые разбивается экватором. От такого кусочного разбиения сферы можно легко перейти к кусочному разбиению проективной плоскости. Для этого нужно произвести барицентрическое подразделение нашего симплекциального комплекса и затем отождествить диаметрально-противоположные куски кусочного разбиения сферы. Получающиеся кусочное разбиение проективной плоскости содержит по одному куску каждой размерности. Аналогичное разбиение применимо к проективному пространству любого числа измерений, и мы можем таким путем для проективного пространства $\boldsymbol{P}^n$ любой размерности получить кусочные матрицы инциденций и найти с их помощью группы Бетти. Однако доказательство того, что мы получаем при этом, действительно, кусочное разбиение проективного пространства, представляет некоторые затруднения. Мы поэтому не производим вычислений, а в дальнейшем покажем (стр. 155) более простой метод нахождения групп Бетти проективного пространства $\boldsymbol{P}^n$.

Понятие кусочного комплекса будет играть весьма важную роль в теории многообразий (см. § 41, 61, 67).

§ 23. Алгебраические комплексы и числа Бетти по модулю 2. Формула Эйлера

Мы уже видели (см. § 15, примечание I), что наряду с числочисленными алгебраическими комплексами можно определить и алгебраические комплексы относительно любого *поля коэффициентов* J. При этом J есть произвольная абелева группа. Мы в этом параграфе подробно рассмотрим случай, когда J есть конечная группа G_2, состоящая из двух элементов. Эту группу, очевидно, можно представлять себе как группу [кольцо и даже алгебраическое поле (тело)] вычетов по модулю 2, в соответствии с чем ее элементы мы будем обозначать символами $\check{0}$ и $\check{1}$ с такими формулами для сложения:

$$\check{0}+\check{0}=\check{0}, \quad \check{0}+\check{1}=\check{1}, \quad \check{1}+\check{1}=\check{0}. \tag{1}$$

Алгебраические комплексы по группе G_2 мы будем называть *алгебраическими комплексами по модулю* 2[15].

В соответствии с нашим общим определением (§ 15), k-мерный алгебраический комплекс по модулю 2 есть конечная линейная форма

$$\boldsymbol{U}_2^k=\sum u_i \boldsymbol{E}_i^k, \tag{2}$$

где коэффициенты u_i суть вычеты по модулю 2: $\check{0}$ или $\check{1}$. Так как из соотношений (1) следует, что в группе G_2

$$-\check{1}=\check{1},$$

то формула (1) из § 15 переходит в

$$-\boldsymbol{E}^k=\boldsymbol{E}^k.$$

Другими словами, в теории алгебраических комплексов по модулю 2 мы не различаем две ориентации одного и того же симплекса, или, что то же самое, мы рассматриваем симплексы без ориентации.

Это обстоятельство позволяет непосредственно определить k-мерный алгебраический комплекс по модулю 2 следующим образом: *k-мерный алгебраический комплекс по модулю 2 абсолютного комплекса $\boldsymbol{K}$ получается, если каждому абсолютному (т. е. неориентированному) k-мерному симплексу комплекса $\boldsymbol{K}$ отнести один из вычетов по модулю 2: $\check{0}$ или $\check{1}$*; при этом мы предполагаем, что лишь конечному числу симплексов отнесен вычет $\check{1}$. Мы можем, конечно, сказать и так:

k-мерный алгебраический комплекс по модулю 2 есть линейная форма (2), в которой коэффициенты суть вычеты по модулю 2, а «переменные» $\boldsymbol{E}^k$, суть неориентированные k-мерные симплексы (данного абсолютного комплекса $\boldsymbol{K}$)*.

Алгебраические комплексы по модулю (2) можно складывать как линейные формы, руководствуясь при этом правилом (1).

Отсюда следует, что k-мерные алгебраические комплексы по модулю 2 данного абсолютного комплекса $\boldsymbol{K}$ образуют абелеву группу $\mathrm{L}_2^k(\boldsymbol{K})$. Нетрудно видеть, что в случае конечного комплекса $\boldsymbol{K}$ группа $\mathrm{L}_2^k(\boldsymbol{K})$ состоит из конечного числа элементов.

Каждому целочисленному алгебраическому комплексу U^2 соответствует алгебраический комплекс $\boldsymbol{U}_2^k$ по модулю 2, полученный заменой каждого коэффициента в комплексе U^k его вычетом по модулю 2.

Наоборот, каждому комплексу $\boldsymbol{Q}_2^k$ по модулю 2 соответствует бесконечно много целочисленных алгебраических комплексов U^k: они получаются, если произвольно ориентировать каждый симплекс $\boldsymbol{Q}_2^k$ и его коэффициент u_i в $\boldsymbol{Q}_2^k$ заменить произвольным целым числом, имеющим по модулю 2 вычет u_i. Все эти целочисленные комплексы будут, очевидно, сравнимы между собой по модулю 2 (т. е. одному и тому же симплексу в разных комплексах будут соответствовать коэффициенты одной и той же четности).

Вышеописанный переход от целочисленного комплекса U^k к комплексу по модулю 2 $\boldsymbol{U}_2^k$ есть, очевидно, гомоморфное отображение группы $\mathrm{L}^k(\boldsymbol{K})$ на группу $\mathrm{L}_2^k(\boldsymbol{K})$.

Комплекс $\boldsymbol{U}_2^k$ естественно называть вычетом по модулю 2 целочисленного комплекса U^k.

Граница k-мерного (неориентированного) симплекса получается, если каждой $(k-1)$-мерной (неориентированной) грани отнести вычет 1. Она, таким образом, есть k-мерный алгебраический комплекс по модулю 2.

Граница любого алгебраического комплекса по модулю 2 есть сумма границ составляющих его симплексов, причем суммирование производится по модулю 2, т. е. в соответствии с правилом сложения (1).

Поэтому *$(k-1)$-мерный симплекс $\boldsymbol{E}_\iota^{k-1}$ принадлежит к границе алгебраического комплекса $\boldsymbol{U}^k$ по модулю* 2 *в том и только в том случае, если он инцидентен с нечетным числом симплексов из $\boldsymbol{U}^k$*. Границу нульмерного комплекса по модулю 2 мы полагаем равной нулю по определению. Мы можем теперь перенести все понятия, введенные для обычных алгебраических комплексов, на алгебраические комплексы по модулю 2.

*Это определение показывает, что k-мерные алгебраические комплексы по модулю 2 данного абсолютного комплекса $\boldsymbol{K}$ взаимно однозначно соответствуют конечным k-мерным абсолютным подкомплексам комплекса $\boldsymbol{K}$ (т. е. конечным k-мерным абсолютным комплексам, составленным из симплексов комплекса $\boldsymbol{K}$).

Алгебраический комплекс по модулю 2 $\boldsymbol{U}^k$ называется *циклом*, если граница его равна нулю:

$$\dot{U}^k = \check{0}.$$

Так, например, совокупность всех треугольников проективной плоскости, изображенной на рис. 39, образует по модулю 2 цикл, так как к каждому ребру примыкает в точности два треугольника. Напротив, обыкновенные двумерные циклы (не по модулю 2) на проективной плоскости, как мы знаем, не существуют. Всякий однородный в смысле § 12 подкомплекс, не имеющий границы, есть цикл по модулю 2.

Все нульмерные алгебраические комплексы по модулю 2 суть циклы. Цикл по модулю 2 называется *гомологичным нулю*, если он является границей $(k+1)$-мерного комплекса. Два алгебраических комплекса по модулю 2 (не обязательно циклы) называются *гомологичными* друг другу, если их разность есть гомологичный нулю цикл по модулю 2.

Мы можем теперь разбить все циклы по модулю 2 на классы гомологичных между собой циклов. Если определять сумму двух классов при помощи сложения представителей этих классов, то эти классы гомологий можно рассматривать как элементы группы $\check{\mathrm{B}}^k \cdot \check{\mathrm{B}}^k$ является, очевидно, группой, аналогичной группе Бетти B^k, и называется *k-мерной группой Бетти по модулю* 2 симплициального комплекса $\boldsymbol{K}^n$. Для конечного комплекса $\boldsymbol{K}^n$ $\check{\mathrm{B}}^k$ является *конечной* группой, так как существует только конечное число различных k-мерных алгебраических комплексов по модулю 2, именно 2^{α^k}, и тем более конечное число классов гомологий. $\boldsymbol{U}^k + \boldsymbol{U}^k$ всегда равно нулю, поэтому каждый отличный от нуля элемент группы $\check{\mathrm{B}}^k$ имеет порядок 2. Таким образом $\check{\mathrm{B}}^k$ есть прямая сумма конечного числа, например q^k, групп второго порядка. q^k называется *k-мерным числом Бетти по модулю* 2 комплекса $\boldsymbol{K}^{n*}$.

Комплексы по модулю 2

$$\boldsymbol{U}_1^k,\ \boldsymbol{U}_2^k,\ \ldots,\ \boldsymbol{U}_r^k \tag{3}$$

называются *линейно независимыми*, если не существует никакого соотношения вида

$$\check{t}_1 \boldsymbol{U}_1^k + \ldots + \check{t}_r \boldsymbol{U}_r^k = 0 \tag{4}$$

по крайней мере с одним отличным от $\check{0}$ коэффициентом $\check{t}$. Пусть комплексы (3) являются, сверх того, циклами (все по модулю 2), они называются *гомологично независимыми*, если гомология

$$\check{t}_1 \boldsymbol{U}_1^k + \ldots + \check{t}_r \boldsymbol{U}_r^k \sim 0 \tag{5}$$

* Число Бетти по модулю 2 называют иногда k-м или k-мерным числом связности. Какой смысл имеет это название, будет показано в § 41 (теорема).

может иметь место лишь при всех $\check{t} = \check{0}$. В противном случае говорят о линейно зависимых комплексах или гомологично зависимых циклах по модулю 2. Например, r различных k-мерных симплексов линейно независимы.

Пример системы гомологично независимых k-мерных циклов по модулю 2 мы получим, если возьмем в каждой из q^k групп второго порядка, являющихся прямыми слагаемыми группы $\check{\mathrm{B}}^k$, по элементу (т. е. по классу гомологий по модулю 2), отличному от нуля, и выберем затем по представителю из каждого такого класса. Такая система q^k циклов по модулю 2 называется *k-мерной базой Бетти по модулю* 2. Покажем, что q^k есть максимальное число гомологично независимых по модулю 2 циклов. В самом деле, допустим, что циклы $\boldsymbol{U}_1^k$, $\boldsymbol{U}_2^k$, ..., $\boldsymbol{U}_r^k$ гомологично независимы. Тогда никакие две из всех возможных линейных комбинаций $\check{t}_1 \boldsymbol{U}_1^k + \ldots + \check{t}_r \boldsymbol{U}_r^k$ не гомологичны друг другу, т. е. существует по крайней мере 2^r различных классов гомологий. Но всего таких классов существует 2^{q^k}, так как 2^{q^k} есть порядок группы $\check{\mathrm{B}}^k$. Поэтому $r \leqslant q^k$, т. е. *k-мерное число Бетти по модулю* 2 *является максимальным числом k-мерных гомологично независимых циклов по модулю* 2. Мы получаем полную аналогию с обычными числами Бетти.

Аналогично тому как раньше мы вычисляли числа Бетти из матриц инциденций, мы можем теперь вывести числа Бетти по модулю 2 из *матриц инциденций по модулю* 2. Матрицы эти получаются из граничных соотношений (2):

$$\check{\mathbf{E}}^{k-1} = (\check{\varepsilon}_{\iota\varkappa}^{k-1}) \ (\iota = 1, 2, \ldots, \alpha^{k-1};\ \varkappa = 1, 2, \ldots, \alpha^k;\ k = 1, 2, \ldots, n).$$

Процесс нормализации матриц проводится почти дословно так же, как раньше. Только теперь приходится говорить не просто об алгебраических комплексах, а об алгебраических комплексах по модулю 2. Элементами матриц инциденций являются уже не целые числа, а вычеты $\check{0}$ и $\check{1}$. Вместо соотношения $\mathbf{E}^{k-1}\mathbf{E}^k = 0$, от которого существенным образом зависел процесс нормализации, теперь имеет место соотношение

$$\check{\mathbf{E}}^{k-1}\check{\mathbf{E}}^k = \check{0},$$

где под $\check{0}$ подразумевается матрица, состоящая из α^{k-1} строк и α^{k+1} столбцов, каждый элемент которой есть $\check{0}$. Второе из элементарных преобразований a) и b) § 21 теперь отпадает, так как замена комплекса по модулю 2 комплексом, противоположным по знаку, в силу соотношения $\check{1} = -\check{1}$ есть тождественное преобразование. Матрица $\check{\mathbf{E}}^k$ инциденций по модулю 2, приведенная к нормальной форме $\check{\mathbf{H}}^k$, имеет своими элементами сплошь $\check{0}$, за исключением элементов «диагонального» отрезка, отсекающего правый верхний угол матрицы $\check{\mathbf{H}}^k$. Каждый из этих последних элементов равен $\check{1}$. Число их мы обозначим буквой δ^k.

Алгебраические комплексы по модулю 2, стоящие во входах матриц $\check{\mathbf{E}}^0$, $\check{\mathbf{E}}^1$, ..., $\check{\mathbf{E}}^{n-1}$, представляют (при каждом k) α^k k-мерных симплексов комплекса $\boldsymbol{K}^n$. Поэтому они линейно независимы, и каждый k-мерный алгебраический комплекс по модулю 2 является их линейной комбинацией. Но это свойство, очевидно, сохраняется при элементарных преобразованиях; поэтому таким же свойством обладают и алгебраические комплексы по модулю 2, стоящие во входах нормированных матриц $\check{\mathbf{H}}^0$, $\check{\mathbf{H}}^1$, ..., $\check{\mathbf{H}}^{n-1}$. Комплексы эти распадаются для каждой размерности на три категории $\boldsymbol{A}^k_\lambda$, $\boldsymbol{B}^k_\mu$, $\boldsymbol{C}^k_\nu$. $\boldsymbol{C}^k_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, \delta^{k-1}$) суть последние δ^{k-1} из комплексов, стоящих в верхнем входе матрицы $\check{\mathbf{H}}^{k-1}$. Эти комплексы не являются циклами, так как в каждом соответствующем им столбце стоит по элементу $\check{1}$. $\boldsymbol{A}^k_\lambda$ ($\lambda = 1, 2, \ldots, \delta^k$) представляют первые δ^k комплексов, стоящих в левом входе матрицы $\check{\mathbf{H}}^k$. Это — гомологичные нулю циклы, так как

$$\dot{\boldsymbol{C}}^{k+1}_\lambda = \boldsymbol{A}^k_\lambda \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, \delta^k). \tag{6}$$

Остальные алгебраические комплексы по модулю 2 мы обозначаем через $\boldsymbol{B}^k_\mu$ ($\mu = 1, 2, \ldots, \alpha^k - \delta^k - \delta^{k-1}$). Они являются циклами, но не гомологичными нулю*. Произвольный k-мерный цикл по модулю 2 можно представить в виде линейной комбинации циклов $\boldsymbol{A}^k_\lambda$ и $\boldsymbol{B}^k_\mu$. Так как $\boldsymbol{A}^k_\lambda \sim 0$, то произвольный цикл гомологичен линейной комбинации

$$\sum_{\mu=1}^{\alpha^k-\delta^k-\delta^{k-1}} \check{\eta}_\mu B^k_\mu. \tag{7}$$

С другой стороны, никакая линейная комбинация вида (7) не гомологична нулю, так как в граничные соотношения (6) входят только $\boldsymbol{A}^k_\lambda$. *Поэтому $\boldsymbol{B}^k_\mu$ представляет k-мерную базу гомологий по модулю* 2, *а k-мерное число Бетти по модулю* 2 *есть*

$$q^k = \alpha^k - \delta^k - \delta^{k-1}. \tag{8}$$

При этом δ^{-1} и δ^n нужно считать равными нулю. δ^k есть ранг матрицы $\check{\mathbf{H}}^k$, т. е. наивысший из порядков отличных от нуля детерминантов (миноров) этой матрицы. Ранг матрицы, очевидно, не меняется

* Алгебраические комплексы по модулю 2 $\boldsymbol{A}^k_\lambda$, $\boldsymbol{B}^k_\mu$, $\boldsymbol{C}^k_\nu$ не являются, вообще говоря, вычетами по модулю 2 введенных в § 21 алгебраических комплексов A^k_λ, B^k_μ, C^k_ν. Если, например, алгебраический комплекс C^k_ν в нормированной матрице инциденций $\mathbf{H}^{k-1}$ стоит под четным коэффициентом кручения, то соответствующий комплекс по модулю 2 есть цикл и поэтому не может быть ни одним из комплексов (по модулю 2) $\boldsymbol{C}^k_\nu$.

при сложении ее строк и столбцов. Поэтому δ^k является одновременно и рангом исходной матрицы инциденций по модулю 2 $\check{\mathbf{E}}^k$.

Числа Бетти p^k и числа Бетти по модулю 2 q^k связаны соотношением, которое мы сейчас установим. Матрица инциденций $\mathbf{E}^k$ содержит g^k четных и, следовательно, $\gamma^k - g^k$ нечетных инвариантных множителей (к последним присчитываются, конечно, и множители, равные 1). Но тогда нормальная форма $\mathbf{H}^k$ матрицы $\mathbf{E}^k$ содержит минор порядка $\gamma^k - g^k$, величина которого нечетна (именно, равна произведению всех нечетных инвариантных множителей), в то время как все ее миноры порядка $(\gamma^k - g^k + 1)$ имеют уже четные значения. Этим свойством обладает и матрица $\mathbf{E}^k$, так как общие наибольшие делители миноров матрицы являются инвариантами матрицы при элементарных преобразованиях (§ 87). Отсюда следует, что если мы перейдем теперь от матрицы $\mathbf{E}^k$ к матрице инциденций по модулю 2 $\check{\mathbf{E}}^k$, заменив все четные элементы матрицы $\mathbf{E}^k$ числом $\check{0}$, а все нечетные — числом $\check{1}$, то матрица $\check{\mathbf{E}}^k$ будет иметь минор $(\gamma^k - g^k)$-го порядка, равный $\check{1}$, в то время как все ее миноры $(\gamma^k - g^k + 1)$-го порядка равны $\check{0}$. Таким образом, ранг матрицы $\check{\mathbf{E}}^k$

$$\delta^k = \gamma^k - g^k.$$

Подставив соответствующие значения в формулу (8), мы получим

$$q^k = (\alpha^k - \gamma^k - \gamma^{k-1}) + g^k + g^{k-1}.$$

Но в скобке здесь находится число Бетти p^k (см. стр. 106). Следовательно, окончательно мы получаем соотношение

$$q^k = p^k + g^k + g^{k-1}. \tag{11}$$

При этом

$$g^{-1} = g^n = 0.$$

Мы видим, таким образом, что *k-мерная группа Бетти по модулю 2 определяется k-мерной и $(k-1)$-мерной группами Бетти.* Действительно, эти группы определяют число Бетти p^k, а также k-мерные и $(k-1)$-мерные коэффициенты кручения. Следовательно, они определяют числа g^k и g^{k-1}, а вместе с тем и группу Бетти по модулю 2.

Число Бетти по модулю 2 q^k не может быть меньше, чем обычное число Бетти p^k.

Для алгебраических комплексов по модулю 2 также можно определить кусочные комплексы и с их помощью вычислять группы Бетти по модулю 2. При этом нужно ввести условия, соответствующие условиям (Кус$_1$)–(Кус$_4$). Мы предлагаем читателю провести полностью все рассуждение в качестве упражнения.

В рассмотренных нами примерах комплексов, для которых были вычислены группы Бетти, единственным комплексом, имевшим коэффициент кручения и притом нечетный, была проективная плоскость (стр. 92). Для нее $g^1 = 1$, поэтому $q^1 = p^1 + g^1 = 1$, $q^2 = p^2 + g^2 = 1$. Действительно, на проективной плоскости существует один одномерный не гомологичный нулю цикл по модулю 2 (проективная прямая) и один двумерный, — именно цикл, составленный из всех треугольников симплициального разбиения. Во всех остальных примерах коэффициенты кручения отсутствуют и числа Бетти по модулю 2 совпадают с обычными числами Бетти.

Эйлерова характеристика. Рассмотрим альтернированную сумму* чисел Бетти по модулю 2. Воспользовавшись формулой (11) и принимая во внимание, что $g^{-1} = g^n = 0$, нетрудно убедиться, что эта сумма равна альтернированной сумме чисел Бетти (обычных). Далее, на основании формулы

$$p^k = \alpha^k - \gamma^k - \gamma^{k-1}$$

(стр. 106) и формулы

$$p^k = \overline{\alpha}^k - \overline{\gamma}^k - \overline{\gamma}^{k-1}$$

(стр. 109) можно заключить, что сумма, стоящая в правой части полученной формулы, равна также сумме

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\alpha^k \quad \text{и сумме} \quad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\overline{\alpha}^k,$$

где α^k — число k-мерных симплексов симплициального разбиения комплекса, а $\overline{\alpha}^k$ — число k-мерных кусков кусочного разбиения. *Таким образом мы получаем соотношение*

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k p^k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k q^k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\alpha^k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\overline{\alpha}^k = N. \qquad (12)$$

Число N называется эйлеровой характеристикой симплициального разбиения комплекса $\boldsymbol{K}^n$.

Воспользовавшись доказываемой в следующей главе топологической инвариантностью числа N, т. е. независимостью от того или иного симплициального разбиения комплекса $\boldsymbol{K}^n$, мы можем сказать, что формула (12) представляет обобщение *формулы Эйлера* для многогранников на комплексы любой размерности. Проверим эту формулу, взяв в качестве примера поверхность тетраэдра. Числа Бетти мы вычислили

* Альтернированной суммой чисел a_0, a_1, a_2, …, a_n называется сумма $a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + (-1)^n a_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k$.

в § 19 (пример 6). Числа симплексов α^k подсчитываются непосредственно, и мы получаем

$$\sum_0^2 (-1)^k p^k = 1 - 0 + 1 = \sum_0^2 (-1)^k \alpha^k = 4 - 6 + 4 = 2 = N.$$

Так что эйлерова характеристика тетраэдра равна 2. Сравните полученный результат с результатами § 38 и 41 гл. VI.

Упражнения. 1. Проверьте формулу $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k p^k = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \alpha^k$ на примерах § 19.

2. Докажите, что эйлеровы характеристики $N(\boldsymbol{S}^n)$ и $N(\boldsymbol{P}^n)$ n-мерной сферы и n-мерного проективного пространства связаны соотношением $N(\boldsymbol{S}^n) = 2N(\boldsymbol{P}^n)$.

3. Пусть $\boldsymbol{K}^1$ представляет одномерный связный комплекс, состоящий из α^0 нульмерных симплексов и α^1 одномерных. Пользуясь формулой $-\alpha^0 + \alpha^1 = -p^0 + p^1$, покажите, что из $\boldsymbol{K}^1$ можно удалить в точности $-\alpha^0 + \alpha^1 + 1$ одномерных симплексов так, что при этом такой «реберный комплекс» не распадается.

§ 24. Псевдомногообразия и ориентируемость

Имеющиеся в нашем распоряжении средства позволяют теперь заняться изучением специального класса комплексов — так называемыми псевдомногообразиями. Псевдомногообразия представляют первую ступень для перехода к изучению многообразий.

Замкнутое псевдомногообразие определяется следующим образом:

(Пм_1). Оно представляет конечный однородный n-мерный симплициальный комплекс ($n \geqslant 1$). Однородность означает, что каждый k-мерный симплекс инцидентен (является k-мерной стороной) по крайней мере с одним k-мерным симплексом (условие однородности).

(Пм_2). Каждый $(n-1)$-мерный симплекс инцидентен в точности с двумя n-мерными (условие неразветвленности).

(Пм_3). Для двух произвольных n-мерных симплексов псевдомногообразия существует соединяющая эти два симплекса последовательность, состоящая поочередно из n-мерных и $(n-1)$-мерных симплексов, каждый из которых инцидентен с предыдущим (условие сильной связности).

Замкнутое псевдомногообразие называется *ориентируемым*, если его симплексы могут быть ориентированы *когерентно*, т. е. так, что в каждом $(n-1)$-мерном симплексе два примыкающие к нему n-мерные индуцируют противоположные ориентации. Если же никакой когерентной ориентации не существует, псевдомногообразие называется *неориентируемым*.

Для того чтобы полностью определить n-мерный цикл замкнутого ориентированного псевдомногообразия, достаточно знать, с каким коэффициентом входит в этот цикл один n-мерный ориентированный симплекс. В самом деле, каждый из n-мерных симплексов, примыкающих к этому симплексу, должен входить в цикл с тем же коэффициентом. А так как по условию (Пм_3) между каждыми двумя n-мерными симплексами существует соединяющая их цепочка примыкающих друг к другу симплексов (n-мерных), то все n-мерные симплексы псевдомногообразия должны входить в цикл с одинаковыми коэффициентами. Поэтому n-мерная группа Бетти B^n такого псевдомногообразия есть свободная группа с одной образующей, т. е. n-мерное число Бетти $p^n = 1$.

В качестве базы этой группы Бетти можно взять один из двух циклов, получающихся при когерентных ориентациях псевдомногообразия. Точно так же можно показать, что на неориентируемом псевдомногообразии вообще не существует n-мерных циклов (кроме n-мерного нулевого комплекса), т. е. его группа Бетти B^n состоит только из нулевого элемента $p^n = 0$. Таким образом n-мерная группа Бетти дает возможность определить, является ли замкнутое псевдомногообразие ориентируемым или нет: *необходимое и достаточное условие ориентируемости псевдомногообразия заключается в равенстве единице его n-мерного числа Бетти p^n.*

Напротив, *n-мерное число Бетти по модулю 2 q^n как для ориентируемых, так и для неориентируемых многообразий всегда равно* 1, так как всегда существует — и притом в точности один — отличный от нуля n-мерный цикл по модулю 2 — совокупность всех n-мерных симплексов.

Мы увидим позже (§ 36), что свойство комплекса быть псевдомногообразием является топологически инвариантным свойством, так как условия (Пм_1)–(Пм_3) можно выразить в терминах гомологии, а гомологические свойства (к которым мы причисляем и существование чисел Бетти по модулю 2) топологически инвариантны. Докажем, что условие (Пм_3) можно заменить условием $q^n = 1$, т. е. точнее, что система условий

$$\text{I} \quad (\text{Пм}_1),\ (\text{Пм}_2),\ (\text{Пм}_3)$$

эквивалентна системе

$$\text{II} \quad (\text{Пм}_1),\ (\text{Пм}_2), \quad q^n = 1.$$

Мы уже видели, что из I следует $q^n = 1$. Покажем, наоборот, что из II вытекает (Пм_3): n-мерный комплекс по модулю 2 $\boldsymbol{U}^n$, состоящий из всех n-мерных симплексов, которые можно соединить с данным симплексом $\boldsymbol{E}^n$ цепочкой последовательно инцидентных n-мерных и $(n-1)$-мерных симплексов, представляет цикл (по модулю 2). В самом деле, в силу (Пм_2) к каждому $(n-1)$-мерному симплексу комплекса $\boldsymbol{K}^n$, а следовательно, и комплекса $\boldsymbol{U}^n$, примыкают в точности

два n-мерных симплекса. Если бы в $\boldsymbol{K}^n$ существовали другие n-мерные симплексы, кроме симплексов, принадлежащих $\boldsymbol{U}^n$, то они также образовывали бы цикл по модулю 2, т. е. q^n было бы по меньшей мере равно 2. Поэтому $\boldsymbol{U}^n$ исчерпывает весь комплекс $\boldsymbol{K}^n$.

Относительно $(n-1)$-мерной группы Бетти замкнутого псевдомногообразия также можно сделать несколько общих утверждений.

Теорема I. *Нормальная форма* $\mathbf{H}^{n-1}$ *матрицы инциденций* $\mathbf{E}^{n-1}$ *для ориентируемого псевдомногообразия имеет вид* (1), *для неориентируемого — вид* (2):

$$\mathbf{H}^{n-1}=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix} \quad (1) \qquad \mathbf{H}^{n-1}=\begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix} \quad (2)$$

Ранг матрицы во втором случае равен числу ее столбцов, а в случае (1) *— на единицу меньше числа столбцов. В случае* (2) *существует один отличный от* 1 *инвариантный множитель, равный* 2.

Доказательство. Так как каждый $(n-1)$-мерный симплекс комплекса $\boldsymbol{K}^n$ инцидентен в точности с двумя n-мерными, то в каждой строке матрицы $\mathbf{E}^{n-1}$ находится в точности по две единицы, в то время как все остальные элементы равны нулю. Вследствие условия (Пм_3) можно утверждать, что, каким бы способом мы ни разделили столбцы матрицы $\mathbf{E}^{n-1}$ на два класса, существует по крайней мере одна строка $\mathbf{E}^{n-1}$, две единицы которой принадлежат столбцам различных классов. Но такая матрица в силу чисто арифметических свойств (см. § 87) допускает только одну из двух канонических форм (1) и (2). Матрица (1) относится к *ориентируемому* псевдомногообразию, так как n-мерный комплекс, стоящий в верхнем входе первого столбца, есть цикл. Во втором случае циклов не существует, следовательно, многообразие *неориентируемо*.

Не равные единице инвариантные множители матрицы $\mathbf{E}^{n-1}$ являются $(n-1)$-мерными коэффициентами кручения. Поэтому высказанное предложение эквивалентно следующей теореме:

Теорема II. $(n-1)$*-мерные коэффициенты кручения замкнутого ориентируемого псевдомногообразия равны, нулю. Если же замкнутое псевдомногообразие неориентируемо, то существует в точности один* $(n-1)$*-мерный коэффициент кручения, равный* 2.

Таким образом, в неориентируемом случае существует единственный (с точностью до цикла, гомологичного нулю) не гомологичный нулю $(n-1)$-мерный цикл U^{n-1} такой, что $2U^{n-1}$ гомологичен нулю. Цикл

этот можно получить следующим образом: пусть E_1^n, E_2^n, ..., $E_{\alpha^n}^n$ суть все произвольно ориентированные n-мерные симплексы псевдомногообразия $\boldsymbol{K}^n$. Так как $\boldsymbol{K}^n$ неориентируемо, n-мерный комплекс

$$U^n = E_1^n + E_2^n + \ldots + E_{\alpha^n}^n$$

имеет не равную нулю границу $\dot{U}^n$. Всякий $(n-1)$-мерный симплекс входит в $\dot{U}^n$ либо с коэффициентом нуль, либо с коэффициентом 2, в зависимости от того, индуцируют ли в нем одинаковые или противоположные ориентации прилегающие к нему n-мерные симплексы. Поэтому $\dot{U}^n = 2U^{n-1}$, где U^{n-1} — некоторый цикл, т. е. $2U^{n-1} \sim 0$. Допустим теперь, что U^{n-1} сам по себе ~ 0: $U^{n-1} = \dot{V}^n$. Тогда

$$2U^{n-1} = (2V^n)^{\cdot} = \dot{U}^n, \quad \text{т. е} \quad (U^n - 2V^n)^{\cdot} = 0,$$

или, другими словами, $U^n - 2V^n$ представляет n-мерный цикл. Однако на неориентируемом многообразии только n-мерный нулевой комплекс является циклом. Поэтому $U^n = 2V^n$, между тем как мы предполагали, что каждый n-мерный симплекс входит в U^n с коэффициентом 1.

Ограниченное псевдомногообразие[*] получится, если мы сохраним условия (Пм_1) и (Пм_3), а условие (Пм_2) заменим следующим:

($\overline{\text{Пм}_2}$). Каждый $(n-1)$-мерный симплекс инцидентен самое большее с двумя n-мерными, но существует по крайней мере один $(n-1)$-мерный симплекс, инцидентный только с одним n-мерным.

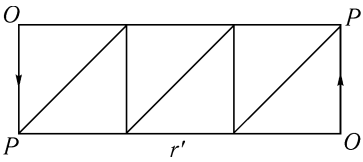


Рис. 45

По определению границы однородного комплекса (на стр. 82) граница ограниченного псевдомногообразия состоит из всех $(n-1)$-мерных симплексов, каждый из которых инцидентен только с одним n-мерным. Все нележащие на границе точки и симплексы псевдомногообразия называются *внутренними* точками и симплексами псевдомногообразия. Если n-мерные симплексы ограниченного псевдомногообразия можно ориентировать когерентно, т. е. так, что примыкающие к каждому внутреннему $(n-1)$-мерному симплексу n-мерные симплексы индуцируют в нем противоположные ориентации, то такое псевдомногообразие называется ориентируемым.

Простейшие примеры ориентируемого и неориентируемого ограниченного псевдомногообразия представляют соответственно круговое кольцо (стр. 84) и лист Мебиуса (рис. 45). На рис. 45 нужно отождествить обе стороны c. Дальнейшим примером ограниченного многообразия является симплициальная звезда $\mathbf{St}^n$ с центром O, край которой

[*] Для большей точности следовало бы говорить «псевдомногообразие с границей».

$\boldsymbol{A}^{n-1}$ есть замкнутое псевдомногообразие. Условия (Пм_1) и (Пм_3) выполняются для такой звезды потому, что они выполняются для ее края. ($\overline{\text{Пм}_2}$) также выполняется: каждый $(n-1)$-мерный симплекс края инцидентен с одним n-мерным симплексом. Каждый же из остальных $(n-1)$-мерных симплексов (инцидентных с O) инцидентен с двумя n-мерными.

Если край $\boldsymbol{A}^{n-1}$ звезды ориентируем, то $\boldsymbol{St}^n$ также ориентируема, и наоборот. Действительно, пусть

$$(O\,P_1\,P_2\ldots P_{n-1})$$

есть $(n-1)$-мерный симплекс звезды $\boldsymbol{St}^n$ инцидентный с O и пусть

$$E^n=+(O\,P_1\ldots P_{n-1}\,P_n)\quad\text{и}\quad {}'E^n=-(O\,P_1\ldots P_{n-1}{}'P_n)$$

— два n-мерных инцидентных с ним симплекса. Эти два симплекса при таких ориентациях индуцируют в $(O\,P_1\ldots P_{n-1})$ противоположные ориентации. Если снабдить теперь две лежащие на $\boldsymbol{A}^{n-1}$ стороны симплексов E^n и ${}'E^n$ соответственно индуцированными ориентациями

$$E^{n-1}=+(P_1\ldots P_{n-1}P_n),\quad {}'E^{n-1}=-(P_1\ldots P_{n-1}{}'P_n),$$

то они также индуцируют в своей общей стороне $(P_1\ldots P_{n-1})$ противоположные ориентации. Отсюда следует, что когерентной ориентации $(n-1)$-мерных симплексов края $\boldsymbol{A}^{n-1}$ соответствует когерентная ориентация n-мерных симплексов звезды $\boldsymbol{St}^n$, и наоборот. Очевидно, край когерентно ориентированной звезды $\boldsymbol{St}^n$, рассматриваемой как алгебраический комплекс, есть когерентно ориентированный край.

Мы видели выше, что всякий n-мерный цикл *замкнутого* ориентируемого псевдомногообразия есть само это многообразие, когерентно ориентированное и взятое с некоторым коэффициентом. Соответствующее предложение справедливо и для *ограниченного* ориентируемого псевдомногообразия, если только рассматривать на нем n-мерные циклы относительно его границы, т. е. n-мерные комплексы, границы которых лежат на границе псевдомногообразия. Доказательство такое же, как для замкнутых псевдомногообразий.

Свойство замкнутого псевдомногообразия быть ориентируемым выражается в том, что его n-мерное число Бетти $p^n=1$. Для ограниченных псевдомногообразий аналогичное утверждение уже несправедливо. Так, например, лист Мебиуса (неориентируемое псевдомногообразие) имеет такие же группы Бетти, как круговое кольцо (ориентируемое псевдомногообразие). Поэтому доказать топологическую инвариантность ориентируемости для замкнутых псевдомногообразий легче, чем для ограниченных. Для замкнутых псевдомногообразий это непосредственно следует из инвариантности группы Бетти (IV гл.). Для ограниченных же необходимо воспользоваться инвариантностью границы и более глубокими свойствами, изучаемыми в гл. V.

Глава IV
Симплициальное приближение

В этой главе мы докажем, что группы Бетти, определенные в предыдущей главе при помощи некоторого симплициального разбиения, являются гомологическими инвариантами полиэдра. Для доказательства мы рассмотрим любые k-мерные симплексы полиэдра $\boldsymbol{K}^n$ (§ 25), представляющие непрерывные образы прямолинейных евклидовых симплексов. Из особых симплексов можно составить особые алгебраические комплексы (§ 26), определить для них сложение, а затем ввести понятия границы, цикла, ограничивающего цикла (гомологичного нулю). Особые циклы распадаются на классы гомологичных между собой особых циклов. Эти классы образуют k-мерную особую группу Бетти полиэдра (§ 27). Она топологически инвариантна по определению (стр. 129) и не связана со специальным симплициальным разбиением полиэдра $\boldsymbol{K}^n$. Если теперь полиэдр $\boldsymbol{K}^n$ будет задан в некотором симплициальном разбиении, то мы сможем заменить каждый особый алгебраический комплекс, подразделив его сначала барицентрически симплициальным алгебраическим комплексом данного разбиения. Такая замена осуществляется при помощи симплициального приближения (симплициальной аппроксимации) (стр. 143) и оставляет все существенные топологические свойства особых алгебраических комплексов неизменными. Из возможности замены особых алгебраических комплексов симплициальными вытекает, что особые и обычные группы Бетти совпадают (§ 28). *Существованию* приближающего (аппроксимирующего) симплициального комплекса посвящена основная теорема о приближениях (§ 28).

Симплициальное приближение представляет по существу переход от *непрерывного* отображения комплекса к «*симплициальному*». Каждое непрерывное отображение можно перевести в симплициальное даже посредством «деформации», — это составляет содержание теоремы о деформациях (§ 31). Сюда же примыкает вопрос о поведении групп Бетти при деформациях отображений; этот вопрос мы также рассмотрим.

§ 25. Особый симплекс

Рассмотрим непрерывное и однозначное отображение прямолинейного (евклидова) симплекса $\boldsymbol{x}^k$ в конечный или бесконечный n-мерный полиэдр* $\boldsymbol{K}^n$. Множество $\boldsymbol{M}$, представляющее образ симплекса $\boldsymbol{x}^k$, называется *особым k-мерным симплексом* $\boldsymbol{X}^k$, если для каждой точки

*Вместо $\boldsymbol{K}^n$ можно было бы взять любое окрестностное пространство и определить там особые симплексы, особые алгебраические комплексы и группы Бетти. Однако эти образы представляют интерес лишь в случае полиэдра[16].

этого множества известно, какие именно точки $\boldsymbol{x}^k$ отображены в нее. В этой главе неориентированные симплексы мы будем обозначать курсивными жирными буквами*. Может случиться, что $\boldsymbol{M}$ является одновременно образом симплекса x^k и образом некоторого другого прямолинейного симплекса $\overline{x}^k$. В этом случае, очевидно, одно и то же подмножество $\boldsymbol{M}$ полиэдра $\boldsymbol{K}^n$ представляет два особых n-мерных симплекса. Симплексы эти считаются одинаковыми (не отличающимися друг от друга) в том случае, если x^k можно *линейно* отобразить, на $\overline{x}^k$ так, что каждые две соответствующие при этом отображении друг другу точки симплексов x^k и $\overline{x}^k$ отображаются в одну и ту же точку полиэдра $\boldsymbol{K}^n$.

Симплекс x^k (так же, как $\overline{x}^k$) называется *прообразом* особого симплекса $\boldsymbol{X}^k$. Прообразы особых симплексов мы будем обозначать малым буквами.

Если, напротив, прообразы двух особых симплексов не могут быть линейно отображены указанным способом друг на друга, то эти особые симплексы считаются различными, даже если они представлены одним и тем же множеством точек $\boldsymbol{M}$ в $\boldsymbol{K}^n$. Размерность k особого симплекса $\boldsymbol{X}^k$ может быть больше, равна или меньше размерности n полиэдра, в котором $\boldsymbol{X}^i$ лежит.

Примеры.

Каждый *симплекс* симплициального разбиения полиэдра $\boldsymbol{K}^n$ можно рассматривать как особый k-мерный симплекс, так как он является топологическим образом прямолинейного евклидова симплекса.

Особым k-мерным симплексом является и *отдельная точка* полиэдра, если в эту точку отображены все точки какого-нибудь прямолинейного k-мерного симплекса.

Как угодно согнутый *треугольник* (даже, быть может, сжатый в линию или в точку) образует особый двумерный симплекс.

Расположенная в евклидовой плоскости *кривая Пеано*** представляет одномерный особый симплекс.

При отображении x^k в $\boldsymbol{K}^n$ i-мерная грань x симплекса x^k отображается на подмножество $\boldsymbol{N}$ множества $\boldsymbol{M}$. Множество $\boldsymbol{N}$, рассматриваемое как образ симплекса x^k, представляет, очевидно, особый i-мерный симплекс и называется *i-мерной стороной $\boldsymbol{X}^i$ особого* k-мерного симплекса $\boldsymbol{X}^k$. Мы говорим, что особые симплексы $\boldsymbol{X}^i$ и $\boldsymbol{X}^k$ *инцидентны*.

Для того чтобы *ориентировать* особый k-мерный симплекс $\boldsymbol{X}^k$, нужно ориентировать его прообраз. Ориентированные симплексы мы будем обозначать курсивными светлыми буквами. Таким образом, ориентированный особый k-мерный симплекс X^k представляет подмноже-

*Заметим, что если нам известно только, что $\boldsymbol{M}$ есть образ симплекса $\boldsymbol{X}^k$ при непрерывном и однозначном отображении, то мы еще не можем рассматривать $\boldsymbol{M}$ как особый симплекс.

**См. *Hausdorff, Mengenlehre*, [2], стр. 202.

ство $\boldsymbol{M}$ полиэдра $\boldsymbol{K}^n$, являющееся образом ориентированного k-мерного симплекса x^k при однозначном непрерывном отображении; отображение это должно быть известно нам полностью в указанном выше смысле.

Если прообраз x^k заменен другим прямолинейным симплексом $\overline{x}^k$, то отображения симплексов x^k и $\overline{x}^k$ на $\boldsymbol{M}$ дают два ориентированных особых k-мерных симплекса. Эти ориентированные особые симплексы не считаются различными, если x^k можно линейно отобразить на $\overline{x}^k$ *с сохранением ориентации* так, что соответствующие друг другу точки переходят в одну и ту же точку M.

Для каждого ориентированного особого симплекса X^k существует *противоположно ориентированный симплекс*, обозначаемый $-X^k$. Он получится, если мы изменим ориентацию прообраза x^k, но оставим неизменным отображение симплекса x^k на $\boldsymbol{M}$. X^k и $-X^k$ соответствуют одному неориентированному особому симплексу $\boldsymbol{X}^k$.

Может случиться, что X^k и $-X^k$ одинаковы. Это имеет место в том случае, когда x^k можно отобразить на *себя* линейно так, что ориентация x^k изменится, но каждые две соответствующие друг другу при этом отображении точки перейдут в одну и ту же точку особого симплекса $\boldsymbol{X}^k$. Тогда говорят, что ориентированный особый симплекс X^k вырождается. Соответствующий неориентированный симплекс $\boldsymbol{X}^k$ также называют в этом случае вырождающимся. Из невырождающегося симплекса можно получить два ориентированных особых симплекса, имеющих противоположные ориентации. В случае вырождения оба эти симплекса совпадают.

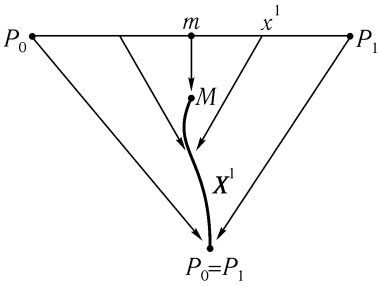


Рис. 46

Пример 1. Пусть дан $(k-1)$-мерный симплекс $\boldsymbol{E}^{k-1}$ какого-нибудь симплициального разбиения полиэдра $\boldsymbol{K}^n$ и пусть симплекс $\boldsymbol{x}^k$ с вершинами $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_k$ отображен на $\boldsymbol{E}^{k-1}$ линейно так, что две его вершины, например p_{k-1} и p_k переходят в одну вершину симплекса $\boldsymbol{E}^{k-1}$. Тогда симплекс $\boldsymbol{E}^{k-1}$ можно рассматривать, как особый k-мерный симплекс $\boldsymbol{X}^k$, имеющий прообразом $\boldsymbol{x}^k$.

Произведем линейное отображение симплекса $\boldsymbol{x}^k$ на себя, меняющее местами его вершины p_{k-1} и p_k и оставляющее неизменными все остальные вершины. При таком отображении ориентация симплекса $\boldsymbol{x}^k$ меняется, точки же, соответствующие друг другу при этом отображении, переходят в одну точку множества $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{E}^{k-1}$. Поэтому $\boldsymbol{X}^k$ представляет вырождающийся особый симплекс полиэдра $\boldsymbol{K}^k$. Вообще при линейном отображении симплекса $\boldsymbol{x}^k$ на симплекс $\boldsymbol{E}^{k-i}$ $(i > 0)$ получается вырождающийся k-мерный особый симплекс (стр. 56).

Пример 2. Отобразим одномерный симплекс, именно отрезок прямой линии $(p_0p_1) = \boldsymbol{x}^1$ (рис. 46) в евклидову плоскость так, что при этом каждые две точки отрезка, симметричные относительно его середины m, перейдут в одну точку. Получающийся тогда особый симплекс $\boldsymbol{X}^1$ вырождается. В самом деле, отражение отрезка в его середине m представляет линейное отображение отрезка на себя, изменяющее ориентацию. Каждые две соответствующие при этом отображении друг другу точки переходят в одну точку симплекса $\boldsymbol{X}^1$. Если бы при отображении $\boldsymbol{x}^1$ на $\boldsymbol{X}^1$ точки p_0 и p_1 попрежнему переходили бы в один конец отрезка $\boldsymbol{X}^1$, а m — в другой конец, но симметричные относительно m точки не отображались бы в одну точку $\boldsymbol{X}^1$, то $\boldsymbol{X}^1$ представлял бы особый, но не вырождающийся одномерный симплекс.

Пример 3.

Если все $k+1$ вершин особого симплекса $\boldsymbol{X}^k$ различны, то $\boldsymbol{X}^k$, наверное, не вырождается, так как при меняющем ориентацию линейном отображении его прообраза $\boldsymbol{x}^k$ на себя изменяется образ по крайней мере одной из вершин прообраза в особом симплексе. С другой стороны, особый k-мерный симплекс $(k > 0)$ является вырождающимся, если он состоит из одной точки, в которую отображены все точки прообраза. Нульмерный особый симплекс не может вырождаться. Напомним здесь, что мы ввели выше понятие ориентации и для нульмерных симплексов (стр. 58).

§ 26. Особые алгебраические комплексы

Особый, k-мерный, алгебраический комплекс есть совокупность конечного числа (иногда равного нулю) *невырождающихся* особых k-мерных симплексов полиэдра $\boldsymbol{K}^n$, каждый из которых ориентирован и снабжен определенным целочисленным коэффициентом. Если какой-нибудь ориентированный особый симплекс X^k входит в особый алгебраический комплекс с коэффициентом a, то мы выразим то же самое, сказав, что противоположно ориентированный симплекс $-X^k$ входит в комплекс с коэффициентом $-a$. Если же какой-нибудь особый симплекс совсем не входит в алгебраический комплекс, то говорят, что он входит туда с нулевым коэффициентом.

Каждый k-мерный симплекс симплициального разбиения полиэдра $\boldsymbol{K}^n$ можно рассматривать как особый k-мерный симплекс, так как он является топологическим образом прямолинейного симплекса. Поэтому рассмотренные в гл. III симплициальные алгебраические комплексы являются одновременно особыми алгебраическими комплексами. *Симплициальные алгебраические комплексы* определены только по отношению к некоторому *симплициальному разбиению* полиэдра $\boldsymbol{K}^n$ и состоят из симплексов этого разбиения. Напротив, *особые алгебраические комплексы* строятся из особых симплексов независимо от какого-либо симплициального разбиения полиэдра $\boldsymbol{K}^n$.

Среди особых k-мерных алгебраических комплексов существует *k-мерный нулевой комплекс*, каждый из симплексов которого имеет

коэффициентом нуль. Мы будем рассматривать такой комплекс одновременно и как *симплициальный*.

Сложение особых алгебраических комплексов определяется, как обычно. Именно, при сложении двух особых k-мерных алгебраических комплексов складываются коэффициенты, с которыми каждый особый k-мерный симплекс входит в рассматриваемые комплексы.

Особые k-мерные алгебраические комплексы полиэдра составляют в отношении сложения абелеву группу. Образующими этой группы являются невырождающиеся особые k-мерные симплексы. Таких образующих существует, вообще говоря, бесчисленное множество, причем мощность этого множества равна мощности континуума. Нулем группы является k-мерный нулевой комплекс. Обратный элемент получается изменением ориентации всех симплексов, входящих в данный элемент группы, т. е. в данный алгебраический комплекс, или, что то же, умножением всех коэффициентов комплекса на -1. Особый алгебраический комплекс V^k, состоящий из ориентированных особых симплексов $X_1^k, X_2^k, \ldots, X_r^k$ (причем $\boldsymbol{X}_1^k \neq \boldsymbol{X}_2^k \neq \ldots \neq \boldsymbol{X}_r^k$), входящих в комплекс с коэффициентами соответственно $v_1, v_2, \ldots, v_r$ [*] записывается в виде суммы

$$V^k = v_1 X_1^k + v_2 X_2^k + \ldots + v_r X_r^k. \tag{1}$$

Из определения особого алгебраического комплекса непосредственно вытекает, что если $mV^k = 0$ и $m \neq 0$, то $V^k = 0$. Это не было бы верно, если бы мы допустили, что в алгебраический комплекс могут входить также вырождающиеся симплексы.

Рассматривая суммы вида (1), мы можем и не предполагать, что симплексы $\boldsymbol{X}_1^k, \boldsymbol{X}_2^k, \ldots, \boldsymbol{X}_r^k$ непременно являются различными особыми симплексами. Наоборот, можно допускать, что в сумму (1) входят одинаковые или противоположно ориентированные симплексы, относительно которых возможно приведение. Исходя из формальных соображений, целесообразно допустить, кроме того, что в особый алгебраический комплекс входят и вырождающиеся особые симплексы, — конечно, в качестве элементов алгебраического комплекса, эквивалентных нулю. Относительно встречающихся в дальнейшем сумм вида (1) мы будем допускать все эти возможности, если только явно не будет оговорено противоположное.

Мы не определяем особый алгебраический комплекс просто как непрерывный образ некоторого симплициального алгебраического комплекса. В самом деле, рассматривая особые алгебраические комплексы как образы симплициальных комплексов, мы не могли бы определить сложение особых алгебраических комплексов так, чтобы оно не зависело от выбора комплексов-прообразов. А такое сложение нам необходимо для определения особых

[*] Все остальные особые симплексы входят в наш алгебраический комплекс с коэффициентами 0.

групп Бетти, как топологических инвариантов полиэдра $\boldsymbol{K}^n$. К этому определению мы сейчас переходим.

§ 27. Особые группы Бетти

Пусть x^k $(k > 0)$ есть прообраз особого ориентированного симплекса X^k (быть может, вырождающегося) и пусть

$$\dot{x}^k = \sum_\nu x_\nu^{k-1}.$$

$(k-1)$-мерный особый алгебраический комплекс $\sum\limits_\nu X_\nu^{k-1}$ будем называть *границей симплекса* X^k и обозначать символом $\dot{X}^k$:

$$\dot{X}^k = \sum_\nu X_\nu^{k-1}.$$

При этом X_ν^{k-1} есть ориентированная $(k-1)$-мерная сторона особого симплекса X^k, имеющая своим прообразом ориентированную сторону x_ν^{k-1} симплекса x^k (ориентация симплекса X_ν^{k-1} индуцируется ориентацией симплекса X^k). Среди граничных симплексов X_ν^{k-1} могут встречаться вырождающиеся; это может произойти даже и в том случае, когда симплекс сам не вырождается.

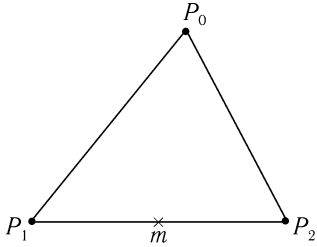


Рис. 47

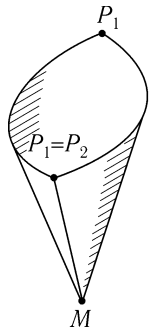


Рис. 48

Рассмотрим в качестве примера особый двумерный симплекс X^2 (рис. 48), получающийся путем отождествления точек стороны $(p_1\,p_2)$ некоторого треугольника (рис. 47), симметричных относительно середины m этой стороны (симплекс этот имеет вид бумажного «картуза»). Как мы видели на стр. 124, из стороны $(p_1\,p_2)$ получается вырождающийся особый симплекс. Такой симплекс считается эквивалентным нулю, поэтому $\dot{X}^2$ состоит

из двух особых одномерных симплексов, образующих вместе границу «картуза». В этом примере полиэдром, в котором рассматривается особый симплекс, можно считать трехмерное евклидово пространство.

Определение границы не зависит от специального выбора прообраза x^k симплекса X^k. В самом деле, если $\overline{x}^k$ какой-нибудь другой прообраз X^k, то в силу условия равенства особых симплексов существует сохраняющее ориентацию линейное отображение T симплекса x^k на $\overline{x}^k$, при котором попарно соответствующие друг другу точки этих симплексов являются точками, переходящими в одну точку симплекса X^k. Но T отображает одновременно линейно и с сохранением ориентации симплексы, входящие в $\dot{x}^k = \sum x_\nu^{k-1}$, на симплексы, входящие в $(\overline{x}^k)^{\cdot} = \sum \overline{x}_\nu^{k-1}$. Пользуясь снова определением равенства особых симплексов, мы видим, что оба алгебраических комплекса $\sum\limits_\nu x_\nu^{k-1}$ и $\sum\limits_\nu \overline{x}_\nu^{k-1}$ переходят в один и тот же особый алгебраический комплекс, а именно — в $\dot{X}^k$.

Граница особого симплекса может быть равна нулю. Это имеет место, например, при склеивании одномерного симплекса x^1 своими концами, т. е. при отображении отрезка (ориентированного) на топологический круг.

Граница состоит в этом случае из двух нульмерных симплексов, отличающихся между собой только ориентацией, т. е. равна нулю. Граница симплекса $-X^k$, имеющего ориентацию, противоположную ориентации симплекса X^k, очевидно, равна границе симплекса X^k, взятой с обратным знаком:

$$(-X^k)^{\cdot} = -(\dot{X}^k).$$

В частности, если X^k вырождается, то X^k совпадает с $-X^k$. Поэтому

$$\dot{X}^k = (-X^k)^{\cdot} = -\dot{X}^k.$$

По правилу действий над алгебраическими комплексами, изложенному на стр. 126, алгебраический комплекс, равный самому себе, взятому с противоположным знаком, есть нулевой алгебраический комплекс. Таким образом, *граница вырождающегося особого симплекса X^k представляет $(k-1)$-мерный нулевой алгебраический комплекс.*

Мы определяем *границу особого k-мерного алгебраического комплекса* как сумму границ составляющих его особых k-мерных симплексов

$$\left(\sum_\nu v_\nu X_\nu^k\right)^{\cdot} = \sum_\nu v_\nu \dot{X}_\nu^k. \tag{1}$$

Если в сумму $\sum v_\nu X_\nu^k$ входят одинаковые, противоположные по знаку или вырождающиеся симплексы (эквивалентные нулю), то их границы соответственно равны, противоположны по знаку или равны нулю.

Поэтому правая сторона равенства (2) всегда представляет один и тот же особый алгебраический комплекс, в какой бы форме ни записывать левую сторону. Граница нульмерного алгебраического комплекса всегда равна нулю. Если граница особого k-мерного алгебраического комплекса равна нулю, то такой комплекс называется *особым циклом*.

Граница особого комплекса X^{k+1} есть особый цикл, так как граница его прообраза x^{k+1} есть цикл. Следовательно, и граница любого особого $(k+1)$-мерного алгебраического комплекса представляет особый цикл. Особый k-мерный цикл, являющийся границей особого $(k+1)$-мерного алгебраического комплекса, называется *особым циклом, гомологичным нулю*. Особые нульмерные комплексы всегда являются циклами. Сумма и разность особых циклов или циклов, гомологичных нулю, есть снова соответственно особый цикл или особый цикл, гомологичный нулю, — это доказывается так же, как и в случае симплициальных алгебраических комплексов.

Два особых алгебраических комплекса (мы не требуем, чтобы они были непременно циклами) называются *гомологичными* между собой (на полиэдре $\boldsymbol{K}^n$), если их разность гомологична нулю. Для того чтобы два алгебраических комплекса были гомологичны между собой, необходимо, чтобы они имели одну и ту же границу (см. стр. 86).

В случае особых алгебраических комплексов можно говорить также и о слабых гомологиях. Именно, особый цикл называется слабо гомологичным нулю (≈ 0), если этот цикл, взятый с некоторым отличным от нуля коэффициентом, гомологичен нулю.

Особые k-мерные циклы распадаются на классы гомологичных между собой циклов.

Определим сложение классов гомологий следующим образом. Пусть в качестве слагаемых даны два класса гомологий. Выберем в каждом из этих классов по одному циклу («представителю»), сложим эти циклы и назовем суммой взятых классов класс, содержащий сумму представителей. Тогда классы гомологий можно рассматривать как элементы группы, для которой групповой операцией является определенное таким образом сложение. Такая группа называется *k-мерной особой группой Бетти*. Чтобы подчеркнуть отличие от особых групп, мы будем называть введенные в гл. III группы Бетти симплициального разбиения полиэдра *симплициальными группами Бетти*. В дальнейшем мы покажем, что особые группы Бетти изоморфны симплициальным группам Бетти соответствующих размерностей. Так как особые группы Бетти являются топологическими инвариантами полиэдра, то тем самым будет установлена топологическая инвариантность симплициальных групп Бетти.

Итак, мы переходим к доказательству топологической инвариантности особых групп Бетти. Мы рассмотрим, однако, более общий вопрос, именно, как ведут себя особые группы Бетти при непрерывном (но не непременном взаимно однозначном) отображении φ полиэд-

ра $\boldsymbol{K}^n$ в полиэдр $\mathbf{K}^m$ (в частном случае $\mathbf{K}^m$ может совпадать с $\boldsymbol{K}^n$). Отображение φ переводит особый симплекс X^k полиэдра $\boldsymbol{K}^n$ в особый симплекс Ξ^k полиэдра $\mathbf{K}^m$. В самом деле, особый симплекс X^k получается из своего прообраза — симплекса x^k — при помощи непрерывного отображения f. Произведение φf двух непрерывных отображений есть снова непрерывное отображение. Поэтому Ξ^k как образ симплекса x^k при непрерывном отображении φf представляет особый симплекс. Противоположно ориентированный симплекс $-X^k$ переводится отображением φ в особый симплекс $-\Xi^k$. Вследствие этого, если X^k и $-X^k$ равны, то Ξ^k и $-\Xi^k$ также равны, т. е. вырождающийся особый симплекс при отображении φ переходит в вырождающийся (обратное, конечно, неверно: образ невырождающегося особого симплекса может быть вырождающимся симплексом). Таким образом, каждому особому алгебраическому комплексу

$$V^k = \sum v_\varkappa X^k_\varkappa$$

ставится в соответствие вполне определенный его образ $\sum v_\varkappa \Xi^k_\varkappa$. Образ суммы двух комплексов $V^k + {}'V^k = \sum v_\varkappa X^k_\varkappa + \sum {}' v_\varkappa {}' X^k_\varkappa$ равен сумме образов этих комплексов, т. е. $\sum v_\varkappa \Xi^k_\varkappa + \sum {}' v_\varkappa {}' \Xi^k_\varkappa$. Далее, граница особого алгебраического комплекса переходит в границу образа этого комплекса. Коротко говоря, мы получаем следующее предложение:

Теорема I. *При непрерывном отображении φ полиэдра $\boldsymbol{K}^m$ в полиэдр $\mathbf{K}^n$ особые алгебраические комплексы переходят в особые алгебраические комплексы и все соотношения, существующие между алгебраическими комплексами полиэдра $\boldsymbol{K}^n$ и их границами, сохраняются соответственно в $\mathbf{K}^m$.*

В частности, особые циклы переходят в особые циклы, а циклы, гомологичные нулю, — в циклы, гомологичные нулю. Поэтому каждому (особому) классу гомологий соответствует вполне определенный образ-класс гомологий полиэдра $\mathbf{K}^m$. Сумме двух классов гомологий соответствует, очевидно, сумма их образов. Мы получаем следующее важное предложение:

Теорема II. *При непрерывном отображении φ полиэдра $\boldsymbol{K}^n$ в полиэдр $\mathbf{K}^m$ особая k-мерная группа Бетти полиэдра $\boldsymbol{K}^n$ гомоморфно отображается* (§ 83) *в особую k-мерную группу Бетти полиэдра $\mathbf{K}^m$. Обозначим получающееся гомоморфное отображение буквой* Ф. *Если $\boldsymbol{K}^n$ и $\mathbf{K}^m$ гомеоморфны и φ есть топологическое отображение полиэдра $\boldsymbol{K}^n$ на $\mathbf{K}^m$, то* Ф *представляет изоморфное отображение. Гомеоморфные полиэдры имеют, таким образом, одинаковые особые группы Бетти.*

Последняя часть этого предложения вытекает из того, что при топологическом отображении соответствие между особыми алгебраиче-

скими комплексами полиэдров $\boldsymbol{K}^n$ и $\mathbf{K}^m$ является взаимно однозначным.

Упражнения. 1. Считая доказанным, что симплициальные и особые группы Бетти совпадают, доказать следующее предложение: каждое гомоморфное (автоморфное) отображение одномерной группы Бетти тора (§ 19) в себя можно осуществить некоторым непрерывным (топологическим) отображением тора в себя.

2. Пользуясь тем же допущением, доказать, что не существует такого топологического отображения кругового кольца на себя, при котором одна граничная окружность отображается сама на себя с сохранением, а другая — с изменением ориентации.

§ 28. Теорема о симплициальном приближении. Инвариантность симплициальных групп Бетти

Симплициальные группы Бетти полиэдра были определены как группы Бетти некоторого симплициального разбиения полиэдра. Мы поэтому пока не можем утверждать, что они являются топологическими инвариантами полиэдра, — можно предполагать, что они зависят от выбранного симплициального разбиения. Напротив, особые группы Бетти топологически инвариантны по определению. Но зато это определение не дает возможности найти их, т. е. вычислить числа Бетти и коэффициенты кручения. Нам нужно показать теперь, что симплициальные и особые группы Бетти совпадают и что, следовательно, симплициальные группы Бетти являются топологическими инвариантами.

Доказательство основывается на следующем важном предложении.

Теорема о симплициальном приближении. *Пусть $\boldsymbol{K}^n$ есть конечный или бесконечный полиэдр, заданный в определенном симплициальном разбиении, и пусть A^k — особый k-мерный алгебраический комплекс полиэдра $\boldsymbol{K}^n$, граница которого A^{k-1} представляет алгебраический комплекс заданного симплициального разбиения*[*] *(в частности, граница может быть равна нулю). Тогда существует симплициальный алгебраический комплекс $\overline{A}^k$, гомологичный* (в смысле особых гомологий) *особому комплексу A^k (граница комплекса $\overline{A}^k$ в силу сказанного на стр.* 129*, очевидно, также равна A^{k-1}).* Размерность k особого алгебраического комплекса A^k может быть меньше, равна или даже больше размерности симплициального разбиения полиэдра $\boldsymbol{K}^n$.

В частности, если A^k есть цикл, то $A^{k-1} = 0$, и мы получаем в виде следствия:

[*] При $k = 0$ условие, что граница A^{k-1} должна быть симплициальным комплексом, естественно, отпадает.

(I) Всякий особый k-мерный цикл гомологичен некоторому симплициальному k-мерному циклу.

Заменив в теореме о приближении размерность k размерностью $k+1$, мы будем иметь еще одно следствие:

(II) Если симплициальный k-мерный цикл является границей особого $(k+1)$-мерного алгебраического комплекса, то он является также границей и некоторого симплициального $(k+1)$-мерного комплекса.

Из (I) и (II) вытекает, что симплициальные и особые группы Бетти изоморфны между собой. В самом деле, рассмотрим k-мерные (симплициальные) циклы, принадлежащие одному и тому же симплициальному классу гомологий. Очевидно, они принадлежат одному и тому же особому классу гомологий, если рассматривать их как особые циклы, так как симплициально гомологичные циклы и подавно гомологичны между собой как особые циклы. Таким образом, каждому симплициальному классу гомологий ставится в соответствие некоторый особый класс гомологий. Различным симплициальным классам гомологий соответствуют при этом различные особые классы, так как в силу (II) два симплициальных цикла, не гомологичные между собой симплициально, не могут быть гомологичны друг другу как особые циклы. Наконец, в силу (I) каждый особый класс гомологий содержит все циклы некоторого симплициального класса гомологий. Таким образом между симплициальными и особыми классами гомологий существует *взаимно однозначное* соответствие. Это соответствие является *изоморфным*, так как если симплициальному классу гомологий $\overline{H}_1$ соответствует особый класс H_1, а классу $\overline{H}_2$ — класс H_2, то сумме $\overline{H}_1 + \overline{H}_2$ соответствует сумма $H_1 + H_2$. В самом деле, класс $H_1 + H_2$ определяется сложением представителей классов H_1 и H_2. Но в качестве этих представителей можно взять *симплициальные* циклы классов $\overline{H}_1$ и $\overline{H}_2$.

Таким образом, для доказательства того, что симплициальные и особые группы Бетти совпадают, нам достаточно доказать теорему о симплициальном приближении. Доказательству этой теоремы мы предпошлем некоторые замечания о призмах в евклидовом пространстве.

§ 29. Призмы в евклидовом пространстве

Мы видели выше (§ 9, стр. 58), что линейное отображение прямолинейного симплекса x^n на себя в том и только в том случае сохраняет ориентацию, когда детерминант преобразования положителен. Пусть теперь в n-мерном пространстве $\boldsymbol{R}^n$ имеются два ориентированных прямолинейных n-мерных симплекса x^n и $'x^n$. Если линейное отображение пространства $\boldsymbol{R}^n$ на себя, переводящее x^n в $'x^n$ с сохранением ориентации, имеет положительный *детерминант преобразования*, то говорят, что эти симплексы *ориентированы одинаково*. Если $''x^n$ —

третий n-мерный симплекс, ориентированный одинаково с $'x^n$, то очевидно, что x^n и $''x^n$ также ориентированы одинаково. Мы говорим, что заданием ориентированного n-мерного симплекса x^n определяется *ориентация всего пространства* $\boldsymbol{R}^n$, причем все n-мерные симплексы, ориентированные одинаково с x^n, определяют одну и ту же ориентацию пространства.

Пусть x_g^k есть g-кратное *барицентрическое подразделение* лежащего в $\boldsymbol{R}^n$ прямолинейного симплекса x^k. Ориентация симплекса x^k определяет ориентацию несущего этот симплекс линейного подпространства $\boldsymbol{L}^k$ пространства $\boldsymbol{R}^n$. Мы можем теперь ориентировать каждый k-мерный симплекс барицентрического подразделения x_g^k одинаково с симплексом x^k (по отношению к линейному пространству $\boldsymbol{L}^k$). В дальнейшем, когда будет идти речь о барицентрическом подразделении *ориентированного* симплекса x^k, мы будем всегда предполагать, что все k-мерные симплексы подразделения ориентированы именно таким образом, — одинаково с симплексом x^k. Барицентрическое подразделение ориентированного нульмерного симплекса совпадает с самим симплексом.

Пусть прямолинейный симплекс $\boldsymbol{x}^k$, расположенный в пространстве не менее $(k+1)$ измерений, переводится посредством трансляции (параллельного переноса) в симплекс $\boldsymbol{y}^k$, при этом мы предполагаем, что вектор трансляции не лежит в k-мерном линейном пространстве, определяемом симплексом $\boldsymbol{x}^k$. Симплекс $\boldsymbol{x}^k$ при переходе в положение $\boldsymbol{y}^k$ описывает точечное множество $\boldsymbol{z}^{k+1}$, называемое *призмой*. $\boldsymbol{x}^k$ называется *нижним основанием* призмы (или, просто, *основанием*), а его стороны $\boldsymbol{x}_\nu^i$ $(0 \leqslant i < k)$ — *сторонами нижнего основания*. $\boldsymbol{y}^k$ и его стороны называются соответственно *верхним основанием* и *сторонами верхнего основания* призмы. Каждая i-мерная сторона симплекса $\boldsymbol{x}^k$ также описывает при трансляции призму $\boldsymbol{z}^{k+1}$, называемую $(k+1)$-*мерной боковой стороной* призмы $\boldsymbol{z}^{k+1}$. Центр симплекса $\boldsymbol{x}^k$ описывает ось призмы, любая же другая точка $\boldsymbol{x}^k$ описывает отрезок, параллельный оси. Середина оси призмы называется центром призмы. Так как боковые стороны сами представляют призму, то у каждой боковой стороны также имеется центр. При $k=0$ мы будем иметь в качестве одномерной призмы отрезок, при $k=1$ — параллелограм, при $k=2$ — трехгранную призму. В дальнейшем мы будем предполагать всегда $k>0$.

Пусть $\overline{\boldsymbol{z}}^{k+1}$ — другая $(k+1)$-мерная призма. Существует *линейное отображение* призмы $\boldsymbol{z}^{k+1}$ на $\overline{\boldsymbol{z}}^{k+1}$, при котором симплекс основания $\boldsymbol{x}^k$ переходит в симплекс основания второй призмы $\overline{\boldsymbol{x}}^k$, а центр призмы $\boldsymbol{z}^{k+1}$ — в центр призмы $\overline{\boldsymbol{z}}^{k+1}$. Это линейное отображение однозначно определяется линейным отображением симплекса $\boldsymbol{x}^k$ на $\overline{\boldsymbol{x}}^k$; последнее может быть взято произвольно.

Так как основание призмы выпукло, то и сама призма $\boldsymbol{z}^{k+1}$ *выпук-*

ла, т. е. представляет замкнутое ограниченное множество в евклидовом пространстве, содержащее наряду с любыми двумя точками весь соединяющий их отрезок. Граница призмы $\boldsymbol{z}^{k+1}$ состоит из оснований $\boldsymbol{x}^k$, $\boldsymbol{y}^k$ и боковых сторон $\boldsymbol{z}_\nu^k$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, k)$. Каждый луч, выходящий из центра призмы, пересекает границу ее в точности в одной точке. Все эти свойства призмы могут быть доказаны *аналитически*. Для этого нужно взять одну вершину симплекса $\boldsymbol{x}^k$ за начало координат и выбрать в качестве базисных векторов векторы $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\ldots$, $\mathbf{v}_k$, идущие из начала координат в остальные вершины симплекса $\boldsymbol{x}^k$, и вектор трансляции $\mathbf{t}$ (также выходящий из начала координат). Точками призмы являются тогда все концы радиусов-векторов

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{v}_k + \tau\mathbf{t}$$
$$(0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1; \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k \leqslant 1; \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1).$$

Однако разбирать это подробнее мы здесь не будем.

Мы хотим теперь разбить призму $\boldsymbol{z}^{k+1}$ *на симплексы*. Достигнуть этого можно бесконечно многими способами; нас, однако, интересуют только симплициальные разбиения специального вида, которыми нам придется в дальнейшем воспользоваться. Произведем g-кратное барицентрическое подразделение верхнего основания $\boldsymbol{y}^k$ призмы (под 0-кратным барицентрическим подразделением мы будем понимать сам симплекс), затем разобьем боковые стороны призмы на симплексы следующим образом: каждая одномерная боковая сторона разбивается своим центром на два одномерных симплекса. Мы считаем теперь, что i-мерные боковые стороны $\boldsymbol{z}_\mu^i$ уже подразделены, и для того чтобы получить подразделение $(i+1)$-мерной стороны $\boldsymbol{z}_\nu^{i+1}$ или, при $i = k$, всей призмы, мы проектируем границу этой стороны из ее центра (см. стр. 74). Граница призмы $\boldsymbol{z}_\nu^{i+1}$ состоит из (неподразделенной) стороны $\boldsymbol{x}_\nu^i$ нижнего основания, g-кратно барицентрически подразделенной стороны $\boldsymbol{y}_\nu^i$ верхнего основания и нескольких уже разбитых на симплексы боковых сторон $\boldsymbol{z}_\mu^i$. Разбивая таким образом на симплексы поочередно все боковые стороны, начиная от одномерных и кончая самой призмой $\boldsymbol{z}^{k+1}$, мы получим нужное нам симплициальное разбиение. Рис. 49 и 50 иллюстрируют два простейших случая описанного симплициального разбиения призмы.

Мы говорим, что разбитая на симплексы призма *ориентирована*, если все ее $(k+1)$-мерные симплексы ориентированы одинаково по отношению к $(k+1)$-мерному линейному пространству, в котором призма лежит. Совокупность всех одинаково ориентированных $(k+1)$-мерных симплексов призмы, каждый из которых взят с коэффициентом единица, является алгебраическим комплексом. Обозначим этот комплекс через z^{k+1}. Ориентируем теперь определенным способом симплексы обоих оснований нашей призмы. Именно, за ориентацию нижнего основания $\boldsymbol{x}^k$ примем ориентацию, *индуцированную* инцидентным с этим

основанием $(k+1)$-мерным симплексом комплекса z^{k+1} и обозначим ориентированное таким образом нижнее основание через x^k. На барицентрически же подразделенный симплекс $\boldsymbol{y}^k$ верхнего основания мы переносим ориентацию нижнего основания x^k *при помощи трансляции*. Тогда верхнее основание $\boldsymbol{y}^k$ даст нам алгебраический комплекс y^k, состоящий из всех (одинаково) ориентированных симплексов g-кратного барицентрического подразделения симплекса $\boldsymbol{y}^k$ (см. рис. 50). Таким же образом заменяя призму $\boldsymbol{z}^{k+1}$ ее боковыми сторонами $\boldsymbol{z}_\nu^k$, мы получим из этих k-мерных сторон алгебраические комплексы z_ν^k, а соответственно ориентированные $(k-1)$-мерные стороны верхнего и нижнего оснований призмы $\boldsymbol{z}^{k+1}$ дадут нам симплексы $\boldsymbol{x}_\nu^{k-1}$ и алгебраические комплексы y_ν^{k-1}. При этом призмы $\boldsymbol{z}_\nu^k$ можно ориентировать произвольно. Для простоты мы ориентируем каждую из них так, чтобы имела место формула

$$\dot{x}^k = \sum_\nu x_\nu^{k-1}, \tag{1}$$

т. е. чтобы каждый симплекс x_ν^{k-1}, имеющий ориентацию, индуцированную в нем соответствующей призмой z_ν^k, входил в границу ориентированного симплекса x^k с коэффициентом 1.

Мы докажем сейчас, что полученные таким образом алгебраические комплексы связаны, кроме формулы (1), *следующими граничными формулами*:

$$\dot{y}^k = \sum_\nu y_\nu^{k-1}, \tag{2}$$

$$\left(\sum_\nu z_\nu^k\right)^{\cdot} = \sum_\nu x_\nu^{k-1} - \sum_\nu y_\nu^{k-1}, \tag{3}$$

$$\dot{z}^{k+1} = x^k - y^k - \sum_\nu z_\nu^k. \tag{4}$$

Формула (2) утверждает, что граница барицентрического подразделения верхнего основания равна барицентрическому подразделению его границы. Формула (4) является выражением того, что граница призмы состоит из нижнего основания, верхнего основания и k-мерных боковых сторон, причем и стороны и основания подразделены, ориентированы и рассматриваются как алгебраические комплексы. Формула (3) является следствием формул (1), (2), (4). В самом деле, пользуясь тем, что граница правой части формулы (4) равна нулю (как граница цикла: $\dot{z}^{k+1}$ представляет границу комплекса и, следовательно, есть цикл), и применяя соотношения (1) и (2), мы получим (3).

Для доказательства формул (2) и (4) заметим, что если они и могут быть неверны, то только в отношении знаков. В самом деле, пусть какой-нибудь симплекс E^k входит, например, в границу комплекса z^{k+1}.

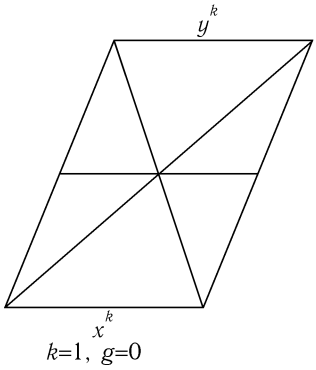


Рис. 49

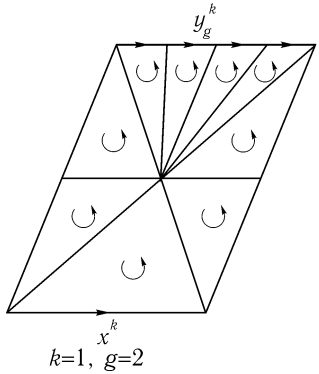


Рис. 50

Симплекс E^k непременно является тогда симплексом, принадлежащим либо x^k, либо y^k, либо одному из алгебраических комплексов z_ν^k, так как всякий другой k-мерный симплекс призмы $\boldsymbol{z}^{k+1}$ инцидентен в точности с двумя $(k+1)$-мерными симплексами, индуцирующими на нем противоположные ориентации*. Допустим теперь, что граничный симплекс E^k есть один из ориентированных симплексов алгебраического комплекса z_ν^k. Единственный инцидентный с E^k $(k+1)$-мерный симплекс E^{k+1} индуцирует в E^k определенную ориентацию, определяющую, с каким знаком E^k входит в $\dot{z}^{k+1}$. Всякий другой ориентированный симплекс комплекса z_ν^k входит в $\dot{z}^{k+1}$ с тем же знаком, — это вытекает из того, что все симплексы комплекса z_ν^k и все симплексы комплекса z^{k+1} ориентированы по отношению к соответствующим линейным пространствам, несущим эти комплексы, одинаково. Таким образом в $\dot{z}^{k+1}$ комплекс z_ν^k входит целиком (с тем или иным знаком). Аналогично можно показать, что y_ν^{k-1} входит целиком в $\dot{y}^k$.

Рассматривая формулу (4), мы видим, что знак при x^k в этой формуле не может быть неверным, так как по определению ориентация симплекса x^k есть ориентация, индуцируемая в нижнем основании прилегающим к нему симплексом призмы z^{k+1}.** Точно так же не может

*Это происходит потому, что линейное отображение $(k+1)$-мерного линейного пространства, в котором лежит $\boldsymbol{z}^{k+1}$, на себя, переводящее один инцидентный с E^k $(k+1)$-мерный симплекс в другой и оставляющий все точки E^k на месте, имеет отрицательный детерминант преобразования.

**Заметим, что мы задавали произвольно ориентацию призмы z^{k+1} и затем получали вполне определенные ориентации для x^k, y^k, x_ν^{k-1}, y_ν^{k+1}, z_ν^k, соответствующие поставленным условиям. Можно, наоборот, сперва задать ориентацию симплекса x^k, а затем определить, пользуясь теми же условиями, ориентацию призмы z^{k+1} и всех остальных комплексов. Соотношения (1)–(4) при этом, естественно, сохраняются без всяких изменений.

быть неверным и знак у y^k, так как на y^k переносится посредством трансляции ориентация симплекса x^k. Итак, мы можем утверждать справедливость следующих формул:

$$\dot{y}^k = \sum_\nu \eta_\nu y_\nu^{k-1}, \tag{2'}$$

$$\dot{z}^{k+1} = x^k - y^k - \sum_\nu \xi_\nu z_\nu^k. \tag{4'}$$

По тем же причинам (в силу условий, определяющих ориентации алгебраических комплексов z_ν^k, x_ν^{k-1} и y_ν^{k-1}) следует, что

$$\dot{z}_\nu^k = x_\nu^{k-1} - y_\nu^{k-1} + \ldots, \tag{3'}$$

где многоточие означает $(k-1)$-мерные боковые стороны z_λ^{k-1}, входящие в z_ν^k.

Правая часть формулы $(4')$ представляет цикл, так как она является границей комплекса z^{k+1}. Вследствие этого

$$\left(x^k - y^k - \sum_\nu \xi_\nu z_\nu^k\right)^{\cdot} = 0,$$

или, применяя соотношения (1), $(2')$, $(3')$,

$$\sum_\nu x_\nu^{k-1} - \sum_\nu \eta_\nu y_\nu^{k-1} - \sum_\nu \xi_\nu (x_\nu^{k-1} - y_\nu^{k-1} + \ldots) = 0.$$

Сравнивая коэффициенты при x_ν^{k-1}, y_ν^{k-1}, мы получим

$$\eta_\nu = \xi_\nu = 1,$$

чем и доказываются формулы (2)–(4).

Отобразим призму $\boldsymbol{z}^{k+1}$ непрерывно в полиэдр $\boldsymbol{K}^n$ и обозначим через X^k, Y^k, Z^{k+1}, X_ν^{k-1}, Y_ν^{k-1}, Z_ν^k особые симплексы и алгебраические комплексы, являющиеся образами соответствующих симплексов и комплексов x^k, y^k, z^{k+1}, x_ν^{k-1}, y_ν^{k-1}, $\boldsymbol{z}_\nu^k$. В силу теоремы I § 27 для этих *особых* симплексов и комплексов справедливы формулы, получающиеся из граничных соотношений (1)–(4) заменой малых букв большими. Пусть теперь имеется конечное число призм $\boldsymbol{z}^{k+1}$, $'\boldsymbol{z}^{k+1}, \ldots$, отображенных непрерывно в полиэдр $\boldsymbol{K}^n$. Ориентированные симплексы $\boldsymbol{x}^k$, $'\boldsymbol{x}^k, \ldots$, представляющие основания этих призм, переходят в особые симплексы X^k, $'X^k, \ldots$ Составим алгебраический комплекс

$$A^k = aX^k + 'a'X^k + \ldots$$

и соответственно особые алгебраические комплексы

$$\begin{aligned} B^k &= aY^k + {}'a'Y^k + \dots, \\ C^{k+1} &= aZ^{k+1} + {}'a'Z^{k+1} + \dots, \\ A^{k-1} &= a\sum X_\nu^{k-1} + {}'a\sum {}'X_\nu^{k-1} + \dots, \\ B^{k-1} &= a\sum Y_\nu^{k-1} + {}'a\sum {}'Y_\nu^{k-1} + \dots, \\ C^k &= a\sum Z_\nu^k + {}'a\sum {}'Z_\nu^k + \dots, \end{aligned}$$

где $a, {}'a, \dots$ — произвольные целые числа.

Пользуясь формулами (1)–(4), в которых малые буквы заменены большими, мы без труда убедимся, что для этих особых алгебраических комплексов справедливы следующие *граничные формулы*:

$$\dot{A}^k = A^{k-1}, \tag{I}$$

$$\dot{B}^k = B^{k-1}, \tag{II}$$

$$\dot{C}^k = A^{k-1} - B^{k-1}, \tag{III}$$

$$\dot{C}^{k+1} = A^k - B^k - C^k. \tag{IV}$$

§ 30. Доказательство теоремы о симплициальном приближении

Построение алгебраического комплекса $\overline{A}^k$, аппроксимирующего* особый алгебраический комплекс A^k, мы будем осуществлять при помощи симплициального приближения. Такое приближение заключается в замене вершин k-мерных симплексов особого комплекса A^k близким; к ним вершинами симплициального разбиения полиэдра $\boldsymbol{K}^n$, причем замена эта производится так, что вершины каждого (k-мерного) симплекса особого комплекса A^k переходят снова в вершины одного симплекса — быть может симплекса меньшей размерности — полиэдра $\boldsymbol{K}^n$. Симплициальное приближение возможно осуществить лишь, если симплексы комплекса A^k достаточно малы. В самом деле, в противном случае может оказаться, что две вершины, принадлежащие одному и тому же симплексу особого комплекса A^k, находятся в очень далеких друг от друга симплексах симплициального разбиения полиэдра $\boldsymbol{K}^n$, вследствие чего никакие близкие к этим вершинам вершины симплициального разбиения не могут принадлежать одному симплексу полиэдра $\boldsymbol{K}^n$. В соответствии с этим симплициальному приближению иногда должно предшествовать подразделение заданного особого

*Аппроксимировать значит приближать. Мы будем иногда пользоваться и этим термином.

комплекса, и конструкция проводится, вообще говоря, последовательно *двумя шагами.*

1-й шаг. Переход к подразделению особого алгебраического комплекса A^k (стр. 140–142).

2-й шаг. Симплициальное приближение полученного подразделенного комплекса (стр. 143–147).

Разберем сначала отдельно случай *нульмерного* особого комплекса ($k = 0$), так как общая теория симплициального приближения в этом случае неприменима. Пусть

$$A^0 = aX^0 + {}'a'X^0 + \dots$$

Соединим точку X^0 прямой линией (см. стр. 58) с вершиной Y^0 какого-нибудь симплекса полиэдра $\boldsymbol{K}^n$, в котором (симплексе) X^0 лежит. Ориентируем Y^0 так же, как X^0. Соединяющий отрезок можно рассматривать как особый одномерный симплекс Z^1, имеющий границу $X^0 - Y^0$. Поэтому получающийся соответствующим образом алгебраический комплекс

$$\overline{A}^0 = aY^0 + {}'a'Y^0 + \dots$$

представляет нульмерный симплициальный комплекс, гомологичный (в смысле особых гомологии) комплексу A^0. Мы в дальнейшем будем считать всегда, что $k > 0$.

Сверх всего, можно предположить, что $\boldsymbol{K}^n$ есть *конечный* полиэдр. Покажем, в самом деле, что особый алгебраический комплекс A^k бесконечного полиэдра $\boldsymbol{K}^n$ помещается всегда целиком на некотором конечном подкомплексе симплициального разбиения полиэдра. Рассмотрим сначала особый симплекс X^k. Если X^k имеет общие точки с бесконечным числом симплексов полиэдра $\boldsymbol{K}^n$, то существует последовательность принадлежащих X^k точек, не имеющая точки накопления. Однако последовательность соответствующих прообразов этих точек в симплексе-прообразе x^k имеет точку накопления, скажем, точку H. Но тогда отображение симплекса x^k на X^k не является непрерывным в точке H, что противоречит определению особого симплекса. Так как A^k состоит из конечного числа особых симплексов, то A^k лежит на конечном подкомплексе полиэдра $\boldsymbol{K}^n$. Поэтому теорему о симплициальном приближении достаточно доказать для конечных полиэдров.

1-й шаг: *подразделение особого алгебраического комплекса* A^k.

а) *Соединяющие призмы*

Рассмотрим сначала принадлежащий полиэдру $\boldsymbol{K}^n$ отдельный ориентированный особый симплекс X^k, который может оказаться и вырождающимся. Выберем его прообразом ориентированный симплекс x^k, лежащий в основании некоторой призмы z^{k+1}. Предположим,

что призма z^{k+1} разбита на симплексы указанным в предыдущем параграфе способом; симплекс, представляющий ее верхнее основание, g-кратно подразделен барицентрически.

Отобразим призму z^{k+1} непрерывно в полиэдр $\boldsymbol{K}^n$ так, чтобы при этом x^k перешло соответствующим образом в X^k (т. е. так, чтобы образом x^k в $\boldsymbol{K}^n$ был наш особый симплекс X^k), а каждый отрезок призмы, параллельный ее оси, отобразился в точку. Другими словами, спроектируем сначала призму параллельно своей оси на ее нижнее основание, а затем отобразим на X^k. При этом симплекс верхнего основания y^k или введенный в предыдущем параграфе алгебраический комплекс y^k, состоящий из одинаково ориентированных симплексов g-кратного барицентрического подразделения верхнего основания, переходит в особый алгебраический комплекс Y^k. Этот комплекс называется *g-кратным барицентрическим подразделением* особого симплекса X^k. Алгебраический комплекс z^{k+1} переходит в особый алгебраический комплекс Z^{k+1}. Мы будем называть Z^{k+1} *комплексом, соединяющим* X^k и Y^k. g-кратное барицентрическое подразделение и соединяющий комплекс *однозначно* определяются особым симплексом X^k, т. е. не зависят от выбора призмы z^{k+1}. В самом деле, пусть $\overline{z}^{k+1}$ — другая призма, подразделенная и ориентированная так же, как z^{k+1}. Существует линейное отображение T призмы z^{k+1} на $\overline{z}^{k+1}$, переводящее ориентированное нижнее основание x^k первой призмы в такое же основание $\overline{x}^k$ второй призмы. Так как соответствующие друг другу точки симплексов x^k и $\overline{x}^k$ имеют один и тот же образ в X^k и каждый параллельный оси отрезок как призмы z^{k+1}, так и призмы $\overline{z}^{k+1}$ переходит в точку, то всякие две соответствующие в силу T одна другой точки призм z^{k+1} и $\overline{z}^{k+1}$ имеют один и тот же образ в $\boldsymbol{K}^n$. Но T переводит ориентированные симплексы призмы z^{k+1} в ориентированные симплексы призмы $\overline{z}^{k+1}$. Поэтому из определения равенства особых симплексов следует, что особые алгебраические комплексы Z^{k+1} и $\overline{Z}^{k+1}$ так же, как Y^k и $\overline{Y}^k$, не отличаются друг от друга.

Для *особого алгебраического комплекса* A^k g-кратное *барицентрическое подразделение* его B^k и соединяющий комплекс C^{k+1} определяются как сумма g-кратных барицентрических подразделений и соответственно соединяющих комплексов отдельных особых симплексов комплекса A^k. Другими словами, если

$$A^k = aX^k + {}'a'X^k + \ldots, \tag{1'}$$

а Y^k и Z^{k+1} означают соответственно g-кратное барицентрическое подразделение и соединяющий комплекс симплекса X^k, то

$$B^k = aY^k + {}'a'Y^k + \ldots, \tag{2'}$$

$$C^{k+1} = aZ^{k+1} + {}'a'Z^{k+1} + \ldots \tag{3'}$$

Если один из симплексов правой части формулы $1'$, например симплекс X^k, вырождается, т. е. $X^k = -X^k$, то, очевидно, Y^k также $= -Y^k$ и $Z^{k+1} = -Z^{k+1}$, т. е. $Y^k = 0$ и $Z^{k+1} = 0$. Таким образом барицентрическое подразделение B^{k+1} и соединяющий комплекс C^{k+1} однозначно определяются особым алгебраическим комплексом A^k и не зависят от того, входят ли в $(1')$ вырождающиеся симплексы или нет.

b) *Граничные формулы*

При отображении призмы $\boldsymbol{z}^{k+1}$ на особый симплекс X^k каждый отрезок боковой стороны $\boldsymbol{z}_\nu^k$, параллельный оси призмы, переходит в точку. Поэтому лежащие на $\boldsymbol{z}_\nu^k$ комплексы x_ν^{k-1}, y_ν^{k-1}, $\boldsymbol{z}_\nu^k$ переходят соответственно в стороны X_ν^{k-1} симплекса X^k в g-кратные барицентрические подразделения Y_ν^{k-1} сторон X_ν^{k-1} и в комплексы Z_ν^k, соединяющие X_ν^{k-1} с Y_ν^{k-1}. То же самое имеет место по отношению к призмам $'\boldsymbol{z}^{k+1}, \ldots$, принадлежащим другим особым симплексам $'X^k, \ldots$. В силу формулы $(1')$ стр. 140 и формулы (1) стр. 135 границей комплекса A^k является алгебраический комплекс

$$A^{k-1} = a\sum X_\nu^{k-1} + {}'a\sum {}'X_\nu^{k-1} + \ldots \tag{4'}$$

Барицентрическое подразделение особого алгебраического комплекса A^{k-1} представляет комплекс

$$B^{k-1} = a\sum Y_\nu^{k-1} + {}'a\sum {}'Y_\nu^{k-1} + \ldots, \tag{5'}$$

а комплексом, соединяющим A^{k-1} с B^{k-1}, служит комплекс

$$C^k = a\sum Z_\nu^k + {}'a\sum {}'Z_\nu^k + \ldots \tag{6'}$$

Вследствие этого граничные формулы (I)–(IV) § 29 остаются справедливыми и для особых комплексов:

$$\dot{A}^k = A^{k-1}, \tag{I'}$$

$$\dot{B}^k = B^{k-1}, \tag{II'}$$

$$\dot{C}^k = A^{k-1} - B^{k-1}, \tag{III'}$$

$$\dot{C}^{k+1} = A^k - B^k - C^k. \tag{IV'}$$

Формула (II′) выражает, что *граница g-кратного барицентрического подразделения особого алгебраического комплекса A^k равна g-кратному барицентрическому подразделению его границы.*

При g достаточно большом симплексы комплексов (барицентрических подразделений) $y^k, {}'y^k, \ldots$ становятся как угодно малыми. Точнее,

если считать $\boldsymbol{K}^n$ прямолинейным полиэдром, расположенным в евклидовом пространстве достаточно большого числа измерений (что в силу сказанного в § 11 всегда возможно), и понимать под расстоянием двух точек полиэдра $\boldsymbol{K}^n$ их расстояние в евклидовой метрике этого пространства, то достаточно мелким подразделением A^k можно сделать диаметры особых симплексов B^k как угодно малыми.

Закончив подразделение особого алгебраического комплекса A^k, мы переходим к следующему шагу.

2-й шаг: *симплициальное приближение подразделенного алгебраического комплекса* A^k.

а) *Соединяющие призмы*

Пусть B^k есть особый алгебраический комплекс и P — вершина особого симплекса этого комплекса. Под *особой симплициальной звездой* с центром P понимают совокупность всех особых симплексов особого комплекса B^k, имеющих P своей вершиной. Предположим теперь, что подразделение B^k комплекса A^k настолько мелко, что каждая особая звезда комплекса B^k лежит целиком внутри по крайней мере одной звезды симплициального разбиения полиэдра $\boldsymbol{K}^n$. После подразделения можно осуществить теорему V § 7. Именно, в качестве окрестности $\boldsymbol{U}^*(Q \mid \boldsymbol{K}^n)$ точки Q нужно взять внутренность симплициальной звезды полиэдра $\boldsymbol{K}^n$. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что ε-окрестность любой точки $\boldsymbol{K}^n$ лежит целиком внутри некоторой звезды полиэдра $\boldsymbol{K}^n$. A^k нужно подразделить настолько, чтобы диаметры симплексов B^k стали меньше $\frac{\varepsilon}{2}$.

Чтобы сделать ясной аналогию с первым шагом, мы будем обозначать алгебраические комплексы B^{k-1} и B^k, т. е. g-кратно подразделенные комплексы A^{k-1} и A^k, соответственно через $\mathbf{A}^{k-1}$ и

$$\mathbf{A}^k = \alpha\Xi^k + {}'\alpha'\Xi^k + \dots$$

При этом мы допускаем снова, что среди особых симплексов Ξ^k, ${}'\Xi^k, \dots$ правой части могут встретиться и одинаковые, и отличающиеся лишь ориентацией, и даже вырождающиеся симплексы.

Пусть P_1, P_2, ... суть *все* вершины особых симплексов Ξ^k, ${}'\Xi^k, \dots$, причем *каждую точку* P_λ *мы пишем только один раз*, даже если она представляет несколько слившихся друг с другом особых вершин. Каждая вершина P_λ является центром особой звезды, состоящей из k-мерных симплексов комплекса $\mathbf{A}^k$. Для того чтобы аппроксимировать комплекс $\mathbf{A}^k$, мы ставим в соответствие каждой его вершине P_λ «*приближающую*» (*аппроксимирующую*) *вершину* Q_λ симплициального разбиения полиэдра $\boldsymbol{K}^n$, причем Q_λ выбирается так, что особая звезда комплекса $\mathbf{A}^k$ с центром P_λ целиком лежит внутри симплициальной звезды полиэдра $\boldsymbol{K}^n$ с центром Q_λ. Вершина Q_λ, аппроксимирующая вершину P_λ, вообще говоря, не определяется однозначно

вершиной P_λ, так как в полиэдре $\boldsymbol{K}^n$ могут существовать несколько симплициальных звезд, содержащих внутри себя особую симплициальную звезду с центром P_λ. Если, однако, вершины Q_λ уже выбраны, то вся дальнейшая конструкция осуществляется вполне однозначно. Описанный переход от особых вершин P_λ к аппроксимирующим симплициальным вершинам Q_λ составляет *весьма существенный шаг симплициального приближения.* В качестве примера на рис. 51 взят особый одномерный комплекс (отмеченный жирной линией), который вложен в двумерный полиэдр $\boldsymbol{K}^2$, состоящий из прямолинейных равносторонних треугольников.

Рассмотрим теперь отдельный особый симплекс, например, Ξ^k. Пусть его вершинами являются точки $P_1, P_2, \ldots, P_\rho$, а поставленные им в соответствие симплициальные вершины суть $Q_1, Q_2, \ldots, Q_\rho$. Вершины $Q_1, Q_2, \ldots, Q_\rho$, естественно, *могут и не быть все различными*, в противоположность вершинам P_ν. Покажем, что вершины Q являются непременно вершинами некоторого симплекса симплициального разбиения полиэдра $\boldsymbol{K}^n$. В самом деле, каждая из звезд, имеющих центрами $Q_1, Q_2, \ldots, Q_\rho$, содержит внутри себя особый симплекс Ξ^k. Поэтому любая точка P симплекса Ξ^k является общей внутренней точкой таких звезд*.

P принадлежит некоторому симплексу $\boldsymbol{E}^j$ полиэдра $\boldsymbol{K}^n$. Всякая звезда $\mathbf{St}$ полиэдра $\boldsymbol{K}^n$, имеющая P своей внутренней точкой, должна содержать симплекс $\boldsymbol{E}^j$, причем $\boldsymbol{E}^j$ не может лежать на краю звезды $\mathbf{St}$. Но тогда центр этой звезды представляет непременно одну из вершин симплекса $\boldsymbol{E}^j$. Поэтому точки $Q_1, Q_2, \ldots, Q_\rho$ являются либо вершинами какой-нибудь i-мерной стороны $\boldsymbol{E}^i$ симплекса $\boldsymbol{E}^j$, либо вершинами самого $\boldsymbol{E}^j$. Так как $\boldsymbol{E}^i$ и P принадлежат одному и тому же симплексу $\boldsymbol{E}^j$, то каждую точку симплекса $\boldsymbol{E}^i$ можно соединить прямолинейным отрезком** с P, а следовательно, с любой точкой особого симплекса Ξ^k.

Примем теперь опять за прообраз особого симплекса Ξ^k ориентированный симплекс x^k, лежащий в основании $(k+1)$-мерной призмы $\boldsymbol{z}^{k+1}$, и определим *непрерывное отображение призмы* $\boldsymbol{z}^{k+1}$ *в полиэдр* $\boldsymbol{K}^n$ при помощи следующих условий:

1. x^k переходит надлежащим образом в Ξ^k.

2. y^k (рассматриваемый сейчас как неподразделенный) линейно отображается на $\boldsymbol{E}^i$, причем так: если вершина симплекса основания x^k p_λ $(\lambda = 0, 1, \ldots, k)$ переходит в особую вершину P_μ $(\mu = 1, 2, \ldots, \rho)$ симплекса Ξ^k, то соответствующая вершина q_λ симплекса верхнего

*Напомним здесь, что внутренняя точка симплициальной звезды есть точка, не принадлежащая краю звезды.

**Прямолинейность рассматривается здесь по отношению к симплексу E^j, см. стр. 123.

основания y^k переходит в вершину Q_μ симплекса $\boldsymbol{E}^i$, аппроксимирующую особую вершину P_μ.

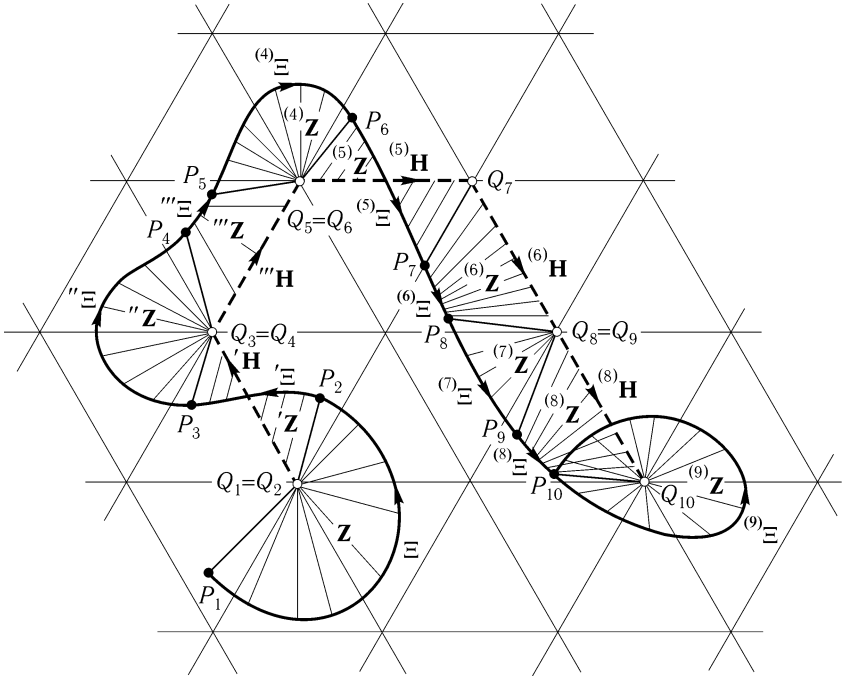


Рис. 51

3. Параллельный оси отрезок (pq) призмы $\boldsymbol{z}^{k+1}$ линейно отображается на прямолинейный отрезок, соединяющий точки P и Q, где P — образ точки p в Ξ^k, а Q — образ точки q в $\boldsymbol{E}^i$. Такой соединяющий отрезок существует, так как по указанному выше любую точку симплекса Ξ^k можно прямолинейно соединить с любой точкой симплекса $\boldsymbol{E}^i$. На рис. 51 соединяющими отрезками служат начерченные прямые линии.

Отображение призмы $\boldsymbol{z}^{k+1}$ в $\boldsymbol{K}^n$ определяется поставленными условиями однозначно. Непрерывность этого отображения вытекает из леммы § 14, стр. 77. Симплекс $\boldsymbol{E}^i$ становится в результате отображения ориентированным особым симплексом $\mathbf{H}^k$, прообразом которого служит y^k. Такой особый симплекс называется (*симплициальным*) *приближением* симплекса Ξ^k.

Получающийся из призмы $\boldsymbol{z}^{k+1}$ алгебраический комплекс z^{k+1} переводится нашим непрерывным отображением в сосбый алгебраиче-

ский комплекс $\mathbf{Z}^{k+1}$; $\mathbf{Z}^{k+1}$ называется *комплексом, соединяющим особый симплекс* Ξ^k *с его приближением* $\mathbf{H}^k$.

Мы определяем теперь для особого *алгебраического комплекса*

$$\mathbf{A}^k = \alpha\Xi^k + {}'\alpha'\Xi^k + \dots \qquad (1'')$$

приближение $\mathbf{B}^k$ (*соединяющий комплекс* Γ^{k+1}), как сумму приближений (соединяющих комплексов) отдельных особых симплексов:

$$\mathbf{B}^k = \alpha\mathbf{H}^k + {}'\alpha'\mathbf{H}^k + \dots, \qquad (2'')$$

$$\Gamma^{k+1} = \alpha\mathbf{Z}^{k+1} + {}'\alpha'\mathbf{Z}^{k+1} + \dots \qquad (3'')$$

После выбора аппроксимирующих вершин приближение и соединяющий комплекс однозначно определяются алгебраическим комплексом $\mathbf{A}^k$, и не зависит от того, входят ли в правую часть формулы $(1'')$ вырождающиеся симплексы или нет. Последнее доказывается таким же образом, как на стр. 141. На рис. 51 приближение $\mathbf{B}^1$ показано пунктирной линией.

$\mathbf{B}^k$ представляет *симплициальный* алгебраический комплекс, так как каждый симплекс ${}^{(\lambda)}\mathbf{H}^k$ есть либо k-*мерный* симплекс симплициального разбиения полиэдра $\boldsymbol{K}^n$, либо вырождающийся особый симплекс (стр. 124, пример 1). В последнем случае он эквивалентен нулевому алгебраическому комплексу.

b) *Граничные комплексы*

Рассмотрим отображение боковой стороны $\boldsymbol{z}_\nu^k$ призмы $\boldsymbol{z}_\nu^{k+1}$, получающееся при описанном выше отображении призмы $\boldsymbol{z}^{k+1}$ в $\boldsymbol{K}^n$. Это отображение стороны $\boldsymbol{z}_\nu^k$, очевидно, обладает следующими свойствами:

1. Симплекс (нижнего) основания x_ν^{k-1} стороны $\boldsymbol{z}_\nu^k$ переходит в сторону Ξ_ν^{k-1} особого симплекса Ξ^k.

2. При линейном отображении симплекса y^k на симплекс $\boldsymbol{E}^i$ симплициального разбиения полиэдра $\boldsymbol{R}^n$ сторона y_ν^{k-1} симплекса y^k сама отображается линейно на симплекс $\boldsymbol{E}^h$. Симплекс $\boldsymbol{E}^h$ является либо симплексом $\boldsymbol{E}^i$, либо его стороной. Если теперь вершина p_λ симплекса x_ν^{k-1} переходит в вершину P_μ особого комплекса Ξ_ν^{k-1}, то в силу конструкции отображения призмы $\boldsymbol{z}^{k+1}$, соответствующая вершина q_λ симплекса y_ν^{k-1} переходит в вершину Q_μ, аппроксимирующую особую вершину P_μ.

3. Так как при отображении призмы $\boldsymbol{z}^{k+1}$ каждый параллельный оси призмы отрезок (pq) линейно отображается на отрезок (PQ), соединяющий образы точек p и q, то это имеет место, в частности, и для параллельных оси отрезков стороны $\boldsymbol{z}_\nu^k$.

Отсюда следует, что лежащие на z_ν^k алгебраические комплексы x_ν^{k-1}, y_ν^{k-1}, z_ν^k переходят соответственно в стороны Ξ_ν^{k-1} симплекса Ξ^k, в приближения $\mathbf{H}_\nu^{k-1}$ симплексов Ξ_ν^{k-1} и в отрезки $\mathbf{Z}_\nu^k$, соединяющие Ξ_ν^{k-1} с $\mathbf{H}_\nu^{k-1}$.

То же самое имеет место по отношению к призмам $'z^{k_1}, \ldots$, принадлежащим остальным особым симплексам $'\Xi^k, \ldots$ В силу уравнения (1″) стр. 145 и уравнения (1) стр. 135 граница особого алгебраического комплекса $\mathbf{A}^k$

$$\mathbf{A}^{k-1} = \alpha \sum \Xi_\nu^{k-1} + {}'\alpha \sum {}'\Xi_\nu^{k-1} + \ldots \tag{4″}$$

Таким образом приближение особого комплекса $\mathbf{A}^{k-1}$ есть комплекс

$$\mathbf{B}^{k-1} = \alpha \sum \mathbf{H}_\nu^{k-1} + {}'\alpha \sum {}'\mathbf{H}_\nu^{k-1} + \ldots, \tag{5″}$$

а комплекс, соединяющий $\mathbf{A}^{k-1}$ с $\mathbf{B}^{k-1}$

$$\Gamma^k = \alpha \sum \mathbf{Z}_\nu^k + {}'\alpha \sum {}'\mathbf{Z}_\nu^k + \ldots \tag{6″}$$

Мы получаем снова граничные формулы (I)–(IV) § 29:

$$\dot{\mathbf{A}}^k = \mathbf{A}^{k-1}, \tag{I″}$$

$$\dot{\mathbf{B}}^k = \mathbf{A}^{k-1}, \tag{II″}$$

$$\dot{\Gamma}^k = \mathbf{A}^{k-1} - \mathbf{B}^{k-1}, \tag{III″}$$

$$\dot{\Gamma}^{k+1} = \mathbf{A}^k - \mathbf{B}^k - \Gamma^k. \tag{IV″}$$

Формула (II″) выражает, что *граница приближения особого алгебраического комплекса равна приближению его границы.*

Результаты

Нам остается сопоставить результаты первого и второго шагов. Прибавим к соединяющим комплексам C^k и C^{k+1} первого шага соединяющие комплексы Γ^k и Γ^{k+1} второго. Мы получим новые соединяющие комплексы

$$V^k = C^k + \Gamma^k,$$
$$V^{k+1} = C^{k+1} + \Gamma^{k+1}.$$

Принимая во внимание, что $\mathbf{A}^k$ есть не что иное, как переименованное B^k, а $\mathbf{A}^{k-1}$ есть B^{k-1}, мы получим теперь из граничных соот-

ношений (I′)–(IV′) и (I″)–(IV″) новые граничные соотношения:

$$\dot{A}^k = A^{k-1}, \tag{I}$$

$$\dot{\mathbf{B}}^k = \mathbf{B}^{k-1}, \tag{II}$$

$$\dot{V}^k = A^{k-1} - \mathbf{B}^{k-1}, \tag{III}$$

$$\dot{V}^{k+1} = A^k - \mathbf{B}^k - V^k. \tag{IV}$$

Предыдущие рассуждения применимы для любого особого алгебраического комплекса A^k. Допустим теперь, что A^k есть цикл, т. е. $A^{k-1} = 0$. Тогда обращаются в нуль также барицентрическое подразделение B^{k-1} и его приближение $\mathbf{B}^{k-1}$, а вместе с тем и соединяющие комплексы C^k, Γ^k и V^k. Формула (IV) принимает более простой вид

$$\dot{V}^{k+1} = A^k - \mathbf{B}^k.$$

Отсюда следует, что для каждого особого цикла существует гомологичный с ним симплициальный.

Допустим теперь, что граница A^{k-1} особого комплекса A^k есть симплициальный комплекс. При помощи g-кратного барицентрического подразделения из A^{k-1} можно получить комплекс B^{k-1} и затем симплициальное приближение $\mathbf{B}^{k-1}$. Мы утверждаем, что $\mathbf{B}^{k-1} = A^{k-1}$. Это вытекает из следующего более общего предложения, которое мы сейчас докажем: *симплициальное приближение g-кратного барицентрического разбиения B^i любого симплициального алгебраического комплекса A^i есть сам комплекс A^i.*

Доказательство. Теорема верна при $i = 0$, так как всякий нульмерный комплекс A^0 совпадает со своим g-кратным барицентрическим подразделением, а симплициальное приближение оставляет нульмерные симплексы комплекса A^0 неподвижными. Допустим теперь, что теорема доказана для $(i-1)$-мерных комплексов A^{i-1}, в частности, для границы i-мерного симплекса E^i комплекса A^i. Обозначим g-кратное барицентрическое подразделение симплекса E^i через E^i_g. При симплициальном приближении E^i_g переходит в некоторый алгебраический комплекс U^i, в то время как $\dot{E}^i_g$ переходит по (индукционному) предположению в $\dot{E}^i$. Так как граница приближения равна приближению границы, мы получаем соотношение:

$$\dot{U}^i = \dot{E}^i. \tag{1}$$

Пусть теперь e^i — какой-нибудь симплекс барицентрического подразделения E^i_g. Вершины симплекса e^i переходят при аппроксимации в определенные вершины симплекса E^i, а потому e^i переходит либо в εE^i

($\varepsilon = \pm 1$), либо в одну из сторон симплекса E^i. В последнем случае приближение симплекса e^i вырождается и не оказывает влияния на приближение симплекса E^i. Поэтому приближение U^i может быть только симплексом E^i, взятым с некоторым коэффициентом, а тогда в силу формулы (1) $U^i = E^i$.

Если теперь

$$A^i = \gamma E^i + {}'\gamma' E^i + \dots$$

есть произвольный i-мерный алгебраический комплекс полиэдра $\boldsymbol{K}^n$, а

$$B^i = \gamma E_g^i + {}'\gamma' E_g^i + \dots$$

его g-кратное барицентрическое подразделение, то симплициальное приближение

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^i &= \gamma U^i + {}'\gamma' U^i + \dots = \\ &= \gamma E^i + {}'\gamma' E^i + \dots = \\ &= A^i. \end{aligned}$$

Наша теорема доказана для размерности i, а следовательно, по индукции, и для любой размерности.

Вместо $\mathbf{B}^{k-1}$ в формулы (I)–(IV) можно теперь подставить A^{k-1}. Тогда из формулы (III) получается

$$\dot{V}^k = 0,$$

т. е. V^k есть цикл. Кроме того, по конструкции* V^k лежит на подкомплексе $\boldsymbol{A}^{k-1}$, составленном из всех $(k-1)$-мерных симплексов комплекса A^{k-1}. Симплициальное приближение комплекса V^k внутри комплекса $\boldsymbol{A}^{k-1}$ представляет (см. стр. 147) гомологичный V^k k-мерный симплициальный комплекс на $\boldsymbol{A}^{k-1}$. Но A^{k-1} не содержит k-мерных симплексов. Поэтому симплициальное приближение комплекса V^k есть k-мерный нулевой комплекс, т. е. $V^k \sim 0$. Пользуясь формулой $A^k - \mathbf{B}^k - V^k \sim 0$, вытекающей из формулы (IV), мы получаем сейчас же соотношение $A^k \sim \mathbf{B}^k$.

Таким образом, доказательство теоремы о симплициальном приближении закончено. *Вместе с тем установлена топологическая инвариантность симплициальных групп Бетти и одновременно показано, что все понятия и теоремы, вытекающие из гомологических свойств, являются топологическими свойствами полиэдра*** *. Так, например, числа Бетти и коэффициенты кручения суть топологические инварианты, так как они определяются группой Бетти. Числа*

* $V^k = C^k + \Gamma^k$. Что C^k лежит на $\boldsymbol{A}^{k-1}$, это очевидно. Для Γ^k это следует из соображений, изложенных на стр. 147.

** Напомним здесь, что k-мерные особые и k-мерные симплициальные группы Бетти (стр. 91) определены также при $k > n$ (где n — размерность симплициального разбиения полиэдра) и доказано, что те и другие совпадают.

Бетти по модулю 2 *также инварианты, — они могут быть выражены через числа Бетти и количества четных коэффициентов кручения. Эйлерова характеристика инвариантна и равна одному и тому же числу для любых симплициальных разбиений полиэдра, так как она равна альтернированной сумме чисел Бетти.* Нетрудно показать, что все указанные свойства симплициального разбиения полиэдра не меняются, если мы переходим от данного разбиения к другому при помощи некоторых простейших операций, именно, при помощи рассматриваемых в § 37 подразделений и укрупнений. Оказывается, однако, что мы совсем не должны рассматривать такие подразделения симплициальных разбиений полиэдра, так как мы показали, что указанные свойства двух различных симплициальных разбиений полиэдра одинаковы вне зависимости от того, можно ли связать эти разбиения общим подразделением или нет.

Однако полученные результаты выходят далеко за пределы доказательств инвариантности. Перекинуть мост от одного симплициального разбиения к другому мы могли бы при помощи более простых средств[17]. Важно то, и это нужно особенно подчеркнуть, что мы определили группы Бетти топологически инвариантно и тем самым раз навсегда освободились от симплициального разбиения, при помощи которого конструктивно был задан полиэдр. Впредь мы не должны будем на каждом шагу заниматься аппроксимациями. А это представляет преимущество, — особенно в теории отображений многообразий, — которое окупит нам труды, затраченные на инвариантное определение групп Бетти *.

§ 31. Деформации и симплициальные приближения отображений

Мы сейчас переходим к теореме, являющейся также теоремой о приближении. Однако здесь будет идти речь не о приближении особых комплексов, а о приближении непрерывных отображений полиэдра $\boldsymbol{K}^n$ в полиэдр $\mathbf{K}^m$. Чтобы сформулировать теорему, мы должны ввести два понятия, играющих в топологии важную роль, именно, понятие деформации отображения и понятие симплициального отображения.

Пусть полиэдр $\boldsymbol{K}^n$, который мы для простоты предположим конечным, отображается непрерывно двумя способами в полиэдр $\mathbf{K}^m$. Обозначим соответствующие непрерывные отображения через g_0 и g_1. Мы говорим, что g_0 можно *гомотопно деформировать* в g_1, если «между g_0 и g_1 существует непрерывное семейство отображений». Под этим понимается следующее: существует семейство непрерывных отображений такое, что каждому значению параметра t, изменяющегося в интерва-

*По поводу затронутых здесь вопросов см. Александров-Hopf, главы VIII и IX.

ле $0 \leqslant t \leqslant 1$, ставится в соответствие отображение g_t этого семейства, в частности, значениям $t = 0$ и $t = 1$ соответствуют заданные отображения g_0 и g_1; при этом образ $g_t(P)$ точки P должен зависеть непрерывно от параметра t и от точки P полиэдра $\boldsymbol{K}^n$.

Дадим еще одно определение гомотопной деформации, эквивалентное приведенному. Пусть $\boldsymbol{K}^n \times \mathbf{t}$ есть топологическое произведение полиэдра $\boldsymbol{K}^n$ на единичный отрезок $0 \leqslant t \leqslant 1$. g_0 можно гомотопно деформировать в g_1 в том и только в том случае, если $\boldsymbol{K}^n \times \mathbf{t}$ можно при помощи непрерывного отображения f отобразить в $\mathbf{K}^m$ так, что $f(P \times 0) = f_0(P)$ и $f(P \times 1) = g_1(P)$. В самом деле, отображением топологического произведения $\boldsymbol{K}^n \times \mathbf{t}$ определяется семейство отображений полиэдра $\boldsymbol{K}^n$ в $\mathbf{K}^m$. Мы должны положить только

$$g_t(P) = f(P \times t). \tag{1}$$

Обратно, непрерывное семейство g_t отображений полиэдра $\boldsymbol{K}^n$ определяет в силу уравнения (1) непрерывное отображение топологического произведения $\boldsymbol{K}^n \times \mathbf{t}$.

Второе определение имеет то преимущество, что оно задает все семейство отображений g_t при помощи одного отображения f топологического произведения. $\boldsymbol{K}^n \times \mathbf{t}$ называется *полиэдром деформации* (полиэдра $\boldsymbol{K}^n$), а t — *параметром деформации*.

Полиэдр деформации можно следующим образом вложить в евклидово пространство: пусть $\boldsymbol{R}^r$ есть евклидово пространство с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_r, t$. Поместим конечный полиэдр $\boldsymbol{K}^n$, заданный в определенном симплициальном разбиении*, прямолинейно в линейное подпространство $t = 0$ пространства $\boldsymbol{R}^{r+1}$, — это возможно, как показано в § 11, при $r \geqslant 2n + 1$. Тогда при параллельном переносе, переводящем линейное пространство $t = 0$ в линейное пространство $t = 1$, $\boldsymbol{K}^n$ опишет как раз полиэдр деформации.

Если g_0 можно деформировать в g_1, то g_1 можно деформировать в g_0. Если, далее, g_1 можно деформировать в g_2, то и g_0 можно деформировать в g_2. Это дает возможность разбить непрерывные отображения полиэдра $\boldsymbol{K}^n$ в $\mathbf{K}^m$ на классы отображений, гомотопно деформируемых друг в друга. Эти классы называются для определенности *гомотопичными классами* (или *классами гомотопии*).

Мы требовали, чтобы отображения g_t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ были только однозначными и непрерывными. Если все эти отображения являются, кроме того, топологическими, то тогда говорят об *изотопной деформации* отображения g_0 в g_1. При этом не требуется, чтобы *отображение f полиэдра деформации* в полиэдр $\mathbf{K}^m$ было топологическим отображением. Так, например, непрерывное перемещение круга $\boldsymbol{K}^2$ в евклидовой плоскости $\mathbf{K}^2$ есть изотопная деформация.

---

*То-есть симплициальный комплекс $\boldsymbol{K}^n$.

Может случиться, что $\boldsymbol{K}^n$ совпадает с $\mathbf{K}^m$, т. е. g_t есть *отображение полиэдра* $\boldsymbol{K}^n$ *в себя*. Если, в частности, g_0 есть тождественное отображение, то непрерывное семейство отображений g_t называется *гомотопной* (или соответственно *изотопной*) *деформацией полиэдра* $\boldsymbol{K}^n$ *в себя*. Мы будем в дальнейшем иметь дело только с гомотопными деформациями, о которых будем говорить обычно просто как о деформациях (опуская слово «гомотопные»).

Пусть даны полиэдры $\overline{\boldsymbol{K}}^n$ и $\overline{\mathbf{K}}^m$ вместе с их симплициальными разбиениями $\boldsymbol{K}^n$ и $\mathbf{K}^m$. Под *симплициальным отображением* полиэдра $\overline{\boldsymbol{K}}^n$ в полиэдр $\overline{\mathbf{K}}^m$ понимают непрерывное отображение $\overline{\boldsymbol{K}}^n$ в $\overline{\mathbf{K}}^m$, при котором каждый симплекс $\boldsymbol{E}^i$ комплекса $\boldsymbol{K}^n$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ отображается линейно на некоторый симплекс Σ^j $j \leqslant i$ комплекса $\mathbf{K}^m$ (стр. 60). Если относительно каждой *вершины* комплекса $\boldsymbol{K}^n$ известно, в какую вершину комплекса $\mathbf{K}^m$ она отображена, то тем самым симплициальное отображение определено полностью. При этом соответствие между вершинами комплексов $\boldsymbol{K}^n$ и $\mathbf{K}^m$ должно удовлетворять одному единственному условию, именно, чтобы вершины каждого симплекса из $\boldsymbol{K}^n$ переходили снова в вершины некоторого симплекса из $\mathbf{K}^m$. Тривиальный пример симплициального отображения получается при отображении всех вершин комплекса $\boldsymbol{K}^n$ в одну вершину $\mathbf{K}^m$.

Теорема, которую мы хотим сейчас доказать, заключается по существу в том, что каждое непрерывное отображение полиэдра $\overline{\boldsymbol{K}}^n$ в $\overline{\mathbf{K}}^m$ можно деформировать в симплициальное отображение, если только симплициальное разбиение $\boldsymbol{K}^n$ достаточно мелко.

Пусть g_0 есть непрерывное отображение полиэдра $\overline{\boldsymbol{K}}^n$ в $\mathbf{K}^m$. Подразделяя $\boldsymbol{K}^n$ достаточно мелко, мы можем сделать так, что образ каждой симплициальной звезды комплекса $\boldsymbol{K}^n$ будет лежать целиком внутри некоторой симллициальной звезды комплекса $\mathbf{K}^m$. Поставим теперь в соответствие каждой вершине P_ν комплекса $\boldsymbol{K}^n$ вершину Π_ν комплекса $\mathbf{K}^m$ так, чтобы звезда с центром Π_ν содержала целиком внутри себя образ звезды с центром P_ν. Тогда если $P_0, P_1, \ldots, P_i$, например, являются вершинами i-мерного симплекса $\boldsymbol{E}^i$ комплекса $\boldsymbol{K}^n$, то каждая из звезд с центрами $\Pi_0, \Pi_1, \ldots, \Pi_i$ содержит внутри себя образ $g_0(\boldsymbol{E}^i)$ (вершины $\Pi_0, \Pi_1, \ldots, \Pi_i$ могут и не быть все различными). Отсюда следует, что $\Pi_0, \Pi_1, \ldots, \Pi_i$ также являются вершинами некоторого симплекса комплекса $\mathbf{K}^m$. В самом деле, если $g_0(P)$ есть образ какой-нибудь точки P симплекса $\boldsymbol{E}^i$ и Σ — симплекс из $\mathbf{K}^m$, содержащий точку $g_0(P)$, то все звезды с центрами $\Pi_0, \Pi_1, \ldots, \Pi_i$ содержат $g_0(P)$ внутри себя. Но тогда $\Pi_0, \Pi_1, \ldots, \Pi_i$ являются вершинами симплекса Σ и, следовательно, вершинами некоторого симплекса Σ^j комплекса $\mathbf{K}^m$. Таким образом мы видим, что соответствие между точками P_ν комплекса $\boldsymbol{K}^n$ и точками Π_ν комплекса $\mathbf{K}^m$ определяет некоторое симплициальное отображение g_1 комплекса $\boldsymbol{K}^n$ в $\mathbf{K}^m$.

Образ $g_1(P)$ рассматриваемой нами точки P симплекса $\boldsymbol{E}^i$ принад-

лежит симплексу Σ^j. Но тогда $g_1(P)$ так же, как и $g_0(P)$, принадлежит симплексу Σ, и эти две точки можно соединить прямолинейным отрезком. Отсюда следует также деформируемость отображения g_0 в g_1: точку $g_0(P)$ нужно заставить перемещаться по соединяющему отрезку в точку $g_1(P)$ (при этом точка $g_0(P)$ может иногда «перемещаться», оставаясь неподвижной). Точнее, мы определяем непрерывное отображение f полиэдра деформации $\boldsymbol{K}^n \times \mathbf{t}$ в $\mathbf{K}^m$ следующими требованиями: $f(P \times 0) = g_0(P)$, $f(P \times 1) = g_1(P)$ и отрезок, пробегаемый точкой P на $\boldsymbol{K}^n \times \mathbf{t}$, при возрастании t от 0 до 1 отображается линейно на отрезок (иногда состоящий из одной точки), соединяющий $g_0(P)$ и $g_1(P)$. Непрерывность отображения f следует из леммы, приведенной на стр. 77.

Полученный результат можно сформулировать так:

Теорема I (теорема о деформации). *Всякое непрерывное отображение полиэдра $\overline{\boldsymbol{K}}^n$ в полиэдр $\overline{\mathbf{K}}^m$ может быть (гомотопно) деформировано в симплициальное отображение, если только симплициальное разбиение $\boldsymbol{K}^n$ состоит из достаточно мелких симплексов. При этом в течение всей деформации образ точки P полиэдра $\overline{\boldsymbol{K}}^n$ не покидает ни одного из симплексов комплекса $\mathbf{K}^m$, на котором он находился в начале деформации. Поэтому образ точки P движется все время по симплексу наименьшей размерности, содержащему этот образ в начале деформации.*

По теореме 11 § 27 при непрерывном отображении полиэдра $\overline{\boldsymbol{K}}^n$ в $\overline{\mathbf{K}}^m$ k-мерная группа Бетти полиэдра $\overline{\boldsymbol{K}}^n$ подвергается гомоморфному отображению в k-мерную группу Бетти полиэдра $\overline{\mathbf{K}}^m$. Посмотрим теперь, как влияет на это гомоморфное отображение деформация непрерывного отображения.

Теорема II. *Пусть g_0 и g_1 — два отображения полиэдра $\overline{\boldsymbol{K}}^n$ в $\overline{\mathbf{K}}^m$, A^k с границей A^{k-1} — особый алгебраический комплекс на $\overline{\boldsymbol{K}}^n$, $\mathbf{A}^k$ с границей $\mathbf{A}^{k-1}$ и $\mathbf{B}^k$ с границей $\mathbf{B}^{k-1}$ — образы комплексов A^k и A^{k-1} при отображениях соответственно g_0 и g_1. Тогда, если g_0 можно деформировать в g_1, то на $\mathbf{K}^m$ существуют особые соединяющие комплексы Γ^k и Γ^{k+1}, удовлетворяющие граничным соотношениям*

$$\dot{\Gamma}^k = \mathbf{A}^{k-1} - \mathbf{B}^{k-1},$$
$$\dot{\Gamma}^{k+1} = \mathbf{A}^k - \mathbf{B}^k - \Gamma^k.$$

Γ^k (соответственно Γ^{k+1}) лежит на множестве, описываемом при деформации образом множества A^{k-1} (соответственно A^k). Если, в частности, $A^{k-1} = 0$ ($\mathbf{A}^{k-1}$ и $\mathbf{B}^{k-1}$ в этом случае также $= 0$), то $\Gamma^k = 0$ и $\mathbf{A}^k \sim \mathbf{B}^k$ (см. рис. 52).

Доказательство. Вложим полиэдр деформации $\boldsymbol{K}^n \times \mathbf{t}$ тем же способом, как на стр. 150, в евклидово пространство $\boldsymbol{R}^{r+1}$.

Пусть особый алгебраический комплекс A^k задан суммой

$$A^k = aX^k + {}'a'X^k + \dots$$

Пусть, далее, x^k есть прообраз симплекса X^k, а $\boldsymbol{z}^{k+1}$ — построенная на x^k призма с верхним основанием $\boldsymbol{y}^k$. Отобразим $\boldsymbol{z}^{k+1}$ непрерывно на подмножество полиэдра $\boldsymbol{K}^n \times \mathbf{t}$, описываемое при параллельном переносе (стр. 150) точками особого симплекса X^k, так, чтобы выполнялись следующие условия: x^k переходит требуемым образом в особый симплекс X^k, расположенный на полиэдре $\boldsymbol{K}^n \times 0$, а каждый параллельный оси отрезок призмы $\boldsymbol{z}^{k+1}$ линейно отображается на отрезок, описываемый соответствующей точкой* в $\boldsymbol{K}^n \times \mathbf{t}$. Если теперь разбить $\boldsymbol{z}^{k+1}$ на симплексы и ориентировать их, как в § 29, то ориентированные симплексы или алгебраические комплексы

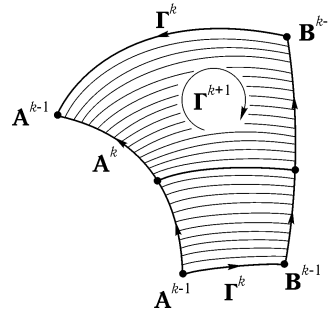


Рис. 52

$$x^k,\ y^k,\ z^{k+1},\ x_\nu^{k-1},\ y_\nu^{k-1},\ z_\nu^k$$

перейдут при отображении призмы $\boldsymbol{z}^{k+1}$ в $\boldsymbol{K}^n \times \mathbf{t}$ в особые алгебраические комплексы

$$X^k,\ Y^k,\ Z^{k+1},\ X_\nu^{k-1},\ Y_\nu^{k-1},\ Z_\nu^k$$

полиэдра $\boldsymbol{K}^n \times \mathbf{t}$. Рассуждая аналогично для остальных особых симплексов комплекса A^k и произведя сложение, мы получим особые алгебраические комплексы

$$\begin{aligned}
B^k &= aY^k + {}'a'Y^k + \dots,\\
C^{k+1} &= aZ^{k+1} + {}'a'Z^{k+1} + \dots,\\
A^{k-1} &= a\sum_\nu X_\nu^{k-1} + {}'a\sum_\nu {}'X_\nu^{k-1} + \dots,\\
B^{k-1} &= a\sum_\nu Y_\nu^{k-1} + {}'a\sum_\nu {}'Y_\nu^{k-1} + \dots,\\
C^k &= a\sum_\nu Z_\nu^k + {}'a\sum_\nu {}'Z_\nu^k + \dots
\end{aligned}$$

Эти комплексы связаны граничными формулами стр. 138.

*— образом основания отображаемого отрезка.

Особые алгебраические комплексы C^{k+1} и C^k целиком лежат на множествах, описываемых соответственно комплексами A^k и A^{k-1} при параллельном переносе на $\boldsymbol{K}^n \times \mathbf{t}$. Для C^{k+1} это ясно. Что касается C^k, то можно было бы предположить, что множество, описываемое комплексом A^{k-1}, вообще говоря, не совпадает с суммой множеств, описываемых отдельными особыми симплексами X_ν^{k-1}, $'X_\nu^{k-1}, \ldots$ В самом деле, может случиться, что какой-нибудь из этих симплексов формально входит в правую часть выражения для A^{k-1}, но, по существу, вовсе не принадлежит комплексу A^{k-1}, потому ли, что он вырождается, или потому, что он сокращается с каким-нибудь другим симплексом. Поэтому мы должны доказать, что если, например,

$$X_\mu^{k-1} = \pm' X_\nu^{k-1}, \tag{2}$$

то

$$Y_\mu^{k-1} = \pm' Y_\nu^{k-1}$$

и

$$Z_\mu^{k-1} = \pm' Z_\nu^{k-1}.$$

Это, однако, непосредственно вытекает из построения и из определения равенства особых симплексов.

При отображении полиэдра $\boldsymbol{K}^n \times \mathbf{t}$ в $\mathbf{K}^m$ особые алгебраические комплексы A^k, A^{k-1}, B^k, B^{k-1}, C^k, C^{k+1} переходят в особые комплексы $\mathbf{A}^k$, $\mathbf{A}^{k-1}$, $\mathbf{B}^k$, $\mathbf{B}^{k-1}$, Γ^k, Γ^{k+1}, о которых говорится в теореме II. По теореме I стр. 130 граничные формулы при этом сохраняются, т. е.

$$\dot{\mathbf{A}}^k = \mathbf{A}^{k-1}, \tag{I}$$

$$\dot{\mathbf{B}}^k = \mathbf{B}^{k-1}, \tag{II}$$

$$\dot{\Gamma}^k = \mathbf{A}^{k-1} - \mathbf{B}^{k-1}, \tag{III}$$

$$\dot{\Gamma}^{k+1} = \mathbf{A}^k - \mathbf{B}^k - \Gamma^k. \tag{IV}$$

Формулы (III) и (IV) представляют как раз граничные формулы, о которых идет речь в нашей теореме. Алгебраический комплекс Γ^k (соответственно Γ^{k+1}) лежит, сверх того, на образе множества, описываемого комплексом A^{k-1} (соответственно A^k) полиэдра $\boldsymbol{K}^n \times \mathbf{t}$ при параллельном переносе. Таким образом теорема II доказана.

По теореме II образы особого цикла A^k при деформируемых одно в другое непрерывных отображениях g_0 и g_1 гомологичны друг другу на $\mathbf{K}^m$. Отсюда вытекает:

Теорема III. *Гомоморфное отображение k-мерной группы Бетти полиэдра $\boldsymbol{K}^n$ в k-мерную группу Бетти полиэдра $\mathbf{K}^m$, определяемое по теореме* II § 27 *непрерывным отображением полиэдра $\boldsymbol{K}^n$*

в $\mathbf{K}^m$*, не меняется при гомотопной деформации непрерывного отображения. Таким образом это гомоморфное отображение* (*гомоморфизм*) *является инвариантом гомотопичного класса отображений.*

Теорема справедлива, в частности, и тогда, когда речь идет о деформации комплекса $\boldsymbol{K}^n$ в себя. В этом случае $\boldsymbol{K}^n$ совпадает с $\mathbf{K}^m$, а g_0 есть тождественное отображение. Так как отображения групп Бетти полиэдра $\boldsymbol{K}^n$ самих в себя, осуществляемые посредством g_0, суть тождественные отображения, то получаем теорему:

Теорема IV. *Гомоморфное отображение групп Бетти полиэдра* $\boldsymbol{K}^n$ *в себя, получающееся при деформации* $\boldsymbol{K}^n$ (*в себя*)*, является тождественным отображением.*

Теорема III дает необходимое, хотя ни в коем случае не достаточное условие для того, чтобы два отображения полиэдра $\boldsymbol{K}^n$ в $\mathbf{K}^m$ принадлежали к одному (гомотопическому) классу. Пусть, например, $\boldsymbol{K}^n = \mathbf{K}^m$ есть n-мерная сфера $\boldsymbol{S}^n$, т. е., скажем, граница $(n+1)$-мерного симплекса $\boldsymbol{E}^{n+1} = (P_0\,P_1 \ldots P_n\,P_{n+1})$, а отображение g_1 сферы $\boldsymbol{S}^n$ на себя осуществляется линейным отображением симплекса $\boldsymbol{E}^{n+1}$, при котором вершины P_2, P_3, …, P_{n+1} остаются неподвижными, в то время как P_0 и P_1 меняются местами друг с другом. Спрашивается: принадлежит ли g_1 к классу тождественных отображений, т. е. можно ли g_1 гомотопно деформировать в тождественное отображение? Алгебраический комплекс $\dot{E}^{n+1}$ на сфере $\boldsymbol{S}^n$ образует базу гомологий n-мерной группы Бетти сферы, представляющей свободную циклическую группу. Наше отображение переводит ориентированный симплекс $E^{n+1} = +(P_0\,P_1 \ldots P_n\,P_{n+1})$ в $-E^{n+1} = +(P_1\,P_0\,P_2 \ldots P_n\,P_{n+1})$, а $\dot{E}^{n+1}$ в $-\dot{E}^{n+1}$. Таким образом осуществлямое посредством g_1 гомоморфное отображение n-мерной группы Бетти в себя не есть тождественное отображение, т. е. по теореме IV g_1 не принадлежит к классу тождественных отображений.

Упражнение. Для каких размерностей n замена друг другом диаметрально противоположных точек единичной n-мерной сферы принадлежит к классу тождественных отображений? [Осуществите замену диаметрально противоположных точек посредством последовательных отражений.]

В качестве дальнейшего приложения теоремы II определим *группы Бетти проективного пространства* $\boldsymbol{P}^n$.

Выясним сначала, для каких размерностей $\boldsymbol{P}^n$ ориентируемо. С этой целью напомним, что $\boldsymbol{P}^n$ получается путем отождествления диаметрально-противоположных точек n-мерной сферы $\boldsymbol{S}^n$. Ориентируем какое-нибудь симметричное относительно центра симплициальное разбиение сферы, например октаэдральное (§ 14), когерентно. Так как замена друг другом диаметрально-противоположных точек сферы представляет произведение $(n+1)$ отражений, каждое из которых

меняет ориентацию сферы $\boldsymbol{S}^n$ остается неизменной или меняется в зависимости от того, является ли n нечетным или четным. При n нечетном два ориентированных n-мерных симплекса сферы $\boldsymbol{S}^n$ отображаются в ориентированный таким же образом n-мерный симплекс проективного пространства $\boldsymbol{P}^n$, и мы получаем когерентную ориентацию $\boldsymbol{P}^n$. При n четном, напротив, $\boldsymbol{P}^n$ не может быть ориентируемым, так как если бы существовала когерентная ориентация $\boldsymbol{P}^n$, то она получалась бы из некоторой когерентной ориентации $\boldsymbol{S}^n$, в то время как при переходе от $\boldsymbol{S}^n$ к $\boldsymbol{P}^n$ каждые два ориентированных n-мерных симплекса сферы $\boldsymbol{S}^n$ отображаются на два противоположно ориентированных n-мерных симплекса $\boldsymbol{P}^n$ (чтобы лучше представить себе, как обстоит дело, рассмотрите случай $n = 2$ и $n = 3$). *Таким образом, $\boldsymbol{P}^n$ ориентируемо при n нечетном и неориентируемо при n четном.*

Введем теперь в $\boldsymbol{P}^n$ проективные координаты $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ (как в § 14) и обозначим через $\boldsymbol{P}^k$ проективное подпространство, определяемое уравнениями

$$x_{k+2} = 0, \ldots, \quad x_{n+1} = 0. \qquad (\boldsymbol{P}^k)$$

Тогда среди проективных пространств последовательности $\boldsymbol{P}^n$, $\boldsymbol{P}^{n-1}$, $\ldots, \boldsymbol{P}^1$, $\boldsymbol{P}^0$ каждое следующее пространство содержится в предыдущем.

Для того чтобы найти k-мерную базу гомологий $(0 < k < n)$, мы будем исходить из особого k-мерного цикла U^k. Если U^k содержит точку $(0, 0, \ldots, 0, 1)$, то мы заменим U^k симплициальным приближением, не содержащим этой точки и взятым в таком симплициальном разбиении пространства $\boldsymbol{P}^n$, для которого эта точка является центром n-мерного симплекса. Удалим теперь из $\boldsymbol{P}^n$ внутренность маленького шара, описанного вокруг точки $(0, 0, \ldots, 0, 1)$ и не имеющего общих точек с U^k. Тогда $\boldsymbol{P}^n$ превратится в псевдомногообразие с границей. Деформируем это псевдомногообразие в особый комплекс, расположенный в $\boldsymbol{P}^{n-1}$, при помощи семейства отображений

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = x_2, \ldots, \quad x'_n = x_n, \quad x'_{n+1} = tx_{n+1},$$

где t пробегает значения от 1 до 0. При этом U^k переходит в гомологичный с U^k особый цикл $'U^k$. Если $k < n - 1$, то мы повторяем аналогичный процесс и «загоняем» $'U^k$ в $\boldsymbol{P}^{n-2}$. Таким образом мы получим в конце концов цикл V^k, гомологичный U^k и расположенный в $\boldsymbol{P}^k$. Если теперь k четное, то $\boldsymbol{P}^k$ неориентируемо и все k-мерные циклы пространства $\boldsymbol{P}^k$ гомологичны нулю на $\boldsymbol{P}^k$, т. е. при k четном k-мерная группа Бетти проективного пространства $\boldsymbol{P}^n$ состоит только из нулевого элемента. При k нечетном на $\boldsymbol{P}^k$ существует k-мерный цикл P^k, получающийся при когерентной ориентации пространства $\boldsymbol{P}^k$, а всякий другой k-мерный цикл V^k гомологичен на $\boldsymbol{P}^k$ циклу P^k, взятому с некоторым коэффициентом. Поэтому при k нечетном k-мерная

группа Бетти пространства $\boldsymbol{P}^n$ есть циклическая группа, а P^k образует базу гомологий. Легко убедиться, что она имеет в этом случае порядок 2. В самом деле, при k нечетном $\boldsymbol{P}^{k+1}$ есть неориентируемое псевдомногообразие, имеющее в силу § 24 в точности один k-мерный коэффициент кручения, равный двум. Поэтому $2P^k \sim 0$ в $\boldsymbol{P}^{k+1}$. Сам цикл P^k наверное не гомологичен нулю в $\boldsymbol{P}^{k+1}$. Покажем, что он также не гомологичен нулю в $\boldsymbol{P}^n$. В самом деле, если P^k есть граница алгебраического комплекса U^{k+1} в $\boldsymbol{P}^n$, то U^{k+1} можно способом, примененным ранее к U^k, «загнать» в подпространство $\boldsymbol{P}^{k+1}$, причем все точки цикла P^k останутся на месте. Но тогда P^k является границей особого комплекса V^k на $\boldsymbol{P}^{k+1}$, чего не может быть. Мы получаем следующий результат:

Группы Бетти нечетной размерности проективного пространства $\boldsymbol{P}^n$ представляют циклические группы, второго порядка; группы Бетти четной размерности состоят только из нулевого элемента. Исключения представляют только нульмерные группы Бетти для любых n и n-мерные для нечетных n; эта группы всегда являются свободными циклическими группами.

В качестве баз гомологий нечетных размерностей можно взять когерентно ориентированные проективные подпространства P^1, P^3, $P^5, \ldots$[18].

Глава V
Локальные свойства

Мы доказали в четвертой главе, что группы Бетти являются топологическими инвариантами. Это первые топологические инварианты полиэдра, с которыми мы познакомились. Однако с помощью групп Бетти мы получаем только весьма грубую классификацию полиэдров. Два полиэдра, имеющие одинаковые группы Бетти, могут не быть гомеоморфными, — это видно уже на простейшем примере отрезка (одномерного симплекса) и круга (двумерного симплекса). В самом деле, группы Бетти обоих этих полиэдров совпадают, — нульмерные группы представляют свободные циклические группы с одной образующей, а все остальные состоят только из нулевого элемента (стр. 90 и 94). Однако, как показано в § 1, отрезок и круг не могут быть топологически отображены один на другой.

Группы Бетти представляют инварианты «в целом» (im Grossen), которые могут быть вычислены, если известен весь полиэдр. Разница между отрезком и кругом вырисовывается, напротив, уже при рассмотрении сколь угодно малых окрестностей какой-нибудь точки окружности и концевых точек отрезка. Даже эти окрестности невозможно топологически отобразить друг на друга. В этой главе мы рассмотрим инварианты «в малом» (im Rleinen), которые позволят нам установить локальные свойства полиэдра. Эти инварианты могут быть определены, если известна только сколь угодно малая окрестность рассматриваемой точки. Важнейшими, инвариантами в малом являются «локальные группы Бетти» или «группы Бетти в точке». С помощью этих групп мы докажем топологическую инвариантность размерности (определенной до сих пор только посредством симплициального разбиения), границы, псевдомногообразия, ориентируемости и т. д[19].

Рассмотрения этой главы применимы как к конечным полиэдрам, так и к бесконечным.

§ 32. Локальные группы Бетти полиэдра

Пусть $\boldsymbol{K}^n$ есть связный полиэдр, заданный в определенном симплициальном разбиении, размерности $n > 0$, и P — какая-нибудь точка в $\boldsymbol{K}^n$.

Проведем в i-мерном симплексе симплициального разбиения, содержащем точку P, прямолинейный луч, выходящий из P. Пусть этот луч выходит из симплекса в точке Q. Совокупность всех отрезков (PQ), которые можно провести таким образом из P, заполняет в точности полиэдр $\overline{\Omega}$, состоящий из всех симплексов комплекса $\boldsymbol{K}^n$, содержащих

точку P. Полиэдр $\overline{\Omega}$ называется *симплициальной окрестностью* точки P в полиэдре $\boldsymbol{K}^n$. По условию (4) § 10 $\overline{\Omega}$ является и обычной окрестностью точки P в $\boldsymbol{K}^n$. Совокупность концов Q отрезков (PQ)заполняет некоторые симплексы комплекса $\boldsymbol{K}^n$, образующие так называемый *окрестностный комплекс* $\boldsymbol{A}$ точки P. $\boldsymbol{A}$ не является окрестностью точки P; напротив, $\boldsymbol{A}$ состоит из совокупности симплексов Ω, не содержащих P. Если P есть вершина симплициального разбиения, то Ω является симплициальной звездой с центром P, а $\boldsymbol{A}$ — краем этой звезды*. Если же P не является вершиной, то всегда можно найти другое симплициальное разбиение, в котором P уже будет вершиной. Для этого достаточно спроектировать окрестностный комплекс $\boldsymbol{A}$ из точки P.

Мы будем понимать теперь под (локальной) *k-мерной группой Бетти комплекса $\boldsymbol{K}^n$ в точке P* k-мерную группу Бетти окрестностного комплекса $\boldsymbol{A}$ точки P. Таким образом, группы Бетти $\boldsymbol{K}^n$ в точке P определены нами при помощи некоторого заданного симплициального разбиения полиэдра $\boldsymbol{K}^n$. Мы покажем, однако, что в действительности они не зависят от симплициального разбиения, т. е. представляют топологические инварианты полиэдра $\boldsymbol{K}^n$ [20].

Пример 1.

Пусть P — внутренняя точка n-мерного симплекса $\boldsymbol{E}^n$ комплекса $\boldsymbol{K}^n$ $(n > 1)$. Окрестностный комплекс $\boldsymbol{A}$ представляет границу симплекса $\boldsymbol{E}^n$, т. е. $(n-1)$-мерную сферу. Группы Бетти комплекса $\boldsymbol{K}^n$ в точке P размерностей от 1 до $(n-2)$ состоят только из нулевых элементов, а нульмерная и $(n-1)$-мерная группы суть свободные циклические группы (см. стр. 95).

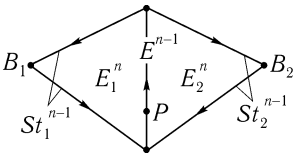


Рис. 53

Пример 2.

Пусть P есть внутренняя точка $(n-1)$-мерного симплекса $\boldsymbol{E}^{n-1}$ комплекса $\boldsymbol{K}^n$, инцидентного с k n-мерными симплексами $\boldsymbol{E}_1^n$, $\boldsymbol{E}_2^n$, …, $\boldsymbol{E}_k^n$ (рис. 53). Пусть $n > 1$, а $B_1, B_2, \ldots, B_k$ — вершины симплексов $\boldsymbol{E}_1^n$, $\boldsymbol{E}_2^n$, …, $\boldsymbol{E}_k^n$, противоположные их общей стороне $\boldsymbol{E}^{n-1}$. Тогда окрестностный комплекс $\boldsymbol{A}^{n-1}$ точки P состоит из k симплициальных звезд $\boldsymbol{St}_1^{n-1}$, $\boldsymbol{St}_2^{n-1}$, …, $\boldsymbol{St}_k^{n-1}$ с центрами $B_1, B_2, \ldots, B_k$, имеющих общим краем границу $\boldsymbol{S}^{n-2}$ симплекса $\boldsymbol{E}^{n-1}$. Вычислим теперь $(n-1)$-мерную группу Бетти в точке P. С этой целью ориентируем $(n-1)$-мерные симплексы звезды $\boldsymbol{St}_\mu^{n-1}$ когерентно, именно так, чтобы получающийся при этом $(n-1)$-мерный алгебраический комплекс St_μ^{n-1} вместе со снабженным фиксированной ориентацией симплексом E^{n-1}

*В дальнейшем мы под звездой будем понимать то комплекс Ω, то полиэдр $\overline{\Omega}$. Употреблением этих обозначений исключается возможность недоразумения.

образовал бы цикл*. Это всегда возможно, так как St_μ^{n-1} совместно с E^{n-1} является границей симплекса E_μ^n. Тогда

$$(St_\mu^{n-1})^{\cdot} = -\dot{E}^{n-1}. \tag{1}$$

$(n-1)$-мерные циклы

$$St_1^{n-1} - St_k^{n-1},\ St_2^{n-1} - St_k^{n-1},\ \ldots,\ St_{k-1}^{n-1} - St_k^{n-1} \tag{2}$$

(числом $k-1$) являются циклами, независимыми в смысле гомологий а $\boldsymbol{A}^{n-1}$. В самом деле, из соотношения

$$\sum_{\nu=1}^{k-1} a_\nu (St_\nu^{n-1} - St_k^{n-1}) \sim 0$$

следует

$$\sum_{\nu=1}^{k-1} a_\nu St_\nu^{n-1} - \left(\sum_{\nu=1}^{k-1} a_\nu\right)^{\cdot} St_k^{n-1} \sim 0.$$

Но в комплексе $\boldsymbol{A}^{n-1}$, по отношению к которому рассматривается последнее соотношение, не существует n-мерных симплексов. Поэтому знак гомологий в этом соотношении можно заменить знаком равенства (стр. 91). Так как никакие два алгебраических комплекса St_μ и St_ν не имеют для $\mu \neq \nu$ общего $(n-1)$-мерного симплекса, то отсюда сразу следует, что

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{k-1} = 0.$$

С другой стороны, каждый $(n-1)$-мерный цикл U^{n-1} на $\boldsymbol{A}^{n-1}$ представляет линейную комбинацию алгебраических комплексов St_μ^{n-1}. В самом деле, если какой-нибудь $(n-1)$-мерный симплекс комплекса St_μ^{n-1} входит в U^{n-1} с коэффициентом b_μ, то и все остальные $(n-1)$-мерные симплексы St_μ^{n-1} входят туда с тем же коэффициентом, так как иначе U^{n-1} не может быть циклом. Поэтому

$$U^{n-1} = b_1 St_1^{n-1} + b_2 St_2^{n-1} + \ldots + b_k St_k^{n-1}.$$

По формуле (1) $\dot{U}^{n-1} = 0$ лишь в том случае, если $\sum\limits_{m=1}^{k} b_\mu = 0$. Но тогда мы можем написать U^{n-1} в форме

$$U^{n-1} = \sum_{\nu=1}^{k-1} b_\nu (St_\nu^{n-1} - St_k^{n-1}).$$

*Напомним здесь, что переход от неориентированных симплексов к ориентированным мы отмечаем переходом от жирного шрифта к светлому.

Отсюда следует, что $(n-1)$-мерные циклы (2) представляют $(n-1)$-мерную базу гомологий комплекса $\boldsymbol{A}^{n-1}$. *Таким образом, при* $n > 1$ $(n-1)$*-мерная группа Бетти комплекса* $\boldsymbol{A}^{n-1}$ *есть свободная циклическая группа с* $k-1$ *образующей.*

При $n = 1$ P есть общая вершина k одномерных симплексов. Поэтому $\boldsymbol{A}^0$ состоит из k точек, и $(n-1)$-мерная группа Бетти комплекса $\boldsymbol{A}^0$ есть свободная циклическая группа с k образующими.

Для того чтобы доказать независимость групп Бетти в точке P от выбранного симплициального разбиения полиэдра $\boldsymbol{K}^n$, мы рассмотрим две симплициальные звезды Ω и Ω' комплекса $\boldsymbol{K}^n$, имеющих общий центр P. Мы не требуем существования симплициальных разбиений полиэдра $\boldsymbol{K}^n$, для которых $\overline{\Omega}$ и соответственно $\overline{\Omega}'$ являются симплициальными окрестностями точки P, а ставили условием лишь, чтобы $\overline{\Omega}$ и $\overline{\Omega}'$ были окрестностями P в $\overline{\boldsymbol{K}}^n$. Если бы мы могли доказать гомеоморфность границы $\overline{\boldsymbol{A}}$ звезды $\overline{\Omega}$ и границы $\overline{\boldsymbol{A}}'$ звезды $\overline{\Omega}'$, то это означало бы, что существует такое непрерывное отображение φ полиэдра $\overline{\boldsymbol{A}}$ в $\overline{\boldsymbol{A}}'$ и непрерывное отображение ψ полиэдра $\overline{\boldsymbol{A}}'$ в $\overline{\boldsymbol{A}}$, при которых отображения $\psi\varphi$ полиэдра $\overline{\boldsymbol{A}}$ на себя (сперва производится отображение φ, а потом ψ!) и $\varphi\psi$ полиэдра $\overline{\boldsymbol{A}}'$ на себя суть тождественные отображения. Однако доказать, что $\overline{\boldsymbol{A}}$ и $\overline{\boldsymbol{A}}'$ гомеоморфны, мы не в состоянии. Но мы можем доказать следующую теорему:

Теорема I. *Существует непрерывное отображение* φ *полиэдра* $\overline{\boldsymbol{A}}$ *в* $\overline{\boldsymbol{A}}'$ *и непрерывное отображение* ψ *полиэдра* $\overline{\boldsymbol{A}}'$ *в* $\overline{\boldsymbol{A}}$ *такие, что отображения* $\varphi\psi$ *полиэдра* $\overline{\boldsymbol{A}}$ *на себя и* $\varphi\psi$ *полиэдра* $\overline{\boldsymbol{A}}'$ *на себя можно деформировать в тождественное отображение. Доказательство дано ниже.*

Из этой теоремы вытекает следующая теорема:

Теорема II. $\overline{\boldsymbol{A}}$ *и* $\overline{\boldsymbol{A}}'$ *имеют одинаковые группы Бетти.*

Доказательство. Как показано на стр. 129, отображение φ полиэдра $\overline{\boldsymbol{A}}$ в $\overline{\boldsymbol{A}}'$ вызывает гомоморфное отображение Φ k-мерной группы Бетти B^k полиэдра $\overline{\boldsymbol{A}}$ в k-мерную группу Бетти $'\mathrm{B}^k$ полиэдра $\overline{\boldsymbol{A}}'$. Точно так же отображение ψ вызывает гомоморфное отображение Ψ группы $'\mathrm{B}^k$ в B^k. Но отображение $\psi\varphi$ полиэдра $\overline{\boldsymbol{A}}$ в себя можно деформировать в тождественное отображение, поэтому соответствующее гомоморфное отображение $\Psi\Phi$ группы Бетти B^k в себя есть тождественное (изоморфное) отображение (§ 31, теорема IV). По тем же причинам гомоморфное отображение $\Phi\Psi$ группы $'\mathrm{B}^k$ в себя также представляет тождественное отображение. Но это может быть лишь в том случае, когда гомоморфные отображения Φ и Ψ взаимно однозначны и когда Φ есть обратное отображение для Ψ. Поэтому B^k и $'\mathrm{B}^k$ изоморфны.

В частности, если $\overline{\boldsymbol{A}}$ и $\overline{\boldsymbol{A}}'$ суть окрестностные комплексы точки P, взятые в двух различных симплициальных разбиениях полиэдра $\boldsymbol{K}^n$, то из теоремы II получается следующая теорема.

Теорема III. *Группы Бетти в P не зависят от выбранного симплициального разбиения.*

В то же время оказывается, что для определения групп Бетти в $'P$, вовсе не нужно исходить из симплициального разбиения всего полиэдра $\boldsymbol{K}^n$. Достаточно знать только симплициальную звезду Ω с центром P, являющуюся окрестностью точки P. Группы Бетти в P представляют группы Бетти границы $\boldsymbol{A}$ звезды Ω; поэтому их можно вычислить, если нам известна сколь угодно малая окрестность точки P.

Перейдем теперь *к доказательству теоремы I.* Сделаем сначала некоторые предварительные замечания. $\overline{\Omega}$ состоит из совокупности прямолинейных отрезков (PQ), соединяющих точку P с точками Q полиэдра $\overline{\boldsymbol{A}}$. Возьмем определенную часть, скажем, $\frac{1}{k}$-ю, каждого такого отрезка. Тогда совокупность отрезков $(PR) = \frac{1}{k}(PQ)$ образует новую симплициальную звезду $\overline{\Omega}$ с границей $\overline{\boldsymbol{A}}_1$. $\overline{\Omega}_1$ получается, следовательно, из $\overline{\Omega}$ посредством «подобного уменьшения», поэтому $\overline{\Omega}_1$ гомеоморфна $\overline{\Omega}$. *Но во всякой окрестности $\boldsymbol{U}(P|\boldsymbol{K}^n)$ точки P содержится некоторое подобное уменьшение звезды $\overline{\Omega}$*, так как пересечение окрестности $\boldsymbol{U}(P|\overline{\boldsymbol{K}}^n)$ со звездой $\overline{\Omega}$ является окрестностью $\boldsymbol{U}(P|\Omega)$ (см. стр. 34) и в этой окрестности лежит подобное уменьшение звезды $\overline{\Omega}$. *С другой стороны, каждое подобное уменьшение звезды $\overline{\Omega}_1$ является окрестностью точки P в $\overline{\Omega}$, а потому, по теореме* VII § 7, *представляет также окрестность точки P в $\boldsymbol{K}^n$.* Совокупность отрезков (RQ) образует «зону», которую мы обозначим через $(\overline{\boldsymbol{A}}\overline{\boldsymbol{A}}_1)$ (рис. 54). Мы говорим, что эта зона «проектируется» на $\boldsymbol{A}$ (соответственно на $\boldsymbol{A}_1$), если каждый отрезок (RQ) отображается в свою граничную точку Q (соответственно R). Точно так же можно, естественно, определять подобное уменьшение, зону и проекцию зоны для звезды $\overline{\Omega}'$. Заметим при этом, что прямолинейный отрезок в $\overline{\Omega}'$, вообще говоря, не является прямолинейным отрезком в $\overline{\Omega}$.

Рассмотрим теперь шесть вложенных последовательно друг в друга симплициальных звезд

$$\overline{\Omega}_1,\ \overline{\Omega}'_1,\ \overline{\Omega}_2,\ \overline{\Omega}'_2,\ \overline{\Omega}_3,\ \overline{\Omega}'_3. \tag{3}$$

$\overline{\Omega}_1, \overline{\Omega}_2, \overline{\Omega}_3$ представляют подобные уменьшения звезды $\overline{\Omega}$, а $\overline{\Omega}'_1, \overline{\Omega}'_2, \overline{\Omega}'_3$ — подобные уменьшения $\overline{\Omega}'$, причем каждая звезда последовательности (3) целиком содержится внутри предыдущей. Эти звезды можно

построить поочередно, принимая за $\overline{\Omega}_1$ звезду $\overline{\Omega}$, за $\overline{\Omega}'_1$ — подобное уменьшение звезды $\overline{\Omega}_1$, лежащее целиком внутри $\overline{\Omega}_1$, за $\overline{\Omega}_2$ — подобное уменьшение звезды $\overline{\Omega}_1$, лежащее внутри $\overline{\Omega}'_1$, и т. д. Обозначим границы звезд (3) буквами

$$\overline{A}_1,\ \overline{A}'_1,\ \overline{A}_2,\ \overline{A}'_2,\ \overline{A}_3,\ \overline{A}'_3. \tag{4}$$

Эти границы выделяют четыре зоны

$$(\overline{A}_1\overline{A}_2),\ (\overline{A}'_1\overline{A}'_2),\ (\overline{A}_2\overline{A}_3),\ (\overline{A}'_2\overline{A}'_3),$$

содержащих соответственно четыре границы $\overline{A}'_1$, $\overline{A}_2$, $\overline{A}'_2$, $\overline{A}_3$. В самом деле, $\overline{A}'_1$, например, принадлежит зоне $(\overline{A}_1\overline{A}_2)$, т. е. множеству $\overline{\Omega}_1 - \overline{\Omega}_2$, так как по предположению $\overline{A}'_1$ находится внутри звезды $\overline{\Omega}'_1$, а $\overline{\Omega}_2$ лежит внутри $\overline{\Omega}'_1$ и поэтому не имеет общих точек с $\overline{A}'_1$.

$\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$ гомеоморфны с $\overline{A}$, а $\overline{A}'_1$, $\overline{A}'_2$, $\overline{A}'_3$ гомеоморфны с $\overline{A}'$; поэтому мы можем рассматривать отображения φ и ψ, о которых идет речь в доказываемой теореме, как соответственно отображения $\overline{A}_2$ в $\overline{A}'_2$ и $\overline{A}'_2$ в $\overline{A}_2$. Определим теперь φ и ψ следующим образом: спроектируем зону $(\overline{A}'_1\overline{A}'_2)$ на $\overline{A}'_2$. Тогда $\overline{A}_2$ как множество, принадлежащее этой зоне, подвергается непрерывному отображению φ в $\overline{A}'_2$. Проектируя, напротив, зону $(\overline{A}_2\overline{A}_3)$ на $\overline{A}'_2$, мы получим непрерывное отображение ψ множества $\overline{A}'_2$ в $\overline{A}_2$ (рис. 55).

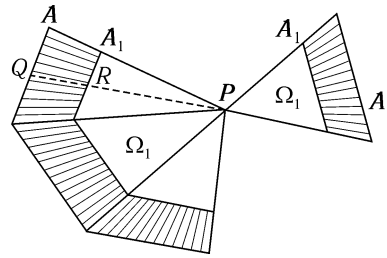


Рис. 54

Если теперь g_0 означает тождественное отображение множества $\overline{A}_2$ на себя, а g_1 — отображение $\psi\varphi$, то утверждение, что g_0 деформируемо в g_1, эквивалентно следующему утверждению: топологическое произведение $\overline{A}_2 \times \mathbf{t}$ множества $\overline{A}_2$ на единичный отрезок ($0 \leqslant t \leqslant 1$) можно отобразить непрерывно в $\overline{A}_2$ посредством отображения f так, что для каждой точки L множества $\overline{A}_2$ $f(L \times 0) = g_0(L) = L$ и $f(L \times 1) = g_1(L)$. Для того чтобы построить f, разобьем $\overline{A}_2 \times \mathbf{t}$ на две части $\overline{A}_2 \times \boldsymbol{r}$ и $\overline{A}_2 \times \mathbf{s}$, где $\boldsymbol{r}$ означает полуотрезок $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$, а $\mathbf{s}$ — полуотрезок $\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1$. Обе эти части мы отображаем следующим

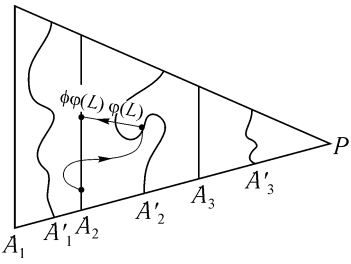


Рис. 55

образом: для каждой точки L множества $\overline{\boldsymbol{A}}_2$, мы отображаем отрезок $L \times \boldsymbol{r}$ линейно на прямолинейный отрезок, соединяющий $L = g_0(L)$ с $\varphi(L)$, т. е. на проектирующий луч, описываемый точкой L при проектировании зоны $(\overline{\boldsymbol{A}}_2\overline{\boldsymbol{A}}_3)$ на $\overline{\boldsymbol{A}}'_2$. Полуотрезок же $L \times \mathbf{s}$ мы отображаем линейно на прямолинейный отрезок, соединяющий $\varphi(L)$ с $\psi\varphi(L) = g_1(L)$, т. е. на проектирующий луч, описываемый точкой $\varphi(L)$ при проектировании зоны $(\overline{\boldsymbol{A}}'_2\overline{\boldsymbol{A}}'_3)$ на $\overline{\boldsymbol{A}}_2$. Отображение обоих полуотрезков дает отображение $\overline{f}$ всего отрезка $\overline{\boldsymbol{A}}_2 \times \mathbf{t}$, являющееся непрерывным вследствие леммы стр. 77. Но образ множества $\overline{\boldsymbol{A}}_2 \times \boldsymbol{r}$ принадлежит зоне $\overline{\boldsymbol{A}}'_1\overline{\boldsymbol{A}}'_2$, образ $\overline{\boldsymbol{A}}_2 \times \mathbf{s}$ — зоне $(\overline{\boldsymbol{A}}_2\overline{\boldsymbol{A}}_3)$. Поэтому образ $\overline{f}(\overline{\boldsymbol{A}}_2 \times \mathbf{t})$ принадлежит во всяком случае зоне $(\overline{\boldsymbol{A}}_1\overline{\boldsymbol{A}}_3)$. Если теперь спроектировать одновременно обе зоны $(\overline{\boldsymbol{A}}_1\overline{\boldsymbol{A}}_2)$ и $(\overline{\boldsymbol{A}}_2\overline{\boldsymbol{A}}_3)$ на $\overline{\boldsymbol{A}}_2$, то тем самым множество $\overline{f}(\overline{\boldsymbol{A}}_2 \times \mathbf{t})$ также «загоняется» на $\overline{\boldsymbol{A}}_2$. Точки $\overline{f}(L \times 0) = g_0(L) = L$ и $\overline{f}(L \times 1) = \psi\varphi(L) = g_1(L)$ при таком проектировании остаются на месте, так как они уже лежат на $\overline{\boldsymbol{A}}_2$. Поэтому; производя сначала отображение $\overline{f}$, а затем указанное проектирование, мы получим искомое непрерывное (по теореме IV § 6) отображение $f(\overline{\boldsymbol{A}}_2 \times \mathbf{t})$. Этим доказана деформируемость отображения $\psi\varphi$ в тождественное отображение. Аналогичным способом доказывается и деформируемость $\varphi\psi$ в тождественное отображение.

Топологическую инвариантность локальных групп Бетти можно выразить иначе при помощи следующей теоремы:

Теорема IV. *Если два полиэдра $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{K}'$ гомеоморфны в окрестностях своих точек P и P' соответственно, т. е. существуют окрестности ω и ω' точек P и P', которые можно топологически отобразить друг на друга так, что при этом точки P и P' соответствуют одна другой, то группы Бетти полиэдра $\boldsymbol{K}$ в P совпадают с группами Бетти полиэдра $\boldsymbol{K}'$ в P'.*

Доказательство. Возьмем на ω симплициальную звезду $\overline{\Omega}$ с центром P, являющуюся окрестностью точки P. При топологическом отображении ω на ω' $\overline{\Omega}$ переходит в симплциальную звезду $\overline{\Omega}'$ с центром P'. Так как при топологических отображениях окрестности переходят в окрестности, то $\overline{\Omega}'$ есть окрестность P'. Но тогда группы Бетти в P и в P' являются группами Бетти гомеоморфных краев звезд $\overline{\Omega}$ и $\overline{\Omega}'$ соответственно, т. е. они изоморфны.

Упражнения. 1. Каковы локальные группы Бетти n-мерного евклидова пространства?

2. Докажите, что область евклидова пространства невозможно топологически отобразить на область евклидова пространства высшего числа измерений. Под областью понимают произвольное открытое подмножество пространства.

3. Если $\boldsymbol{E}^k$ $(k < n)$ есть топологический k-мерный симплекс в $\boldsymbol{R}^n$, то в каждой окрестности произвольной точки P симплекса $\boldsymbol{E}^k$ существуют точки, не принадлежащие $\boldsymbol{E}^k$.

§ 33. Инвариантность размерности

Мы определили целый ряд понятий, например, размерность, псевдомногообразие, ориентируемость, при помощи симплициального разбиения полиэдра. Таким образом эти понятия определены пока не свойствами полиэдра, а свойствами симплициального разбиения. Можно было бы предположить, что из двух возможных симплициальных разбиений одного и того же полиэдра одно является трехмерным, а другое четырехмерным, одно ориентируемо, а другое неориентируемо, одно имеет границу, а другое не имеет. Однако теперь в нашем распоряжении имеется средство показать, что ничего подобного случиться не может, т. е. что *все* возможные симплициальные разбиения полиэдра *одновременно* n-мерны, *одновременно* ориентируемы или неориентируемы, *одновременно* имеют или не имеют границу. Вместе с независимостью этих понятий от симплициального разбиения устанавливается их топологическая инвариантность, т. е. инвариантность при топологических отображениях. В самом деле, пусть, например, два полиэдра $\boldsymbol{K}_1$ и $\boldsymbol{K}_2$ гомеоморфны и $\boldsymbol{K}_1$ имеет размерность n. Тогда $\boldsymbol{K}_2$ также n-мерен, так как n-мерное симплициальное разбиение полиэдра $\boldsymbol{K}_1$ переходит при топологическом отображении также в n-мерное разбиение полиэдра $\boldsymbol{K}_2$.

Мы сейчас последовательно докажем топологическую инвариантность понятий размерность, однородный комплекс, граница, замкнутое псевдомногообразие, ориентируемость, псевдомногообразие с границей. Доказательство будет заключаться в том, что каждое из рассматриваемых понятий мы охарактеризуем независимо от какого-либо симплициального разбиения. Решающую роль при этом будут играть локальные группы Бетти, топологическая инвариантность которых уже установлена.

Начнем с инвариантности размерности. Нульмерные полиэдры мы уже раньше определили инвариантно, без помощи симплициальных разбиений, как полиэдры, состоящие только из изолированных точек. В n-мерном симплициальном комлексе $\boldsymbol{K}^n$ $(n > 0)$ существует по крайней мере один n-мерный симплекс $\boldsymbol{E}^n$, но не существует симплексов большей размерности, $(n-1)$-мерная группа Бетти в центре симплекса $\boldsymbol{E}^n$, как показано в примере 1 § 32, представляет группу, состоящую не только из нулевого элемента, — именно, она представляет свободную абелеву группу с одной, а для $n = 1$ с двумя образующими. Группы же Бетти размерности большей, чем $(n-1)$, в каждой точке комплекса $\boldsymbol{K}^n$ состоят только из нулевого элемента, так как окрестностный комплекс

содержит максимум $(n-1)$-мерные симплексы. Таким образом мы получаем следующую инвариантную характеристику размерности:

Теорема I. *Размерность n полиэдра $\boldsymbol{K}$, состоящего не только из изолированных точек, есть наименьшее число n, обладающее тем свойством, что в каждой точке полиэдра $\boldsymbol{K}$ группы Бетти размерностей n, $n+1, \ldots$ содержат лишь нулевой элемент.*

В частности, два *многообразия* различных размерностей не могут быть гомеоморфны. Это следует, впрочем, непосредственно из теоремы IV § 32; из этой теоремы получается следующая теорема:

Теорема II. *Локальные группы Бетти в каждой точке многообразия $\boldsymbol{K}^n$ совпадают с группами Бетти $(n-1)$-мерной сферы.*

В самом деле, каждая точка P многообразия$\boldsymbol{K}^n$ имеет в качестве окрестности симплициальную звезду, граница которой гомеоморфна $(n-1)$-мерной сфере.

Топологическая инвариантность размерности вовсе не является таким наглядно очевидным фактом, как это может показаться. Об этом говорит уже то, что размерность инвариантна только по отношению к топологическим отображениям; по отношению к взаимно однозначным, но не непрерывным, или по отношению к непрерывным, но не взаимно однозначным отображениям, размерность уже не является инвариантной. Например, отрезок можно отобразить взаимно однозначно на треугольник, так как оба множества имеют одинаковую мощность. Точно так же отрезок можно отобразить на треугольник непрерывно, — такое отображение осуществляет кривая Пеано, проходящая через каждую точку треугольника, но имеющая кратные точки[21].

§ 34. Инвариантность однородности комплекса

Пусть $\overline{\boldsymbol{K}}^n$ — произвольный, но непременно однородный полиэдр, заданный в определенном симплициальном разбиении $\boldsymbol{K}^n$ и $\boldsymbol{C}^i$ — совокупность всех i-мерных симплексов $\boldsymbol{K}^n$, не являющихся сторонами $(i+1)$-мерных симплексов. $\boldsymbol{C}^i$ может быть пустым множеством. $\boldsymbol{C}^i$ можно охарактеризовать независимо от симплициального разбиения следующим образом: $\boldsymbol{C}^0$ состоит только из изолированных точек полиэдра $\boldsymbol{K}^n$; если же $i>0$, то $\boldsymbol{C}^i$ совпадает с замыканием $'\boldsymbol{C}^i$ точек P полиэдра $\boldsymbol{K}^n$, обладающих следующими двумя свойствами:

1. $(i-1)$-мерная группа Бетти в P при $i=1$ есть свободная абелева группа с двумя образующими, а при $i>1$ — свободная циклическая группа.

2. Существует окрестность точки P, все точки которой также обладают свойством 1.

Доказательство. Прежде всего очевидно, что $\boldsymbol{C}^i$ содержится в $'\boldsymbol{C}^i$, так как все внутренние точки i-мерных симплексов множества $\boldsymbol{C}^i$ обладают свойствами 1 и 2 и поэтому принадлежат к $'\boldsymbol{C}^i$. Граничные же точки i-мерных симплексов $\boldsymbol{C}^i$ принадлежат $'\boldsymbol{C}^i$ ввиду того, что $'\boldsymbol{C}^i$ есть замкнутое множество. Пусть теперь, наоборот, P есть точка, обладающая свойствами 1 и 2, а $\boldsymbol{E}^j$ — симплекс наивысшей размерности, на котором эта точка лежит. По свойству 1 j не может быть меньше, чем i. Если $j > i$, то в каждой окрестности точки P существуют внутренние точки симплекса $\boldsymbol{E}^j$, в которых $(i-1)$-мерные группы Бетти являются при $i = 1$ свободными циклическими группами, а при $i > 1$ состоят только из нулевого элемента, а это противоречит свойству 2. Таким образом симплекс наибольшей размерности, на котором P лежит, есть i-мерный симплекс, вследствие чего он принадлежит $\boldsymbol{C}^i$. Так как $\boldsymbol{C}^i$ замкнуто, то замыкание всех точек P, т. е. $'\boldsymbol{C}^i$, также принадлежит $\boldsymbol{C}^i$. Таким образом $'\boldsymbol{C}^i$ содержится в $\boldsymbol{C}^i$, а следовательно, $'\boldsymbol{C}^i = \boldsymbol{C}^i$.

Если поэтому $\boldsymbol{K}_1^n$ и $\boldsymbol{K}_2^n$ суть два различных симплициальных разбиения одного и того же полиэдра $\boldsymbol{K}^n$, а $\boldsymbol{C}_1^i$ и $\boldsymbol{C}_2^i$ — соответственно подкомплексы всех i-мерных симплексов $\boldsymbol{K}_1^n$ и $\boldsymbol{K}_2^n$, не являющихся сторонами $(i+1)$-мерных симплексов, то $\boldsymbol{C}_1^i$ и $\boldsymbol{C}_2^i$ представляют одно и то же множество точек $'\boldsymbol{C}^i$

Однородный n-мерный полиэдр есть такой полиэдр, для которого подмножества $'\boldsymbol{C}^0, '\boldsymbol{C}^1, \ldots, '\boldsymbol{C}^{n-1}$ суть пустые множества; тем самым однородный полиэдр определен инвариантно.

§ 35. Инвариантность границы

Пусть $\boldsymbol{K}^n$ $(n > 1)$ — однородный полиэдр, заданный в определенном симплициальном разбиении, а $\boldsymbol{L}_\nu^{n-1}$ $(\nu = 1, 3, 4, 5, \ldots)$ — совокупность $(n-1)$-мерных симплексов из $\boldsymbol{K}^n$ инцидентных в точности с ν n-мерными.

Мы хотим охарактеризовать $\boldsymbol{L}_\nu^{n-1}$ топологически инвариантно. Рассмотрим внутреннюю точку $(n-1)$-мерного симплекса множества $\boldsymbol{L}_\nu^{n-1}$. Как показано в примере 2 § 32, $(n-1)$-мерная группа Бетти в такой точке есть свободная абелева группа с $(\nu-1)$ образующей. Поэтому, если $\boldsymbol{L}'_\nu$ означает замыкание всех точек P, в которых $(n-1)$-мерная группа Бетти есть свободная абелева группа с $(\nu-1)$ образующей, то $\boldsymbol{L}_\nu^{n-1}$ входит в $\boldsymbol{L}'_\nu$. $\boldsymbol{L}_\nu^{n-1}$ и $\boldsymbol{L}'_\nu$, вообще говоря, не совпадают*. Мы можем показать, однако, что $\boldsymbol{L}_\nu^{n-1}$ определяется топологически инвариантно множеством $\boldsymbol{L}'_\nu$. Прежде всего $\boldsymbol{L}'_\nu$ *является подкомплексом симплициального разбиения* $\boldsymbol{K}^n$ (*либо пустым множеством*). В самом деле, если $(n-1)$-мерная группа Бетти в точке P есть свободная

*Что $\boldsymbol{L}'_\nu$, вообще говоря, больше, чем $\boldsymbol{L}_\nu^{n-1}$, показывает следующий пример: пусть $\boldsymbol{K}^n$ представляет поверхность двух тетраэдров, имеющих общую вершину. Тогда $\boldsymbol{L}'_3$ состоит из общей вершины обоих тетраэдров, а $\boldsymbol{L}_3^1$ есть пустое множество.

абелева группа с $(\nu-1)$ образующей, то то же имеет место во всех внутренних точках симплекса $\boldsymbol{E}$ наименьшей размерности, на котором лежит P, так как все такие точки имеют одинаковые окрестностные комплексы и, следовательно, одинаковые группы Бетти. Поэтому $\boldsymbol{L}'_\nu$ содержит все внутренние точки $\boldsymbol{E}$, а вследствие замкнутости, и все граничные точки. Таким образом одновременно с P $\boldsymbol{L}'_\nu$ содержит симплекс наименьшего числа измерений, на котором P лежит.

Так как во всякой внутренней точке n-мерного симплекса $\boldsymbol{K}^n$ $(n-1)$-мерная группа Бетти есть свободная абелева группа с одной образующей и так как $\nu-1\neq 1$ (ввиду того что значение $\nu=2$ было нами исключено), то *размерность комплекса* $\boldsymbol{L}'_\nu$ *самое большее равна* $n-1$.

Если в $\boldsymbol{L}'_\nu$ существует $(n-1)$-мерный симплекс $\boldsymbol{E}^{n-1}$, то с этим симплексом инцидентны в точности ν n-мерных симплексов $\boldsymbol{K}^n$, так как иначе $(n-1)$-мерная группа Бетти во внутренней точке симплекса $\boldsymbol{E}^{n-1}$ не может быть свободной абелевой группой с $(\nu-1)$ образующими (пример 2 § 32). Поэтому $\boldsymbol{E}^{n-1}$ входит в $\boldsymbol{L}^{n-1}_\nu$. Таким образом $\boldsymbol{L}^{n-1}_\nu$ представляет совокупность всех $(n-1)$-мерных симплексов комплекса $\boldsymbol{L}'_\nu$. Из § 34 следует, что комплекс (полиэдр, множество) $\boldsymbol{L}'_\nu$ определяет подкомплекс $\boldsymbol{L}^{n-1}_\nu$ топологически инвариантно. Но $\boldsymbol{L}'_\nu$ само определяется топологически инвариантно заданным полиэдром $\boldsymbol{K}^n$. Поэтому и $\boldsymbol{L}^{n-1}_\nu$ связано с $\boldsymbol{K}^n$ топологически инвариантно. При $n=1$ $\boldsymbol{L}^{n-1}_\nu$ состоит из совокупности точек полиэдра $\boldsymbol{K}^1$, в которых нульмерная группа Бетти есть свободная абелева группа с ν образующими.

В § 12 мы определили границу однородного n-мерного комплекса (полиэдра), как совокупность $(n-1)$-мерных симплексов, инцидентных с нечетным числом n-мерных. Теперь граница однородного комплекса может быть определена топологически инвариантно как сумма подкомплексов $\boldsymbol{L}^{n-1}_1$, $\boldsymbol{L}^{n-1}_3$, $\boldsymbol{L}^{n-1}_5,\ldots$ Вместе с тем установлена топологическая инвариантность границы симплекса n-мерного элемента и выпуклой области.

Упражнение. Докажите, что плоское кольцо и лист Мебиуса негомеоморфны.

§ 36. Инвариантность псевдомногообразия и ориентируемости

Мы уже знаем, что свойство (Пм_1) *замкнутого псевдомногообразия* быть однородным конечным комплексом есть свойство топологически инвариантное (стр. 67 и § 35). Свойство (Пм_2) становится инвариантным, если сформулировать его следующим образом: все инвариантные подкомплексы $\boldsymbol{L}^{n-1}_\nu$, состоящие из $(n-1)$-мерных симплексов, инцидентных в точности с $\nu\neq 2$ n-мерными симплексами, представляют пустые множества. Относительно условия связности (Пм_3) мы уже установили на стр. 118, что оно эквивалентно с равенством $q^n=1$,

где q^n есть n-мерное число Бетти по модулю 2, инвариантность которого доказана на стр. 148.

Ориентируемость замкнутого псевдомногообразия выражается в том, что его n-мерное число Бетти равно 1 (стр. 118). Инвариантность этого также доказана на стр. 148.

Если ориентируемое замкнутое псевдомногообразие $\boldsymbol{K}^n$ разбито на симплексы двумя различными способами и когерентно ориентировано, то получающиеся при этом два ориентированных разбиения можно рассматривать, как два особых n-мерных цикла B_1^n и B_2^n.

n-мерная группа Бетти полиэдра $\boldsymbol{K}^n$ есть свободная циклическая группа, образующей которой является как класс гомологий, содержащий B_1^n, так и класс, содержащий B_2^n. Поэтому $B_1^n \sim \pm B_2^n$. Если в этом соотношении стоит знак $+$, то мы говорим, что оба симплициальных разбиения *ориентированы одинаково*.

Ориентацию полиэдра $\boldsymbol{K}^n$ можно определить, не пользуясь никаким симплициальным разбиением. Назовем *ориентирующим* n-мерным циклом на $\boldsymbol{K}^n$ произвольный особый n-мерный цикл B_1^n на $\boldsymbol{K}^n$, обладающий тем свойством, что каждый n-мерный цикл гомологичен циклу B_1^n, взятому с некоторым коэффициентом. Если B_2^n — другой ориентирующий цикл, то B_1^n и B_2^n определяют одинаковые или противоположные ориентации $\boldsymbol{K}^n$, смотря по тому, имеет ли место соотношение $B_1^n \sim B_2^n$, или $B_1^n \sim -B_2^n$.

Пусть ориентируемое и ориентированное циклом B_n псевдомногообразие $\boldsymbol{K}^n$ топологически отображено на псевдомногообразие $\mathbf{K}^n$, ориентированное посредством цикла B^n ($\boldsymbol{K}^n$ может совпадать с $\mathbf{K}^n$). Тогда B^n переходит в ориентирующий цикл $'B^n$ многообразия $\mathbf{K}^n$, т. е. $'B^n \sim \pm \mathrm{B}^n$. В зависимости от того, стоит ли здесь знак $+$ или $-$, мы говорим об *отображении с сохранением или с обращением ориентации*. Так, например, рассмотренное на стр. 154 «отображение» n-мерной сферы обращает ориентацию.

Вводя понятие *удвоения*, мы можем свести исследование *псевдомногообразий* с *границей* к исследованию замкнутых псевдомногообразий. Удвоение определяется для однородного комплекса $\boldsymbol{K}^n$, имеющего границу, следующим образом: берется гомеоморфный $\boldsymbol{K}^n$ экземпляр $'\boldsymbol{K}^n$, и точки границы $\boldsymbol{K}^n$ отождествляются с соответствующими в силу гомеоморфности точками границы $'\boldsymbol{K}^n$. Так как, например, удвоение круга получается при склеивании двух кругов своими границами. Это удвоение представляет двумерную сферу.

Мы можем теперь охарактеризовать псевдомногообразие с границей топологически инвариантно следующим образом: *псевдомногообразие с границей есть однородный комплекс с границей, удвоение которого представляет замкнутое псевдомногообразие. Псевдомногообразие с границей ориентируемо в том и только в том случае, когда ориентируемо его удвоение.* Доказательство этого предложения (чисто комбинаторное) мы предоставляем читателю.

Глава VI
Топология поверхностей

В случае образов двух измерений основная проблема топологии, проблема гомеоморфизма, решается полностью. Однако решение осуществляется методами, которые не могут быть обобщены на большее число измерений. Поэтому мы будем излагать топологию поверхностей в значительной степени независимо от полученных нами до сих пор результатов, годных для любого числа измерений. Мы будем исходить не из симплициального комплекса, а из многоугольников, отождествление сторон которых дает замкнутую поверхность.

§ 37. Замкнутые поверхности

Топологическим *многоугольником* называется круг евклидовой плоскости, граничная окружность которого разбита $r(\geqslant 2)$ точками — вершинами на r отрезков — сторон многоугольника. Каждый топологический образ такого круга с перенесенной на него сеткой вершин и сторон также есть топологический многоугольник.

При $r \geqslant 3$ каждый многоугольник можно представить в виде выпуклого куска евклидовой плоскости, ограниченного прямыми линиями.

Пусть теперь на плоскости задано $\alpha^2(\geqslant 1)$ многоугольников, не имеющих общих точек. Пусть некоторые стороны этих многоугольников отображены топологически друг на друга, причем так, что граничные точки каждой из этих сторон непременно переходят в граничные точки другой стороны (см. пример 1 § 6). Множество $\overline{\boldsymbol{M}}$ многоугольников, стороны которых отображены таким образом друг на друга, называется *системой многоугольников*.

Мы будем рассматривать только такие системы многоугольников, у которых общее число сторон четное и *каждая* сторона связана топологическим отображением в *точности с одной* другой стороной.

Точки системы многоугольников $\overline{M}$, отображающиеся друг на друга, мы считаем эквивалентными в том же смысле, в каком мы раньше определили эквивалентность точек окрестностного пространства (§ 8). Таким образом, в $\overline{\boldsymbol{M}}$ различаются следующие классы эквивалентных точек: внутренние точки многоугольников эквивалентны только сами себе; каждая внутренняя точка стороны многоугольника имеет, кроме себя самой, еще в точности одну эквивалентную точку; наконец, вершина может иметь любое конечное число эквивелентных точек. Стороны

многоугольников могут быть поставлены попарно в соответствие друг другу произвольным образом, лишь бы выполнялось одно условие: многоугольники не должны распадаться на два класса так, чтобы стороны каждого класса были поставлены в соответствие сторонам только этого же класса (*условие связности*).

Множество M, получающееся из $\overline{M}$ отождествлением эквивалентных точек и являющееся поэтому, как и $\overline{M}$, окрестностным пространством, называется *замкнутой поверхностью* или *замкнутым двумерным многообразием*. Слово «замкнутое» означает здесь, во-первых, что поверхность составлена из *конечного числа* многоугольников, и, во-вторых, что поверхность *не имеет свободных ребер*, т. е. не имеет «границы».

Соответствие сторон многоугольников определяет, какие вершины принадлежат к одному классу эквивалентных вершин и дают одну точку поверхности. Если в системе многоугольников существует α^0 различных классов эквивалентных вершин многоугольников, то все вершины отображаются в α^0 различных точек поверхности. Мы будем называть эти α^0 точек *вершинами поверхности*. Вершины поверхности получаются из вершин многоугольников при помощи отождествления. Точно так же образы сторон многоугольников называются *ребрами*, а образы многоугольников — *элементами поверхности*. Число их соответственно равно α^1 и α^2. Ребра и элементы поверхности представляют непрерывные, но, вообще говоря, не топологические, образы сторон многоугольников и самих многоугольников. Именно, может случиться, что при отождествлении сторон обе граничные точки какой-нибудь стороны окажутся эквивалентными, т. е. отобразятся в одну вершину. Тогда соответствующее ребро поверхности касается самого себя и представляет топологический круг. Точно так же элемент поверхности может касаться самого себя. Касания эти могут происходить вдоль одного или нескольких ребер или даже только в вершинах. Касания элемента поверхности могут получиться, если, например, поверхность строится только из одного многоугольника. В качестве примера можно указать систему многоугольников, состоящую из одного четырехугольника, дающего тор (§ 1).

Когда мы в дальнейшем будем иметь дело с поверхностью, точки которой определенным образом разбиты на элементы, ребра и вершины, то мы будем говорить о *подразделенной поверхности* или о поверхности, разбитой на многоугольники. Если, напротив, мы не думаем о таком разбиении, а рассматриваем поверхность как окрестностное пространство, то мы говорим просто о поверхности. Понятия подразделенной поверхности и поверхности просто находятся, очевидно, в такой же связи друг с другом, как понятия симплициального комплекса и полиэдра (§ 10). Так, например, куб и додекаэдр представляют различные подразделенные поверхности, гомеоморфные одной и той же поверхности — сфере.

Таким образом мы сопоставим три понятия: систему многоугольников $\overline{M}$, состоящую из отдельных не имеющих общих точек многоугольников, у которых некоторые точки определены как эквивалентные; подразделенную поверхность M, получающуюся из $\overline{M}$ отождествлением эквивалентных точек, но для которой еще существенно разбиение точек поверхности на отдельные элементы поверхности, ребра и вершины; наконец, определенную системой многоугольников замкнутую поверхность, которую мы рассматриваем независимо от какого-либо разбиения на элементы.

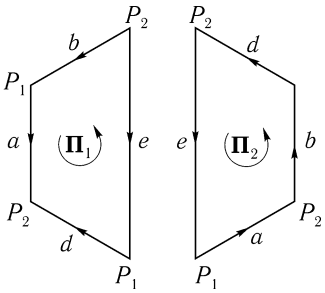


Рис. 56

Приведем пример подразделенной поверхности, которую в противоположность кубу или додекаэдру нельзя поместить в трехмерное евклидово пространство без самопересечения. Пусть система многоугольников состоит из двух четырехугольников Π_1 и Π_2, эквивалентные стороны которых обозначены на рис. 56 одинаковыми буквами. Точно так же обозначены одинаковыми буквами вершины многоугольников, сливающиеся после отождествления эквивалентных сторон в одну вершину поверхности. Соответствие между эквивалентными сторонами многоугольников указано на рис. 56 стрелками: соответствующие стороны должны отождествляться так, чтобы направления стрелок совпадали. В этом примере $\alpha^0 = 2$, $\alpha^1 = 4$, $\alpha^2 = 2$. В дальнейшем мы установим, что поверхность, определяемая такой системой многоугольников, представляет бутылку Клейна (стр. 23 и 183).

Нас интересует в дальнейшем не система многоугольников сама по себе, а поверхность, ею определяемая. Но тогда, естественно, возникает вопрос, *в каком случае две системы многоугольников определяют одну и ту же поверхность*? Другими словами, в каком случае подразделенные поверхности, получающиеся из этих систем отождествлением эквивалентных точек, представляют различные подразделения (разбиения на многоугольники) одной и той же поверхности? Два системы многоугольников, наверное, приводят к одной и той же поверхности, если их можно топологически отобразить друг на друга так, что эквивалентные точки одной системы переходят в эквивалентные точки другой. Такие системы многоугольников мы будем считать равными (одинаковыми). Но отсюда следует, что для поверхности, получающейся из системы многоугольников, несущественно, как именно сторона a' топологически отображается на соответствующую сторону a''. Важно лишь, как граничные точки A' и B' стороны a' отображаются на граничные точки A'' и B'' стороны a''. Таким образом, *существуют толь-*

ко два существенно различных отображения двух соответствующих сторон одной на другую. Одно из этих отображений переводит A' в A'', а другое A' в B''.

Доказательство. Пусть оба топологических отображения T и T^*, отображающих a' на a'', переводят граничную точку A' в A'', а B' в B''. Тогда непрерывное отображение S стороны a' на себя, получающееся последовательным выполнением отображений T и T^{*-1}, есть топологическое отображение, оставляющее граничные точки A' и B' стороны a' неподвижными.

Допустим теперь, что a' представляет сторону многоугольника П. Существует топологическое отображение многоугольника П на себя, при котором a' отображается на себя посредством S, а точки всех остальных сторон П остаются неподвижными (упражнение 2 § 6). Заменим многоугольник П образом его при этом отображении (этот образ снова обозначим через П). Мы получим ту же систему многоугольников, но в этой системе эквивалентные точки сторон a' и a'' определяются уже отображением T^*. Таким образом T, действительно, можно заменить произвольным другим топологическим отображением T^*, лишь бы T^* отображало граничные точки стороны так же, как T; при этом после отождествления эквивалентных точек получается всегда одна и та же поверхность.

Поэтому, если все многоугольники системы представляют, например, прямолинейные многоугольники евклидовой плоскости, то мы можем считать, что соответствующие стороны отображаются друг на друга *линейно.*

Мы *ориентируем* теперь стороны многоугольников, т. е. указываем, какую из двух граничных точек каждой стороны мы будем считать начальной и какую конечной. При этом ориентации соответствующих друг другу сторон должны совпадать, так что при отображении этих сторон начальная точка переходит в начальную же, а конечная — в конечную. Кроме того, мы ориентируем сами многоугольники. Ориентация многоугольника заключается в том, что все стороны его ориентируются когерентно, т. е. каждая вершина многоугольника для одной из примыкающих к ней сторон является начальной точкой, а для другой — конечной. Ориентация, получаемая стороной многоугольника при когерентной ориентации его границы, называется ориентацией, индуцированной ориентацией многоугольника. Многоугольник, так же как и сторона многоугольника, может быть ориентирован двумя различными способами. На рисунках мы будем указывать ориентацию стороны посредством прямой стрелки, помещаемой на самой стороне, а ориентацию многоугольника — посредством круговой стрелки, нарисованной внутри многоугольника.

Ориентация многоугольника определяет также *направление обхода,* т. е. устанавливает некоторый циклический порядок сторон много-

угольника. Мы будем считать, что стороны и многоугольники определенным способом ориентированы, и будем обозначать соответствующим друг другу стороны одинаковыми буквами. Тогда система многоугольников может быть задана чисто *комбинаторной схемой*. Мы записываем стороны каждого многоугольника отдельной строчкой в порядке, определяемом направлением обхода, и снабжаем их показателем $+1$ (который можно по усмотрению опускать) или -1 в зависимости от того, совпадает ли ориентация стороны с ориентацией, индуцируемой в этой стороне многоугольником, или нет. Такая схема полностью определяет систему многоугольников, а следовательно, и поверхность. Каждая строка схемы указывает стороны одного многоугольника в их циклической последовательности; обозначения сторон указывают, какие стороны соответствуют друг другу; показатели же определяют, каким из двух существенно различных способов соответствующие стороны топологически отображаются друг на друга.

Не меняя системы многоугольников, мы можем циклически перемстить стороны в каждой строчке; далее, любую сторону можно переориентировать, — это влечет за собой изменение показателей, с которыми эта сторона входит в схему. Наконец, можно изменить ориентацию любого многоугольника, — это отражается на схеме следующим образом: циклический порядок букв в соответствующей строчке меняется на противоположный и одновременно меняются на противоположные все показатели этой строчки.

В качестве примера мы приводим схему рассматривавшейся выше (рис. 56) системы многоугольников:

$$\begin{aligned} &\text{Многоугольник } \Pi_1: \quad bad^{-1}e^{-1}. \\ &\text{Многоугольник } \Pi_1: \quad bade. \end{aligned}$$

Теперь мы можем продвинуть далее решение вопроса о том, в каком случае две системы многоугольников дают одинаковые поверхности. Для этого мы вводим следующие *элементарные преобразования*, при помощи которых из системы многоугольников получаются другие, отличные от нее системы, определяющие ту же поверхность.

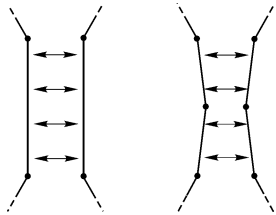


Рис. 57

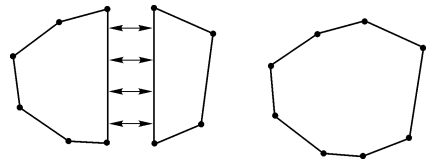


Рис. 58

Одномерное подразделение состоит в том, что две соответствующие друг другу стороны разбиваются двумя соответствующими точками каждая на пару сторон, в то время как соответствие между точками остается прежним. Обратный переход от подразделенной таким образом системы многоугольников к первоначальной системе называется *одномерным укрупнением* (рис. 57).

Двумерное укрупнение заключается в том, что отождествлением двух эквивалентных сторон два различных многоугольника соединяются в один; обратный процесс — разбиение одного многоугольника на два — называется *двумерным подразделением* (рис. 58).

Две системы многоугольников, которые могут быть переведены друг в друга при помощи конечного числа таких операций, так же как и принадлежащие им полиэдральные поверхности, называются *элементарно преобразуемыми*. Но поверхность, определяемая системой многоугольников, не меняется ни при одномерных элементарных преобразованиях, ни при двумерных, так как в силу § 8 отождествление может производиться шаг за шагом. Отсюда следует, что элементарно преобразуемые системы многоугольников определяют гомеоморфные поверхности.

Все элементарно преобразуемые друг в друга подразделенные поверхности обладают двумя важными общими свойствами. Именно, они имеют одинаковую (эйлерову) характеристику и одинаковый характер ориентируемости. Оба эти понятия были уже определены на стр. 116 и 117 и для комплексов, и для псевдомногообразий, причем мы исходили при определении из симплициального разбиения. Однако мы не рассматриваем сейчас поверхность как симплициальный комплекс. Поэтому мы должны теперь определить характеристику и ориентируемость для подразделенных поверхностей заново, исходя из схемы подразделения поверхности на многоугольники. Связь между старым и новым определениями будет установлена в § 39. Мы понимаем под *характеристикой* полиэдральной поверхности число

$$N = \alpha^0 - \alpha^1 + \alpha^2,$$

где α^0, α^1, α^2 означают количества вершин, ребер и элементов подразделенной поверхности. Так, например, для четырехугольника, покрывающего тор (стр. 13),

$$N = 1 - 2 + 1 = 0.$$

Для поверхности куба

$$N = 8 - 12 + 6 = 2.$$

Элементарно преобразуемые подразделенные поверхности имеют одинаковые характеристики. В самом деле, при одномерном элементарном

преобразовании числа α^0 и α^1 меняются каждое на единицу, в то время как α^2 остается неизменным. При двумерном же элементарном преобразовании меняются на единицу α^1 и α^2.

Подразделенная поверхность называется *ориентируемой*, если многоугольники, на которые она разбита, могут быть ориентированы таким образом, что в каждых двух соответствующих друг другу сторонах индуцируются противоположные ориентации. Это отражается на схеме системы многоугольников следующим образом: при надлежащей ориентации многоугольников каждая сторона входит в схему один раз с показателем $+1$ и один раз с показателем -1. Нетрудно убедиться, что свойство подразделенной поверхности быть ориентируемой сохраняется при подразделениях и укрупнениях. Приведенная выше в качестве примера поверхность (стр. 174) неориентируема.

Таким образом мы получили в результате следующее *необходимое условие для того, чтобы две подразделенные поверхности были элементарно преобразуемы: поверхности должны иметь одинаковые характеристики и должны быть одновременно ориентируемы или неориентируемы.*

Это условие также *достаточно*. Для доказательства мы покажем, что все подразделенные поверхности, удовлетворяющие этому условию, могут быть посредством подразделений и укрупнений приведены к одной и той же канонической форме.

§ 38. Приведение к канонической форме

Приведение к канонической форме осуществляется шестью последовательными шагами.

1-й шаг. Если заданная система многоугольников состоит из α^2 (> 1) многоугольников, то, применяя $\alpha^2 - 1$ раз двумерное укрупнение, мы придем к одному *единственному многоугольнику*, стороны которого попарно соответствуют друг другу. Схема такой системы, состоящей из одного многоугольника, имеет только одну строку, причем каждая буква входит в эту строку два раза. Если какая-нибудь буква входит в строку с противоположными показателями, то говорят, что стороны, обозначенные этой буквой, находятся в соответствии первого рода; в противном случае говорят, что стороны находятся в соответствии второго рода. Как мы показали выше, подразделенная поверхность ориентируема тогда и только тогда, когда каждые две соответствующие друг другу стороны ее находятся в соответствии первого рода.

Если речь идет о поверхности, гомеоморфной сфере, то наш многоугольник можно получить таким же образом, как при изготовлении плоских разверток обычных выпуклых многогранников; такие развертки, как известно, служат для изготовления картонных моделей мно-

гогранников. Устранение внутренних сторон развертки превращает ее в один многоугольник.

2-й шаг («*стягивание*»). Пусть в многоугольнике имеется последовательность сторон aa^{-1}, причем все стороны многоугольника не исчерпываются этими сторонами, так что общее число сторон не меньше 4. 2-й шаг заключается в том, что мы переходим к многоугольнику, схема которого получается из схемы старого многоугольника вычеркиванием последовательности сторон aa^{-1}.

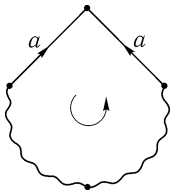


Рис. 59

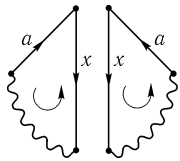


Рис. 60

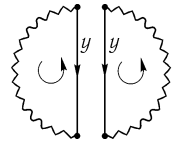


Рис. 61

Второй шаг сводится к подразделениям и укрупнениям следующим образом. Пусть схема многоугольника выражается строкой

$$\sim\sim\sim aa^{-1}\sim\sim\sim, \qquad \text{(рис. 59)}$$

где волнистые линии означают последовательности сторон, детальное рассмотрение которых нас сейчас не интересует. Мы можем допустить, что справа и слева от aa^{-1} стоит по меньшей мере по одной стороне. Тогда двумерное подразделение многоугольника даст нам два многоугольника

$$\sim\sim\sim ax \quad \text{и} \quad x^{-1}a^{-1}\sim\sim\sim \qquad \text{(рис. 60)}$$

(буквой x обозначена вновь введенная сторона). Посредством одномерного укрупнения сторон a, x, а также x^{-1}, a^{-1} можно объединить их в стороны y и y^{-1} соответственно. Получаются два многоугольника со схемами

$$\sim\sim\sim y \quad \text{и} \quad y^{-1}\sim\sim\sim.$$

Наконец, двумерное укрупнение снова соединяет эти многоугольники в один.

Применяя второй шаг до тех пор, пока это возможно, мы придем либо к двуугольнику, либо к многоугольнику с не менее чем четырьмя сторонами, не содержащему последовательности сторон вида aa^{-1}. Двуугольник может иметь лишь одну из двух схем:

$$\begin{array}{c} aa^{-1} \\ \text{и} \\ aa. \end{array} \qquad (0)$$

Обе принадлежат к установленным каноническим формам. Поэтому в дальнейшем мы можем предполагать, что наш многоугольник состоит не менее чем из четырех сторон и не содержит последовательности вида aa^{-1}.

3-й шаг. Приведение к *подразделенной поверхности с одной вершиной* .

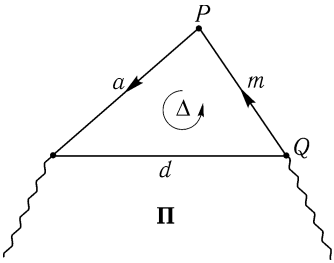


Рис. 62

Пусть получившийся многоугольник есть r-угольник ($r \geqslant 4$). Будем обозначать эквивалентные вершины многоугольника одинаковыми буквами. Очевидно, либо все вершины эквивалентны, либо, кроме класса P, существуют другие классы эквивалентных вершин. В последнем случае этот многоугольник можно перевести в другой многоугольник, в котором число вершин P на единицу меньше. В самом деле, в этом случае существует вершина Q, ограничивающая вместе с некоторой вершиной P сторону m многоугольника. Таким образом в границу многоугольника входит последовательность QmP (или PmQ). Обозначим вторую сторону, примыкающую к вершине P, через a. Вторая граничная точка этой стороны есть либо точка Q, либо точка P, либо точка какого-нибудь другого класса эквивалентных вершин. Соединим эту вторую граничную точку диагональю d с исходной точкой Q и разобьем затем r-угольник (посредством двумерного подразделения) на треугольник Δ и $(r-1)$-угольник П (рис. 62). Тогда сторона a', соответствующая стороне a, непременно принадлежит П. Если этого нет, то a совпадает либо с m, либо с m^{-1}. Если a совпадает с m, то в Δ входит последовательность сторон mm, а тогда, вопреки предположению, $Q = P$. Если же a совпадает с m^{-1}, то к нашему r-угольнику можно применить второй шаг, а мы предположили, что это уже невозможно. Отождествляя теперь a и a' при помощи двумерного укрупнения, мы получаем новый r-угольник, в границу которого вершина P входит на единицу меньшее число раз, а вершина Q — на единицу бельшее.

К новому r-угольнику снова либо можно применить второй шаг, либо же нельзя, т. е. он обладает тем же свойством, что и исходный. В последнем случае применяя повторно только что описанный процесс, мы можем опять уменьшить число вершин на единицу.

Таким образом поступают, пока имеются стороны, к которым можно применять операцию третьего шага, — значит, во всяком случае не далее того момента, когда на границе оказывается лишь одна вершина.

4-й шаг. Выделение мебиусовых пленок. Если с помощью предыдущих трех шагов нормированная подразделенная поверхность неориентируема, то по крайней мере две стороны многоугольника находят-

ся в соответствии второго рода. Пусть это будут, например, стороны с рис. 63. Схема многоугольника в таком случае имеет вид

$$\sim\sim\sim\sim\sim\sim c \sim\sim\sim\sim\sim\sim c. \tag{1}$$

Разобьем многоугольник на два многоугольника диагональю a, соединяющей конечную точку одной стороны c с конечной точкой другой. Схема получающейся системы многоугольников имеет тогда вид

$$\begin{gathered} \sim\sim\sim\sim\sim\sim ca, \\ a^{-1} \sim\sim\sim\sim\sim\sim c. \end{gathered} \tag{2}$$

Соединим теперь снова оба многоугольника вдоль стороны c. Это производится посредством двумерного укрупнения, в результате которого получается многоугольник

$$\sim\sim\sim\sim\sim\sim aa \sim\sim\sim\sim\sim\sim,$$

содержащий последовательность сторон aa. Такую последовательность мы называем *мебиусовой пленкой* (см. § 2). Описанный процесс преобразования схематически показан на рис. 63 и 64.

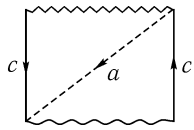


Рис. 63

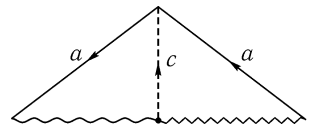


Рис. 64

Если в получившемся многоугольнике опять имеется пара сторон, находящихся в соответствии второго рода друг с другом, то из этой пары тем же способом можно сделать еще одну мебиусову пленку. При этом имеющиеся уже мебиусовы пленки сохраняются. Продолжая таким же образом, мы каждую пару сторон, находящуюся в соответствии второго рода, превратим в пленку Мебиуса. Если при этом вообще исчерпываются все стороны многоугольника, то мы получаем каноническую форму неориентируемой поверхности

$$a_1a_1a_2a_2 \sim\sim\sim\sim\sim\sim a_ka_k. \tag{k}$$

При $k = 1$ получается двуугольник, о котором говорилось выше.

5-й шаг. Выделение ручек. Пусть теперь, напротив, поверхность либо ориентируема, либо после выделения пленок Мебиуса остаются еще пары сторон, находящиеся в соответствии первого рода. Тогда непременно должны существовать две разделяющие друг друга на границе

многоугольника пары сторон первого рода, т. е. входящие в последовательность сторон в таком порядке:

$$\sim\sim\sim c \sim\sim\sim d^{-1} \sim\sim\sim c^{-1} \sim\sim\sim d \sim\sim\sim.$$

В самом деле, если пара сторон c не разделяется никакой другой парой, то все стороны последовательности $c \sim\sim\sim c^{-1}$ соответствуют друг другу, так как мы предположили, что все пленки Мебиуса уже выделены полностью. Но тогда вершины сторон, лежащих между обеими сторонами c, могут быть эквивалентны друг с другом и с конечными точками сторон c и никоим образом не могут быть эквивалентны с начальными точками c, т. е. существует по крайней мере два класса эквивалентных вершин. А это находится в противоречии с результатами третьего шага (по предположению уже выполненного). Обе разделяющие друг друга пары соответствующих сторон можно теперь при помощи элементарных преобразований заменить последовательностью $aba^{-1}b^{-1}$, как это показано на рис. 65, 66, 67. На основании изложенных в § 2 соображений мы называем такую последовательность ручкой. Дальнейшее преобразование в ручки других разделяющих друг друга пар сторон (находящихся в соответствии первого рода) не отражается ни на уже имеющихся ручках, ни на пленках Мебиуса. В самом деле, при производимых нами элементарных преобразованиях отмеченные на рис. 65, 66, 67 волнистыми линиями последовательности сторон только перемещаются, но не разрываются. Поэтому, если наша поверхность ориентируема, ее можно привести к канонической форме

$$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1} \sim\sim\sim a_hb_ha_h^{-1}b_h^{-1}. \qquad (h)$$

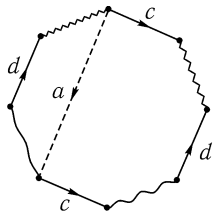


Рис. 65

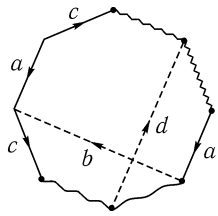


Рис. 66

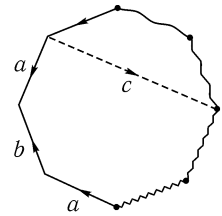


Рис. 67

6-й шаг. Замена ручек пленками Мебиуса. Остается разобрать только случай, когда имеются одновременно и ручки, и пленки Мебиуса. В этом случае каждая ручка может быть заменена посредством двумерных подразделений и укрупнений двумя пленками Мебиуса. Такая замена осуществляется следующим образом: заданный многоугольник (рис. 68) разбивается на два многоугольника, соединяемые затем снова

в один так, что шесть рассматриваемых сторон (две стороны пленки Мебиуса и четыре стороны ручки) заменяются тремя парами сторон, каждая из которых находится в соответствии второго рода (рис. 69). Далее остается только три раза применить выделение мебиусовых пленок (четвертый шаг см. рис. 70–72). Таким образом каждая система многоугольников приводится к канонической форме, состоящей только из одного многоугольника, так называемого *канонического многоугольника*[*] одного из следующих типов:

$$aa^{-1}, \tag{0}$$

$$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1} \sim\sim\sim\sim\sim a_hb_ha_h^{-1}b_h^{-1}, \tag{h}$$

$$a_1a_1a_2a_2 \sim\sim\sim\sim\sim a_ka_k. \tag{k}$$

Канонические многоугольники (0) и (h), с одной стороны, и (k), с другой, — отличаются характером ориентируемости. Между собой многоугольники каждой группы отличаются величинами характеристик. Вычисление характеристик дает соответственно

$$N = 2 - 1 + 1 = 2, \tag{0'}$$

$$N = 1 - 2h + 1 = 2(1 - h), \tag{h'}$$

$$N = 1 - k + 1 = 2 - k. \tag{k'}$$

Эти формулы выражают одновременно связь между числом ручек или соответственно пленок Мебиуса поверхности с ее характеристикой. Ориентируемые поверхности имеют всегда четные характеристики. Мы видели,что характеристика N и характер ориентируемости не меняются при элементарных преобразованиях. Поэтому мы можем сформулировать полученный результат следующим образом.

Теорема. *Две подразделенные поверхности элементарно преобразуемы одна в другую в том и только в том случае, когда они имеют равные характеристики и обе одновременно либо ориентируемы, либо нет*[22].

Сформулированная теорема значительно приближает нас к нашей цели — дать классификацию всех замкнутых поверхностей. Именно, мы знаем теперь, что все замкнутые поверхности исчерпываются поверхностями вида (0), (h) и (k). Но можно было бы предположить, что два канонических многоугольника определяют одну и ту же поверхность даже в том случае, когда они, наверное, не являются элементарно преобразуемыми. В следующем параграфе мы покажем, что этого случиться на самом деле не может. Для доказательства мы воспользуемся установленными в прошлой главе теоремами инвариантности.

[*]Изображения канонических многоугольников приведены: для (0) на стр. 17, рис. 11; для (h) на стр. 13, рис. 5 ($h = 1$) и на стр. 16, рис. 10 ($h = 2$); для (k) на стр. 23, рис. 18 ($k = 1$) и на стр. 23, рис. 19 ($k = 2$).

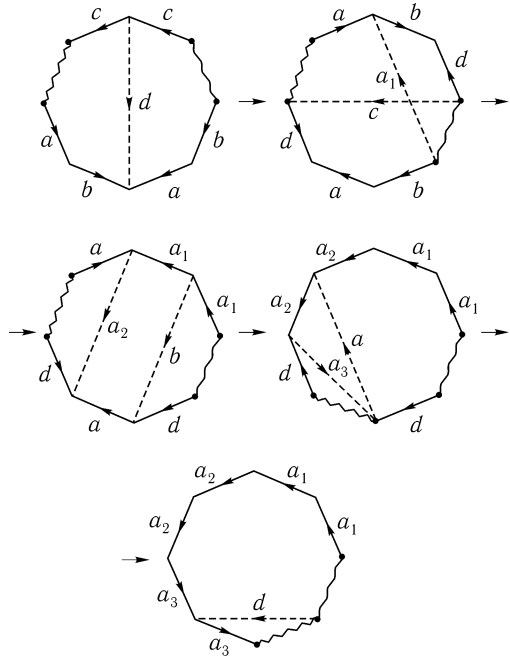


Рис. 68–72

Упражнения. 1. Покажите, что замкнутая поверхность с характеристикой N может быть представлена одним многоугольником, соответствие сторон которого выражается следующей схемой (симметричная каноническая форма):

$$c_1 c_2 \sim\sim\sim c_{N+2} c_1^{-1} c_2^{-1} \sim\sim\sim c_{N+2}^{\pm 1}.$$

При этом последний показатель равен -1 лишь в том случае, когда поверхность ориентируема, так что N четно. Какую характеристику имеет поверхность, представленная такой схемой, если взять в качестве последнего показателя -1 при N *нечетном*?

2. Приведите к каноническому виду систему многоугольников примера, данного на стр. 174.

§ 39. Основная теорема топологии поверхностей

Пусть задана система многоугольников $\boldsymbol{M}$. При помощи элементарных преобразований — двумерных подразделений — из этой системы можно получить систему, состоящую только из треугольников. Отождествление эквивалентных точек такой системы превращает ее

в симплициальный комплекс, обладающий, очевидно, всеми свойствами (Пм$_1$)–(Пм$_3$) замкнутого псевдомногообразия (§ 24). Произведенные подразделения не меняют ни характеристики полиэдральной поверхности, ни ее характера ориентируемости. Однако в том случае, когда подразделенная поверхность представляет симплициальный комплекс, данные на стр. 150 определения характеристики и ориентируемости поверхности совпадают с определениями, приведенными на стр. 116 и 117; на страницах же 169 и 148 показано, что ориентируемость псевдомногообразия и характеристика симплициального комплекса являются топологически инвариантными свойствами. Отсюда следует, что две замкнутые подразделенные поверхности могут быть гомеоморфны лишь в том случае, если они имеют равные характеристики и одинаковый характер ориентируемости. В частности, все поверхности, заданные каноническими многоугольниками (0), (h) и (k), отличаются друг от друга. Если, наоборот, две подразделенные поверхности имеют равные характеристики и обе одновременно ориентируемы или неориентируемы, то в силу теоремы § 38 эти две поверхности элементарно преобразуемы и, следовательно, гомеоморфны.

Сопоставление полученных результатов позволяет сформулировать следующее предложение.

Основная теорема топологии поверхностей. Две замкнутые поверхности гомеоморфны в том и только в том случае, когда они имеют равные характеристики и когда они одновременно либо ориентируемы, либо неориентируемы. Общим видом ориентируемой замкнутой поверхности является сфера с h $(\geqslant 0)$ ручками; общим видом неориентируемой замкнутой поверхности — сфера с k $(\geqslant 0)$ пленками Мебиуса.

Число ручек h и число пленок Мебиуса k часто называют *родом* ориентируемой и соответственно неориентируемой поверхности. Род поверхности связан с характеристикой формулами $(0')$, (h'), (k') § 38.

Мы пользовались до сих пор определением замкнутой поверхности, как окрестностного пространства, получающегося из системы многоугольников. Эквивалентным этому является следующее определение, указывающее место замкнутых поверхностей среди всех вообще полиэдров: *замкнутая поверхность есть конечное связное двумерное многообразие.*

Доказательство. Так как замкнутая поверхность, как мы видели, является псевдомногообразием, то она представляет конечный связный двумерный полиэдр. Условие, определяющее многообразие, т. е. существование у каждой точки окрестности, гомеоморфной внутренности круга, очевидно, выполняется для внутренних точек канонического многоугольника. Для внутренних точек сторон многоугольника оно также выполняется, так как каждая сторона имеет в точности одну эквивалентную ей сторону. Наконец, для вершины многоугольника

мы получим окрестность, гомеоморфную внутренности круга, если мы у каждой вершины канонического многоугольника отрежем по маленькому треугольнику и посредством отождествления составим из этих треугольников фигуру, гомеоморфную кругу (исключение представляет лишь тривиальный случай сферы, — в этом случае обе вершины не являются эквивалентными друг другу точками, и мы получим, как и требуется, два круга).

Пусть теперь, обратно, $\boldsymbol{K}^2$ есть произвольное конечное связное многообразие, заданное в некотором симплициальном разбиении. По теореме II § 33 группы Бетти в каждой точке P многообразия $\boldsymbol{K}^2$ совпадают с группами Бетти окружности. Поэтому (см. пример 2 § 32) каждое ребро симплицильного разбиения многообразия $\boldsymbol{K}^2$ инцидентно в точности с двумя треугольниками, а окрестностный комплекс вершины $\boldsymbol{K}^2$ есть окружность. Но тогда можно считать, что $\boldsymbol{K}^2$ составлено из своих треугольников путем последовательного отождествления их сторон. Условие связности (стр. 170–172) выполняется вследствие того, что $\boldsymbol{K}^2$ было предположено связным (§ 12). Поэтому $\boldsymbol{K}^2$ является замкнутой поверхностью в смысле определения § 37.

Упражнения. 1. Каждое замкнутое двумерное псевдомногообразие с характеристикой $N = 2$ гомеоморфно сфере.

2. Пусть в $\boldsymbol{R}^3$ имеется состоящий из прямолинейных отрезков конечный одномерный связный комплекс $\boldsymbol{K}^1$ с характеристикой, равной N. Докажите, что если вокруг каждой точки комплекса $\boldsymbol{K}^1$ описать одинаковыми радиусами маленькие сферы, то для этих сфер существует огибающая их замкнутая поверхность с характеристикой $2N$.

§ 40. Ограниченные поверхности

Ограниченная поверхность есть окрестностное пространство, получающееся из системы многоугольников посредством отождествления эквивалентных точек, — именно, посредством склеивания многоугольников вдоль их сторон. Эквивалентными точками считаются точки двух сторон многоугольников, переходящие друг в друга при фиксированном топологическом отображении, установленном между этими сторонами. Однако в то время как в случае замкнутых поверхностей каждой стороне соответствует в точности одна эквивалентная ей сторона, в случае ограниченных поверхностей некоторые стороны многоугольников (по крайней мере одна сторона) остаются свободными. Такие стороны называются *граничными сторонами*. Помимо этого для ограниченных поверхностей, так же как и для замкнутых, должно выполняться условие связности (§ 37).

Так же, как в случае замкнутых поверхностей, стороны и многоугольники ограниченных поверхностей могут быть ориентированы. Поэтому ограниченная поверхность также может быть задана комбинаторной схемой.

Пусть α^0, α^1, α^2 — количества неэквивалентных вершин, сторон и многоугольников системы многоугольников. Тогда мы опять называем число

$$N = \alpha^0 - \alpha^1 + \alpha^2$$

характеристикой ограниченной поверхности.

Поверхность называется *ориентируемой*, если многоугольники ее могут быть ориентированы таким образом, что в каждой из двух соответствующих друг другу сторон индуцируются противоположные ориентации.

При элементарных преобразованиях (подразделениях и укрупнениях), определяемых так же, как для замкнутых поверхностей, характеристика и ориентируемость поверхности не меняются. Так как последовательными подразделениями ограниченная поверхность также может быть переведена в симплициальный комплекс, представляющий ограниченное псевдомногообразие, то характеристика и ориентируемость являются инвариантами ограниченной поверхности.

Ограниченные поверхности классифицируются при помощи того же метода, который был применен для классификации замкнутых поверхностей. Именно, мы отыскиваем определенные канонические формы, к которым может быть приведена каждая ограниченная поверхность при помощи элементарных преобразований, и показываем, что эти канонические формы негомеоморфны между собой. Ограниченная поверхность в *канонической форме* может быть представлена одним многоугольником, имеющим схему

$$q_1 l_1 q_1^{-1} q_2 l_2 q_2^{-1} \sim\sim\sim\sim\sim q_r l_r q_r^{-1} a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \sim\sim\sim\sim\sim a_h b_h a_h^{-1} b_h^{-1}$$
$$(r > 0,\ h > 0)$$

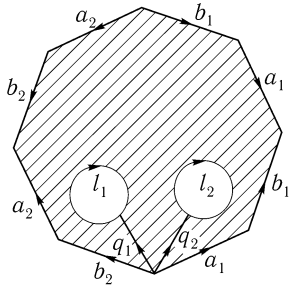
в случае, если рассматриваемая поверхность ориентируема, и схему

$$q_1 l_1 q_1^{-1} q_2 l_2 q_2^{-1} \sim\sim\sim\sim\sim q_r l_r q_r^{-1} a_1 a_1 \sim\sim\sim\sim\sim a_k a_k \quad (r > 0,\ h > 0)$$

в случае, если она неориентируема. Таким образом, каноническая форма ограниченной поверхности получается из канонической формы замкнутой поверхности тем, что мы прибавляем в схеме канонической формы замкнутой поверхности последовательность сторон вида $q_1 l_1 q_1^{-1} \sim\sim\sim\sim\sim q_r l_r q_r^{-1}$. При этом $l_1, l_2, \ldots, l_r$ представляют граничные стороны. Если в каноническом многоугольнике произвести отождествление каждых двух сторон q_i и q_i^{-1}, то мы получим канонический многоугольник замкнутой поверхности, в котором прорезано r отверстий (рис. 73).

Для того чтобы привести к канонической форме ограниченную поверхность, заданную произвольной системой многоугольников, мы исходим из симплициального разбиения этой поверхности. Такое разбиение, как мы видели, представляет ограниченное псевдомногообразие, граница которого есть определенный одномерный подкомплекс $\boldsymbol{R}$.

Мы предполагаем, что наше симплициальное разбиение обладает следующим свойством: каждый треугольник разбиения либо имеет *одну* общую вершину или *одну* общую сторону с границей поверхности, либо не имеет вовсе общих точек с этой границей. Такое предположение допустимо, так как если исходное симплициальное разбиение не обладает этим свойством, то мы можем перейти к его барицентрическому подразделению. Пусть Δ представляет треугольник, примыкающий к границе, т. е. треугольник, имеющий либо одну общую вершину, либо одну общую сторону с $\boldsymbol{R}$. Тогда существуют в точности две примыкающие к границе стороны, инцидентные с Δ. При этом под стороной, примыкающей к границе $\boldsymbol{R}$, поверхности мы понимаем сторону, не принадлежащую к $\boldsymbol{R}$, но одна вершина которой лежит на $\boldsymbol{R}$; тогда другая



h=2, r=2

Рис. 72

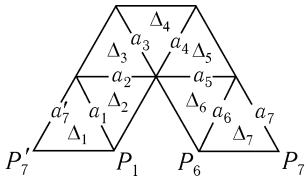


Рис. 73

вершина такой стороны, наверное, не лежит на $\boldsymbol{R}$. Обратно, каждая примыкающая к $\boldsymbol{R}$ сторона инцидентна в точности с двумя примыкающими к $\boldsymbol{R}$ треугольниками. Поэтому множество всех примыкающих к $\boldsymbol{R}$ треугольников и сторон распадается на конечное число циклических последовательностей, состоящих попеременно из треугольников и сторон, причем каждый член такой последовательности инцидентен с двумя соседними членами.

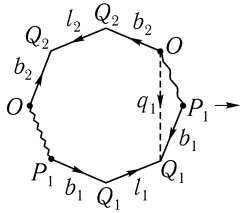


Рис. 75

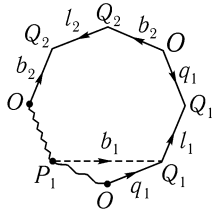


Рис. 76

Пусть

$$\Delta_1 a_1 \Delta_2 a_2 \dots \Delta_s a_s$$

есть такая циклическая последовательность. Соединяя Δ_1 с Δ_2 вдоль стороны a_1, присоединяя затем Δ_3 к Δ_2 вдоль a_2 и т. д., присоединяя, наконец, Δ_s к Δ_{s-1} вдоль a_{s-1}, мы составим из треугольников Δ_1, Δ_2, …, Δ_s один многоугольник П. Сторона a_s входит в П дважды: один раз как сторона треугольника Δ_1 (мы обозначим ее как таковую через a_s') и один раз как сторона треугольника Δ_s (в этом случае мы можем сохранить ее обозначение a_s). Поступим таким же образом с остальными циклическими последовательностями. Ясно, что произвольно взятая сторона границы $\boldsymbol{R}$ должна лежать на границе одного из таких многоугольников, скажем, на границе многоугольника П. Покажем тогда, что множество сторон границы $\boldsymbol{R}$, принадлежащих многоугольнику П, составляет одну связную последовательность сторон. В самом деле, пусть P_i есть лежащая на $\boldsymbol{R}$ вершина стороны a_i.

Тогда при $i > 1$, если P_{i-1} отлично от P_i, совокупность принадлежащих $\boldsymbol{R}$ точек треугольника Δ_i состоит из стороны $P_{i-1}P_i$, если же P_{i-1} совпадает с P_i, то эта совокупность состоит из одной точки $P_{i-1} = P_i$. При $i = 1$ P_{i-1} нужно заменить вершиной P'_s, т. е. лежащей на $\boldsymbol{R}$ вершиной стороны a'_s. Таким образом в многоугольнике Π стороны последовательности $P'_sP_1P_2 \dots P_s$ и только эти стороны принадлежат границе $\boldsymbol{R}$ поверхности. При этом некоторые из точек P могут совпадать. Так, на рис. 74 $P_2 = P_3 = P_4 = P_5$. Если теперь посредством укрупнений объединить стороны последовательности $P'_sP_1P_2 \dots P_s$ в одну сторону l многоугольника Π и опустить верхний значок у стороны a'_s, чтобы соответствующие друг другу стороны были обозначены, как и раньше, одинаковыми буквами, то граница многоугольника Π будет представлена последовательностью

$$\sim\sim\sim\sim\sim a_s l a_s^{-1} \sim\sim\sim\sim\sim.$$

Таким же образом мы поступаем с многоугольниками, соответствующими другим циклическим последовательностям вида $\Delta_1 a_1 \Delta_2 a_2 \dots \Delta_s a_s$. Кроме таких многоугольников у нас еще могут остаться треугольники, не примыкающие к границе. Соединяя все эти многоугольники и треугольники в один, мы получим многоугольник, имеющий схему

$$\sim\sim\sim\sim\sim b_1 l_1 b_1^{-1} \sim\sim\sim\sim\sim b_2 l_2 b_2^{-1} \sim\sim\sim\sim\sim b_r l_r b_r^{-1} \sim\sim\sim\sim\sim.$$

При этом l_i обозначают все имеющиеся граничные стороны, а волнистые линии — остальные стороны, находящиеся попарно в соответствии друг с другом (рис. 75).

Рассекая полученный многоугольник на части и составляя из них затем снова один многоугольник, мы можем заменить последовательности сторон $b_i l_i b_i^{-1}$ такими же последовательностями, стоящими непосредственно одна за другой. Как сделать замену, например, для случая первых двух последовательностей, показано на рис. 75, 76. При такой замене ни другие последовательности вида $b_i l_i b_i^{-1}$, ни последовательности сторон, обозначенные в схеме многоугольника волнистыми линиями, не испытывают разрыва (они могут лишь перемещаться). Применяя последовательно такой процесс объединения, мы придем к многоугольнику, содержащему, кроме последовательности сторон $q_1 l_1 q_1^{-1} \dots q_r l_r q_r^{-1}$, лишь стороны, попарно соответствующие друг другу. Но начальная и конечная точки написанной последовательности представляют одну точку поверхности, так как в силу соответствия сторон начальная, точка стороны q_1 эквивалентна с конечной точкой стороны q_1^{-1}, т. е. с начальной точкой стороны q_2 и т. д., и, наконец, с конечной точкой q_r^{-1}. Если поэтому мы отрежем от нашего многоугольника последовательность сторон $q_1 l_1 q_1^{-1} \dots q_r l_r q_r^{-1}$, произведя разрез по диагонали $\bar{l}$, имеющей граничными точками две эквивалентные точки (обозначим их через O), то мы получим новый многоугольник с одной граничной стороной $\bar{l}$. К этому новому многоугольнику можно применить процесс, которым мы пользовались для приведения к каноническому виду замкнутых поверхностей, причем так, что число неэквивалентных с O точек будет все время уменьшаться. Тогда все вершины многоугольника станут в конце концов эквивалентны с O. Присоединяя затем снова вдоль стороны $\bar{l}$ отрезанную ранее часть многоугольника, мы придем

к требуемой канонической форме ограниченной поверхности. Канонические формы отличаются друг от друга числом граничных контуров, характеристикой и характером ориентируемости, — тремя свойствами, являющимися, как мы знаем, инвариантными; поэтому они определяют негомеоморфные поверхности.

Упражнение. Удвоение (стр. 169) ориентируемой (соответственно неориентируемой) поверхности рода h (соответственно k), имеющей r отверстий, представляет замкнутую поверхность рода $\overline{h} = 2h+r-1$ (соответственно $\overline{k} = 2k + 2r - 2$).

§ 41. Группы Бетти поверхностей

В случае замкнутых поверхностей отыскание групп Бетти не представляет никаких затруднений. В самом деле, в силу обобщенной формулы Эйлера (§ 23), характеристика

$$N = p^0 - p^1 + p^2.$$

Так как поверхность есть связный полиэдр, то $p^0 = 1$ (§ 18). Так как поверхность представляет ориентируемое или неориентируемое многообразие, то в силу § 24 $p^2 = 1$ в случае ориентируемости и $p^2 = 0$ в случае неориентируемости. Таким образом

$$N = 2 - p^1 \quad \text{в ориентируемом случае,}$$
$$N = 1 - p^1 \quad \text{в неориентируемом случае.}$$

Одномерное число Бетти определяется, как мы видим, характеристикой поверхности. Следовательно, см. § 38, оно определяется также родом поверхности h (для ориентируемой) или k (для неориентируемой поверхности):

$$p^1 = 2 - N = 2h \qquad \text{в ориентируемом случае,}$$
$$p^1 = 1 - N = k - 1 \quad \text{в неориентируемом случае.}$$

Что касается коэффициентов кручения, то только в случае неориентируемости существует один одномерный коэффициент кручения, равный 2 (§ 24).

Одномерная группа Бетти ориентируемой замкнутой поверхности рода h есть, таким образом, свободная циклическая группа с $2h$ образующими. Одномерная группа Бетти неориентируемой замкнутой поверхности рода k представляет прямую сумму свободной абелевой группы с $(k-1)$ образующими и группы второго порядка.

Нульмерная и двумерная группы Бетти не представляют особого интереса, так как нульмерная группа Бетти каждого связного полиэдра представляет свободную циклическую группу (§ 18). Двумерная

же группа определяется уже общим свойством замкнутой поверхности быть замкнутым (ориентируемым или неориентируемым) псевдомногообразием. В силу § 24 двумерная группа Бетти в случае ориентируемости представляет свободную циклическую группу, а в случае неориентируемости состоит из одного нулевого элемента.

Для того чтобы найти одномерную базу гомологий, мы воспользуемся следующей леммой.

Лемма. *Вершины, ребра и (двумерные) элементы подразделенной поверхности образуют кусочную систему.*

Напомним, что кусочная система (§ 22) определяется всегда по отношению к некоторому симплициальному разбиению полиэдра. Мы возьмем какое-нибудь симплициальное разбиение $\boldsymbol{K}^2$, получающееся из заданного подразделения поверхности при помощи дальнейших подразделений. Так как куски представляют симплициальные алгебраические комплексы, мы должны вместо слов вершины, ребра и элементы поверхности говорить точнее: *алгебраические комплексы*, состоящие соответственно из ориентированных вершин, из подразделенных и когерентно ориентированных ребер, из элементов поверхности.

Доказательство. То, что условия (Кус_1) и (Кус_2) выполняются для каждой размерности, условия (Кус_3) для размерностей 0 и 2 и (Кус_4) для размерности 1, доказывается настолько просто, что доказательства мы опускаем (сравните с примерами, приведенными на стр. 109–109). Доказательства же того, что для размерности $n = 1$ выполняется условие (Кус_3), а для размерности $k = 0$ — условие (Кус_4), мы приведем совместно, показав справедливость следующего предложения: если U^1 есть одномерный симплициальный алгебраический комплекс на $\boldsymbol{K}^2$ и граница его $\dot{U}^1$ есть нульмерный кусочный комплекс, т. е. составлен из полиэдральных вершин, то существует гомологичный комплексу U^1 одномерный кусочный комплекс V^1. Из этого предложения вытекает непосредственно выполнимость условия (Кус_4) при $k = 0$. Если же мы предположим, что U^1 есть цикл, то получим условие (Кус_3) для $k = 1$. Построение комплекса V^1 осуществляется путем «вытеснения» U^1 из внутренностей многоугольников (элементов поверхности) на стороны многоугольников. Рассмотрим подкомплекс U_m^1 комплекса U^1, лежащий на внутренних одномерных симплексах некоторого элемента П подразделения поверхности. При этом под внутренними одномерными симплексами поверхности $\boldsymbol{K}^2$ мы понимаем одномерные симплексы, не принадлежащие сторонам многоугольников подразделения. Алгебраический комплекс U_m^1 определяет на многоугольнике $'\Pi$ системы многоугольников, из которой наша поверхность получилась, алгебраический комплекс $'U_m^1$; $'\dot{U}_m^1$ представляет нульмерный алгебраический комплекс (цикл) на границе много-

угольника $'\Pi$, алгебраическое значение которого (сумма коэффициентов) равно нулю. Но нульмерный цикл, алгебраическое значение которого равно нулю, всегда ~ 0 на связном комплексе (§ 18). Поэтому на границе многоугольника $'\Pi$ существует одномерный комплекс $'U_r^1$, имеющий такую же границу, как $'U_m^1$. Тогда разность $'U_m^1 - 'U_r^1$ представляет цикл и при этом цикл, гомологичный нулю в $'\Pi$, так как каждый одномерный цикл на круге гомологичен нулю. Соответствующие комплексам $'U_m^1$ и $'U_r^1$ алгебраические комплексы U_m^1 и U_r^1 поверхности $\boldsymbol{K}^2$ также гомологичны между собой. Заменяя теперь U_m^1 комплексом U_r^1 и вытесняя таким же образом комплекс U^1 из остальных элементов поверхности, мы получим гомологичный комплексу U^1 комплекс V^1, все симплексы которого принадлежат сторонам многоугольников подразделения. По предположению $\dot{V}^1 = \dot{U}^1$ есть нульмерный кусочный комплекс. Поэтому все одномерные симплексы произвольного когерентно ориентированного ребра подразделения входят в V^1 с одинаковыми коэффициентами, т. е. V^1 есть одномерный кусочный комплекс, что нам и нужно было показать.

Доказанная только что лемма позволяет вычислить еще одним способом группы Бетти подразделения поверхности, заданной системой многоугольников, и, кроме того, позволяет найти базу гомологий. Для этого нужно только составить кусочные матрицы инциденций (§ 22) и привести их к каноническому виду. Мы произведем вычисление для канонических многоугольников (0), (h), (k), схемы которых даны на стр. 181 (см. рис. 11, 10 и 19). Матрицы имеют вид

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{E}^0 & a \\ \hline P & 1 \\ O & -1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \mathbf{E}^1 & \Pi \\ \hline a & 0 \end{array}, \tag{0}$$

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{E}^0 & a_1 b_1 \dots a_h b_h \\ \hline O & 0\ 0 \dots 0\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \mathbf{E}^1 & \Pi \\ \hline a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ a_h & 0 \\ b_h & 0 \end{array}, \tag{h}$$

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{E}^0 & a_1 a_2 \dots a_k \\ \hline O & 0\ 0 \dots 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \mathbf{E}^1 & \Pi \\ \hline a_1 & 2 \\ a_2 & 2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ a_k & 2 \end{array}. \tag{k}$$

Для того чтобы привести к канонической форме матрицу инциденций $\mathbf{E}^0$ для случая (0), мы прибавляем первую строчку ко второй. Каноническая форма $\mathbf{H}^0$ имеет тогда вид

$\mathbf{H}^0$	a
$P-O$	1
O	0

Точка O образует нульмерную базу гомологий. Матрица инциденций $\mathbf{E}^1$ для случая (0), так же как обе матрицы инциденций для случая (h), уже записана в канонической форме. Поэтому для замкнутой поверхности рода h одномерную базу гомологий (являющуюся одновременно базой слабых гомологий) образуют $2h$ одномерных циклов $a_1, b_1, \ldots, a_h, b_h$. Для того чтобы привести к канонической форме матрицы инциденций (k), мы вычитаем первую строку в $\mathbf{E}^1$ из всех остальных строк. При этом получаются следующие канонические формы:

$\mathbf{H}^0$	$\sum_{j=1}^{k} a_i a_2 \ldots a_k$
O	0 0 … 0

$\mathbf{H}^1$	Π
$\sum_{i=1}^{k} a_i$	2
a_2	0
.	.
.	.
.	.
a_k	0

k одномерных $\sum_{i=1}^{k}$ циклов $a_i, a_2, \ldots, a_k$ образуют здесь базу гомологий. Одномерные циклы $a_2, \ldots, a_k$ в соответствии с тем, что число Бетти $p^1 = k-1$, образуют базу слабых гомологий.

В то время как одномерные числа Бетти различным образом выражаются через характеристику для ориентируемых замкнутых поверхностей и неориентируемых, *число Бетти* по модулю 2 для всех поверхностей имеет вид $q' = -N+2$. В самом деле, $N = q_0 - q_1 + q_2$, а $q_0 = q_2 = 1$ (стр. 116).

База гомологий по модулю 2 получается путем составления матриц инциденций $\breve{\mathbf{E}}^0$ и $\breve{\mathbf{E}}^1$ по модулю 2. Для этого нужно в матрицах $\mathbf{E}^0$ и $\mathbf{E}^1$ все четные числа заменить классом вычетов $\breve{0}$, а все нечетные — классом вычетов $\breve{1}$. Для поверхностей (h) и (k) матрицы инциденций $\breve{\mathbf{E}}^0$ и $\breve{\mathbf{E}}^1$ уже имеют канонические формы. Поэтому стороны канонического многоугольника, рассматриваемые как алгебраические комплексы по модулю 2, образуют одномерную базу Бетти по модулю 2. Исключением здесь является только тривиальный случай сферы $(h=0)$.

Геометрическое значение числа q^1 определяется следующим предложением:

Теорема. *Одномерное число Бетти по модулю* 2, $q^1 = 2 - N$, *равно максимальному числу неразбивающих поверхность циклических сечений* (*Rückkehrschnitte*).

Под циклическим сечением мы понимаем не имеющий двойных точек замкнутый симплициальный путь симплициального разбиения поверхности, т. е. одномерный подкомплекс этого разбиения (§ 23), в котором каждая вершина инцидентна в точности с двумя ребрами (одномерными симплексами). Рассмотрим систему r циклических сечений, относительно которой мы предположим, что никакие два из этих сечений не имеют общего ребра. Говорят, что такая система «разбивает» поверхность, если существуют два треугольника симплициального разбиения, которые не могут быть соединены цепочкой последовательно инцидентных треугольников и ребер так, чтобы ни одно из этих ребер не принадлежало к циклическим сечениям. Что существует по меньшей мере $2 - N$ неразбивающих циклических сечений (при произвольном симплициальном разбиении), можно заключить, рассматривая одномерный комплекс, состоящий из всех ребер канонического многоугольника (стр. 181). Допустим теперь, что система циклических сечений состоит из $r > 2 - N$ циклических сечений $\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \ldots, \boldsymbol{k}_r$. В таком случае все эти сечения, рассматриваемые как алгебраические комплексы по модулю 2, зависимы между собой в смысле гомологий, так как число Бетти по модулю 2, $2 - N$, представляет максимальное число алгебраических комплексов по модулю 2, независимых в смысле гомологий. Поэтому существует двумерный алгебраический комплекс по модулю 2, например, двумерный подкомплекс $\boldsymbol{U}^2$, граница которого равна линейной комбинации этих циклических сечений:

$$\dot{\boldsymbol{U}}^2 = \check{\varepsilon}_1 \boldsymbol{k}_1 + \check{\varepsilon}_2 \boldsymbol{k}_2 + \ldots + \check{\varepsilon}_r \boldsymbol{k}_r,$$

причем не все $\check{\varepsilon}$ равны $\check{0}$. Так как мы предполагаем, что никакие два циклических сечения $\boldsymbol{k}_i$ и $\boldsymbol{k}_j$, не имеют общих ребер, то правая часть написанного соотношения $\neq 0$, вследствие чего $\boldsymbol{U}^2$ не может быть ни нулевым комплексом, ни всей поверхностью. Пусть $\boldsymbol{V}^2$ означает часть поверхности, дополнительную к комплексу $\boldsymbol{U}^2$ ($\boldsymbol{V}^2$ также представляет алгебраический комплекс по модулю 2). Тогда никакой двумерный симплекс комплекса $\boldsymbol{U}^2$ нельзя соединить с двумерным симплексом комплекса $\boldsymbol{V}^2$ цепочкой последовательно инцидентных треугольников и ребер, не переходя при этом ни одного из циклических сечений. Таким образом $q^1 + 1$ циклических сечений всегда разбивают поверхность[23].

Замечание. Узкая полоска, идущая вдоль циклического сечения неориентируемой поверхности, представляет либо круговое кольцо, либо лист Мебиуса. В первом случае циклическое сечение называют двусторонним, во втором — односторонним. (Для того чтобы получить такую полоску, можно поступить, например, следующим образом: произвести двукратное барицентрическое подразделение заданного симплициального разбиения и затем

взять все треугольники, инцидентные с ребрами и вершинами рассматриваемого циклического сечения.) Если циклическое сечение неориентируемой поверхности обладает тем свойством, что рассеченная вдоль него поверхность уже ориентируема, то такое сечение называется ориентирующим.

Упражнение. При помощи упражнения 1 § 38 покажите, что на каждой неориентируемой поверхности существует ориентирующее циклическое сечение. Ориентирующее циклическое сечение является двусторонним или односторонним в зависимости от того, четен или нечетен род поверхности k. (При рассечении характеристика поверхности остается неизменной. Воспользуйтесь тем, что характеристика ориентируемой замкнутой поверхности всегда четная.)

Глава VII
Фундаментальная группа

Группы Бетти дают исчерпывающую классификацию всех многообразий лишь для случая двух измерений. Важнейшим инвариантом, дающим возможность различать полиэдры и многообразия более высоких размерностей там, где группы Бетти совпадают, является фундаментальная группа. Фундаментальная группа, вообще говоря, не является абелевой группой. Полиэдр имеет только одну фундаментальную группу; она связана с поведением одномерных путей полиэдра*. Фундаментальная группа полиэдра является инвариантом в целом. Однако так же, как и в случае групп Бетти, можно ввести соответствующий инвариант в малом — фундаментальную группу в точке.

§ 42. Фундаментальная группа

Пусть ориентированный отрезок $\overline{w}$ непрерывно отображен в конечный или бесконечный полиэдр $\boldsymbol{K}^n$. Мы говорим тогда, что этим в полиэдре определяется *путь* w. Образы точек $\overline{w}$ называются точками пути. Если $\overline{P}$ и $\overline{Q}$ — начальная и конечная точки $\overline{w}$, P и Q — их образы, то P называется *начальной*, Q — *конечной точкой пути* и говорят, что w «ведет» из P в Q. Если точка непрерывно пробегает отрезок $\overline{w}$, перемещаясь из $\overline{P}$ в $\overline{Q}$, то образ этой точки «*пробегает*» непрерывно путь w из P в Q. При этом образ точки может оставаться неподвижным в полиэдре, так как наше определение не исключает возможности того, что $\overline{w}$ отображен целиком в одну точку. Тогда весь путь w состоит из этой точки.

Пусть прообраз пути w, отрезок $\overline{w}$, *топологически* отображен на другой ориентированный отрезок $\overline{w}'$ так, что начальная точка переходит в начальную, а конечная — в конечную. Тогда $\overline{w}'$ также отображен (посредством $\overline{w}$) однозначно и непрерывно в $\boldsymbol{K}^n$ и определяет там путь $\overline{w}'$. Мы рассматриваем w и w' как один и тот же путь[24]. Очевидно, точки пути w совпадают с точками пути w'**.

---

*В самое последнее время Гуревичем (W. Hurewicz, Amsterdam) даны определения так называемых r-мерных групп гомотопии, являющихся обобщением фундаментальной группы в классическом смысле: для $r = 1$ определение Гуревича дает обычную фундаментальную группу; для $r > 1$ группы Гуревича оказываются коммутативными. См. заметки Гуревича в Proced. Kon. Akad. Amsterdam за 1935–36 г. (*Прим. ред.*)

**Если желать полной строгости, то определение пути надо сформулировать так.

Если принять за прообраз $\overline{w}$ единичный отрезок прямой $0 \leqslant s \leqslant 1$, с начальной точкой $s = 0$ и конечной $s = 1$, то каждому значению s в инервале $0 \leqslant s \leqslant 1$ принадлежит одна определенная точка пути w. Точки w могут быть бесчисленным количеством способов отнесены к параметру, пробегающему значения от 0 до 1. Если s' — другой такой параметр, то s и s' связаны топологическим, т. е. монотонным преобразованием координат; s можно принять за время, в течение которого пробегается путь.

Если u — путь из P в Q, а v — из Q в R, то оба пути можно объединить в один. Для этого нужно оба прообраза $\overline{u}$ и $\overline{v}$ объединить в один, $\overline{w}$, и отобразить точки $\overline{w}$, как раньше. Образ $\overline{w}$ есть путь w, называемый *произведением* путей u и v и обозначаемый через

$$w = uv.$$

w получается, следовательно, при последовательном пробегании сначала пути u, а потом v. *Обратный* путь, w^{-1}, получается посредством изменения ориентации прообраза $\overline{w}$. Путь, начальная точка которого совпадает с конечной, называется *замкнутым*.

Последовательность, состоящая из конечного числа ориентированных ребер симплициального разбиения полиэдра $\boldsymbol{K}^n$, в которой конечная точка каждого ребра совпадает с начальной точкой следующего, мы будем называть *симплициальным путем*, ведущим из P в Q (если P — начальная точка первого, а Q — конечная точка последнего ребра). Симплициальный путь можно рассматривать как произведение отдельных ребер. В самом деле, каждое ориентированное ребро представляет (как одномерный симплекс) непрерывный (даже топологический) образ прямолинейного ориентированного одномерного симплекса, т. е. направленного отрезка, а потому является путем в смысле нашего определения.

Пусть отображение прообраза $\overline{w}$ пути $\overline{w}_0$ в полиэдр $\boldsymbol{K}^n$ испытывает гомотопную *деформацию*, оставляющую на месте начальную точку P и конечную точку Q пути. Тогда говорят, что путь w_0 (гомотопно)

Будем рассматривать непрерывные отображения φ направленных прямолинейных отрезков $\overline{w}$ в полиэдр $\boldsymbol{K}$. Два таких отображения, а именно, отображение φ_1 отрезка $\overline{w}_1$ и отображение φ_2 отрезка $\overline{w}_2$ называются эквивалентными, если существует топологическое отображение t отрезка $\overline{w}_1$ на отрезок $\overline{w}_2$ с сохранением ориентации (т. е. так, что начальная точка $\overline{w}_1$ переходит в начальную точку $\overline{w}_2$, а следовательно, конечная точка $\overline{w}_1$ — в конечную точку $\overline{w}_2$) и удовлетворяющее условию:

$$\varphi_2 t(x) = \varphi_1(x)$$

для любой точки x отрезка $\overline{w}_1$. Это определение эквивалентности удовлетворяет, как легко видеть, аксиомам равенства и ведет к разбиению всех наших отображений φ на классы эквивалентных между собой отображений. Путь и есть, по определению, класс эквивалентных между собой отображений φ.

Читатель должен раз навсегда усвоить, что путь и множество всех точек пути (т. е. множество точек $\boldsymbol{K}^n$, являющихся образами отрезка $\overline{w}$ при отображении φ) — разные вещи. (*Прим. ред.*)

деформируется (или испытывает гомотопную деформацию). Таким образом, если t — параметр, пробегающий значения от 0 до 1, и каждому значению t соответствует отображение g_t отрезка $\overline{w}$ в $\boldsymbol{K}^n$, в частности, значению $t = 0$ — отображение g_0 отрезка $\overline{w}$ на w_0, а значению $t = 1$ — отображение g_1 отрезка $\overline{w}$ на некоторый путь w_1; если, далее, образ $g_t(\overline{R})$ точки $\overline{R}$ отрезка $\overline{w}$ непрерывно зависит от t и R, причем образами начальной точки $\overline{P}$ и конечной точки $\overline{Q}$ при всех значениях t являются соответственно точки P и Q, то путь w_0 называется *гомотопно деформируемым* в w_1, а пути w_0 и w_1 — гомотопными друг другу в полиэдре $\boldsymbol{K}^n$. Очевидно, в этом случае имеет место и обратное — путь w_1 деформируем в w_0. Гомотопные между собой пути, как мы видим, всегда имеют одинаковые начальные и конечные точки.

Так же как при деформации отображения, мы можем теперь задать все отображения g_t отрезка $\overline{w}$ одним отображением f *полиэдра деформации* $\overline{w} \times \mathbf{t}$ где $\overline{w} \times \mathbf{t}$ представляет топологическое произведение отрезка $\overline{w}$ на единичный отрезок $t(0 \leqslant t \leqslant 1)$. За $\overline{w} \times \mathbf{t}$ можно взять, в частности, обыкновенный плоский прямоугольник, *прямоугольник деформации*. Тогда деформацию можно определить также следующим образом: путь w_0 деформируем в w_1, если существует непрерывное отображение f прямоугольника деформации $\overline{w} \times \mathbf{t}$ в полиэдр $\boldsymbol{K}^n$, при котором стороны $\overline{w} \times 0 = \overline{w}_0$ и $\overline{w} \times 1 = \overline{w}_1$ переходят соответственно в пути w_0 и w_1, а две другие стороны $\overline{P} \times \mathbf{t}$ и $\overline{Q} \times \mathbf{t}$ переходят соответственно в точки P и Q; $\overline{w} \times 0$ означает при этом топологическое произведение прообраза $\overline{w}$ на точку 0 отрезка $\mathbf{t}$. Связь между отображением f и отображениями g_t устанавливается, как и в случае деформации отображения, соотношениями

$$f(\overline{R} \times t) = g_t(\overline{R}).$$

Различие заключается лишь в том, что теперь отображение f должно удовлетворять еще дополнительному условию, — именно, переводить стороны $\overline{P} \times \mathbf{t}$ и $\overline{Q} \times \mathbf{t}$ в точки P и Q (рис. 77–79)*.

Если w_0 можно деформировать в w_1, а w_1 в w_2, то w_0 можно деформировать в w_2. В самом деле, рассмотрим прямоугольники дефор-

*Таким образом деформация пути есть деформация (непрерывное видоизменение) отображения φ отрезка $\overline{w}$ в полиэдр $\boldsymbol{K}^n$ (и, следовательно, всех эквивалентных с φ отображений). Деформация пути отнюдь не есть деформация множества точек пути; только усвоив это различие, читатель правильно поймет, например, доказанное выше свойство симметрии: если путь w_0 деформируем в w_1, то и путь w_1 деформируем в w_0.

Деформация закрепленной своими концами *веревки* или резиновой ленты в евклидовом пространстве является лишь частным случаем рассмотренных здесь деформаций. В самом деле, веревка не имеет двойных точек и при деформации не может пересекать сама себя. В общем же случае гомотопной деформации могут существовать и узловые точки, и самопересечения пути. Деформации таких типов, какие испытывает веревка, также поддаются математической обработке: они осуществляются *изотопными* деформациями *пространства* самого в себя.

маций, принадлежащие деформациям путей w_0 в w_1 и w_1 в w_2. Так как стороны этих прямоугольников, отображающиеся в w_1, представляют прообразы одного и того же пути w_1, то эти стороны $\overline{w}_1$ можно отождествить, причем так, что каждые две отождествленные точки будут иметь одинаковые образы в $\boldsymbol{K}^n$. Мы получим тогда новый прямоугольник, отображенный непрерывно в $\boldsymbol{K}^n$, две параллельные стороны которого переходят соответственно в w_0 и w_2, а две другие соответственно в P и в Q. А это и значит, что путь w_0 деформируем в w_2. На доказанной таким образом транзитивности понятия «деформируемость» основывается разбиение путей, соединяющих две точки, на классы деформируемых друг в друга путей.

Пусть

$$w_0 = a \dots b\, c_0 d \dots e$$

есть путь в полиэдре $\boldsymbol{K}^n$, представляющий произведение путей $a, \dots, b, c_0, d, \dots, e$, и пусть путь c_0 можно деформировать в c_1. Покажем, что тогда w_0 можно деформировать в

$$w_1 = a \dots b\, c_1 d \dots e.^*$$

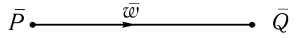


Рис. 77

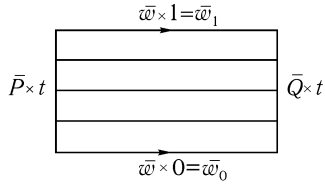


Рис. 78

В самом деле, по предположению существует непрерывное отображение «среднего» прямоугольника рис. 80, при котором $\overline{c}_0$ переходит в c_0, $\overline{c}_1$ в c_1, а вертикальные стороны переходят соответственно в общие начальную и конечную точки путей c_0 и c_1 (рис. 81). Это отображение среднего прямоугольника можно дополнить до отображения всего прямоугольника в $\boldsymbol{K}^n$, переводящего $\overline{a}\times 0, \dots, \overline{b}\times 0, \overline{d}\times 0, \dots, \overline{e}\times 0$ соответственно в пути $a, \dots, b, d, \dots, e$ и каждую вертикальную линию (за исключением вертикальных линий среднего прямоугольника) — в одну точку.

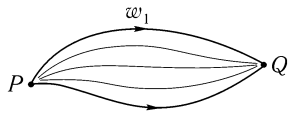


Рис. 79

Если в произведении ab первый (второй) множитель представляет путь, состоящий из одной точки, то ab можно деформировать в b (соответственно в a).

Доказательство. В прямоугольнике, приведенном на рис. 82, нижняя сторона состоит из двух частей $\overline{a}_0$ и $\overline{b}_0$. Соединим прямолинейным отрезком каждые две точки отрезка $\overline{b}_0$ и противоположной стороны $\overline{b}_1$ соответствующие друг другу при некотором линейном отображении, установленном между $\overline{b}_0$ и $\overline{b}_1$. Точно так же соединим прямолинейным отрезком каждую точку отрезка $\overline{a}_0$ с начальной точкой

* c_0 может быть также первым или последним сомножителем произведения.

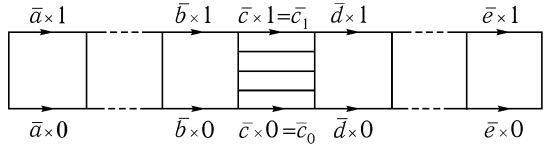


Рис. 80

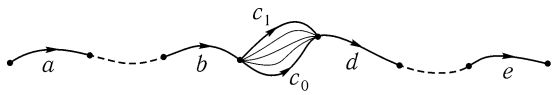


Рис. 81

стороны $\overline{b}_1$. Тогда прямоугольник можно непрерывно отобразить на $\overline{b}_1$ так, что каждый соединяющий отрезок перейдет в конец этого отрезка, лежащий на $\overline{b}_1$. Если теперь отобразить $\overline{b}_1$ на путь b, то мы получим отображение прямоугольника в $\boldsymbol{K}^n$, при котором $\overline{a}_0\overline{b}_0$ перейдет в ab, а обе вертикальные стороны прямоугольника перейдут в начальную и конечную точки пути b. Но это и значит, что ab можно деформировать в b.

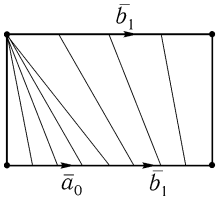


Рис. 82

Если из двух деформируемых друг в друга путей w_0 и w путь w_0 состоит из одной точки, то говорят, что путь w сводится в точку или *гомотопен нулю*. Поэтому замкнутый путь w гомотопен в $\boldsymbol{K}^n$ нулю, если прямоугольник можно непрерывно отобразить в $\boldsymbol{K}^n$ так, что одна его сторона $\overline{w}$ перейдет в w.

Пример. Пусть полиэдр $\boldsymbol{K}^n$ есть n-мерное евклидово пространство $\boldsymbol{R}^n$. Тогда каждый замкнутый путь в нем гомотопен нулю. В самом деле, каждую точку пути w можно заставить перемещаться прямолинейно с постоянной скоростью так, чтобы через секунду она достигла начальной точки w, и в соответствии с этим можно построить требуемое отображение прямоугольника деформации. То же заключение справедливо, если $\boldsymbol{K}^n$ представляет n-мерный симплекс $\boldsymbol{E}^n$ (например, расположенный прямолинейно в $\boldsymbol{R}^n$). В частности, $(n = 1)$ замкнутый путь w, состоящий из отрезка a, пробегаемого сперва в одну сторону, а затем обратно, гомотопен на a нулю. Отсюда следует, что всякий путь w, пробегаемый *сначала в одну сторону, а затем обратно*, т. е. путь вида $w = uu^{-1}$, в любом полиэдре гомотопен нулю. Чтобы убедиться в этом, достаточно непрерывно отобразить ориентированный отрезок a на путь u. Тогда мы получим непрерывное отображение, переводящее

прямоугольник деформации в полиэдр таким образом, что одна сторона прямоугольника переходит в путь w, а остальные — в начальную точку этого пути.

Гомотопные нулю замкнутые пути можно охарактеризовать также следующим образом: *замкнутый путь w гомотопен нулю в том и только в том случае, если на него можно натянуть особый элемент поверхности.* При этом особым элементом поверхности мы называем образ круга при непрерывном отображении его (круга) в полиэдр $\boldsymbol{K}^n$.

В самом деле, вместо того чтобы производить непосредственно непрерывное отображение χ нашего прямоугольника в полиэдр $\boldsymbol{K}^n$, переводящее $\overline{w}$ в w, а остальные стороны в начальную точку w, мы можем разбить это отображение на два. Именно, сначала мы строим непрерывное отображение φ прямоугольника деформации на круг $\boldsymbol{K}^2$, переводящее сторону $\overline{w}_1$ в граничную окружность, а остальные три стороны в одну и ту же точку O (рис. 83) и все вертикальные отображающие отрезки прямоугольника линейно на соответствующие хорды круга, а затем отображаем круг в полиэдр $\boldsymbol{K}^n$ посредством отображения ψ; тогда $\chi = \psi\varphi$. Очевидно, это всегда возможно. По теореме IV § 8 ψ является непрерывным отображением. Таким образом, если w гомотопен нулю, то на него можно натянуть особый элемент поверхности. Обратно, если задано непрерывное отображение ψ круга $\boldsymbol{K}^2$ в полиэдр $\boldsymbol{K}^n$, то тем самым определено одновременно отображение $\psi\varphi = \chi$ прямоугольника деформации.

Мы предположим теперь, что полиэдр $\boldsymbol{K}^n$ есть *связный* полиэдр. Тогда каждые две точки его можно соединить путем. Рассмотрим в $\boldsymbol{K}^n$ всевозможные замкнутые пути, выходящие из какой-нибудь произвольной, но фиксированной начальной точки O. Эти пути распадаются на классы деформируемых друг в друга путей.

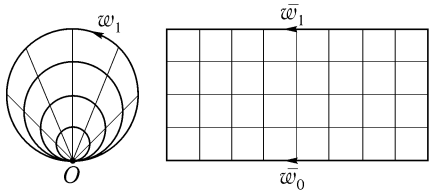


Рис. 83

Мы будем называть их просто *классами путей*. Класс путей, содержащий путь w, мы будем обозначать иногда символом

$$\{w\}.$$

Будем рассматривать класс $\{w_1 w_2\}$, содержащий произведение путей w_1 и w_2, как произведение классов $\{w_1\}$ и $\{w_2\}$. Тогда классы путей будут играть роль элементов некоторой группы, так называемой *фундаментальной группы* F связного полиэдра[25]. Очевидно, произведение классов $\{w_1\}$ и $\{w_2\}$ не зависит от того, какие именно представители w_1 и w_2 этих классов берутся для составления произведения. В самом деле, как показано на стр. 196–197, если w_1 и w_2 заменить гомотопными

им путями w_1' и w_2', то $w_1'w_2'$ гомотопен w_1w_2, т. е. определяет тот же класс.

Установленная нами групповая операция (перемножение) удовлетворяет *групповым аксиомам*:

1) ассоциативный закон, очевидно, выполняется;

2) существует единичный элемент, — именно, класс путей, гомотопных нулю. В самом деле, по доказанному на стр. 197, если умножить произвольный путь слева или справа на путь, гомотопный нулю, то получается путь, принадлежащий тому же классу, что и исходный;

3) для каждого элемента существует обратный элемент, — именно, класс, содержащий пробегаемый в противоположном направлении элемент исходного класса. Это следует из того, что всякий путь вида uu^{-1} гомотопен нулю. Напротив, коммутативный закон не всегда выполняется; $\{w_1\}\{w_2\}$, вообще говоря, не равняется $\{w_2\}\{w_1\}$, т. е. фундаментальная группа, в противоположность группам Бетти, не является, вообще говоря, абелевой. Мы займемся впоследствии вопросом о связи между фундаментальной группой и одномерной группой Бетти (§ 48).

Класс путей $\{w_1\}\{w_2\}$ содержит произведение w_1w_2, а также и каждый путь, получающийся из w_1w_2 при помощи деформации. В частности, $\{w_1\}\{w_2\}$ содержит путь w, получающийся из w_1w_2 при сдвиге его «середины» с точки O (рис. 84); w_1 и w_2 могут принадлежать одному и тому же классу и даже совпадать.

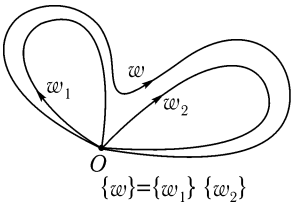


Рис. 84

Рассматриваемая как абстрактная группа, фундаментальная группа не зависит от выбора начальной точки O, т. е. связный полиэдр $\boldsymbol{K}^n$ определяет ее полностью. В самом деле, пусть в качестве начальной точки взята вместо точки O точка O'. Проведем из точки O в точку O' какой-нибудь путь v и поставим в соответствие классу $\{w'\}$ путей, исходящих из O', класс

$$\{w\} = \{vw'v^{-1}\}$$

путей, выходящих из O. Класс $\{w\}$, очевидно, не зависит от выбора пути w' из класса, которому w' принадлежит. Обратно, классу $\{w\}$ путей, исходящих из O, поставим в соответствие класс $\{v^{-1}wv\}$ путей, выходящих из O'. Такое соответствие является как раз обратным предыдущему, так как на основании первого соответствия мы из w' получаем $\{w\} = \{vw'v^{-1}\}$, а на основании второго из $\{w\}$ получаем

$$\{v^{-1}wv\} = \{v^{-1}(vw'v^{-1})v\} = \{w'\}.$$

Таким образом соответствие, установленное между классами путей, выходящих из O и O', является взаимно однозначным. Кроме того, оно

изоморфно: произведению

$$\{w_1'\}\{w_2'\} = \{w_1'w_2'\}$$

соответствует класс путей

$$\{vw_1'w_2'v^{-1}\} = \{vw_1'v^{-1}vw_2'v^{-1}\} = \{vw_1'v^{-1}\}\{vw_2'v^{-1}\},$$

т. е. произведение классов, соответствующих классам $\{w_1'\}$ и $\{w_2'\}$. Во время преобразований мы пользовались тем, что путь $v^{-1}v$ гомотопен нулю и что умножение на гомотопный нулю путь не меняет исходного класса путей.

Изоморфизм между фундаментальными группами $\mathrm{F}(O)$ (с начальной точкой O) и $\mathrm{F}(O')$ (с начальной точкой O') зависит от выбора вспомогательного пути v. Если вместо v взять вспомогательный путь u, то соответствие

$$\{w\} \to \{v^{-1}wv\} \tag{1}$$

заменится соответствием

$$\{w\} \to \{u^{-1}wu\} = \{u^{-1}vv^{-1}wvv^{-1}u\} = \{(u^{-1}v)v^{-1}wv(u^{-1}v)^{-1}\}, \tag{2}$$

т. е. для того чтобы из изоморфизма (1) получить изоморфизм (2), мы должны трансформировать все элементы группы $\mathrm{F}(O')$ одним и тем же элементом $\{u^{-1}v\}$*. Таким образом, *изоморфизм между* $\mathrm{F}(O)$ и $\mathrm{F}(O')$ *определяется только с точностью до внутренних автоморфизмов группы* $\mathrm{F}(O')$.

Мы видели (§ 27 гл. II), что при непрерывном отображении φ полиэдра $\boldsymbol{K}^n$ в полиэдр $\mathbf{K}^m$ k-мерная группа Бетти $\boldsymbol{K}^n$ испытывает гомоморфное отображение в k-мерную группу Бетти полиэдра $\mathbf{K}^m$. Докажем сейчас соответствующую теорему для фундаментальной группы. Прежде всего *при непрерывном отображении* φ *всякий путь* w *полиэдра* $\boldsymbol{K}^n$ *переходит в путь* w' *полиэдра* $\mathbf{K}^m$, так как прообраз $\overline{w}$ пути w то подвергается сначала непрерывному отображению f на w, а затем непрерывному отображению φ. Произведение отображений φf является снова непрерывным отображением и определяет поэтому путь w' в $\mathbf{K}^m$. Далее, *если* w_0 *и* w_1 *представляют два деформируемые друг в друга пути в* $\boldsymbol{K}^n$, *то их отображения* w_0' *и* w_1' *также деформируемы друг в друга.* В самом деле, гомотопность путей w_0 и w_1 означает, что прямоугольник деформации $0 \leqslant s \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant 1$ можно непрерывно отобразить в $\boldsymbol{K}^n$ так, что параллельные стороны $t = 0$ и $t = 1$ перейдут в w_0 и w_1, а две другие параллельные стороны перейдут соответственно в общую начальную точку A и общую конечную точку B путей w_0 и w_1.

*То-есть умножить слева на $\{u^{-1}v\}$, справа на $\{u^{-1}v\}^{-1}$. Такая трансформация осуществляет внутренний автоморфизм фундаментальной группы. См. *О. Шмидт.* Абстрактная теория групп, ОНТИ, 1936.

Производя затем отображение φ, мы получим непрерывное отображение прямоугольника деформации в полиэдр $\mathbf{K}^m$, переводящее стороны $t = 0$ и $t = 1$ в w'_0 и w'_1, а $s = 0$ и $s = 1$ соответственно в общую начальную точку A' и общую конечную точку B' путей w'_0 и w'_1. А это и значит, что w'_0 и w'_1 гомотопны в $\mathbf{K}^m$. Наконец, *произведение двух путей переходит, очевидно, в произведение их образов.*

Пусть теперь O является начальной точкой замкнутых путей фундаментальной группы F полиэдра $\boldsymbol{K}^n$. Примем ее образ O' за начальную точку замкнутых путей фундаментальной группы F′ полиэдра $\mathbf{K}^m$. Так как при непрерывном отображении гомотопные пути переходят в гомотопные, то каждый класс путей группы F отображается на определенный класс путей группы F′. Так как, далее, образ произведения двух путей равен произведению из образов, то это отображение группы F в F′ представляет гомоморфизм. Говорить о гомоморфном отображении группы F в F′ можно и в том случае, когда за начальную точку путей в $\mathbf{K}^m$ берется не O', а какая-нибудь другая точка Ω. В самом деле, между группами $\mathrm{F}'(O')$ и $\mathrm{F}(\Omega)$ существует изоморфизм, устанавливаемый посредством вспомогательного пути, идущего из O' в Ω. Если, однако, производится гомоморфное отображение группы F в $\mathrm{F}'(O')$, а затем изоморфное отображение группы $\mathrm{F}'(O')$ на $\mathrm{F}(\Omega)$, то при этом получается гомоморфное отображение Φ группы $\mathrm{F}(O)$ в $\mathrm{F}(\Omega)$. В силу сказанного на стр. 201, при изменении вспомогательного пути Φ умножается только на внутренний автоморфизм группы $\mathrm{F}(\Omega)$. Таким образом окончательно получается следующая теорема.

Теорема. *При непрерывном отображении φ полиэдра $\boldsymbol{K}^n$ в полиэдр $\mathbf{K}^m$ фундаментальная группа* F *полиэдра $\boldsymbol{K}^n$ подвергается гомоморфному отображению* Φ *в фундаментальную группу* **F** *полиэдра $\mathbf{K}^m$. Φ определяется только с точностью до внутренних автоморфизмов группы* **F**. *Если $\boldsymbol{K}^n$ и $\mathbf{K}^m$ гомеоморфны, а φ является топологическим отображением $\boldsymbol{K}^n$ в $\mathbf{K}^m$, то Φ представляет изоморфизм, т. е. гомеоморфные полиэдры имеют изоморфные фундаментальные группы.*

Последняя часть этой теоремы вытекает непосредственно из того, что при топологическом отображении соответствие между путями $\boldsymbol{K}^n$ и $\mathbf{K}^m$ взаимно однозначно.

§ 43. Примеры

1. *Фундаментальная группа топологического произведения двух полиэдров $\boldsymbol{K}_1$ и $\boldsymbol{K}_2$ равна прямому произведению фундаментальных групп обоих сомножителей.*

Доказательство. Всякая точка P топологического произведения

$\boldsymbol{K}_1 \times \boldsymbol{K}_2$ однозначно представляется (см. стр. 76) в виде

$$P = P_1 \times P_2. \qquad (P)$$

Если $\overline{\boldsymbol{K}}$ есть какой-нибудь полиэдр, а g — непрерывное отображение полиэдра $\overline{\boldsymbol{K}}$ в $\boldsymbol{K}_1 \times \boldsymbol{K}_2$, переводящее точку $\overline{P}$ полиэдра $\overline{\boldsymbol{K}}$ в точку P произведения $\boldsymbol{K}_1 \times \boldsymbol{K}_2$:

$$\overline{P} \to P, \qquad (g)$$

то соотношение (P) определяет непрерывное отображение g_1

$$\overline{P} \to P_1 \qquad (g_1)$$

полиэдра $\overline{\boldsymbol{K}}$ в $\boldsymbol{K}_1$ и непрерывное отображение g_2

$$\overline{P} \to P_2 \qquad (g_2)$$

полиэдра $\overline{\boldsymbol{K}}$ в $\boldsymbol{K}_2$. Если, напротив, заданы непрерывные отображения g_1 и g_2, то с помощью соотношения (P) определяется непрерывное отображение g. В частности, если $\overline{\boldsymbol{K}}$ есть ориентированный *отрезок*, то отображения g, g_1, g_2 определяют соответственно пути w, w_1, w_2 в $\boldsymbol{K}_1 \times \boldsymbol{K}_2$, $\boldsymbol{K}_1$, $\boldsymbol{K}_2$. *Таким образом каждому пути w в $\boldsymbol{K}_1 \times \boldsymbol{K}_2$ ставится в соответствие пара путей w_1, w_2 и обратно.* Если, с другой стороны, $\overline{\boldsymbol{K}}$ есть *прямоугольник*, отображающийся посредством g в $\boldsymbol{K}_1 \times \boldsymbol{K}_2$ так, что три стороны его переходят в точку $O = O_1 \times O_2$, а четвертая сторона — в путь w, то эти же три стороны переводятся отображением g_i в точку O_i, а четвертая — в путь w_i $(i = 1, 2)$. При этом w_1, w_2 есть пара путей, поставленная в соответствие пути w. Поэтому, если w гомотопен нулю в $\boldsymbol{K}_1 \times \boldsymbol{K}_2$, то w_1 гомотопен нулю в $\boldsymbol{K}_1$, а w_2 в $\boldsymbol{K}_2$. Обратное также справедливо: если оба пути w_1 и w_2 гомотопны нулю, то существует отображение g_i прямоугольника $\overline{\boldsymbol{K}}$ в $\boldsymbol{K}_i$, переводящее три стороны прямоугольника в точку O_i, а четвертую в путь w_i. Отображение g, определяемое отображениями g_1 и g_2, переводит те же три стороны прямоугольника в точку $O = O_1 \times O_2$, а четвертую — в путь w. Выберем теперь за начальную точку замкнутых путей в $\boldsymbol{K}_i$ точку O_i, а в $\boldsymbol{K}_1 \times \boldsymbol{K}_2$ точку $O_1 \times O_2$. Тогда каждому классу путей произведения $\boldsymbol{K}_1 \times \boldsymbol{K}_2$ соответствует взаимно однозначно пара классов путей в $\boldsymbol{K}_1$ и $\boldsymbol{K}_2$. Произведение двух классов путей из $\boldsymbol{K}_1 \times \boldsymbol{K}_2$ можно получить, очевидно, перемножая соответствующие классы путей в $\boldsymbol{K}_1$ и $\boldsymbol{K}_2$. Отсюда и следует, что фундаментальная группа произведения $\boldsymbol{K}_1 \times \boldsymbol{K}_2$ представляет прямое произведение фундаментальных групп сомножителей $\boldsymbol{K}_1$ и $\boldsymbol{K}_2$.

2. Фундаментальная группа *n-мерного симплекса*, так же как и n-мерного евклидова пространства, содержит только единичный элемент, так как каждый замкнутый путь в симплексе (в евклидовом пространстве) гомотопен нулю.

3. Фундаментальная группа *n-мерной сферы* $\boldsymbol{S}^n$ при $n > 1$ также состоит только из единичного элемента. Для доказательства допустим сначала, что замкнутый путь w сферы $\boldsymbol{S}^n$ не проходит через точку сферы O', диаметрально-противоположную начальной точке пути. Тогда, заставляя все точки пути w непрерывно скользить по меридианам, проходящим через точки O

и O', так, чтобы в один и тот же интервал времени (например, в одну секунду) они попали в точку O, мы получим деформацию пути w в точку O. Пусть теперь наш путь проходит и через диаметрально-противоположную точку O'. Тогда мы разбиваем сферу $\boldsymbol{S}^n$ на симплексы так, чтобы O было вершиной симплициального разбиения, а O' — внутренней точкой n-мерного симплекса, и производим, как в § 31, симплициальное приближение отображения прообраза $\overline{w}$ пути w в $\boldsymbol{S}^n$. При этом w испытывает деформацию, «освобождающую» точку O', но не сдвигающую путь с начальной точки O. Мы приходим, таким образом, к рассмотренному только что случаю. При доказательстве нельзя обойтись без симплициального приближения, так как может случиться, что рассматриваемый путь проходит через каждую точку сферы.

4. Полиэдр, фундаментальная группа которого состоит только из единичного элемента, называется просто-связным. Такой полиэдр характеризуется, следовательно, тем, что каждый замкнутый путь в нем можно свести в точку или, что то же, на каждый замкнутый путь можно натянуть элемент поверхности. Этот элемент поверхности, само собой разумеется, может быть расположен в полиэдре с особенностями (например, может иметь точки разветвления, складки, самопересечения и т. п.). Вопрос о том, насколько полиэдр определяется условием быть просто-связным для случая, когда полиэдр является многообразием, связан с важнейшими нерешенными проблемами топологии. Для одного измерения вопрос решается легко, так как существует всего одно конечное и одно бесконечное одномерное связное многообразие, именно окружность (одномерная сфера) и прямая линия. Прямая линия является просто-связным полиэдром. Для двух измерений, как мы увидим, определив фундаментальные группы всех двумерных связных многообразии (всех замкнутых поверхностей — см. § 47), двумерная сфера является единственным конечным просто-связным двумерным многообразием. евклидова плоскость является единственным бесконечным просто-связным двумерным многообразием[26]. Для трех измерений представляется вероятным, что трехмерная сфера является единственным конечным просто-связным многообразием (гипотеза Пуанкаре). Для четырех измерений топологическое произведение двух двумерных сфер дает пример конечного многообразия, являющегося, как показано в примере 1 этого параграфа, просто-связным, но не гомеоморфного четырехмерной сфере. В самом деле, двумерное число Бетти для топологического произведения двух сфер $p^2 = 2$*, в то время как двумерное число Бетти четырехмерной сферы в силу § 19 должно быть равно нулю.

*Что двумерное число Бетти топологического произведения двух сфер $\boldsymbol{K}_1$ и $\boldsymbol{K}_2$, наверное, не равно нулю, можно показать, например, так: посредством указанного на стр. 203 отображения g_1 сфера $\boldsymbol{K}_1 \times P_2$ (P_2 есть точка сферы $\boldsymbol{K}_2$) топологически отображается на сферу $\boldsymbol{K}_1$. Если произвести симплициальное разбиение сферы $\boldsymbol{K}_1 \times P_2$ и затем когерентно ориентировать его, то мы получим двумерный цикл U^2, не гомологичный нулю в $\boldsymbol{K}_1 \times \boldsymbol{K}_2$. В самом деле, если U^2 гомологично нулю, то его образ $'U^2$ при отображении g_1 также гомологичен нулю (§ 27, теорема 1). Однако цикл $'U^2$ представляет когерентно ориентированную сферу $\boldsymbol{K}_1$, а потому на $\boldsymbol{K}_1$ он не может быть гомологичен нулю.

§ 44. Группа симплициальных путей симплициального комплекса

Итак, фундаментальная группа F связного полиэдра *определена* как топологический инвариант. Для того чтобы *вычислить* этот топологический инвариант, мы будем исходить, как и в случае группы Бетти, из некоторого заданного симплициального разбиения нашего полиэдра. С помощью этого разбиения мы определим новую группу, *группу симплициальных путей*. Определение этой группы не будет топологически инвариантным, но зато мы будем в состоянии вычислить ее. Далее, пользуясь симплициальным приближением, мы покажем, что эта группа совпадает с фундаментальной группой, чем и будет доказана топологическая инвариантность группы симплициальных путей.

Рассмотрим конечный или бесконечный полиэдр $\boldsymbol{K}^n$, заданный в некотором фиксированном симплициальном разбиении. Пусть его ребра (одномерные симплексы) определенным образом ориентированы и обозначены через $a_1, a_2, \ldots$. Мы будем рассматривать сначала только симплициальные пути комплекса $\boldsymbol{K}^n$, т. е. произведения вида

$$w = a_l^{\varepsilon_l} a_m^{\varepsilon_m} \ldots a_z^{\varepsilon_z} \quad (\varepsilon_l = \pm 1,\ \varepsilon_m = \pm 1,\ \ldots,\ \varepsilon_z = \pm 1),$$

в которых конечная точка симплекса $a_l^{\varepsilon_l}$ всегда совпадает с начальной точкой $a_m^{\varepsilon_m}$ и т. д. За симплициальный путь мы будем считать также и такой путь, который не содержит ни одного ребра, т. е. состоит только из одной вершины симплициального разбиения.

Чтобы избежать путаницы, мы будем иногда называть пути и деформации, рассмотренные в § 42, *непрерывными путями и непрерывными деформациями* в противоположность симплициальным путям и их комбинаторным деформациям, которые будут сейчас определены.

Если мы будем обходить в определенном направлении, выходя из какой-нибудь вершины, границу двумерного симплекса $\boldsymbol{E}^2$ комплекса $\boldsymbol{K}^n$, то мы получим замкнутый симплициальный путь, например

$$a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} a_3^{\varepsilon_3}.$$

Такой путь называется *граничным путем* треугольника $\boldsymbol{E}^2$. Каждый треугольник имеет шесть различных граничных путей, так как обход можно начинать из любой из трех вершин и идти в одном из двух противоположных направлений.

Введем теперь *элементарные комбинаторные деформации* (α) и (β), которые позволят нам получать из симплициальных путей другие симплициальные пути.

(α). Деформация (α) заключается в том, что мы вставляем или опускаем ребро, пробегаемое последовательно сначала в одном, а затем в противоположном направлении: симплициальный путь

$$a_l^{\varepsilon_l} \ldots a_p^{\varepsilon_p} a_q^{\varepsilon_q} \ldots a_z^{\varepsilon_z}$$

заменяется путем

$$a_l^{\varepsilon_l} \dots a_p^{\varepsilon_p} a_\rho^{\varepsilon_\rho} a_\rho^{-\varepsilon_\rho} a_q^{\varepsilon_q} \dots a_z^{\varepsilon_z}.$$

При этом начальная точка симплекса $a_\rho^{\varepsilon_\rho}$ должна совпадать с конечной точкой $a_p^{\varepsilon_p}$, а следовательно, также с начальной точкой $a_q^{\varepsilon_q}$. Обратно, в выражении для симплициального пути w сочетание вида $a_\rho^{\varepsilon_\rho} a_\rho^{-\varepsilon_\rho}$ может быть опущено*. Применяя деформацию (α) последовательно соответствующее число раз, мы можем вставить в симплициальный путь $w = w_1 w_2$ произвольный симплициальный путь u, пробегаемый сперва в одном, а затем в противоположном направлении. Тогда из пути w получится симплициальный путь

$$w' = w_1 u u^{-1} w_2.$$

(β). Эта деформация состоит в том, что мы вставляем или опускаем граничный путь двумерного симплекса, т. е. идем по заданному пути w до некоторой вершины, затем проходим граничный путь, начинающийся и кончающийся в этой вершине, и, наконец, остаток пути w.

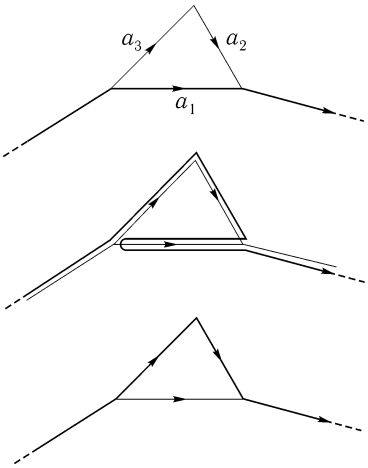


Рис. 85

Введем еще третью элементарную комбинаторную деформацию, сводящуюся к первым двум.

(γ). В симплициальном пути w симплекс $a_1^{\varepsilon_1}$, принадлежащий граничному пути $a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} a_3^{\varepsilon_3}$ двумерного симплекса, заменяется выражением $(a_2^{\varepsilon_2} a_3^{\varepsilon_3})^{-1}$ или, наоборот, — выражение $a_3^{-\varepsilon_3} a_2^{-\varepsilon_2}$ заменяется симплексом $a_1^{\varepsilon_1}$. Деформацию γ можно осуществить, очевидно, при помощи (β) и (α) (рис. 85; на нем $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = -1$, $\varepsilon_3 = -1$).

Два симплициальных пути w и w', переводимые один в другой конечным числом элементарных комбинаторных деформаций, называются комбинаторно деформируемыми (друг в друга) или *комбинаторно гомотопными*. Такие пути имеют совпадающие начальные и совпадающие конечные точки.

*Если, однако, w — замкнутый путь, причем первый и последний симплексы обратны друг другу, так что

$$w = a_l^{\varepsilon_l} \dots a_l^{-\varepsilon_l},$$

то $a_l^{\varepsilon_l}$ и $a_l^{-\varepsilon_l}$ нельзя сократить друг с другом, т. е. при комбинаторных деформациях начало и конец симплициального пути не должны меняться.

Пусть теперь комплекс $\boldsymbol{K}^n$ есть связный комплекс. Замкнутые симплициальные пути, выходящие из фиксированной вершины O, распадаются на классы комбинаторно гомотопных путей. Мы будем называть их *классами симплициальных путей*. Класс симплициальных путей пути w мы будем обозначать пока символом $[w]$. Если под произведением двух классов $[w_1]$ и $[w_2]$ понимать класс $[w_1 w_2]$, то классы симплициальных путей можно рассматривать как элементы группы F_k — группы симплициальных путей заданного симплициального разбиения полиэдра $\boldsymbol{K}^n$. Очевидно, данное определение произведения двух классов не зависит от того, какие именно симплициальные пути w_1 и w_2 выбираются в качестве представителей классов $[w_1]$ и $[w_2]$. Так же как и в случае фундаментальной группы, можно показать, что все групповые аксиомы выполняются и что группа не меняется, если вместо O мы возьмем в качестве начальной точки симплициальных путей другую вершину O'.

Группа симплициальных путей F_k *полиэдра* $\boldsymbol{K}^n$ *совпадает с его фундаментальной группой* F. Чтобы показать это, заметим сначала, что каждую комбинаторную деформацию можно осуществить как непрерывную деформацию. В самом деле, граница треугольника и путь, проходимый туда и обратно, непрерывно гомотопны нулю. Поэтому, вместо того чтобы просто «опустить» их, мы можем свести их в точку (стр. 197, при этом может не остаться вообще никакого пути). Отсюда следует, что если выбрать в качестве начальной точки непрерывных путей группы F и симплициальных путей группы F_k одну и ту же вершину O симплициального разбиения полиэдра $\boldsymbol{K}^n$, то каждый класс симплициальных путей $[w]$ будет целиком лежать в классе непрерывных путей $\{w\}$. Поэтому доказательство совпадения групп F_k и F проводится аналогично доказательству инвариантности групп Бетти. Именно, мы должны показать две вещи.

(I). Каждый замкнутый непрерывный путь, имеющий начальной точкой вершину O, можно непрерывно деформировать в симплициальный путь. Другими словами, в каждом $\{w\}$-классе лежит *по крайней мере* один $[w]$-класс.

(II). Если симплициальный путь с начальной точкой O непрерывно гомотопен нулю в $\boldsymbol{K}^n$, то он может быть сведен в O также посредством комбинаторных деформаций[27]. Поэтому в каждом $\{w\}$-классе лежит *самое большее* один $[w]$-класс. Соответствие между элементами групп F и F_k оказывается, таким образом, взаимно однозначным. А так как для определения произведения двух элементов можно пользоваться, в частности, симплициальными путями, то это соответствие является изоморфным.

Предложения (I) и (II) будут доказаны с помощью теоремы о деформации § 31.

(I). Пусть w есть произвольный выходящий из O замкнутый путь, имеющий прообразом отрезок $\overline{w}$. По теореме о деформации отображе-

ние g_0 отрезка $\overline{w}$ на w можно деформировать в симплициальное отображение g_1 достаточно мелкого подразделения отрезка $\overline{w}$. Начальная и конечная точки отрезка $\overline{w}$ в любой момент деформации отображаются в точку O, так как при деформации образ каждой точки отрезка $\overline{w}$ не покидает симплекса комплекса $\boldsymbol{K}^n$, которому этот образ принадлежал в начале деформации. Поэтому получающийся при деформации из $\boldsymbol{w} = g_0(\overline{w})$ путь $g_1(\overline{\boldsymbol{w}})$ либо является точкой O, либо состоит только из ребер полиэдра $\boldsymbol{K}^n$, между которыми могут быть вставлены еще некоторые пути, изображаемые точками*. Как показано на стр. 197, пути, изображаемые точками, могут быть опущены. Поэтому путь $\boldsymbol{w}$ гомотопен некоторому симплициальному пути.

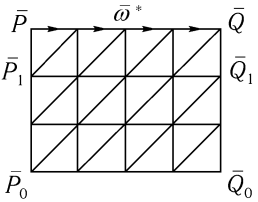


Рис. 86

(II). Если w есть замкнутый симплициальный путь, сводящийся непрерывной деформацией в начальную точку O, то прямоугольник деформации $\overline{P}\,\overline{P}_0\overline{Q}_0\overline{Q}$ можно непрерывно отобразить в $\boldsymbol{K}^n$ так, что сторона $\overline{P}\,\overline{Q} = \overline{w}$ перейдет в w, а остальные стороны — в точку O (рис. 86). Отметим на $\overline{w}$ точки, имеющие образами вершины симплексов пути w, и проведем через эти точки вертикальные прямые. Далее, проведем дополнительные вертикальные и горизонтальные прямые, которые вместе с уже проведенными вертикальными прямыми покрывают прямоугольник деформации настолько мелкой сеткой, что все прямоугольники сетки, примыкающие к одной вершине ее, всегда отображаются внутрь некоторой симплициальной звезды полиэдра $\boldsymbol{K}^n$ (по теореме о равномерной непрерывности стр. 44 разбиение прямоугольника $\overline{P}\,\overline{P}_0\overline{Q}_0\overline{Q}$ такой сеткой всегда возможно). Проведя еще диагонали прямоугольников, мы превратили сетку в симплициальный комплекс $\overline{\boldsymbol{K}}^2$. По теореме о деформации отображение g_0 комплекса $\overline{\boldsymbol{K}}^2$ в $\boldsymbol{K}^n$ можно деформировать в симплициальное отображение g_1. Пусть $\overline{w}^*$ означает подразделенную сторону $\overline{w}$ прямоугольника деформации. Тогда образ ее $g_0(\overline{w}^*)$ представляет подразделенный симплициальный путь w. Отображение g_0 переводит стороны $\overline{P}\,\overline{P}_0$, $\overline{P}_0\overline{Q}_0$, $\overline{Q}_0\overline{Q}$ в нульмерный симплекс O. Но при деформации отображения g_0 в g_1 образ каждой точки отображаемого отрезка не покидает симплекса комплекса $\boldsymbol{K}^n$, в котором этот образ находился в начале деформации; поэтому при деформации образом каждого отрезка разбиения пути $\overline{P}\,\overline{P}_0\overline{Q}_0\overline{Q}$ все время является точка O. По тем же причинам, если образом точки деления отрезка $\overline{w}$ (т. е. образом вершины разбиения $\overline{w}^*$) при g_0 является вершина комплекса $\boldsymbol{K}^n$, то этот образ не изменяется во все время деформации; если же образом такой точки является внутренняя точка ребра a пути w, то эта точка пе-

* То-есть вершины комплекса являются образами отрезков подразделения $\overline{w}$.

реходит в вершину ребра a. Поэтому путь $g_1(\overline{w}^*)$, получающийся при деформации из $g_0(\overline{w}^*)$, состоит из тех же ребер, что и w (если не обращать внимания на пути, изображаемые точками, которые могут быть опущены), причем, однако, некоторые ребра могут, вообще говоря, пробегаться несколько раз туда и обратно. Таким образом от w к $g_1(\overline{w}^*)$ во всяком случае можно перейти при помощи ряда последовательных комбинаторных деформаций типа (α).

Переведем теперь путь $\overline{w}^*$ на $\overline{\boldsymbol{K}}^2$ посредством ряда комбинаторных деформаций в путь $\overline{P}\,\overline{P}_0\overline{Q}_0\overline{Q}$. Это можно сделать, например, следующим образом: заменим сначала каждый отрезок пути $\overline{w}^*$ двумя другими сторонами треугольника разбиения, примыкающего к этому отрезку. Мы получим тогда ведущий из $\overline{P}$ в $\overline{Q}$ путь, представляющий ломаную линию, состоящую попеременно из вертикальных и диагональных отрезков. Заменим, далее, каждый диагональный отрезок этой линии двумя другими сторонами лежащего под этим отрезком треугольника (примыкающего к отрезку) и опустим вертикальные отрезки, пробегаемые туда и обратно. Мы получим тогда новый путь $\overline{P}\,\overline{P}_1\overline{Q}_1\overline{Q}$. Применяя к $\overline{P}_1\overline{Q}_1$ такой же процесс и поступая таким же образом далее, мы придем в конце концов к пути $\overline{P}\,\overline{P}_0\overline{Q}_0\overline{Q}$. Однако всякая примененная к $\overline{w}^*$ комбинаторная деформация определяет в силу симплициального отображения g_1 комбинаторную деформацию пути $g_1(\overline{w}^*)$ [эта деформация может, правда, оказаться тождественной, т. е. не менять пути $g_1(\overline{w}^*)$]. Именно, операции (β), примененной к треугольнику $\boldsymbol{E}^2$ комплекса $\overline{\boldsymbol{K}}^2$, соответствует в $\boldsymbol{K}^n$ операция (β) или (α), или тождественная деформация, смотря по тому, отображается ли $\boldsymbol{E}^2$ в треугольник, в отрезок или в вершину комплекса $\boldsymbol{K}^n$, операции же (α), примененной к отрезку $\boldsymbol{E}^1$ комплекса $\overline{\boldsymbol{K}}^2$, соответствует в $\boldsymbol{K}^n$ операция (α) или тождественное преобразование, смотря по тому, переходит ли $\boldsymbol{E}^1$ в отрезок комплекса $\boldsymbol{K}^n$ или в его вершину.

Таким образом посредством комбинаторных деформаций w можно перевести в $g_1(\overline{w}^*)$, а затем в образ пути $\overline{P}\,\overline{P}_0\overline{Q}_0\overline{Q}$. Этот образ является, однако, точкой O. Поэтому w комбинаторно гомотопен нулю.

Этим доказано, что инвариантно определенная фундаментальная группа F совпадает с комбинаторно определенной группой симплициальных путей F_k. В дальнейшем мы будем поэтому обе группы обозначать одинаковыми буквами.

Из доказанной тождественности обеих групп вытекает еще, что *фундаментальная группа комплекса $\boldsymbol{K}^n$ не изменится, если мы выкинем из $\boldsymbol{K}^n$ внутренние точки всех симплексов размерности, большей, чем* 2. В самом деле, группа симплициальных путей зависит только от подкомплекса, состоящего из нульмерных, одномерных и двумерных симплексов $\boldsymbol{K}^n$, т. е. от двумерного «остова» симплициального разбиения $\boldsymbol{K}^n$.

§ 45. Группа симплициальных путей поверхностного комплекса

Результаты § 44 позволяют свести вопрос о выражении фундаментальной группы данного полиэдра $\boldsymbol{K}^n$ посредством образующих и соотношений к более простому вопросу об отыскании группы симплициальных путей двумерного симплициального комплекса. Это же, как мы увидим в § 46, принципиально возможно. Однако соотношения, получающиеся при рассмотрении *симплициального* комплекса, вообще говоря, весьма многочисленны и не дают возможности делать какие-либо заключения о структуре фундаментальной группы. Для того чтобы иметь возможность пользоваться этими соотношениями, приходится упрощать их, исключая часть образующих. Существенно более простые соотношения получаются, если мы будем исходить не из симплициального, а из *поверхностного комплекса*, построенного из многоугольников. Поэтому мы переходим сейчас к определению поверхностного комплекса. В то время как до сих пор все наши рассуждения относились к произвольным комплексам, в дальнейшем мы для простоты ограничимся рассмотрением только конечных комплексов.

Линейчатый комплекс составляется из конечного числа отрезков посредством отождествления некоторых из концов этих отрезков. При этом может случиться, что отождествляются оба конца одного отрезка. Образ отрезка в линейчатом комплексе мы называем ребром. Примером линейчатого комплекса может служить, например, линейчатый комплекс замкнутой поверхности, заданной в канонической форме, или линейчатый комплекс куба.

При помощи подразделения ребер линейчатый комплекс нетрудно превратить в одномерный *симплициальный* комплекс. Поэтому линейчатый комплекс является полиэдром в смысле § 10.

Для того чтобы ориентировать ребро, нужно ориентировать его прообраз. Произвольно ориентированные ребра можно рассматривать как пути линейчатого комплекса. Мы будем обозначать их буквами a_ν, а ребра, ориентированные противоположно, — символами a_ν^{-1}.

При помощи путей a_ν и a_ν^{-1} мы будем составлять «линейчатые пути», т. е. пути вида

$$a_l^{\varepsilon_l} a_m^{\varepsilon_m} \dots a_z^{\varepsilon_z} \quad (\varepsilon_\nu = \pm 1).$$

Конечная точка каждого ребра такого пути должна совпадать с начальной точкой непосредственно следующего ребра.

Поверхностный комплекс получается «натягиванием» на некоторые замкнутые линейчатые пути элементов поверхности. Пусть

$$w = a_l^{\varepsilon_l} a_m^{\varepsilon_m} \dots a_z^{\varepsilon_z}$$

есть замкнутый путь, состоящий по крайней мере из одного ребра. Возьмем круг единичного радиуса и поставим в соответствие точкам

его граничной окружности значения какого-нибудь параметра, например, длину дуги s: $0 \leqslant s \leqslant 2\pi$. Точно так же отнесем значения параметра s, меняющегося в таком же интервале, точкам замкнутого пути w и отождествим затем каждую точку граничной окружности с принадлежащей тому же значению s точкой линейчатого пути. О возникающем при этом окрестностном пространстве мы будем говорить, что оно получилось из линейчатого комплекса *натягиванием на путь* w *элемента поверхности*, — именно, натягиванием образа круга; w, w^{-1} и путь, получающиеся из w и w^{-1} циклической перестановкой ребер, являются *граничными путями*, элемента поверхности. Заметим, что w может иметь, скажем, двойные точки; например, w может быть равен aa^{-1}. Повторяя натягивание элементов поверхности *конечное число раз*, мы превратим линейчатый комплекс в поверхностный комплекс. Сам линейчатый комплекс мы также будем считать поверхностным комплексом (не имеющим натянутых элементов поверхности).

Так же как в случае симплициального комплекса, мы можем определить *группу линейчатых путей* поверхностного комплекса $\boldsymbol{K}$. С этой целью мы выберем фиксированную вершину O в качестве начальной точки линейчатых путей, и выходящие из O замкнутые линейчатые пути разобьем на классы, — именно, мы будем считать, что два таких пути принадлежат одному классу в том случае, если их можно комбинаторно деформировать один в другой. При этом комбинаторная деформация определяется, как и в случае *симплициального комплекса* (§ 44), — меняется только соответственно переходу от треугольников к многоугольникам операция (β).

(α). Операция (α) заключается в том, что мы вставляем или опускаем ребро, пробегаемое туда и обратно.

(β). Операция (β) заключается в том, что мы вставляем или опускаем граничный путь элемента поверхности. В частности, если в какой-нибудь путь входит ребро a, являющееся границей элемента поверхности, то это ребро может быть опущено (рис. 87).

Классы линейчатых путей можно рассматривать как элементы группы линейчатых путей F_k поверхностного комплекса $\boldsymbol{K}$, причем групповая операция этой группы определяется так же, как раньше.

Покажем теперь, что группа линейчатых путей F_k совпадает с фундаментальной группой F комплекса $\boldsymbol{K}$. Для частного случая, когда $\boldsymbol{K}$ разбит на симплексы, это совпадение уже доказано в § 44, так как тогда поверхностный комплекс $\boldsymbol{K}$ представляет симплициальный комплекс $\boldsymbol{K}^2$ или $\boldsymbol{K}^1$. Мы покажем, что при последовательных подразделениях, превращающих $\boldsymbol{K}$ в симплициальный комплекс, группа линейчатых путей не меняется. Этим наше общее утверждение будет сведено к уже доказанному случаю.

Мы различаем два типа подразделений:

(U^1). Подразделение ребра: внутренняя точка ребра поверхностно-

го комплекса определяется как новая вершина. Тогда ребро распадается на два ребра подразделения.

(U^2). Подразделение элемента поверхности: прообраз элемента поверхности, являющийся обычным кругом, разбивается хордой на два сегмента, причем так, что концы хорды при отображении граничного круга переходят в вершины линейчатого комплекса. Тогда хорда переходит при отображении в новое ребро, а оба сегмента переходят в два новых элемента поверхности.

При подразделении из поверхностного комплекса получается, очевидно, опять поверхностный комплекс. Последовательно подразделяя поверхностный комплекс $\boldsymbol{K}$, мы можем превратить его в симплициальный комплекс. Это можно сделать, например, следующим образом: мы разбиваем сначала каждый элемент поверхности на треугольники, а затем производим двукратное барицентрическое подразделение.

Пусть $\boldsymbol{K}^*$ означает поверхностный комплекс, получающийся из $\boldsymbol{K}$ однократным применением подразделения (U^1) или (U^2). Тогда утверждение, что $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{K}^*$ имеют одинаковые группы линейчатых путей, эквивалентно следующим двум утверждениям:

1. Выходящий из O замкнутый линейчатый путь w^* комплекса $\boldsymbol{K}$ можно комбинаторно деформировать в $\boldsymbol{K}^*$ в линейчатый путь поверхностного комплекса $\boldsymbol{K}$.

2. Выходящий из O замкнутый путь w комплекса $\boldsymbol{K}$, комбинаторно гомотопный нулю в $\boldsymbol{K}^*$, комбинаторно гомотопен нулю также в $\boldsymbol{K}$.

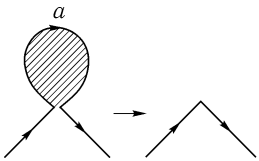


Рис. 87

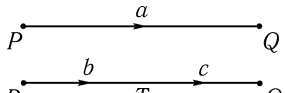


Рис. 88

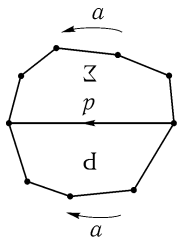


Рис. 89

Доказательство пункта 1. Пусть $\boldsymbol{K}^*$ получается из $\boldsymbol{K}$ подразделением ребра a, которое в точке T разбивается на два ребра b и c, причем если рассматривать эти ребра как пути, то они связаны соотношением $bc = a$ (рис. 88). Конечная точка Q ребра a не должна непременно быть отличной от начальной точки ребра a. Если в линейчатый путь w^* поверхностного комплекса $\boldsymbol{K}^*$ входит одно из сочетаний вида bb^{-1}, cc^{-1}, $b^{-1}b$, $c^{-1}c$, то в силу комбинаторной деформации (α) такое сочетание можно опустить. Опуская все такие сочетания, мы получим либо путь, не содержащий вовсе $b^{\pm 1}$ и $c^{\pm 1}$, либо путь, содержащий их

в виде сочетаний $bc\,(=a)$ или $c^{-1}b^{-1}\,(=a^{-1})$. Таким образом w^* можно комбинаторными деформациями перевести в путь комплекса $\boldsymbol{K}$. Пусть, далее, $\boldsymbol{K}^*$ получается из $\boldsymbol{K}$ подразделением элемента поверхности П; П распадается на два элемента поверхности $\mathbf{P}$ и Σ, разделенных новым ребром d (рис. 89). Пусть граничные пути элементов $\mathbf{P}$ и Σ суть du^{-1} и dv^{-1}. Если в линейчатый путь w^* комплекса $\boldsymbol{K}^*$ входит ребро $d^{\pm 1}$, то посредством комбинаторных деформаций (β) и (α) мы можем заменить его путем $v^{\pm 1}$. Таким образом и в этом случае путь w^* можно комбинаторно деформировать в путь w.

Доказательство пункта 2. Пусть линейчатый путь w поверхностного комплекса $\boldsymbol{K}$ комбинаторно гомотопен нулю в $\boldsymbol{K}^*$. Тогда в $\boldsymbol{K}^*$ существует такая последовательность путей

$$w,\ w_1^*,\ w_2^*,\ \ldots,\ w_r^* = 0,$$

что от каждого из этих путей можно перейти к следующему посредством одной комбинаторной деформации внутри $\boldsymbol{K}^*$. Эти пути комплекса $\boldsymbol{K}^*$ (кроме самого пути w) не являются, вообще говоря, путями комплекса $\boldsymbol{K}$. Покажем, что каждому пути w_i^* можно поставить в соответствие путь w_i, комплекса $\boldsymbol{K}$ таким образом, что в последовательности путей

$$w = w_0,\ w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_r$$

каждый путь получается из предыдущего посредством одной или нескольких комбинаторных деформаций внутри $\boldsymbol{K}$ и что $w_r = 0$. Этим будет доказано, что путь w комбинаторно гомотопен нулю внутри $\boldsymbol{K}$.

Пусть $\boldsymbol{K}^*$ получается из $\boldsymbol{K}$ подразделением ребра a. Тогда соответствие между w_i^* и w_i устанавливается следующим образом: каждому ребру $\boldsymbol{K}^*$, отличному от b и c, относится то же самое ребро комплекса $\boldsymbol{K}$. Напротив, ребру $b^{\pm 1}$ относится $a^{\pm 1}$, ребру же $c^{\pm 1}$ не ставится в соответствие ничего. Очевидно, что путь w_1, соответствующий таким образом пути w_i^*, представляет замкнутый линейчатый путь в $\boldsymbol{K}$, выходящий из O. Если теперь переход от w_i^* к w_{i+1}^* осуществляется комбинаторной *деформацией* (α), примененной к ребру, отличному от b и c, или деформацией (β), то переход от w_i к w_{i+1} осуществляется такой же деформацией. Если же w_{i+1}^* получается из w_i^* посредством деформации (α), примененной к b или c, то w_{i+1} получается из w_i посредством деформации (α), примененной к w_{i+1} (или $w_i = w_{i+1}$). Если же $\boldsymbol{K}^*$ получается из $\boldsymbol{K}$ при подразделении элемента поверхности, то мы устанавливаем следующее соответствие между w_i^* и w_i: ребру комплекса $\boldsymbol{K}^*$, отличному от разбивающего ребра d, мы относим то же самое ребро комплекса $\boldsymbol{K}$. Ребро же d мы заменяем путем v. Если теперь мы вставляем или опускаем в $\boldsymbol{K}^*$ путь dd^{-1}, то в сооответствии с этим в $\boldsymbol{K}$ мы должны вставить или опустить путь vv^{-1}, что осуществляется с помощью деформации (α). Деформациям же (β), примененным к многоугольникам $\mathbf{P}$ и Σ, соответствуют в $\boldsymbol{K}$ комбинаторные

деформации, сводящиеся к деформациям (β) и (α). Таким образом доказана инвариантность группы линейчатых путей F_k при подразделениях, а следовательно, и совпадение этой группы с фундаментальной группой F.

§ 46. Образующие и соотношения

Обозначим снова ориентированные ребра поверхностного комплекса $\boldsymbol{K}$ через $a_1, a_2, \ldots, a_{\alpha^1}$, а начальную точку замкнутых путей — буквой O. Для того чтобы найти систему образующих проведем из O в каждую вершину комплекса $\boldsymbol{K}$ фиксированный линейчатый путь, который мы будем называть *вспомогательным путем*. За вспомогательный путь, принадлежащий вершине O, примем самое эту точку. Тогда каждому ориентированному ребру a_i можно однозначно поставить в соответствие замкнутый путь A_i, выходящий из O, — именно, путь, идущий сначала по вспомогательному пути в начальную точку ребра a_i, затем по a_i в конечную точку и, наконец, по пути, обратному вспомогательному пути конечной точки, возвращающийся в точку O. A_i представляет некоторый линейчатый путь

$$A_i = \varphi(a_\nu), \tag{A}$$

принадлежащий как таковой к определенному классу линейчатых путей. Этот класс мы также будем обозначать, *опуская квадратные скобки*, через A_i. Классы A_1, $A-2$, $\ldots$, A_{α^1} могут быть и не все различными.

Нетрудно показать, что эти классы могут быть приняты за *образующие* группы линейчатых путей. Именно, каждый выходящий из O замкнутый путь w можно комбинаторно деформировать в произведение линейчатых путей A_i. Пусть, например,

$$w = F(a_i) = a_l^{\varepsilon_l} a_m^{\varepsilon_m} \ldots a_z^{\varepsilon_z}$$

есть такой путь. Тогда, применяя только операции (α), мы можем деформировать его в путь

$$W = F(A_i) = A_l^{\varepsilon_l} A_m^{\varepsilon_m} \ldots A_z^{\varepsilon_z},$$

так как w можно превратить в W, вставляя между каждыми двумя последовательными ребрами пути то пробегаемый туда и обратно вспомогательный путь.

Перейдем теперь к *соотношениям*! Соотношение

$$R(A_i) = 1$$

означает, что класс линейчатых путей $R(A_i)$ есть единичный класс, т. е. что путь $R(A_i)$ можно комбинаторно деформировать в вершину O.

Мы покажем, что всегда существует конечное число соотношений, из которых все остальные соотношения вытекают как следствия. Такие соотношения распадаются на два типа.

(I). Заменим в уравнении (A) каждое ребро a_ν соответствующим замкнутым линейчатым путем A_ν. Тогда мы получим соотношение

$$A_i = \varphi_i(A_\nu). \qquad \text{(I)}$$

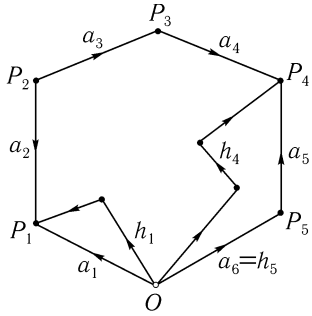


Рис. 90

Чтобы убедиться в правильности этого соотношения, достаточно заметить, что его левая сторона получится из правой, если мы опустим пробегаемые туда и обратно вспомогательные пути. Соотношений типа (I) существует столько же, сколько существует ребер в разбиении нашего (конечного) комплекса.

Рассмотрим в качестве примера рис. 90. На нем изображены ребра, которые можно считать ребрами некоторого комплекса. Пусть вспомогательным путем точки P_2 выбран путь $h_2 = a_1 a_2^{-1}$, вспомогательным путем точки P_3 — путь $h_3 = a_6 a_5 a_4^{-1}$. Вспомогательные пути, идущие в P_1, P_4, P_5, указаны на рисунке. Вспомогательный путь точки O, состоящий только из этой точки, обозначим через h_0. Тогда, например, путь

$$A_3 = h_2 a_3 h_3^{-1} = a_1 a_2^{-1} \cdot a_3 \cdot a_4 a_5^{-1} a_6^{-1} = \varphi_3(a_\nu),$$

а путь

$$\varphi_3(A_\nu) = (h_0 a_1 h_1^{-1})(h_1 a_2^{-1} h_2^{-1})(h_2 a_3 h_3^{-1})(h_3 a_4 h_4^{-1})(h_4 a_5^{-1} h_5^{-1})(h_5 a_6^{-1} h_0),$$

причем нужно иметь в виду еще, что пути h_ν составлены из отдельных ребер. Оба пути можно, очевидно, деформировать комбинаторно один в другой, пользуясь лишь операциями (α). Поэтому классы путей A_3 и $\varphi_3(A_\nu)$ действительно совпадают.

(II). Если $a_l^{\varepsilon_l} a_m^{\varepsilon_m} \dots a_z^{\varepsilon_z}$ есть граничный путь элемента поверхности П, то путь $A_l^{\varepsilon_l} A_m^{\varepsilon_m} \dots A_z^{\varepsilon_z}$ можно комбинаторно деформировать в O, вследствие чего имеет место соотношение

$$A_l^{\varepsilon_l} A_m^{\varepsilon_m} \dots A_z^{\varepsilon_z} = 1. \qquad \text{(II)}$$

В самом деле, путь $A_l^{\varepsilon_l} A_m^{\varepsilon_m} \dots A_z^{\varepsilon_z}$ может быть сначала деформирован в путь, идущий из O по вспомогательному пути h начальной точки ребра $a_l^{\varepsilon_l}$, обходящий затем П и возвращающийся по h^{-1} в точку O; для этого достаточно опустить пробегаемые туда и обратно вспомогательные пути h, ведущие в остальные вершины, т. е. применить конечное число раз операцию (α). Применяя затем к элементу поверхности П

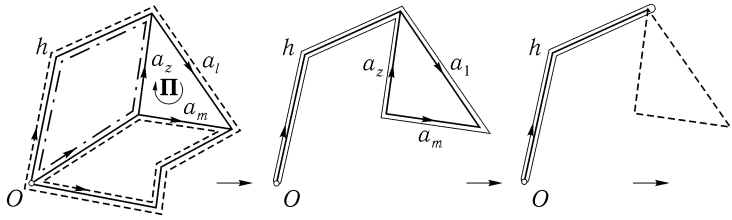


Рис. 91

операцию (β), мы получим путь hh^{-1}, который может быть комбинаторно деформирован в O посредством операции (α).

Рис. 91 дает иллюстрацию описанного процесса деформации. П представляет треугольник, $\varepsilon_l = \varepsilon_z = 1$, $\varepsilon_m = 1$. В соответствии с этим путь $A_l A_m^{-1} A_z$ деформируется в точку O.

Число соотношений типа (II) равно числу многоугольников комплекса $\boldsymbol{K}$.

Соотношения (I) *и* (II) *образуют систему определяющих соотношений, т. е. левая сторона любого соотношения* $R(A_i) = 1$ *при помощи соотношений* (I) *и* (II) *и тривиальных соотношений* $A_i A_i^{-1} = A_i^{-1} A_i = 1$ *может быть приведена к* 1.

Доказательство. Соотношение $R(A_i) = 1$ означает, что линейчатый путь $R\big[\varphi_i(a_\nu)\big]$, который мы обозначим через $w_0(a_\nu)$, комбинаторно гомотопен нулю, т. е. существует такая последовательность путей

$$w_0(a_\nu),\ w_1(a_\nu),\ \ldots,\ w_m(a_\nu),$$

что путь $w_j(a_\nu)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ получается из $w_{j-1}(a_\nu)$ применением одной операции (α) или (β), а путь $w_m(a_\nu)$ вообще не содержит множителей (представляет точку O). Преобразовывая левую сторону $R(A_i)$ нашего соотношения при помощи соотношения (I), мы получим выражение $R\big[\varphi_i(A_\nu)\big] = w_0(A_\nu)$. Составим теперь из A_ν последовательность произведений

$$w_0(A_0),\ w_1(A_\nu),\ \ldots,\ w_m(A_\nu) \equiv 1.$$

Если $w_j(a_\nu)$ получается из $w_{j-1}(a_\nu)$ применением операции (α), то $w_j(A_\nu)$ получается из $w_{j-1}(A_\nu)$ применением тривиальных соотношений $A_\nu A_\nu^{-1} = 1$ или $A_\nu^{-1} A_\nu = 1$. Если же $w_l(a_\nu)$ получается из $w_{j-1}(a_\nu)$ применением операции (β) к многоугольнику П комплекса $\boldsymbol{K}$, то $w_j(A_\nu)$ получается из $w_{j-1}(A_\nu)$ применением соотношения (II), относящегося к П. Таким образом, пользуясь соотношениями (I), (II) и тривиальными соотношениями, мы можем перевести $R(A_i)$ последовательно в $w_0(A_\nu)$, $w_1(A_\nu)$, $\ldots$, $w_m(A_\nu)$, т. е. в 1.

В качестве примера рассмотрим одномерный симплициальный комплекс, состоящий из сторон треугольника (рис. 92), т. е. симплициальное разбиение одномерной сферы (окружности). Начальная точка O есть вершина трехсторонника. Вспомогательные пути вершин P_1 и P_2 суть соответственно $h_1 = a_1$, $h_2 = a_3^{-1}$; h_0 состоит из точки O.

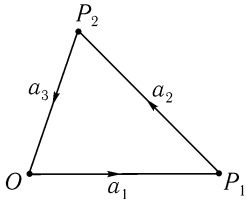


Рис. 92

Линейчатые пути:

$$A_1 = h_0 a_1 h_1^{-1} = a_1 a_1^{-1} = \varphi_1(a_\nu),$$
$$A_2 = h_1 a_2 h_2^{-1} = a_1 a_2 a_3 = \varphi_2(a_\nu),$$
$$A_3 = h_2 a_3 h_0^{-1} = a_3^{-1} a_3 = \varphi_3(a_\nu).$$

Соотношения:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= A_1 A_1^{-1} = 1, \\ A_2 &= A_1 A_2 A_3, \\ A_3 &= A_3^{-2} A_3 = 1. \end{aligned}\right\} \text{ (I)}$$

Соотношений (II) не существует.

Таким образом, остается только одна образующая A_2, все же соотношения становятся тривиальными. *Фундаментальная группа окружности есть поэтому свободная циклическая группа.* Классы путей представляются, очевидно, замкнутыми путями, пробегающими окружность 0, 1, 2, ... раз в том или другом направлении.

Точно так же *фундаментальная группа плоского кольца, трехмерного кольца, вообще топологического произведения окружности на n-мерный элемент есть свободная циклическая группа.* Действительно, она представляет прямое произведение фундаментальной группы окружности и фундаментальной группы n-мерного элемента (§ 43, 1); последняя же состоит только из единичного элемента (§ 43, 2).

Если натянуть на трехсторонник (рис. 92) элемент поверхности, то добавляется соотношение типа (II):

$$A_1 A_2 A_3 = 1, \qquad \text{(II)}$$

откуда следует, что $A_2 = 1$. Это находится в соответствии с тем, что фундаментальная группа n-мерного элемента состоит только из 1.

Упражнение. Пусть r представляет лежащий в $\boldsymbol{R}^3$ тор вращения. Докажите, что не существует топологического отображения пространства $\boldsymbol{R}^3$ на себя, переводящего тор r в себя и меняющего ролями его меридиан и параллель. [Рассмотрите параллель и меридиан как элементы фундаментальной группы ограниченного тором r трехмерного кольца.]

§ 47. Линейчатые комплексы и замкнутые поверхности

В качестве дальнейшего приложения методов, изложенных в § 46, найдем фундаментальные группы линейчатых комплексов и замкнутых поверхностей.

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{\alpha^1}$ — ребра линейчатого комплекса $\boldsymbol{K}^1$. Рассмотрим сначала простейший случай, когда $\boldsymbol{K}^1$ имеет только одну вершину O. Все a_i представляют тогда замкнутые пути; вспомогательные пути отсутствуют, а замкнутые пути A_i, являющиеся представителями образующих элементов фундаментальной группы, совпадают с a_i. Соотношения типа (I) имеют вид $A_i = A_i$, т. е. тривиальны; соотношений же типа (II) не существует совсем. Таким образом фундаментальная группа оказывается свободной группой с

$$\alpha^1 = -N + 1 = -\alpha^0 + \alpha^1 + 1$$

образующими. Здесь $\alpha^0 = 1$ и α^1 означают соответственно числа вершин и ребер линейчатого комплекса, а $N = \alpha^0 - \alpha^1$ — эйлерову характеристику. Полученный результат можно вывести также непосредственно. В самом деле, каждый линейчатый путь есть произведение замкнутых путей $a_i = A_i$. Отсюда следует, что классы A_i суть образующие фундаментальной группы. Произведение же $\prod\limits_i A_i^{\varepsilon_i}$ является единичным элементом фундаментальной группы лишь в том случае, если путь $\prod\limits_i A_i^{\varepsilon_i}$ можно деформировать в O при помощи операции (α), т. е. с точки зрения теории групп в том случае, если произведение $\prod\limits_i A_i^{\varepsilon_i}$ приводится к 1 при помощи тривиальных соотношений $A_i A_i^{-1} = 1$ и $A_i^{-1} A_i = 1$.

Отыскание фундаментальной группы линейчатого комплекса $\boldsymbol{K}^1$, имеющего более чем одну вершину, может быть сведено к разобранному только что простейшему случаю. В таком комплексе непременно существует ребро, например a_1, начальная точка P и конечная точка Q которого различны. Пусть h — вспомогательный путь точки P. Мы выбираем тогда за вспомогательный путь точки Q путь ha_1. Принадлежащий ребру a_1 замкнутый путь A_1 есть тогда путь $ha_1(ha_1)^{-1}$, т. е. ребро a_1 дает соотношение $A_1 = 1$. Пусть теперь

$$A_i = \varphi_i(a_\nu) \quad (i = 2, 3, \ldots, \alpha^1; \quad \nu = 1, 2, \ldots, \alpha^1).$$

Соответствующее соотношение имеет вид

$$A_i = \varphi_i(A_\nu).$$

Так как $A_1 = 1$, мы получаем тогда систему определяющих соотношений

$$A_i = \varphi_i(A_\mu) \quad (i, \mu = 2, 2, \ldots, \alpha^1). \tag{I}$$

При этом $\varphi_i(a_\mu)$ означает произведение путей, получающееся из $\varphi_i(a_\nu)$, если мы опустим все множители a_1. Но соотношения (I) представляют как раз соотношения комплекса $\boldsymbol{K}_1^1$, получающегося из $\boldsymbol{K}^1$, если мы

опустим ребро a_1 и отождествим вершины P и Q, т. е. если мы как бы сведем ребро a_1 в точку. В самом деле, система вспомогательных путей комплекса $\boldsymbol{K}^1$ переходит при вычеркивании ребра a^1 в систему вспомогательных путей комплекса $\boldsymbol{K}_1^1$, а замкнутые пути A_i', принадлежащие ребрам комплекса $\boldsymbol{K}_1^1$, являются как раз путями $A_i' = \varphi_i(a_\mu)$. Поэтому соотношения фундаментальной группы комплекса $\boldsymbol{K}_1^1$ суть

$$A_i' = \varphi^i(A_\mu'),$$

т. е. соотношения (I). $\boldsymbol{K}^1$ и $\boldsymbol{K}_1^1$ имеют, таким образом, одинаковые фундаментальные группы.

Если $\boldsymbol{K}_1^1$ имеет больше чем одну вершину, то мы применяем описанный процесс еще раз и так далее до тех пор, пока мы не придем к комплексу $\boldsymbol{K}_s^1$, имеющему только одну вершину. Для всех комплексов $\boldsymbol{K}^1$, $\boldsymbol{K}_1^1$, ..., $\boldsymbol{K}_s^1$ характеристика $N = \alpha^0 - \alpha^1$, очевидно, одинакова. Фундаментальная группа комплекса $\boldsymbol{K}_s^1$ есть, однако, как мы видели, свободная группа с $(1 - N)$ образующей. Таким образом мы получаем следующий результат: *фундаментальная группа линейчатого комплекса $\boldsymbol{K}^1$ есть свободная группа с $(1 - N)$ образующей, где*

$$N = \alpha^0 - \alpha^1$$

есть эйлерова характеристика линейчатого комплекса.

Канонические многоугольники замкнутых поверхностей (§ 38) с отождествленными эквивалентными сторонами принадлежат к типу поверхностных комплексов. Так, например, канонический многоугольник тора состоит из вершины O, двух ребер a и b (меридиан и параллель тора) и элемента поверхности, натянутого на линейчатый путь $aba^{-1}b^{-1}$. Образующие фундаментальной группы соответствуют ребрам a и b; мы обозначим их буквами A и B. Так как имеется только одна вершина, то вспомогательные пути отсутствуют, т. е. соотношения типа (I) представляют тождества. Из соотношений же типа (II) существует одно соотношение, соответствующее единственному имеющемуся элементу поверхности; оно выражает, что граничный путь элемента поверхности гомотопен нулю на поверхностном комплексе и имеет вид

$$ABA^{-1}B^{-1} = 1.$$

Это соотношение означает, что образующие A и B перестановочны. Таким образом, *фундаментальная группа тора есть свободная абелева группа с двумя образующими.*

Пользуясь совершенно такими же соображениями при рассмотрении остальных поверхностей, мы получим следующий результат.

Теорема. *Фундаментальная группа ориентируемой замкнутой поверхности рода h (сфера с h ручками, $h = 0, 1, 2, \ldots$) может быть*

представлена как группа, порождаемая $2-N=2h$ *образующими, связанными соотношением*

$$A_1B_1A_1^{-1}B_1^{-1}\dots A_hB_hA_h^{-1}B_h^{-1}=1.$$

Фундаментальная группа неориентируемой поверхности рода k (*сфера с* k *пленками Мебиуса,* $k=1,2,\dots$) *имеет* $2-N=k$ *образующих, связанных соотношением*

$$A_1^2A_2^2\dots A_k^2=1.$$

Кроме фундаментальной группы сферы ($h=0$), состоящей только из единичного элемента, и фундаментальной группы проективной плоскости ($k=1$), представляющей группу второго порядка, все фундаментальные группы замкнутых поверхностей суть бесконечные группы, так как числа Бетти этих групп (стр. 393) равны $2-N=2h>0$ в ориентируемом случае и $1-N=k-1>0$ в неориентируемом.

Упражнения. 1. Найдите фундаментальные группы ограниченных поверхностей.

2. Пользуясь предложением, сформулированным в упражнении 1 § 38, покажите, что группа с соотношением

$$A_1B_1A_1^{-1}B_1^{-1}\dots A_hB_hA_h^{-1}B_h^{-1}=1$$

изоморфна группе с соотношением

$$C_1C_2\dots C_{2h}C_1^{-1}C_2^{-1}\dots C_{2h}^{-1}=1.$$

§ 48. Фундаментальная группа и одномерная группа Бетти

Прообраз $\overline{w}$ пути w полиэдра $\boldsymbol{K}^n$ представляет одномерный прямолинейный симплекс, непрерывно отображенный на w. Поэтому w является вместе с тем ориентированным особым симплексом, а следовательно, и особым одномерным алгебраическим комплексом. Если вместо $\overline{w}$ взять какой-нибудь другой прообраз пути w, например $\overline{w}'$, то мы получим таким же образом особый симплекс w'. Особые симплексы w и w', вообще говоря, различны, в то время как w и w', рассматриваемые как пути, одинаковы. Это происходит потому, что при определении равенства путей мы допускали топологические отображения их прообразов, в то время как при определении равенства особых симплексов мы требовали, напротив, чтобы их прообразы отображались друг на друга линейно. Можно, однако, показать, что такого рода различные особые симплексы (представляющие одинаковые пути) являются *гомологичными* друг другу особыми алгебраическими комплексами. В самом

деле, по определению существует топологическое отображение прообраза $\overline{w}$ на $\overline{w}'$, при котором попарно соответствующие друг другу точки имеют одинаковые образы в $\boldsymbol{K}^n$. Это отображение переводит $\overline{w}$ в ориентированный *особый* симплекс $\overline{w}_1$ на $\overline{w}'$, имеющий ту же границу, что $\overline{w}'$. Но тогда $\overline{w}' - \overline{w}_1 \sim 0$ как всякий одномерный цикл на отрезке. Эта гомология сохраняется при отображении отрезка $\overline{w}'$ на w (стр. 129), а так как при этом $\overline{w}_1$ переходит в w и $\overline{w}'$ в w', то $w \sim w'$. Таким образом каждому пути w соответствует обозначаемый той же буквой особый одномерный алгебраический комплекс. Сам этот комплекс зависит от выбора прообраза $\overline{w}$ пути w, но его класс гомологий определяется однозначно. Поэтому можно говорить о гомологичных друг другу путях. Если путь замкнут, то соответствующий особый комплекс представляет цикл.

Теорема I. *Произведению $w = w_1 w_2$ двух путей соответствует сумма принадлежащих этим путям особых алгебраических комплексов, т. е. $w \sim w_1 + w_2$.*

Доказательство. Прообразом пути $w_1 w_2$ является отрезок $\overline{w}$, составленный из двух отрезков $\overline{w}_1$ и $\overline{w}_2$. На этом отрезке $\overline{w}_1 + \overline{w}_2 \sim \overline{w}$. Но тогда соответствующие образы гомологичны в $\boldsymbol{K}^n$.

Теорема II. *Если два пути w_0 и w_1 гомотопны, то они также гомологичны между собой (обратного может и не быть).*

Доказательство. Пусть $\overline{w}_0$, $\overline{w}_1$, $\overline{u}$, $\overline{v}$ — стороны прямоугольника деформации, принадлежащего деформации пути w_0 в w_1 (рис. 93). Этот прямоугольник дает гомологию

$$\overline{w}_1 - \overline{w}_0 + \overline{u} - \overline{v} \sim 0.$$

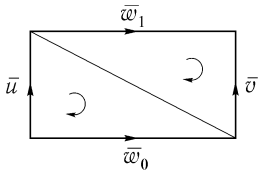


Рис. 93

Тогда для образов рассматриваемых сторон имеет место гомология

$$w_1 - w_0 + u - v \sim 0.$$

Так как стороны $\overline{u}$ и $\overline{v}$ отображаются в точки, то u и v представляют вырождающиеся особые симплексы (стр. 124). Поэтому в написанном соотношении u и v можно опустить и остается гомология $w_1 - w_0 \sim 0$.

Что гомологичный путь может не быть гомотопен нулю, показывает пример «горлового сечения» l двойного тора (стр. 224): это сечение гомологично, но не гомотопно нулю.

Таким образом каждому классу путей связного полиэдра $\boldsymbol{K}^n$ ставится в однозначное соответствие некоторый класс гомологий. Так как при этом произведению двух классов путей соответствует сумма отнесенных им классов гомологий, то мы получаем гомоморфное отображение χ фундаментальной группы F в группу Бетти B^1. Для того

чтобы ближе исследовать это гомоморфное отображение, достаточно рассмотреть симплициальные пути и соответственно симплициальные алгебраические комплексы некоторого *симплициального* разбиения полиэдра $\boldsymbol{K}^n$. Выберем в качестве начальной точки замкнутых путей вершину O симплициального разбиения. Так как каждый замкнутый симплициальный одномерный цикл может быть превращен прибавлением симплициального пути, пробегаемого туда и обратно, в замкнутый симплициальный путь, проходящий через точку O, то каждый класс гомологии представляет образ по крайней мере одного класса путей, т. е. χ есть гомоморфизм группы F на B^1. Поэтому χ полностью характеризуется нормальным делителем H группы F, соответствующим нулевому элементу группы B^1. Мы утверждаем, что H есть коммутант фундаментальной группы.

Доказательство. Каждый коммутатор $F_1F_2F_1^{-1}F_2^{-1}$ группы F, наверное, переходит в нулевой элемент B^1, так как B^1 есть абелева группа. Мы должны показать еще только, что, и обратно, каждый элемент из H, т. е. класс путей, содержащий произвольный гомологичный нулю путь w, принадлежит к коммутанту. Пусть

$$U^2 = \sum_{i=1}^{\alpha} \lambda_i E_i^2$$

представляет двумерный алгебраический комплекс с границей w. Отнесем каждому треугольнику E_i^2 симплициальный путь r_i, идущий из O по некоторому пути u_i до вершины треугольника E_i^2, обходящий затем вокруг этого треугольника и возвращающийся по u_i^{-1} в O. При этом обход треугольника E_i^2 должен производиться таким образом, чтобы r_i рассматриваемый как аглебраический комплекс, представлял как раз границу ориентированного симплекса E_i^2. Каждый путь r_i гомотопен нулю. Поэтому симплициальный путь w можно деформировать в

$$w' = w(r_1^{\lambda_1} r_2^{\lambda_2} \dots r_\alpha^{\lambda_\alpha})^{-1}.$$

Так как, далее, путь

$$r_1^{\lambda_1} \dots r_\alpha^{\lambda_\alpha},$$

так же как w, есть граница комплекса U^2, то оба эти пути представляют одинаковые алгебраические комплексы. Поэтому w' есть нулевой комплекс, пробегающий каждый одномерный симплекс одинаковое число раз в обоих направлениях. При помощи комбинаторных деформаций путь

$$w' = f(a_j)$$

можно перевести, однако, в симплициальный путь

$$W' = f(A_j),$$

где A_j означает принадлежащий симплексу a_j замкнутый симплициальный путь (§ 46). Тогда каждый из путей A_j входит в W' одинаковое число раз с показателем $+1$ и с показателем -1, так что при коммутировании фундаментальной группы W' переходит в нулевой элемент. Это значит, что класс путей, содержащий W', а следовательно и класс путей, содержащий w' и w, принадлежат к коммутанту группы F. Вместе с тем доказана следующая теорема.

Теорема III. *Одномерная группа Бетти B^1 связного полиэдра $\boldsymbol{K}^n$ есть коммутированная фундаментальная группа (дополнительная группа фундаментальной группы* F *по ее коммутанту).*

Теорему эту можно легко проверить на замкнутых поверхностях, сравнивая результаты § 41 и § 47.

Мы характеризовали *гомотопный нулю* путь как путь, на который можно натянуть особый элемент поверхности. Мы можем теперь дать аналогичную характеристику для замкнутого пути, *гомологичного нулю.*

Теорема IV. *Замкнутый путь w гомологичен нулю в том и только в том случае, если на него можно натянуть ориентируемую ограниченную поверхность (с границей w); расположение этой поверхности в полиэдре может иметь особенности.*

Доказательство. По только что доказанной теореме путь w, рассматриваемый как элемент фундаментальной группы, принадлежит к коммутанту, т. е. то можно деформировать в произведение коммутаторов

$$u_1 v_1 u_1^{-1} v_1^{-1} \dots u_h v_h u_h^{-1} v_h^{-1}.$$

Поэтому замкнутый путь

$$w^{-1} u_1 v_1 u_1^{-1} v_1^{-1} \dots u_h v_h u_h^{-1} v_h^{-1}$$

гомотопен нулю, и на него можно натянуть элемент поверхности, прообраз которого есть $(4h+1)$-угольник с границей

$$\overline{w}^{-1} \overline{u}_1 \overline{v}_1 \overline{u}_1^{-1} \overline{v}_1^{-1} \dots \overline{u}_h \overline{v}_h \overline{u}_h^{-1} \overline{v}_h^{-1}.$$

При отображении этот многоугольник переходит в ограниченную поверхность рода h, расположенную, быть может, с особенностями в полиэдре $\boldsymbol{K}^n$ и имеющую границу w (для случая $h = 1$ см. рис. 6–8 стр. 16). Если, обратно, на путь w можно натянуть такую поверхность, — другими словами, если ограниченную поверхность можно непрерывно отобразить в $\boldsymbol{K}^n$ так, что граница единственного отверстия этой поверхности перейдет в w, то w гомологичен нулю. В самом деле, так как натянутая поверхность ориентируема, то на этой поверхности существует

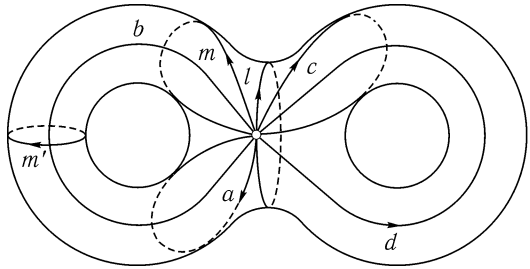


Рис. 94

особый двумерный алгебраический комплекс; границей которого является в точности путь w (рассматриваемый как одномерный алгебраический комплекс).

Пример пути, на который можно натянуть поверхность рода 1, но нельзя натянуть никакого элемента поверхности, дает «горловое сечение» l двойного тора, отделяющее две половины этого тора друг от друга (рис. 94). Действительно, как легко убедиться, рассекая двойной тор вдоль l, это сечение представляет границу тора с отверстием. Поэтому элемент фундаментальной группы, содержащий путь l, — именно, $L = (ABA^{-1}B^{-1})^{-1}$, есть коммутатор. С другой стороны, мы покажем сейчас, что L не является единичным элементом и, следовательно, на l нельзя натянуть никакого элемента поверхности. Для этого поступим следующим образом: фундаментальная группа F имеет одно определяющее соотношение

$$ABA^{-1}B^{-1}CDC^{-1}D^{-1} = 1. \tag{1}$$

Добавим еще два соотношения:

$$A = D, \quad B = C. \tag{2}$$

Мы получим тогда дополнительную группу $\overline{\mathrm{F}}$ группы F (§ 83). Из соотношения (1) вытекает, что $\overline{\mathrm{F}}$ есть свободная группа с двумя образующими A и B. Поэтому с в $\overline{\mathrm{F}}$ не может иметь места соотношение $ABA^{-1}B^{-1} = 1$. Тем менее такое оотношение может быть справедливым в F.

Таким образом, *горловое сечение двойного тора гомологично, но не гомотопно нулю.*

§ 49. Свободные деформации замкнутых путей

До сих пор мы рассматривали только такие деформации замкнутых путей, которые оставляли неподвижными начальные точки этих путей. Сейчас мы займемся деформациями, при которых начальные

точки путей также могут перемещаться. Такие деформации называются *свободными* в противоположность рассмотренным до сих пор *связанным деформациям*. Под «деформацией» просто без добавления прилагательных «свободная» или «связанная» мы будем понимать всегда связанную деформацию.

Точное определение свободной деформации таково:

Два замкнутых пути w_0 и w_1 полиэдра $\boldsymbol{K}^n$ называются свободно деформируемыми друг в друга или свободно гомотопными, если прямоугольник деформации $\overline{w} \times \mathbf{t}$ можно непрерывно отобразить в $\boldsymbol{K}^n$ так, что сторона $\overline{w} \times 0 = \overline{w}_0$ переходит в путь w_0, а сторона $\overline{w} \times 1 = \overline{w}_1$ переходит в путь w_1, в то время как каждые две соответствующие точки $\overline{P} \times t$ и $\overline{Q} \times t$ двух других сторон отображаются обе в одну точку полиэдра $\boldsymbol{K}^n$.

Две ориентированные стороны $\overline{P} \times \mathbf{t}$ и $\overline{Q} \times \mathbf{t}$ переходят, следовательно, в один и тот же путь v, соединяющий начальную точку P_0 пути w_0 с начальной точкой P_1 пути w_1. При передвижении стороны $\overline{w}_0 \times 0$ параллельно самой себе по прямоугольнику до совпадения с противоположной стороной прямоугольника, образ этой стороны — путь w_0 испытывает как раз свободную деформацию, а начальная точка P_0 пути w_0 пробегает путь v.

Связь между свободными и связанными деформациями устанавливается следующей леммой.

Лемма. *Если при свободной деформации замкнутого пути w_0 в путь w_1 начальная точка P_0 пути w_0 описывает путь v, то w_0 можно (связанно) деформировать в vw_1v^{-1}. Обратно, если w_0 можно связанно деформировать в путь vw_1v^{-1}, то w_0 и w_1 свободно гомотопны.*

Доказательство. Рассмотрим два прямоугольника $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{T}$, границы которых подразделены и обозначены способом, указанным на рис. 95. Мы можем считать, что $\boldsymbol{T}$ получилось из $\boldsymbol{R}$ сведением в точку сторон $\overline{u}'$ и $\overline{u}''$, т. е. отождествлением всех точек каждой из этих сторон. Такое сведение можно осуществить, например, посредством обозначенного на рисунке непрерывного отображения φ прямоугольника $\boldsymbol{R}$ на $\boldsymbol{T}$, при котором пути $\overline{w}_0$, $\overline{w}_1$, $\overline{v}'$, $\overline{v}''$ переходят в таким же образом обозначенные пути прямоугольника $\boldsymbol{T}$. Если путь w_0 свободно деформируем в w_1 и начальная точка w_0 описывает путь v, то существует непрерывное отображение ψ прямоугольника $\boldsymbol{T}$ в $\boldsymbol{K}^n$, переводящее $\overline{w}_0$ в w_0, $\overline{w}_1$ в w_1, а две другие стороны $\overline{v}'$ и $\overline{v}''$ — в путь v. Тогда отображение $\psi\varphi = \chi$ переводит стороны $\overline{u}'$ и $\overline{u}''$ прямоугольника $\boldsymbol{R}$ в точки, а две другие стороны — в пути w_0 и vw_1v^{-1}. А это и означает, что пути w_0 и vw_1v^{-1} гомотопны друг другу. Обратно, пусть путь w_0 можно связанно деформировать в vw_1v^{-1}. Тогда мы можем считать, что задано отображение χ прямоугольника $\boldsymbol{R}$ в $\boldsymbol{K}^n$ и уравнение $\chi = \psi\varphi$ определит

нам (по теореме IV § 8) непрерывное отображение ψ прямоугольника $\boldsymbol{T}$, переводящее $\overline{w}_0$ и $\overline{w}_1$ в w_0 и w_1, а две другие стороны — в v.

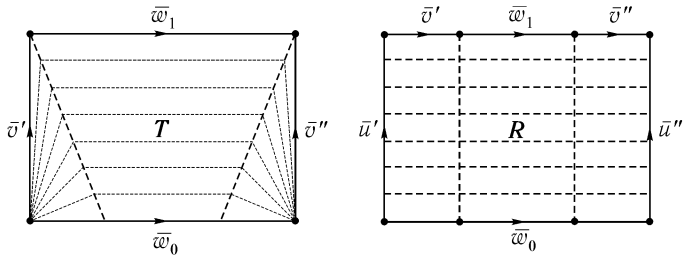


Рис. 95

Если два пути с общей начальной точкой связанно гомотопны, то они тем самым гомотопны и свободно. Обратное уже неверно, — это видно хотя бы на примере путей m и a рис. 94. В самом деле, путь m можно свободно деформировать в a, заставляя его переходить через положения m'. Напротив, пути m и a не гомотопны связанно, так как путь m гомотопен bab^{-1}, а классы путей m и a, именно, BAB^{-1} и A, различны; выражение

$$A(BAB^{-1})^{-1} = ABA^{-1}B^{-1},$$

как было показано в конце § 48, равно 1. Вообще имеет место следующая теорема.

Теорема. *Два выходящие из O замкнутые пути w_0 и w_1 свободно гомотопны между собой в том и только в том случае, если они являются представителями сопряженных элементов W_0 и W_1 фундаментальной группы, т. е. если существует элемент V такой, что* $W_0 = VW_1V^{-1}$. Все пути, принадлежащие одному классу сопряженных элементов фундаментальной группы, составляют, таким образом, класс свободно деформируемых друг в друга путей [28].

Доказательство непосредственно вытекает из самой формулировки леммы.

Сопоставим здесь вместе три возможных разбиения на классы замкнутых путей, выходящих из фиксированной точки O.

1. Разбиением на наиболее узкие классы является разбиение на *классы путей*. Два пути принадлежат одному и тому же классу путей, если их можно деформировать друг в друга, сохраняя начальную точку O неподвижной. Классы путей образуют элементы фундаментальной группы.

2. Все пути *сопряженных между собой* (как элементы фундаментальной группы) *классов путей* образуют класс свободно деформируемых друг в друга путей. Эти классы не образуют, вообще говоря, никакой группы.

3. Все пути класса смежности фундаментальной группы по своему коммутанту образуют класс гомологичных между собой путей. Такие классы гомологий составляют одномерную *группу Бетти* $\mathrm{B}^{1\,29}$.

§ 50. Фундаментальная группа и деформация отображения

При непрерывном отображении φ связного полиэдра $\boldsymbol{K}^n$ в связный полиэдр $\mathbf{K}^m$ фундаментальная группа F полиэдра $\boldsymbol{K}^n$ испытывает гомоморфное отображение Ф в фундаментальную группу F' полиэдра $\mathbf{K}^m$, причем Ф определяется только с точностью до внутренних автоморфизмов группы F' (§ 42). Мы докажем теперь, что при деформации отображения φ гомоморфизм Ф не меняется. В самом деле, пусть отображение φ переводит начальную точку O группы F в начальную точку Ω группы F' и пусть при деформации отображения φ в отображение φ_1, точка Ω описывает путь v с конечной точкой Ω_1. Пусть, далее, w' и w_1' суть образы выходящего из O замкнутого пути w при отображениях φ и φ_1 такие, что при деформации отображения φ в φ_1, путь w' испытывает свободную деформацию в w_1'. Но тогда, по лемме § 49, пути w' и $vw_1'v^{-1}$ гомотопны. Поэтому w отображается посредством φ и φ_1 в один и тот же определенный с точностью до внутренних автоморфизмов класс путей группы F'.

В частности, при деформации полиэдра $\boldsymbol{K}^n$ в себя фундаментальная группа полиэдра $\boldsymbol{K}^n$ подвергается внутреннему автоморфизму.

§ 51. Фундаментальная группа в точке

Мы видели выше (§ 32, теорема III), что для всех симплициальных разбиений полиэдра $\boldsymbol{K}^n$ группы Бетти окрестностных комплексов точки P одинаковы. Это предложение справедливо также для фундаментальной группы.

Теорема. *Пусть $\boldsymbol{A}_1$ и $\boldsymbol{A}_2$ представляют края двух симплициальных звезд полиэдра $\boldsymbol{K}^n$ с центрами в P, причем звезды эти образуют окрестности точки P в $\boldsymbol{K}^n$ и $\boldsymbol{A}_1$ (а следовательно, также $\boldsymbol{A}_2$) является связным комплексом. Тогда $\boldsymbol{A}_1$ и $\boldsymbol{A}_2$ имеют одинаковые фундаментальные группы. Фундаментальная группа комплекса $\boldsymbol{A}_1$ (или $\boldsymbol{A}_2$) называется фундаментальной группой в точке P.*

Доказательство. По теореме I § 32 существуют непрерывные отображения φ комплекса $\boldsymbol{A}_1$ в $\boldsymbol{A}_2$ и ψ комплекса $\boldsymbol{A}_2$ в $\boldsymbol{A}_1$ такие, что отображения $\psi\varphi$ и $\varphi\psi$ соответственно комплексов $\boldsymbol{A}_1$ и $\boldsymbol{A}_2$ в себя можно деформировать в тождественные отображения. Принадлежащие φ и ψ гомоморфные отображения Φ и Ψ фундаментальных групп F_1 и F_2 комплексов $\boldsymbol{A}_1$ и $\boldsymbol{A}_2$ обладают тогда, по доказанному в § 50, тем свойством, что гомоморфные отображения $\Psi\Phi$ и $\Phi\Psi$ групп F_1 и F_2 в себя суть внутренние автоморфизмы. Но тогда Φ является взаимно однозначным отображением группы F_1 на F_2, т. е. изоморфизмом. В самом деле, если для двух различных элементов F_1' и F_1'' из F_1 $\Phi(F_1') = \Phi(F_1'')$, то тогда $\Psi\Phi(F_1') = \Psi\Phi(F_1'')$, а этого при внутреннем автоморфизме группы F_1 быть не может. Если, далее, F_2' есть элемент группы F_2, переходящий при автоморфизме $\Phi\Psi$ группы F_2 в заданный элемент F_2'', то элемент $\Psi(F_2')$ группы F_2 переводится гомоморфизмом Φ в F_2'', т. е. каждый элемент из F_2 есть образ некоторого элемента из F_1. Однозначность Φ, таким образом, доказана.

§ 52. Фундаментальная группа составного полиэдра

Вычисление фундаментальной группы полиэдра $\boldsymbol{K}$ часто можно упростить, разбив $\boldsymbol{K}$ на два полиэдра с известными фундаментальными группами. Пусть $\boldsymbol{K}'$ и $\boldsymbol{K}''$ — два связных подкомплекса связного n-мерного симплициального комплекса $\boldsymbol{K}$, причем каждый симплекс из $\boldsymbol{K}$ принадлежит по крайней мере одному из этих подкомплексов. Предположим, кроме того, что $\boldsymbol{D}$ — пересечение подкомплексов $\boldsymbol{K}'$ и $\boldsymbol{K}''$ — это пересечение не пусто вследствие связности комплекса $\boldsymbol{K}$ и также связно.

Пусть F, F', F'', $\mathrm{F}_{\boldsymbol{D}}$ — фундаментальные группы комплексов $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{K}'$, $\boldsymbol{K}''$ и $\boldsymbol{D}$. Выберем в качестве начальной точки замкнутых путей точку O, принадлежащую $\boldsymbol{D}$. Тогда каждый замкнутый путь комплекса $\boldsymbol{D}$ является одновременно путем комплексов $\boldsymbol{K}'$ и $\boldsymbol{K}''$, т. е. каждому элементу группы $\mathrm{F}_{\boldsymbol{D}}$ соответствуют элемент группы F' и элемент группы F'' и имеет место следующая теорема.

Теорема I. F *представляет дополнительную группу свободного произведения* $\mathrm{F}' \bigcirc F''$. *Именно,* F *получается из этого свободного произведения, если мы отождествим каждые два элемента* F' *и* F'', *соответствующие одному и тому же элементу* $\mathrm{F}_{\boldsymbol{D}}$, *т. е., полагая эти элементы равными, добавим тем самым новые соотношения между образующими групп* F' *и* F''.

Доказательство. В соответствии с общим методом вычисления фундаментальной группы мы соединяем каждую вершину комплекса $\boldsymbol{K}$ вспомогательным путем с вершиной O. Если вершина принадлежит $\boldsymbol{D}$, то вспомогательный путь можно провести целиком в $\boldsymbol{D}$, так

как $\boldsymbol{D}$ по предположению связно. Далее, вспомогательные пути вершин, принадлежащих к $\boldsymbol{K}'$ и $\boldsymbol{K}''$, таким же образом должны целиком пробегать в $\boldsymbol{K}'$, соответственно в $\boldsymbol{K}''$.

Симплекс произвольной размерности комплекса $\boldsymbol{K}$ принадлежит либо к $\boldsymbol{K}'$ (но не к $\boldsymbol{K}''$), либо к $\boldsymbol{K}''$ (но не к $\boldsymbol{K}'$), либо и к $\boldsymbol{K}'$ и к $\boldsymbol{K}''$, т. е. к $\boldsymbol{D}$. В соответствии с этим множество всех симплексов комплекса $\boldsymbol{K}$ распадается на три не имеющих общих элементов подмножества $\overline{\boldsymbol{K}}'$, $\overline{\boldsymbol{K}}''$ и $\boldsymbol{D}$.

Образующие A_ν группы F могут быть поставлены во взаимно однозначное соответствие с ребрами a_ν комплекса $\boldsymbol{K}$ (стр. 214). В зависимости от того, принадлежит ли a_ν к $\overline{\boldsymbol{K}}'$, $\overline{\boldsymbol{K}}''$ или $\boldsymbol{D}$, мы переименуем соответствующую образующую A_ν в $\overline{K}'_j$, $\overline{K}''_j$ или D_j.

Соотношения типов (I) и (II) группы F соответствуют взаимно однозначно ребрам и треугольникам комплекса $\boldsymbol{K}$. Эти соотношения также разбиваются на три класса, определяемые принадлежностью соответствующего ребра (или треугольника) к $\overline{\boldsymbol{K}}'$, $\overline{\boldsymbol{K}}''$ или $\boldsymbol{D}$. Соотношения каждого из этих трех классов имеют вид:

$$R'_i(D_j, \overline{K}'_j) = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, \varkappa'), \qquad (\overline{\boldsymbol{K}}')$$

$$R''_i(D_j, \overline{K}''_j) = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, \varkappa''), \qquad (\overline{\boldsymbol{K}}'')$$

$$R_i^{(\boldsymbol{D})}(D_j) = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, \delta). \qquad (\boldsymbol{D})$$

Благодаря специальному способу, которым мы выбирали вспомогательные пути, в R'_i не входят образующие $\overline{K}''_j$, в R''_i не входят $\overline{K}'_j$, а в $R_i^{(\boldsymbol{D})}$ не входят ни те, ни другие.

Соотношения $(\boldsymbol{D})$, очевидно, представляют определяющие соотношения фундаментальной группы $\mathrm{F}_{(\boldsymbol{D})}$ комплекса $\boldsymbol{D}$. Соотношения $(\boldsymbol{D}) + (\overline{\boldsymbol{K}}')$ и соответственно $(\boldsymbol{D}) + (\overline{\boldsymbol{K}}'')$ представляют определяющие соотношения фундаментальных групп F′ и F″ комплексов $\boldsymbol{K}'$ и $\boldsymbol{K}''$. Наконец, $(\boldsymbol{S}) + (\overline{\boldsymbol{K}}') + (\overline{\boldsymbol{K}}'')$ являются определяющими соотношениями фундаментальной группы комплекса $\boldsymbol{K}$, эти соотношения можно, очевидно, заменить следующей системой соотношений:

$$\left.\begin{aligned} R'_i(D'_j, \overline{K}'_j) &= 1, \\ R_i^{(\boldsymbol{D})}(D'_j) &= 1, \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{F}')$$

$$\left.\begin{aligned} R''_i(D''_j, \overline{K}''_j) &= 1, \\ R_i^{(\boldsymbol{D})}(D''_j) &= 1, \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{F}'')$$

$$D'_j = D''_j \qquad \text{для всех } j. \qquad (\boldsymbol{d})$$

Соотношения (F') вместе с (F'') представляют соотношения свободного произведения групп F' и F'' (§ 85). Соотношения же ($\boldsymbol{d}$) означают, что элементы D_j' и D_j'' групп F' и F'', соответствующие одному и тому же элементу D_j группы $\mathrm{F}_{\boldsymbol{D}}$, должны быть отождествлены.

Доказанная таким образом теорема принимает особенно простой вид, если фундаментальная группа комплекса $\boldsymbol{D}$ сводится к единичному элементу. Тогда *фундаментальная группа комплекса $\boldsymbol{K}$ представляет свободное произведение фундаментальных групп комплексов $\boldsymbol{K}'$ и $\boldsymbol{K}''$.*

Коммутируя все фундаментальные группы теоремы I и принимая во внимание теорему III § 48, мы получаем следующую теорему:

Теорема II. *Одномерная группа Бетти* B^1 *комплекса $\boldsymbol{K}$ представляет дополнительную группу прямого произведения групп Бетти* $'B^1$ *и* $''\mathrm{B}^1$ *комплексов $\boldsymbol{K}'$ и $\boldsymbol{K}''$. Она получается отождествлением элементов групп* $'\mathrm{B}^1$ *и* $''\mathrm{B}^1$*, соответствующих одному и тому же элементу группы Бетти* $\mathrm{B}^1_{\boldsymbol{D}}$ *комплекса $\boldsymbol{D}$.*

Соответствующая теорема для групп Бетти высших размерностей менее проста, вследствие чего мы ее здесь не приводим[30].

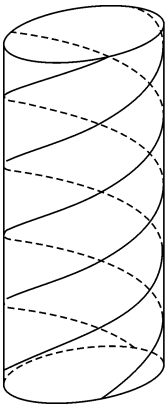


Рис. 96

В качестве приложения теоремы I найдем фундаментальную группу *винтового узла* (Torusknoten). Винтовой узел определяется следующим образом: проведем на боковой поверхности круглого цилиндра конечной длины, расположенного в евклидовом пространстве $\boldsymbol{R}^3$, образующие, отстоящие друг от друга на равных расстояниях $\frac{2\pi}{m}$ (если измерять вдоль направляющей окружности цилиндра). Повернем верхнее и нижнее основания цилиндра друг относительно друга на угол $\frac{2\pi n}{m}$ (на рис. 96 $m = 3$, $n = 5$) и отождествим лежащие после этого друг над другом точки верхнего и нижнего краев цилиндрической поверхности. Это отождествление можно осуществить, изогнув цилиндрическую поверхность и склеив соответствующим образом ее края. В результате цилиндрическая поверхность превращается в тор. Если m и n — взаимно простые целые числа, то взятые m образующих поверхности сливаются в одну замкнутую линию, обегающую тор вдоль параллели m раз и вдоль меридиана n раз. Эту линию мы и называем винтовым узлом, принадлежащим числам m, n[*]. Присоединим теперь к $\boldsymbol{R}^3$ одну несобственную точку так, чтобы $\boldsymbol{R}^3$ превратилось в трехмерную сферу $\boldsymbol{S}^3$ (§ 14), и «просверлим» эту сферу вдоль узла, т. е. заставим скользить маленький шар своим центром по узлу, и удалим из $\boldsymbol{S}^3$ все точки, пробегаемые при скольжении внутренними точками шара. Оставшаяся после просверливания узла

[*] Винтовой узел 2, 3 является простейшим (если не считать окружности) узлом (Kleeblattschlinge), представленным на рис. 2, стр. 12.

часть пространства S^3 представляет ограниченный трехмерный полиэдр K, границей которого является идущий вдоль узла тонкий рукав (тор)*. Полиэдр K называется *дополнительным пространством узла*, а его фундаментальная группа — *группой узла*. Для того чтобы найти группу узла, разобьем сферу S^3 на две части тором, на котором лежит винтовой узел. При этом

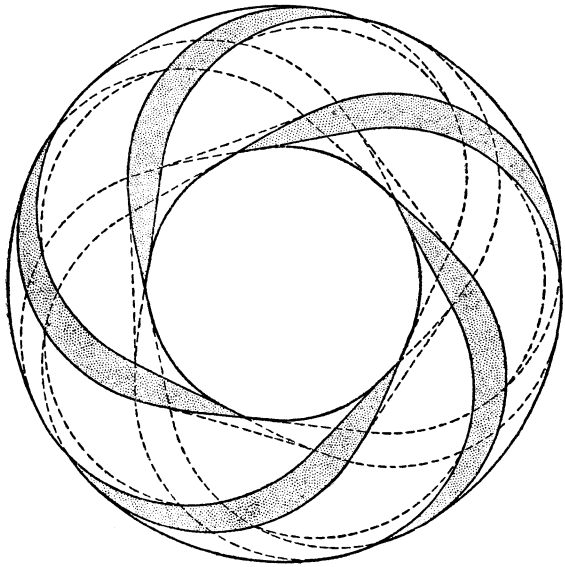


Рис. 97

упомянутый выше рукав вокруг узла распадается на два идущих вдоль узла «полурукава». Полиэдр же K, как следует из упражнения 4 § 14, распадается на два трехмерных кольца, у каждого из которых выдолблен вдоль поверхности обвивающий это кольцо желобок с полукруглым профилем. Трехмерное кольцо, лежащее в «конечной» части пространства, мы можем принять за подкомплекс K', кольцо же, содержащее несобственную точку пространства R^3, — за подкомплекс K''. Пересечение D обоих этих трехмерных колец представляет закрученное круговое кольцо (двумерное), покрывающее часть тора (именно, часть, не содержащую точек желобка; рис. 97). По § 46 фундаментальная группа F' полиэдра K' есть свободная группа с одной образующей A (обозначенной при доказательстве теоремы 1 этого параграфа символом $\overline{K}'$), а фундаментальная группа F'' полиэдра K'', — свободная группа с образующей B; A может быть представлено средней линией трехмерного кольца K', изогнутой так, чтобы она примыкала к точке O средней

*Все описываемое здесь наглядно может быть без труда сформулировано при помощи точных понятий.

линии кругового кольца $\boldsymbol{D}$, т. е. к начальной точке путей. Точно так же B представляется примыкающей к точке O средней линией второго трехмерного кольца $\boldsymbol{K}''$. В качестве образующей фундаментальной группы D, также являющейся свободной группой с одной образующей (стр. 215), мы возьмем среднюю линию D кругового кольца. Группа $\mathrm{F}' \bigcirc \mathrm{F}''$ есть свободная группа двух образующих A и B. При надлежащих ориентациях путей A и B путь D, рассматриваемый как элемент группы F', равен A^m; рассматриваемый же как элемент F'' он равен B^n. Поэтому группа винтового узла m, n получается наложением на две образующие группы соотношения

$$A^m = B^n.$$

Отсюда следует, между прочим, что винтовой узел, для которого $m > 1$ и $n > 1$, как, например, простейший узел, не может быть переведен изотопной деформацией пространства в окружность, так как его группа не является свободной группой с одной образующей[31].

Упражнения. 1. Докажите, что если в евклидовом пространстве $\boldsymbol{R}^4$, дополненном бесконечно удаленной точкой до сферы $\boldsymbol{S}^4$, просверлить путь, представляющий состоящую из прямолинейных отрезков и неимеющую двойных точек замкнутую линию, то фундаментальная группа дополнительного пространства содержит только единичный элемент. (Примените теорему I к сфере $\boldsymbol{S}^4$, разбитой на два подкомплекса: на дополнительное пространство $\boldsymbol{A}$ и высверленную часть $\boldsymbol{V}$; $\boldsymbol{V}$ есть топологическое произведение окружности на трехмерный шар, пересечение же $\boldsymbol{D}$ полиэдров $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{V}$ представляет топологическое произведение окружности на двумерную сферу. Фундаментальная группа $\boldsymbol{A}$ не меняется при присоединении к $\boldsymbol{A}$ полиэдра $\boldsymbol{V}$. Почему подобного доказательства нельзя провести в случае пространства трех измерений?)

2. Найти четырехмерное многообразие, фундаментальная группа которого есть свободная группа с r образующими. (Возьмите r топологических произведений окружности на трехмерную сферу, высверлите в каждом из них по маленькому четырехмерному шару и составьте при помощи 4-мерной сферы с r «отверстиями» требуемое многообразие.)

3. Постройте четырехмерное многообразие с произвольно заданной фундаментальной группой с конечным числом образующих. (Если в многообразии $\boldsymbol{K}^4$ высверлить не имеющий двойных точек путь w и присоединить к получающемуся при высверливании ограниченному полиэдру $\overline{\boldsymbol{K}}^4$ топологическое произведение двумерной сферы на элемент поверхности, то получится многообразие $'\boldsymbol{K}^4$, фундаментальная группа которого получается из фундаментальной группы многообразия $\boldsymbol{K}^4$ присоединением соотношения $w = 1$.)

Глава VIII
Накрывающий полиэдр

С понятием фундаментальной группы тесно связано понятие накрывающего полиэдра. Пусть, например, кольцо единичного радиуса катится по плоскости; оно пробегает при этом полоску плоскости бесконечной длины (рис. 98). Эту полоску можно бесконечное число раз навернуть как ленту вокруг кольца так, что кольцо будет накрыто полоской бесчисленное множество раз. Начальная точка O замкнутого пути, отмеченного на кольце, повторяется на полоске периодически, причем расстояние между двумя последовательными положениями ее равно 2π. Путь, идущий на полоске из одной такой точки в другую, при накручивании на кольцо образует путь, обходящий кольцо несколько раз. Однако каждый элемент фундаментальной группы кольца может быть представлен путем, обходящим кольцо вокруг. С другой стороны, путь, соединяющий две точки полоски, определяется однозначно (если не считать гомотопные пути различными) начальной и конечной точками пути, т. е. перемещением, переводящим начальную точку в конечную. Поэтому фундаментальную группу можно изоморфно отобразить на «группу скольжений» полоски, элементами которой являются перемещения полоски на число кратное 2π вдоль себя. Подобным же образом фундаментальную группу каждого полиэдра можно рассматривать как группу скольжении некоторого определенного полиэдра, так называемого универсального накрывающего. Другие неразветвленные накрывающие какого-нибудь полиэдра, — а мы будем иметь дело только с *неразветвленными* накрывающими, — соответствуют подгруппам фундаментальной группы, так что знание фундаментальной группы полиэдра дает нам полное представление о всех возможных накрывающих полиэдра.

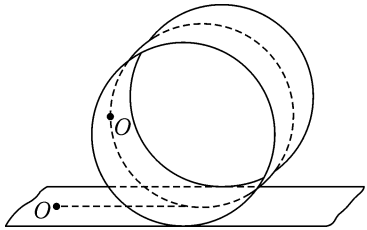


Рис. 98

§ 53. Неразветвленный накрывающий полиэдр

Пусть $\boldsymbol{K}$ и $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ — конечные или бесконечные связные полиэдры. Мы говорим, что $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ *накрывает* $\boldsymbol{K}$, или что $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ есть *накрытие* полиэдра $\boldsymbol{K}$, если задано непрерывное отображение S полиэдра $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ на $\boldsymbol{K}$, удовлетворяющее следующим условиям:

(Накр. 1) В каждую точку P полиэдра $\boldsymbol{K}$ отображается по крайней мере одна точка $\widetilde{P}$ полиэдра $\widetilde{\boldsymbol{K}}$. Мы говорим, что $\widetilde{P}$ *лежит над* P.

(Накр. 2) Пусть $\widetilde{P}_1$, $\widetilde{P}_2, \ldots$ — все лежащие над P точки. Тогда существуют «*отмеченные окрестности*» $\boldsymbol{U}(P)$, $\boldsymbol{U}(\widetilde{P}_1)$, $\boldsymbol{U}(\widetilde{P}_2), \ldots$ такие, что $\boldsymbol{U}(\widetilde{P}_1)$, $\boldsymbol{U}(\widetilde{P}_2), \ldots$ посредством G отображаются *топологически* на $\boldsymbol{U}(P)$ (условие неразветвленности).

(Накр. 3) Всякая точка полиэдра $\widetilde{K}$, лежащая над какой-нибудь точкой из $\boldsymbol{U}(P)$, принадлежит по крайней мере одной из отмеченных окрестностей $\boldsymbol{U}(\widetilde{P}_1)$, $\boldsymbol{U}(\widetilde{P}_2), \ldots$ (условие отсутствия границы).

Условие (Накр. 2) определяет отображение G как топологическое в малом, и исключает, таким образом, возможность существования, например,

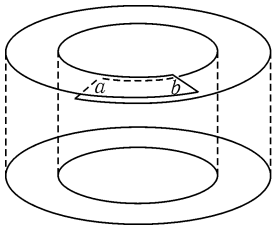


Рис. 99

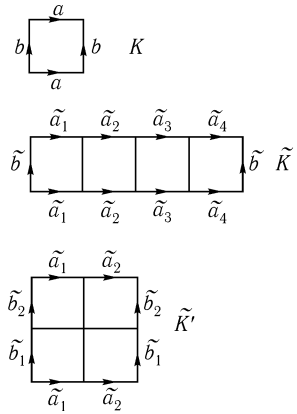


Рис. 100–102

складок или точек разветвления римановой поверхности, распростертой на двумерной сфере. Мы будем рассматривать в дальнейшем только такие неразветвленные накрывающие полиэдры. Условие (Накр. 3), как мы докажем в § 54, устанавливает возможность неограниченно переносить каждый путь исходного полиэдра на накрывающий полиэдр. Такая возможность не вытекает еще, как видно из следующего примера, из условий (Накр. 1) и (Накр. 2). Пусть исходный полиэдр представляет круговое кольцо, а накрывающий полиэдр — прямоугольную полосу с принадлежащими к ней длинными сторонами, но не принадлежащими короткими (на рис. 99 короткие стороны, не принадлежащие нашему накрывающему полиэдру, обозначены буквами a и b), причем полоса эта отображена на кольцо так, что ее открытые концы перекрываются (рис. 99). Тогда условия (Накр. 1) и (Накр. 2) выполняются; условие же (Накр. 3) не выполняется. Именно, оно не выполняется для окрестности $\boldsymbol{U}(P)$ точки P, лежащей под линией a или b. Путь, обходящий два раза вокруг внутренней окружности кольца, не может быть перенесен на накрывающий полиэдр так, чтобы накрывающий путь посредством G отображался на исходный. Заметим, что исходный полиэдр получается из накрывающего отождествлением точек, имеющих один и тот же прообраз.

В самом деле, здесь применима теорема II § 8, так как при отображении G произвольная окрестность точки $\widetilde{P}$ переходит в окрестность лежащей под ней точки P.

Простой пример накрывающего полиэдра дает тор. Если отобразить тор $\widetilde{\boldsymbol{K}}$, представленный на рис. 101 прямоугольником, разделенным на четыре квадрата, на тор $\boldsymbol{K}$ так, чтобы каждый из четырех квадратов $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ конгруэнтно отображался в квадрат тора $\boldsymbol{K}$, то при этом устанавливается четырехлистное накрытие тора $\boldsymbol{K}$ тором $\widetilde{\boldsymbol{K}}$. Можно представлять себе, что накрывающий тор $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ получается из исходного тора $\boldsymbol{K}$, например, следующим образом: берутся четыре лежащие над $\boldsymbol{K}$ и конгруэнтных с $\boldsymbol{K}$ тора, каждый из которых рассекается вдоль меридианов (на рис. 100 меридиан изображается вертикальной линией) и которые затем в циклическом порядке склеиваются друг с другом (рис. 101). Если представлять себе тор как поверхность вращения, расположенную в обычном трехмерном пространстве, то меридиан оказывается замкнутой линией самопересечения тора $\widetilde{\boldsymbol{K}}$. Если же рассматривать $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ — независимо от какого-либо вложения в пространство — как двумерное многообразие, то точки этой линии самопересечения ничем не отличаются от других точек.

Два накрывающих полиэдра считаются одинаковыми, если один из них можно топологически отобразить на другой так, что каждые две соответствующие при этом друг другу точки будут лежать над одной и той же точкой. Два гомеоморфных полиэдра могут оказаться различными накрывающими для одного и того же полиэдра.

Примеры. Кроме рассмотренного выше четырехлистного накрытия тора $\boldsymbol{K}$ тором $\widetilde{\boldsymbol{K}}$, можно дать другое четырехлистное накрытие тором $\widetilde{\boldsymbol{K}}'$ такое, что $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ и $\widetilde{\boldsymbol{K}}'$, рассматриваемые как накрывающие полиэдры, будут различны. Для этого нужно только рассечь каждый из четырех листов вдоль меридиана и параллели и присоединить их друг к другу крест-накрест. Рис. 102 показывает тор $\widetilde{\boldsymbol{K}}'$, представленный в виде квадрата и разбитый на четыре листа так, что одинаково расположенные точки этих четырех листов (малых квадратов) лежат над одной и той же точкой $\boldsymbol{K}$.

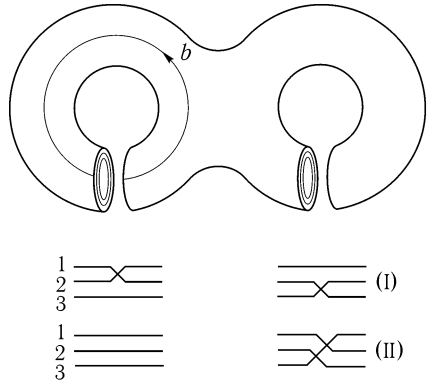


Рис. 103

Приведем еще два примера накрывающих полиэдров, которыми мы в дальнейшем воспользуемся. Пусть исходный полиэдр $\boldsymbol{K}$ представляет *двойной тор*, рассматриваемый как вложенная в обычное пространство сфера с двумя ручками. Предположим, что на этом двойном торе лежат три конгруэнтных экземпляра с рассеченными

ручками. Для того чтобы получить один накрывающий полиэдр, мы соединяем первый и второй экземпляры крест-накрест друг с другом вдоль сечений левых ручек (рис. 103), в то время как третий экземпляр слева соединяется сам с собой и дает там гладкую поверхность. Справа же мы соединяем

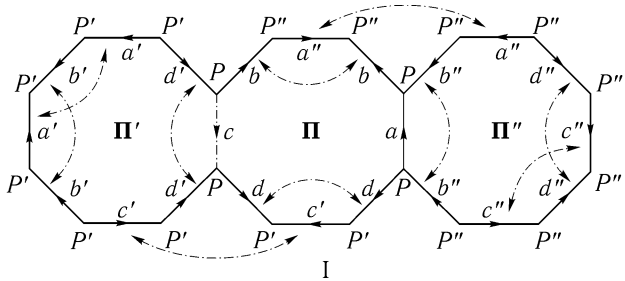


Рис. 104

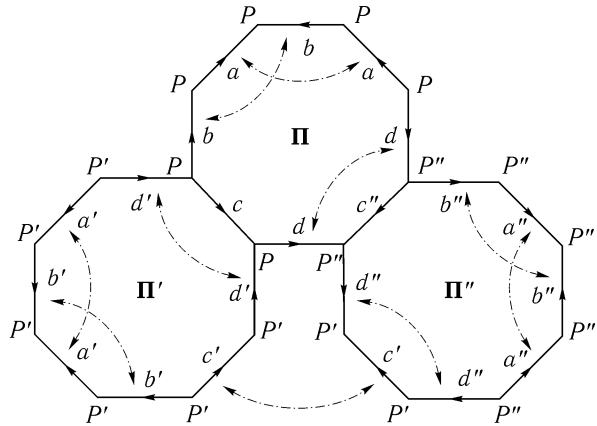


Рис. 105

крестообразно второй и третий экземпляры, соединяя сам с собой первый экземпляр. Второй накрывающий получается, если мы склеим слева каждый из листов сам с собой, справа же соединим их в циклическом порядке друг с другом. Рассеченные меридианы ручек дают (там, где склеивались различные экземпляры, т. е. не получалось гладкой поверхности) замкнутые кривые самопересечения, по которым пересекаются два или все три экземпляра. Самопересечения показаны на рисунке схематически.

Другая модель накрывающей поверхности получится, если мы предста-

вим каждый из трех экземпляров двойного тора в виде канонического полигона восьмиугольника и надлежащим образом соединим эти полигоны друг с другом. Накрывающая поверхность оказывается тогда многоугольником с попарно эквивалентными сторонами. На рис. 104 и 105 эквивалентные вершины и ребра обозначены одинаково, в то время как вершины, ребра и элементы поверхности, лежащие над одними и теми же вершинами, ребрами и элементами, различаются верхними значками. Накрывающая поверхность в обоих случаях ориентируема и ее характеристика равна утроенной характеристике исходной поверхности: $\tilde{N} = 3N = -6$. В самом деле, над каждой вершиной, каждым ребром и каждым элементом поверхности лежат в точности три накрывающих элемента. Накрывающая поверхность имеет поэтому род $h = 4$ (стр. 181).

§ 54. Основной и накрывающий пути

Пусть w — прообраз (в смысле § 42) пути $\widetilde{W}$ полиэдра $\widetilde{\boldsymbol{K}}$, а $\widetilde{T}$ — отображение w на $\widetilde{W}$. Тогда $G\widetilde{T}$ представляет непрерывное отображение T прообраза w в $\boldsymbol{K}$, определяющее в $\boldsymbol{K}$ путь W. Говорят, что W есть принадлежащий пути $\widetilde{W}$ *основной путь* и что $\widetilde{W}$ *накрывает* путь W. Мы докажем сейчас, что не только каждый путь $\widetilde{W}$ накрывающего полиэдра $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ определяет таким образом основной путь w на $\boldsymbol{K}$, но и, наоборот, — каждому пути исходного полиэдра соответствует лежащий над ним путь накрывающего полиэдра, причем это соответствие может быть установлено столькими способами, сколько точек накрывающего полиэдра лежит над начальной точкой A пути W.

Теорема I. *Если w есть ведущий из A в B путь полиэдра $\boldsymbol{K}$, а $\widetilde{A}$ — лежащая над A точка накрывающего полиэдра $\widetilde{\boldsymbol{K}}$, то существует в точности один путь $\widetilde{W}$ с начальной точкой $\widetilde{A}$, накрывающий путь W.*

Доказательство. Выберем в качестве прообраза пути W ориентированный единичный отрезок w $(0 \leqslant s \leqslant 1)$. Пусть T — отображение отрезка w на W, а $\widetilde{T}'$ — произвольное непрерывное отображение отрезка w в полиэдр $\widetilde{\boldsymbol{K}}$, определяющее там путь $\widetilde{W}$; $\widetilde{W}$ является путем, накрывающим W в том и только в том случае, если w переводится отображением $G\widetilde{T}'$ в путь W, т. е. если существует топологическое отображение S отрезка w на себя такое, что соответствующие точки s и $S(s)$ отображениями T и $G\widetilde{T}'$ переводятся в один и тот же образ в $\boldsymbol{K}$: $T(s) = G\widetilde{T}'S(s)$. Однако в силу определения равенства путей отображение $\widetilde{T}'$ дает нам тот же путь в $\widetilde{\boldsymbol{K}}$, что и $\widetilde{T}'S = \widetilde{T}$. Таким образом мы получим самый общий накрывающий путь $\widetilde{W}$, если отобразим w при помощи непрерывного отображения $\widetilde{T}$ в $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ так, что $G\widetilde{T} = T$.

Другими словами, точка $\widetilde{T}(s)$ для каждого s должна лежать над $T(s)$. Вместе с тем теорема I сводится к следующей лемме:

Лемма. *Пусть задано непрерывное отображение T единичного отрезка $0 \leqslant s \leqslant 1$ в полиэдр $\boldsymbol{K}$. Тогда, если $\widetilde{A}$ есть лежащая над $A = T(0)$ точка накрывающего полиэдра $\widetilde{\boldsymbol{K}}$, существует в точности одно непрерывное отображение $\widetilde{T}$ единичного отрезка в $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ такое, что $\widetilde{T}(0) = \widetilde{A}$, а $\widetilde{T}(s)$ для каждого s лежит над $T(s)$.*

Доказательство. a) *Существование отображения $\widetilde{T}$.* Пусть каждой точке P полиэдра $\boldsymbol{K}$ отнесена некоторая отмеченная окрестность $\boldsymbol{U}(P)$. Разделим единичный отрезок w на n равных частей $r_1, r_2, \ldots, r_n$ и выберем n настолько большим, чтобы образ $T(r_i)$ каждого частичного отрезка принадлежал целиком отмеченной окрестности $\boldsymbol{U}_i$ (некоторой точки, нас в дальнейшем не интересующей). Что такой выбор числа n возможен, следует из теоремы о равномерной непрерывности (§ 7, теорема IV): мы должны только в качестве приведенной там окрестности $\boldsymbol{U}^*(P \mid \boldsymbol{B})$ для каждой точки P выбрать отмеченную окрестность $\boldsymbol{U}(P)$. Выберем теперь какую-нибудь лежащую над $\boldsymbol{U}_1$ отмеченную окрестность $\widetilde{\boldsymbol{U}}_1$, содержащую точку $\widetilde{A}$. В силу (Накр. 3) такая окрестность существует. Так как посредством отображения G $\widetilde{\boldsymbol{U}}_1$ отображается на $\boldsymbol{U}_1$ топологически, то мы можем топологически перенести в $\widetilde{\boldsymbol{U}}_1$ лежащий в $\boldsymbol{U}_1$ образ $T(r_1)$ отрезка r_1. Таким образом мы получим отображение $\widetilde{T}_1$ первого частичного отрезка r_1 в $\widetilde{\boldsymbol{U}}_1$, при котором его начальная точка $s = 0$ переходит в $\widetilde{A}$. Далее, таким же способом мы переносим второй частичный отрезок r_2 — именно, мы выбираем отмеченную окрестность $\boldsymbol{U}_2$, содержащую целиком $T(r_2)$, затем лежащую над ней окрестность $\widetilde{\boldsymbol{U}}_2$, содержащую образ конечной точки отрезка r_1, т. е. точку $\widetilde{T}_1\left(\frac{1}{n}\right)$, и переносим затем топологически $T(r_2)$ в $\widetilde{\boldsymbol{U}}_2$. При этом получается непрерывное отображение $\widetilde{T}_2$ отрезка r_2 в $\widetilde{\boldsymbol{U}}_2$ и $\widetilde{T}_1\left(\frac{1}{n}\right) = \widetilde{T}_2\left(\frac{1}{n}\right)$. Продолжая таким же образом дальше, мы получаем последовательность отображений $\widetilde{T}_1, \widetilde{T}_2, \ldots, \widetilde{T}_n$ частичных отрезков $r_1, r_2, \ldots, r_n$, причем всегда выполняется соотношение $\widetilde{T}_i\left(\frac{i}{n}\right) = \widetilde{T}_{i+1}\left(\frac{i}{n}\right)$. Эти частичные отображения дают совместно требуемое отображение $\widetilde{T}$ единичного отрезка в накрывающий полиэдр $\widetilde{\boldsymbol{K}}$.

b) *Единственность отображения $\widetilde{T}$.* Пусть $\widetilde{T}'$ — какое-нибудь другое непрерывное отображение единичного отрезка, удовлетворяющее условиям леммы. Мы можем допустить, что отображения $\widetilde{T}$ и $\widetilde{T}'$ совпадают друг с другом для всех значений параметра до некоторого определенного значения $s^*(\geqslant 0)$. В силу непрерывности они совпада-

ют также и при самом значении s^*. Но тогда существует отмеченная окрестность $\widetilde{\boldsymbol{U}}^*$ точки $\widetilde{T}^*(s^*) = \widetilde{T}'(s^*)$, топологически отображающаяся посредством G на отмеченную окрестность $\boldsymbol{U}^*$ лежащей под этой точкой точки $T(s^*)$. Далее, в силу непрерывности $\widetilde{T}$ и $\widetilde{T}'$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что при $s < s^* + \varepsilon$ все точки $\widetilde{T}(s)$ и $\widetilde{T}'(s)$ лежат в $\boldsymbol{U}^*$. Так как, однако, $\widetilde{T}(s)$ и $\widetilde{T}'(s)$ лежат над одной и той же точкой $T(s)$ окрестности $\boldsymbol{U}^*$, а U^* и $\widetilde{U}^*$ находятся во взаимно однозначном соответствии друг с другом, то $\widetilde{T}(s) = \widetilde{T}'(s)$. Таким образом $\widetilde{T}$ и $\widetilde{T}'$ совпадают также для всех значений параметра, вплоть до $s^* + \varepsilon$, а следовательно, совпадают и вообще. Лемма доказана.

Воспользуемся теоремой I, чтобы дать определение числа листов накрывающего полиэдра.

Пусть P и Q — две точки $\boldsymbol{K}$. Мы можем тогда установить взаимно однозначное соответствие между точками, лежащими над P, и точками, лежащими над Q. В самом деле, проведем путь W, идущий из P в Q, и отнесем каждой, лежащей над P точке P_i конечную точку пути, выходящего из $\widetilde{P}_i$ и лежащего над W. Обратно, каждой лежащей над Q точке $\widetilde{Q}_k$ отнесем конечную точку лежащего над W^{-1} пути, выходящего из $\widetilde{Q}_k$. По теореме I пути, о которых идет речь, существуют и определяются однозначно. Второе из установленных соответствий является, очевидно, обратным первому, так что между точками, лежащими над P, и точками, лежащими над Q, устанавливается взаимно однозначное соответствие. *Над каждой точкой полиэдра $\boldsymbol{K}$ лежит, таким образом, одно и то же число, например, g точек накрывающего полиэдра $\widetilde{\boldsymbol{K}}$. Это число называется кратностью накрытия или числом листов g*; оно может быть как конечным, так и бесконечным.

Теорема I устанавливает связь между *путями* основного и накрывающего полиэдров. Следующая теорема позволяет сделать то же самое в отношении *классов* путей. Она утверждает, что деформация пути накрывающего полиэдра отражается известным образом на пути, лежащем в основном полиэдре, и обратно.

Теорема II. *Если $\widetilde{W}_0$ и $\widetilde{W}_1$ — два пути в $\widetilde{\boldsymbol{K}}$, ведущие из $\widetilde{A}$ в $\widetilde{B}$, а W_0 и W_1 — ведущие из A в B основные пути, и $\widetilde{W}_0$ можно деформировать в $\widetilde{W}_1$, то W_0 также можно деформировать в W_1. Обратно, если W_0 и W_1 — два ведущие из A в B и деформируемые друг друга пути полиэдра $\boldsymbol{K}$, а $\widetilde{W}_0$ и $\widetilde{W}_1$ — два соответствующие накрывающие пути, выходящие из одной лежащей над A точки $\widetilde{A}$, то оба эти пути ведут в одну лежащую над B точку $\widetilde{B}$ и также деформируемы друг в друга.*

Доказательство первой части этой теоремы следует из непрерывности отображения G (см. стр. 201).

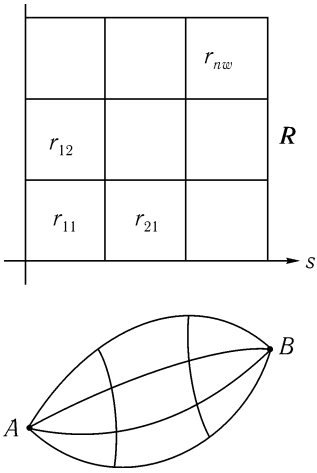


Рис. 106

Доказательство же второй части хотя также основывается на соображениях того же рода, однако менее просто. Именно, здесь нужно перенести прямоугольник деформации с основного полиэдра на накрывающий, а для этого в нашем распоряжении не имеется никакого отображения, непрерывного и однозначного в целом (im Grossen): имеется лишь отображение, топологическое в (отмеченных) окрестностях. Деформируемость пути W_0 в W_1 означает, что существует непрерывное отображение T, переводящее прямоугольник деформации $\boldsymbol{R}$ с координатами $0 \leqslant s \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ (рис. 106) в полиэдр $\boldsymbol{K}$ так, что ориентированные стороны $t = 0$ и $t = 1$ переходят в пути W_0 и W_1, а стороны $s = 0$ и $s = 1$ переходят в точки A и B. Мы построим сейчас непрерывное отображение $\widetilde{T}$ прямоугольника $\boldsymbol{R}$ в $\widetilde{\boldsymbol{K}}$, обладающее тем свойством, что для каждой точки (s, t) прямоугольника $\boldsymbol{R}$ $\widetilde{T}(s, t)$ лежит над $T(s, t)$, а $\widetilde{T}(0, 0)$, в частности, совпадает с $\widetilde{A}$. При этом единичный отрезок $t = 0$ отображается непрерывно так, что для любого s точка $\widetilde{T}(s, 0)$ лежит над $T(s, 0)$, а $\widetilde{T}(0, 0) = \widetilde{A}$. По доказанной только что лемме этот единичный отрезок переходит тогда в лежащий над W_0 и начинающийся в $\widetilde{A}$ путь $\widetilde{W}_0$. Точно так же единичные отрезки $s = 0$ и $s = 1$ переводятся отображением $\widetilde{T}$ соответственно в $\widetilde{A}$ и в конечную точку $\widetilde{B}$ пути $\widetilde{W}_0$. Наконец, сторона $t = 1$ перейдет в накрывающий путь $\widetilde{W}_1$, который поэтому также должен окончиться в $\widetilde{B}$. Таким образом, доказав существование отображения T, мы докажем тем самым деформируемость пути $\widetilde{W}_0$ в $\widetilde{W}_1$.

Для *построения* $\widetilde{T}$ разобьем прямоугольник деформации $\boldsymbol{R}$ n равноотстоящими горизонтальными и n вертикальными прямыми на n^2 частичных прямоугольников r_{ik}

$$\frac{i-1}{n} \leqslant s \leqslant \frac{i}{n}, \quad \frac{k-1}{n} \leqslant t \leqslant \frac{k}{n},$$

причем выберем n настолько большим, чтобы образ $T(r_{ik})$ каждого такого прямоугольника лежал целиком в отмеченной окрестности $\boldsymbol{U}_{ik}$ (некоторой надлежащим образом взятой точки); по теореме о равномерной непрерывности это всегда возможно. Будем теперь строить $\widetilde{T}$ постепенно, перенося каждый из частичных прямоугольников r_{ik} на $\widetilde{\boldsymbol{K}}$.

Начнем с r_{11}. Выберем лежащую над $\boldsymbol{U}_{11}$ отмеченную окрестность $\widetilde{\boldsymbol{U}}_{11}$, содержащую точку $\widetilde{A}$; это возможно по условию (Накр. 3). Перенесем, далее, образ $T(r_{11})$ прямоугольника r_{11}, лежащий целиком в $\boldsymbol{U}_{11}$, топологически в $\widetilde{\boldsymbol{U}}_{11}$, т. е. возьмем гомеоморфный образ этого образа при топологическом отображении $\boldsymbol{U}_{11}$ на $\widetilde{\boldsymbol{U}}_{11}$. Мы получим тогда непрерывное отображение $\widetilde{T}_{11}$ прямоугольника r_{11} в $\widetilde{\boldsymbol{U}}_{11}$, при котором $\widetilde{T}_{11}(0,\,0) = \widetilde{A}$ и $\widetilde{T}_{11}(s,\,t)$ лежит над $T(s,\,t)$. Далее, выберем лежащую над $\boldsymbol{U}_{21}$ отмеченную окрестность $\widetilde{\boldsymbol{U}}_{21}$, содержащую точку $\widetilde{T}_{11}\left(\frac{1}{n},\,0\right)$, т. е. образ правой нижней вершины прямоугольника r_{11}, и топологически перенесем $T(r_{21})$ в $\widetilde{\boldsymbol{U}}_{21}$. Это даст нам отображение $\widetilde{T}_{21}$ прямоугольника r_{21} в $\widetilde{\boldsymbol{U}}_{21}$. Отображения $\widetilde{T}_{11}$ и $\widetilde{T}_{21}$, как легко видеть; на общей стороне прямоугольников r_1 и r_{21} совпадают. В самом деле, оба отображения переводят начальную точку $\left(\frac{1}{n},\,0\right)$ этой стороны в одну и ту же точку, а так как и $\widetilde{T}_{11}\left(\frac{1}{n},\,t\right)$, и $\widetilde{T}_{21}\left(\frac{1}{n},\,t\right)$ лежат над одной точкой $T\left(\frac{1}{n},\,t\right)$, то из леммы следует, что $\widetilde{T}_{11}\left(\frac{1}{n},\,t\right) = \widetilde{T}_{21}\left(\frac{1}{n},\,t\right)$. Таким же способом следующий прямоугольник r_{31} непрерывно отображается посредством $\widetilde{T}_{31}$ в $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ так, что $\widetilde{T}_{21}\left(\frac{2}{n},\,0\right) = \widetilde{T}_{31}\left(\frac{2}{n},\,0\right)$, и доказывается, что отображения $\widetilde{T}_{21}$ и $\widetilde{T}_{31}$ в точках общей стороны прямоугольников r_{21} и r_{31} совпадают. После n шагов мы получаем непрерывное отображение $\widetilde{T}_1$ всей полоски $r_{11}, r_{21}, \ldots, r_{n1}$, при котором $\widetilde{T}_1(s,\,t)$ лежит над $T(s,\,t)$, а сторона $s = 0,\ 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{n}$, переходит в $\widetilde{A}$. Таким же образом для остальных полосок $r_{1i}, r_{2i}, \ldots, r_{ni}\quad (i = 2, 3, \ldots, n)$ мы получаем отображения $\widetilde{T}_i$, причем также $\widetilde{T}_i(s,\,t)$ лежит всегда над $T(s,\,t)$, а $\widetilde{T}_i(0,\,t) = \widetilde{A}$. Так как, далее, отображения $\widetilde{T}_i$ и $\widetilde{T}_{i+1}$ также совпадают в точках общего единичного отрезка i-й и $(i+1)$-й полоски (в силу леммы), то при этом получается требуемое непрерывное отображение $\widetilde{T}$ всего прямоугольника деформации $\boldsymbol{R}$, для которого $\widetilde{T}(s,\,t)$ лежит над $T(s,\,t)$ и $\widetilde{T}(0,\,0) = \widetilde{A}$.

§ 55. Накрывающий полиэдр и подгруппа фундаментальной группы

Выберем в качестве начальной точки замкнутых путей в полиэдре $\boldsymbol{K}$ некоторую точку O, а в накрывающем полиэдре $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ — лежащую над O точку $\widetilde{O}_1$. Тогда, как показано на стр. 202, непрерывное отображение G ставит в соответствие каждому классу путей фундаменталь-

ной группы $\widetilde{\mathrm{F}}$ полиэдра $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ определенный класс путей фундаментальной группы F полиэдра $\boldsymbol{K}$. Это соответствие представляет гомоморфное отображение группы $\widetilde{\mathrm{F}}$ на определенную подгруппу H_1 группы F.

Однако вторая часть теоремы II предыдущего параграфа утверждает, что два негомотопные пути $\widetilde{\mathrm{F}}$ переводятся посредством G в два также негомотопных пути F. Отсюда следует, что гомоморфное отображение группы $\widetilde{\mathrm{F}}$ на H_1 есть даже изоморфизм.

Фундаментальная группа $\widetilde{\mathrm{F}}$ *накрывающего полиэдра изоморфна, следовательно, некоторой подгруппе* H_1 *фундаментальной группы основного полиэдра.* H_1 *получается как совокупность образов путей* $\widetilde{F}$ *при отображении посредством* G *в пути основного полиэдра.*

Нужно заметить, однако, что подгруппа H_1 еще не определяется полностью накрывающим полиэдром $\widetilde{\boldsymbol{K}}$, а зависит также, как мы покажем, от выбора начальной точки $\widetilde{O}_1$. Пусть теперь

$$\mathrm{F} = \mathrm{H}_1 + \mathrm{H}_1\{F_{12}\} + \mathrm{H}_1\{F_{13}\} + \dots$$

представляет разложение группы F по H_1. Здесь $\{F_{1i}\}$ означает, как и на стр. 199, класс путей, содержащий путь F_{1i}. Если H_1 есть произвольный путь из H_1, а $\widetilde{H}_1$ — накрывающий путь, начинающийся в $\widetilde{O}_1$, то $\widetilde{H}_1$ есть замкнутый путь. Отсюда следует, что все пути полиэдра $\widetilde{\boldsymbol{K}}$, соответствующие путям определенного класса смежности $\mathrm{H}_1\{F_{1i}\}$ полиэдра $\boldsymbol{K}$, ведут из $\widetilde{O}_1$ в одну и ту же конечную точку $\widetilde{O}_i$ — именно, в конечную точку начинающегося в $\widetilde{O}_1$ и лежащего над F_{1i} пути $\widetilde{F}_{1i}$. Таким образом каждый класс смежности $H_i\{F_{1i}\}$ определяет точку $\widetilde{O}_i$ над O. Различные классы $\mathrm{H}_1\{F_{1i}\}$ и $\mathrm{H}_1\{F_{1j}\}$ определяют различные точки $\widetilde{O}_i \neq \widetilde{O}_j$, так как иначе путь $\widetilde{F}_{1i}\widetilde{F}_{1j}^{-1}$ был бы замкнут, т. е. класс $\{F_{1i}F_{1j}^{-1}\}$ был бы элементом подгруппы H_1, в то время как $\{F_{1i}\}$ и $\{F_{1j}\}$ принадлежат различным классам смежности. Ввиду того что конечные точки путей $\widetilde{F}_{11}, \widetilde{F}_{12}, \dots$ исчерпывают, очевидно, все лежащие над O точки полиэдра $\widetilde{\boldsymbol{K}}$, мы получаем взаимно однозначное соответствие между правыми классами смежности подгруппы H_1 группы F и лежащими над O точками накрывающего полиэдра. Отсюда следует, в частности, что *число листов накрывающего полиэдра равно индексу подгруппы* H_1 *группы* F.

Каждый выходящий из $\widetilde{O}_i$ замкнутый путь $\widetilde{H}_i$ можно деформировать в путь вида $\widetilde{F}_{1i}^{-1}\widetilde{H}_1\widetilde{F}_{1i}$, например, хотя бы в путь $\widetilde{F}_{1i}^{-1}(\widetilde{F}_{1i}\widetilde{H}_i\widetilde{F}_{1i}^{-1})\widetilde{F}_{1i}$. При этом $\widetilde{H}_i$ есть замкнутый путь, выходящий из $\widetilde{O}_i$. Пути $\widetilde{F}_{1i}^{-1}\widetilde{H}_1\widetilde{F}_{1i}$ соответствует на $\boldsymbol{K}$ путь $F_{1i}^{-1}H_1F_{1i}$. Это путь, принадлежащий сопряженной с H_1 подгруппе $\mathrm{H}_i = \{F_{1i}\}^{-1}\mathrm{H}_1\{F_{1i}\}$. Обратно, каждый путь,

соответствующий в $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ пути подгруппы H_1 и начинающийся в $\widetilde{O}_i$, замкнут. В самом деле, путь *частного* вида $F_{1i}^{-1}H_1F_{1i}$ переходит в выходящий из $\widetilde{O}_i$ путь $\widetilde{F}_{1i}^{-1}\widetilde{H}_1\widetilde{F}_{1i}$ накрывающего полиэдра, а этот путь замкнут, так как $\widetilde{F}_{1i}^{-1}$ ведет из $\widetilde{O}_i$ в $\widetilde{O}_1$, $\widetilde{H}_1$ ведет из $\widetilde{O}_1$ в $\widetilde{O}_1$, а $\widetilde{F}_{1i}$ из $\widetilde{O}_1$ снова ведет в $\widetilde{O}_i$. Для *любого* пути из H_i имеет место то же самое: такой путь можно деформировать в путь вида $F_{1i}^{-1}H_1F_{1i}$, чему соответствует на $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ деформация соответствующего пути, оставляющая конечную точку пути неизменной. Но это значит, что если мы возьмем вместо $\widetilde{O}_1$ в качестве начальной точки замкнутых путей накрывающего лолиэдра $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ точку $\widetilde{O}_i$, то фундаментальной группе $\widetilde{\mathrm{F}}$ полиэдра $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ соответствует сопряженная с H_1 подгруппа $\{F_{1i}\}^{-1}\mathrm{H}_1\{F_{1i}\}$, причем надлежащим выбором точки $\widetilde{O}_i$ можно получить любую сопряженную с H_1 подгруппу. Таким образом *накрытие полиэдра* $\boldsymbol{K}$ *полиэдром* $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ *определяет целый класс сопряженных подгрупп фундаментальной группы* F.

Мы докажем сейчас, что и, обратно, каждый класс сопряженных подгрупп определяет накрытие полиэдра. Тогда вопрос о построении всех накрывающих с данным числом g листов накрытия будет сведен к теоретико-групповому вопросу об отыскании всех классов сопряженных подгрупп индекса g фундаментальной группы основного полиэдра. Для конечного полиэдра и конечного числа листов мы проведем построение в § 58.

Доказательство существования

I. *Построение полиэдра* $\widetilde{\boldsymbol{K}}$. Пусть H — произвольная подгруппа фундаментальной группы F[*]. Требуется построить накрывающий полиэдр $\widetilde{\boldsymbol{K}}$, фундаментальной группе $\widetilde{\mathrm{F}}$ которого при надлежащем выборе начальной точки $\widetilde{O}_1$ над точкой O соответствует на $\boldsymbol{K}$ группа H. Предположим, что O есть вершина симплициального разбиения полиэдра $\boldsymbol{K}$, — в случае надобности этого всегда можно добиться соответствующим подразделением. Мы построим накрывающий полиэдр $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ с таким симплициальным разбиением, что при отображении $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ на $\boldsymbol{K}$ каждый симплекс полиэдра $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ будет линейно отображаться на симплекс $\boldsymbol{K}$. Такое разбиение мы будем называть *симплициальным разбиением* $\widetilde{\boldsymbol{K}}$, *соответствующим разбиению основного полиэдра* $\boldsymbol{K}$.

Задача построения полиэдра $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ будет решена, если мы сможем задать его схему (§ 11). Элементами схемы у нас будут некоторые классы путей, которые мы сейчас определим.

Пусть A — вершина полиэдра $\boldsymbol{K}$. Разобьем совокупность путей, ведущих из O в A, на классы, так называемые H-*классы*. Именно, мы

[*] Для простоты мы пишем теперь H вместо H_1.

причисляем два пути U и U' к одному H-классу в том и только в том случае, если замкнутый путь UU'^{-1} принадлежит подгруппе H. Каждой вершине A полиэдра $\boldsymbol{K}$ принадлежат тогда некоторые H-классы

$$\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots$$

В частности, пути подгруппы H сами образуют такой класс — «*единичный H-класс*». Он принадлежит точке O. Мы будем обозначать его через $\overline{O}_1$.

Два H-класса $\overline{A}_i$ и $\overline{B}_k$ называются *соседними*, если соответствующие им конечные точки A и B являются вершинами одномерного симплекса c полиэдра $\boldsymbol{K}$ и если, сверх того замкнутый, путь UcV^{-1}, в котором U есть путь из $\overline{A}_i$, а V — путь из $\overline{B}_k$, принадлежит H. При этом, очевидно, безразлично, какие именно пути U и V выбираются из $\overline{A}_i$ и $\overline{B}_k$.

Если H-класс $\overline{A}_i$ задан, то существует в точности один принадлежащий вершине B соседний H-класс $\overline{B}_k$; $\overline{B}_k$ состоит из совокупности путей V, для которых при фиксированном U замкнутый путь UcV^{-1} представляет путь подгруппы H. Что класс $\overline{B}_k$ всегда существует, следует из существования пути, входящего в этот класс, хотя бы пути $V = Uc$.

Мы можем доказать теперь следующую лемму.

Лемма. *Пусть $\boldsymbol{E}^i$ — какой-нибудь симплекс основного комплекса $\boldsymbol{K}$, имеющий вершинами точки $A, B, \ldots, C$, и пусть выбран какой-нибудь H-класс $\overline{A}_i$, соответствующий вершине A. Тогда для каждой из остальных вершин $B, \ldots, C$ существует в точности по одному H-классу $\overline{B}_k, \ldots, \overline{C}_l$ такому, что все эти H-классы являются попарно соседними.*

В самом деле, классы $\overline{B}_k, \ldots, \overline{C}_l$ однозначно определяются требованием быть классами, соседними с $\overline{A}_i$. Остается только показать, что эти H-классы попарно соседни. Покажем это, например, для $\overline{B}_k$ и $\overline{C}_l$. Пусть U — путь класса $\overline{A}_i$ (рис. 107), a, b, c — ориентированные симплексы CB, AC и AB; тогда Ub и Uc — представители классов $\overline{C}_l$ и $\overline{B}_k$. Условие того, что $\overline{B}_k$ и $\overline{C}_l$ соседние, заключается в принадлежности пути $Ub \cdot a \cdot (Uc)^{-1}$ к H. Это, однако, действительно имеет место, так как путь $Ub \cdot a \cdot (Uc)^{-1}$ гемотопен нулю, т. е. принадлежит единичному классу путей фундаментальной группы.

Из леммы вытекает, что если мы определим в качестве отмеченных подмножеств схемы (стр. 64) каждую систему попарно соседних H-классов, пути которых ведут в вершины одного и того же симплекса комплекса $\boldsymbol{K}$, то *H-классы комплекса $\boldsymbol{K}$ можно рассматривать как элементы схемы некоторого симплициального комплекса $\boldsymbol{K}$*. В самом деле, легко установить, что в этом случае выполняются все условия (Cx_1), (Cx_2) и (Cx_3) § 11.

Другими словами, симплициальный комплекс $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ можно описать следующим образом: каждой его вершине $\widetilde{A}_i$ взаимно однозначно соответствует H-класс $\overline{A}_i$ комплекса $\boldsymbol{K}$. Этому классу соответствует, далее, определенная вершина комплекса $\boldsymbol{K}$, — именно, конечная точка A путей H-класса $\overline{A}_i$. Вершины $\widetilde{A}_i$, $\widetilde{B}_k$, ..., $\widetilde{C}_l$ являются вершинами одного симплекса в том и только в том случае, если соответствующие им вершины A, B, ..., C комплекса $\boldsymbol{K}$ являются вершинами симплекса и, сверх того, H-классы $\overline{A}_i$, $\overline{B}_k$, ..., $\overline{C}_l$ попарно соседни.

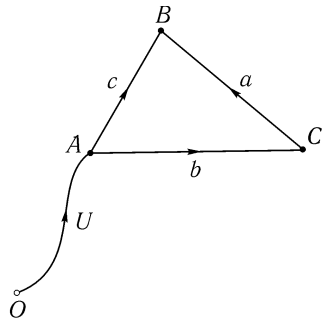


Рис. 107

$\widetilde{\boldsymbol{K}}$ представляет *связный* комплекс. Для доказательства достаточно показать, что каждый H-класс $\overline{A}_i$ можно соединить с единичным H-классом $\overline{O}_1$ с помощью ряда H-классов, в котором каждые два смежных класса являются соседними. Выберем в $\overline{A}_i$ симплициальный путь, идущий из O_1 в A; такой путь непременно существует, так как каждый путь из O в A можно деформировать в симплициальный путь (стр. 152). Части (отрезки) пути U, ведущие из O в вершины, лежащие на U (вернее, соответствующие таким частичным путям классы), образуют ряд, обладающий требуемым свойством.

II. Покажем теперь, что при некоторых условиях $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ является накрывающим комплексом (полиэдром) комплекса $\boldsymbol{K}$, именно, если каждой вершине $\overline{A}_i$ комплекса $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ (соответствующей H-классу $\widetilde{A}_i$) отнесем в качестве накрытой точки A_i, а каждый симплекс комплекса $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ отобразим линейно на симплекс комплекса $\boldsymbol{K}$, натянутый на соответствующие вершины. Тогда выполняются три условия, определяющие накрытие. В самом деле, условие (Накр. 1) выполняется потому, что для каждого симплекса комплекса $\boldsymbol{K}$ существует система соседних H-классов, а следовательно, существует по меньшей мере один накрывающий его симплекс. Пусть теперь P — произвольная точка комплекса $\boldsymbol{K}$, а $\boldsymbol{E}^i$ — симплекс, для которого P является внутренней точкой (такой симплекс определяется однозначно). Все симплексы, имеющие $\boldsymbol{E}^i$ своей стороной, образуют окрестность $\boldsymbol{U}(P)$ точки P в $\boldsymbol{K}$. Мы утверждаем, что $\boldsymbol{U}(P)$ есть отмеченная окрестность. Действительно, лежащая над P точка $\widetilde{P}$ является внутренней точкой лежащего над $\boldsymbol{E}^i$ симплекса $\widetilde{\boldsymbol{E}}^i_\lambda$, определяемого системой $i+1$ соседних H-классов, ведущих в вершины симплекса $\boldsymbol{E}^i$. Если теперь $\boldsymbol{E}^{i+k}$ есть инцидентный с $\boldsymbol{E}^i$ симплекс, то по лемме существует в точности одна система соседних H-классов, ведущих в вершины симплекса $\boldsymbol{E}^{i+k}$, которая содер-

жит заданную систему соседних H-классов (ведущих в вершины $\boldsymbol{E}^i$) как подсистему. Таким образом симплексы, имеющие своей стороной симплекс $\boldsymbol{E}^i$, соответствуют взаимно однозначно симплексам со стороной $\boldsymbol{E}^i_\lambda$. А это и значит, что окрестность $\boldsymbol{U}(\widetilde{P})$ точки $\widetilde{P}$ в $\widetilde{\boldsymbol{K}}$, составленная из совокупности инцидентных с $\widetilde{\boldsymbol{E}}^i_\lambda$ симплексов, топологически отображается на окрестность $\boldsymbol{U}(P)$, т. е. условие (Накр. 2) также выполняется. Пусть, наконец, $\widetilde{Q}_\mu$ есть точка комплекса $\widetilde{\boldsymbol{K}}$, лежащая над точкой Q окрестности $\boldsymbol{U}(P)$. Q принадлежит инцидентному с $\boldsymbol{E}^i$ симплексу $\boldsymbol{E}^{j+k}_\mu$ окрестности $\boldsymbol{U}(P)$. Поэтому $\widetilde{Q}_\mu$ принадлежит лежащему над $\boldsymbol{E}^{i+k}_\mu$ симплексу $\widetilde{\boldsymbol{E}}^{i+k}_\mu$, который содержит лежащую над P точку $\widetilde{P}_\mu$. Но это значит, что Q_μ принадлежит к окрестности $\boldsymbol{U}(\widetilde{P}_\mu)$, т. е. выполнено условие (Накр. 3).

III. Накрывающий комплекс $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ *принадлежит подгруппе* H *фундаментальной группы* F *комплекса* $\boldsymbol{K}$ [*]. Выберем за начальную точку замкнутых путей в $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ лежащую над O точку $\widetilde{O}_1$, которая соответствует единичному H-классу $\overline{O}_1$. Пусть теперь U есть симплициальный путь комплекса $\boldsymbol{K}$, идущий из O в некоторую вершину A, а U_τ — частичный путь, состоящий из первых τ ребер пути U. Тогда H-классы путей $U_0, U_1, \ldots, U_l = U$ дадут нам ряд классов, в котором каждые два рядом стоящие являются соседними классами. Вершины комплекса $\widetilde{\boldsymbol{K}}$, определяемые двумя такими рядом стоящими H-классами, являются тогда также соседними вершинами, вследствие чего ряд вершин, соответствующий этому ряду H-классов, можно соединить лежащим над U симплициальным путем $\widetilde{U}$. Начальная точка пути $\widetilde{U}$ принадлежит H-классу пути U_0, т. е. представляет вершину $\widetilde{O}_1$.

Если теперь U есть, в частности, принадлежащий к H замкнутый симплициальный путь, т. е. если U лежит в единичном H-классе $\overline{O}_1$, то начинающийся в $\widetilde{O}_1$ накрывающий путь $\widetilde{U}$ возвращается в $\widetilde{O}_1$. Если же U не принадлежит к H, т. е. лежит в H-классе $\overline{O}_i \neq \overline{O}_1$, то соответствующий симплициальный путь $\widetilde{U}_i$ в $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ ведет из $\widetilde{O}_1$ в $\widetilde{O}_i \neq \overline{O}_1$, т. е. не замкнут. Так как каждый выходящий из O замкнутый путь можно деформировать в симплициальный путь, то этим доказано, что выходящий из O замкнутый путь U накрывается замкнутым же путем $\widetilde{U}$ с начальной точкой $\widetilde{O}_1$ в том и только в том случае, когда U принадлежит H. Отсюда следует, что если за начальную точку замкнутых путей $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ принять точку $\widetilde{O}_1$, то фундаментальная группа F полиэдра $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ отображается как раз на подгруппу H группы F, т. е. $\boldsymbol{K}$ есть накрывающий полиэдр, принадлежащий подгруппе H.

[*] То-есть фундаментальная группа комплекса $\boldsymbol{K}$ отображается в подгруппу H.

Единственность полиэдра $\widetilde{\boldsymbol{K}}$

Пусть теперь $\widetilde{\boldsymbol{K}}'$ — какой-нибудь другой накрывающий полиэдр*, принадлежащий к тому же классу сопряженных подгрупп фундаментальной группы F полиэдра $\boldsymbol{K}$, что и $\widetilde{\boldsymbol{K}}$, — именно, к классу, содержащему подгруппу H. Тогда в полиэдре $\widetilde{\boldsymbol{K}}'$ существует такая лежащая над O точка $\widetilde{O}_1'$, что если мы выберем ее за начальную точку замкнутых путей в $\widetilde{\boldsymbol{K}}'$, то фундаментальная группа полиэдра $\widetilde{\boldsymbol{K}}'$ отобразится как раз на подгруппу H (может случиться, что в $\widetilde{\boldsymbol{K}}'$ существует больше чем одна лежащая над O точка, обладающая этим свойством). Мы построим *отображение* полиэдра $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ на $\widetilde{\boldsymbol{K}}'$, при котором $\widetilde{O}_1$ переходит в $\widetilde{O}_1'$, а соответствующие друг другу точки лежат над одной и той же точкой $\boldsymbol{K}$.

Пусть $\widetilde{P}$ — какая-нибудь точка полиэдра $\widetilde{\boldsymbol{K}}$. Проведем из $\widetilde{O}_1$ в точку $\widetilde{P}$ путь $\widetilde{W}$. Соответствующий основной путь есть выходящий из точки O путь W. Пусть $\widetilde{W}'$ — начинающийся в O_1' и лежащий над W путь полиэдра $\widetilde{\boldsymbol{K}}'$, конечная точка которого $\widetilde{P}'$. Мы ставим тогда в соответствие точке $\widetilde{P}$ точку $\widetilde{P}'$. Покажем, что это соответствие не зависит от выбора соединяющего пути $\widetilde{W}$. Пусть $\widetilde{V}$ — другой путь, соединяющий $\widetilde{O}_1$ с $\widetilde{P}$. Так как путь $\widetilde{W}\widetilde{V}^{-1}$ замкнут, то WV^{-1} принадлежит к H. Но тогда лежащий над WV^{-1} и начинающийся в точке O_1' накрывающий путь также замкнут, так как при выборе точки O_1' начальной точкой замкнутых путей в $\widetilde{\boldsymbol{K}}'$ фундаментальная группа полиэдра $\widetilde{\boldsymbol{K}}'$ отображается на H. Таким образом пути $\widetilde{W}'$ и $\widetilde{V}'$ ведут в одну и ту же конечную точку $\widetilde{P}'$. Так как при помощи обратной конструкции мы от $\widetilde{P}'$ однозначно переходим к $\widetilde{P}$, то установленное между точками $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ и $\widetilde{\boldsymbol{K}}'$ соответствие является взаимно однозначным.

Так как $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ и $\widetilde{\boldsymbol{K}}'$ совершенно равноправны, то для установления того, что получающееся отображение, есть гомеоморфизм, достаточно показать его непрерывность в одном направлении, например, в направлении $\widetilde{P} \to \widetilde{P}'$. Таким образом мы должны теперь показать, что для заданной окрестности $\widetilde{\boldsymbol{U}}'(\widetilde{P}')$ можно найти окрестность $\widetilde{\boldsymbol{U}}(\widetilde{P})$, образ которой целиком лежит в $\widetilde{\boldsymbol{U}}'(\widetilde{P}')$. Пусть $\widetilde{\boldsymbol{U}}_1'$ есть лежащая в $\widetilde{\boldsymbol{U}}'$ отмеченная окрестность точки $\widetilde{P}'$ (за такую окрестность можно взять, например, пересечение с $\widetilde{\boldsymbol{U}}'$ произвольной отмеченной окрестности точки P'), а $\widetilde{\boldsymbol{U}}'$ — отмеченная окрестность точки P, являющаяся тополо-

*Мы не предполагаем относительно $\widetilde{\boldsymbol{K}}'$, что существует симплициальное разбиение его, переходящее в симплициальное разбиение $\boldsymbol{K}$. Более того, мы теперь совсем не будем рассматривать никаких симплициальных разбиений.

гическим образом $\widetilde{U}'$. Пусть, далее, $\widetilde{U}$ — настолько малая окрестность точки $\widetilde{P}$, что при отображении в K она переходит в подмножество U окрестности U_1 и, сверх того, каждую точку $\widetilde{U}$ можно соединить с $\widetilde{P}$ путем, целиком принадлежащим к $\widetilde{U}$. Так как $\widetilde{K}$ есть комплекс, то такую окрестность найти можно. Например, соответствующим образом подобранная симплициальная звезда с центром $\widetilde{P}$ удовлетворяет всем поставленным требованиям. Мы утверждаем, что при отображении $\widetilde{K}$ на $\widetilde{K}'$ $\widetilde{U}$ переходит целиком внутрь $\widetilde{U}'$. Пусть, в самом деле, $\widetilde{W}$ — путь, идущий из $\widetilde{O}_1$ в $\widetilde{P}$. Выберем в качестве пути, идущего из $\widetilde{O}_1$ в точку $\widetilde{Q}$ окрестности $\widetilde{U}$, путь $\widetilde{W}$ вместе с пробегающим внутри $\widetilde{U}$ из $\widetilde{P}$ в $\widetilde{Q}$ путем $\Delta\widetilde{W}$. Тогда основной путь $W \cdot \Delta W$ идет сначала из O в P, а затем пробегает внутри U_1. Соответствующий путь $\widetilde{W}' \cdot \Delta\widetilde{W}$ полиэдра $\widetilde{K}'$ идет из $\widetilde{O}_1'$ в $\widetilde{P}'$ и остается затем в $\widetilde{U}_1'$, а следовательно, и подавно в $\widetilde{U}'$. Поэтому образ точки Q, являющийся концом пути $\widetilde{W}' \cdot \Delta\widetilde{W}$, лежит в $\widetilde{U}'$, что и требовалось доказать.

Мы получаем следующий окончательный результат.

Теорема. *Накрытия полиэдра взаимно однозначно соответствуют классам сопряженных подгрупп. Точнее: если $\widetilde{K}$ есть накрывающий полиэдр полиэдра K и за начальную точку замкнутых путей в $\widetilde{K}$ выбрана точка $\widetilde{O}$, лежащая над начальной точкой O замкнутых путей K, то фундаментальная группа $\widetilde{\mathrm{F}}$ полиэдра $\widetilde{K}$ отображается на изоморфную с $\widetilde{\mathrm{F}}$ подгруппу* H *фундаментальной группы* F *полиэдра K. Если же вместо $\widetilde{O}$ начальной точкой выбрана другая лежащая над O точка, то* F *отображается на подгруппу, сопряженную с* H.

Упражнения. 1. Какая связь существует между характеристиками конечного полиэдра и его g-кратного накрытия?

2. Если F есть свободная группа с a образующими, а H — ее подгруппа индекса i, то H есть свободная группа с $i(a-1)+1$ образующими. [Воспользуйтесь тем, что F есть фундаментальная группа линейчатого комплекса с характеристикой $N = 1 - a$ (§ 47).]

3. Покажите, что единственным накрывающим просто-связного полиэдра является он сам.

§ 56. Универсальный накрывающий полиэдр

Среди накрывающих полиэдра K особенно большое значение имеет накрывающий полиэдр, принадлежащий подгруппе $\mathrm{H} = 1$. Он называется *универсальным накрывающим* полиэдра K. Универсальный накрывающий полиэдр характеризуется тем, что его фундаментальная группа $\widetilde{\mathrm{F}} = \mathrm{H}$ состоит только из единичного элемента, т. е. он представ-

ляет просто-связный полиэдр. Из теоремы, изложенной на стр. 248, сразу получаем следующую теорему.

Теорема I. *Для каждого связного полиэдра $\boldsymbol{K}$ существует однозначно определяемый накрывающий полиэдр, фундаментальная группа которого состоит только из единичного элемента, — универсальный накрывающий $\widehat{\boldsymbol{K}}$.*

Следующая теорема показывает, что универсальный накрывающий дает в известном смысле самое сильное накрытие.

Теорема II. *Универсальный накрывающий полиэдр $\widehat{\boldsymbol{K}}$ характеризуется тем, что он является накрывающим для всякого другого накрытия $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ полиэдра $\boldsymbol{K}$.*

Доказательство основывается на следующей лемме.

Лемма. *Если полиэдр $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ есть накрывающий полиэдра $\boldsymbol{K}$, а $\overset{\approx}{\boldsymbol{K}}$ — накрывающий полиэдра $\widetilde{\boldsymbol{K}}$, то $\overset{\approx}{\boldsymbol{K}}$ является также накрывающим полиэдра $\boldsymbol{K}$.*

Условие (Накр. 1), по которому над каждой точкой P полиэдра $\boldsymbol{K}$ лежит по крайней мере одна точка $\overset{\approx}{P}$, очевидно, выполняется. Чтобы показать выполнимость условий (Накр. 2) и (Накр. 3), рассмотрим симплициальное разбиение полиэдра $\widetilde{\boldsymbol{K}}$, соответствующее какому-нибудь симплициальному разбиению основного полиэдра $\boldsymbol{K}$, и симплициальное разбиение полиэдра $\overset{\approx}{\boldsymbol{K}}$, соответствующее этому разбиению полиэдра $\widetilde{\boldsymbol{K}}$. Выберем, как мы это делали при доказательстве существования накрытия (стр. 245), в качестве отмеченных окрестностей точек P и накрывающих ее точек $\overset{\approx}{P}_1, \overset{\approx}{P}_2, \ldots$ совокупность симплексов, содержащих эти точки. Взятые таким образом симплициальные звезды отображаются друг на друга топологически. Отсюда следует, что условия (Накр. 2) и (Накр. 3) выполняются, и, следовательно, лемма справедлива.

Пусть теперь $\widehat{\boldsymbol{K}}$ есть универсальный накрывающий полиэдра $\widetilde{\boldsymbol{K}}$, а $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ — накрывающий полиэдр полиэдра $\boldsymbol{K}$. Тогда по лемме $\widehat{\boldsymbol{K}}$ накрывает $\boldsymbol{K}$. Так как фундаментальная группа полиэдра $\widehat{\boldsymbol{K}}$ состоит только из единичного элемента, то $\widehat{\boldsymbol{K}}$ является универсальным накрывающим и для $\boldsymbol{K}$, т. е. универсальный накрывающий полиэдра $\boldsymbol{K}$ накрывает также полиэдр $\widetilde{\boldsymbol{K}}$. Обратно, если накрывающий полиэдр полиэдра $\boldsymbol{K}$ накрывает всякий накрывающий полиэдр, то он накрывает также и универсальный накрывающий $\widehat{\boldsymbol{K}}$, т. е. совпадает с $\widehat{\boldsymbol{K}}$ (см. § 55, упр. 3).

С примерами универсальных накрывающих полиэдров мы уже часто встречались. Евклидова плоскость представляет универсальный накрывающий полиэдр тора (см. § 8 — отображение плоскости на тор, получающееся там при отождествлении эквивалентных точек), а прямая линия — накрывающий полиэдр окружности. Вообще, n-мерное евклидово пространство представляет универсальный накрывающий полиэдр топологического произведения a окружностей, а n-мерная сфера —- универсальный накрывающий n-мерного проективного пространства.

Упражнения. 1. $\boldsymbol{K}^1$ представляет линейчатый комплекс, состоящий из сторон двух треугольников, имеющих одну общую вершину. Найдите его универсальный накрывающий $\widehat{\boldsymbol{K}}^1$.

2. Полиэдр $\boldsymbol{K}^2$ получается из единичного круга отождествлением точек его граничной окружности, расположенных на расстоянии (при измерении вдоль окружности) $\frac{2\pi}{p}$ друг от друга (так что мы отождествляем в одну точку p точек окружности). Покажите, что фундаментальная группа полиэдра $\boldsymbol{K}^2$ есть циклическая группа p-го порядка и что универсальный накрывающий $\widehat{\boldsymbol{K}}^2$ состоит из p кругов с общей границей.

§ 57. Регулярное накрытие

1-*е определение.* При отображении $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ на $\boldsymbol{K}$ фундаментальная группа $\widetilde{\mathrm{F}}$ полиэдра $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ отображается в подгруппу группы F, зависящую, вообще говоря, от того, какая именно из лежащих над O точек $\widetilde{O}_1, \widetilde{O}_2, \ldots$ взята в качестве начальной точки замкнутых путей полиэдра $\widetilde{\boldsymbol{K}}$. Таким образом группе $\widetilde{\mathrm{F}}$ соответствует либо подгруппа H_1, либо H_2 и т. д. Все эти подгруппы сопряжены в F и образуют полную систему сопряженных подгрупп, причем среди них могут встречаться и одинаковые подгруппы. *В том случае, когда все эти подгруппы совпадают, т. е. когда подгруппа, в которую переходит фундаментальная группа* $\widetilde{\mathrm{F}}$, *есть нормальный делитель группы* F, *накрывающий полиэдр, называют регулярным накрывающим.*

Примерами регулярных накрывающих являются все накрывающие тора, так как фундаментальная группа тора коммутативна; универсальные накрывающие, так как они принадлежат нормальному делителю $\mathrm{H} = 1$; двулистные накрывающие, так как подгруппа индекса 2 всегда есть нормальный делитель.

2-*е определение. Регулярное накрытие можно характеризовать также тем, что либо все его пути, лежащие над одним и тем же замкнутым основным путем, одновременно замкнуты, либо они все одновременно не замкнуты.* Действительно, пусть $\widetilde{W}_i$ представляет на-

чинающийся в $\widetilde{O}_i$ накрывающий путь, лежащий над замкнутым путем W. Тогда $\widetilde{W}_i$ замкнут или не замкнут в зависимости от того, принадлежит ли W к H_i или нет. Если теперь все сопряженные подгруппы H_i совпадают, например равны H, то либо путь W принадлежит всем этим подгруппам — и тогда все пути $\widetilde{W}_i$ замкнуты, — либо W не принадлежит ни одной из них — и тогда все они не замкнуты. Если, с другой стороны, не все H_i совпадают друг с другом, — например $\mathrm{H}_1 \neq \mathrm{H}_2$, — то существует путь W, принадлежащий к H_1, но не принадлежащий к H_2. Тогда путь $\widetilde{W}_1$ замкнут, а $\widetilde{W}_2$ не замкнут.

То, что мы взяли за начальную точку пути W точку O, не представляет существенного ограничения, так как каждый замкнутый путь полиэдра $\boldsymbol{K}$ всегда можно превратить при помощи выходящего из O вспомогательного пути, пробегаемого туда и обратно, в путь, выходящий из O.

Приведенное на стр. 235 рис. 103, *I* трехлистное накрытие тора не является регулярным. В самом деле, путь, соответствующий параллели левой ручки, замкнут или нет, смотря по тому, начинается ли он в листе 3 или в листе 2.

3-*е определение.* Регулярное накрытие можно характеризовать еще и третьим способом, именно, при помощи понятия *скольжения.* Скольжение накрывающего полиэдра $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ определяется как топологическое отображение полиэдра $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ на себя, при котором каждая точка полиэдра остается лежать над той же самой основной точкой. Таким образом при скольжении полиэдра $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ точки, имеющие один и тот же образ на $\boldsymbol{K}$, лишь меняются местами. Существует *самое большее* одно скольжение, переводящее точку $\widetilde{O}_1$ в другую, лежащую над O точку, например, в точку $\widetilde{O}_2$. Действительно, пусть $\widetilde{P}$ — произвольная точка полиэдра $\widetilde{\boldsymbol{K}}$. Проведем из $\widetilde{O}_1$ в $\widetilde{P}$ путь $\widetilde{W}_1$. Пусть W — соответствующий основной путь. При скольжении путь $\widetilde{W}_1$ переходит в выходящий из $\widetilde{O}_2$ и лежащий над W путь $\widetilde{W}_2$, так что $\widetilde{P}$ переходит в однозначно определяемую точку, именно, в конец пути $\widetilde{W}_2$. Все скольжения, допускаемые полиэдром $\widetilde{\boldsymbol{K}}$, образуют, очевидно, группу — группу скольжении D накрывающего полиэдра. Группа эта может состоять только из тождественного отображения, — это крайний случай. Другой крайний случай мы имеем, когда порядок группы скольжении равен числу листов накрытия. Это имеет место тогда, когда точку $\widetilde{O}_1$ можно перевести посредством скольжения в каждую из остальных точек $\widetilde{O}_2, \widetilde{O}_3, \ldots$; другими словами, когда группа перемещает лежащие над O точки транзитивно.

Третья характеристика регулярного накрытия формулируется теперь так: $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ *представляет регулярное накрытие полиэдра* $\boldsymbol{K}$ *в том и только в том случае, когда лежащие над какой-нибудь точкой по-*

лиэдра $\boldsymbol{K}$ точки накрывающего $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ перемещаются группой скольжении транзитивно. В самом деле, если накрытие не регулярно, то в полиэдре $\boldsymbol{K}$ существует, как мы знаем, путь W, над которым лежат как замкнутые, так и не замкнутые пути. Но тогда, очевидно, группа скольжений не может быть транзитивной, так как при скольжении замкнутый путь может переходить только в замкнутый же. Обратно: мы знаем из § 55, что два накрывающие полиэдра $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ и $\widetilde{\boldsymbol{K}}'$, определяющие один класс сопряженных подгрупп (т. е. в нашем случае один и тот же нормальный делитель H), допускают топологическое отображение друг на друга, при котором соответствующие точки имеют одну и ту же основную точку в $\boldsymbol{K}$. При этом можно любую, лежащую над O точку $\widetilde{O}_1$ перевести в произвольную точку $\widetilde{O}'_1$ полиэдра $\widetilde{\boldsymbol{K}}'$, — если только при выборе $\widetilde{O}'_1$ в качестве начальной точки замкнутых путей фундаментальная группа $\widetilde{\mathrm{F}}'$ отображается в ту же подгруппу группы F, в которую отображается группа $\widetilde{\mathrm{F}}$ накрывающего полиэдра $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ при выборе $\widetilde{O}'_1$ начальной точкой. Если теперь, как в нашем случае (при регулярном накрытии), H — нормальный делитель группы F, то это условие выполнено всегда, как бы ни была выбрана над точкой O точка $\widetilde{O}'_1$. Предполагая, что $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ и $\widetilde{\boldsymbol{K}}'$ совпадают, мы получим скольжение накрывающего полиэдра $\widetilde{\boldsymbol{K}}$, переводящее $\widetilde{O}_1$ в произвольную, лежащую над O точку.

Для иллюстрации можно воспользоваться двумя накрытиями двойного тора, описанными в § 53. Первое накрытие, как мы видели, нерегулярно, поэтому его группа скольжений не может быть транзитивной. Группа эта, более того, содержит только единичный элемент, т. е. «неподвижное» скольжение является единственно возможным. Об этом нетрудно заключить хотя бы из того, что средний лист 2 рассекается в обеих ручках, в то время как каждый из листов 1 и 3 рассекается только в одной ручке. Во втором накрытии, напротив, три листа можно перемещать циклически, так что мы имеем регулярное накрытие.

При регулярном накрытии группа скольжений D *изоморфна дополнительной группе* F/H. Смежные классы разложения группы F по подгруппе $\mathrm{H}_1 = \mathrm{H}$

$$\mathrm{F} = \mathrm{H}\{F_{11}\} + \mathrm{H}\{F_{12}\} + \dots$$

взаимно однозначно соответствуют лежащим над O точкам $\widetilde{O}_1$, $\widetilde{O}_2, \dots$ С другой стороны, каждой точке $\widetilde{O}_i$ соответствует скольжение D_{1i}, переводящее $\widetilde{O}_1$ в $\widetilde{O}_i$. Поэтому между классами смежности $\mathrm{H}\{F_{1i}\}$ и скольжениями D_{1i}, имеется взаимно однозначное соответствие

$$\mathrm{H}\{F_{1i}\} \longleftrightarrow D_{1i}.$$

Для того чтобы показать, что это соответствие осуществляет изоморфизм между дополнительной группой F и группой скольжении D,

определим скольжение, соответствующее произведению двух классов

$$\mathrm{H}\{F_{1i}\}\cdot\mathrm{H}\{F_{1j}\}=\mathrm{H}\{F_{1i}\}\{F_{1j}\}=\mathrm{H}\{F_{1k}\}.$$

Для того чтобы прийти в точку $\widetilde{O}_k$, мы идем из $\widetilde{O}_1$ в $\widetilde{O}_i$ вдоль пути $\widetilde{F}_{1i}$ и затем далее в $\widetilde{O}_k$ вдоль пути $\widetilde{F}_{ik}$, начинающемся в $\widetilde{O}_i$ и лежащим над $\widetilde{F}_{1j}$ (рис. 108). $\widetilde{F}_{ik}$ и $\widetilde{F}_{1j}$ лежат над одним и тем же основным путем F_{1j}, поэтому $\widetilde{F}_{ik}$ можно получить из $\widetilde{F}_{1j}$ при помощи скольжения D_{1i}. Таким образом D_{1i} переводит точку $\widetilde{O}_j$ в $\widetilde{O}_k$, а скольжение $D_{1i}D_{1j}$ (сначала D_{1j}, затем D_{1i}!) — точку $\widetilde{O}_1$ в $\widetilde{O}_k$, т. е. $D_{1i}D_{1j}=D_{1k}$. Это и означает, что произведению $\mathrm{H}\{F_{1i}\}\cdot\mathrm{H}\{F_{1j}\}$ соответствует произведение скольжений $D_{1i}D_{1j}$. Напомним при этом, что произведение двух путей получается, если мы идем сначала по пути, представляющему левый множитель, а затем по пути, представляющему правый множитель (стр. 195); произведение же двух движений получается, если мы выполняем сначала движение, указываемое правым, а затем левым множителем. Если в частности $\mathrm{H}=1$, т. е. $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ — универсальный накрывающий полиэдр, то $\mathrm{F}/\mathrm{H}=\mathrm{F}$ и группа скольжении изоморфна фундаментальной группе основного комплекса. Таким образом мы выяснили, что *фундаментальная группа полиэдра* $\boldsymbol{K}$ *есть не что иное, как группа скольжений его универсального накрывающего.*

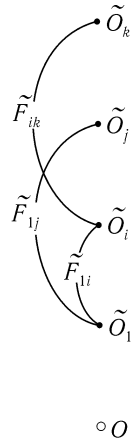


Рис. 108

Так, например, фундаментальная группа проективной плоскости есть группа второго порядка; это соответствует тому, что группа скольжений универсальной накрывающей поверхности — сферы — состоит из двух скольжений: тождественного скольжения и отражения в центре сферы (замена друг другом диаметрально-противоположных точек). Фундаментальная группа тора имеет соотношение $ABA^{-1}B^{-1}=1$, т. е. является свободной абелевой группой с двумя образующими (стр. 219). Группа скольжений образуется трансляциями евклидовой плоскости, переводящими в себя сеть прямоугольников (§ 8).

В случае нерегулярного накрытия группу скольжений D также можно рассматривать как дополнительную группу. Именно, если H_i означает, как и раньше, подгруппу группы F, которая при начальной точке замкнутых путей $\widetilde{O}_i$ соответствует фундаментальной группе полиэдра $\widetilde{\boldsymbol{K}}$, а Z_i есть нормализатор (так называемая Zwischengruppe) подгруппы H_i в F, т. е. совокупность элементов $\{W\}$ группы F, для которых $\{W\}^{-1}\mathrm{H}_i\{W\}=\mathrm{H}$, то D изоморфно дополнительной группе $\mathrm{Z}_i/\mathrm{H}_i$.

Упражнения. 1. Проведите доказательство последнего утверждения.

2. Если n-мерный полиэдр $\boldsymbol{K}^n$ имеет универсальным накрывающим n-мерную сферу $\boldsymbol{S}^n$, то при четном n порядок фундаментальной группы полиэдра $\boldsymbol{K}^n$ равен 1 или 2. [Характеристика полиэдра $\boldsymbol{K}^n$ есть делитель характеристики сферы $\boldsymbol{S}^n$.]

3. Докажите, что фундаментальная группа ориентируемой поверхности рода $h = 4$ изоморфна как нормальному делителю, так и одной из трех сопряженных подгрупп фундаментальной группы ориентируемой поверхности рода $h = 2$. [См. в § 53 примеры накрывающих двойного тора.]

4. Неориентированные линейные элементы проективной плоскости образуют трехмерное многообразие, так называемое *пространство кватернионов*. Его фундаментальная группа есть группа кватернионов. Воспользуйтесь тем, что все подгруппы группы кватернионов известны* и определите все 2-, 4- и 8-листные накрывающие полиэдры пространства кватернионов. Определите, какие из этих накрывающих гомеоморфны пространству ориентированных линейных элементов проективной плоскости и пространствам неориентированных и ориентированных линейных элементов сферы (см. упр. 3 стр. 78 и примечание[12]).

§ 58. Группа монодромии

Мы переходим теперь к вопросу о нахождении всех конечнолистных накрытий конечного полиэдра $\boldsymbol{K}$. Предположим, что кратность накрытия равна g.

Пусть W — выходящий из O замкнутый путь полиэдра $\boldsymbol{K}$. Тогда существует g накрывающих путей $\widetilde{W}_1$, $\widetilde{W}_2$, …, $\widetilde{W}_g$, имеющих начальными точками соответственно $\widetilde{O}_1$, $\widetilde{O}_2$, …, $\widetilde{O}_g$. Конечные точки этих путей также попарно различны. Пусть эти конечные точки обозначены буквами $\widetilde{O}_{k_1}$, $\widetilde{O}_{k_2}$, …, $\widetilde{O}_{k_g}$. Поставим тогда пути W в соответствие подстановку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & g \\ k_1 & k_2 & \dots & k_g \end{pmatrix}.$$

Очевидно, гомотопным путям соответствуют при этом одинаковые подстановки, а произведению W_1W_2 двух путей соответствует произведение подстановок путей W_1 и W_2. Таким образом получается гомоморфное отображение фундаментальной группы F на некоторую группу M, состоящую из подстановок g чисел. Группа M называется *группой монодромии* накрывающего полиэдра.

Нетрудно определить все элементы фундаментальной группы F, отображающиеся в единичный элемент группы M. Такими элементами являются классы замкнутых путей W полиэдра $\boldsymbol{K}$, обладающих тем свойством, что всякий путь в $\widetilde{\boldsymbol{K}}$, накрывающий путь W, *всегда* замкнут, какая бы из точек $\widetilde{O}_1$, $\widetilde{O}_2$, …, $\widetilde{O}_g$ ни была взята за начальную.

*См., например, *A. Speiser*, Gruppen von endlicher Ordnung (Berlin 1927), стр. 76.

Пусть H_1, H_2, ..., H_g означают, как и раньше, сопряженные подгруппы, соответствующие фундаментальной группе полиэдра $\widetilde{\boldsymbol{K}}$, когда за начальные точки выбраны точки $\widetilde{O}_1$, $\widetilde{O}_2$, ..., $\widetilde{O}_g$. Тогда пути W соответствует единичная подстановка в том и только в том случае, если этот путь принадлежит пересечению T всех подгрупп H_1, H_2, ..., H_g. Поэтому имеет место следующая теорема.

Теорема. *Группа монодромии* M *накрывающего полиэдра* $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ *изоморфна дополнительной группе* F/T *фундаментальной группы* F *основного полиэдра по подгруппе* T, *где* T *представляет пересечение сопряженных подгрупп* H_1, H_2, ..., H_g, *к которым принадлежит накрытие* $\widetilde{\boldsymbol{K}}$. *Порядок группы* M *вследствие этого всегда* $\geqslant g$ *(числа листов). Знак равенства имеет место лишь в том случае, если все подгруппы* H_1, H_2, ..., H_g *совпадают, т. е. когда* $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ *представляет регулярное накрытие. Тогда группа монодромии изоморфна дополнительной группе* F/H_1 *и, следовательно, в силу* § 57, 3 *изоморфна группе скольжений накрывающего полиэдра.*

Вообще, если каждому элементу какой-нибудь группы F ставится в соответствие подстановка из g цифр так, что произведению двух элементов соответствует произведение отнесенных им подстановок, то говорят, что имеется *представление группы* F. Если два представления одной группы обладают тем свойством, что одно получается из другого некоторой перестановкой цифр 1, 2, ..., g, то эти представления считаются одинаковыми. Таким образом накрывающий полиэдр $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ индуцирует представление фундаментальной группы F основного полиэдра. Связность полиэдра $\boldsymbol{K}$ выражается в транзитивности представления: если i и j — какие-нибудь два элемента подстановок, то существует элемент $\{W\}$ группы F, переводящий i в j. Чтобы убедиться, что это так, нужно взять только в качестве W основной путь, соответствующий пути $\widetilde{W}$ накрытия, соединяющему точки $\widetilde{O}_i$ и $\widetilde{O}_j$ друг с другом.

Покажем теперь, что и, обратно, каждому транзитивному представлению P фундаментальной группы F принадлежит в точности один накрывающий полиэдр $\widetilde{\boldsymbol{K}}$. Пусть H_1 — подгруппа элементов группы F, оставляющих на месте цифру 1. H_1 состоит, таким образом, из совокупности путей, для которых накрывающие пути искомого накрытия $\widetilde{\boldsymbol{K}}$, начинающиеся в точке $\widetilde{O}_1$, замкнуты. Но это означает, что $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ принадлежит подгруппе H_1. Если поэтому накрывающий полиэдр, индуцирующий заданное представление P группы H_1 вообще существует, то он представляет накрывающий полиэдр $\widetilde{\boldsymbol{K}}$, принадлежащий подгруппе H_1 группы F. Обратно, представление P′ группы F, индуцируемое накрытием $\widetilde{\boldsymbol{K}}$, ставит в соответствие путям, принадлежащим подгруппе H_1 притом только этим путям, подстановки, оставляющие цифру 1 на ме-

сте. Но тогда, вследствие леммы из теории групп, которую мы сейчас докажем, представления P и P′ совпадают.

Лемма. *Транзитивное представление* P *группы* F *определяется подгруппой* H_1, *которая состоит из всех элементов, оставляющих на месте цифру* 1.

Доказательство. В разложении*

$$F = H_1\{F_{11}\} + H_1\{F_{12}\} + \dots$$

все элементы одного смежного класса переводят цифру 1 в одну и ту же цифру, элементы же из разных классов переводят 1 в различные цифры. Мы можем принять, что элементы смежного класса $H_1\{F_{1i}\}$ переводят 1 в i. Так как подстановки представления P содержат только цифры от 1 до g и так как вследствие транзитивности P существуют элементы F, переводящие 1 в любую из цифр 1, 2, ..., g, то в разложении F по H_1 существует в точности g классов смежности:

$$F = H_1\{F_{11}\} + H_1\{F_{12}\} + \dots + H_1\{F_{1g}\}.$$

Поэтому если $\{W\}$ — какой-нибудь элемент группы F, то мы можем узнать, в какую цифру подстановка, соответствующая элементу $\{W\}$, переводит произвольную цифру i. В самом деле, $\{F_{1i}\}\{W\}$ принадлежит определенному смежному классу, например $H_1\{F_{1k}\}$; $\{F_{1i}\}\{W\}$ переводит тогда 1 в k, а потому $\{W\}$ переводит i в k, чем лемма и доказывается.

Таким образом мы свели вопрос об определении всех g-кратных накрытий конечного полиэдра $\boldsymbol{K}$ *к вопросу о нахождении всех представлений фундаментальной группы* F *полиэдра* $\boldsymbol{K}$ *посредством транзитивных групп подстановок из g элементов*[32]. А этот вопрос можно решить, например, следующим способом. Начнем с того, что, следуя описанному в § 46 процессу, найдем образующие

$$A_1, A_2, \dots, A_s$$

фундаментальной группы F полиэдра $\boldsymbol{K}$ и соотношения

$$R_1(A_i) = 1,\ R_2(A_i) = 1, \dots, R_r(A_i) = 1.$$

Очевидно, представление P группы F определено полностью, если мы знаем, какие подстановки поставлены в соответствие *образующим*. Поставим теперь в соответствие образующим $A_1, A_2, \dots, A_s$ произвольные подстановки $P_1, P_2, \dots, P_s$ из g цифр 1, 2, ..., g и проверим, выполняются ли следующие два условия:

* Доказываемая лемма относится к абстрактной теории групп, и элементы F могут и не быть классами путей. Однако мы удерживаем здесь, чтобы не менять обозначений, прежнее обозначение групповых элементов при помощи фигурных скобок.

(M_1) Подстановки $R_j(P_i)$, принадлежащие левым частям $R_j(A_i)$ определяющих соотношений группы F, суть единичные подстановки.

(M_2) Группа, образованная подстановками P_1, P_2, ..., P_s, транзитивна.

Условие (M_1) эквивалентно условию, что двум произведениям $\prod\limits_i(A_i)$ и $\prod\limits_i'(A_i)$, представляющим один и тот же элемент группы F, ставится в соответствие одна и та же подстановка, что соответствие между элементами группы F и подстановками *однозначно*. Тогда условие, в силу которого произведению двух элементов группы относится произведение соответствующих подстановок, выполняется, очевидно, само собой. Так как существует лишь конечное число возможностей установить соответствие между конечным числом образующих A_1, A_2, ..., A_s группы F и подстановками из g элементов, то при помощи конечного числа испытаний мы можем найти все представления группы F. Если представление уже найдено, то мы находим подгруппу элементов группы F, оставляющих на месте цифру 1, и затем, следуя § 55, строим соответствующий накрывающий полиэдр.

Так как каждое скольжение осуществляет некоторую перестановку лежащих над точкой O точек $\widetilde{O}_1$, $\widetilde{O}_2$, ..., $\widetilde{O}_g$, то группу скольжении, D регулярного накрывающего полиэдра также можно представить как регулярную группу подстановок чисел 1, 2, ..., g*. Однако только в том случае, когда группа скольжений абелева, эти подстановки совпадают с подстановками группы монодромии M. Именно, оба представления группы F/H регулярными группами подстановок являются известными из теории групп представлениями, получающимися в том случае, когда мы относим элементу Q группы F/H один раз подстановку

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_g \\ X_1Q & X_2Q & \dots & X_gQ \end{pmatrix}$$

(X_1, X_2, ..., X_g — элементы группы F/H), а другой раз — подстановку

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_g \\ QX_1 & QX_2 & \dots & QX_g \end{pmatrix}.$$

Первая группа подстановок есть группа монодромии, а вторая — группа скольжений. Действительно, для того чтобы получить группу монодромии (соответственно, группу скольжений) как группу подстановок точек $\widetilde{O}_1$, $\widetilde{O}_2$, ..., $\widetilde{O}_g$, достаточно только заменить в этих перестановках элементы группы F/H точками $\widetilde{O}_1$, $\widetilde{O}_2$, ..., $\widetilde{O}_g$ (эти точки находятся во взаимно однозначном соответствии со смежными классами разложения группы F по H). Тогда подстановки обеих групп совпадают лишь в том случае, когда для каждого Q имеет место равенство $X_iQ = QX_i$, т. е. когда группа F/H абелева.

*Группа подстановок порядка n называется регулярной, если подстановки, из которых она состоит, являются подстановками n элементов.

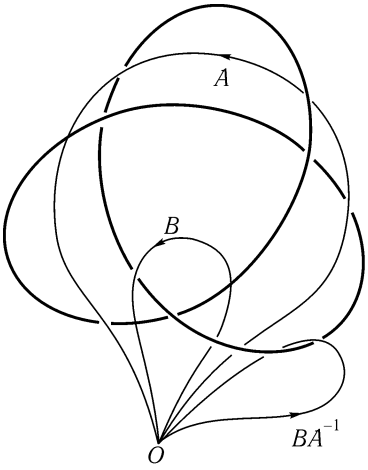


Рис. 109

В качестве приложения теории накрывающих определим трех- и четырехлистные накрытия дополнительного пространства простейшего узла, проекция которого обозначена на рис. 109 жирной линией*. Фундаментальная группа этого дополнительного пространства, как доказано на стр. 232, имеет соотношение

$$A^2 = B^3.$$

При этом A гомотопно средней линии трехмерного кольца, лежащего в конечной части пространства, а B — средней линии оставшегося трехмерного кольца (оба трехмерных кольца вместе образуют дополненное несобственной точкой до трехмерной сферы трехмерное евклидово пространство).

Для того чтобы найти трехлистные накрытия, мы должны поставить в соответствие элементу B подстановку из трех чисел, куб которой дает квадрат другой подстановки. Очевидно, здесь имеются лишь две возможности: либо элементу B относится тождественная подстановка, либо циклическая. Однако, так как группа должна быть транзитивной, тождественная подстановка исключается. Поэтому**

$$B \to (1\,2\,3).$$

Для A тогда имеются две возможности: либо тождественная подстановка

$$A \to (1)\,(2)\,(3), \qquad \text{(I)}$$

либо

$$A \to (1\,2)\,(3). \qquad \text{(II)}$$

В случае (I) группа монодромии есть циклическая группа третьего порядка, т. е. соответствующее накрытие регулярно. В случае же (II) эта группа представляет дидергруппу (Diedergruppe) шестого порядка (или группу ангармонических отношений). Так как порядок ее 6, т. е. больше, нежели число листов (3), то накрытие нерегулярно. В случае (I) «меридиану» BA^{-1} соответствует циклическая подстановка $(1\,2\,3)$. Поэтому в накрывающем пространстве мы возвращаемся к исходной точке лишь после трехкратного обхода узла. Иначе обстоит дело в случае (II). Здесь $BA^{-1} = (1)\,(2\,3)$. Поэтому путь, накрывающий меридиан и начинающийся в $\widetilde{O}_1$, замкнут, а начинающийся в $\widetilde{O}_2$ замыкается лишь после двухкратного обхода. Таким образом получаются трехлистные накрытия.

*Этот интересный пример возник в результате переписки с H. Kneser'om.

**Относительно представления подстановок циклами см. *A. Speiser*, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, Berlin 1927, стр. 106.

При определении четырехлистных накрытий в соответствие элементу B не может быть поставлена ни циклическая подстановка (1 2 3 4), ни подстановка (1 2) (3) (4), так как третья степень этих подстановок не может быть равна квадрату какой-нибудь подстановки. Тождественная подстановка исключается вследствие транзитивности группы монодромии. Остаются только два возможных случая

$$B \to (1\,2\,3)\,(4), \tag{I}$$
$$B \to (1\,3)\,(2\,4). \tag{II}$$

В случае (I) $B^3 = (1)\,(2)\,(3)\,(4)$, а следовательно, и $A^2 = (1)\,(2)\,(3)\,(4)$. Поэтому A может переставлять либо только два элемента, либо два раза по два элемента. Принимая во внимание еще транзитивность группы монодромии, мы получаем в случае (I) только две возможности

$$A \to (1\,4)\,(2)\,(3), \tag{I_1}$$
$$A \to (1\,4)\,(2\,3), \tag{II_1}$$

а в случае (II) — одну

$$A \to (1\,2\,3\,4). \tag{II}$$

Таким образом имеются три четырехлистных накрытия пространства, дополнительного к простейшему узлу. Только одно из них — последнее — представляет регулярное накрытие с циклической группой скольжений. В случае (II) группа монодромии есть симметрическая группа четырех цифр (группа октаэдра), в случае же (I_2) — знакопеременная группа (группа тетраэдра). Меридиану BA^{-1} соответствуют в рассматриваемых трех случаях следующие перемещения листов

$$(1\,2\,3\,4), \tag{I_1}$$
$$(1\,3\,4)\,(2), \tag{I_2}$$
$$(1\,2\,3\,4), \tag{II}$$

Назовем g-кратное накрытие узла *цикличным в малом* (im Kleinen) в том случае, когда маленький круг должен быть обведен вдоль узла g раз для того, чтобы соответствующий накрывающий путь получился замкнутым. Тогда (I_1) и (II) цикличны в малом. Однако только (II) также *цикличен в целом* (im Grossen) (если понимать под этим *регулярное* накрытие с циклической группой скольжения). В § 77 мы познакомились с другим определением накрытия, цикличного в целом. Там будет также показано, что каждое накрытие, цикличное в целом, также циклично в малом. Если речь идет просто о цикличном накрытии, то мы понимаем всегда под этим накрытие, цикличное в целом.

Для простейшего узла всегда имеется при любом числе листов g накрытие, цикличное в целом. Оно определяется подстановками

$$B \to (1\,2\ldots g)^2, \quad A = (1\,2\ldots g)^3.$$

Стоящие наверху числа 2 и 3 являются здесь показателями степени циклической подстановки. В § 77 мы увидим, что для любого узла всегда существует в точности одно циклическое накрытие с данным числом листов.

Упражнения. 1. Определите пятилистные накрытия простейшего узла (таких накрытий существует два).

2. Покажите, что существует 15 различных двулистных накрытий двойного тора.

До сих пор мы пользовались теорией групп для исследования накрытий полиэдра. Обратно, в вопросе о нахождении образующих и соотношений подгруппы H по образующим и соотношениям группы F теория накрывающих оказывает услуги теории групп. Пусть F имеет образующие $A_1, A_2, \ldots, A_a$ и соотношения $R_1(A_\nu) = 1, \ldots, R_r(A_\nu) = 1$. Построим поверхностный комплекс $\boldsymbol{K}$ с одной вершиной O, ребрами $A_1, A_2, \ldots, A_a$, дающими после ориентации их образующие фундаментальной группы полиэдра $\boldsymbol{K}$, и r элементами поверхности, натянутыми на замкнутые пути $R_1(A_\nu), \ldots, R_r(A_\nu)$. В силу § 46 F представляет тогда как раз фундаментальную группу полиэдра $\boldsymbol{K}$. Подгруппу H можно рассматривать теперь как фундаментальную группу принадлежащего H накрывающего полиэдра $\widetilde{\boldsymbol{K}}$. Предположим для простоты, что число листов g, равное индексу H в F, конечно. Тогда $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ есть поверхностный комплекс, состоящий из g вершин, ag ребер и rg элементов поверхности. Тогда образующие и соотношения можно определить, пользуясь процессом, описанным в § 46. Изложенный метод, принадлежащий К. Райдемейстеру, можно изложить независимо от его геометрической оболочки в терминах чистой теории групп. См. K. Reidemeister [1], [7].

Глава IX
Трехмерные многообразия

§ 59. Общие свойства

Трехмерное замкнутое многообразие $\boldsymbol{M}^3$ есть трехмерный связный конечный полиэдр, у каждой точки которого имеется окрестность, гомеоморфная внутренности трехмерного шара. «Замкнутость» означает здесь, как и в случае поверхности, компактность полиэдра; ей соответствует конечность комплекса, получающегося при симплициальном разбиении полиэдра, и отсутствие у него границы. Мы будем вначале рассматривать только замкнутые многообразия, вследствие чего обычно термин «замкнутый» будем опускать. По теореме II § 33 группы Бетти в каждой точке многообразия $\boldsymbol{M}^3$ являются группами Бетти двумерной сферы. Поэтому числа Бетти окрестностного комплекса $p^0 = p^2 = 1$, $p^1 = 0$.

Мы хотим теперь сформулировать в комбинаторных терминах свойство комплекса быть трехмерным многообразием. С этой целью рассмотрим какое-нибудь определенное симплициальное разбиение многообразия $\boldsymbol{M}^3$. Каждый двумерный симплекс $\boldsymbol{E}^2$ должен быть инцидентен в точности с двумя трехмерными симплексами, так как иначе двумерное число Бетти p^2 в центре симплекса $\boldsymbol{E}^2$ не будет равно 1 (см. 2-й пример § 32). Отсюда вытекает, что двумерные и трехмерные симплексы, примыкающие к ребру $\boldsymbol{E}^1$ многообразия $\boldsymbol{M}^3$, образуют одну или несколько, допустим l, циклических последовательностей, составленных попеременно из двумерных и трехмерных симплексов так, что каждые два рядом стоящие симплекса последовательности инцидентны друг с другом. Покажем, что l должно равняться 1. В самом деле, окрестностный комплекс центра симплекса $\boldsymbol{E}^1$ состоит из двумерных сфер, имеющих общими лишь граничные точки симплекса $\boldsymbol{E}^1$. Поэтому двумерное число Бетти окрестностного комплекса равно l. С другой стороны, как указывалось выше, оно равно единице. Отсюда и следует, что $l = 1$.

Рассмотрим, наконец, симплициальную звезду, образованную симплексами многообразия $\boldsymbol{M}^3$, примыкающими к вершине $\boldsymbol{E}^0$. Край этой звезды представляет двумерный комплекс, у которого каждый одномерный симплекс инцидентен в точности с двумя двумерными, в то время как симплексы, примыкающие к одной вершине, образуют в точности одну циклическую последовательность (иначе соответствующие

свойства не имели бы места по отношению к симплексам размерностей 2 и 3, так как эти симплексы можно получить из одномерных и двумерных симплексов края звезды проектированием из $\boldsymbol{E}^0$). Таким образом край звезды состоит из одной или нескольких замкнутых поверхностей. Легко обнаружить, что она состоит в точности из одной замкнутой поверхности, — это следует из равенства единице ее нульмерного числа Бетти $p^0 = 1$ (§ 18). Так как, далее, $p^1 = 0$, то такой поверхностью может быть либо сфера, либо проективная плоскость; последняя, однако, отпадает, ввиду того, что $p^2 = 1$ (§ 41).

Обратно, нетрудно убедиться, что если окрестностный комплекс каждой вершины симплициального комплекса представляет сферу, то этот симплициальный комплекс является трехмерным многообразием. В самом деле, из сделанного предположения вытекает, что каждый двумерный симплекс инцидентен в точности с двумя трехмерными и что симплексы, примыкающие к каждому ребру, образуют в точности одну циклическую последовательность, т. е. что каждая точка комплекса имеет окрестность, гомеоморфную трехмерной сфере. Таким образом мы получаем следующий результат:

Теорема I. *Трехмерный связный конечный симплициальный комплекс представляет замкнутое многообразие в том и только в том случае, если окрестностный комплекс каждой его вершины, является двумерной сферой.*

Из этой теоремы вытекает

Теорема II. *Каждое трехмерное замкнутое многообразие представляет одновременно замкнутое псевдомногообразие.*

Для доказательства нужно лишь убедиться в том, что два трехмерных симплекса можно соединить цепью, состоящей из двумерных и трехмерных симплексов. Совокупность всех трехмерных симплексов, которые можно соединить с фиксированным трехмерным симплексом, образует некоторый подкомплекс. Если этот подкомплекс не исчерпывает всего многообразия $\boldsymbol{M}^3$, то он может иметь общими с остающейся частью многообразия только вершины или ребра, но не двумерные симплексы. Но тогда окрестностный комплекс такой вершины или центра такого ребра, наверное, не является сферой, а состоит из двух подкомплексов, имеющих, самое большее, общие вершины.

Теорема II дает возможность различать ориентируемые и неориентируемые трехмерные многообразия.

В дальнейшем мы докажем закон двойственности Пуанкаре, утверждающий, что для n-мерных замкнутых многообразий числа Бетти по модулю 2 связаны соотношениями $q^i = q^{n-i}$ (§ 69). В случае $n = 3$ этот закон дает

$$q^0 = q^3 \quad \text{и} \quad q^1 = q^2. \tag{1}$$

Отсюда следует, что эйлерова характеристика в трехмерном случае

$$N = q^0 - q^1 + q^2 - q^3 = 0. \tag{2}$$

Теорема III. *Эйлерова характеристика трехмерного замкнутого многообразия равна 0.*

Как показано в § 23, эйлерова характеристика равна альтернированной сумме чисел Бетти:

$$N = p^0 - p^1 + p^2 - p^3.$$

Так как p^0 для связного комплекса всегда равно 1, а $p^3 = 1$ или 0 в зависимости от того, ориентируемо $\boldsymbol{M}^3$ или нет (§ 24), то отсюда следует, что

$$p^2 = p^1 \quad \textit{для ориентируемых многообразий},$$

$$p^2 = p^1 - 1 \quad \textit{для неориентируемых многообразий}.$$

Из § 24 следует далее, что трехмерное многообразие имеет кручение только в том случае, если оно неориентируемо; в этом случае существует в точности один двумерный коэффициент кручения, равный 2. Таким образом для того чтобы знать все численные инварианты трехмерного многообразия, достаточно знать, ориентируемо оно или нет, и знать его одномерные численные инварианты. Одномерные же инварианты, как показано в § 48, можно найти, зная фундаментальную группу многообразия. Поэтому фундаментальная группа является важнейшей характеристикой трехмерного многообразия.

Из равенства $p^2 = p^1 - 1$ следует, что для неориентируемого многообризия $p^1 = p^2 + 1$, т. е. в этом случае p^1, наверное, > 0. Таким образом получается

Теорема IV. *Одномерная группа Бетти, и тем более фундаментальная группа неориентируемого трехмерного многообразия, представляет бесконечную группу.*

Как показывает пример топологического произведения проективной плоскости на $(n-2)$-мерную сферу (§ 43, 1), эта теорема имеет место только по отношению к размерности 3.

§ 60. Представление трехмерных многообразий посредством многогранников

Аналогично тому, как поверхность можно задавать многоугольником, стороны которого попарно поставлены в соответствие друг другу,

так трехмерное многообразие $\boldsymbol{M}^3$ можно задавать трехмерным многогранником, гомеоморфным шару, у которого грани попарно отнесены друг к другу. Так, $\boldsymbol{M}^3$ можно построить, взяв конечное число трехмерных симплексов и отождествив некоторые из их сторон (§ 10). Построение можно производить постепенно: мы исходим от одного симплекса, присоединяем к нему вдоль какой-нибудь двумерной грани другой симплекс и т. д. Присоединение трехмерных симплексов можно всегда осуществлять так, что в конце построения мы придем к симплициальному комплексу, гомеоморфному шару. Граница этого шара будет разбита на симплексы и каждые два двумерных симплекса границы будут соответствовать одному треугольнику многообразия $\boldsymbol{M}^3$. Таким образом всякое трехмерное многообразие $\boldsymbol{M}^3$ можно представлять себе в виде шара, двумерные симплексы границы которого считаются попарно эквивалентными и отождествляются.

Мы можем освободиться от условия, что поставленные друг другу в соответствие стороны являются непременно *треугольниками.* С этой целью мы определим трехмерный многогранник как шар (или топологический образ шара), граница которого $\boldsymbol{R}$ разбита на многоугольники, причем должны выполняться следующие условия:

Каждый многоугольник есть по меньшей мере двуугольник; каждая точка границы $\boldsymbol{R}$ принадлежит по крайней мере одному многоугольнику; каждые два многоугольника либо совсем не имеют общих точек, либо имеют общими некоторые вершины и ребра*. Вершины, ребра и многоугольники границы $\boldsymbol{R}$ мы называем *вершинами, ребрами* и *гранями* (или *сторонами*) *многогранника.* Так, например, додекаэдр представляет многогранник с 12 гранями, 30 ребрами и 20 вершинами. Точно так же является многогранником шар, разбитый окружностью большого круга на два полушария, если только мы подразделим окружность большого круга на части по меньшей мере двумя вершинами.

При помощи барицентрического подразделения из многогранника можно получить Симплициальный комплекс. *Барицентрическое подразделение* особого алгебраического комплекса нужно производить следующим образом: сначала каждое *ребро* многогранника разбивается своей серединой на два частичных симплекса; точнее, прямолинейный барицентрически подразделенный одномерный симплекс, представляющий симплициальную звезду $\boldsymbol{S}\mathbf{t}^1$, отображается топологически на каждое из ребер полиэдра. Граница *стороны* $\boldsymbol{a}^2$ полиэдра превращается при этом в гомеоморфный окружности симплициальный комплекс. Мы берем теперь симплициальную звезду $\boldsymbol{S}\mathbf{t}^2$, край которой подразделен симплициально так же, как граница стороны $\boldsymbol{a}^2$, и отображаем эту звезду топологически на $\boldsymbol{a}^2$ так, чтобы симплициальное разбиение

*Граница многогранника представляет гомеоморфную сфере специальную поверхность в смысле § 37, специальную потому, что элементы поверхности являются сейчас сами многоугольниками, вследствие чего самокасания исключены.

края звезды $\boldsymbol{St}^2$ перешло бы в симплициальное разбиение границы стороны $\boldsymbol{a}^2$. При этом $\boldsymbol{a}^2$ сама превращается в симплициальную звезду. Поступая так со всеми остальными сторонами многогранника, мы сделаем из границы многогранника $\boldsymbol{a}^3$ симплициальный комплекс.

Далее, мы берем симплициальную звезду $\boldsymbol{St}^3$, граница которой представляет симплициальный комплекс, имеющий ту же схему, что и получившаяся граница многогранника $\boldsymbol{a}^3$, и отображаем $\boldsymbol{St}^3$ топологически на $\boldsymbol{a}^3$ так, чтобы симплициальное разбиение границы звезды $\boldsymbol{St}^3$ перешло в симплициальное разбиение границы многогранника $\boldsymbol{a}^3$. Получающееся при этом симплициальное разбиение многогранника называется его (первым) барицентрическим подразделением.

Пусть теперь стороны многогранника поставлены попарно в соответствие друг другу, а именно, посредством таких топологических отображений, которые переводят вершины в вершины и ребра в ребра (при этом предполагается, что отнесенные друг другу стороны имеют равные количества вершин). Потребуем, кроме того, чтобы при каждом таком топологическом отображении частичные симплексы барицентрических подразделений обеих сторон отображались друг на друга *линейно*. Соответствие сторон делает некоторые ребра и некоторые вершины полиэдра эквивалентными. Однако мы здесь раз навсегда предполагаем, что при этом никакое ориентированное ребро не становится эквивалентным самому себе, взятому с противоположной ориентацией, т. е. что никакое ребро не имеет эквивалентных внутренних точек. Это условие не налагает никаких существенных ограничений, так как ориентированное ребро, эквивалентное самому себе, взятому с противоположной ориентацией, может быть подразделено на два ребра, ни одно из которых уже не имеет эквивалентных внутренних точек. Напротив, две граничные точки одного ребра могут быть эквивалентны.

Мы обозначим вершины, являющиеся эквивалентными в силу установленного соответствия сторон, через $'\boldsymbol{a}_\nu^0$, $''\boldsymbol{a}_\nu^0, \ldots$; после отождествления эквивалентных точек все эти вершины сливаются в одну и ту же точку $\boldsymbol{a}_\nu^0$; индекс ν пробегает значения от 1 до α^0. Точно так же систему эквивалентных ребер мы обозначим через $'\boldsymbol{a}_\nu^1$, $''\boldsymbol{a}_\nu^1, \ldots$*. Число систем эквивалентных ребер пусть будет равно α^1, так что ν пробегает значения от 1 до α^1. Две эквивалентных стороны обозначим через $'\boldsymbol{a}_\nu^2$ и $''\boldsymbol{a}_\nu^2$; всего пусть имеется α^2 таких пар эквивалентных сторон. Наконец весь многогранник назовем $'\boldsymbol{a}^3$. Ясно, что после отождествления эквивалентных точек $'\boldsymbol{a}^3$ превращается в комплекс. В самом деле, барицентрическое подразделение многранника $'\boldsymbol{a}^3$ после отождествления, вообще говоря, не дает еще симплициального комплекса, так как некоторые неэквивалентные симплексы подразделения многогранника $'\boldsymbol{a}^3$ могут иметь эквивалентные вершины, так что после отождествления

*Речь идет здесь о вершинах, ребрах и сторонах многогранника, а не его барицентрического подразделения.

могут найтись разные симплексы, имеющие полностью совпадающие вершины. Другими словами, для разбитого на симплексы точечного множества, получающегося из многогранника после отождествления эквигалентных точек, может не выполняться условие (k_3) § 10. Однако, если мы еще раз произведем барицентрическое подразделение всех симплексов уже подразделенного барицентрически полиэдра $'\boldsymbol{a}^3$, то после отождествления мы получим симплициальный комплекс $\boldsymbol{K}^3$ (§ 13, упражнение).

Это построение показывает, что $\boldsymbol{K}^3$ в смысле гомеоморфизма однозначно определяется «схемой» многогранника, т. е. таблицей, в которой приведены все вершины, ребра и стороны многогранника с указанием инциденций и соответствий между ними. В самом деле, легко видеть, что при помощи такой схемы можно определить схему первого, а вместе с тем и второго барицентрического подразделения со всеми соответствиями и затем найти схему комплекса $\boldsymbol{K}^3$.

Если соответствие между сторонами многогранника установлено произвольно, то $\boldsymbol{K}^3$, вообще говоря, не будет многообразием. Выясним, каким условиям должно удовлетворять попарное соответствие сторон, чтобы $\boldsymbol{K}^3$ было многообразием $\boldsymbol{M}^3$.

По определению каждая точка многообразия должна иметь окрестность, гомеоморфную внутренности трехмерного шара. Для комплекса $\boldsymbol{K}^3$, получающегося при помощи отождествления сторон многогранника, это условие может не выполняться лишь в точках

$$\boldsymbol{a}_1^0,\ \boldsymbol{a}_2^0,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_{\alpha^0}^0,$$

соответствующих *вершинам* многогранника.

В самом деле, если P есть *внутренняя* точка полиэдра $'\boldsymbol{a}^3$, то, очевидно, у нее существует окрестность, гомеоморфная внутренности трехмерного шара.

Если P' есть внутренняя точка стороны $'\boldsymbol{a}_\nu^2$, P'' — соответствующая ей точка на стороне $''\boldsymbol{a}_\nu^2$, то для P' и P'' можно выбрать «окрестности-полушария» после отождествления сторон $'\boldsymbol{a}_\nu^2$ и $''\boldsymbol{a}_\nu^2$, превращающиеся в окрестность точки P, гомеоморфную внутренности шара.

Наконец, если $'\boldsymbol{a}_\nu^1, '\boldsymbol{a}_\nu^1, \ldots, {}^{(r)}\boldsymbol{a}_\nu^1$ представляет систему эквивалентных ребер полиэдра, а $P', P'', \ldots, P^{(r)}$ суть эквивалентные внутренние точки этих ребер, то для каждой из этих точек можно выбрать по окрестности, имеющей вид «сектора шара», притом такой, что после отождествления все эти окрестности сольются в одну окрестность, гомеоморфную внутренности шара.

Если же P представляет одну из точек $\boldsymbol{a}_1^0, \boldsymbol{a}_2^0, \ldots, \boldsymbol{a}_{\alpha^0}^0$, то окрестный комплекс ее может представлять любую замкнутую поверхность, — это легко доказывается построением соответствующих примеров.

Для того чтобы комплекс $\boldsymbol{K}^3$ имел и в этих точках окрестности, гомеоморфные внутренности шара, т е. чтобы он был многообразием, необходимо, как мы знаем, чтобы его характеристика равнялась нулю (§ 50). Замечательно, что это условие является также достаточным, т. е. имеет место следующее предложение:

Теорема I. *Комплекс $\boldsymbol{K}^3$, получающийся путем попарного отождествления сторон многогранника, является многообразием в том и только в том случае, когда его характеристика равна нулю.*

Так как N можно без особого труда подсчитать, то эта теорема дает удобный критерий для определения того, является ли такой комплекс многообразием или нет.

Доказательство. Так как $\boldsymbol{K}^3$ получается из многогранника путем попарного отождествления его сторон, то, как показано выше, лишь у конечного числа точек $\boldsymbol{a}_1^0, \boldsymbol{a}_2^0, \ldots, \boldsymbol{a}_{\alpha^0}^0$ может не существовать окрестностей, гомеоморфных внутренности шара. Окрестностные комплексы этих точек в каком-нибудь симплициальном разбиении комплекса $\boldsymbol{K}^3$ суть замкнутые поверхности. Выберем теперь симплициальное разбиение так, чтобы

$$\boldsymbol{a}_1^0, \boldsymbol{a}_2^0, \ldots, \boldsymbol{a}_{\alpha^0}^0$$

были вершинами и чтобы симплициальные звезды вокруг этих вершин

$$\boldsymbol{St}_1^3, \boldsymbol{St}_2^3, \ldots, \boldsymbol{St}_{\alpha^0}^3$$

не имели общих точек. Край $\boldsymbol{A}_\nu$ звезды $\boldsymbol{St}_\nu^3$ есть замкнутая поверхность с характеристикой N_ν, и мы должны показать, что из равенства $N = 0$ вытекает равенство $N_\nu = 2$, т. е. что окрестностный комплекс $\boldsymbol{A}_\nu$ представляет сферу. Пусть $\overline{\boldsymbol{K}}^3$ есть комплекс, получающийся после удаления из $\boldsymbol{K}^3$ всех звезд $\boldsymbol{St}_1^3, \boldsymbol{St}_2^3, \ldots, \boldsymbol{St}_{\alpha^0}^3$, (их края не удаляются). $\overline{\boldsymbol{K}}^3$ представляет ограниченный трехмерный комплекс, граница которого образована поверхностями $\boldsymbol{A}_\nu$. Характеристика комплекса $\overline{\boldsymbol{K}}^3$ равна

$$N + \sum_{\nu=1}^{\alpha^0}(N_\nu - 1).$$

В самом деле, если мы удалим все симплексы звезды $\boldsymbol{St}_\nu^3$ (в том числе и симплексы ее края), то характеристика комплекса $\boldsymbol{K}^3$ уменьшится на единицу, так как характеристика симплициальной звезды равна всегда 1 (§ 23, упр. 1). Если мы присоединим теперь снова симплексы окрестностного комплекса $\boldsymbol{A}_\nu$, то к характеристике прибавится число N_ν. Составим теперь удвоение $\overline{\boldsymbol{K}}_2^3$ комплекса $\overline{\boldsymbol{K}}^3$. Оно получается

путем отождествления соответствующих граничных точек двух экземпляров комплекса $\overline{\boldsymbol{K}}^3$. Характеристика удвоения равна удвоенной характеристике комплекса $\overline{\boldsymbol{K}}^3$ минус сумма характеристик граничных поверхностей, т. е. равна

$$2N + 2\sum_{\nu=1}^{\alpha^0}(N_\nu - 1) - \sum_{\nu=1}^{\alpha^0} N_\nu = 2N + \sum_{\nu=1}^{\alpha^0}(N_\nu - 2).$$

Однако $\overline{\boldsymbol{K}}^3_2$, как легко видеть, имеет уже в каждой точке окрестность, гомеоморфную внутренности шара. Поэтому $\overline{\boldsymbol{K}}^3_2$ представляет трехмерное многообразие, т. е. его характеристика равна 0. Но по предположению $N = 0$. Таким образом остается

$$\sum_{\nu=1}^{\alpha^0}(N_\nu - 2) = 0,$$

так как характеристика поверхности N_ν должна быть $\leqslant 2$. Отсюда следует, что $N_\nu = 2$, что и требовалось доказать.

Характеристика комплекса $\boldsymbol{K}^3$ равна

$$N = \overline{\alpha}^0 - \overline{\alpha}^1 + \overline{\alpha}^2 - \overline{\alpha}^3,$$

где $\overline{\alpha}^i$ означает число i-мерных симплексов какого-нибудь симплициального разбиения полиэдра $\boldsymbol{K}^3$ или общее число i-мерных кусков кусочной системы (§ 23). Если $\boldsymbol{K}^3$ задан многогранником $'\boldsymbol{a}^3$ с попарно отнесенными друг другу сторонами, то кусочную систему образуют, как мы покажем в следующем параграфе, ориентированные вершины, ребра, стороны и сам многогранник, причем, конечно, эквивалентные вершины, ребра и стороны не считаются различными кусками. Поэтому, чтобы получить величину характеристики N, нужно взять за $\overline{\alpha}^0$, $\overline{\alpha}^2$, $\overline{\alpha}^3$ числа α^0, α^1, α^2 неэквивалентных вершин, ребер и сторон полиэдра $'\boldsymbol{a}^3$ и положить $\overline{\alpha}^3 = 1$.

Приведем примеры некоторых многообразий, которыми мы в дальнейшем воспользуемся.

Пример 1. *Пространства линзы.* Если в качестве меры сложности многогранника рассматривать число пар поставленных в соответствие сторон, то линзы являются простейшими многогранниками. Линза представляет кусок трехмерного пространства, ограниченный двумя сферическими сегментами. Разобьем край линзы на p равных дуг, — тогда оба сферических сегмента превращаются в p-угольники $'\boldsymbol{a}^2$ и $''\boldsymbol{a}^2$. Соответствие между $'\boldsymbol{a}^2$ и $''\boldsymbol{a}^2$ может быть установлено разными способами. Например, можно отразить нижний сегмент $'\boldsymbol{a}^2$ в плоскости, проходящей через край линзы, вследствие чего

этот сегмент перейдет в верхний сегмент $''\boldsymbol{a}^2$. Обобщением такого соответствия является соответствие, осуществляемое следующим образом: сначала мы производим такое же отражение сегмента $''\boldsymbol{a}^2$ в плоскости края, а затем поворачиваем получающийся образ на угол $\frac{2\pi q}{p}$. Можно сказать, что в этом случае соответствие между точками сегментов $'\boldsymbol{a}^2$ и $''\boldsymbol{a}^2$ осуществляется винтовым вращением на угол $\frac{2\pi q}{p}$. Соответствие между точками обоих граничных сегментов линзы, получающееся таким образом, полностью определяется углом вращения $\frac{2\pi q}{p}$. Поэтому принимая, что p и q — взаимно простые числа, мы не сделаем никаких существенных ограничений. Кроме того, можно предположить еще, что $0 \leqslant q \leqslant \frac{p}{2}$, так как независимо от того, произведем ли мы правое или левое вращение, мы получим, очевидно, одно и то же многообразие. Но тогда все p вершин и все p ребер, на которые распадается край линзы, эквивалентны друг другу: $\alpha^0 = \alpha^1 = \alpha^2 = \alpha^3 = 1$, и $N = 0$. Получающийся поэтому после отождествления полиэдр действительно является многообразием (в чем, впрочем, можно легко убедиться непосредственно); он носит название *пространства линзы* (p, q). На рис. 110 $p = 3$, $q = 1$. При $p = 2$ можно взять в качестве линзы шар, а в качестве ребра линзы — экваториальную окружность; тогда рассматриваемое соответствие превращается в соответствия между диаметрально-противоположными точками граничной сферы шара; поэтому пространство линзы (2, 1) есть, как следует из § 14, проективное пространство $\boldsymbol{P}^3$. При $p = 1$ у нас вообще не получится многогранника: ребро линзы имеет в этом случае только одну вершину, и следовательно, оно будет касаться самого себя, что не допускается.

Если мы нанесем еще вторую точку деления, то мы получим полиэдр, гомеоморфный трехмерной сфере $\boldsymbol{S}^3$. В самом деле, в этом случае вращение отсутствует и эквивалентными являются точки сферы, симметричные относительно плоскости экватора, — а это дает, как известно, трехмерную сферу (см. § 14). Поэтому мы будем считать трехмерную сферу также пространством линзы.

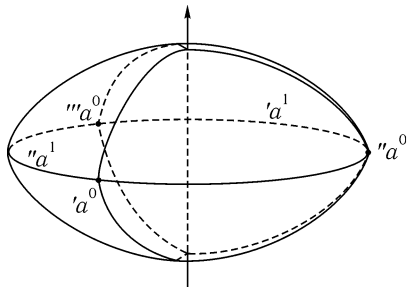


Рис. 110

Чтобы дать представление о трудностях, возникающих в трехмерной топологии, заметим здесь, что уже для этих простейших трехмерных многообразий — пространств линзы — проблема гомеоморфизма не решена, т. е., вообще говоря, не установлено, в каких случаях два пространства линзы (p, q) и (p', q') гомеоморфны (см. стр. 275 и стр. 356).

Пример 2. *Трехмерный тор* (топологическое произведение трех окружностей). Как топологическое произведение двух окружностей — обычный тор — может быть представлен квадратом, противоположные стороны которого поставлены в соответствие друг другу посредством параллельного пере-

носа, так и трехмерный тор можно представить кубом с отождествленными противоположными гранями (причем соответствие также устанавливается при помощи параллельного переноса). В таком кубе имеются три неэквивалентных ребра и столько же неэквивалентных граней (сторон), в то время как все вершины эквивалентны друг другу. Поэтому $N = 0$.

§ 61. Группы Бетти

В предыдущем параграфе мы вывели условие для того, чтобы полиэдр, получающийся отождествлением сторон многогранника, являлся многообразием. Относительно многогранников, которые будем рассматривать сейчас, мы не будем предполагать, что это условие непременно должно выполняться. Поэтому точки полиэдра $\boldsymbol{K}^3$, соответствующие вершинам многогранника, могут не иметь окрестностей, гомеоморфных трехмерному шару.

Многогранник $'\boldsymbol{a}^3$, его стороны $'\boldsymbol{a}_\nu^2$ и $''\boldsymbol{a}_\nu^2$, его ребра $'\boldsymbol{a}_\nu^1$, $''\boldsymbol{a}_\nu^1$, $'''\boldsymbol{a}_\nu^1, \ldots$, и его вершины $'\boldsymbol{a}_\nu^0$, $''\boldsymbol{a}_\nu^0$, $'''\boldsymbol{a}_\nu^0, \ldots$, являются трех-, двух-, одно- и нульмерными элементами, т. е. ориентируемыми ограниченными псевдомногообразиями. Поэтому любое симплициальное разбиение каждого такого элемента может быть ориентировано когерентно. Мы будем рассматривать среди всех возможных симплициальных разбиений только двукратное барицентрическое подразделение многогранника $'\boldsymbol{a}^3$. Вершины мы ориентируем знаком $+$, ребра же и стороны должны быть ориентированы так, чтобы те из них, которые соответствуют друг другу, имели одинаковые ориентации, т. е. чтобы при отображении эквивалентных сторон (или ребер) друг на друга переносились бы и их ориентации. На рисунках мы не будем отмечать симплициального разбиения, ориентацию ребер мы будем указывать стрелками, а ориентацию сторон — круговыми стрелками. Если $'\boldsymbol{a}_\nu^k$, $''\boldsymbol{a}_\nu^k, \ldots$ представляют систему эквивалентных k-мерных элементов многогранника, то мы будем обозначать k-мерные алгебраические комплексы, состоящие каждый из одного ориентированного элемента, соответствующими светлыми буквами $'a_\nu^k$, $''a_\nu^k, \ldots$ Напротив, a_ν^k будет обозначать у нас k-мерный алгебраический комплекс комплекса $\boldsymbol{K}^3$, получающийся из алгебраических комплексов $'a_\nu^k$, $''a_\nu^k, \ldots$ отождествлением эквивалентных точек. Таким образом на $\boldsymbol{K}^3$ имеются следующие алгебраические комплексы размерностей от 0 до 3:

$$
\begin{aligned}
&a_1^0, \quad a_2^0, \ldots, \quad a_{\alpha^0}^0,\\
&a_1^1, \quad a_2^1, \ldots, \quad a_{\alpha^1}^0,\\
&a_1^2, \quad a_2^2, \ldots, \quad a_{\alpha^2}^2,\\
&a^3.
\end{aligned}
$$

Мы утверждаем, что эти алгебраические комплексы образуют на $\boldsymbol{K}^3$ кусочную систему (§ 22). В самом деле, все эти комплексы линейно независимы, так как они не имеют общих симплексов. Далее, граница каждого $a^k_\varkappa$ составлена из алгебраических комплексов a^{k-1}_ι. Для того чтобы доказать, что условия (Кус$_3$) и (Кус$_4$) также выполняются, рассмотрим на $\boldsymbol{K}^3$ симплициальный алгебраический комплекс U^k, границей которого является линейная комбинация алгебраических комплексов a^{k-1}_ι [может случиться, что эта граница представляет нулевой $(k-1)$-мерный комплекс], и постараемся построить гомологичный U^k алгебраический комплекс V^k, составленный целиком из алгебраических комплексов $a^k_\varkappa$. Будем рассматривать еще «прообраз» комплекса U^k — алгебраический комплекс $'U^k$ на *многограннике* $'\boldsymbol{a}^3$, получающийся из U^k, если для каждого k-мерного симплекса комплекса U^k взять один из соответствующих ему симплексов полиэдра $'\boldsymbol{a}^3$, снабженный такой же ориентацией и коэффициентом.

Если $k=3$, то каждый из когерентно ориентированных трехмерных симплексов полиэдра $'\boldsymbol{a}^3$ должен входить в $'U^k$ с одним и тем же коэффициентом, так как иначе $\dot{U}^k$ не может быть линейной комбинацией алгебраических комплексов a^2_ν. Поэтому $'U^k$ представляет комплекс $'a^3$, взятый с некоторым коэффициентом; тем самым предложение для $k=3$ доказано.

Пусть теперь $k=2$. Рассмотрим алгебраический комплекс $'U^2_m$, состоящий из симплексов комплекса $'U^2$ не лежащих на границе многогранника $'\boldsymbol{a}^3$. Граница комплекса $'U^2_m$ лежит на границе многогранника $'\boldsymbol{a}^3$ и, как всякий одномерный цикл на двумерной сфере, ограничивает там некоторый комплекс $'U^2_r$; $'U^2_m - 'U^2_r$ представляет поэтому цикл, а так как это есть цикл на $'\boldsymbol{a}^3$, то он гомологичен там нулю. Но тогда U^2_m, наверное, $\sim U^2_r$, на $\boldsymbol{K}^3$, так что если мы заменим в U^2 комплекс U^2_m комплексом U^2_r, то мы придем к гомологичному U^2 комплексу V^2. Прообраз его $'V^2$ не содержит никаких внутренних симплексов многогранника $'\boldsymbol{a}^3$. Этот прообраз можно выбрать так, чтобы из двух возможных прообразов каждого двумерного симплекса комплекса V^2 в $'V^2$ входил бы симплекс, принадлежащий $'\boldsymbol{a}^2_\nu$ (а не $''\boldsymbol{a}^2_\nu$). Но тогда $'V^2$ представляет линейную комбинацию алгебраических комплексов $'a^2_\nu$. В самом деле, так как граница комплекса V^2 есть линейная комбинация алгебраических комплексов a^1_ν, то каждый из когерентно ориентированных двумерных симплексов комплекса $'a^2_\nu$ должен входить в $'V^2$ с одним и тем же коэффициентом. Поэтому V^2 есть алгебраический комплекс, удовлетворяющий поставленным требованиям.

Такой же процесс вытеснения ведет к цели и при $k=1$: мы вытесняем сначала $'U^1$ на границу многогранника $'\boldsymbol{a}^3$ и затем таким же способом на границу каждого отдельного комплекса $'\boldsymbol{a}^2_\nu$. Алгебраический комплекс V^1, получающийся при этом из U^1,

представляет уже линейную комбинацию алгебраических комплексов a^1_ν.

Таким образом заключаем, что группы Бетти полиэдра $\boldsymbol{K}^3$ можно вычислить по способу, описанному в § 22, исходя из кусочной системы, состоящей из алгебраических комплексов a^k_ν. Вместе с тем доказано, что способ подсчета характеристики полиэдра $\boldsymbol{K}^3$, данный в § 60, является правильным. Очевидно, $\boldsymbol{K}^3$ является *ориентируемым* в том и только в том случае, когда $\dot{a}^3 = 0$, т. е. когда в формуле

$$'\dot{a}^3 = \sum_{\nu=1}^{\alpha^2} ('\varepsilon_\nu\, 'a^2_\nu + ''\varepsilon_\nu\, ''a^2_\nu)$$

$'\varepsilon_\nu + ''\varepsilon_\nu = 0$. Это означает, что $'a^2_\nu$ и $''a^2_\nu$ при когерентной ориентации всей границы многогранника должны входить в эту границу с противоположными ориентациями. Другими словами, можно сказать, что для наблюдателя, находящегося вне полиэдра, круговые стрелки, указывающие ориентации каждых двух соответствующих друг другу сторон, направлены в противоположные стороны. Мы будем называть две ориентированных стороны $'a^2_\nu$, и $''a^2_\nu$, для которых это имеет место, сторонами, находящимися *в соответствии первого рода*; в противном же случае мы будем говорить *о соответствии второго рода*. Итак, $\boldsymbol{K}^3$ ориентируемо в том и только в том случае, если каждая пара отнесенных друг другу сторон находится в соответствии первого рода. Пространства линзы и трехмерный тор суть ориентируемые многообразия.

Пример 1. *Пространства линзы.* Кусочные матрицы инциденций пространства линзы (p, q) имеют вид

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{E}^0 & a^1 \\ \hline a^0 & \mathbf{0} \end{array}, \quad \begin{array}{c|c} \mathbf{E}^1 & a^2 \\ \hline a^1 & p \end{array}, \quad \begin{array}{c|c} \mathbf{E}^2 & a^3 \\ \hline a^2 & \mathbf{0} \end{array}.$$

Эти матрицы уже имеют нормальную форму. Выпишем в виде таблицы числа элементов α^k, ранги γ^k и вычисленные по формуле $p^k = \alpha^k - \gamma^k - \gamma^{k-1}$ числа Бетти (стр. 106):

$k =$	0	1	2	3
α^k	1	1	1	1
γ^k	0	1	0	–
p^k	1	0	0	1

.

Пространство линзы имеет единственный одномерный коэффициент кручения, равный p. Число q вообще не находит отражения в группах Бетти.

На этом примере становится ясным геометрическое значение одномерного *коэффициента кручения*: одномерный коэффициент кручения, равный p, указывает, что существует одномерный цикл, сам по себе ничего не ограничивающий, но становящийся гомологичным нулю, если взять его с коэффициентом p. В самом деле, край линзы, состоящий из p эквивалентных

ребер $'a^1, ''a^1, \ldots, {}^{(p)}a^1$, ограничивает кусок поверхности, именно — сферический сегмент. В случае $p = 2$ (проективное пространство $\boldsymbol{P}^3$) существуют два эквивалентных ребра, превращающиеся после отождествления в линию гомотопную проективной прямой, а проективная прямая, взятая с коэфициентом 2, ограничивает, как известно, кусок поверхности, именно — проективную плоскость (стр. 88). Кроме того, пространство линзы дает ключ к объяснению *названия* «коэффициент кручения». Многогранник превращается в пространство линзы, если подвергнуть его кручению вдоль оси линзы, т. е. отождествить точки верхнего и нижнего сферического сегмента, переходящие друг в друга при винтовом вращении.

Пример 2. Октаэдрическое пространство получается, если мы возьмем в качестве трехмерного многогранника октаэдр, повернем каждые два противоположные треугольника его на угол $\frac{\pi}{3}$ друг относительно друга и отождествим их. На рисунке 111 сеть октаэдра нанесена на плоскость при помощи проектирования, именно — посредством стереографической проекции; при этом плоскость нужно мыслить себе превращенной в сферу присоединением бесконечно удаленной точки. Бесконечно удаленная точка является вершиной сети. Для того чтобы было легче представить себе, как обстоит дело, соответствующие друг другу элементы обозначены на рисунке одинаковыми символами, а не посредством употреблявшихся нами в общей теории символов $'\boldsymbol{a}^k_\nu$.

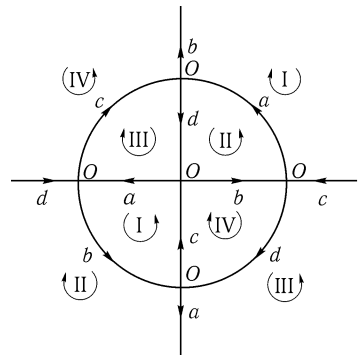


Рис. 111

Кусочная матрица инциденций $\mathbf{E}^1$ приводится посредством преобразований § 87 к нормальной форме

$$\left\|\begin{matrix}3&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{matrix}\right\|.$$

Количества систем эквивалентных вершин, ребер и сторон, а также ранги матриц инциденций и числа Бетти p^k мы выписываем, как и в предыдущем примере, в виде таблицы:

$k=$	0	1	2	3
α^k	1	4	4	1
γ^k	0	4	0	–
p^k	1	0	0	1

.

В этом случае существует один одномерный коэффициент кручения, равный 3. Одномерная Группа Бетти является поэтому группой третьего порядка.

Упражнение. Покажите, что в октаэдрическом пространстве четыре ребра a, b, c, d гомологичны одно другому и каждое из них, взятое с коэффициентом 3, гомологично нулю.

§ 62. Фундаментальная группа

В предыдущем параграфе мы показали, как найти *группы Бетти*; в этом параграфе мы хотим показать, как можно определить *фундаментальную группу* трехмерного многообразия $\boldsymbol{K}^3$, зная путем каких идентификаций произошло $\boldsymbol{K}^3$ из многогранника $\boldsymbol{a}^3$. Это можно сделать, пользуясь следующим предложением:

Теорема I. *Фундаментальная группа многообразия $\boldsymbol{K}^3$ совпадает с фундаментальной группой поверхностного комплекса $\boldsymbol{K}^2$, получающегося из границы многогранника $'\boldsymbol{a}^3$ отождествлением эквивалентных точек.*

Доказательство. Мы должны показать две вещи: I. Каждый замкнутый путь w комплекса $\boldsymbol{K}^3$, начальной точкой которого является фиксированная точка O комплекса $\boldsymbol{K}^2$, может быть деформирован в путь w_1 комплекса $\boldsymbol{K}^2$. II. Если путь w_1 комплекса $\boldsymbol{K}^2$ гомотопен нулю в $\boldsymbol{K}^3$, то он гомотопен нулю также в $\boldsymbol{K}^2$.

Для доказательства I рассмотрим множество w' всех точек многогранника $'\boldsymbol{a}^3$, отображающихся в точки пути w. Если на $'\boldsymbol{a}^3$ существует внутренняя точка P, не принадлежащая w', то мы деформируем w' в путь, лежащий на границе многогранника $'\boldsymbol{a}^3$ «посредством проектирования из точки P», т. е. мы заставляем двигаться точки пути w с постоянной скоростью по прямолинейным лучам, выходящим из P, до границы многогранника $'\boldsymbol{a}^3$. Такому проектированию соответствует в $\boldsymbol{K}^3$ деформация пути w в путь w_1 на $\boldsymbol{K}^2$. Если же w' исчерпывает все внутренние точки многогранника $'\boldsymbol{a}^3$, то тогда нужно одну точку P «освободить», что можно сделать, например, при помощи симплициального приближения пути w в $\boldsymbol{K}^3$ (такое приближение является, как показано на стр. 152, деформацией пути w).

Таким же образом доказывается II. Пусть $\boldsymbol{A}$ обозначает «особый прямоугольник деформации», описываемый путем w_1 при сведении его в точку O, а $'\boldsymbol{A}$ — множество всех точек многогранника $'\boldsymbol{a}^3$, отображающихся в $\boldsymbol{A}$. Тогда мы проектируем $'\boldsymbol{A}$ из какой-нибудь не принадлежащей $'\boldsymbol{A}$ внутренней точки P полиэдра $'\boldsymbol{a}^3$ на границу полиэдра; этому проектированию соответствует вытеснение $\boldsymbol{A}$ из $\boldsymbol{K}^3$ на подкомплекс $\boldsymbol{K}^2$. Если такой точки P не существует, то сначала $\boldsymbol{A}$ нужно симплициально аппроксимировать, т. е. нужно симплициально аппроксимировать в $\boldsymbol{K}^3$ непрерывное отображение достаточно мелко подразделенного симплициально прямоугольника деформации $\overline{\boldsymbol{A}}$ на $\boldsymbol{A}$.

Для *отыскания соотношений* можно воспользоваться способом § 46. Особенно просто сделать это в случае, когда все вершины многогранника эквивалентны. Они соответствуют тогда одной и той же точке O в $\boldsymbol{K}^3$ и эту точку можно выбрать за начальную точку замкнутых путей в $\boldsymbol{K}^3$. Вспомогательные пути тогда отпадают, и ориентированные ребра многогранника (собственно — соответствующие им

замкнутые пути в $\boldsymbol{K}^3$) дадут нам все образующие фундаментальной группы. Соотношения получаются при обходе граней многогранника.

Такой простейший случай имеет место, например, для *пространства линзы* (p, q). Для него существует одна единственная образующая a (мы опускаем теперь индексы, употреблявшиеся в предыдущем параграфе), а единственное соотношение получается при обходе одного из двух эквивалентных многоугольников: $a^p = 1$. Таким образом, *фундаментальная группа пространства линзы* (p, q) *есть циклическая группа порядка* p, *не зависящая от числа* q.

Теперь можно предполагать две возможности: либо два пространства линз (p, q) и (p, q') при $q \neq q'$ гомеоморфны, либо известные нам до сих пор инварианты — фундаментальная группа и группы Бетти — слишком слабы для того, чтобы установить различие таких пространств. Оказывается, что может иметь место как тот, так и другой случай, в зависимости от свойств чисел q и q'. Что касается гомеоморфизма, то легко может быть доказана следующая теорема:

Теорема II. *Если* q *и* q' *удовлетворяют сравнению*

$$qq' \equiv \pm 1 \pmod{p},$$

то пространства линз (p, q) *и* (p, q') *гомеоморфны.*

Так как это сравнение при заданном q имеет в точности одно решение q', удовлетворяющее нормирующему условию $0 \leqslant q' \leqslant \frac{p}{2}$, то числа q и q' определяются определяются одно другим взаимно однозначно.

Доказательство. Разобьем линзу $\boldsymbol{L}$, имеющую угол кручения $\frac{2\pi q}{p}$, p полуплоскостями, проходящими через ось линзы, на p одинаковых тетраэдров $\boldsymbol{T}_1$, $\boldsymbol{T}_2$, …, $\boldsymbol{T}_p$, (две из граней каждого такого тетраэдра являются поверхностями — частями сферических сегментов; рис. 110 показывает случай $p = 3$) и составим из них новую линзу с углом кручения $\frac{2\pi q'}{p}$. В линзе $\boldsymbol{L}$ тетраэдр $\boldsymbol{T}_i$ имеет с нижним сферическим сегментом общий треугольник $\underline{\Delta}_i$, а с верхним — общий треугольник $\overline{\Delta}_i$. Далее, все $\boldsymbol{T}_i$ имеют общую ось линзы b; ребра же, противоположные оси b, эквивалентны друг другу и дают в пространстве линзы одно и то же ребро a. Треугольники попарно эквивалентны в силу соответствия, установленного между сферическими сегментами, — именно, $\underline{\Delta}_i$ эквивалентен с $\overline{\Delta}_{i+q}$, причем в случае необходимости $i+q$ нужно редуцировать по модулю p. Чтобы построить теперь из p тетраэдров новую линзу $\boldsymbol{L}'$, мы соединим тетраэдры $\boldsymbol{T}_1$ и $\boldsymbol{T}_{1+q}$ своими эквивалентными гранями $\underline{\Delta}_1$ и $\overline{\Delta}_{1+q}$, далее присоединяем к $\underline{\Delta}_{1+q}$ вдоль грани $\overline{\Delta}_{1+2q}$ тетраэдр $\boldsymbol{T}_{1+2q}$ и т. д. Таким образом мы получим линзу $\boldsymbol{L}'$, отличающуюся от первой линзы только тем, что в $\boldsymbol{L}'$ ребра a и b поменялись ролями. Пусть угол кручения линзы $\boldsymbol{L}'$ равен $\frac{2\pi q'}{p}$. Число q' показывает, что в циклической последовательности $\boldsymbol{T}_1$, $\boldsymbol{T}_{1+q}$, $\boldsymbol{T}_{1+2q}$, …, $\boldsymbol{T}_2$, …, в которой тетраэдры

располагаются в $\boldsymbol{L}'$ вокруг оси a, тетраэдры $\boldsymbol{T}_1$ и $\boldsymbol{T}_2$ (последний совпадает с $\boldsymbol{T}_{2+xp}$) удалены друг от друга на расстояние q' или $p-q'$ интервалов. Поэтому в нашей циклической последовательности разность индексов тетраэдров $\boldsymbol{T}_{2+xp}$ и $\boldsymbol{T}_1$ равна, с одной стороны, qq' или $q(p-q')$, а с другой стороны, эта разность $=(2+xp)-1$, т. е.

$$(2+xp)-1=qq' \quad \text{или} \quad q(p-q');$$

значит:

$$qq' \equiv \pm 1 \pmod{p}.$$

Из теоремы II следует, например, что пространства линз (7, 2) и (7, 3) гомеоморфны, так как $2\cdot 3 \equiv -1 \pmod 7$. Гомеоморфны ли, однако, пространства $(p, 1)$ и $(p, 2)$, с помощью теоремы II установить невозможно. Мы познакомимся позже (§ 77) с инвариантом, не являющимся следствием из фундаментальной группы, с помощью которого можно установить различие некоторых пространств линз, например пространств $(5, 1)$ и $(5, 2)$. Напротив, относительно пространств $(7, 1)$ и $(7, 2)$ до сих пор неизвестно, различны они или нет.

Заметим еще, что каждое пространство линзы можно разбить на два трехмерных кольцевидных тела, имеющих один и тот же тор своей границей. Высверлим в линзе $\boldsymbol{L}$ вдоль ее оси b концентрический с линзой телесный цилиндр $\boldsymbol{B}$. При отождествлении сферических сегментов этот цилиндр превращается в трехмерное кольцо. То же самое имеет место в отношении дополнительного пространства $\boldsymbol{A}$, остающегося после высверливания цилиндра $\boldsymbol{B}$. Чтобы убедиться в этом, нужно только разбить линзу $\boldsymbol{L}$, как мы только что делали, на p тетраэдров и составить из них линзу $\boldsymbol{L}'$. В линзе $\boldsymbol{L}'$ $\boldsymbol{A}$ представляет теперь цилиндр, идущий вдоль оси a линзы; при отождествлении эквивалентных точек этот цилиндр превращается в трехмерное кольцевидное тело. Сравните это замечание с изложенным на стр. 283.

В качестве следующего примера рассмотрим *сферическое пространство додекаэдра*[*]. Оно получается из додекаэдра при отождествлении противоположных его граней — пятиугольников, повернутых друг относительно друга на угол $\frac{\pi}{5}$. На рис. 112 показана сеть додекаэдра, полностью определяющая рассматриваемое пространство. В этом случае имеется $\alpha^0=5$ неэквивалентных вершин O, P, Q, R, S, а ребра распадаются на тройки эквивалентных друг другу ребер. Характеристика этого пространства $N=5-10+6-1=0$, так что пространство сферического додекаэдра представляет многообразие. Мы выбираем за начальную точку замкнутых путей точку O и будем считать вспомогательными путями вершин P, Q, R, S пути a, h, f^{-1}, $f^{-1}d$. Тогда образующие классы путей фундаментальной группы могут быть представлены

[*] *H. Kneser* (8), стр. 256.

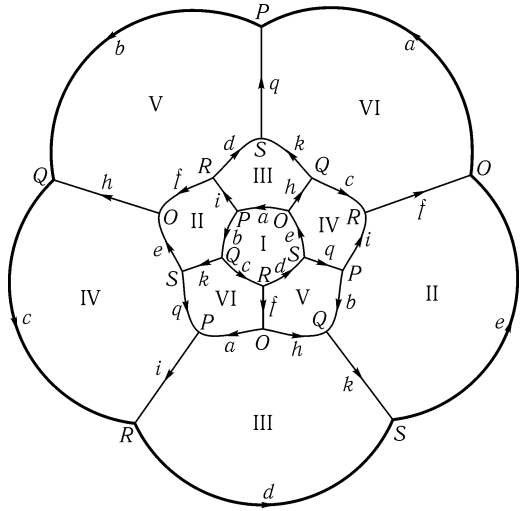


Рис. 112

замкнутыми путями

$$A = aa^{-1},$$
$$B = abh^{-1},$$
$$C = hcf,$$
$$D = f^{-1}d(d^{-1}f),$$
$$E = (f^{-1}d)e,$$
$$F = f^{-1}f,$$
$$G = (f^{-1}d)ga^{-1},$$
$$H = hh^{-1},$$
$$I = aif,$$
$$K = hk(d^{-1}f).$$

Соотношения типа I получаются отсюда, если в правых частях заменить всюду большие буквы малыми. Но тогда $A = D = F = H = 1$, а поэтому все остальные соотношения этого типа становятся тривиальными.

В качестве соотношений типа II при обходе пятиугольников получаются

следующие 6 соотношений:

$$\left.\begin{aligned} ABCDE &= 1,\\ BKEF^{-1}I^{-1} &= 1,\\ AIDK^{-1}H^{-1} &= 1,\\ CI^{-1}G^{-1}EH &= 1,\\ BH^{-1}F^{-1}DG &= 1,\\ AG^{-1}K^{-1}CF &= 1, \end{aligned}\right\} \quad \text{или} \quad \left.\begin{aligned} BCE &= 1,\\ BKEI^{-1} &= 1,\\ I &= 1K,\\ CI^{-1}G^{-1}E &= 1,\\ B &= G^{-1},\\ G^{-1}K^{-1}C &= 1. \end{aligned}\right\}$$

Исключение G и K дает

$$\begin{aligned} BCE &= 1,\\ BIEI^{-1} &= 1,\\ CI^{-1}BE &= 1,\\ BI^{-1}C &= 1. \end{aligned}$$

Из 1-го и 4-го из этих соотношений получается

$$E = C^{-1}B^{-1}, \quad I = CB.$$

Исключая поэтому E и I из второго и третьего соотношения, мы получим

$$BCBC^{-1}\cdot B^{-2}C^{-1} = 1 \tag{I}$$

и

$$CB^{-1}C^{-1}BC^{-1}B^{-1} = 1. \tag{II}$$

Определим теперь из этих соотношений при помощи коммутирования одномерную группу Бетти. Мы переходим, как всегда в случае абелевых групп, к аддитивной записи и будем обозначать элементы группы Бетти при помощи черты наверху. Тогда

$$-\overline{C} = 0, \tag{I}$$

$$-\overline{C} - \overline{B} = 0, \tag{II}$$

т. е. $\overline{B} = \overline{C} = 0$. Это значит, что одномерная группа Бетти состоит только из нулевого элемента. Так как сферическое пространство додекаэдра ориентируемо, то отсюда следует, что его числа Бетти имеют следующие значения:

$$p^0 = 1, \quad p^1 = p^2 = 0, \quad p^3 = 1.$$

Коэффициенты кручения отсутствуют.

Но такие же точно численные инварианты имеет трехмерная сфера. Таким образом, чтобы установить, совпадает пространство додекаэдра с трехмерной сферой или нет, знания групп Бетти еще недостаточно. Мы рассмотрим поэтому, не различаются ли фундаментальные группы этих пространств.

С этой целью преобразуем дальше довольно сложные соотношения (I) и (II). Подставив в (I) на место, отмеченное точкой, левую часть соотношения (II), мы получим вместо (I) соотношение

$$BCBC^{-1} \cdot CB^{-1}C^{-1}BC^{-1}B^{-1} \cdot B^{-2}C^{-1} = 1,$$

или после сокращения

$$B^2C^{-1}B^{-3}C^{-1} = 1. \qquad (\mathrm{I}')$$

Введя в (I') и в (II) новую образующую U, связанную со старыми формулой $C = U^{-1}B$, мы получим

$$B^2 \cdot B^{-1}U \cdot B^{-3} \cdot B^{-1}U = 1, \quad U^{-1}B \cdot B^{-1} \cdot B^{-1}U \cdot B \cdot B^{-1}U \cdot B^{-1} = 1,$$

или

$$B^4 = UBU, \quad U^2 = BUB,$$

или же, наконец:

$$B^5 = (BU)^2 = U^3. \qquad (\mathrm{III})$$

Из соотношений (III) следует, что пространство додекаэдра негомеоморфно трехмерной сфере, так как его фундаментальная группа не состоит только из единичного элемента. В самом деле, соотношения (III) выполняются в группе икосаэдра, если под B понимать вращение вокруг какой-нибудь вершины икосаэдра на угол $\frac{2\pi}{5}$, а под U — вращение в том же направлении на угол — вокруг центра прилегающего к этой вершине треугольника. Таким образом группа икосаэдра есть либо сама группа (III), либо ее дополнительная группа, вследствие чего фундаментальная группа пространства додекаэдра не состоит только из единичного элемента. Можно показать, что (III) есть группа 120-ого порядка, являющаяся бинарной группой икосаэдра[*].

Сферическое пространство додекаэдра дает нам пример многообразия, имеющего такие же группы Бетти, как трехмерная сфера, но не гомеоморфного с трехмерной сферой. Такие многообразия называются пространствами Пуанкаре. Можно построить бесчисленное множество различных пространств Пуанкаре. Однако пространство сферического додекаэдра есть единственное из всех известных пространств Пуанкаре, имеющее конечную фундаментальную группу[33].

Таким образом, группы Бетти не дают исчерпывающей характеристики трехмерной сферы. Предположение, что трехмерная сфера полностью характеризуется своей фундаментальной группой, составляет содержание до сих пор недоказанной «гипотезы Пуанкаре». Так как фундаментальная группа трехмерной сферы состоит только из единичного элемента, то проблема может быть сформулирована также следующим образом: существуют ли, кроме трехмерной сферы, другие трехмерные замкнутые многообразия, в которых каждый замкнутый путь может быть стянут в точку (гомотопен нулю).

[*] Ihber. Deutsch. Math. Vereinig., 42, 1932, задача 84, стр. 3.

Упражнения. 1. Покажите, что *гиперболическое пространство додекаэдра*, получающееся из додекаэдра при отождествлении противоположных сторон, повернутых друг относительно друга на угол $\frac{3\pi}{5}$ (а не на $\frac{\pi}{5}$, как в случае сферического пространства додекаэдра), представляет многообразие. Докажите, найдя фундаментальную группу этого многообразия, что оно имеет три коэффициента кручения, равные 5, и что его одномерное число Бетти $p^1 = 0$.

2. Докажите, что соотношения фундаментальной группы пространства октаэдра (§ 61) суть

$$abc = adb = acd = bdc = 1$$

и что группа тетраэдра есть дополнительная группа этой группы [написанные соотношения имеют место в группе тетраэдра, если под a, b, c, d понимать вращения на угол $\frac{2\pi}{3}$ вокруг четырех вершин тетраэдра].

3. Из двух трехмерных многообразий $\boldsymbol{M}_1$ и $\boldsymbol{M}_2$ можно посредством «сложения» получить новое многообразие. Именно, мы высверливаем в каждом из обоих многообразий по маленькому шарику и склеиваем получающиеся при этом «ограниченные многообразия» своими граничными сферами. Такое склеивание можно сделать двумя существенно различными способами — с сохранением ориентации и с обращением ее. Считая, что фундаментальные группы многообразий $\boldsymbol{M}_1$ и $\boldsymbol{M}_2$ известны, найдите фундаментальную группу получающегося описанным образом замкнутого многообразия и его одномерную группу Бетти.

4. Пользуясь решением упражнения 3, постройте трехмерное многообразие с произвольно заданной одномерной группой Бетти.

§ 63. Диаграмма Хегора (Heegaard)

Мы установили ряд общих свойств трехмерных многообразии, но познакомились до сих пор лишь с отдельными примерами таких многообразий. Вопрос о классификации всех трехмерных многообразий, в противоположность вопросу о классификации двумерных многообразий (поверхностей), до сих пор не решен. В качестве подхода к решению этого вопроса может служить *диаграмма Хегора*, к ознакомлению с которой мы сейчас переходим.

Будем называть *телом рода* h трехмерный полиэдр (тело), получающийся из шара при попарном отождествлении $2h$ несоприкасающихся друг с другом элементов поверхности шара, находящихся в соответствии первого рода (стр. 272). Это отождествление можно произвести в обычном пространстве, деформируя шар таким образом, чтобы каждые два находящиеся в соответствии элемента совпали. Получающееся тело можно рассматривать как шар с приделанными к нему h телесными ручками. Границей такого тела является ориентируемая поверхность рода h; h окружностей, получающихся из границ попарно отождествляемых элементов поверхности, называют меридианами

тела рода h. Телом рода 1 является обыкновенное трехмерное кольцо.

Теорема. *Каждое ориентируемое трехмерное многообразие $\boldsymbol{M}^3$ можно получить, складывая два тела одного и того же рода своими поверхностями, т. е. топологически отображая эти поверхности друг на друга и отождествляя соответствующие точки.*

Доказательство. Пусть рассматриваемое трехмерное многообразие задано в некотором симплициальном разбиении. Высверлим вокруг каждой из α^0 вершин этого разбиения маленький шарик, для которого эта вершина является центром. Точно так же вдоль каждого из α^1 ребер разбиения высверлим окружающий это ребро небольшой цилиндр, соединяющий два шарика, лежащих вокруг концов ребра. Остающаяся после такого высверливания вершин и ребер часть $\overline{\boldsymbol{M}}_1^3$ нашего многообразия составлена из α^3 «сточенных» вдоль ребер трехмерных симплексов и представляет трехмерное тело в описанном выше смысле (т. е. тело некоторого рода h). В самом деле, такое тела можно построить, исходя из одного сточенного симплекса $\boldsymbol{E}_1^3$, присоединяя к нему вдоль общей грани соседний симплекс $\boldsymbol{E}_2^3$, присоединяя затем $\boldsymbol{E}_3^3$ вдоль грани симплекса $\boldsymbol{E}_1^3$ или $\boldsymbol{E}_2^3$ и т. д. Соединив таким образом все трехмерные симплексы, мы получим топологический шар, в котором кужно еще попарно отождествить некоторые не имеющие общих точек элементы его поверхности. Ясно, что отнесенные друг к другу элементы поверхности находятся в соответствии первого рода, так как иначе $\overline{\boldsymbol{M}}_1^3$, а следовательно, и $\boldsymbol{M}^3$, не было бы ориентируемым. Точно так же можно показать, что высверленная часть $\overline{\boldsymbol{M}_2^3}$, составленная из α^0 шаров и α^1 цилиндров, есть тело того же типа.

Таким образом каждое ориентируемое трехмерное многообразие может быть задано ориентируемой поверхностью $\boldsymbol{M}^2$ рода h, именно, общей поверхностью тел $\overline{\boldsymbol{M}_1^3}$ и $\boldsymbol{M}_2^3$, если мы укажем на $\boldsymbol{M}^2$, каким образом эти тела примыкают к $\boldsymbol{M}^2$. Это можно сделать, отмечая на $\boldsymbol{M}^2$ меридианы тел $\overline{\boldsymbol{M}_1^3}$ и $\overline{\boldsymbol{M}^3}_2$. Такие меридианы образуют на $\boldsymbol{M}^2$ две системы Σ_1 и Σ_2, не имеющих двойных точек окружностей. Каждая система состоит из h окружностей, причем окружности одной и той же системы не имеют общих точек друг с другом (окружности разных систем могут иметь общие точки). Обе системы обладают тем свойством, что если рассечь* $\boldsymbol{M}^2$ вдоль h окружностей системы Σ_1 (или Σ_2), то мы получим сферу с $2h$ отверстиями. Если теперь на ориентируемой поверхности M^2 рода h произвольно заданы две таких системы Σ_1 и Σ_2, то трехмерное многообразие определяется ими полностью и од-

*О рассечении можно говорить, если окружности систем Σ_1 и Σ_2 составлены из ребер симплициального разбиения; мы будем предполагать, что дело обстоит именно так.

нозначно. Именно, мы рассекаем $\boldsymbol{M}^2$ вдоль окружностей системы Σ_1, превращая ее в сферу с $2h$ отверстиями, заделываем эти отверстия двумерными элементами** («крышками») и рассматриваем получающуюся сферу как границу шара. Попарное отождествление «крышек» дает нам тело рода h, поверхностью которого является $\boldsymbol{M}^2$, а меридианами — окружности системы Σ_1. Точно так же с помощью системы Σ_2 мы строим второе тело рода h.

Замкнутая поверхность $\boldsymbol{M}^2$ с нанесенными на ней двумя системами Σ_1 и Σ_2 называется диаграммой Хегора многообразия $\boldsymbol{M}^3$.

Нетрудно построить все диаграммы Хегора, даваемые тором. Они состоят из двух произвольных, не гомотопных нулю и не имеющих двойных точек замкнутых симплициальных путей. Среди многообразий, имеющих диаграммой Хегора тор, находятся все пространства линзы, так как каждое пространство линзы, как мы видели на стр. 275–277, распадается при просверливании вдоль оси линзы на два трехмерных кольца. Точно так же топологическое произведение окружности на сферу имеет диаграммой Хегора тор. В самом деле, это многообразие можно получить, отождествляя у двух топологически отображенных друг на друга трехмерных колец соответствующие точки поверхностей (границ), вследствие чего можно сказать, что произведение окружности на сферу представляет удвоение (§ 36) трехмерного кольца. Таким образом здесь оба меридиана диаграммы Хегора совпадают. Можно доказать, что пространствами линзы и топологическим произведением окружности на сферу исчерпываются все многообразия, у которых диаграммы Хегора могут быть представлены тором[34].

О диаграммах Хегора, изображаемых поверхностями высших родов, известно мало. Сферическое пространство додекаэдра имеет диаграмму Хегора рода 2. А. Пуанкаре натолкнулся на пространства, называемые теперь его именем, при рассмотрении диаграммы Хегора[33].

Диаграмму Хегора можно определить также для неориентируемых многообразий. Для этого нужно только ввести неориентируемые тела. Они получаются из шара попарным отождествлением неимеющих общих точек многоугольников поверхности шара, причем многоугольники по крайней мере одной пары должны находиться в соответствии второго рода. Граница такого тела представляет тогда неориентируемую поверхность, имеющую четную характеристику N, следовательно, также и четный род $k = 2k'$ (см. стр. 181; характеристика представляет четное число, потому что она равна одной и той же величине независимо от того, имеется ли у нас соответствие первого рода или второго). Что каждое неориентируемое замкнутое трехмерное многообразие можно разложить на два неориентируемых тела описанного типа доказывается так же, как и в случае ориентируемого многообразия.

Диаграмма Хегора позволяет свести вопрос о построении всех

** То есть полиэдрами, гомеоморфными обычному круговому диску.

трехмерных многообразий к двумерной проблеме, именно, к построению всех возможных диаграмм Хегора. Если бы, однако, такое построение даже можно было осуществить, то проблема гомеоморфизма в трехмерном случае все же не была бы еще решена, так как нужно было бы еще уметь ответить на вопрос, в каком случае две различных диаграммы Хегора дают одно и то же многообразие. В простейшем случае, когда диаграмма Хегора имеет род 1, мы можем указать все различные диаграммы. Однако вопрос об эквивалентности различных диаграмм, т. е. проблема гомеоморфизма для пространств линзы, не решена уже и в этом случае.

Другой способ подсчета всех трехмерных многообразий мог бы заключаться в построении всех многогранников со сторонами, поставленными во взаимное соответствие. Это также двумерная проблема, поддающаяся, однако, решению в столь же малой степени, как и подсчет диаграмм Хегора.

Из теории функций комплексного переменного известно, что каждую замкнутую ориентируемую поверхность можно представить как *разветвленную накрывающую* числовой сферы с конечным числом точек разветвления*. Аналогично этому каждое замкнутое ориентируемое трехмерное многообразие может быть представлено, как разветвленное накрытие трехмерной сферы[35]. Разветвление происходит здесь вдоль замкнутых линий (*узлов*), лежащих в трехмерной сфере. Однако и здесь подсчет и установление тождественности различных накрытий приводит к нерешенным вопросам. Может случиться, что одно и то же многообразие получается несколькими способами из совершенно различных узлов разветвления. Так, например, для сферического пространства додекаэдра известны три различных узла разветвления[33].

Упражнение. Если трехмерное многообразие может быть задано многогранником, имеющим h пар отнесенных друг другу сторон, то для этого многообразия существует диаграмма Хегора рода h. (В какой мере справедливо обратное предложение — неизвестно.)

§ 64. Ограниченные трехмерные многообразия

Ограниченное трехмерное многообразие есть ограниченный, однородный, конечный, связный полиэдр $\boldsymbol{K}^3$, допускающий симплициальное разбиение со следующими свойствами:

1. Окрестностный комплекс каждой внутренней точки $\boldsymbol{K}^3$ есть сфера.

2. Окрестностный комплекс граничной точки относительно $\boldsymbol{K}^3$ есть круг.

*См. напр. *H. Weyl*, Die Idee der Riemannschen Fläche.

Рассматривая группы Бетти в точках комплекса $\boldsymbol{K}^3$, легко показать, что тогда и каждое симплициальное разбиение комплекса $\boldsymbol{K}^3$ обладает этими свойствами.

Простейшими примерами ограниченных трехмерных многообразий являются шар, шаровой слой и трехмерное кольцо.

Ограниченное трехмерное многообразие можно было бы определить так же, как ограниченный однородный комплекс, удвоение которого представляет замкнутое трехмерное многообразие.

Граница $\boldsymbol{K}^2$ ограниченного многообразия $\boldsymbol{K}^3$ состоит из одной или нескольких замкнутых поверхностей.

В самом деле, так как окрестностный комплекс каждой граничной точки Q относительно $\boldsymbol{K}^3$ представляет круг, то окрестностный комплекс точки Q относительно $\boldsymbol{K}^2$ есть окружность. Поэтому если $\boldsymbol{K}^2$ распадается на изолированные подкомплексы $\boldsymbol{K}_1^2$, $\boldsymbol{K}_2^2$, ..., $\boldsymbol{K}_r^2$, то каждый из них представляет конечное связное двумерное многообразие, т. е. замкнутую поверхность (стр. 183).

Мы ставим теперь вопрос, каждая ли замкнутая поверхность может быть границей (или компонентой границы) трехмерного ограниченного многообразия и в какой мере свойства граничных поверхностей определяют свойства самого $\boldsymbol{K}^3$.

Если $\boldsymbol{K}^3$ ориентируемо, то, ориентируя когерентно все его трехмерные симплексы, мы получим трехмерный алгебраический комплекс, граница которого является двумерным циклом, лежащим на $\boldsymbol{K}^2$, причем каждый двумерный симплекс комплекса $\boldsymbol{K}^2$ входит в эту границу. Таким образом на граничных поверхностях $\boldsymbol{K}_1^2$, $\boldsymbol{K}_2^2$, ..., $\boldsymbol{K}_r^2$ должны существовать не равные нулю двумерные циклы, а это может быть лишь в случае, когда граничные поверхности ориентируемы. Поэтому мы получаем следующее предложение.

Теорема I. *Ориентируемое ограниченное трехмерное многообразие имеет только ориентируемые граничные поверхности.*

Обратное предложение, конечно, не имеет места, так как, удаляя, например, из какого-нибудь неориентируемого замкнутого многообразия трехмерный симплекс, мы получаем неориентируемое ограниченное многообразие, граница которого есть сфера.

Следствие. *Проективная плоскость $\boldsymbol{P}^2$ не может быть вложена в трехмерное евклидово пространство (дополненное несобственной точкой до трехмерной сферы $\boldsymbol{S}^3$). Точнее: $\boldsymbol{P}^2$ не может быть подкомплексом симплициального разбиения трехмерной сферы $\boldsymbol{S}^3$[336]. В самом деле, $\boldsymbol{P}^2$ есть однородный двумерный комплекс, не имеющий границы (в смысле границы однородного комплекса, см.* § 12). *Если $\boldsymbol{P}^2$ есть подкомплекс сферы $\boldsymbol{S}^3$, то $\boldsymbol{P}^2$ представляет двумерный цикл по модулю* 2 (§ 23). *Так как, однако, двумерное число Бетти по модулю* 2 *сферы $\boldsymbol{S}^3$ $q^2 = 0$, то каждый двумерный цикл по модулю* 2 *в сфере гомологичен нулю* (§ 24). *Поэтому должен существовать*

трехмерный подкомплекс $\boldsymbol{K}^3$, *имеющий своей границей* $\boldsymbol{P}^2$; $\boldsymbol{K}^3$ *представляет трехмерное ограниченное многообразие, так как точка* Q *комплекса* $\boldsymbol{K}^3$ *не лежащая на* $\boldsymbol{P}^2$, *имеет в качестве окрестностного комплекса относительно* $\boldsymbol{K}^3$ *двумерную сферу, а если* Q *лежит на* $\boldsymbol{P}^2$, *то ее окрестностный комплекс относительно* $\boldsymbol{S}^3$ *разбивается проективной плоскостью* $\boldsymbol{P}^2$ *на две ограниченных поверхности с общей граничной окружностью. Обе эти поверхности суть круги, так как вместе они должны составлять сферу. Так как* $\boldsymbol{K}^3$, *сверх того, ориентируем, ибо сфера* $\boldsymbol{S}^3$ *ориентируема, то мы тем самым приходим к противоречию с теоремой* I.

Составим удвоение $\boldsymbol{K}_2^3$ ограниченного многообразия $\boldsymbol{K}^3$. Окрестностный комплекс каждой граничной точки также при этом «удваивается». Но удвоение круга есть сфера. Поэтому окрестность каждой точки удвоения $\boldsymbol{K}_2^3$ гомеоморфна внутренности шара, т. е. $\boldsymbol{K}_2^3$, представляет замкнутое трехмерное многообразие. Но тогда его характеристика равна 0 (§ 59). Поэтому, если N означает характеристику комплекса $\boldsymbol{K}^3$, а $\overline{N}$ — характеристику границы $\boldsymbol{K}^2$, то

$$2N - \overline{N} = 0, \tag{1}$$

т. е. имеет место следующее предложение:

Теорема II. *Характеристика трехмерного многообразия и характеристика его границы определяются одна другой взаимно однозначно.*

Из формулы (1) следует далее еще одно предложение:

Теорема III. *Характеристика границы ограниченного трехмерного многообразия есть всегда четное число. Поэтому никакая неориентируемая поверхность нечетного рода, в частном случае проективная плоскость, не может образовать границу ограниченного трехмерного многообразия.*

Напротив, две проективных плоскости вместе могут являться границей ограниченного многообразия, как показывает пример топологического произведения проективной плоскости на отрезок.

Если $\boldsymbol{K}^3$ ориентируемо и род (число ручек) граничных поверхностей $\boldsymbol{K}_1^2$, $\boldsymbol{K}_2^2$, …, $\boldsymbol{K}_r^2$ равен соответственно h_1, h_2, …, h_r, то в силу § 38

$$\overline{N} = \sum_{i=1}^{r}(2 - 2h_i) = 2r - 2\sum_{i=1}^{r} h_i.$$

Далее, в выражении

$$N = p^0 - p^1 + p^2 - p^3$$

число Бетти $p^0 = 1$ и $p^3 = 0$, так как в $\boldsymbol{K}^3$ не существует никаких

трехмерных симплициальных циклов $\neq 0$. Подставляя эти выражения для N и $\overline{N}$ в (1), мы получим

$$p^1 = 1 + p^2 + \frac{1}{2}\left(2\sum_{i=1}^{r} h_i - 2r\right) = p^2 - (r-1) + \sum_{i=1}^{r} h_i.$$

Но p^2 по меньшей мере равно $r-1$, так как граничные поверхности $\boldsymbol{K}_1^2$, $\boldsymbol{K}_2^2$, ..., $\boldsymbol{K}_{r-1}^2$, если их когерентно ориентировать, представляют $r-1$ гомологично независимых двумерных циклов, так как они вместе ничего не ограничивают. Поэтому

$$p^1 \geqslant \sum_{i=1}^{r} h_i$$

и мы получаем теорему:

Теорема IV. *Одномерное число Бетти ориентируемого ограниченного трехмерного многообразия по меньшей мере равно общему числу ручек всех его граничных поверхностей. Указанная нижняя граница для p^1 достигается, например, у тела рода h* (§ 63).

Отсюда следует, что ограниченнее ориентируемое трехмерное многообразие, у которого каждый замкнутый путь гомологичен нулю, а тем более просто-связное многообразие такого типа, может иметь граничными поверхностями только сферы[37].

§ 65. Построение трехмерных многообразий при помощи узлов

Из многочисленных возможных способов[38] построения трехмерных многообразий мы выбираем в качестве примера принадлежащий Дэну (Dehn [2]) способ построения при помощи узлов. Этот способ может быть коротко описан так: мы просверливаем трехмерную сферу, получившуюся в результате присоединения к трехмерному евклидову пространству бесконечно удаленной точки, вдоль узла. При этом получается ограниченное многообразие — пространство, дополнительное к узлу. Замыкая это пространство трехмерным кольцом, т. е. отображая топологически друг на друга границу дополнительного пространства и границу трехмерного кольца (обе границы являются торами) и отождествляя соответствующие точки, мы и приходим к новому замкнутому многообразию.

Мы начнем с выяснения понятий «узел» и «просверливание». Пусть получающаяся из евклидова пространства трехмерная сфера $\boldsymbol{S}^3$ разбита на симплексы, и симплициальное разбиение ее снова обозначено через $\boldsymbol{S}^3$. *Узлом* $\boldsymbol{k}$ называется одномерный подкомплекс этого

симплициального разбиения, в котором (в подкомплексе) каждая вершина инцидентна в точности с двумя ребрами. Таким образом узел представляет топологическую окружность, т. е. топологический образ окружности. Однако не каждая топологическая окружность в S^3 представляет узел. Так, например, топологическая окружность, в которой сделано бесчисленное множество сходящихся к некоторой точке петель, т. е. «окружность, заузленная бесчисленное число раз» (см. рис. 113), не является узлом, так как такая окружность не может быть составлена из ребер симплициального разбиения сферы S^3. Иногда мы будем определять узел так же, как не имеющий двойных точек замкнутый путь пространства R^3, состоящий из конечного числа прямолинейных отрезков. Такой путь действительно является узлом в смысле данного выше определения, так как прямолинейные отрезки всегда могут быть приняты за ребра симплициального разбиения.

Два узла называются *эквивалентными*, если существует сохраняющее ориентацию топологическое отображение пространства на себя, переводящее один узел в другой[39].

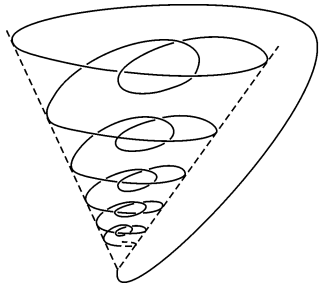


Рис. 113

Для того чтобы пояснить термин *просверливание*, мы предположим еще, что симплициальное разбиение сферы S^3 обладает следующим свойством: каждый i-мерный симплекс, вершины которого лежат на k, целиком принадлежит k. Тогда ни для какого треугольника симплициального разбиения все три вершины его не могут лежать на k и никакое ребро разбиения не может быть хордой узла k. Симплициальное разбиение, обладающее таким свойством, всегда может быть получено при помощи барицентрического подразделения.

Пусть теперь $P_1, P_2, \ldots, P_r$ — вершины узла k, записанные в том порядке, в каком они встречаются при обходе вдоль узла, а $St_1, St_2, \ldots, St_r$ — симплициальные звезды барицентрического подразделения $\overline{S}^3$ сферы S^3, имеющие вершины узла своими центрами. Из сделанного предположения относительно разбиения S^3 вытекает, что всегда только следующие непосредственно друг за другом звезды St_ρ и $St_{\rho+1}$ (в случае необходимости $\rho+1$ нужно редуцировать по модулю r) имеют общие точки, причем эти общие точки заполняют тогда элемент поверхности $E_{\rho,\rho+1}$*. Кроме того, элементы поверхности $E^{\rho,\rho+1}$ не имеют между собой общих точек. Отсюда следует, что

*Если рассматривать симплициальное разбиение S^3 как клеточное разбиение (§ 68), то трехмерные звезды St_ρ и элементы поверхности $E_{\rho,\rho+1}$ представляют клетки, дуальные вершинам и ребрам узла k.

подкомплекс, состоящий из симплициальных звезд $\boldsymbol{St}_1$, $\boldsymbol{St}_2$, ..., $\boldsymbol{St}_r$, представляет трехмерное кольцевое тело $\boldsymbol{V}_0$, имеющее своей средней линией узел $\boldsymbol{k}$. В самом деле, можно представлять себе, что $\boldsymbol{V}_0$ получается следующим образом: начиная от звезды $\boldsymbol{St}_1$, мы каждую следующую звезду присоединяем к предыдущей по элементу поверхности; при этом каждый раз получается шар, пока при последнем шаге мы не отождествим двух не имеющих общих точек элементов поверхности границы шара. Просверливание вдоль узла $\boldsymbol{k}$ состоит в том, что мы удаляем из $\boldsymbol{S}^3$ внутренние точки трехмерного кольцевого тела $\boldsymbol{V}_0$. Остающееся пространство $\boldsymbol{A}$ представляет трехмерное ограниченное многообразие, имеющее границей тор $\boldsymbol{T}$. Определим одномерную группу Бетти $\mathrm{B}_{\boldsymbol{A}}$ «*дополнительного пространства*» $\boldsymbol{A}$. Выберем на торе $\boldsymbol{T}$ меридиан m_0, например граничную линию элемента поверхности $\boldsymbol{E}_{r0}$ и параллель b_0, т. е. замкнутую линию, гомологичную в $\boldsymbol{V}_0$ ориентированной средней линии трехмерного кольца; b_0 определяется при этом только с точностью до меридиана m_0, взятого с произвольным коэффициентом. Применим теперь к обоим подкомплексам $\boldsymbol{V}_0$ и $\boldsymbol{A}$ сферы $\overline{\boldsymbol{S}}^3$ теорему II § 52. Одномерная группа Бетти трехмерного кольца $\boldsymbol{V}_0$ имеет образующие m_0 и b_0 и соотношение $m_0 \sim 0$*. Будем считать, что группа Бетти $\mathrm{B}_{\boldsymbol{A}}$ также представлена образующими и соотношениями, причем допустим, что m_0 и b_0 входят в число образующих. Тогда соотношения группы Бетти $\mathrm{B}_{\boldsymbol{S}}$ сферы $\boldsymbol{S}^3$ получаются, если мы присоединим к неизвестным нам соотношениям группы $\boldsymbol{V}_0$ соотношения группы Бетти, т. е. соотношение $m_0 \sim 0$ (мы не вводим здесь соотношений, определяющих коммутативность группы, так как они указываются уже аддитивной транскрипцией гомологий). Но $\mathrm{B}_{\boldsymbol{S}}$ состоит только из нулевого элемента. Это значит, что если в группе Бетти $\mathrm{B}_{\boldsymbol{A}}$ положить $m_0 \sim 0$, то все элементы этой группы становятся нулями. А это возможно лишь в том случае, когда $\mathrm{B}_{\boldsymbol{A}}$ есть порожденная элементом m_0 циклическая группа. *Эта циклическая группа* $\mathrm{B}_{\boldsymbol{A}}$ *есть свободная циклическая группа.* В самом деле, по теореме IV § 64 одномерное число Бетти пространства $\boldsymbol{A}$ по меньшей мере равно общему числу ручек граничных поверхностей, т. е. по меньшей мере равно 1, вследствие чего группа $\mathrm{B}_{\boldsymbol{A}}$ бесконечна**. В частности цикл b_0 гомологичен в $\boldsymbol{A}$ циклу xm_0, где x — однозначно определяемое целое число. Если $x \neq 0$, то мы можем заменить b_0 параллелью $b^* \sim b_0 - xm_0$; цикл b^* уже гомологичен в $\boldsymbol{A}$ нулю.

Топологически отображая граничный тор $\boldsymbol{T}'$ какого-нибудь трехмерного кольца $\boldsymbol{V}'$ на граничный тор $\boldsymbol{T}$ пространства $\boldsymbol{A}$ и отож-

*Образующими группы Бетти являются классы гомологий, определяемые циклами m_0 и b_0. Поэтому следовало бы собственно вместо m_0 писать соответствующий класс гомологий, а вместо знака $\sim$ знак, установленный для обозначения равенства групповых элементов.

**Другое простое доказательство этого предложения имеется на стр. 358.

дествляя соответствующие точки, мы получим замкнутое многообразие $\boldsymbol{M}^3$.* Образ m меридиана m' кольца $\boldsymbol{V}'$ на $\boldsymbol{T}$ есть замкнутый путь на $\boldsymbol{T}$ гомологичный, следовательно, линейной комбинации циклов m_0 и b_0^*:

$$m \sim \alpha m_0 + \beta b_0^* \text{ (на } \boldsymbol{T}). \tag{1}$$

Заметим, между прочим, что так как m не имеет двойных точек, то целые числа α и β не имеют общих множителей. Одномерная группа Бетти $\mathrm{B}_{\boldsymbol{M}}$ многообразия $\boldsymbol{M}^3$ получается из $\mathrm{B}_{\boldsymbol{A}}$ (опять по теореме IV § 64), если мы положим равным нулю меридиан m «замыкающего» трехмерного кольца $\boldsymbol{V}'$:

$$\alpha m_0 + \beta b_0^* \sim 0 \text{ (в } M^3).$$

Так как $b_0^* \sim 0$ в $\boldsymbol{A}$, то у нас остается только соотношение

$$\alpha m_0 \sim 0,$$

являющееся определяющим соотношением группы $\mathrm{B}_{\boldsymbol{M}}$. Таким образом, $\mathrm{B}_{\boldsymbol{M}}$ есть циклическая группа порядка α.

В частности, если в соотношении (1) $\alpha = 0$, мы получаем либо трехмерную сферу, либо пространство Пуанкаре. Однако и в этом случае замыкание дополнительного пространства может быть произведено бесчисленным числом способов, в зависимости от выбора числа β.

Поясним описанный процесс на примере *простейшего узла*. По § 52 фундаментальная группа пространства $\boldsymbol{A}$ определяется в этом случае соотношением

$$A^2 = B^3. \tag{2}$$

Выберем начальной точкой замкнутых путей точку тора T. В качестве меридиана m_0 можно выбрать путь

$$m_0 = BA^{-1}$$

(рис. 109), а в качестве параллели — путь

$$b_0 = A^2,$$

так как A^2 в обозначениях § 52 есть средняя линия кругового кольца $\boldsymbol{D}$. Для того чтобы найти в дополнительном пространстве гомологичную нулю параллель b_0^*, составим при помощи неопределенного числа x выражение

$$b_0^* = A^2(BA^{-1})^{-x} \sim A^{2+x}B^{-x}. \tag{3}$$

*Утверждение, что при таком отождествлении всегда получается комплекс, равносильно утверждению, что симплициальное разбиение тора $\boldsymbol{T}$, топологически перенесенное на $\boldsymbol{T}'$, может быть дополнено до симплициального разбиения всего $\boldsymbol{V}'$. Доказывать этого мы не будем, а предположим, что топологическое отображение тора $\boldsymbol{T}$ на $\boldsymbol{T}'$ просто обладает этим свойством.

Из этого выражения видно, что x надо положить равным -6, так как тогда по формуле (2)

$$b_0^* \sim A^{-4}B^6 \sim (A^{-2}B^3) \sim 0. \qquad (\text{в } \boldsymbol{A})$$

Чтобы получить пространство Пуанкаре, мы выбираем в качестве меридиана, замыкающего трехмерного кольца путь

$$m = m_0 b_0^{*\beta} = BA^{-1}\left[A^2(BA^{-1})^6\right]^\beta. \qquad (4)$$

Пусть m гомотопен нулю в замыкающем трехмерном кольце, следоват ельно, и в $\boldsymbol{M}^3$. Поэтому в $\boldsymbol{M}^3$ кроме (2) имеется еще соотношение

$$(BA^{-1})\left[A^2(BA^{-1})^6\right]^\beta = 1. \qquad (5)$$

Что этими соотношениями исчерпываются все соотношения фундаментальной группы многообразия $\boldsymbol{M}^3$, следует из теоремы I § 52. Простейший способ замыкания пространства $\boldsymbol{A}$ дает нам случай $\beta = 0$. Тогда $m = m_0$, и мы получим трехмерную сферу, служившую нам отправным пунктом. При $\beta = -1$ соотношения (2) и (5) фундаментальной группы многообразия $\boldsymbol{M}^3$ принимают вид

$$A^2 = B^3, \quad BA^{-1}(BA^{-1})^{-6}A^{-2} = 1, \quad \text{или} \quad A^2 = (BA^{-1})^{-5},$$

т. е.

$$A^2 = B^3 = (BA^{-1})^{-5}.$$

Вводя вместо A новую образующую C, определяемую уравнением $A = CB$, мы получим

$$(CB)^2 = B^3 = C^5.$$

А это есть как раз (с точностью до обозначений) соотношения фундаментальной группы сферического пространства додекаэдра (§ 62). Доказательство того, что совпадают не только фундаментальные группы, а также и сами пространства, требует вспомогательных средств, выходящих за рамки этой книги[33].

Для других значений числа β получаются также пространства Пуанкаре, причем только негомеоморфные, так как можно показать, что фундаментальные группы их различны.

Глава X
n-мерные многообразия

Благодаря своей однородной структуре (все точки имеют гомеоморфные друг другу окрестности) многообразия играют среди полиэдров особо важную роль. В предыдущих главах мы пытались дать исчерпывающую классификацию двумерных и трехмерных многообразий. В двумерном случае нам это удалось. Однако уже в трехмерном случае мы оказались в состоянии привести лишь более или менее систематизированные примеры трехмерных многообразий. Полная классификация n-мерных многообразий представляет в настоящее время проблему, не дающую никаких надежд на решение. К тому же проблема гомеоморфизма в случае более чем трех измерений отступает на задний план, — большее значение имеют общие свойства многомерных многообразии. Все эти свойства основываются на возможности дуальных разбиений многообразия. Мы рассмотрим здесь из таких свойств закон двойственности Пуанкаре, а также теорию индексов пересечения и коэффициентов зацепления.

В случае более трех измерений мы будем изучать не просто многообразия, а так называемые n-многообразия (гомологические многообразия), представляющие обобщение обычных. Мы начнем со вспомогательных понятий, которые подготовят нас к определению n-многообразий и к введению дуальных разбиений.

§ 66. Звездный комплекс

Звездный комплекс есть по определению конечный симплициальный комплекс, разбитый на определенные свои подкомплексы, а именно на звезды*, притом разбитый таким образом, что край каждой i-мерной звезды нацело слагается из некоторых $(i-1)$-мерных звезд.

Построение звездных комплексов происходит индуктивно следующим образом:

нульмерный звездный комплекс $\boldsymbol{K}_a^0$ состоит из конечного числа вершин

$$\boldsymbol{a}_1^0,\ \boldsymbol{a}_2^0,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_{\alpha^0}^0,$$

называющихся нульмерными звездами комплекса $\boldsymbol{K}_a^0$. Одномерный звездный комплекс $\boldsymbol{K}_a^1$ получается из $\boldsymbol{K}_a^0$, если мы дополним $\boldsymbol{K}_a^0$ конечным числом одномерных звезд

$$\boldsymbol{a}_1^1,\ \boldsymbol{a}_2^1,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_{\alpha^1}^1,$$

*Определение звезды (точнее: *симплициальной звезды*) см. в § 14 (стр.73–74). Там же дано определение *центра* и *края* звезды.

причем так, что край каждой $\boldsymbol{a}_\nu^1$ состоит из некоторых нульмерных звезд комплекса $\boldsymbol{K}_a^0$. Если вообще $\boldsymbol{K}_a^{n-1}$ представляет $(n-1)$-мерный звездный комплекс со звездами

$$\boldsymbol{a}_1^k,\ \boldsymbol{a}_2^k,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_{\alpha^k}^k$$

размерностей $k\quad (k=0,1,\ldots,n-1)$, то n-мерный звездный комплекс $\boldsymbol{K}_a^n$, получается, если мы дополним комплекс $\boldsymbol{K}_a^{n-1}$ конечным числом n-мерных звезд $\boldsymbol{a}_1^n$, $\boldsymbol{a}_2^n$, $\ldots$, $\boldsymbol{a}_{al^n}^n$, при этом край каждой звезды $\boldsymbol{a}_\nu^n$ должен состоять из $(n-1)$-мерных звезд комплекса $\boldsymbol{K}_a^{n-1}$.

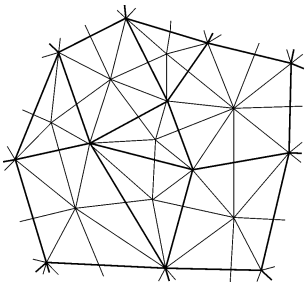


Рис. 114

Мы будем называть симплициальный комплекс, состоящий из всех симплексов звезд $\boldsymbol{K}_a^n$, *барицентрическим подразделением* комплекса $\boldsymbol{K}_a^n$ и будем обозначать его через $\overset{*}{\boldsymbol{K}}{}_a^n$. На рис. 114 показана часть двумерного звездного комплекса. Двумерными звездами его являются многоугольники, границы которых обозначены жирными линиями.

Пример. Звездный комплекс можно получить из любого конечного полиэдра $\boldsymbol{K}^n$. Для этого следует разбить его сначала каким-нибудь образом на симплексы, а получившийся симплициальный комплекс подразделить затем барицентрически; k-мерными звездами являются тогда барицентрически подразделенные k-мерные симплексы комплекса $\boldsymbol{K}^n$.

Введем следующее определение: $(n-1)$-мерная звезда $\boldsymbol{a}_\iota^{k-1}$ и k-мерная звезда $\boldsymbol{a}_\varkappa^k$ комплекса $\boldsymbol{K}_a^n$ называются *непосредственно инцидентными*, если $\boldsymbol{a}_\iota^{n-1}$ лежит на краю $\boldsymbol{a}_\varkappa^k$. Если же между двумя звездами $\boldsymbol{a}^i$ и $\boldsymbol{a}^k\ \ i<k$ существует последовательность звезд возрастающих размерностей $\boldsymbol{a}^i$, $\boldsymbol{a}^{i+1}$, $\ldots$, $\boldsymbol{a}^{k-1}$, $\boldsymbol{a}^k$, каждая из которых непосредственно инцидентна со следующей, то мы будем называть $\boldsymbol{a}^i$ и $\boldsymbol{a}^k$ просто *инцидентными*.

Из определения звездного комплекса следует, что *числа* α^0, α^1, $\ldots$, α^n, *звезд размерностей от* 0 *до* n, *а также непосредственные инциденции этих звезд могут быть заданы произвольно, если только каждая* k*-мерная* $(k>0)$ *звезда инцидентна по крайней мере с одной* $(k-1)$*-мерной звездой.* Пусть $P_\varkappa^k$ есть центр* звезды $\boldsymbol{a}_\varkappa^k$. Легко видеть, что звездный комплекс можно расположить прямолинейно в $(\alpha^0+\alpha^1+\ldots+\alpha^n)$-мерном евклидовом пространстве. Это можно сделать при

*Верхний индекс при вершине указывает здесь, как и в дальнейшем размерность звезды, центром которой является эта вершина.

помощи следующего построения: мы выбираем в этом евклидовом пространстве $\alpha^0+\alpha^1+\ldots+\alpha^n$ линейно независимых точек

$$P_1^0,\ P_2^0,\ \ldots,\ P_{\alpha^0},\ \ldots,\ P_1^n,\ P_2^n,\ \ldots,\ P_{\alpha^n}^n$$

и из центров проекций $P_1^1,\ P_2^1,\ \ldots,\ P_{\alpha^1}^1$ проектируем те из точек $P_1^0,\ P_2^0,\ \ldots,\ P_{\alpha^0}^0$, которые должны лежать на краях звезд $\boldsymbol{a}_1^1,\ \boldsymbol{a}_2^1,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_{\alpha^1}^1$, далее производим аналогичное проектирование из точек $P_1^2,\ P_2^2,\ \ldots,\ P_{\alpha^2}^2$ и т. д.

Мы не требовали выше, чтобы каждая k-мерная звезда была инцидентна по крайней мере с одной $(k+1)$-мерной. Если, однако, это имеет место, то звездный комплекс называется однородным. Очевидно, звездный комплекс $\boldsymbol{K}_a^n$ является однородным в том и только в том случае, если его барицентрическое подразделение $\overset{*}{\boldsymbol{K}}{}_a^n$ есть однородный симплициальный комплекс. Напротив, k-мерная звезда $\boldsymbol{a}^k$ комплекса $\boldsymbol{K}_a^n$ при любых обстоятельствах является однородным k-мерным подкомплексом барицентрического подразделения $\overset{*}{\boldsymbol{K}}{}_a^n$, т. е. каждый i-мерный симплекс $(i<k)$ звезды $\boldsymbol{a}^k$ служит стороной по крайней мере одного k-мерного симплекса.

Мы хотим теперь выразить свойства n-мерного звездного комплекса и его барицентрического подразделения при помощи инциденций, связывающих звезды комплекса.

Теорема I. *Пусть $\boldsymbol{a}^0,\ \boldsymbol{a}^1,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}^k$ $(k\geqslant 0)$ — последовательность звезд, каждая из которых непосредственно инцидентна со следующей. Тогда центры этих звезд $P^0,\ P^1,\ \ldots,\ P^k$ являются вершинами k-мерного симплекса, принадлежащего звезде $\boldsymbol{a}^k$. Обратно, вершины каждого k-мерного симплекса можно рассматривать как центры такой последовательности звезд.*

Доказательство. Теорема справедлива при $k=0$. Допустим, что она уже доказана для размерности $k-1$. Докажем, что она справедлива тогда и для размерности k. В самом деле, если $\boldsymbol{a}^0,\ \boldsymbol{a}^1,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}^{k-1}$ представляет ряд непосредственно инцидентных звезд, то их центры $P^0,\ P^1,\ \ldots,\ P^{k-1}$ являются по предположению вершинами принадлежащего звезде $\boldsymbol{a}^{k-1}$ симплекса. В силу инцидентности звезд $\boldsymbol{a}^{k-1}$ и $\boldsymbol{a}^k$ симплекс $(P^0P^1\ldots P^{k-1})$ лежит на границе звезды $\boldsymbol{a}^k$. Поэтому вершины $P^0,\ P^1,\ \ldots,\ P^{k-1}$ определяют принадлежащий звезде $\boldsymbol{a}^k$ симплекс.

Если теперь, обратно, $\boldsymbol{E}^k$ представляет произвольный k-мерный симплекс звезды $\boldsymbol{a}^k$, то точка P^k является его вершиной, а противоположная ей сторона $\boldsymbol{E}^{k-1}$ лежит на краю звезды $\boldsymbol{a}^k$ и входит поэтому в инцидентную с $\boldsymbol{a}^k$ звезду $\boldsymbol{a}^{k-1}$. В силу индукционного предположения вершины симплекса $\boldsymbol{E}^{k-1}$ являются центрами последовательно инцидентных звезд $\boldsymbol{a}^0,\ \boldsymbol{a}^1,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}^{k-1}$. Но тогда ряд звезд

$\boldsymbol{a}^0$, $\boldsymbol{a}^1$, …, $\boldsymbol{a}^{k-1}$, $\boldsymbol{a}^k$, центры которых являются вершинами симплекса $\boldsymbol{E}^k$, представляет ряд последовательно инцидентных звезд.

Следующая теорема является обобщением теоремы I.

Теорема II. *Пусть* $\boldsymbol{a}^i$, $\boldsymbol{a}^k$, …, $\boldsymbol{a}^l$ $(i < k < \ldots < l)$ *представляет ряд звезд возрастающей размерности, причем каждые две звезды этого ряда, следующие одна за другой, инцидентны (но не обязательно непосредственно) друг с другом. Тогда центры этих звезд* P^i, P^k, …, P^l *являются вершинами некоторого симплекса комплекса* $\overset{*}{\boldsymbol{K}}{}^n_a$, *причем таким путем мы можем получить каждый симплекс комплекса* $\overset{*}{\boldsymbol{K}}{}^n_a$.

Доказательство. Вставляя в ряд $\boldsymbol{a}^i$, $\boldsymbol{a}^k$, …, $\boldsymbol{a}^l$ промежуточные звезды, мы можем дополнить этот ряд до ряда звезд $\boldsymbol{a}^0$, $\boldsymbol{a}^1$, …, $\boldsymbol{a}^{l-1}$, $\boldsymbol{a}^l$, в котором каждые две звезды, следующие одна за другой, *непосредственно* инцидентны. По теореме I центры этих звезд являются вершинами принадлежащего звезде $\boldsymbol{a}^l$ симплекса. Но тогда центры звезд первоначального ряда определяют некоторую сторону этого симплекса.

Пусть теперь, обратно, $\boldsymbol{E}^j$ представляет произвольный симплекс комплекса $\overset{*}{\boldsymbol{K}}{}^n_a$. Рассмотрим подкомплексы $\boldsymbol{K}^0_a$, $\boldsymbol{K}^1_a$, …, $\boldsymbol{K}^n_a$, образованные соответственно сначала всеми нульмерными звездами, затем всеми нульмерными и одномерными и т. д., наконец, всеми звездами вообще. Пусть $\boldsymbol{K}^h_a$ — первый из этих комплексов, содержащий симплекс $\boldsymbol{E}^j$. Тогда одна вершина симплекса $\boldsymbol{E}^j$ является центром h-мерной звезды $\boldsymbol{a}^h$, в то время как сторона симплекса $\boldsymbol{E}^j$, противоположная этой вершине, принадлежит краю звезды $\boldsymbol{a}^h$. $\boldsymbol{E}^j$ представляет сторону некоторого симплекса $\boldsymbol{E}^h$ звезды $\boldsymbol{a}^h$ (или же $\boldsymbol{E}^j = \boldsymbol{E}^h$). Из теоремы I следует, что вершины этого симплекса являются центрами последовательно инцидентных звезд. Поэтому и вершины симплекса $\boldsymbol{E}^j$ являются центрами (посредственно или непосредственно) инцидентных звезд.

Если мы знаем, сколько звезд каждой размерности входит в $\boldsymbol{K}^n_a$ и какие звезды непосредственно инцидентны, то мы знаем вместе с тем и все посредственные инциденции. По теореме II мы можем поэтому построить симплексы комплекса $\overset{*}{\boldsymbol{K}}{}^n_a$, а на основании теоремы I установить, из каких симплексов комплекса $\overset{*}{\boldsymbol{K}}{}^n_a$ составлены звезды комплекса $\boldsymbol{K}^n_a$. Если между звездами двух звездных комплексов $\boldsymbol{K}^n_a$ и $'\boldsymbol{K}^n_a$ установлено взаимно однозначное соответствие, при котором непосредственно инцидентные звезды комплекса $\boldsymbol{K}^n_a$ соответствуют непосредственно инцидентным звездам комплекса $'\boldsymbol{K}^n_a$ и обратно, то тем самым определяется одновременно взаимно однозначное и сохраняющее инциденции соответствие между барицентрическими подразделениями $\overset{*}{\boldsymbol{K}}{}^n_a$ и $'\overset{*}{\boldsymbol{K}}{}^n_a$ этих комплексов такое, что при этом симплексы каждой звезды

комплекса $\boldsymbol{K}_a^n$ переходят в симплексы соответствующей звезды комплекса $'\boldsymbol{K}_a^n$. Мы будем называть два таких звездных комплекса *изоморфными.*

Из теоремы II вытекает, кроме того, следующее предложение:

Теорема III. *Пусть*

$$P^i,\ P^k,\ \ldots,\ P^l \quad (i < k < \ldots < l)$$

вершины одного, а

$$P^l,\ P^m,\ \ldots,\ P^r \quad (l < m < \ldots < r)$$

вершины другого симплекса комплекса $\overset{*}{\boldsymbol{K}}{}_a^n$. *Тогда точки*

$$P^i,\ P^k,\ \ldots,\ P^l,\ P^m,\ \ldots,\ P^r$$

также являются вершинами симплекса этого комплекса.

Это видно из того, что звезды $\boldsymbol{a}^i,\ \boldsymbol{a}^k,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}^k,\ \boldsymbol{a}^m,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}^r$ последовательно инцидентны (хотя может быть и не непосредственно).

Мы займемся теперь специально *однородными* звездными комплексами $\boldsymbol{K}_a^n$. По отношению к таким комплексам имеет место важная теорема о существовании дуальных звездных комплексов, ради которых мы вообще ввели понятие звездного комплекса.

Теорема IV. *Для каждого однородного звездного комплекса* $\boldsymbol{K}_a^n$ *существует определяемый с точностью до изоморфизма дуальный звездный комплекс* $\boldsymbol{K}_b^n$. *Этот комплекс характеризуется следующими свойствами: каждой* k*-мерной звезде* $\boldsymbol{a}^k$ *комплекса* $\boldsymbol{K}_a^n$ *соответствует взаимно однозначно «дуальная»* $(n-1)$*-мерная звезда* $\boldsymbol{b}^{n-k}$ *комплекса* $\boldsymbol{K}_b^n$, *причем инцидентным звездам первого комплекса соответствуют инцидентные звезды второго.*

Доказательство. Количество звезд каждой размерности звездного комплекса $\boldsymbol{K}_b^n$, существование которого мы хотим доказать, точно так же, как инциденции этого комплекса, определяются условием дуальности. Таким образом, для того чтобы мы могли построить такой комплекс, необходимо еще, чтобы с каждой k-мерной звездой была инцидентна по крайней мере одна $(k-1)$-мерная. А это условие выполняется, так как в силу однородности комплекса $\boldsymbol{K}_a^n$ каждая его $(n-k)$-мерная звезда инцидентна по крайней мере с одной $(n-k+1)$-мерной. На рисунке 115 границы двумерных звезд исходного звездного комплекса (того же, что и на рис. 114) обозначены жирными линиями, а границы двумерных звезд дуального комплекса — пунктирными.

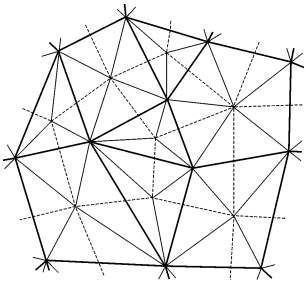


Рис. 115

Если построить дуальный звездный комплекс для $\boldsymbol{K}_b^n$, то мы получим $\boldsymbol{K}_a^n$. Таким образом $\boldsymbol{K}_a^n$ и $\boldsymbol{K}_b^n$ равноправны по отношению друг к другу. Так как звезды $\boldsymbol{a}_\varkappa^k$ комплекса $\boldsymbol{K}_a^n$ и дуальные звезды $\boldsymbol{b}_\varkappa^{n-k}$ комплекса $\boldsymbol{K}_b^n$ связаны взаимно однозначным соответствием, то таким же соответствием связаны и их центры $P_\varkappa^k$ и $Q_\varkappa^{n-k}$, т. е. вершины барицентрических подразделений $\overset{*}{\boldsymbol{K}}{}_a^n$ и $\overset{*}{\boldsymbol{K}}{}_b^n$. Пусть $(P^iP^k\dots P^l)$ $(i<k<\dots<l)$ представляет симплекс комплекса $\overset{*}{\boldsymbol{K}}{}_a^n$. По теореме II соответствующие звезды $\boldsymbol{a}^i$, $\boldsymbol{a}^k$, …, $\boldsymbol{a}^l$ последовательно инцидентны. Но тогда и дуальные звезды $\boldsymbol{b}^{n-i}$, $\boldsymbol{b}^{n-k}$, …, $\boldsymbol{b}^{n-l}$ также последовательно инцидентны. Поэтому, опять в силу теоремы II, центры этих звезд Q^{n-i}, Q^{n-k}, …, Q^{n-l} являются вершинами некоторого симплекса комплекса $\overset{*}{\boldsymbol{K}}{}_b^n$. Отсюда следует, что при отображении $P_\varkappa^k \leftrightarrow Q_\varkappa^{n-k}$ симплексы комплекса $\overset{*}{\boldsymbol{K}}{}_a^n$ переходят в симплексы комплекса $\overset{*}{\boldsymbol{K}}{}_b^n$, и обратно. Поэтому *дуальные звездные комплексы* $\boldsymbol{K}_a^n$ *и* $\boldsymbol{K}_b^n$ *можно рассматривать как один и тот же симплициальный комплекс* $\overset{*}{\boldsymbol{K}}{}^n = \overset{*}{\boldsymbol{K}}{}_a^n = \overset{*}{\boldsymbol{K}}{}_b^n$, *симплексы которого двумя различными способами объединены в звезды; так мы и будем поступать в дальнейшем.*

Условимся записывать вершины каждого симплекса комплекса $\overset{*}{\boldsymbol{K}}{}^n$ всегда в порядке возрастания их верхних индексов. По теореме II все эти индексы различны, т. е. вершины симплекса являются центрами звезд различных размерностей. Каждый симплекс комплекса $\overset{*}{\boldsymbol{K}}{}^n$ будет иметь тогда определенную первую и определенную последнюю вершину. Так как по теореме I каждый k-мерный симплекс комплекса $\overset{*}{\boldsymbol{K}}{}^n$, принадлежащий k-мерной звезде $\boldsymbol{a}^k$ звездного комплекса $\overset{*}{\boldsymbol{K}}{}_a^n$, может быть задан рядом, состоящим из $k+1$ последовательно инцидентных звезд $\boldsymbol{a}^0$, $\boldsymbol{a}^1$, …, $\boldsymbol{a}^k$, а симплекс дуальной звезды $\boldsymbol{b}^{n-k}$ — соответственно рядом звезд $\boldsymbol{a}^k$, $\boldsymbol{a}^{k+1}$, …, $\boldsymbol{a}^n$, то положение звезды по отношению к ее дуальной определяется следующей теоремой:

Теорема V. *Звезда* $\boldsymbol{a}^k$ *состоит из совокупности* k*-мерных симплексов, имеющих центр* P_k *этой звезды своей последней вершиной. Дуальная же с* $\boldsymbol{a}^k$ *звезда* $\boldsymbol{b}^{n-k}$ *составляется из* $(n-k)$*-мерных симплексов, имеющих точку* P^k *своей первой вершиной.*

Из теоремы V следует, что две дуальные звезды имеют общей точ-

кой только центр, в то время как две не дуальные звезды $\boldsymbol{a}^k$ и $\boldsymbol{b}^{n-k}$ (дополнительных размерностей) вообще не имеют общих точек. Обобщением этого является следующее предложение:

Теорема VI. *Пересечение звезд $\boldsymbol{a}^k$ и $\boldsymbol{b}^{n-i}$, имеющих центрами P^k и P^i, состоит из совокупности $(k-i)$-мерных симплексов комплекса $\overset{*}{\boldsymbol{K}}{}^n$, имеющих P^i первой вершиной, а P^k — последней.* Таким образом эти две звезды имеют не пустое пересечение лишь в том случае, если $i \leqslant k$ и если центр звезды $\boldsymbol{b}^{n-i}$ принадлежит звезде $\boldsymbol{a}^k$.

Доказательство. α) Рассмотрим $(k-i)$-мерный симплекс $(P^iP^{i+1}\dots P^{k-1}P^k)$. Симплекс этот является стороной некоторого n-мерного симплекса $(P^0\dots P^i\dots P^k\dots P^n)$. По теореме V $(P^0\dots P^k)$ принадлежит звезде $\boldsymbol{a}^k$, а $(P^i\dots P^n)$ — звезде $\boldsymbol{b}^{n-i}$. Но тогда общая сторона этих симплексов $(P^iP^{i+1}\dots P^{k-1}P^k)$ принадлежит пересечению симплексов $\boldsymbol{a}^k$ и $\boldsymbol{b}^{n-i}$.

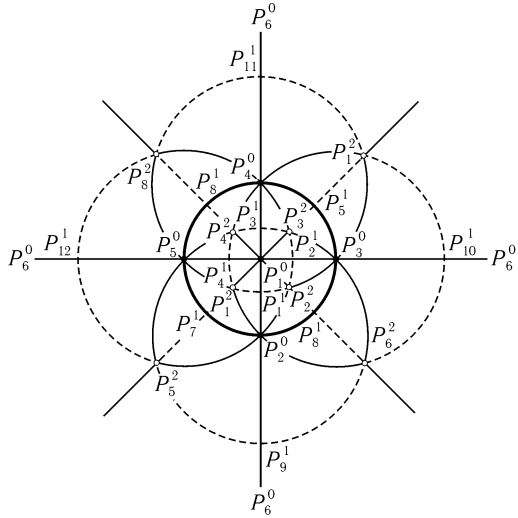


Рис. 116

β) Мы должны показать теперь, что каждый симплекс пересечения звезд $\boldsymbol{a}^k$ и $\boldsymbol{b}^{n-i}$ является стороной $(k-i)$-мерного симплекса $(P^i\dots P^k)$. Пусть $\boldsymbol{E} = (P^r\dots P^s)$ представляет такой общий симплекс звезд $\boldsymbol{a}^k$ и $\boldsymbol{b}^{n-i}$ (размерность его может быть и меньше, чем $s-r$). Тогда существует $(s-r)$-мерный симплекс $\boldsymbol{E}^{s-r}$, имеющий P^r своей первой, а P^s — последней вершиной. Это следует из того, что $\boldsymbol{E}$ является да-

же стороной n-мерного симплекса. Далее, так как P^s принадлежит $\boldsymbol{a}^k$, существует симплекс $\boldsymbol{E}^{k-s}$, имеющий P^s своей первой, а P^k — последней вершиной, и симплекс $\boldsymbol{E}^{r-i}$, имеющий P^i своей первой и P^r — последней вершиной (так как P^r принадлежит $\boldsymbol{b}^{n-i}$). По теореме IV три симплекса $\boldsymbol{E}^{r-i}$, $\boldsymbol{E}^{s-r}$, $\boldsymbol{E}^{k-s}$ являются сторонами $(k-i)$-мерного симплекса, имеющего P^i первой, а P^k — последней вершиной.

Для иллюстрации введенных понятий рассмотрим в качестве симплициального комплекса $\boldsymbol{K}_a^2$ *октаэдр*. Барицентрическое подразделение восьми его треугольников дает нам звездный комплекс $\overset{*}{\boldsymbol{K}}{}^2$, составленный из восьми двумерных звезд с центрами $P_1^2, P_2^2, \ldots, P_8^2$. Точки $P_1^1, P_2^1, \ldots, P_{12}^1$ — середины ребер октаэдра — представляют центры двенадцати одномерных звезд комплекса, в то время, как вершины октаэдра играют роль шести нульмерных звезд. Звезда, дуальная к нульмерной звезде P_1^0, составляется из восьми треугольников, имеющих P_1^0 первой вершиной. Граница этой дуальной звезды состоит из четырех одномерных звезд, т. е. представляет четырехугольник дуального звездного комплекса $\boldsymbol{K}_b^2$ (куба, обозначенного на рис. 116 пунктирными линиями). Рис. 116 изображает разбиение октаэдра и дуальное разбиение куба в стереографической проекции.

§ 67. Клеточный комплекс

k-мерная звезда называется *k-мерной клеткой* в том случае, если ее край имеет такие же группы Бетти, как $(k-1)$-мерная сфера, и если при $k > 1$ он представляет замкнутое псевдомногообразие. Нульмерная клетка состоит из одной точки, одномерная — из двух отрезков, инцидентных с одной точкой. Граница двумерной клетки представляет окружность, а сама клетка — круг. Для трех измерений граница есть сфера, а трехмерная клетка — шар (см. упр. 1 параграфа 39). Четырехмерных клеток и клеток высшего числа измерений мы уже не в состоянии перечислить. Существуют клетки, негомеоморфные k-мерному шару, — в качестве примера можно указать четырехмерную симплициальную звезду, границей которой является трехмерное пространство Пуанкаре.

Если все звезды звездного комплекса представляют клетки, то мы будем называть такой комплекс *клеточным*.

Всякий барицентрически подразделенный k-мерный симплекс представляет k-мерную клетку. Поэтому любой конечный симплициальный комплекс превращается после барицентрического подразделения в клеточный комплекс. Клетки можно рассматривать, следовательно, как обобщения симплексов: они играют в клеточном комплексе такую же роль, как симплексы в симплициальном. В ближайших параграфах, при изучении многообразии, мы увидим, почему нельзя ограничиться рассмотрением симплексов.

При $k > 1$ край k-мерной клетки $\boldsymbol{a}^k$ представляет $(k-1)$-мерное

ориентируемое многообразие. В самом деле, $(k-1)$-мерная группа Бетти этого края совпадает с соответствующей группой Бетти $(k-1)$-мерной сферы, т. е. есть свободная циклическая группа. А из § 24 следует, что это условие эквивалентно с ориентируемостью. Но тогда, по доказанному на стр. 121, сама клетка $\boldsymbol{a}^k$ есть ориентируемое ограниченное псевдомногообразие. Поэтому k-мерные симплексы клетки $\boldsymbol{a}^k$ могут быть когерентно ориентированы (двумя противоположными способами). Клетка $\boldsymbol{a}^k$ превращается при этом в *ориентированную k-мерную клетку*, которую мы будем обозначать через a^k. Аналогичная когерентная ориентация двух одномерных симплексов, составляющих одномерную клетку, возможна и при $k=1$. Нульмерные клетки ориентируются как нульмерные симплексы (стр. 59). Таким образом ориентированная k-мерная клетка ($k \geqslant 0$) представляет множество ориентированных симплексов, которое можно рассматривать, считая что каждый симплекс входит туда с коэффициентом 1, как k-мерный алгебраический комплекс. Граница ориентированной клетки a^k (в смысле границы алгебраического комплекса) представляет когерентно ориентированный край звезды $\boldsymbol{a}^k$ (стр. 121). Таким образом ориентация k-мерной клетки дает нам ориентацию всех $(k-1)$-мерных клеток, составляющих границу этой k-мерной клетки; эта ориентация называется ориентацией, *индуцированной* ориентацией k-мерной клеткой.

Снабдим теперь каждую k-мерную клетку клеточного комплекса $\boldsymbol{K}^n$ произвольной из двух возможных ориентаций и зафиксируем эти ориентации. Обозначим ориентированные таким образом клетки через $a^k_\varkappa$ ($k=0, 1, \ldots, n$; $\varkappa = 1, 2, \ldots, \alpha^k$). Так как никакие две k-мерные клетки не имеют общих k-мерных симплексов, то ориентированные k-мерные клетки представляют линейно независимые алгебраические комплексы.

Под *k-мерным клеточным алгебраическим комплексом* клеточного комплекса мы понимаем выражение вида

$$q_1 a^k_1 + q_2 a^k_2 + \ldots + q_{\alpha^k} a^k_{\alpha^k}, \tag{1}$$

где клетки $a^k_\varkappa$ рассматриваются как симплициальные алгебраические комплексы барицентрического подразделения $\overset{*}{\boldsymbol{K}}{}^n$ комплекса $\boldsymbol{K}^n$. Клеточный алгебраический комплекс представляет собой, таким образом, симплициальный алгебраический комплекс специального вида, именно такой, симплексы которого, в соответствии с (1), могут быть объединены в клетки. Если такое объединение возможно, то оно возможно только единственным способом, так как, вследствие линейной независимости k-мерных клеток, коэффициенты $q_1, q_2, \ldots, q_{\alpha^k}$ однозначно определяются алгебраическим комплексом.

Клеточный алгебраический комплекс называется циклом (в частности *циклом, гомологичным нулю*), когда соответствующий симплициальный комплекс представляет цикл (цикл, гомологичный нулю).

Граница клеточного алгебраического комплекса также является клеточным алгебраическим комплексом, так как таким комплексом является граница каждой отдельной клетки

$$\dot{a}_\lambda^{k+1} = \sum_{\varkappa=1}^{\alpha^k} \varepsilon_{\varkappa\lambda}^k a_\varkappa^k \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, \alpha^{k+1}). \tag{2}$$

Здесь $\varepsilon_{\varkappa\lambda}^k = +1$, когда ориентация клетки $a_\varkappa^k$ совпадает с ориентацией, индуцированной клеткой a_λ^{k+1}. Если эти ориентации противоположны, то $\varepsilon_{\varkappa\lambda}^k = -1$. Наконец, $\varepsilon_{\varkappa\lambda}^k = 0$ в том случае, когда $a_\varkappa^k$ и a_λ^{k+1} вообще не инцидентны.

Для каждого симплициального k-мерного цикла клеточного комплекса $\boldsymbol{K}^n$ существует гомологичный с ним клеточный цикл. Мы докажем более общее предложение:

Теорема I. *Пусть U^k есть симплициальный алгебраический подкомплекс клеточного комплекса, т. е. алгебраический подкомплекс того симплициального комплекса, из симплексов которого складываются клетки клеточного комплекса $\boldsymbol{K}^n$, а его граница $\dot{U}^k$ представляет $(k-1)$-мерный клеточный алгебраический комплекс* (который может быть также нулевым комплексом). Тогда существует клеточный комплекс, гомологичный U^k.*

Доказательство. Пусть сначала $k = 0$ и E^0 представляет нульмерный симплекс комплекса U^0. Тогда либо E^0 сам является нульмерной клеткой, либо он является центром некоторой l-мерной клетки, на краю которой имеется, очевидно, нульмерная клетка, гомологичная E^0. Таким образом каждый нульмерный симплекс гомологичен нульмерной клетке, вследствие чего каждый нульмерный алгебраический комплекс гомологичен нульмерному клеточному алгебраическому комплексу.

Пусть теперь $k > 0$. Рассмотрим алгебраический подкомплекс V^k, состоящий из всех k-мерных симплексов комплекса U^k, инцидентных с центром P^n n-мерной клетки $\boldsymbol{a}^n$. Так как $\dot{U}^k$ состоит целиком из $(k-1)$-мерных клеток, то никакой граничный симплекс комплекса U^k, а следовательно, и никакой граничный симплекс подкомплекса V^k, не может быть инцидентен с P^n. Поэтому $\dot{V}^k$ лежит на краю звезды $\boldsymbol{a}^n$. Рассмотрим два случая:

а) $k = n$. V^n представляет тогда n-мерный алгебраический комплекс, составленный из симплексов клетки $\boldsymbol{a}^n$, граница которого лежит на краю звезды $\boldsymbol{a}^n$. Но тогда, по доказанному на стр. 120, V^n

* При $k = 0$ условие, чтобы граница была клеточным алгебраическим комплексом естественно отпадает.

представляет ориентированную звезду $\boldsymbol{a}^n$, взятую с некоторым коэффициентом. Таким образом U^n оказывается составленным целиком из n-мерных клеток.

b) $0 < k < n$. $\dot{V}^k$ является тогда $(k-1)$-мерным циклом края звезды $\boldsymbol{a}^n$, при этом гомологичным на нем нулю, так как край $(n-1)$-мерной звезды имеет такие же группы Бетти, как $(n-1)$-мерная сфера. (Это имеет место и при $k = 1$, ввиду того что алгебраическое значение, т. е. сумма коэффициентов нульмерного цикла $\dot{V}^k$ равна нулю, как бывает всегда у границы одномерного алгебраического комплекса.) Но это значит, что на краю звезды $\boldsymbol{a}^n$ существует алгебраический комплекс $'V^k$, граница которого равна границе подкомплекса V^k. Разность $V^k - {}'V^k$ представляет тогда цикл на $\boldsymbol{a}^n$, причем цикл, гомологичный нулю (как всякий цикл n-мерной звезды, см. стр. 93). Заменяя поэтому в U^k алгебраический подкомплекс V^k комплексом $'V^k$, мы получим гомологичный U^k комплекс, не содержащий внутренних симплексов звезды $\boldsymbol{a}^n$. Поступая так со всеми n-мерными клетками, мы заменим U^k гомологичным ему алгебраическим комплексом U_1^k, лежащим на подкомплексе $\boldsymbol{K}^{n-1}$ комплекса $\boldsymbol{K}^n$, где $\boldsymbol{K}^{n-1}$ — подкомплекс, составленный из клеток комплекса $\boldsymbol{K}^n$ размерностей от 0 до $n-1$. Если $k = n-1$, то, как показывает a), U_1^k уже сам представляет клеточный комплекс. В противном же случае мы применим процесс b) по отношению к $\boldsymbol{K}^{n-1}$ и заменим U_1^k гомологичным ему алгебраическим комплексом U_2^k, лежащим на $\boldsymbol{K}^{n-2}$, т. е. на подкомплексе, образованном всеми $0, 1, \ldots, (n-1)$-мерными клетками комплекса $\boldsymbol{K}^n$. Поступая подобным образом дальше, мы придем, в конце концов, к алгебраическому комплексу U_{n-k}^k, гомологичному U^k и лежащему на подкомплексе $\boldsymbol{K}^k$, состоящем из клеток размерностей от 0 до k, а тогда мы сможем воспользоваться заключением a).

Вместе с тем получается следующий важный результат:

Теорема II. *Ориентированные клетки клеточного комплекса образуют кусочную систему.*

Это вытекает из того, что условия (Кус.$_1$)–(Кус.$_4$) § 22 для клеток выполняются. Поэтому для определения групп Бетти мы можем взять за основу клеточные алгебраические комплексы. Матрицами инциденций являются тогда матрицы $(\varepsilon_{\varkappa\lambda}^k)$, получающиеся из граничных соотношений (2). Заметим, что клеточный комплекс определяется этими матрицами полностью (с точностью до изоморфизма), так как для построения звездного комплекса достаточно знать его звезды и их непосредственные инциденции.

Наряду с ориентированными симплексами и симплициальными алгебраическими комплексами мы рассматривали неориентированные симплексы и алгебраические комплексы по модулю 2; точно так же наряду с ориентированными клетками и клеточными комплексами мы

можем рассматривать *клетки по модулю* 2 и *клеточные комплексы по модулю* 2. k-мерная клетка по модулю 2 (мы будем говорить — неориентированная k-мерная клетка) есть симплициальный k-мерный алгебраический комплекс по модулю 2, состоящий из всех неориентированных k-мерных симплексов клетки, k-мерный алгебраический клеточный комплекс по модулю 2 представляет линейную комбинацию k-мерных клеток по модулю 2, коэффициенты которых суть классы вычетов по модулю 2, т. е. 0 или 1.

Предложения относительно клеточных алгебраических комплексов переносятся, как и в симплициальном случае, на клеточные алгебраические комплексы по модулю 2. Для этого нужно только заменить во всех соотношениях коэффициенты кольца целых чисел соответствующими классами вычетов по модулю 2.

Клетки по модулю 2 образуют кусочную систему по модулю 2.

§ 68. h-многообразия

Мы определили многообразие как полиэдр, каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную внутренности n-мерного шара, и изучали определенные таким образом двумерные (поверхности) и трехмерные многообразия. Однако такое определение многообразия, очевидно, не является комбинаторным. Вследствие этого при рассмотрении многообразий размерностей больше, чем 3, мы сталкиваемся с трудностями, непреодолимыми при нынешнем состоянии топологии. В нашем распоряжении нет никаких средств даже для того, чтобы узнать, является ли многообразием симплициальный комплекс, заданный своей схемой. Именно, неизвестно, можно ли из существования окрестности, гомеоморфной внутренности шара, у каждой точки n-мерного полиэдра $\boldsymbol{K}^n$ заключить, что $(n-1)$-мерный окрестностный комплекс вершины симплициального разбиения $\boldsymbol{K}^n$ гомеоморфен $(n-1)$-мерной сфере. Но даже если бы это было нам известно, мы не вышли бы из затруднений, — оставался бы открытым вопрос, как определить по заданной схеме симплициального комплекса, является ли он $(n-1)$-мерной сферой или нет. Эта «проблема сферы» для случая более двух измерений не решена. Однако целый ряд предложений, относящихся к гомологическим свойствам многообразий (но не к гомотопическим), может быть доказан без использования определения многообразия в полной мере. Эти предложения остаются справедливыми для любого комплекса, если только окрестности каждой точки его ведут себя по отношению к гомологическим свойствам так же, как окрестности точек многообразия. Для этого достаточно потребовать, чтобы группы Бетти в каждой точке совпадали с группами Бетти $(n-1)$-мерной сферы. В соответствии с этим мы введем понятие h-многообразия (гомологического многообразия).

n-мерным (замкнутым) h-многообразием $\boldsymbol{M}^n$ называется связный конечный n-мерный комплекс, имеющий в каждой точке такие же группы Бетти, как $(n-1)$-мерная сфера[40].

Таким образом нульмерные и $(n-1)$-мерные группы Бетти в каждой точке должны быть свободными циклическими группами; все же остальные группы должны состоять только из нулевого элемента. Исключение представляет лишь случай $n=1$; в этом случае нульмерная группа Бетти представляет свободную группу с двумя образующими.

Мы будем заниматься только замкнутыми h-многообразиями. Однако, как и в случае поверхностей, можно рассматривать как многообразия с границей, так и бесконечные h-многообразия[41]. Замкнутые h-многообразия являются конечными многообразиями, не имеющими границы.

Теорема I. *Все связные конечные многообразия являются одновременно h-многообразиями.*

Это предложение непосредственно вытекает из теоремы II § 33.

В частности, A-многообразиями являются рассмотренные в VI и IX главах двумерные и трехмерные многообразия, точно так же как n-мерная сфера $\boldsymbol{S}^n$ и n-мерное проективное пространство $\boldsymbol{P}^n$ при $n>0$. Среди одномерных комплексов существует только одно h-многообразие, именно гомеоморфное окружности. В самом деле, нульмерная группа Бетти в вершине симплициального одномерного комплекса имеет столько свободных образующих, сколько одномерных симплексов выходит из этой вершины. А так как эта группа должна иметь две свободные образующие, то с каждой вершиной должны быть инцидентны в точности два одномерных симплекса. В дальнейших рассмотрениях тривиальный случай $n=1$ мы опускаем.

Пусть $\boldsymbol{K}^n$ — полиэдр, заданный в некотором симплициальном разбиении. Мы всегда можем узнать, является ли этот комплекс h-многообразием или нет. Так как i-мерные группы Бетти во всех внутренних точках k-мерного симплекса одинаковы, то мы должны исследовать группы Бетти только в центрах всех k-мерных симплексов, т. е. в вершинах барицентрического подразделения комплекса $\boldsymbol{K}^n$.

Рассмотрим теперь некоторые свойства h-многообразий.

I. Каждое h-многообразие $\boldsymbol{M}^n$ есть *однородный* комплекс, т. е. какое бы мы ни рассматривали симплициальное разбиение, каждый k-мерный его симплекс инцидентен по крайней мере с одним n-мерным. В противном случае $(n-1)$-мерная группа Бетти в центре этого k-мерного симплекса не была бы свободной циклической группой, а состояла только из нулевого элемента.

II. Каждый $(n-1)$-мерный симплекс *инцидентен в точности с двумя n-мерными.* Действительно, если $\nu \neq 2$, то $(n-1)$-мерная группа Бетти в центре $(n-1)$-мерного симплекса представляет свободную абелеву группу с $\nu - 1 \neq 1$ образующими (§ 32, 2-й пример).

Отсюда следует, что окрестностный комплекс $\boldsymbol{A}^{n-1}$ вершины P, т. е. граница симплициальной звезды с центром P, также есть однородный $(n-1)$-мерный комплекс, каждый $(n-2)$-мерный симплекс которого инцидентен в точности с двумя $(n-1)$-мерными. Так как, далее, комплекс $\boldsymbol{A}^{n-1}$ имеет такие же группы Бетти, как $(n-1)$-мерная сфера, то его $(n-1)$-мерное число Бетти по модулю 2 есть $q^{n-1}=1$. Таким образом окрестностный комплекс $\boldsymbol{A}^{n-1}$ представляет $(n-1)$-мерное псевдомногообразие (см. стр. 117).

Далее, из того же свойства II мы получаем еще одно свойство.

III. Каждые два *n-мерных симплекса* h-многообразия $\boldsymbol{M}^n$ можно соединить цепочкой последовательно инцидентных симплексов размерностей n и $n-1$. Допустим противоположное. Тогда $\boldsymbol{M}^n$ можно разбить на два подкомплекса, имеющих своим пересечением комплекс $\boldsymbol{K}^k$, размерность которого не превышает $n-2$. В самом деле, в качестве одного такого подкомплекса возьмем все n-мерные симплексы, которые можно соединить цепочкой описанного типа с каким-нибудь одним симплексом. Все остальные n-мерные симплексы составят второй подкомплекс. Рассмотрим окрестностный комплекс $\boldsymbol{A}^{n-1}$ какой-нибудь вершины комплекса $\boldsymbol{K}^k$. Он представляет, очевидно, $(n-1)$-мерный комплекс, распадающийся на два подкомплекса (лежащих соответственно, на подкомплексах h-многообразия $\boldsymbol{M}^n$), которые либо вовсе не пересекаются, либо их пересечение имеет размерность, не превышающую $n-3$. Отсюда вытекает, что не каждые два $(n-1)$-мерных симплекса на $\boldsymbol{A}^{n-1}$ могут быть соединены соответствующей цепочкой. А это находится в противоречии с доказанным свойством комплекса $\boldsymbol{A}^{n-1}$ быть псевдомногообразием.

Так как доказанные только что свойства I–III совпадают со свойствами (Пм$_1$)–(Пм$_2$), определяющими псевдомногоозразие (§ 24), то тем самым устанавливается следующая теорема:

Теорема II. *Каждое h-многообразие есть псевдомногообразие.*

Поэтому теоремы, доказанные раньше для псевдомногообразий, справедливы и по отношению к h-многообразиям. В частности, можно говорить об ориентируемых и неориентируемых h-многообразиях. Чтобы установить дальнейшие свойства h-многообразий, докажем лемму.

Лемма. *Пусть комплекс $\boldsymbol{B}^{k+1}$ $(k \geqslant 0)$ состоит из двух симплициальных звезд $\boldsymbol{St}_1^{k+1}$ и $\boldsymbol{St}_2^{k+1}$, имеющих общий край $\boldsymbol{A}^k$, и пусть группы Бетти комплекса $\boldsymbol{B}^{k+1}$ совпадают с группами Бетти $(k+1)$-мерной сферы. Тогда комплекс $\boldsymbol{A}^k$ имеет такие же группы Бетти, как k-мерная сфера.* Рис. 117 может служить иллюстрацией для случая $k=1$.

Доказательство. Пусть U^i представляет i-мерный цикл* на $\boldsymbol{A}^k$;

*При доказательстве мы предполагаем, что рассматриваемые алгебраические

$0 \leqslant i \leqslant k$. При $i = 0$ мы предполагаем, сверх того, что алгебраическое значение (сумма коэффициентов) комплекса U^i равно 0. На рисунке U^i состоит из двух точек, взятых с коэффициентами $+1$ и -1. Как показано на стр. 93, $U^i \sim 0$ как в комплексе $\boldsymbol{St}^{k+1}$, так и в комплексе $\boldsymbol{St}_2^{k+1}$. Поэтому существуют алгебраические подкомплексы U_1^{i+1} и U_2^{i+1} звезд $\boldsymbol{St}_1^{k+1}$ и $\boldsymbol{St}_2^{k+1}$ такие, что

$$\dot{U}_1^{i+1} = U^i, \tag{1}$$

$$\dot{U}_2^{i+1} = U^i. \tag{2}$$

Алгебраический комплекс

$$U_1^{i+1} = U_2^{i+1} \tag{3}$$

является тогда циклом.

I. Пусть теперь $i < k$. В этом случае цикл (3) гомологичен нулю на $\boldsymbol{B}^{k+1}$, так как его размерность $i+1 > 0$ и $< k+1$, а $\boldsymbol{B}^{k+1}$ имеет такие же группы Бетти, как $(k+1)$-мерная сфера. Пусть в соответствии с этим

$$\dot{V}^{i+2} = U_1^{i+1} - U_2^{i+1}. \tag{4}$$

Разложим V^{i+2} на сумму

$$V^{i+2} = V_1^{i+2} + V_2^{i+2}, \tag{5}$$

где под V_1^{i+2} мы понимаем совокупность симплексов комплекса V^{i+2}, инцидентных с центром звезды $\boldsymbol{St}_1^{k+1}$. Тогда в соответствии с формулами (5) и (4)

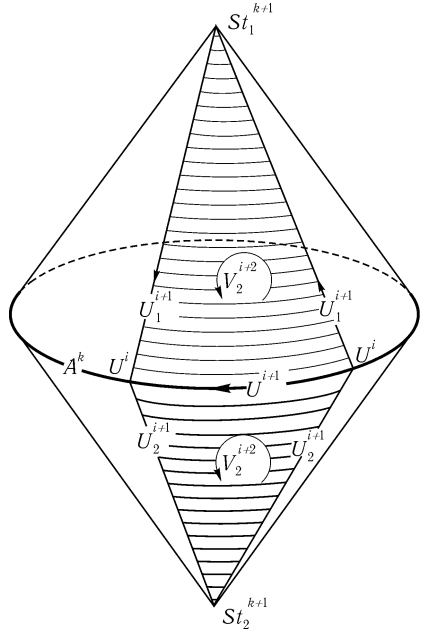


Рис. 117

$$\dot{V}_1^{i+2} = \dot{V}^{i+2} - \dot{V}_2^{i+2} = U_1^{i+1} - U_2^{i+1} - \dot{V}_2^{i+2}. \tag{6}$$

Левая сторона формулы (6) принадлежит к $\boldsymbol{St}_1^{k+1}$, так же как алгебраический комплекс U_1^{i+1} правой части. Поэтому комплекс $U_1^{i+1} + \dot{V}_2^{i+2} = U^{i+1}$ также должен принадлежать к $\boldsymbol{St}_1^{k+1}$. Но индекс 2 указывает, что этот комплекс принадлежит и к $\boldsymbol{St}_2^{k+1}$. Поэтому U^{i+1} лежит

комплексы не являются особыми (т. е. считаем их симплициальными). Тривиальный случай $k = 0$ мы опускаем.

на $\boldsymbol{A}^k$. Из (6) следует, что $U_1^{i+1} - U^{i+1} \sim 0$. Но тогда U_1^{i+1} и U^{i+1} имеют одну и ту же границу U^i. Отсюда следует, что для каждого цикла U^i комплекса $\boldsymbol{A}^k$ можно найти лежащий на $\boldsymbol{A}^k$ алгебраический комплекс U^{i+1}, имеющий U^i своей границей, т. е. что группы Бетти размерностей от 1 до $k-1$ комплекса $\boldsymbol{A}^k$ состоят только из нулевого элемента, в то время как нульмерная группа Бетти представляет свободную циклическую группу.

II. Пусть теперь $i = k$. Так как $(k+1)$-мерная группа Бетти комплекса $\boldsymbol{B}^{k+1}$ есть свободная циклическая группа, то каждый $(k+1)$-мерный цикл является кратным некоторого цикла B^{k+1}. В частности, это имеет место для цикла (3):

$$U_1^{k+1} - U_2^{k+1} = mB^{k+1}.$$

B^{k+1} можно разбить, и притом единственным способом, на два алгебраических комплекса B_1^{k+1} и B_2^{k+1}, принадлежащих соответственно звездам $\boldsymbol{St}_1^{k+1}$ и $\boldsymbol{St}_2^{k+1}$. Но тогда $U_1^{k+1} = mB_1^{k+1}$, т. е. $U^k = \dot{U}_1^{k+1} = m\dot{B}_1^{k+1}$. Это показывает, что U^k представляет цикл $\dot{B}_1^{k+1}$, взятый с коэффициентом m, вследствие чего k-мерная группа Бетти комплекса $\boldsymbol{A}^k$ есть свободная циклическая группа.

Теперь мы можем доказать следующую важную теорему:

Теорема III. *Если P — вершина заданного в симплициальном разбиении h-многообразия $\boldsymbol{M}^n$, то край $\boldsymbol{A}^{n-1}$ симплициальной звезды $\boldsymbol{St}^n$ с центром P также является $(n-1)$-мерным h-многообразием $(n \geqslant 2)$.*

Доказательство. I. Так как $\boldsymbol{A}^{n-1}$, по докаказанному выше, есть $(n-1)$-мерное псевдомногообразие, то $\boldsymbol{A}^{n-1}$ представляет связный конечный $(n-1)$-мерный комплекс. II. Мы должны показать теперь, что группы Бетти в каждой точке A комплекса $\boldsymbol{A}^{n-1}$ совпадают с группами Бетти $(n-2)$-мерной сферы. С этой целью представим себе, что все симплексы $\boldsymbol{M}^n$, не принадлежащие к $\boldsymbol{St}^n$, отброшены, и допустим, что A является вершиной симплициального разбиения звезды $\boldsymbol{St}^n$. Это допущение не вносит существенных ограничений, так как мы можем всегда подразделить $\boldsymbol{A}^{n-1}$ таким образом, чтобы A стало вершиной подразделения, а затем дополнить это подразделение комплекса $\boldsymbol{A}^{n-1}$ до подразделения всей звезды $\boldsymbol{St}^n$ путем проектирования из вершины P. Пусть $\boldsymbol{St}^{n-1}$ обозначает симплициальную звезду на $\boldsymbol{A}^{n-1}$ с центром A, а $\boldsymbol{A}^{n-2}$ — ее край (рис. 118). Тогда n-мерный симплекс, содержащий отрезок (PA), имеет своими вершинами P, A, A_0, A_1, …, A_{n-2}, где

$$(A_0 A_1 \ldots A_{n-2})$$

представляет $(n-2)$-мерный симплекс комплекса $\boldsymbol{A}^{n-2}$. Пусть Q — центр отрезка (PA). Разобьем наш n-мерный симплекс на два n-мерных

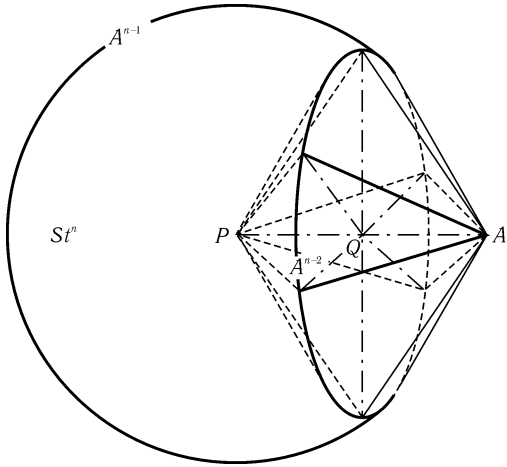


Рис. 118

симплекса

$$(PQA_0A_1\dots A_{n-2}) \quad \text{и} \quad (AQA_0A_1\dots A_{n-2})$$

Точно так же поступим со всеми остальными инцидентными с (PA) n-мерными симплексами звезды $\boldsymbol{St}^n$. При таком подразделении Q превращается в вершину. Край $\boldsymbol{B}^{n-1}$ симплициальной звезды с центром Q можно рассматривать как состоящую из двух частей: из совокупности $(n-1)$-мерных симплексов вида $(PA_0A_1\dots A_{n-2})$ и $(n-1)$-мерных симплексов вида $(AA_0A_1\dots A_{n-2})$ [вместо A_0, A_1, …, A_{n-2} нужно подставлять поочередно все вершины $(n-2)$-мерных симплексов комплекса $\boldsymbol{A}^{n-2}$]. Но это значит, что окрестностный комплекс точки Q состоит из двух симплициальных звезд с общим краем $\boldsymbol{A}^{n-2}$. По определению h-многообразия группы Бетти окрестностного комплекса $\boldsymbol{B}^{n-1}$ точки Q таковы же, как группы Бетти $(n-1)$-мерной сферы. Поэтому, в силу леммы, группы Бетти комплекса $\boldsymbol{A}^{n-2}$, т. е. группы Бетти комплекса $\boldsymbol{A}^{n-1}$ в точке A, совпадают с группами Бетти $(n-2)$-мерной сферы, что и требовалось доказать.

Мы убедились, что каждое связное конечное многообразие является h-многообразием. Теперь мы можем выяснить, как обстоит дело с обратным предложением:

Теорема IV. *Для $n = 1, 2, 3$, и только для этих размерностей, каждое замкнутое h-многообразие является замкнутым многообразием.*

В одномерном случае теорема очевидна, так как единственное

существующее h-многообразие представляет топологическую окружность.

Пусть теперь P — точка двумерного многообразия. Произведем симплициальное разбиение, имеющее P своей вершиной. По теореме III окрестностный комплекс точки P есть одномерное h-многообразие, т. е. гомеоморфен окружности, а тогда симплициальная звезда с центром P гомеоморфна кругу. Таким образом каждое замкнутое двумерное h-многообразие есть конечный, связный комплекс, каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную внутренности круга. Другими словами, замкнутое двумерное h-многообразие представляет не что иное, как замкнутую поверхность (стр. 183); для таких поверхностей мы дали в шестой главе полную классификацию.

В трехмерном h-многообразии окрестностный комплекс всякой точки есть двумерное h-многообразие, имеющее такие же группы Бетти, как двумерная сфера. По основной теореме топологии поверхностей единственной поверхностью, обладающей таким свойством, является сфера. Но тогда симплициальная звезда каждой точки h-многообразия $\boldsymbol{M}^3$ гомеоморфна шару, т. е. $\boldsymbol{M}^3$ представляет полиэдр, рассматривавшийся в главе IX (обыкновенное многообразие).

В случае более трех измерений наша теорема (об эквивалентности h-многообразий с многообразиями) несправедлива, так как существуют трехмерные многообразия, пространства Пуанкаре, имеющие такие же группы Бетти, как группы Бетти трехмерной сферы, но не гомеоморфные трехмерной сфере. Покажем, что существуют четырехмерные h-многообразия, не являющиеся многообразиями. Рассмотрим комплекс $\boldsymbol{K}^4$, состоящий из двух симплициальных звезд $\boldsymbol{St}_1^4$ и $\boldsymbol{St}_2^4$ с общей границей, представляющей сферическое пространство додекаэдра. Все точки такого комплекса, за исключением точек P_1 и P_2 — центров звезд $\boldsymbol{St}_1^4$ и $\boldsymbol{St}_2^4$, — имеют окрестностными комплексами трехмерные сферы. Однако группы Бетти и в точках P_1 и P_2 совпадают с группами Бетти трехмерной сферы, так как для точек P_1 и P_2 окрестностный комплекс есть сферический додекаэдр, группы Бетти которого таковы же, как у трехмерной сферы (стр. 278). Таким образом комплекс $\boldsymbol{K}^4$ есть h-многообразие. Однако он не является многообразием. В самом деле, фундаментальная группа в точке P_1, а также в P_2, как показано на стр. 278, есть бинарная группа икосаэдра, состоящая только из единичного элемента. Поэтому точки P_1 и P_2 не могут иметь окрестностей, гомеоморфных внутренности трехмерного шара.

Познакомившись с объемом понятия h-многообразия, мы переходим к рассмотрению важнейшего свойства h-многообразий, — *к существованию дуальных клеточных разбиений.* Начнем с того, что превратим заданное h-многообразие $\boldsymbol{M}^n$ в звездный комплекс. Для этого разобьем $\boldsymbol{M}^n$ на симплексы и затем объединим эти симплексы надлежащим образом в звезды. Звездный комплекс получится, например, если мы произведем барицентрическое подразделение произвольного

симплициального разбиения комплекса $\boldsymbol{M}^n$ (стр. 292). Мы покажем сейчас, что *каждое звездное разбиение h-многообразия $\boldsymbol{M}^n$ является одновременно клеточным разбиением.*

Доказательство. Прежде всего все n-мерные звезды являются клетками. В самом деле, край n-мерной звезды, как показано на стр. 303, есть псевдомногообразие, имеющее такие же группы Бетти, как группы Бетти $(n-1)$-мерной сферы [так как группы Бетти в центре звезды совпадают с группами Бетти $(n-1)$-мерной сферы]. По той же причине являются клетками $(n-1)$-мерные звезды $(n-1)$-мерного h-многообразия. В частости, так как край n-мерной звезды комплекса $\boldsymbol{M}^n$ по теореме III является $(n-1)$-мерным h-многообразием, то $(n-1)$-мерные звезды этого края также оказываются $(n-1)$-мерными клетками. Но h-многообразие есть однородный комплекс, т. е. каждая его $(n-1)$-мерная звезда инцидентна по крайней мере с одной n-мерной, поэтому клетками являются все $(n-1)$-мерные звезды. Рассуждая таким же образом дальше (вплоть до нульмерных звезд), мы получаем полное доказательство теоремы.

Но тогда звездное разбиение, дуальное по отношению к данному звездному разбиению, также представляет клеточное разбиение. Поэтому *каждое h-многообразие допускает дуальные разбиения на клетки.* В дальнейшем мы будем обозначать заданное клеточное разбиение h-многообразия $\boldsymbol{M}^n$ через $\boldsymbol{M}_a^n$, дуальное разбиение — через $\boldsymbol{M}_b^n$, общее их барицентрическое разбиение — через $\overset{*}{\boldsymbol{M}}{}^n$. Ориентированные клетки разбиения $\boldsymbol{M}_a^n$ обозначим через $a_\varkappa^k$, клетки дуального разбиения $\boldsymbol{M}_b^n$ — через $b_\varkappa^{n-k}$. Общий центр клеток $a_\varkappa^k$ и $b_\varkappa^{n-k}$ назовем $P_\varkappa^k$ $(k = 0, 1, \ldots, n;\ \varkappa = 1, 2, \ldots, \alpha^k)$.

§ 69. Закон двойственности Пуанкаре

Рассмотрим h-многообразие $\boldsymbol{M}^n$ с двумя заданными на нем фиксированными дуальными клеточными разбиениями $\boldsymbol{M}_a^n$ и $\boldsymbol{M}_b^k$. Пусть оно *ориентируемо* и снабжено определенной ориентацией, т. е. все его n-мерные симплексы когерентно ориентированы одним из двух возможных способов. Пусть, далее, $a_\varkappa^k$ и $b_\varkappa^{n-k}$ — две ориентированных дуальных клетки. Мы определим их *индекс пересечения* $\chi(a_\varkappa^k, b_\varkappa^{n-k})$ следующим образом:

Правило: Выберем из симплексов барицентрического разбиения клетки $a_\varkappa^k$ k-мерный симплекс

$$E^k = \xi(P^0 P^1 \ldots P^k),$$

ориентация которого определяется ориентацией клетки $a_\varkappa^k$. Далее, таким же образом выберем из симплексов клетки $b_\varkappa^{n-k}$ $(n-k)$-мерный

симплекс

$$E^{n-k} = \eta(P^k P^{k+1} \dots P^n).$$

Тогда

$$E^n = \zeta(P^0 P^1 \dots P^k \dots P^n)$$

есть n-мерный симплекс (по теореме III § 66), знак которого ζ зависит от ориентации разбиения $\overset{*}{\boldsymbol{M}}{}^n$, и мы определяем индекс пересечения $\chi(a^k_\varkappa, b^{n-k}_\varkappa)$, как произведение $\xi\eta\zeta$[42]:

$$\chi(a^k_\varkappa, b^{n-k}_\varkappa) = \xi\eta\zeta. \tag{1}$$

Таким образом индекс пересечения равен всегда ± 1. На рис. 119 $n = 2$, $k = 1$, $\xi = 1$, $\eta = \zeta = -1$.

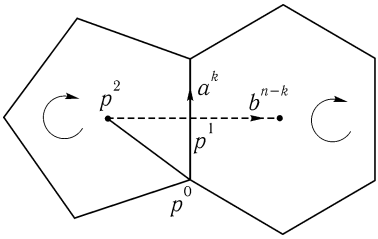


Рис. 119

Определение таково, что безразлично, расположены ли вершины E^k и E^{n-k} по возрастающим верхним индексам или нет. Существенно лишь, что P^k находится в E^k на последнем, а в E^{n-k} — на первом месте и что порядок вершин в E^n такой же, как в E^k и в E^{n-k}. В самом деле, если мы переставим в E^k две вершины ($\neq P^k$), то ξ и ζ изменятся, в то время как с η не произойдет ничего. Соответствующий результат получается, если мы поменяем местами две вершины симплекса E^{n-k}.

Далее, определение не зависит от выбора симплексов E^k и E^{n-k} из барицентрически подразделенных клеток $a^k_\varkappa$ и $b^{n-k}_\varkappa$. Действительно, заменим E^k симплексом $'E^k$, имеющим с E^k общие вершины, за исключением одной, скажем, за исключением вершины P^0, замененной вершиной $'P^0$. Так как E^k и $'E^k$ индуцируют в своей общей $(k-1)$-мерной стороне противоположные ориентации (вследствие предположенной когерентной ориентации симплексов клетки $a^k_\varkappa$), то $'E^k = -\xi('P^0 P^1 \dots P^k)$. Вместо же E^n мы должны взять

$$'E^n = -\zeta('P^0 P^1 \dots P^k \dots P^n),$$

так как E^n и $'E^n$ также индуцируют в общем $(n-1)$-мерном симплексе противоположные ориентации. Тогда индекс пересечения получается

$$(-\xi)\eta(-\zeta) = \xi\eta\zeta,$$

т. е. такой же, как и раньше. Заменяя снова симплекс $'E^k$ соседним симплексом клетки $a^k_\varkappa$ и продолжая таким же образом дальше, мы можем

достигнуть произвольного симплекса клетки $a^k_\varkappa$, так как граница клетки $a^k_\varkappa$ есть псевдомногообразие. Такие же соображения применимы по отношению к клетке $b^{n-k}_\varkappa$.

Напротив, индекс пересечения меняет знак, если мы изменим ориентацию одной из клеток $a^k_\varkappa$, $b^{n-k}_\varkappa$ или всего многообразия $\boldsymbol{M}^n$.

Если $k = 0$, то $a^k_\varkappa$ состоит из одной вершины P^0, являющейся одновременно центром дуальной n-мерной клетки $b^n_\varkappa$. Тогда

$$E^0 = \xi(P^0) \quad \text{и} \quad E^n = \eta(P^0P^1 \dots P^n).$$

Если мы предположим еще, что $a^0_\varkappa$ ориентировано знаком $+1$, то $\xi = 1$ и

$$\chi(a^0_\varkappa, b^n_\varkappa) = \eta\zeta = +1 \quad \text{или} \quad -1$$

в зависимости от того, совпадает ли ориентация $b^n_\varkappa$ с ориентацией $\boldsymbol{M}^n$ или нет. Такой индекс пересечения можно назвать также *коэффициентом покрытия точки* P^0 клеткой $b^n_\varkappa$.

Индекс пересечения двух клеток не есть, вообще говоря, симметрическая функция этих клеток. Именно имеет место соотношение

$$\chi(a^0_\varkappa, b^{n-k}_\varkappa) = (-1)^{k(n-k)}\chi(b^{n-k}_\varkappa, a^k_\varkappa). \tag{2}$$

Доказательство. Мы имеем

$$\begin{aligned} E^k &= \xi(P^0P^1 \dots P^k) = \xi(-1)^k(P^kP^0 \dots P^{k-1}),\\ E^{n-k} &= \eta(P^kP^{k+1} \dots P^n) = \eta(-1)^{n-k}(P^{k+1} \dots P^nP^k),\\ E^n &= \zeta(P^0P^1 \dots P^{k-1}P^kP^{k+1} \dots P^n) =\\ &= \zeta(-1)^{k+(n-k)(k+1)}(P^{k+1} \dots P^nP^kP^0 \dots P^{k-1}). \end{aligned}$$

А тогда, по правилу, индекс пересечения $\chi(b^{n-k}_\varkappa, a^k_\varkappa)$ равен произведению коэффициентов, стоящих в правых частях трех последних уравнений:

$$\chi(b^{n-k}_\varkappa, a^k_\varkappa) = \xi\eta\zeta(-1)^{k(n-k)}\chi(a^k_\varkappa, b^{n-k}_\varkappa),$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь наряду с клетками $a^k_\varkappa$ и $b^{n-k}_\varkappa$ две соответственно инцидентных с этими клетками дуальных клетки a^{k-1}_ι и b^{n-k+1}_ι. Ориентируем их так, чтобы имели место соотношения (рис. 120)

$$\dot{a}^k_\varkappa = a^{k-1}_\iota + \dots, \tag{3}$$

$$\dot{b}^{n-k+1}_\iota = b^{n-k}_\varkappa + \dots \tag{4}$$

Пусть P^k и P^{k-1} — центры клеток $a^k_\varkappa$ и a^{k-1}_ι и

$$E^k = \xi(P^0P^1\dots P^k)$$

— ориентированный симплекс клетки $a^k_\varkappa$, а

$$E^{n-k+1} = \eta(P^{k-1}P^k\dots P^n)$$

— ориентированный симплекс клетки b^{n-k+1}_ι.

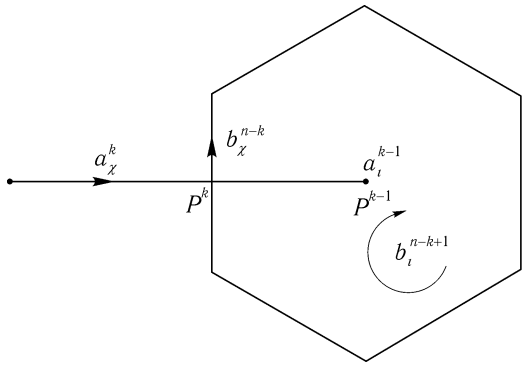


Рис. 120

Тогда

$$E^{k-1} = \xi(-1)^k(P^0P^1\dots P^{k-1})$$

есть симплекс клетки a^{k-1}_ι, а

$$E^{n-k} = \eta(P^kP^{k+1}\dots P^n)$$

— симплекс клетки $b^{n-k}_\varkappa$. Пусть, наконец, ориентация h-многообразия $\boldsymbol{M}^n$ снова определяется симплексом

$$E^n = \zeta(P^0P^1\dots P^n).$$

Тогда, в силу нашего правила,

$$\chi(a^k_\varkappa, b^{n-k}_\varkappa) = \xi\eta\zeta,$$
$$\chi(a^{k-1}_\iota, b^{n-k+1}_\iota) = (-1)^k\xi\eta\zeta,$$

так что

$$\chi(a^k_\varkappa, b^{n-k}_\varkappa) = (-1)^k\chi(a^{k-1}_\iota, b^{n-k+1}_\iota). \qquad (5)$$

Если мы сделаем теперь более общее предположение, именно если мы отбросим условие, что ориентации клеток a_ι^{k-1} и b_ι^{n-k+1} определяются уравнениями (3) и (4), а будем считать, что эти ориентации заданы нам придется заменить эти уравнения уравнениями

$$\dot{a}_\varkappa^k = {}^{(a)}\varepsilon_{\iota\varkappa}^{k-1} a_\iota^{k-1} + \ldots = \rho a_\iota^{k-1} + \ldots, \tag{6}$$

$$\dot{b}_\varkappa^{n-k+1} = {}^{(b)}\varepsilon_{\varkappa\iota}^{n-k} b_\varkappa^{n-k} + \ldots = \sigma b_\varkappa^{n-k} + \ldots \tag{7}$$

Тогда

$$\chi(a_\varkappa^k, b_\varkappa^{n-k}) = \rho\sigma(-1)^k \chi(a_\iota^{k-1}, b_\iota^{n-k+1}), \tag{8}$$

так как при перемене ориентации клетки a_ι^{k-1} или b_ι^{n-k} меняется знак правой части формулы (5).

Предположим теперь, что клетки $a_\varkappa^k$ ($k = 0, 1, \ldots, n$; $\varkappa = 1, 2, \ldots, \alpha^k$) ориентированы произвольно, клетки же $b_\varkappa^{n-k}$ дуального разбиения ориентированы так, что все индексы пересечения $\chi(a_\varkappa^k, b_\varkappa^{n-k})$ оказываются равными $+1$. Из (8) следует тогда, что $\rho\sigma(-1)^k = 1$ или

$$\rho = (-1)^k \sigma. \tag{9}$$

Однако ρ представляет не что иное, как коэффициент ${}^{(a)}\varepsilon_{\varkappa\iota}^{k-1}$ матрицы инциденций $\mathbf{E}_a^{k-1}$ клеточного разбиения $\boldsymbol{M}_a^n$, а σ — коэффициент ${}^{(b)}\varepsilon_{\varkappa\iota}^{n-k}$ матрицы инциденций $\mathbf{E}_b^{n-k}$ клеточного разбиения $\boldsymbol{M}_b^n$. Поэтому уравнение (9) означает, что $\mathbf{E}_a^{k-1}$ представляет транспонированную матрицу инциденций $\mathbf{E}_b^{n-k}$, умноженной на $(-1)^k$*

$$\mathbf{E}_a^{k-1} = (-1)^k \mathbf{E}_b^{n-k}, \tag{10}$$

т. е. что имеют место граничные соотношения (индексы ${}^{(a)}$ и ${}^{(b)}$ у $\varepsilon_{\iota\varkappa}^{k-1}$ мы теперь опять можем опустить):

$$\begin{aligned} \dot{a}_\varkappa^k &= \sum_{\iota=1}^{\alpha^{k-1}} \varepsilon_{\iota\varkappa}^{k-1} b_\varkappa^{n-k}, \\ \dot{b}_\iota^{n-k+1} &= \sum_{\varkappa=1}^{\alpha^k} (-1)^k \varepsilon_{\iota\varkappa}^{k-1} b_\varkappa^{n-k}. \end{aligned} \tag{11}$$

Таким образом в результате получается теорема:

*Транспонированная матрица получается при замене строк матрицы столбцами и обратно, т. е. при отражении матрицы в главной диагонали. Мы будем обозначать транспонированную матрицу чертой наверху, идущей в направлении главной диагонали.

Теорема I. *Если ориентировать клетки разбиения M_b^n дуального к заданному клеточному разбиению M_a^n так, что индекс пересечения каждой клетки M_a^n с дуальной клеткой M_b^n (именно в этом порядке!) $= 1$, то матрица инциденций $\mathbf{E}_a^{k-1}$ разбиения M_a^n равняется транспанированной матрице инциденций $\mathbf{E}_b^{n-k}$ разбиения M_b^n, умноженной на $(-1)^k$.*

Для того чтобы получить закон двойственности Пуанкаре, мы вычислим теперь группы Бетти M^n один раз, исходя из клеточного разбиения M_a^n второй раз, — исходя из клеточного разбиения M_b^n и применим затем матричное уравнение (10); k-мерное *число Бетти*

$$p^k = \alpha_a^k - \gamma_a^k - \gamma_a^{k-1} = \alpha_b^k - \gamma_b^k - \gamma_b^{k-1} \quad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

При этом α_a^k означает число k-мерных клеток разбиения M_a^n, γ_a^k — ранг матрицы $\mathbf{E}_a^k$ и $\gamma_a^0 = \gamma_a^n = 0$ (§ 22); числа, снабженные индексом b, имеют соответствующее значение по отношению к разбиению M_b^n. Однако $\alpha_a^k == \alpha_b^{n-k}$, так как для каждой k-мерной клетки существует в точности одна $(n-k)$-мерная. Далее, по формуле (10), $\gamma_a^{k-1} = \gamma_b^{n-k}$. Поэтому

$$p^k = \alpha_b^{n-k} - \gamma_b^{n-k-1} - \gamma_b^{n-k} = p^{n-k}.$$

k-мерные *коэффициенты кручения* представляют, с одной стороны, отличные от единицы инвариантные множители матрицы $\mathbf{E}_a^k$, а с другой стороны, в силу (10), инвариантные множители матрицы $\mathbf{E}_b^k = (-1)^{n-k}\mathbf{E}_a^{n-k-1}$. Таким образом k-мерные коэффициенты кручения совпадают с $(n-k-1)$-мерными коэффициентами кручения и мы можем окончательно сформулировать следующую теорему:

Теорема II (Закон двойственности Пуанкаре). *k-мерное число Бетти ориентируемого замкнутого h-многообразия совпадает с $(n-k)$-мерным числом $(k = 0, 1, \ldots, n)$; k-мерные же коэффициенты кручения равны коэффициентам кручения размерности $n-k-1$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$.*

Отсюда следует, в частности, уже известный нам факт, что у замкнутых, ориентируемых h-многообразий не существует $(n-1)$-мерных коэффициентов кручения, так как у них не существует нульмерных коэффициентов кручения (стр. 91).

Закон двойственности Пуанкаре существенным образом основывается на ориентируемости h-многообразия. Для неориентированных h-многообразий никакая ориентация n-мерных клеток не приведет нас к уравнению (10), так как $\mathbf{E}_a^0$ имеет ранг $\alpha_a^0 - 1$, а $\mathbf{E}_b^{n-1}$ — ранг $\alpha_b^n = \alpha_a^0$ (§ 24).

Однако и для неориентируемых многообразий можно установить закон двойственности, получающийся еще проще, так как при его выводе можно совсем не обращать внимания на ориентацию клеток. В этом

случае матрицы инциденций связываются не уравнением (10), а сравнением

$$\mathbf{E}_a^{k-1} \equiv \mathbf{E}_b^{n-k} \pmod 2.$$

В самом деле, элементы матриц $\mathbf{E}_a^{k-1}$ и $\overset{\backslash}{\mathbf{E}}{}_b^{n-k}$ отличаются друг от друга самое большее знаком. Другими словами, матрицы инциденций по модулю 2, $\check{\mathbf{E}}_a^{k-1}$ и $\check{\mathbf{E}}_b^{n-k}$ при помощи транспонирования переходят друг в друга, вследствие чего они имеют один и тот же ранг $\delta_a^{k-1} = \delta_b^{n-k}$. Но тогда, по формуле (8) § 23, k-мерное число Бетти по модулю 2

$$\begin{aligned} q^k &= \alpha_a^k - \delta_a^k - \delta_a^{k-1} = \alpha_b^k - \delta_b^k - \delta_b^{k-1} = \\ &= \alpha_a^{n-k} - \delta_a^{n-k-1} - \delta_a^{n-k} = q^{n-k}. \end{aligned}$$

Таким образом получается теорема:

Теорема III (Закон двойственности по модулю 2). *Как у ориентируемых, так и у неориентируемых замкнутых h-многообразий k-мерное число Бетти по модулю 2 равно $(n-k)$-мерному.*

Из этой теоремы вытекает, если мы воспользуемся формулой (12) стр. 116, еще одно предложение, касающееся эйлеровой характеристики:

Теорема IV. *Эйлерова характеристика h-многообразия нечетной размерности равна нулю:*

$$N = 0.$$

§ 70. Индексы пересечения клеточных алгебраических комплексов

Топологическое содержание закона двойственности, выведенного нами формально при помощи матриц инциденций, раскрывается, когда мы переходим от *чисел Бетти к базам слабых гомологий.* Мы хотим показать, что между такими базами размерностей k и $n-1$ также существует некоторое двойственное соотношение. С этой целью мы определим индекс пересечения двух клеточных алгебраических комплексов и воспользуемся им (§ 71) для построения дуальных баз слабых гомологий.

Пусть

$$A^k = \xi_1 a_1^k + \xi_2 a_2^k + \ldots + \xi_{\alpha^k}^k a_{\alpha^k}^k$$

и

$$B^{n-k} = \eta_1 b_1^{n-k} + \eta_2 b_2^{n-k} + \ldots + \eta_{\alpha^k} b_{\alpha^k}^{n-k}$$

суть два алгебраических комплекса, составленных из клеток дуальных разбиений. Так как $\alpha_b^{n-k} = \alpha_a^k$, например $= \alpha^k$, то индексы обоих алгебраических комплексов пробегают значения от 1 до одного и того же числа α^k. Оба комплекса имеют самое большее конечное число общих точек, так как клетка $a_\varkappa^k$ не имеет общих точек ни с одной из клеток b_λ^{n-k}, за исключением дуальной клетки $b_\varkappa^{n-k}$, с которой $a_\varkappa^k$ имеет общий центр. Для дуальных клеток индекс пересечения определен в начале предыдущего параграфа. Для двух недуальных клеток дуальных разбиений мы полагаем его равным нулю. Тогда индекс пересечения алгебраических комплексов A^k и B^{n-k} мы будем считать равным сумме индексов пересечений отдельных клеток. Точнее:

$$\chi(A^k,\, B^{n-k}) = \sum_{\varkappa=1}^{\alpha^k}\sum_{\lambda=1}^{\alpha^k} \xi_\varkappa \eta_\lambda \chi(a_\varkappa^k,\, b_\lambda^{n-k}) = \sum_{\varkappa=1}^{\alpha^k} \xi_\varkappa \eta_\varkappa \chi(a_\varkappa^k,\, b_\varkappa^{n-k}). \qquad (1)$$

Таким образом индекс пересечения двух алгебраических комплексов является билинейной формой векторов, представляющих эти комплексы.

Ориентация всего h-многообразия $\boldsymbol{M}^n$ — устанавливает определенную ориентацию в каждой из клеток разбиения $\boldsymbol{M}_b^n$. Обозначим сумму всех таким образом ориентированных симплексов через M_b^k. Подставляя в формулу (1) $k = 0$ и $B^{n-k} = M_b^n$ и пользуясь соотношением страницы 311, мы получаем следующий результат: *индекс пересечения алгебраического комплекса A^0 с ориентирующим комплексом M_b^n равен алгебраическому значению комплекса A^0.*

Очевидно, для индекса пересечения выполняются соотношения

$$\chi(A_1^k + A_2^k,\, B^{n-k}) = \chi(A_1^k,\, B^{n-k}) + \chi(A_2^k,\, B^{n-k}) \qquad (2)$$

и

$$\chi(A^k,\, B^{n-k}) = (-1)^{k(n-k)}\chi(B^{n-k},\, A^k); \qquad (3)$$

последнее в силу формулы (2) стр. 311.

Формулу (5) § 69:

$$\chi(a_\varkappa^k,\, b_\varkappa^{n-k}) = (-1)^k \chi(a_\iota^{k-1},\, b_\iota^{n-k+1}),$$

относящуюся к двум дуальным клеткам $a_\varkappa^k$ и $b_\varkappa^{n-k}$, также можно распространить на произвольные алгебраические комплексы размерностей k и $n-k$. Именно, заметив, что все граничные клетки b_ι^{n-k+1}, за исключением $b_\varkappa^{n-k}$, не имеют общих точек с $a_\varkappa^k$, мы можем вместо $b_\varkappa^{n-k}$ написать в левой части нашей формулы $\dot{b}_\iota^{n-k+1}$. В правой части соответственно вместо $a_\varkappa^k$ можно написать a_ι^{k-1}. Тогда мы получим формулу

$$\chi(a_\varkappa^k,\, \dot{b}_\iota^{n-k+1}) = (-1)^k \chi(\dot{a}_\chi^k,\, b_\iota^{n-k+1}). \qquad (4)$$

Эта формула установлена в предположении, что дуальная с b_ι^{n-k+1} клетка a_ι^{k-1} инцидентна с $a_\varkappa^k$. Однако, если это не так, формула все же остается справедливой, так как тогда обе части равны нулю. В самом деле, левая часть не равна нулю только в том случае, когда в границу клетки b_ι^{n-k+1} входит дуальная с $a_\varkappa^k$ клетка $b_\varkappa^{n-k}$, т. е. когда b_ι^{n-k+1} и $b_\varkappa^{n-k}$, а следовательно, и дуальные клетки a_ι^{k-1} и $a_\varkappa^k$, инцидентны. Точно так же правая часть не равна нулю, если в границу клетки $a_\varkappa^k$ входит дуальная к b_ι^{n-k+1} клетка a_ι^{k-1}. Поэтому формула (4) остается справедливой для двух произвольных клеток $a_\varkappa^k$ и b_ι^{n-k+1}. Вместе с тем, по формуле (2), для двух произвольных клеточных алгебраических комплексов A^k и B^{n-k+1} дуальных подразделений $\boldsymbol{M}_a^n$ и $\boldsymbol{M}_b^n$ имеет место соотношение

$$\chi(A^k,\, \dot{B}^{n-k+1}) = (-1)^k \chi(\dot{A}^k,\, B^{n-k+1}). \tag{5}$$

Из этой важной формулы сразу получается следующий вывод. Пусть A^k является циклом, т. е. $\dot{A}^k = 0$. Правая часть формулы (5) обращается тогда в нуль. В левой же части у нас стоит $\dot{B}^{n-k+1}$, т. е. произвольный, гомологичный нулю $(n-k)$-мерный цикл. Мы получаем, таким образом, теорему:

Теорема I. *Индекс пересечения произвольного k-мерного клеточного цикла A^k с гомологичным нулю $(n-k)$-мерным циклом B^{n-k} дуального разбиения всегда равен нулю.*

Эта теорема остается справедливой и в том случае, когда B^{n-k} только слабо гомологичен нулю: $B^{n-k} \approx 0$. Тогда

$$cB^{n-k} \sim 0 \quad (c \neq 0).$$

Но

$$\chi(A^k,\, cB^{n-k}) = c\chi(A^k,\, B^{n-k}).$$

По теореме I левая часть $= 0$, следовательно, равна нулю и правая часть, а так как $c \neq 0$, то $\chi(A^k,\, B^{n-k}) = 0$. Отсюда получается еще одна теорема:

Теорема II. *Если $A^k \approx' A^k$ и $B^{n-k} \approx' B^{n-k}$ — циклы двух дуальных разбиений, то*

$$\chi(A^k,\, B^{n-k}) = \chi('A^k,\, 'B^{n-k}),$$

т. е. индекс пересечения двух циклов не меняется при замене каждого цикла слабо гомологичным ему циклом того же разбиения.

В качестве примера рассмотрим клеточное разбиение $\boldsymbol{M}_a^2$ тора на 4 квадрата, именно — показанное на рис. 121 жирной линией (противоположные стороны большого квадрата нужно отождествить). Дуальное разбиение $\boldsymbol{M}_b^2$ состоит тогда также из четырех квадратов, обозначенных пунктирными ли-

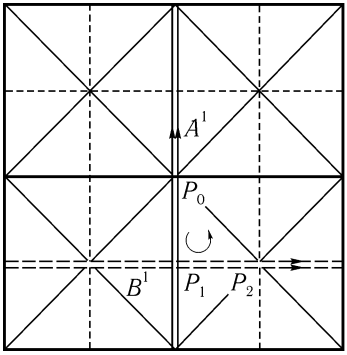


Рис. 121

ниями. Общее барицентрическое подразделение $\overset{*}{\boldsymbol{M}}{}^2$ состоит из 4×8 треугольников. Мы ориентируем их когерентно в соответствии с ориентацией, указанной на рисунке стрелкой. Пусть два одномерных цикла дуальных разбиений, индекс пересечения которых мы разыскиваем, суть циклы A^1 и B^1, образованные каждый двумя клетками (на рисунке эти циклы обозначены двойными линиями). Так как $n = 2$, а $k = 1$, то здесь $k = n - k + 1$. Индекс пересечения определяется по правилу: на A^1 берется одномерный симплекс $-(P^0P^1)$, на B^1 — одномерный симплекс $+(P^1P^2)$. При помощи этих симплексов составляется двумерный симплекс $(P^0P^1P^2)$. При взятой нами когерентной ориентации он имеет знак $+1$. Тогда индекс пересечения

$$\chi(A^1, B^1) = (-1)(+1)(+1) = -1.$$

Для определения индекса пересечения ориентируемость многообразия является существенным предположением. Если мы хотим распространить теорию на неориентируемые многообразия, мы должны будем ограничиться алгебраическими комплексами по модулю 2. Два алгебраических клеточных комплекса по модулю 2 $\boldsymbol{A}^k$ и $\boldsymbol{B}^{n-k}$, составленные из клеток дуальных разбиений, дают *индекс пересечения по модулю* 2, представляющий класс вычетов целых чисел по модулю 2. Именно,

$$\chi(\boldsymbol{A}^k, \boldsymbol{B}^{n-k}) = \check{0} \quad \text{или} \quad \check{1}$$

в зависимости от того, является ли число общих точек комплексов $\boldsymbol{A}^k$ и $\boldsymbol{B}^{n-k}$ четным или нечетным.

Формулы (1)–(5) остаются справедливыми и для комплексов по модулю 2. Нужно заменить только входящие в них целые числа вычетами этих чисел по модулю 2. На знаки в формулах можно тогда естественно не обращать внимания.

§ 71. Дуальные базы

Пусть даны два ряда «переменных» или «неизвестных»

$$x_1, x_2, \ldots, x_m \quad \text{и} \quad y_1, y_2, \ldots, y_m,$$

каждый из которых связан целочисленным унимодулярным линейным преобразованием

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}\overline{x}_1 + \alpha_{12}\overline{x}_2 + \ldots + \alpha_{1m}\overline{x}_m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m &= \alpha_{m1}\overline{x}_1 + \alpha_{m2}\overline{x}_2 + \ldots + \alpha_{mm}\overline{x}_m, \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \boldsymbol{A}_{11}\overline{y}_1 + \boldsymbol{A}_{12}\overline{y}_2 + \ldots + \boldsymbol{A}_{1m}\overline{y}_m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m &= \boldsymbol{A}_{m1}\overline{y}_1 + \boldsymbol{A}_{m2}\overline{y}_2 + \ldots + \boldsymbol{A}_{mm}\overline{y}_m, \end{aligned}\right\} \qquad (\boldsymbol{A})$$

с рядом новых переменных, отмеченных черточками наверху. Если одна из матриц преобразования является транспонированной обратной матрицей другой:

$$\boldsymbol{A} = \overbrace{\alpha}^{-1},$$

то оба преобразования, а также оба ряда переменных, называются *контрагредиентными*. $\boldsymbol{A}_{ik}$ представляет тогда алгебраическое дополнение элемента α_{ik}, деленное на детерминант $|\alpha| = \pm 1$. Соотношение контрагредиентности является, очевидно, равноправным по отношению к обоим преобразованиям.

Так как $\boldsymbol{A}^{-1} = \overbrace{\alpha}$, то решение уравнений $(\boldsymbol{A})$ дает

$$\left.\begin{aligned} \overline{y}_1 &= \alpha_{11}Y - 1 + \alpha_{12}y_2 + \ldots + \alpha_{m1}y_m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overline{y}_m &= \alpha_{1m}y_1 + \alpha_{2m}y_2 + \ldots + \alpha_{mm}y_m. \end{aligned}\right\} \qquad (\boldsymbol{A}^{-1})$$

Поэтому

$$\sum_{i=1}^{m} x_i y_i = \sum_i \sum_k \alpha_{ik}\overline{x}_k y_i = \sum_k \overline{x}_k \left(\sum_i \alpha_{ik} y_i\right) = \sum_{k=1}^{m} \overline{x}_k \overline{y}_k,$$

т. е. два контрагредиентных преобразования оставляют инвариантной «единичную билинейную форму» $\sum_{i=1}^{m} x_i y_i$. Это свойство может служить определением контрагредиентных преобразований.

В случае, когда оба ряда переменных преобразуются одинаково, мы говорим, наоборот, о когредиентных преобразованиях.

С примерами когредиентных и контрагредиентных преобразований мы встречались уже на стр. 101.

Пусть теперь снова $\boldsymbol{M}^n$ есть ориентируемое многообразие с дуальными клеточными разбиениями $\boldsymbol{M}_a^n$ и $\boldsymbol{M}_b^n$. Пусть дуальные клетки $a_\varkappa^k$ и $b_\varkappa^{n-k}$ ориентированы так, что $\chi(a_\varkappa^k, b_\varkappa^{n-k}) = +1$. Применяя к клеткам

$$a_1^k, a_2^k, \ldots, a_{\alpha^k}^k$$

унимодулярное преобразование (α), мы получим новую базу

$$\overline{a}_1^k,\ \overline{a}_2^k,\ \ldots,\ \overline{a}_{\alpha^k}^k$$

группы (решетки) всех k-мерных клеточных алгебраических комплексов разбиения $\boldsymbol{M}_a^n$. Коэффициенты $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{\alpha^k}$ алгебраического комплекса $A^k = \xi_1 a_1^k + \xi_2 a_2^k + \ldots + \xi_{\alpha^k} a_{\alpha^k}^k$ подвергаются при этом контрагредиентному преобразованию $(\boldsymbol{A})$, так как

$$b_1^{n-k},\ b_2^{n-k},\ \ldots,\ b_{\alpha^k}^{n-k}$$

Пусть теперь дуальные клетки

$$b_1^{n-k},\ b_2^{n-k},\ \ldots,\ b_{\alpha^k}^{n-k}$$

преобразуются контрагредиентно по отношению к $a_\varkappa^k$, т. е. при помощи уравнений $(\boldsymbol{A})$. Тогда коэффициенты $\eta_\varkappa$ алгебраического комплекса

$$B^{n-k} = \sum_{\varkappa=1}^{\alpha^k} \eta_\varkappa b_\varkappa^{n-k} = \sum_{\varkappa=1}^{\alpha^k} \overline{\eta}_\varkappa \overline{b}_\varkappa^{n-k}$$

также преобразуются контрагредиентно по отношению к $b_\varkappa^{n-k}$, а следовательно, и по отношению к $\xi_\varkappa$. Поэтому билинейная форма $\sum \xi_\varkappa \eta_\varkappa$ остается инвариантной:

$$\sum_{\varkappa=1}^{\alpha^k} \xi_\varkappa \eta_\varkappa = \sum_{\varkappa=1}^{\alpha^k} \overline{\xi}_\varkappa \overline{\eta}_\varkappa.$$

Так как в левой части этой формулы стоит индекс пересечения $\chi(A^k,\ B^{n-k})$, то вместе с тем показано, что если мы будем пользоваться выбранными таким образом новыми базами $\overline{a}_\varkappa^k$ и $\overline{b}_\varkappa^{n-k}$, индекс пересечения произвольных алгебраических комплексов $\sum \overline{\xi}_\varkappa \overline{a}_\varkappa^k$ и $\sum \overline{\eta}_\varkappa \overline{b}_\varkappa^{n-k}$ по-прежнему будет выражаться единичной билинейной формой.

Две базы клеточных алгебраических комплексов $\overline{a}_\varkappa^k$ и $\overline{b}_\varkappa^{n-k}$, обладающие этим свойством, называются дуальными одна по отношению к другой. Таким образом для произвольной базы $\overline{a}_1^k,\ \overline{a}_2^k,\ \ldots,\ \overline{a}_{al^k}^k$ существует одна и, очевидно, только одна дуальная база $\overline{b}_1^{n-k} \overline{b}_2^{n-k}, \ldots, \overline{b}_{\alpha^k}^k$, причем каждую пару дуальных клеточных баз можно получить из некоторой специальной пары посредством контрагредиентных унимодулярных преобразований.

Дуальные базы можно охарактеризовать еще несколько иначе, именно требованием, чтобы матрица индексов пересечения дуальных баз

$$\chi(\overline{a}_\mu^k,\ \overline{b}_\nu^{n-k}) = \delta_{\mu\nu}$$

были единичной матрицей α^k-го порядка.

Мы хотим рассмотреть сейчас, как меняются граничные соотношения (11) параграфа 69:

$$\dot{a}^k_{\varkappa} = \sum_{\iota=1}^{\alpha^{k-1}} \varepsilon^{k-1}_{\iota\varkappa} b^{k-1}_{\varkappa}, \tag{1}$$

$$\dot{b}^{n-k+1}_{\iota} = (-1)^k \sum_{\varkappa=1}^{\alpha^k} \varepsilon^{k-1}_{\iota\varkappa} b^{n-k}_{\varkappa} \tag{2}$$

при контрагредиентных преобразованиях дуальных баз. Если мы применяем к клеткам $a^k_{\varkappa}$ целочисленное унимодулярное преобразование, то *при фиксированном индексе* ι коэффициенты $\varepsilon^{k-1}_{\iota\varkappa}$ в уравнениях (1) преобразуются когредиентно по отношению к $a^k_{\varkappa}$, коэффициенты же $\varepsilon^{k-1}_{\iota\varkappa}$ в (2), напротив, контрагредиентно по отношению к $b^{n-k}_{\varkappa}$. Так как, однако, $a^k_{\varkappa}$ и $b^{n-1}_{\varkappa}$ испытывают контрагредиентные преобразования, то коэффициенты $\varepsilon^{k-1}_{\iota\varkappa}$ в (2) преобразуются когредиентно с $a^k_{\varkappa}$, т. е. так же, как в уравнении (1). Таким же образом, если мы заменим при помощи двух контрагредиентных преобразований дуальные базы $a^{k-1}_{\iota\varkappa}$ и $b^{n-k+1}_{\iota\varkappa}$ новыми дуальными базами, то *при фиксированном индексе* $\varepsilon^{k-1}_{\iota\varkappa}$ меняются в обоих уравнениях одинаковым образом когредиентно с b^{n-k+1}_{ι} (т. е. контрагредиентно с a^{k-1}_{ι}). Поэтому после преобразований коэффициенты $\overline{\varepsilon}^{k-1}_{\iota\varkappa}$ в обоих преобразованных граничных соотношениях попрежнему совпадают:

$$\dot{\overline{a}}^k_{\varkappa} = \sum_{\iota=1}^{\alpha^{k-1}} \overline{\varepsilon}^{k-1}_{\iota\varkappa} \overline{a}^{k-1}_{\iota}, \tag{$\overline{1}$}$$

$$\dot{\overline{b}}^{n-k+1}_{\iota} = (-1)^k \sum_{\varkappa=1}^{\alpha^k} \overline{\varepsilon}^{k-1}_{\iota\varkappa} \overline{b}^{n-k}_{\varkappa}. \tag{$\overline{2}$}$$

Как показано на стр. 108, при помощи целочисленных унимодулярных преобразований баз всех размерностей (от 0 до n), клеточные матрицы инциденций

$$\mathbf{E}^0, \mathbf{E}^1, \ldots, \mathbf{E}^{n-1}$$

разбиения $\boldsymbol{M}^n_a$ могут быть одновременно приведены к нормальной форме. Предположим, что матрицы $(\overline{\varepsilon}^{k-1}_{\iota\varkappa})$ уже представляют матрицы в нормальной форме. Тогда элементы базы распадаются на три типа:

$$\begin{aligned} &{}^1A^k_{\lambda} \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, \gamma^k = \gamma^{n-k-1}),\\ &{}^2A^k_{\mu} \quad (\mu = 1, 2, \ldots, p^k = p^{n-k}),\\ &{}^3A^k_{\nu} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, \gamma^{k-1} = \gamma^{n-k}). \end{aligned} \tag{3}$$

В § 22 мы обозначали элементы этих типов буквами $\overline{A}{}^k_\lambda$, $\overline{B}{}^k_\mu$, $\overline{C}{}^k_\nu$. Клеточные комплексы ${}^1A^k_\lambda$ представляют циклы, слабо гомологичные нулю; ${}^2A^k_\mu$ образуют базу слабых гомологий; ${}^3A^k_\nu$ вообще не являются циклами; граничные соотношения (1) принимают тогда вид

$$ {}^1\dot{A}^k_\lambda = 0, \quad {}^2\dot{A}^k_\mu = 0, \quad {}^3\dot{A}^k_\nu = c^{k-1}_\nu \, {}^1A^{k-1}_\nu. \tag{4} $$

Элементы базы, дуальной с базой (3), суть алгебраические комплексы, обозначаемые по порядку через

$$ \begin{aligned} &{}^3B^{n-k}_\lambda \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, \gamma^{n-k-1} = \gamma^k), \\ &{}^2B^{n-k}_\mu \quad (\mu = 1, 2, \ldots, p^{n-k} = p^k), \\ &{}^1B^{n-k}_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, \gamma^{n-k} = \gamma^{k-1}). \end{aligned} \tag{5} $$

Вследствие доказанного совпадения коэффициентов $\overline{\varepsilon}$ в (1) и (2)

$$ {}^2\dot{B}^{n-k+1}_\nu = (-1)^k c^{k-1}_\nu \, {}^1B^{n-k}_\nu, \quad {}^2\dot{B}^{n-k+1}_\zeta = 0, \quad {}^1\dot{B}^{n-k+1}_\vartheta = 0. \tag{6} $$

Отсюда следует, что матрицы инциденций, соответствующие базисным элементам $\overline{b}$, также все одновременно имеют нормальную форму, и что клеточные комплексы ${}^2B^{n-k}_\lambda$ не являются циклами, ${}^2B^{n-k}_\mu$ образуют базу слабых гомологий, а ${}^1B^{n-k}_\nu$ представляют циклы, слабо гомологичные нулю.

Так как матрица индексов пересечения дуальных баз (рис. 122) есть единичная матрица, то средняя ее часть — матрица

$$ \chi({}^2A^k_\rho, {}^2B^{n-k}_\sigma) = \delta_{\rho\sigma} \quad (\rho\sigma = 1, 2, \ldots, p^k) \tag{7} $$

также есть единичная матрица.

Итак, если понимать под двумя *дуальными базами слабых гомологий* ${}^2A^k_\mu$ и ${}^2B^{n-k}_\mu$ $(\mu = 1, 2, \ldots, p^k)$ такие базы слабых гомологий дуальных клеточных разбиений, матрица индексов пересечения которых (7) есть единичная матрица, то отсюда следует существование дуальных баз слабых гомологий.

Остается только один шаг, чтобы получить следующий результат.

Теорема I. *Для каждой заданной k-мерной базы слабых гомологий существует дуальная $(n-k)$-мерная база, определяемая однозначно с точностью до циклов слабо гомологичных нулю.*

В самом деле, переход от специальной базы слабых гомологий ${}^2A^k_\mu$ к произвольной совершается при помощи целочисленного унимодулярного преобразования и прибавления слабо гомологичных нулю циклов. Но преобразование базы ${}^2A^k_\mu$ однозначно определяет преобразование

дуальной базы слабых гомологий ${}^2B_\mu^{n-k}$. Именно, так как мы требуем, чтобы матрица индексов пересечения после преобразований снова была единичной матрицей (7), то преобразования баз ${}^2A_\mu^k$ и ${}^2B_\mu^{n-k}$ должны быть контрагредиентными. Прибавление слабо гомологичных нулю циклов не меняет индексов пересечений. Поэтому как к элементам новой k-мерной, так и к элементам новой $(n-k)$-мерной базы можно прибавлять циклы, слабо гомологичные нулю.

Существование дуальных баз слабых гомологий раскрывает более глубокие корни закона двойственности Пуанкаре, выражающегося соотношением $p^k = p^{n-k}$ между числами Бетти. Точно так же может быть топологически обоснованно установленное в § 69 двойственное соотношение между k-мерными и $n-k-1$-мерными коэффициентами кручения.

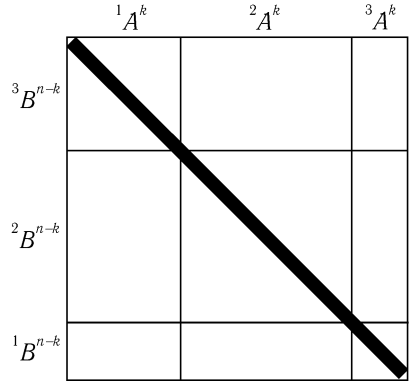


Рис. 122

Первые ρ^k из комплексов ${}^1A_\lambda^k$ в (3), т. е. комплексы

$$ {}^1A_1^k,\ {}^1A_2^k,\ \ldots,\ {}^1A_{\rho^k}^k $$

образуют k-мерную базу кручения (см. стр. 97). Комплексы же

$$ {}^1B_1^{n-k-1},\ {}^1B_2^{n-k-1},\ \ldots,\ {}^1B_{\rho^k}^{n-k-1} $$

образуют базу кручения размерности $n-k-1$. Но матрица индексов пересечения

$$ \chi({}^1A_\sigma^k,\ {}^3B_\tau^{n-k}) = \delta_{\sigma\tau} \quad (\sigma,\ \tau = 1,\ 2,\ \ldots,\ \rho^k) $$

как часть матрицы, изображенной на рис. 122, есть единичная матрица. Поэтому, полагая для сокращения

$$ {}^1A_\sigma^k = A_\sigma^k, \quad (-1)^{k+1}\,{}^1B_\tau^{n-k-1} = B_\tau^{n-k-1} \quad \text{и} \quad {}^3B_\tau^{n-k} = B_\tau^{n-k}, $$

мы получаем следующую теорему:

Теорема II. *Существует k-мерная база кручения*

$$ A_1^k,\ A_2^k,\ \ldots,\ A_{\rho^k}^k $$

и $(n-k-1)$-мерная база кручения

$$ B_1^{n-k-1},\ B_2^{n-k-1},\ \ldots,\ B_{\rho^k}^{n-k-1}, $$

обладающие тем свойством, что если

$$B_1^{n-k},\ B_2^{n-k},\ \ldots,\ B_{\rho^k}^{n-k}$$

— произвольные комплексы, для которых

$$\dot{B}_1^{n-k} = c_1^k B_1^{n-k-1},\ \dot{B}_2^{n-k} = c_2 B_2^{n-k-1},\ \ldots,\ \dot{B}_{\rho^k}^{n-k} = c_{\rho^k}^k B_{\rho^k}^{n-k-1}$$

(c_τ^k суть k-мерные коэффициенты кручения), то матрица индексов пересечения

$$\chi(A_\sigma^k,\ B_\tau^{n-k} = \delta_{\sigma\tau})$$

есть единичная матрица[43].

Мы доказали эту теорему для случая, когда натянутый на $c_\tau^k B_\tau^{n-k-1}$ $(n-k)$-мерный комплекс B_τ^{n-k} представляет специальный комплекс ${}^3B_\tau^{n-k}$. Однако ничего не изменится, если мы возьмем комплекс B_τ^{n-k} произвольным. В самом деле, по теореме I § 70

$$\chi(A_\sigma^k,\ B_\tau^{n-k} - {}^3B_\tau^{n-k}) = 0,$$

так как A_σ^k слабо гомологичен нулю, а $B_\tau^{n-k} - {}^3B_\tau^{n-k}$ цикл. Поэтому

$$\chi(A_\sigma^k,\ B_\tau^{n-k}) = \chi(A_\sigma^k,\ {}^3B_\tau^{n-k}).$$

Рассуждения этого параграфа могут быть проведены также для алгебраических комплексов по модулю 2. Тогда получится следующая теорема, соответствующая теореме I:

Теорема III. *Для каждой k-мерной базы слабых гомологий по модулю 2*

$$\boldsymbol{A}_1^k,\ \boldsymbol{A}_2^k,\ \ldots,\ \boldsymbol{A}_{q^k}^k$$

существует дуальная $(n-k)$-мерная база

$$\boldsymbol{B}_1^{n-k},\ \boldsymbol{B}_2^{n-k},\ \ldots,\ \boldsymbol{B}_{q^k}^{n-k},$$

такая, что матрица индексов пересечений по модулю 2 представляет единичную матрицу q^k-го порядка.

Примеры, иллюстрирующие изложенное в этом параграфе, приведены в § 75.

§ 72. Клеточная аппроксимация

До сих пор мы рассматривали только пересечения и индексы пересечений клеточных алгебраических комплексов, взятых в дуальных клеточных разбиениях. Наша ближайшая цель — установить зависимость полученных результатов от специального разбиения многообразия на клетки и определить индексы пересечений для произвольных особых алгебраических комплексов. Это осуществляется посредством аппроксимации особых комплексов. Однако теперь приходится рассматривать уже не симплициальную аппроксимацию, а аппроксимацию клетками дуальных разбиений. Такую клеточную аппроксимацию мы сейчас определим. Дальнейшие рассмотрения относятся к произвольному клеточному комплексу $\boldsymbol{K}^n$, относительно которого мы не предполагаем, что он является h-многообразием.

Основной теоремой является здесь следующая теорема о приближении:

Теорема I. *Пусть A^k — особый алгебраический комплекс клеточного комплекса $\boldsymbol{K}^{n*}$ и $\dot{A}^k = A^{k-1}$ есть клеточный комплекс на $\boldsymbol{K}^{n**}$, в частности нулевой $(k-1)$-мерный комплекс. Тогда существует гомологичный комплексу A^k клеточный комплекс $\overline{A}^k$.*

Эта теорема представляет распространение теоремы о симплициальном приближении главы IV на случай клеточных комплексов.

Доказательство. Так как граница A^k есть (при $k > 0$) клеточный алгебраический комплекс, то она является одновременной симплициальным комплексом. Поэтому по теореме о приближении § 28 существует гомологичный комплексу A^k симплициальный алгебраический комплекс $'A^k$ (т. е. алгебраический комплекс барицентрического подразделения $\overset{*}{\boldsymbol{K}}{}^n$ клеточного комплекса $\boldsymbol{K}^n$), а для этого комплекса по теореме I § 67 существует гомологичный клеточный комплекс. Для $k = 0$ теорема остается справедливой, доказательство только упрощается, так как тогда не нужно обращать внимания на границу.

Следствие. *Если $\langle A^k \rangle$ — наименьший клеточный подкомплекс, на котором лежит алгебраический комплекс A^k, то можно допустить, что $\overline{A}^k$ также лежит на $\langle A^k \rangle$ и что $A^k \sim \overline{A}^k$ на $\langle A^k \rangle$.*

Наименьшим клеточным подкомплексом $\langle A^k \rangle$ называется пересечение всех клеточных подкомплексов, на которых лежит алгебраический комплекс A^k. Наименьший подкомплекс пуст в том и только в том

*Мы будем говорить коротко: A^k — особый алгебраический комплекс клеточного комплекса $\boldsymbol{K}^n$, вместо того, чтобы говорить: A^k есть особый алгебраический комплекс того полиэдра, клеточным разбиением которого является комплекс $\boldsymbol{K}^n$.

**Для $k = 0$ это условие, естественно, отпадает.

случае, когда A^k есть нулевой k-мерный комплекс*. Сформулированное следствие непосредственно вытекает из теоремы I: мы выбрасываем из $\boldsymbol{K}^n$ все клетки, не принадлежащие к $\langle A^k\rangle$, рассматриваем таким образом A^k как алгебраический комплекс клегочного комплекса $\langle A^k\rangle$, и вместо того, чтобы применять теорему I к $\boldsymbol{K}^n$, применяем ее к $\langle A^k\rangle$.

Мы хотим теперь аппроксимировать клетками произвольный «особый комплекс» $\boldsymbol{C}^m$ в $\boldsymbol{K}^n$. Под особым комплексом мы понимаем множество, состоящее из конечного числа особых невырождающихся симплексов, причем наряду с каждым особым симплексом к этому множеству причисляются также все его невырождающиеся стороны. Клеточная аппроксимация производится следующим образом: сначала все особые симплексы комплекса $\boldsymbol{C}^m$ снабжаются произвольными ориентациями. Обозначим такие ориентированные симплексы через

$$X_1^0,\ X_2^0,\ \ldots,\ X_{\beta^0}^0;\ \ldots,\ X_1^m,\ X_2^m,\ \ldots,\ X_{\beta^m}^m.$$

Каждому симплексу $X_\varkappa^k$ ставится в соответствие его *аппроксимация* — k-мерный клеточный алгебраический комплекс $\mathrm{Ап}\, X_\varkappa^k$, а также $(k+1)$-мерный особый комплекс $\mathrm{Соед}\, X_\varkappa^k$ — *комплекс, соединяющий* симплекс $X_\varkappa^k$ с его аппроксимацией. Тогда каждому особому алгебраическому комплексу

$$U^k = \sum u_\varkappa X_\varkappa^k$$

соответствует определенная аппроксимация

$$\mathrm{Ап}\, U^k = \sum u_\varkappa \mathrm{Ап}\, X_\varkappa^k$$

и особый соединяющий алгебраический комплекс

$$\mathrm{Соед}\, U^k = \sum u_\varkappa \mathrm{Соед}\, X_\varkappa^k.$$

Комплексы $\mathrm{Ап}\, X_\varkappa^k$ и $\mathrm{Соед}\, X_\varkappa^k$ теперь должны быть выбраны так, чтобы для каждого алгебраического комплекса U^k выполнялись следующие условия:

a) $\mathrm{Ап}\, U^k$ и $\mathrm{Соед}\, U^k$ лежат на наименьшем клеточном подкомплексе, содержащем U^k;

b) $(\mathrm{Ап}\, U^k)^{\cdot} = \mathrm{Ап}\, \dot{U}^k$;

c) $(\mathrm{Соед}\, U^k)^{\cdot} = U^k - \mathrm{Ап}\, U^k - \mathrm{Соед}\, \dot{U}^k$**.

---

*В этом случае $\langle A^k\rangle$ не представляет никакого подкомплекса в смысле стр. 66, так как пустой подкомплекс мы исключили там из рассмотрения.

**Для $k = 0$ условие b) отпадает, а в c) нужно поставить $\mathrm{Соед}\, u^k = 0$. Структура формулы c) в точности совпадает со структурой соответствующей формулы стр. 138.

Если каждому особому симплексу отнесен таким способом клеточный алгебраический комплекс, то мы говорим, что особый комплекс $\boldsymbol{C}^m$ в $\boldsymbol{K}^n$ клеточно аппроксимирован.

Очевидно, достаточно чтобы требования a), b), c) выполнялись лишь по отношению к особым симплексам $U^k = X^k_{\varkappa}$. Тогда они выполняются для произвольного алгебраического комплекса U^k сами собой.

Мы утверждаем теперь следующее:

Теорема II. *Каждый особый комплекс $\boldsymbol{C}^m$ может быть клеточно аппроксимирован.*

Мы покажем даже больше: *если особый подкомплекс с комплекса $\boldsymbol{C}^{m*}$ уже аппроксимирован, то аппроксимацию его можно дополнить до аппроксимации всего $\boldsymbol{C}^m$.*

Доказательство. Выберем из множества всех симплексов комплекса $\boldsymbol{C}^m$, не принадлежащих к $\boldsymbol{c}$, симплекс X^k наименьшей размерности. Либо это 0-мерный симплекс, либо — в случае $k > 0$ — все невырождающиеся стороны симплекса X^k принадлежат подкомплексу $\boldsymbol{c}$. Мы покажем сейчас, как построить для X^k аппроксимацию и связывающий комплекс.

Пусть сначала $k > 0$. Тогда аппроксимации и связывающие комплексы невырождающихся сторон симплекса X^k уже определены, так как все такие стороны принадлежат к $\boldsymbol{c}$. В частности, комплекс

$$X^k - \text{Соед}\,\dot{X}^k \qquad (1)$$

является тогда вполне определенным особым алгебраическим комплексом. Его граница есть

$$\dot{X}^k - (\text{Соед}\,\dot{X}^k)^{\cdot}.$$

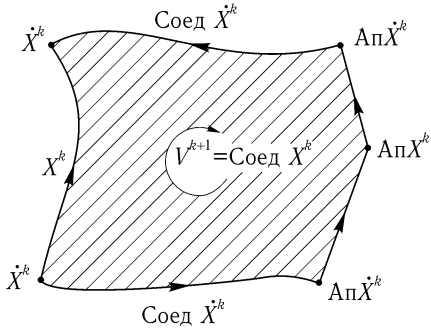


Рис. 123

Обозначая здесь временно $\dot{X}^k$ через U^{k-1} и применяя ко второму члену формулу, соответствующую формуле c) для случая размерности $k-1$, мы получаем

$$= \dot{X}^k - \left(\dot{X}^k - \text{Ап}\,\dot{X}^k - \text{Соед}\,(\dot{X}^k)^{\cdot}\right) = \text{Ап}\,X^k. \qquad (2)$$

Но этот алгебраический комплекс, как аппроксимация, представляет клеточный комплекс (рис. 123). Поэтому, обозначая алгебраический

*То-есть особый комплекс, симплексы которого являются одновременно симплексами комплекса $\boldsymbol{C}^m$.

комплекс (1) временно через A^k, мы можем применить к нему теорему I. Из этой теоремы следует, что существует клеточный алгебраический комплекс $\overline{A}^k \sim A^k$. Граница комплекса $\overline{A}^k$ совпадает с $\dot{A}^k$, т. е. выражается формулой (2). Определим теперь в качестве Ап X^k клеточный алгебраический комплекс $\overline{A}^k$. Так как $(\overline{A}^k)^{\cdot} = \dot{A}^k$, то

$$(\text{Ап } X^k)^{\cdot} = \text{Ап } \dot{X}^k. \tag{3}$$

Если теперь $\langle X^k \rangle$ есть наименьший клеточный подкомплекс комплекса $\boldsymbol{K}^n$, содержащий X^k, то $\dot{X}^k$ также принадлежит к $\langle X^k \rangle$. Но тогда в силу a) и Соед $\dot{X}^k$, а следовательно, и весь комплекс (1) принадлежит $\langle X^k \rangle$. Далее, из следствия теоремы I вытекает, что $\langle X^k \rangle$ содержит и аппроксимацию комплекса (1), т. е. $\overline{A}^k = \text{Ап } X^k$. Наконец, по той же теореме $A^k \sim \overline{A}^k$ на $\langle X^k \rangle$, т. е. на $\langle X^k \rangle$ существует особый соединяющий алгебраический комплекс V^{k+1} с границей $A^k - \overline{A}^k$. Полагая

$$V^{k+1} = \text{Соед } X^k,$$

мы получаем

$$(\text{Соед } X^k)^{\cdot} = \dot{V}^{k+1} = A^k - \overline{A}^k = (X^k - \text{Соед } \dot{X}^k) - \text{Ап } X^k.$$

Таким образом мы построили алгебраические комплексы Ап X^k и Соед X^k и доказали, что условия a), b), c) выполняются для $U^k = X^k$. По предположению, условия a), b), c) выполняются для всех симплексов комплекса $\boldsymbol{c}$. Следовательно, они выполняются и для всех особых алгебраических комплексов, составленных из симплексов комплекса $\boldsymbol{c}$ и нового дополнительного симплекса X^k. Дополняя комплекс $\boldsymbol{c}$ поочередно одним симплексом за другим и строя соответствующие аппроксимации, мы получим в конце концов аппроксимацию всего комплекса $\boldsymbol{C}^m$.

Остается рассмотреть только простейший случай, когда рассматриваемый симплекс X^k имеет размерность 0. Наименьший клеточный комплекс $\langle X^0 \rangle$ представляет тогда клетку наименьшего числа измерений, содержащую X^0. По следствию из теоремы I существует клеточная аппроксимация Ап X^0, гомологичная X^0 на $\langle X^0 \rangle$, а вместе с тем и особый связывающий комплекс Соед X^0 с границей $X^0 - \text{Ап } X^0$. Этим доказательство заканчивается.

Пусть теперь A^k есть произвольный особый k-мерный алгебраический комплекс, k-мерные симплексы его, вместе со всеми их невырождающимися сторонами размерностей от $k-1$ до 0, образуют особый комплекс $\boldsymbol{A}^k$. Тогда для аппроксимации A^k нужно аппроксимировать комплекс $\boldsymbol{A}^k$.

Рассмотрим особые алгебраические комплексы произвольных размерностей

$$A_1^{k_1},\ A_2^{k_2},\ \ldots,\ A_r^{k_r}. \tag{4}$$

Симплексы этих комплексов, вместе с их невырождающимися сторонами, образуют особый комплекс $\boldsymbol{C}$. Мы говорим, что комплексы (4) *аппроксимируются одновременно*, если аппроксимируется комплекс $\boldsymbol{C}$. В этом случае каждое линейное соотношение между алгебраическими комплексами (4) и их границами оказывается справедливым и по отношению к аппроксимациям, т. е. если

$$\Phi(A_1^{k_1},\ A_2^{k_2},\ \ldots,\ A_r^{k_r},\ \dot{A}_1^{k_1},\ \dot{A}_2^{k_2},\ \ldots,\ \dot{A}_r^{k_r}) = 0$$

есть линейное соотношение с целыми коэффициентами, то имеет место также соотношение

$$\Phi\big(\text{Ап}\ A_1^{k_1},\ \text{Ап}\ A_2^{k_2},\ \ldots,\ \text{Ап}\ A_r^{k_r},\ (\text{Ап}\ A_1^{k_1})^{\cdot},\ (\text{Ап}\ A_2^{k_2})^{\cdot},\ \ldots,\ (\text{Ап}\ A_r^{k_r})^{\cdot}\big)=0.$$

Это вытекает из того, что $\text{Ап}\ (A+B) = \text{Ап}\ A + \text{Ап}\ B$ и $\text{Ап}\ \dot{A} = (\text{Ап}\ A)^{\cdot}$. Однако если алгебраические комплексы (4) аппроксимируются не одновременно, а каждый сам по себе, независимо друг от друга, то соотношения между комплексами могут, вообще говоря, и не переноситься на аппроксимации. Если, например, $A_1^{k_1}$ и $A_2^{k_2}$ имеют одинаковые границы, то при «раздельной» аппроксимации $\text{Ап}\ A_1^{k_1}$ и $\text{Ап}\ A_2^{k_2}$ могут уже не совпадать.

Если

$$A_1^{k_1},\ A_2^{k_2},\ \ldots,\ A_s^{k_s} \tag{5}$$

— подсистема системы (4), причем комплексы (5) аппроксимированы одновременно, то эту аппроксимацию можно дополнить до одновременной аппроксимации всей системы (4). В самом деле, особый комплекс, соответствующий алгебраическим комплексам (5), является подкомплексом комплекса $\boldsymbol{C}$.

Все наши рассуждения могут быть проведены, очевидно, и по отношению к алгебраическим комплексам по модулю 2.

§ 73. Индексы пересечения особых алгебраических комплексов

Рассмотрим снова ориентируемое h-многообразие $\boldsymbol{M}^n$, на котором при помощи ориентирующего комплекса O^n (стр. 169) установлена определенная ориентация, n-мерные симплексы симплициального разбиения многообразия $\boldsymbol{M}^n$ могут быть когерентно ориентированы, причем только одним способом, так, что получающийся при этом

n-мерный алгебраический комплекс $\sim O^n$. Мы хотим определить сейчас индекс пересечения $\chi(A^k, B^{n-k})$ *двух произвольных особых комплексов* A^k и B^{n-k}. При этом приходится сделать, конечно, одно ограничение:

(E). *Граница* A^{k-1} *комплекса* A^k *не имеет общих точек с* B^{n-k}, *а граница* B^{n-k-1} *комплекса* B^{n-k} *не имеет общих точек с* A^k.

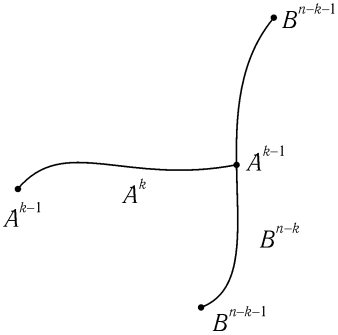


Рис. 124

Для двух клеточных комплексов A^k и B^{n-k} дуальных разбиений это условие выполняется само собой, так как две клетки размерностей k и $n-k$, взятые из дуальных разбиений, либо не имеют совсем общих точек, либо имеют общий центр. Для особых же комплексов ограничение (E) необходимо. В самом деле, при определении индекса пересечения мы пользуемся клеточными аппроксимациями. Поэтому если наше ограничение не выполняется, как на рис. 124, то на какие бы мелкие клетки объемлющее h-многообразие $\boldsymbol{M}^n$ не было разбито, всегда можно подобрать аппроксимирующие клеточные комплексы так, чтобы они по произволу либо пересекались, либо нет.

Рассмотрим теперь, наряду с имеющимися особыми алгебраическими комплексами A^k и B^{n-k}, два особых комплекса $'A^k$ и $'B^{n-k}$, также удовлетворяющие условию (E) (см. рис. 125). Границы их обозначим так:

$$\dot{A}^k = A^{k-1}, \qquad '\dot{A}^k = '\!A^{k-1}, \tag{1a}$$

$$\dot{B}^{n-k} = B^{n-k-1}, \quad '\dot{B}^{n-k} = '\!B^{n-k-1}, \tag{1b}$$

Пусть, далее, U^k, U^{k+1}, V^{n-k}, V^{n-k+1} — соединяющие алгебраические комплексы, удовлетворяющие следующим формулам соединения*:

$$\left.\begin{aligned} \dot{U}^k &= A^{k-1} - '\!A^{k-1}, \\ \dot{U}^{k+1} &= A^k - '\!A^k - U^k, \end{aligned}\right\} \tag{2a}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{V}^{n-k} &= B^{n-k-1} - '\!B^{n-k-1}, \\ \dot{V}^{n-k+1} &= B^{n-k} - '\!B^{n-k} - V^{n-k}, \end{aligned}\right\} \tag{2b}$$

*На рис. 125 A^{k-1} (а также $'A^{k-1}$, B^{n-k-1}, $'B^{n-k-1}$) состоит из двух точек, снабженных противоположными ориентациями (знаками).

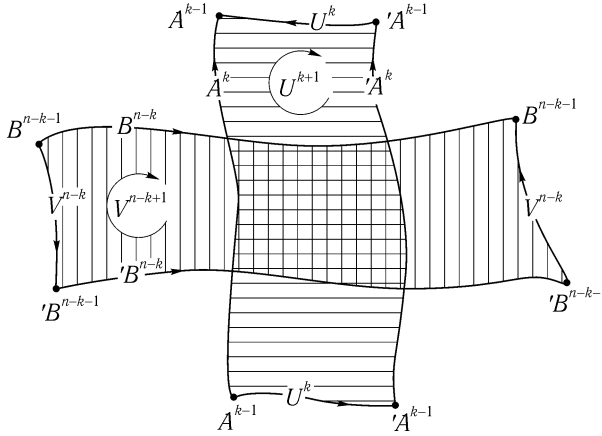


Рис. 125

Наконец, пусть не только комплексы A^k и B^{n-k-1} не имеют общих точек, но и каждый из комплексов

$$A^k,\ {}'A^k,\ U^{k+1} \tag{3a}$$

не имеет общих точек ни с одним из комлексов

$$B^{n-k-1},\ {}'B^{n-k-1},\ V^{n-k}, \tag{4b}$$

а каждый из комплексов

$$B^{n-k},\ {}'B^{n-k},\ V^{n-k+1} \tag{3b}$$

не имеет общих точек ни с одним из комплексов

$$A^{k-1},\ {}'A^{k-1},\ U^k. \tag{4a}$$

Мы будем называть две пары A^k, B^{n-k} и ${}'A^k$, ${}'B^{n-k}$, для которых существуют соединяющие комплексы описанного вида, *связанными парами*. Если, например, комплексы ${}'A^k$, ${}'B^{n-k}$ получаются соответственно из A^k и B^{n-k} при помощи достаточно малой *деформации*, то обе пары являются связанными. В самом деле, при деформации комплексы A^k, A^{k-1}, B^{n-k}, B^{n-k-1} описывают некоторые соединяющие комплексы U^{k+1}, U^k, V^{n-k+1}, V^{n-k}, для которых как раз выполняются формулы (2a) и (2b) (см. стр. 152), и если деформация достаточно мала, то комплексы (3a) не имеют общих точек с (4b), а (3b) с (4a).

При *аппроксимации* алгебраических комплексов A^k, B^{n-k} клетками достаточных мелких дуальных разбиений $\boldsymbol{M}_a^n$ и $\boldsymbol{M}_b^n$ также получается связанная с A^k, B^{n-k} пара. Действительно, пусть $\langle A^k\rangle$ и $\langle A^{k-1}\rangle$

суть наименьшие клеточные подкомплексы разбиения $\boldsymbol{M}_a^n$, содержащие A^k и A^{k-1}, а $\langle B^{n-k}\rangle$ и $\langle B^{n-k-1}\rangle$ — аналогичные подкомплексы (разбиения $\boldsymbol{M}_b^n$) для B^{n-k} и B^{n-k-1}. Пусть, далее, клетки $\boldsymbol{M}_a^n$ и $\boldsymbol{M}_b^n$ настолько малы, что $\langle A^k\rangle$ не имеет общих точек с $\langle B^{n-k-1}\rangle$, а $\langle B^{n-k}\rangle$ — с $\langle A^{k-1}\rangle$. Тогда клеточные аппроксимации комплексов A^k, A^{k-1}, B^{n-k}, B^{n-k-1} и принадлежащие к ним особые соединяющие комплексы также расположены на этих минимальных подкомплексах и удовлетворяют условиям относительно отсутствия общих точек, налагаемых на связанные пары. Остается показать только существование достаточно мелких разбиений, обладающих требуемыми свойствами. Это можно сделать так: будем рассматривать $\boldsymbol{M}^n$ как подмножество некоторого евклидова пространства и будем измерять расстояния между точками $\boldsymbol{M}^n$ в (обычной) метрике этого пространства. Точки комплекса A^k и B^{n-k-1} образуют в евклидовом пространстве два замкнутых подмножества. Пусть δ' — расстояние между этими подмножествами. Очевидно $\delta' > 0$. Пусть точно так же $\delta'' > 0$ (здесь δ'' — расстояние между A^{k-1} и B^{n-k}). Пусть, наконец, δ — меньшее из чисел δ' и δ''. Тогда для того чтобы быть уверенным, что $\langle A^k\rangle$ не имеет общих точек с $\langle B^{n-k-1}\rangle$, а $\langle A^{k-1}\rangle$ с $\langle B^{n-k}\rangle$, достаточно сделать клетки разбиений $\boldsymbol{M}_a^n$ и $\boldsymbol{M}_b^n$ меньшими по диаметру, чем $\frac{\delta}{2}$. Существование же клеточных разбиений с клетками произвольной малости вытекает из того, что $\boldsymbol{M}^n$ можно разбить на сколь угодно малые симплексы, а каждое (барицентрически подразделенное) симплициальное разбиение есть клеточное разбиение.

Мы определим теперь индекс пересечения двух удовлетворяющих условию (E) особых комплексов следующим образом: *мы заменяем* A^k, B^{n-k} *двумя клеточными комплексами* $'A^k$, $'B^{n-k}$, *принадлежащими соответственно дуальным разбиениям* $'\boldsymbol{M}_a^n$ *и* $'\boldsymbol{M}_b^n$ *и образующими с* A^k, B^{n-k} *связанную пару, и определяем в качестве индекса пересечения комплексов* A^k *и* B^{n-k} *определенный в* § 70 *индекс пересечения*

$$\chi('A^k, 'B^{n-k}).$$

§ 74. Инвариантность индекса пересечения

Мы должны теперь показать, что определение индекса пересечения не зависит от выбора клеточных разбиений $'\boldsymbol{M}_a^n$ и $'\boldsymbol{M}_b^n$ и от выбора связанной с A^k, B^{n-k} пары клеточных комплексов этих разбиений. Пока мы не доказали этого, символ $\chi(A^k, B^{n-k})$ имеет смысл только для двух алгебраических комплексов, составленных из клеток заданных дуальных разбиений*.

* Индекс указывающий размерность n h-многообразия $\boldsymbol{M}$, мы для простоты пока опускаем. При доказательстве теорем I–III мы считаем, что $\boldsymbol{M}$ расположено в евкли-

Теорема I. *Пусть* A^k, B^{n-k} *и* $'A^k$, $'B^{n-k}$ *— две связанных пары особых алгебраических комплексов,* $\overline{A}^k$, $'\overline{A}^k$ *— одновременные аппроксимации комплексов* A^k *и* $'A^k$ *в клеточном разбиении* $\boldsymbol{M}_a$ *и, наконец,* $\overline{B}^{n-k}$, $'\overline{B}^{n-k}$ *— одновременные аппроксимации комплексов* B^{n-k} *и* $'B^{n-k}$ *в дуальном клеточном разбиении* $\boldsymbol{M}_b$. *Тогда, если клетки разбиений* $\boldsymbol{M}_a$ *и* $\boldsymbol{M}_b$ *достаточно малы, т. е. меньше надлежащим образом выбранного числа* δ, *то*

$$\chi(\overline{A}^k, \overline{B}^{n-k}) = \chi('\overline{A}^k, '\overline{B}^{n-k}).$$

Доказательство. Выберем δ настолько малым, чтобы не только алгебраические комплексы (3a) и (4b), и соответственно, (3b) и (4a) предыдущего параграфа, но даже наименьшие клеточные подкомплексы, содержащие эти алгебраические комплексы, не имели общих точек. При этом наименьшие подкомплексы для алгебраических комплексов (3a) и (4a) берутся на $\boldsymbol{M}_a$, а для комплексов (3b) и (4b) — на $\boldsymbol{M}_b$. Тогда имеющиеся уже одновременные аппроксимации алгебраических комплексов A^k, $'A^k$ в разбиении $\boldsymbol{M}_b$ можно дополнить до одновременной аппроксимации всех комплексов (3a) и (4a). Таким же образом одновременные аппроксимации алгебраических комплексов B^{n-k} и $'B^{n-k}$ в разбиении $\boldsymbol{M}_b$, можно дополнить до одновременной аппроксимации всех комплексов (3b) и (4b). Будем обозначать аппроксимации комплекса при помощи черты наверху. Тогда имеют место формулы $(\overline{1})$, $(\overline{1}b)$, $(\overline{2})$, $(\overline{2}b)$, получающиеся из формул (1a), (1b), (2a), (2b) надчеркиванием всех входящих в эти формулы алгебраических комплексов (это следует из § 72, стр. 328). Надчеркнутые алгебраические комплексы $(\overline{3})$, соответствующие комплексам (3a), не имеют общих точек с $(\overline{4}b)$, комплексы же $(\overline{3}b)$ не имеют общих точек с $(\overline{4})$.

Мы теперь будем иметь дело только с надчеркнутыми комплексами, из которых $(\overline{3}a)$ и $(\overline{4})$ суть клеточные алгебраические комплексы на $\boldsymbol{M}_a$, а $(\overline{3}b)$, $(\overline{4}b)$ — комплексы дуального разбиения $\boldsymbol{M}_b$. Положение надчеркнутых комплексов весьма мало отличается от положения ненадчеркнутых. Поэтому надчеркнутые комплексы можно иллюстрировать тем же рисунком (рис. 125).

Дальнейшие рассуждения носят уже чисто комбинаторный характер, так как рассматриваемые алгебраические комплексы являются комплексами дуальных клеточных разбиений. Доказательство того, что индексы $\chi(\overline{A}^k, \overline{B}^{n-k})$ и $\chi('\overline{A}^k, '\overline{B}^{n-k})$ совпадают, разбивается на две части. Пользуясь формулой (5) § 70, мы получаем,

$$\chi\big(\overline{A}^k, (\overline{V}^{n-k+1})^{\cdot}\big) = (-1)^k \chi\big((\overline{A}^k)^{\cdot}, \overline{V}^{n-k+1}\big) = 0,$$

довом пространстве. При этом выражение «клетка $< \delta$» означает, что рассматриваемый *по отношению к этому евклидову пространству* диаметр клетки меньше δ.

так как $\overline{A}^{k-1}\big(=(\overline{A}^k)\cdot\big)$ и $\overline{V}^{n-k+1}$ не имеют общих точек. С другой стороны, подставляя в формулу $(\overline{2}b)$ $(\overline{V}^{n-k+1})\cdot$, мы получим

$$\chi\big(\overline{A}^k, (\overline{V}^{n-k+1})^{\cdot}\big) = \chi(\overline{A}^k, \overline{B}^{n-k} - {}'\overline{B}^{n-k} - \overline{V}^{n-k}) = \\ = \chi(\overline{A}^k, \overline{B}^{n-k} - {}'\overline{B}^{n-k}),$$

так как $\overline{A}^k$ и $\overline{V}^{n-k}$ не имеют общих точек. Поэтому

$$\chi(\overline{A}^k, \overline{B}^{n-k}) = \chi(\overline{A}^k, {}'\overline{B}^{n-k}). \tag{1}$$

Точно так же, в виду отсутствия общих точек у $\overline{U}^{k+1}$ и ${}'\overline{B}^{n-k-1}$,

$$\chi\big((\overline{U}^{k+1})^{\cdot}, {}'\overline{B}^{n-k}\big) = (-1)^{k+1}\chi\big(\overline{U}^{k+1}, ({}'\overline{B}^{n-k})^{\cdot}\big) = 0.$$

С другой стороны, подставляя в формулу $(\overline{2})$ $(\overline{U}^{k+1})$, мы получим

$$\chi\big((\overline{U}^{k+1})^{\cdot}, {}'\overline{B}^{n-k}\big) = \chi(\overline{A}^k - {}'\overline{A}^k - \overline{U}^k, {}'\overline{B}^{n-k}) = \\ = \chi(\overline{A}^k - {}'\overline{A}^k, {}'\overline{B}^{n-k}),$$

так как $\overline{U}^k$ и ${}'\overline{B}^{n-k}$ не имеют общих точек. Таким образом

$$\chi(\overline{A}^k, {}'\overline{B}^{n-k}) = \chi({}'\overline{A}^k, {}'\overline{B}^{n-k}). \tag{2}$$

Из формул же (1) и (2) вытекает требуемый результат:

$$\chi(\overline{A}^k, \overline{B}^{n-k}) = \chi({}'A^k, {}'\overline{B}^{n-k}).$$

Рассмотрим теперь, что получается при переходе от одного клеточного разбиения к другому.

Теорема II^k. *Пусть a^k и b^{n-k} — две ориентированных дуальных клетки дуальных разбиений $\boldsymbol{M}_a$ и $\boldsymbol{M}_b$, h-многообразия $\boldsymbol{M}$, причем индекс пересечения этих клеток :*

$$\eta = \chi(a^k, b^{n-k}) = \pm 1.$$

Тогда аппроксимации клеток a^k и b^{n-k} в новых дуальных разбиениях $\overline{\boldsymbol{M}}_a$ и $\overline{\boldsymbol{M}}_b$, клетки которых меньше, чем надлежащим образом выбранное число δ, имеют такой же индекс пересечения[*] *:*

$$\eta = \chi(\overline{a}^k, \overline{b}^{n-k}).$$

[*] Заметим, что символ χ фигурирует здесь в двух различных значениях, в первый раз как индекс пересечения по отношению к дуальным разбиениям $\boldsymbol{M}_a$ и $\boldsymbol{M}_b$, а во второй раз — по отношению к $\boldsymbol{M}_a$ и $\overline{\boldsymbol{M}}_b$.

a^k представляет когерентно ориентированную симплициальную звезду барицентрического подразделения $\overset{*}{\boldsymbol{M}}$ комплекса $\boldsymbol{M}_a$, т. е. является по отношению к $\overline{\boldsymbol{M}}_a$ особым k-мерным комплексом, который может быть клеточно аппроксимирован в смысле § 72. Таким образом $\overline{a}_k$ есть клеточный комплекс на $\overline{\boldsymbol{M}}_a$. Точно так же $\overline{b}^{n-k}$ есть клеточный комплекс на дуальном разбиении $\overline{\boldsymbol{M}}_b$.

Доказательство теоремы II^k осуществляется методом полной индукции по отношению к k. Докажем сначала теорему II^0. В этом случае мы имеем дело с дуальными клетками a^0 и b^n. Ориентируем оба клеточные разбиения $\boldsymbol{M}_b$ и $\overline{\boldsymbol{M}}_b$ когерентно так, чтобы получающиеся при этом комплексы B_b^n и $\overline{M}_b^n$ были гомологичны ориентирующему комплексу O^n:

$$M_b^n \sim \overline{M}_b^n \sim O^n. \tag{3}$$

Пусть $\varepsilon_b = \pm 1$ представляет коэффициент, с которым b^n входит в M_b^n, а $'b^n$ является суммой отличных от b^n n-мерных клеток комплекса M_b^n, так что

$$M_b^n = \varepsilon_b b^n + {}'b^n. \tag{4}$$

Тогда заданная аппроксимация клетки b^n в $\overline{\boldsymbol{M}}_b$ может быть дополнена до одновременной аппроксимации b^n и $'b^n$. Пусть при этом $'b^n$ переходит в $'\overline{b}^n$. Аппроксимацией комплекса $M_b^n = \varepsilon_b b^n + {}'b^n$ является тогда алгебраический комплекс $\varepsilon_b \overline{b}^n + {}'\overline{b}^n$. А так как каждый цикл при аппроксимации переходит в гомологичный цикл и $\overline{M}_b^n$, является единственным на $\overline{\boldsymbol{M}}_b$ циклом, гомологичным циклу M_b^n, то

$$\overline{M}_b^n = \varepsilon_b \overline{b}^n + {}'\overline{b}^n. \tag{4}$$

Предположим теперь, что клетки разбиений $\overline{\boldsymbol{M}}_a$ и $\overline{\boldsymbol{M}}_b$ настолько малы, что не только a^0 и $'b^n$, но даже наименьшие подкомплексы комплексов $\overline{\boldsymbol{M}}_a$ и $\overline{\boldsymbol{M}}_b$, на которых лежат соответственно $\overline{a}^0$ и $\overline{b}^n$, не имеют общих точек. Тогда алгебраические комплексы $\overline{a}^0$ и $'\overline{b}^n$ также не имеют общих точек, так как, будучи аппроксимациями, они принадлежат наименьшим подкомплексам. Обозначим еще алгебраическое значение комплекса a^0 через $\varepsilon_a = \pm 1$. Сумма коэффициентов алгебраического комплекса $\overline{a}^0$ также равна ε_a, в виду того, что $\overline{a}^0$, как аппроксимация, гомологичен с a^0. Мы имеем тогда

$$\left.\begin{aligned} \chi(a^0, b^n) &= \varepsilon_b \chi(a^0, \varepsilon_b b^n) = \\ &= \varepsilon_b \chi(a^0, \varepsilon_b b^n + {}'b^n) = \\ &= \varepsilon_b \chi(a^0, M_b^n) = \\ &= \varepsilon_b \varepsilon_a \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

(в силу стр. 316). Таким же образом

$$\chi(\overline{a}^0, \overline{b}^n) = \varepsilon_b \chi(\overline{a}^0, \varepsilon_b \overline{b}^n)$$

и, так как $\overline{a}^0$ и $'\overline{b}^n$ не имеют общих точек,

$$\left.\begin{aligned} &= \varepsilon_b \chi(\overline{a}^0, \varepsilon_b \overline{b}^n + {}'\overline{b}^n) = \\ &= \varepsilon_b \chi(\overline{a}^0, \overline{M}_b^n) = \\ &= \varepsilon_b \varepsilon_a. \end{aligned}\right\} \qquad (\overline{5})$$

Из (5) и $(\overline{5})$ следует, что

$$\chi(a^0, b^n) = \chi(\overline{a}^0, \overline{b}^n),$$

а вместе с тем и теорема II^0.

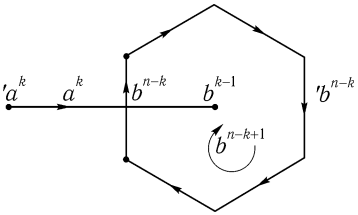


Рис. 126

Предположим теперь, что теорема II^{k-1} уже доказана и докажем теорему II^k. Пусть a^{k-1} — клетка разбиения $\boldsymbol{M}_a$, инцидентная с a^k. Тогда дуальная с a^{k-1} клетка b^{n-k+1} инцидентна с b^{n-k}. Пусть ориентации клеток a^{k-1} и b^{n-k+1} выбраны так, что a^{k-1} входит в $\dot{a}^k$, а b^{n-k} — в $\dot{b}^{n-k+1}$ с множителем $+1$ (рис. 126):

$$\dot{a}^k = a^{k-1} + {}'a^{k-1},$$
$$\dot{b}^{n-k+1} = b^{n-k} + {}'b^{n-k}.$$

Аппроксимацию клетки b^{n-k} в $\overline{\boldsymbol{M}}_b$ можно дополнить до одновременной аппроксимации клеточных алгебраических комплексов b^{n-k}, $'b^{n-k}$, b^{n-k+1}. Обозначим аппроксимации этих комплексов через $\overline{b}^{n-k}$, $'\overline{b}^{n-k}$, $\overline{b}^{n-k+1}$. Выберем теперь клеточные разбиения $\overline{bM}_a$ и $\overline{\boldsymbol{M}}_b$ настолько мелкими, чтобы алгебраические комплексы $'a^{k-1}$ и b^{n-k+1}, с одной стороны, и $'b^{n-k}$ и a^k, с другой стороны, не имели общих точек и после аппроксимации. Таким образом

$\alpha)$ $'\overline{a}^{k-1}$ не должен иметь общих точек с $\overline{b}^{n-k+1}$,

$\beta)$ $'\overline{b}^{n-k}$ не должен иметь общих точек с $\overline{a}^k$.

Кроме того, на основании теоремы II^{k-1}, можно еще потребовать, чтобы выполнялось соотношение

$$\gamma)\ \chi(a^{k-1}, b^{n-k+1}) = \chi(\overline{a}^{k-1}, \overline{b}^{n-k+1}).$$

Но из формулы (5) § 69 следует, что

$$\chi(a^k,\, b^{n-k}) = (-1)^k \chi(a^{k-1},\, b^{n-k+1}). \tag{6}$$

В соответствии с этим

$$\begin{aligned}
\chi(\overline{a}^k,\, \overline{b}^{n-k}) &= \chi(\overline{a}^k,\, \overline{b}^{n-k},\, {}'\overline{b}^{n-k}) = (\text{в силу } \beta) \\
&\chi\big(\overline{a}^k,\, (\overline{b}^{n-k+1})^{\cdot}\big) = \\
&(-1)^k \chi\big((\overline{a}^k)^{\cdot},\, \overline{b}^{n-k+1}\big) = \big(\text{по формуле (5) § 70}\big) \\
&= (-1)^k \chi(\overline{a}^{k-1} + {}'\overline{a}^{k-1},\, \overline{b}^{n-k+1}) = \\
&= (-1)^k \chi(\overline{a}^{k-1},\, \overline{b}^{n-k+1}) = (\text{в силу } \alpha). \qquad (\overline{6})
\end{aligned}$$

В силу γ) правые части формул (6) и ($\overline{6}$) равны между собой. А тогда равны также и левые, что и требовалось доказать.

Теорему II^k легко можно распространить на *клеточные алгебраические комплексы.*

Теорема III. *Пусть*

$$A^k = \sum \xi_\mu a^k_\mu \quad \textit{и} \quad B^{n-k} = \sum \eta_\nu b^{n-k}_\nu$$

— два клеточных алгебраических комплекса дуальных разбиений $\boldsymbol{M}_a$ и $\boldsymbol{M}_b$ ориентируемого h-многообразия $\boldsymbol{M}$, $\overline{A}^k$ и $\overline{B}^{n-k}$ — аппроксимации этих комплексов в двух других дуальных клеточных разбиениях $\overline{\boldsymbol{M}}_a$ и $\overline{\boldsymbol{M}}_b$. Тогда, если разбиения $\overline{\boldsymbol{M}}_a$ и $\overline{\boldsymbol{M}}_b$ достаточно мелки, т. е. клетки их по величине меньше некоторого δ, то

$$\chi(A^k,\, B^{n-k}) = \chi(\overline{A}^k,\, \overline{B}^{n-k}).$$

Доказательство. Выберем $\overline{\boldsymbol{M}}_a$ и $\overline{\boldsymbol{M}}_b$ настолько мелкими, чтобы для аппроксимаций $\overline{a}^k_\mu$, $\overline{b}^{n-k}_\nu$ каждых двух клеток a^k_μ и b^{n-k}_ν из A^k и B^{n-k} имело место соотношение

$$\chi(\overline{a}^k_\mu,\, \overline{b}^{n-k}_\nu) = \chi(a^k_\mu,\, b^{n-k}_\nu).$$

Для $\mu = \nu$ это возможно по теореме II^k. Для $\mu \neq \nu$ a^k_μ и b^{n-k}_ν не имеют общих точек, вследствие чего при достаточно мелком разбиении на клетки не имеют общих точек и их аппроксимации. Но

$$\chi(A^k,\, B^{n-k}) = \chi\left(\sum \xi_\mu a^k_\mu,\, \sum \eta_\nu b^{n-k}_\nu\right) = \sum \xi_\mu \eta_\nu \chi(a^k_\mu,\, b^{n-k}_\nu)$$

и

$$\chi(\overline{A}^k, \overline{B}^{n-k}) = \chi\left(\sum \xi_\mu \overline{a}^k_\mu, \sum \eta_\nu \overline{b}^{n-k}_\nu\right) = \sum \xi_\mu \eta_\nu \chi(\overline{a}^k_\mu, \overline{b}^{n-k}_\nu).$$

Так как правые части этих соотношений совпадают, то равны между собой и левые, т. е.

$$\chi(A^k, B^{n-k}) = \chi(\overline{A}^k, \overline{B}^{n-k}).$$

Инвариантность индексов пересечения получается теперь так: пусть A^k, B^{n-k} — два данных особых алгебраических комплекса; $'A^k$, $'B^{n-k}$ — связанная с A^k, B^{n-k} пара клеточных комплексов дуальных разбиений $'\boldsymbol{M}_a$ и $'\boldsymbol{M}_b$; $''\boldsymbol{M}_a$, $''\boldsymbol{M}_b$ — связанная с A^k, B^{n-k} пара клеточных комплексов двух других дуальных разбиений $''\boldsymbol{M}_a$ и $''\boldsymbol{M}_b$. Пусть комплексы A^k, $'A^k$, $''A^k$ переходят при одновременной аппроксимации клетками третьего разбиения $\overline{\boldsymbol{M}}_a$ в клеточные комплексы $\overline{A}^k$, $'\overline{A}^k$, $''\overline{A}^k$, комплексы же B^{n-k}, $'B^{n-k}$, $''B^{n-k}$ таким же образом переходят при аппроксимации клетками дуального разбиения $\overline{\boldsymbol{M}}_b$ в комплексы $\overline{B}^{n-k}$, $'\overline{B}^{n-k}$, $''\overline{B}^{n-k}$. По теореме I, если $\overline{\boldsymbol{M}}_a$ и $\overline{\boldsymbol{M}}_b$ достаточно мелки, то

$$\chi(\overline{A}^k, \overline{B}^{n-k}) = \chi('\overline{A}^k, '\overline{B}^{n-k}).$$

Точно так же

$$\chi(\overline{A}^k, \overline{B}^{n-k}) = \chi(''\overline{A}^k, ''\overline{B}^{n-k}).$$

Поэтому

$$\chi('\overline{A}^k, '\overline{B}^{n-k}) = \chi(''\overline{A}^k, ''\overline{B}^{n-k}). \tag{7}$$

Далее, по теореме III, так как $'A^k$, $'B^{n-k}$ суть клеточные алгебраические комплексы дуальных клеточных разбиений,

$$\chi('\overline{A}^k, '\overline{B}^{n-k}) = \chi('A^k, 'B^{n-k}).$$

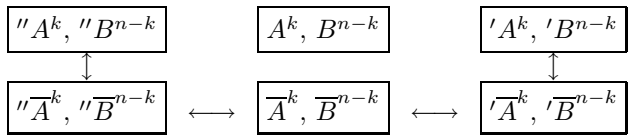
И, таким же образом,

$$\chi(''\overline{A}^k, ''\overline{B}^{n-k}) = \chi(''A^k, ''B^{n-k}).$$

Подставляя это в (7), мы получаем требуемый результат

$$\chi('A^k, 'B^{n-k}) = \chi(''A^k, ''B^{n-k}).$$

Проследим еще раз ход доказательства, пользуясь приведенной схемой.



Мы заменяем особые алгебраические комплексы A^k, B^{n-k} сначала двумя связанными комплексами $'A^k$, $'B^{n-k}$ одной пары дуальных клеточных разбиений, а затем связанными комплексами $''A^k$, $''B^{n-k}$ другой пары таких разбиений. В этих клеточных разбиениях индексы пересечения определяются комбинаторно по § 70. Равенство друг другу получающихся индексов доказывается путем клеточной аппроксимации всех шести алгебраических комплексов в третьем клеточном разбиении, отмеченном черточкой наверху (нижний ряд). При доказательстве этих равенств в направлении вертикальных стрелок мы пользуемся теоремой III настоящего параграфа, а в направлении горизонтальных стрелок — теоремой I[44].

Теперь теоремы, доказанные в § 70 для клеточных алгебраических комплексов, нетрудно перенести на особые алгебраические комплексы. При этом, конечно, все время неявно предполагается, что каждые два особых комплекса A^k и B^{n-k}, встречающиеся под знаком индекса $\chi(A^k, B^{n-k})$, удовлетворяют условию (E) § 73.

Если два особых комплекса A^k и B^{n-k} не имеют общих точек, то их индекс пересечения $= 0$. В самом деле, A^k и B^{n-k} можно аппроксимировать настолько мелкими клетками, что их аппроксимации также не будут иметь общих точек. Дистрибутивный закон для индексов пересечения особых комплексов также выполняется:

$$\chi(A^k, B_1^{n-k} + B_1^{n-k}) = \chi(A^k, B_1^{n-k}) + \chi(A^k, B_2^{n-k}). \tag{8}$$

Действительно, рассмотрим аппроксимацию комплекса A^k в клеточном разбиении $\boldsymbol{M}_a$ и одновременную аппроксимацию комплексов B_1^{n-k} и B_2^{n-k} в дуальном разбиении $\boldsymbol{M}_b$. Для этих аппроксимаций выполняется соотношение

$$\chi(\overline{A}^k, \overline{B}_1^{n-k} + \overline{B}_1^{n-k}) = \chi(\overline{A}^k, \overline{B}_1^{n-k}) + \chi(\overline{A}^k, \overline{B}_2^{n-k}). \tag{$\overline{8}$}$$

Но при достаточно мелких клеточных разбиениях $\boldsymbol{M}_a$ и $\boldsymbol{M}_b$ индексы пересечения обоих комплексов совпадают с индексами пересечения их аппроксимаций. Поэтому из формулы ($\overline{8}$) следует соотношение (8).

Так же, как формула (8), переносится на случай особых комплексов формула

$$\chi(A^k, B^{n-k}) = (-1)^{k(n-k)}\chi(B^{n-k}, A^k) \tag{9}$$

и формула

$$\chi\big(A^k, (B^{n-k+1})^{\cdot}\big) = (-1)^k\chi(\dot{A}^k, B^{n-k+1}). \tag{10}$$

Здесь A^k и B^{n-k+1} означают два произвольных алгебраических комплекса, границы которых не пересекаются. Отсюда следует, как и раньше, что индекс пересечения k-мерного цикла со слабо гомологичным

$(n-k)$-мерным равен 0, и индекс пересечения двух циклов не меняется, если каждый из них заменить слабо гомологичным с ним циклом. Последнее утверждение дает возможность говорить об индексе пересечения двух классов гомологий (слабых) размерностей k и $n-k$, заданных в определенном порядке. Вместе с тем отпадает также неявно сделанное в теоремах I и II § 71 предположение, что циклы дуальных баз слабых гомологий, или соответственно без кручения, должны быть циклами дуальных клеточных разбиений; вместо них можно взять произвольные особые циклы.

Пусть два ориентируемых и определенным образом ориентированных псевдомногообразия $\boldsymbol{K}^k$ и $\boldsymbol{K}^{n-k}$ отображены посредством непрерывных отображений f и g в ориентируемое h-многообразие $\boldsymbol{M}^n$. Ориентирующие циклы B^k и B^{n-k} псевдомногообразий $\boldsymbol{K}^k$ и $\boldsymbol{K}^{n-k}$ переходят при этом в два особых цикла $f(B^k)$ и $g(B^{n-k})$ (стр. 129), обладающих определенным индексом пересечения. Если вместо B^k и B^{n-k} взять другие ориентируемые циклы $'B^k$ и $'B^{n-k}$: $'B^k \sim B^k$ (на $\boldsymbol{K}^k$) и $'B^{n-k} \sim B^{n-k}$ (на $\boldsymbol{K}^{n-k}$), то

$$\left.\begin{aligned} f(B^k) &\sim f('B^k), \\ g(B^{n-k}) &\sim g('B^{n-k}), \end{aligned}\right\} \quad \text{на } \boldsymbol{M}^n,$$

вследствие чего

$$\chi\big(f(B^k),\, g(B^{n-k})\big) = \chi\big(f('B^k),\, g('B^{n-k})\big).$$

Особым комплексам, являющимся образами ориентированных псевдомногообразий $\boldsymbol{K}^k$ и $\boldsymbol{K}^{n-k}$, соответствует в $\boldsymbol{M}^n$ определенный индекс пересечения. Индекс этот зависит только от ориентации псевдомногообразий $\boldsymbol{K}^k$ и $\boldsymbol{K}^{n-k}$ и от непрерывных отображений.

Индекс пересечения по модулю 2 существует и в том случае, когда $\boldsymbol{K}^k$ $\boldsymbol{K}^{n-k}$ или $\boldsymbol{M}^n$ неориентируемы.

Насколько дуальные клеточные разбиения удобны для построения общей теории, настолько же неудобно находить индекс пересечения двух алгебраических комплексов при помощи клеточных аппроксимаций в дуальных клеточных разбиениях в практических случаях. Поэтому, прежде чем переходить к примерам, мы докажем лемму, которой удобно пользоваться при подсчете индекса пересечения.

Лемма. *Пусть $\boldsymbol{M}^n$ — ориентируемое h-многообразие с когерентно ориентированным симплициальным разбиением и E^n — его ориентированный n-мерный симплекс. Пусть, далее, в E^n лежат два ориентированных прямолинейных симплекса X^k и X^{n-k}, не имеющие кроме общего центра P_k никаких других общих точек. Если, тогда, $\xi(P_0\,P_1 \ldots P_k)$ есть ориентированный симплекс барицентрического подразделения симплекса X^k, $\eta(P_k\,P_{k+1} \ldots P_n)$ — такой же симплекс барицентрического подразделения X^{n-k} и если коэффициент ζ*

выбран так, что n-мерный симплекс $\zeta(P_0\,P_1\ldots P_k\ldots P_n)$ ориентирован одинаково с E^n (§ 29), *то*

$$\chi(X^k,\,X^{n-k})=\xi\eta\zeta.$$

На рис. 127 приведен случай, когда $n-k=2$, $k=1$. В качестве симплекса E^3 (на рисунке не обозначенного) нужно представлять себе большой трехмерный симплекс, содержащий X^1 и X^2 внутри себя.

Доказательство. При доказательстве мы воспользуемся тем, что индексы пересечения двух связанных пар особых алгебраических комплексов совпадают. Если симплекс X^k зафиксирован, а X^{n-k} непрерывно деформируется в новый симплекс $'X^{n-k}$ так, что граница симплекса X^{n-k} в течение всего времени деформации не встречает X^k, а граница симплекса X^k не встречает X^{n-k}, то

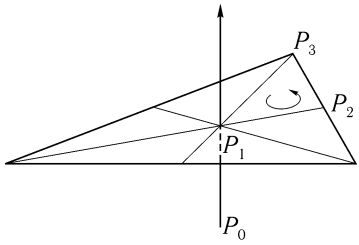


Рис. 127

$$\chi(X^k,\,X^{n-k})=\chi(X^k,\,'X^{n-k}),$$

так как X^k, X^{n-k} и $X^k, {}'X^{n-k}$ образуют две связанных пары (см. стр. 152, теорему II).

Рассмотрим сначала случай $k=0$. Без ограничения общности можно предположить, что X^0 снабжен знаком $\xi=+1$, а X^n ориентирован одинаково с E^n, т. е. что η и ζ совпадают. Тогда нужно показать только, что $\chi(X^0,\,X^n)=1$. С этой целью мы переведем X^n в симплекс E^n и X^0 — в центр симплекса E^n. Это осуществляется тремя последовательными шагами. Первый шаг состоит в том, что X^n посредством деформации переводится в положение X_1^n, подобное с симплексом E^n относительно центра подобия X^0. Это, очевидно, всегда можно сделать так, чтобы фиксированная точка X^0 в течение деформации не попадала на границу симплекса X^n. Поэтому

$$\chi(X^0,\,X^n)=\chi(X^0,\,X_1^n).$$

Второй шаг заключается в проектировании симплекса X_1^n из центра подобия X^0 на симплекс E^n. При таком проектировании X^0 не переходит через границу симплекса X^n, вследствие чего

$$\chi(X^0,\,X_1^n)=\chi(X^0,\,E^n).$$

Наконец, третьим шагом X^0 переводится в ориентированный тем же знаком $\xi=1$, как и X^0, центр X_1^0 симплекса E^n. Тогда

$$\chi(X^0,\,E^n)=\chi(X_1^0,\,E^n),$$

так что в целом

$$\chi(X^0,\, X^n) = \chi(X_1^0,\, E^n).$$

Но симплициальное разбиение h-многообразия $\boldsymbol{M}^n$ можно рассматривать как клеточное разбиение, в котором E^n представляет n-мерную клетку, а X_1^0 — дуальную с ней нульмерную. Отсюда следует, что

$$\chi(X_1^0,\, E^n) = 1.$$

Предположим теперь, что лемма доказана для размерностей $k-1$ и $n-k+1$. Докажем ее для симплексов X^k и X^{n-k}. Ориентация симплекса X^k задается частичным симплексом

$$\xi(P_0\, P_1 \dots P_k), \qquad (X^k)$$

а ориентация симплекса X^{n-k} — частичным симплексом

$$\eta(P_k\, P_{k+1} \dots P_n). \qquad (X^{n-k})$$

Мы можем допустить, что P_{k-1} есть центр $(k-1)$-мерного стороны X^{k-1} симплекса X^k (а не центр, например, стороны низшего числа измерений). Тогда существует симплекс X^{n-k+1}, имеющий X^{n-k} своей стороной, а P_{k-1} — своим центром. Симплексы X^k и X^{n-k+1} имеют своим пересечением отрезок $P_{k-1}P_k{}^*$. Пусть X^{k-1} ориентирован так, что он входит в границу симплекса X^k со знаком $+1$. Тогда его ориентация задается частичным симплексом

$$(-1)^k \xi(P_0\, P_1 \dots P_{k-1}). \qquad (X^{k-1})$$

Точно так же пусть X^{n-k+1} ориентирован так, что X^{n-k} входит в его границу с коэффициентом $+1$, т. е. его ориентация определяется частичным симплексом

$$\eta(P_{k-1}\, P_k \dots P_n). \qquad (X^{n-k+1})$$

Но по индукционному предположению

$$\chi(X^{k-1},\, X^{n-k+1}) = (-1)^k \xi\eta\zeta.$$

С другой стороны,

$$\chi(X^k,\, X^{n-k}) = \chi\big(X^k,\, (X^{n-k+1})^{\cdot}\big) = (-1)^k \chi(\dot{X}^k,\, X^{n-k+1}) =$$
$$= (-1)^k \chi(X^{k-1},\, X^{n-k+1}) \quad \text{(по формуле 10)}.$$

*Если X^{n-k+1} выходят за пределы симплекса E^n, то можно заменить сначала симплексы X^k и X^{n-k} подобными им уменьшенными симплексами так, что ни индекс пересечения $\chi(X^k,\, X^{n-k})$, ни коэффициенты ξ, η, ζ не изменятся. Центром подобия при этом берется точка P_k.

Поэтому

$$\chi(X^k, X^{n-k}) = \xi\eta\zeta,$$

что и требовалось доказать.

При определении индекса пересечения двух особых алгебраических комплексов A^k и B^{n-k} можно опустить сначала все особые симплексы, не имеющие общих точек с пересечением $\boldsymbol{D}$ точечных множеств, несущих комплексы A^k и B^{n-k}. В самом деле, можно разложить индекс пересечения по формуле (8) и воспользоваться тем, что алгебраические комплексы, не имеющие общих точек, дают индекс пересечения $= 0$. Отметим особо случай, когда пересечение состоит из конечного числа точек, причем в каждой такой точке встречаются только два симплекса, пересекающиеся так, как это указано в лемме. В этом случае мы будем говорить, что оба особых алгебраических комплекса *пересекаются в общих точках гладко*. Индекс пересечения $\chi(A^k, B^{n-k})$ равен тогда сумме определяемых посредством леммы индексов в отдельных точках пересечения.

Методы и теоремы этого параграфа непосредственно переносятся на алгебраические комплексы по модулю 2.

§ 75. Примеры

1. Рассмотрим в качестве примера *ориентируемые поверхности*. Для простоты возьмем поверхность рода $h = 2$ — двойной тор. Предположим, что он задан своим каноническим многоугольником. Мы знаем уже, что циклы a, b, c, d, образуют базу слабых гомологий (§ 41); мы будем искать теперь для этой базы дуальную базу. Пересечения можно удобнее проследить на рис. 128, если заменить циклы a, b, c, d гомологичными им циклами a', b', c', d', расположенными внутри восьмиугольника.

При соответствующем симплициальном разбиении наши циклы пересекаются, очевидно, гладко. Определяя индекс пересечения при помощи такого специального разбиения и считая, что ориентация поверхности задана граничным кругом $aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}$, мы получим, в соответствии с формулой (9) § 74, значения

$$\chi(a', b') = 1 \quad \text{и} \quad \chi(b', a') = -1.$$

$\chi(a', c') = 0$, так как a' и c' не имеют общих точек. Точно так же $\chi(a', a') = 0$. В самом деле, из $a' \sim a$ следует, что $\chi(a', a') = \chi(a', a)$.

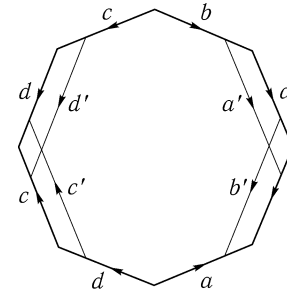


Рис. 128

А этот последний индекс пересечения $= 0$ ввиду отсутствия у a и a' общих точек. Поэтому матрица индексов пересечения имеет вид*

χ	a	b	c	d
a		1		
b	-1			
c				1
d			-1	

(1)

Места, оставленные пустыми, нужно считать заполненными нулями.

Меняя в этой матрице порядок и ориентации циклов, стоящих в ее верхнем входе, мы получаем единичную матрицу

χ	b	$-a$	d	$-c$
a	1			
b		1		
c			1	
d				1

(2)

Таким образом циклы

$$b,\ -a,\ d,\ -c$$

образуют искомую дуальную базу по отношению к базе

$$a,\ b,\ c,\ d.$$

База a, b, c, d обладает следующим особым свойством: элементы ее можно разбить на пары так, что циклы одной пары имеют индекс пересечения ± 1, в то время как индекс пересечения циклов различных пар $= 0$. Это свойство присуще не только поверхностям, — им обладают все многообразия, размерности которых выражаются формулой $2(2m+1)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ Для доказательства рассмотрим в h-многообразии $\boldsymbol{M}^{2k}$ циклы «средней» размерности k. По формуле (9) § 74

$$\chi(A^k,\ B^k) = (-1)^{kk}\chi(B^k,\ A^k).$$

Поэтому $\chi(A^k,\ B^k) = \pm\chi(B^k,\ A^k)$, в зависимости от того, четно k или нечетно, т. е. матрица индексов пересечения

$$\chi(B^k_\mu,\ B^k_\nu)$$

базы слабых гомологий

$$B^k_1,\ B^k_2,\ \ldots,\ B^k_{p^k}$$

*В пересечении i-й строчки с k-м столбцом стоит индекс пересечения i-го комплекса как первого, с k-м как вторым.

при нечетном k кососимметрична, а при четном — симметрична. В обоих случаях ее детерминант равен ± 1. Действительно, надлежащими независимыми целочисленными унимодулярными преобразованиями ее строк и столбцов мы можем перейти к дуальным базам (§ 71), а для таких баз матрица индексов пересечения есть единичная матрица.

Для нас представляет интерес только тот случай, когда k нечетно. В этом случае можно воспользоваться алгебраической теоремой, утверждающей, что целочисленную унимодулярную кососимметричную матрицу можно привести когредиентными целочисленными унимодулярными преобразованиями строк и столбцов к «ящичной форме» (1). В матрице такой формы вдоль главной диагонали находятся только главные миноры вида

$$\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}$$

все же остальные элементы равны нулю*. Полученную таким образом новую базу слабых гомологий можно рассматривать как $2(2m+1)$-мерный аналог сопряженным циклическим сечениям замкнутых ориентируемых поверхностей[46].

Отсюда вытекает, далее, что среднее число Бетти (размерности $k = 2m+1$) $2(2m+1)$-мерного ориентируемого h-многообразия четно. Но тогда и характеристика N такого h-многообразия также четна. В самом деле, по закону двойственности Пуанкаре

$$N = -\sum_{\nu=0}^{2k}(-1)^\nu p^\nu = -2p^0 + 2p^1 - \ldots \pm 2p^{k-1} \mp p^k.$$

2. При рассмотрении индексов пересечения на *неориентируемых* поверхностях мы должны ограничиться индексами пересечения по модулю 2. Рассмотрим неориентируемую поверхность рода 3. Неориентированные стороны $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ канонического шестиугольника образуют одномерную базу по модулю 2 (§ 41). На рис. 129 изображены два гомологичных с $\boldsymbol{a}$ по модулю 2 цикла $\boldsymbol{a}'$ и $\boldsymbol{a}''$. Так как $\boldsymbol{a}'$ и $\boldsymbol{a}''$пересекаются гладко, то их индекс пересечения по модулю 2 будет

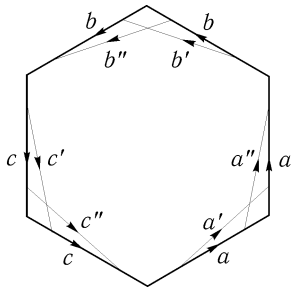


Рис. 129

$$\chi(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = \chi(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{a}'') = \check{1},$$

*См. *K. Hensel* и *G. Landsberg*, Theorie d/ algebr. Funkt. einer Var., стр. 636 и далее (Leipzig 1902).

в то время как индексы пересечения $\boldsymbol{a}'$ со сторонами $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ равны 0. Матрица индексов пересечения по модулю 2 имеет, поэтому, вид

χ	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{a}$	1		
$\boldsymbol{b}$		1	
$\boldsymbol{c}$			1

Таким образом база гомологий по модулю 2 дуальна сама с собой.

3. *Перенесение ориентации вдоль пути.* Пусть имеется n-мерное h-многообразие $\boldsymbol{M}^n$, заданное в некотором клеточном разбиении $\boldsymbol{M}_a^n$. Будем называть нульмерные клетки вершинами, а одномерные — ребрами разбиения $\boldsymbol{M}_a^n$. Пусть w есть замкнутый путь, составленный из ребер $\boldsymbol{M}_a^n$ (реберный путь). Каждой вершине пути w соответствует n-мерная клетка, а каждому ребру — $(n-1)$-мерная клетка дуального клеточного разбиения $\boldsymbol{M}_b^n$. Эти n-мерные и $(n-1)$-мерные клетки чередуются друг с другом в последовательности, определенной путем w. Мы хотим теперь ориентировать их. Ориентируем произвольно n-мерную клетку, соответствующую начальной точке O пути. Следующую n-мерную клетку ориентируем так, чтобы в общей $(n-1)$-мерной клетке индуцировались противоположные ориентации и т. д. Таким способом ориентацию начальной n-мерной клетки можно переносить вдоль всего пути. При этом мы возвратимся к начальной m-мерной клетке либо с исходной ориентацией, либо с противоположной. В соответствии с этим говорят, что путь w либо сохраняет ориентацию, либо обращает ее. Такое определение имеет смысл, естественно, только для заданного клеточного разбиения и для пути, составленного из ребер этого разбиения. Индексы пересечения дают нам средство определить сохраняющий или обращающий ориентацию путь независимо от разбиения.

Очевидно, $\boldsymbol{M}^n$ ориентируемо в смысле § 24 в том и только в том случае, когда каждый замкнутый реберный путь из $\boldsymbol{M}_a^n$ сохраняет ориентацию. В последующем мы ограничимся поэтому рассмотрением лишь неориентируемых h-многообразий. В каждом таком многообразии существует в точности один $(n-1)$-мерный коэффициент кручения, равный 2 (стр. 119), т. е. существует в точности один $(n-1)$-мерный класс гомологий второго порядка; принадлежащие этому классу (особые) циклы характеризуются тем, что они гомологичны нулю не сами по себе, а взятые с коэффициентом 2. $(n-1)$-мерный цикл U^{n-1}, обладающий этим свойством, может быть получен следующим способом: возьмем все n-мерные клетки разбиения $\boldsymbol{M}_b^n$, ориентируем их произвольно, но фиксированно, и рассмотрим границу n-мерного алгебраического комплекса U^n, составленного из совокупности всех таких ориентированных n-мерных клеток. Тогда любая $(n-1)$-мерная клетка либо вовсе не входит в эту границу, либо входит с коэффициентом 2, смотря по тому, индуцируют ли две прилегающие к ней n-мерные клетки одинако-

вые или противоположные ориентации. Отсюда следует, что $\dot{U}^n$ равна некоторому циклу U^{n-1}, взятому два раза, т. е. $2U^{n-1} \sim 0$, и U^{n-1} не гомологичен 0 (сравните со стр. 119. Различие от изложенного раньше выражается лишь в том, что мы вместо симплексов рассматриваем здесь клетки).

Теперь легко видеть, что реберный путь w сохраняет ориентацию в том и только в том случае, когда w пересекается с циклом U^{n-1} в четном числе точек. Это следует из того, что U^{n-1} образован в точности теми $(n-1)$-мерными клетками разбиения $\boldsymbol{M}_b^n$, в которых две прилегающие n-мерные клетки индуцируют одинаковые ориентации. Мы можем, следовательно, сказать: *путь то сохраняет ориентацию в том и только в том случае, когда индекс пересечения по модулю* 2 *пути* w *с циклом* U^{n-1} *равен* 0^*. Это определение можно распространить на произвольные непрерывные пути (не только реберные). Оно не зависит от выбранного симплициального разбиения h-многообразия $\boldsymbol{M}^n$: как мы показали выше, цикл определяется h-многообразием $\boldsymbol{M}^n$ топологически инвариантно с точностью до слагаемого гомологичного нулю.

Отсюда следует одновременно, — так как при замене цикла гомологичным циклом индекс пересечения не меняется, — что гомологичные пути ведут себя в смысле сохранения или обращения ориентации одинаково.

Но то же самое относится тогда с большей силой к гомотопным путям. Поэтому элементы фундаментальной группы F h-многообразия $\boldsymbol{M}^n$ можно разбить на две категории по свойству принадлежащих им путей сохранять или обращать ориентацию**. Классы путей, сохраняющих ориентацию, образуют в F подгруппу H индекса 2. В самом деле, произведение двух путей, обращающих ориентацию, есть путь, сохраняющий ориентацию. Поэтому принадлежащее подгруппе H (двулистное) накрывающее многообразие $\widetilde{\boldsymbol{M}}^n$ (§ 55) связано с $\boldsymbol{M}^n$ топологически инвариантно.

$\widetilde{\boldsymbol{M}}^n$ ориентируемо. Действительно, перенесем на $\widetilde{\boldsymbol{M}}^n$ дуальные клеточные разбиения $\boldsymbol{M}_a^n$ и $\boldsymbol{M}_b^n$ и рассмотрим какой-нибудь замкнутый путь $\widetilde{w}$, составленный из ребер разбиения $\widetilde{\boldsymbol{M}}^n$. Если этот путь обращает ориентацию, то и основной лежащий под ним путь w разбиения $\boldsymbol{M}_a^n$ также обращает ориентацию. Но тогда w не может принадлежать подгруппе H, т. е. $\widetilde{w}$, вопреки предположению, не замкнут.

$\widetilde{\boldsymbol{M}}^n$ есть единственное ориентируемое двулистное накрытие h-многообразия $\boldsymbol{M}^n$, так как если $'\widetilde{\boldsymbol{M}}^n$ есть другое такое накрытие, то за-

*Точнее следовало бы говорить об индексе пересечения принадлежащих w и U^{n-1} алгебраических комплексов по модулю 2.

**В дальнейшем под w понимаются пути, выходящие из фиксированной точки O многообразия $\boldsymbol{M}^n$, а под $\widetilde{w}$ — пути накрывающего многообразия $\widetilde{\boldsymbol{M}}^n$, выходящие из лежащей над O фиксированной точки $\widetilde{O}$.

мкнутый путь $'\widetilde{w}$ накрывающего многообразия $'\widetilde{M}^n$ переходит в сохраняющий ориентацию замкнутый путь многообразия M^n, т. е. в путь, принадлежащий подгруппе H. Принадлежащая $'\widetilde{M}^n$ подгруппа $'$H является, таким образом, подгруппой группы H. А так как H также должна иметь в F индекс 2, то она совпадает с H[46].

§ 76. Ориентируемость и двусторонность

Мы видели, что ориентируемость есть свойство, присущее поверхности как двумерному многообразию, независимо от того, каким способом поверхность расположена в пространстве. Понятиям ориентируемый-неориентируемый противостоят понятия односторонний-двусторонний, связанные уже с расположением поверхности в пространстве. Чтобы получить наглядное представление о двустороннем расположении поверхности в трехмерном многообразии M^3, предположим M^3 снабженным дифференциально-геометрической метрикой и рассмотрим вектор, нормальный к поверхности. Будем обводить начальную точку по поверхности вдоль замкнутого пути, заботясь о том, чтобы вектор все время оставался нормальным к поверхности. Если при этом направление вектора при возвращении в исходную точку всегда остается прежним, независимо от того, по какой замкнутой кривой двигалась начальная точка, то поверхность лежит двусторонне, в противном случае — односторонне.



Рис. 130

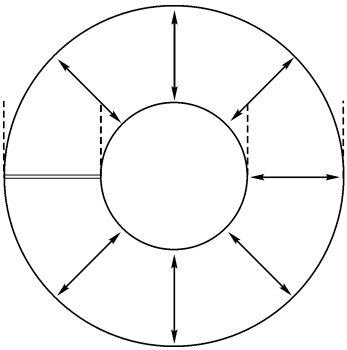


Рис. 131

Иногда ориентируемые поверхности называют двусторонними. Однако эти понятия не являются эквивалентными. Действительно, существуют:

1. *Ориентируемые двусторонние* поверхности — например сфера или тор, расположенные в трехмерной сфере.

2. *Неориентируемые односторонние* поверхности — например, проективная плоскость в проективном пространстве.

3. *Ориентируемые односторонние* поверхности.

4. *Неориентируемые двусторонние* поверхности.

Пример поверхностей типа 3 и 4 дает топологическое произведение проективной плоскости на окружность. Такое произведение можно получить,

отождествляя диаметрально-противоположные точки меридианов тора, являющегося границей кольцевидного трехмерного тела. При этом отождествлении круг, натянутый на меридиан, превращается в проективную плоскость, т. е. в неориентируемую поверхность, расположенную в получающемся трехмерном многообразии, очевидно, двусторонне. На рис. 130 показано сечение кольцевого трехмерного тела (поверхность тора и ограниченная ею внутренняя область) меридиональной плоскостью; натянутый на меридиан круг заштрихован. Экваториальная же плоскость пересекает тор по круговому кольцу. При отождествлении диаметрально-противоположных точек (таком же, как раньше) это кольцо превращается в ориентируемую поверхность — тор, очевидно, расположенную в многообразии односторонне. Рис. 131 показывает пересечение с экваториальной плоскостью.

Введенные в этой главе понятия позволят нам теперь от соображений, связанных с наглядными представлениями, перейти к математической формулировке понятий односторонности и двусторонности и распространить их на произвольное число измерений.

Пусть $\boldsymbol{M}^{n-1}$ — $(n-1)$-мерное h-многообразие, вложенное топологически в n-мерное h-многообразие $\boldsymbol{M}^n$; другими словами, $\boldsymbol{M}^{n-1}$ есть подмножество многообразия $\boldsymbol{M}^n$. Кроме этого, мы требуем еще, чтобы существовало симплициальное разбиение многообразия $\boldsymbol{M}^n$, в котором $\boldsymbol{M}^{n-1}$ образует подкомплекс. Мы определим сначала односторонность и двусторонность многообразия $\boldsymbol{M}^{n-1}$ при помощи такого симплициального разбиения. Будем рассматривать барицентрически подразделенные симплексы его как клетки клеточного разбиения $\boldsymbol{M}_a^n$. Тогда на $\boldsymbol{M}^{n-1}$ одновременно определяется клеточное разбиение $\boldsymbol{M}_a^{n-1}$. Обозначим $(n-1)$-мерные клетки разбиения $\boldsymbol{M}_a^{n-1}$ посредством $a_\varkappa^{n-1}$. Далее, пусть (см. рис. 132)

$P_\varkappa$ — центр клетки $a_\varkappa^{n-1}$,

$b_\varkappa^1$ — одномерная клетка, дуальная с $a_\varkappa^{n-1}$ в $\boldsymbol{M}^n$,

$a_{\varkappa\lambda}^{n-2}$ — $(n-2)$-мерная клетка на $\boldsymbol{M}_a^{n-1}$, являющаяся общей стороной клеток $a_\varkappa^{n-1}$ и a_λ^{n-1},

$Q_{\varkappa\lambda}$ — центр клетки $a_{\varkappa\lambda}^{n-2}$,

$b_{\varkappa\lambda}^2$ — клетка, дуальная с $a_{\varkappa\lambda}^{n-2}$ в $\boldsymbol{M}^n$,

$c_{\varkappa\lambda}^1$ — клетка, дуальная с $a_{\varkappa\lambda}^{n-2}$ в $\boldsymbol{M}^{n-1}$ и имеющая точку $P_\varkappa$ начальной, а P_λ — конечной.

Ориентированные клетки $b_\varkappa^1$ дают нам общее истолкование рассмотренных ранее нормальных векторов к поверхности. Мы будем называть их *трансверсальными одномерными клетками* многообразия $\boldsymbol{M}^{n-1}$. Две трансверсальные одномерные клетки $b_\varkappa^1$ и b_λ^1 называются соседними, если $(n-1)$-мерные клетки $a_\varkappa^{n-1}$ и a_λ^{n-1} имеют общую сторону $a_{\varkappa\lambda}^{n-2}$. Так как при переходе к дуальным клеткам инциденции сохраняются, то $b_\varkappa^1$ и b_λ^1 входят в границу клетки $b_{\varkappa\lambda}^2$:

$$\dot{b}_{\varkappa\lambda}^2 = \varepsilon_\varkappa b_\varkappa^1 + \varepsilon_\lambda b_\lambda^1 + \ldots$$

Если коэффициенты $\varepsilon_\varkappa$ и ε_λ противоположны по знаку, то мы будем говорить, что $b^1_\varkappa$ и b^1_λ *направлены одинаково*. В противном же случае они *направлены противоположно*. Точное определение односторонности и двусторонности имеет тогда такой вид:

$\boldsymbol{M}^{n-1}$ *расположено в* $\boldsymbol{M}^n$ *двусторонне, если трансверсальные одномерные клетки могут быть ориентированы таким образом, что каждые две соседние направлены одинаково. Если же это невозможно, то* $\boldsymbol{M}^{n-1}$ *лежит в* $\boldsymbol{M}^n$ *односторонне*. При этом оказывается, что понятие односторонности или двусторонности не зависит от выбора клеточного разбиения.

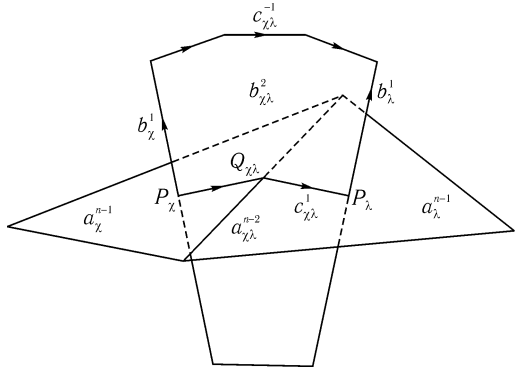


Рис. 132

$c^1_{\varkappa\lambda}$ можно рассматривать, как пересечение многообразия $\boldsymbol{M}^{n-1}$ с $b^2_{\varkappa\lambda}$. В самом деле, $b^2_{\varkappa\lambda}$ может иметь общие точки только с такими клетками разбиения $\boldsymbol{M}^{n-1}_a$, которые содержат центр $Q_{\varkappa\lambda}$ клетки $b^2_{\varkappa\lambda}$ (по теореме VI § 66), т. е. с клетками $a^{n-2}_{\varkappa\lambda}$, $a^{n-1}_\varkappa$, a^{n-1}_λ. Пересечение же клетки $b^2_{\varkappa\lambda}$ с $a^{n-1}_\varkappa$ состоит из соединяющего отрезка (одномерного симплекса) $(P_\varkappa Q_{\varkappa\lambda})$. Назовем одномерные клетки $c^1_{\varkappa\lambda}$ *ребрами* $\boldsymbol{M}^{n-1}$. Если тогда $b^1_\varkappa$ и b^1_λ направлены одинаково, то мы будем понимать под принадлежащей ребру $c^1_{\varkappa\lambda}$ *обходной дугой* $\overline{c}^1_{\varkappa\lambda}$ дугу граничного круга клетки $b^2_{\varkappa\lambda}$, ведущую из конечной точки клетки $b^1_\varkappa$ в конечную точку клетки $b^2_{\varkappa\lambda}$ и не встречающую при этом $\boldsymbol{M}^{n-1}$. Пусть теперь C есть замкнутый реберный путь на $\boldsymbol{M}^{n-1}$, т. е. путь, составленный только из ребер $c^1_{\varkappa\lambda}$, и пусть он идет через точки

$$P_1, P_2, \ldots, P_r, P_{r+1} = P_1.$$

Ориентируем трансверсальные одномерные клетки $b^1_1, b^1_2, \ldots, b^1_r, b^1_{r+1}$ так, чтобы каждые две, следующие одна за другой, были направлены одинаково; если ориентация клетки b^1_1 как-нибудь выбрана, то это

возможно только одним способом. При этом одна и та же трансверсальная клетка может входить в путь C несколько раз, в том числе и с противоположными ориентациями. В зависимости от того, имеет ли место равенство $b^1_{r+1} = +b^1_1$ или $b^1_{r+1} = -b^1_1$, мы говорим, что направление «нормального вектора», или просто: *направление стрелки вдоль C сохраняется или обращается. Очевидно, что если h-многообразие $\boldsymbol{M}^{n-1}$1 двусторонне, то направление стрелки сохраняется вдоль каждого реберного пути C; если же оно односторонне, то существует по крайней мере один реберный путь, обращающий, направление стрелки.* Заменяя в C каждое ребро $c^1_{\varkappa\lambda}$, принадлежащей ему обходной дугой $\overline{c}^1_{\varkappa\lambda}$, мы получим в случае сохранения направления стрелки замкнутый путь $\overline{C}$, не пересекающий $\boldsymbol{M}^{n-1}$. Напротив, в случае обращения направления стрелки вдоль C, получающийся путь ведет из конечной точки клетки b^1_1 в начальную точку этой клетки; чтобы получить замкнутый путь $\overline{C}$ с начальной точкой P_1, нужно присоединить клетку b^1_1. Очевидно, путь C может быть деформирован в свой обходный путь. Для этого достаточно только непрерывно перевести каждое ребро $c^1_{\varkappa\lambda}$ в дугу $\overline{c}^1_{\varkappa\lambda}$ внутри одной половины клетки $b^2_{\varkappa\lambda}$; начальная и конечная точки клетки $c^1_{\varkappa\lambda}$ перемещаются тогда вдоль $b^1_\varkappa$ и b^1_λ в конечные точки клеток $b^1_\varkappa$ и b^1_λ. Если C — путь, сохраняющий направление стрелки, то $\overline{C}$, а следовательно, и гомотопный с ним путь C имеет с $\boldsymbol{M}^{n-1}$ индекс пересечения по модулю 2 равный $\check{0}$, так как $\boldsymbol{M}^{n-1}$ и $\overline{C}$ не имеют общих точек. Если же направление стрелки обращается, то этот индекс, напротив, равен $\check{1}$, так как $\boldsymbol{M}^{n-1}$ пересекается тогда с $\overline{C}$ в точности в одной точке P_1. Так как, далее, для каждого замкнутого пути h-многообразия $\boldsymbol{M}^{n-1}$ существует гомологичный с ним реберный путь, — ибо все ребра $c^1_{\varkappa\lambda}$ образуют реберный комплекс дуального с $\boldsymbol{M}^{n-1}_a$ разбиения, — то отсюда следует теорема:

Теорема I. *Если $\boldsymbol{M}^{n-1}$ двусторонне, то для каждого замкнутого пути C на $\boldsymbol{M}^{n-1}$ индекс пересечения по модулю* 2 $\chi(\boldsymbol{M}^{n-1}, C) = \check{0}$; *если же $\boldsymbol{M}^{n-1}$ односторонне, то существует путь C, для которого $\chi(\boldsymbol{M}^{n-1}, C) = \check{1}$. При этом $\boldsymbol{M}^{n-1}$ и C рассматриваются, естественно, как алгебраические комплексы по модулю* 2.

Так как индексы пересечения не зависят от выбранного симплициального разбиения, то эта теорема дает нам характеристику односторонности и двусторонности, также не зависящую от симплициального разбиения.

Дадим еще одну характеристику односторонности и двусторонности. Так как C есть реберный путь дуального к $\boldsymbol{M}^{n-1}_a$ клеточного разбиения, то мы можем ориентацию $(n-1)$-мерных «поверхностных» клеток $a^{n-1}_\varkappa$ переносить вдоль C. Именно мы ориентируем a^{n-1}_1 про-

извольно, а затем каждую из остальных клеток ряда

$$a_1^{n-1},\ a_2^{n-1},\ \ldots,\ a_r^{n-1},\ a_{r+1}^{n-1} = \pm a_1^{n-1}$$

ориентируем так, чтобы всякие две, следующие одна за другой клетки индуцировали в общей их $(n-2)$-мерной клетке противоположные ориентации. Тогда в зависимости от того, имеет ли место соотношение $a_{r+1}^{n-1} = a_1^{n-1}$, или $a_{r+1}^{n-1} = -a_1^{n-1}$, мы будем говорить, что C есть путь, сохраняющий «поверхностную» ориентацию, или обращающий ее. Точно так же вдоль обходного пути $\overline{C}$ можно переносить ориентацию n-мерных «пространственных» клеток. В самом деле, C состоит из одномерных клеток дуального к $\boldsymbol{M}_a^n$ клеточного разбиения. Поэтому можно говорить, что $\overline{C}$ является путем, сохраняющим или обращающим пространственную ориентацию. Это имеет вполне точный смысл. Обозначим через $a_\varkappa^n$ инцидентную с $a_\varkappa^{n-1}$ n-мерную клетку, содержащую конечную точку клетки $b_\varkappa^1$ (мы предполагаем снова, что каждые две следующие одна за другой клетки ряда $b_1^1,\ b_2^1,\ \ldots,\ b_r^1,\ b_{r+1}^1$ имеют одинаковые направления) и пусть $a_\varkappa^{n-1}$ ориентирована так, что $a_\varkappa^{n-1}$ входит в ее границу с коэффициентом $+1$:

$$\dot{a}_\varkappa^n = a_\varkappa^{n-1} + \ldots \tag{1}$$

Если мы будем теперь идти по пути $\overline{c}_\varkappa^1$ из центра клетки $a_\varkappa^n$ в центр клетки a_λ^n $(\lambda = \varkappa+1)$ и будем переносить ориентацию $a_\varkappa^n$ вдоль $\overline{c}_{\varkappa\lambda}^1$, то мы придем с ориентацией $+a_\lambda^n$ (это легко подсчитывается, если вспомнить, что все проходимые нами n-мерные клетки имеют своей стороной клетку $a_\varkappa^{n-2}$). Таким образом, *перенося пространственную ориентацию вдоль* $\overline{C}$, *мы приходим от* $+a_1^n$ *к* $+a_{r+1}^n$.

Мы различаем теперь следующие возможности:

Случай I. Направление стрелки вдоль C сохраняется.

a) Поверхностная ориентация вдоль C сохраняется.

Тогда $a_{r+1}^{n-1} = a_1^{n-1}$, и в силу (1) $a_{r+1}^n = a_1^n$, т. е. пространственная ориентация вдоль $\overline{C}$ также сохраняется.

b) Поверхностная ориентация вдоль C обращается.

Тогда $a_{r+1}^{n-1} = -a_1^{n-1}$, вследствие чего $a_{r+1}^n = -a_1^n$. Таким образом в этом случае пространственная ориентация вдоль $\overline{C}$ обращается.

Случай II. Направление стрелки вдоль C обращается.

a) Поверхностная ориентация вдоль C сохраняется.

Тогда $a_{r+1}^{n-1} = a_1^{n-1}$. a_{r+1}^n и a_1^n лежат теперь с различных сторон клетки a_1^{n-1}. В силу (1) они индуцируют в a_1^{n-1} одинаковые ориентации, т. е. пространственная ориентация вдоль $\overline{C}$ обращается.

b) Поверхностная ориентация вдоль C обращается.

Тогда $a_{r+1}^{n-1} = -a_1^{n-1}$. a_{r+1}^n и a_1^n индуцируют в a_1^{n-1} противоположные ориентации. Таким образом пространственная ориентация вдоль $\overline{C}$ сохраняется.

Если мы заметим еще, что перенос ориентации был топологически инвариантно определен также для любых непрерывных путей (§ 75) и что гомотопные пути, например C и $\overline{C}$, всегда либо одновременно обращают ориентацию, либо сохраняют ее, то мы получим следующее предложение.

Теорема II. *Если $\boldsymbol{M}^{n-1}$ лежит в $\boldsymbol{M}^n$ двусторонне (случай* I*), то поверхностная и пространственная ориентация вдоль пути C, принадлежащего $\boldsymbol{M}^{n-1}$, либо одновременно обращаются, либо одновременно сохраняются. Если же $\boldsymbol{M}^{n-1}$ лежит в $\boldsymbol{M}^n$ односторонне (случай* II*), то существует по крайней мере один путь, вдоль которого обращается либо одна поверхностная ориентация, либо одна пространственная.*

Если $\boldsymbol{M}^n$ ориентируемо, то пространственная ориентация сохраняется вдоль любого пути. Отсюда следует теорема:

Теорема III. *В ориентируемом многообразии $\boldsymbol{M}^n$ ориентируемость вложенного в него $\boldsymbol{M}^{n-1}$ эквивалентна с двусторонностью, а неориентируемость — с односторонностью.*

В частности в трехмерном евклидовом пространстве каждая ориентируемая поверхность лежит двусторонне, а каждая неориентируемая — односторонне.

§ 77. Коэффициенты зацепления

Коэффициенты зацепления определяются в n-мерном ориентируемом h-многообразии $\boldsymbol{M}^n$ для двух гомологичных нулю или, общее, для двух слабо гомологичных нулю особых циклов

$$A^{k-1} \quad \text{и} \quad B^{n-k},$$

не имеющих общих точек. Рассмотрим сначала случай, когда A^{k-1} гомологичен нулю, а B^{n-k} слабо гомологичен (быть может, также гомологичен) нулю. Тогда A^{k-1} есть граница особого алгебраического комплекса A^k и мы определяем коэффициент зацепления

$$V(A^{k-1}, B^{n-k})$$

как индекс пересечения

$$\chi(A^k, B^{n-k}).$$

Такой индекс существует, так как по предположению цикл B^{n-1} не имеет общих точек с границей комплекса A^k. Другими словами, коэффициент зацепления $V(A^{k-1}, B^{n-k})$ есть индекс пересечения k-мерного комплекса A^k, натянутого на A^{k-1}, с B^{n-k}. При этом безразлично, натянем ли мы на A^{k-1} комплекс A^k или какой-нибудь другой комплекс $'A^k$. В самом деле, так как B^{n-k} слабо гомологичен нулю, а $A^k - {}'A^k$ есть цикл, то

$$\chi(A^k - {}'A^k, B^{n-k}) = 0, \quad \text{т. е.} \quad \chi(A^k, B^{n-k}) = \chi('A^k, B^{n-k}).$$

Если, например, $\boldsymbol{M}^n$ есть трехмерная сфера, а A^{k-1} и B^{n-k} меридиан и средняя линия трехмерного кольцевого тела, т. е. две зацепленных окружности, то в качестве A^k можно взять круг, натянутый на меридиан. Круг этот пересекается со средней линией гладко. Коэффициент зацепления меридиана со средней линией равен, таким образом, ± 1.

Если же A^{k-1} также только слабо гомологичен нулю, то существует число $\alpha \neq 0$ такое, что $\alpha A^k \sim 0$ (α не должно быть непременно наименьшим из чисел, обладающих этим свойством). Пусть A^k, алгебраический комплекс, натянутый на A^{k-1}, т. е.

$$\dot{A}^k = \alpha A^{k-1}.$$

В этом случае мы определяем *коэффициент зацепления*[47] посредством равенства

$$V(A^{k-1}, B^{n-k}) = \frac{1}{\alpha}\chi(A^k, B^{n-k}).$$

Таким образом V, вообще говоря, есть дробное число. Если мы возьмем вместо A^k другой алгебраический комплекс $'A^k$ с границей $'\alpha A^{k-1}$, то мы получим в качестве коэффициента зацепления число $\frac{1}{'\alpha}\chi('A^k, B^{n-k})$. Однако $\alpha\,'A^k - {}'\alpha A^k$ есть цикл, индекс пересечения которого с любым слабо гомологичным нулю циклом равен нулю. Поэтому

$$\alpha\chi('A^k, B^{n-k}) = {}'\alpha\chi(A^k, B^{n-k}),$$

или

$$\frac{1}{'\alpha}\chi('A^k, B^{n-k}) = \frac{1}{\alpha}\chi(A^k, B^{n-k}).$$

Следовательно, коэффициент зацепления не зависит от выбора пленки A^k.

Вместо того чтобы пересекать B^{n-k} с пленкой A^k, натянутой на αA^{k-1}, можно, наоборот, пересекать A^{n-k} с пленкой B^{n-k+1}, натянутой на βB^{n-k}. При этом коэффициент зацепления получается тот

же самый с точностью до знака. В самом деле

$$\begin{aligned} V(A^{k-1}, B^{n-k}) &= \frac{1}{\alpha}\chi(A^k, B^{n-k}) = \\ &= \frac{1}{\alpha\beta}\chi(A^k, \beta B^{n-k}) = \\ &= (-1)^k \frac{1}{\alpha\beta}\chi(\alpha A^k, B^{n-k+1}) = \\ &\qquad \text{(по основной формуле (10) § 74)} \\ &= (-1)^k \frac{1}{\beta}\chi(A^{k-1}, B^{n-k+1}). \end{aligned}$$

Формулам (8) и (9) § 74 в случае коэффициентов зацепления соответствуют формулы

$$V(A^{k-1}, B_1^{n-k} + B_2^{n-k}) = V(A^{k-1}, B_1^{n-k}) + V(A^{k-1}, B_2^{n-k})$$

и

$$V(A^{k-1}, B^{n-k}) = (-1)^{(k-1)(n-k)+1} V(B^{n-k}, A^{k-1}).$$

Коэффициент зацепления не меняется, если заменить цикл A^{k-1} гомологичным с ним (в «дополнительном пространстве» цикла B^{n-k} относительно многообразия $\boldsymbol{M}^n$) циклом $'A^{k-1}$. В самом деле, если U^k не имеет общих точек с B^{n-k} и

$$\dot{U}^k = A^{k-1} - {}'A^{k-1},$$

то

$$V(A^{k-1} - {}'A^{k-1}, B^{n-k}) = \chi(U^k, B^{n-k}) = 0.$$

Точно так же можно заменить B^{n-k} циклом, гомологичным ему в дополнительном пространстве цикла A^{k-1}.

Напротив, если мы заменим A^{k-1} *произвольным* гомологичным ему в M^n циклом, не имеющим с B^{n-k} общих точек, то $V(A^{k-1}, B^{n-k})$ может измениться на целое число. Действительно, так как $A^{k-1} - {}'A^{k-1}$ представляет тогда некоторый гомологичный нулю цикл, то его индекс пересечения с B^{n-k} является, как мы видели, целым числом. Поэтому каждым двум *классам гомологий* H^{k-1} и H^{n-k}, имеющим как элементы группы Бетти конечные порядки, можно поставить в соответствие некоторый определенный с точностью до целого числа коэффициент зацепления, именно коэффициент зацепления каких-нибудь двух не пересекающих друг друга представителей этих классов. В частности, в $(2m+1)$-мерном h-многообразии каждому классу гомологий конечного порядка размерности m соответствует *коэффициент самозацепления*, т. е. коэффициент зацепления двух гомологичных друг другу и не

имеющих общих точек m-мерных циклов. Коэффициенты самозацепления представляют топологические инварианты h-многообразия. Ими пользуются иногда для установления различия между многообразиями.

Поясним это на примере пространства линзы. Вычислим коэффициент самозацепления оси b пространства линзы $(p, , q)$. Произведем для этого такую деформацию оси линзы, чтобы ее начальная точка P, лежащая на нижнем сферическом сегменте, перешла бы в точку P' края линзы. Эквивалентная точке P точка Q — конечная точка оси линзы — перемещается тогда сама собой по верхнему сферическому сегменту в некоторую определенную точку Q' края линзы. Остальные же точки оси b мы заставляем перемещаться внутри линзы так, чтобы они перешли в конце концов в соединяющую дугу $b' = P'Q'$ края линзы; эта дуга представляет $\frac{q}{p}$-ю часть всего ребра. b и b' представляют два гомологичных одномерных цикла. Для того чтобы найти их коэффициент зацепления, рассмотрим цикл pb', т. е. ребро линзы, пробегаемое q раз, и натянем на него двумерный алгебраический комплекс, например, взятый с коэффициентом q круг K^2, разбивающий линзу на две симметричных половины. Так как b и K^2 пересекаются гладко, то их индекс пересечения $= \pm 1$, т. е. $\chi(b,\, qK^2) = \pm q$, так что искомый коэффициент самозацепления

$$V(b,\, b') = \pm\frac{q}{p}.$$

Коэффициенты самозацепления остальных классов гомологий получаются, если мы будем брать ось b с коэффициентами ν ($\nu = 0, 1, \ldots, p-1$), так как одномерный цикл b образует одномерную базу гомологий. Мы получаем тогда

$$V(\nu b,\, \nu b') = \pm\nu^2\frac{q}{p},$$

где верхний или нижний знак берется в зависимости от ориентации пространства линзы.

Для того чтобы два пространства линзы $(p,\, q)$ и $(p',\, q')$ были гомеоморфны, нужно прежде всего, чтобы у них совпадали фундаментальные группы, т. е. чтобы $v = p'$. Это условие необходимое. Кроме этого нужно, чтобы число $\frac{q'}{p}$, являющееся одним из коэффициентов самозацепления линзы $(p,\, q')$, являлось также коэффициентом самозацепления в линзе $(p,\, q)$. Поэтому число $\frac{q'}{v}$ должно быть сравнимо с одним из чисел $\pm\nu^2\frac{q}{p}$ по модулю 1, т. е. должно существовать целое число ν такое, что

$$q' \equiv \pm\nu^2 q \text{ (мод. } p).$$

Если, например $(p,\, q) = (5,\, 1)$, то написанное сравнение удовлетворяется только при $q' = \pm 1$. $q' = 2$ не является его решением. Отсюда следует, что пространства линзы $(5, 1)$ и $(5, 2)$, наверное, различны (Alexander [2], [10]).

Таким образом *совокупность всех значений коэффициентов самозацепления одномерных циклов трехмерного многообразия есть топологический*

инвариант; этот инвариант позволяет иногда установить негомеоморфность многообразий там, где это не удается сделать с помощью сильнейшего из известных нам средств — фундаментальной группы.

Для пространств линзы $(7,1)$ и $(7,2)$ коэффициенты самозацепления ничего не дают в смысле решения проблемы гомеоморфизма, так как легко подсчитать, что совокупность значений коэффициентов самозацепления для этих пространств одинаковы.

В пространстве линзы $(3,1)$ коэффициенты самозацепления суть

$$0,\ \frac{1}{3},\ \frac{4}{3} \equiv \frac{1}{3}\ (\text{мод. } 1)$$

при одной ориентации и $0,\ -\frac{1}{3}$ при противоположной ориентации пространства. Так как обе системы различны, то отсюда следует, что пространство линзы $(3,1)$ невозможно отобразить топологически на себя с обращением ориентации. В сооветствии с этим говорят, что пространство линзы $(3,1)$ *асимметрично*. Явление асимметрии встречается у многообразий, начиная лишь с числа измерений три[48].

Упражнения.

1. Два многообразия, получающиеся из двух пространств линз $(3,1)$ посредством «сложения» (см. упр. 3 § 62), негомеоморфны, хотя они имеют одинаковые фундаментальные группы. [Найдите базу гомологий каждого из двух получающихся пространств и подсчитайте величины коэффициентов самозацеплений.]

2. В ориентируемом многообразии $\boldsymbol{M}^n$ существует k-мерная база кручения

$$A_1^k,\ A_2^k,\ \ldots,\ A_{\rho^k}^k$$

и $(n-k-1)$-мерная база кручения

$$B_1^{n-k-1},\ B_2^{n-k-1},\ \ldots,\ B_{\rho^k}^{n-k-1}$$

такие, что коэффициент зацепления $V(A_\mu^k,\ B_\nu^{n-k-1})$ при $\mu \neq \nu$ и $= \frac{1}{c_\mu}$, при $\mu = \nu$. c_μ обозначает здесь соответствующий A_μ^k коэффициент кручения (см. § 71).

3. Если трехмерное ориентируемое многообразие имеет в точности один одномерный коэффициент кручения, то существует по крайней мере один одномерный цикл с отличным от 1 коэффициентом самозацепления.

4. Если ориентируемое трехмерное многообразие имеет единственный коэффициент кручения, причем этот коэффициент есть простое число вида $4x+3$, то такое многообразие асимметрично.

Мы уже неоднократно вовлекали в круг наших рассмотрений *дополнительное пространство узла*. В § 52 мы пользовались винтовым узлом для иллюстрации фундаментальной группы, в § 65 произвольный узел служил нам для построения трехмерных многообразий. Наконец, в § 58 мы применяли простейший узел при рассмотрении накрывающих полиэдров. Это последнее применение находится в тесной связи с коэффициентами зацепления.

Рассмотрим лежащий в разбитой на симплексы трехмерной сфере $\boldsymbol{S}^3$ снабженный определенной ориентацией узел k. Предположим, что он составлен из ребер симплициального разбиения сферы. Пусть, кроме того, нет ни одного треугольника, все вершины которого принадлежали бы узлу, и ни одного одномерного симплекса, который был бы хордой узла. Если рассматривать барицентрически подразделенные симплексы сферы $\boldsymbol{S}^3$ как клетки клеточного разбиения $\boldsymbol{S}_a^3$, то определенное в § 65 просверливание вдоль узла состоит в том, что мы удаляем все трехмерные клетки дуального разбиения $\boldsymbol{S}_b^3$, центры которых являются вершинами узла k. Двумерные клетки, дуальные к ребрам узла k, представляют меридианальные сечения высверленного трехмерного кольцевого тела $\boldsymbol{V}$, а граничные окружности этих клеток суть меридианы его границы $\boldsymbol{T}$. При надлежащей ориентации все они гомологичны друг другу на граничном торе $\boldsymbol{T}$ кольцевого тела $\boldsymbol{V}$. Произвольный лежащий на $\boldsymbol{S}_b^3$ одномерный клеточный цикл u дополнительного пространства $\boldsymbol{A}$ гомологичен нулю в $\boldsymbol{S}^3$ и является поэтому границей клеточного алгебраического комплекса U^2. Если выбросить из U^2 все клетки, дуальные ребрам узла k, т. е. все меридианальные сечения трехмерного кольца $\boldsymbol{V}$, то у нас останется двумерный алгебраический комплекс $'U^2$, граница которого состоит из u и из некоторых меридианов трехмерного кольца. А так как все меридианы гомологичны на $\boldsymbol{T}$ фиксированному меридиану m_0, то

$$\boldsymbol{u} \sim \alpha m_0 \quad (\text{на } \boldsymbol{A}).$$

α представляет коэффициент зацепления цикла u с k. В самом деле коэффициент зацепления меридиана m_0 с k при надлежащей ориентации сферы $\boldsymbol{S}^3$ равен 1, поэтому

$$V(k, \boldsymbol{u}) = V(k, \alpha m_0) = \alpha.$$

Если теперь два клеточных цикла u и v имеют один и тот же коэффициент α с k, то оба они гомологичны циклу αm_0, а поэтому гомологичны друг с другом на $\boldsymbol{A}$. Так как, далее, каждый произвольный особый одномерный цикл на $\boldsymbol{A}$ гомологичен клеточному циклу, то у нас получается теорема:

Теорема. *Два особых одномерных цикла u и v дополнительного пространства $\boldsymbol{A}$ узла k гомологичны на $\boldsymbol{A}$ один другому в том и только в том случае, когда они имеют одинаковые коэффициенты зацепления с k.*

Тем самым доказано вновь, что группа Бетти дополнительного пространства $\boldsymbol{A}$ есть свободная циклическая группа (§ 65).

Рассмотрим фундаментальную группу F дополнительного пространства $\boldsymbol{A}$, так называемую *группу узла*. Пути (классы путей) этой

группы, коэффициенты зацепления которых с узлом $\boldsymbol{A}$ делятся на некоторое определенное число g, образуют подгруппу H группы F. Мы хотим исследовать принадлежащее подгруппе H накрытие $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ дополнительного пространства $\boldsymbol{A}$.

Каждому элементу группы F принадлежит определенный коэффициент зацепления, — именно, коэффициент зацепления какого-нибудь пути, являющегося представителем этого элемента, с узлом k. Ставя в соответствие каждому элементу группы F, принадлежащий ему коэффициент зацепления, редуцированный по модулю g, мы тем самым устанавливаем гомоморфное отображение группы F на циклическую группу порядка g, при котором в единицу переходит как раз подгруппа H. Таким образом, H есть нормальный делитель, и дополнительная группа F/H **есть** циклическая группа порядка g. *Вместе с тем накрытие $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ регулярно и его группа скольжений циклично, т. е. $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ есть циклическое накрытие в смысле стр.* 259. $\boldsymbol{A}$ характеризуется тем, что соответствующий замкнутому пути основного полиэдра $\boldsymbol{A}$ путь накрывающего полиэдра $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ замкнут в том и только в том случае, когда коэффициент зацепления исходного пути с k сравним с нулем по модулю g.

Определенное таким образом накрытие является, сверх того, единственным g-листным циклическим накрытием. В самом деле, если H есть нормальный делитель группы узла F, принадлежащий к заданному циклическому накрытию, то F/H есть циклическая группа порядка g. Поэтому при гомоморфном отображении F→F/H каждый коммутатор $\mathrm{F}_i\,\mathrm{F}_k\,\mathrm{F}_i^{-1}\,\mathrm{F}_k^{-1}$ переходит в единичный элемент группы F/H, т. е. каждый коммутатор группы F принадлежит подгруппе H. Но тогда H содержит коммутант K группы F. H состоит, таким образом, из некоторых смежных классов разложения группы F по K, и эти классы, рассматриваемые как элементы дополнительной группы F/K, образуют в ней подгруппу индекса g. Но F/K есть коммутированная группа узла, т. е. свободная циклическая группа, а такая группа имеет только одну подгруппу индекса g. Таким образом доказана *единственность* группы H, а вместе с тем дано чисто теоретико-групповое доказательство существования циклических накрытий.

Можно доказать, что на каждый узел может быть натянута не имеющая особенностей ориентируемая поверхность, для которой узел является границей. Тогда g-листное циклическое накрытие можно получить также, разрезая дополнительное пространство $\boldsymbol{A}$ вдоль этой поверхности, что дает нам один «лист», и соединяя в циклической последовательности друг с другом g таких листов. В самом деле, получающееся таким образом накрытие допускает, очевидно, циклическую группу скольжений порядка g.

Циклические накрытия играют в теории узла важную роль. В то время как коммутированная группа узла является всегда свободной

циклической группой, циклические накрытия с конечным числом листов имеют, вообще говоря, одномерные коэффициенты кручения. Необходимым условием эквивалентности двух узлов является совпадение коэффициентов кручения g-листных циклических накрытий*.

Вместо того чтобы определять циклические накрытия пространства $\boldsymbol{A}$, т. е. трехмерной сферы, просверленной вдоль узла $\boldsymbol{k}$, мы могли бы с таким же успехом определить циклические накрытия пространства $\boldsymbol{S}^3 - \boldsymbol{k}$, т. е. трехмерной сферы, из которой удалены точки узла и (такое пространство, собственно, и представляет дополнительное пространство узла). Это следует из того, что теоремы этого параграфа остаются в силе при замене $\boldsymbol{A}$ пространством $\boldsymbol{S}^3 - \boldsymbol{k}$. В самом деле, если u и v — два особых одномерных цикла в $\boldsymbol{S}^3 - \boldsymbol{k}$, то $\boldsymbol{k}$ можно заменить настолько тонким трехмерным кольцевым телом, что u и v будут лежать целиком в дополнительном пространстве $\boldsymbol{A}$. Если теперь u и v имеют одинаковые коэффициенты зацепления с узлом: $V(\boldsymbol{k}, u) = V(\boldsymbol{k}, v)$, то $u \sim v$ в пространстве $\boldsymbol{S}^3 - \boldsymbol{k}$. При этом $\boldsymbol{A}$ представляет собой конечный, а $\boldsymbol{S}^3 - \boldsymbol{k}$ бесконечный полиэдр.

* J. W. Alexander [17], K Reidemeister [6]. Там же приведены дальнейшие указания литературы.

Глава XI
Непрерывные отображения

§ 78. Степень отображения

Из многочисленных возможностей применения изложенных нами методов к теории отображений полиэдров и многообразий мы выбираем только две: именно, мы рассмотрим степень отображения и формулу неподвижных точек.

В § 31 мы разбили непрерывные отображения комплекса $\boldsymbol{K}$ в комплекс $\mathbf{K}$ на классы отображений, гомотопно деформируемых друг в друга. Проблема отыскания всех возможных классов отображений для двух заданных комплексов $\boldsymbol{K}$ и $\mathbf{K}$ является одной из важных проблем топологии. В такой общей постановке проблема решается, конечно, только для специальных комплексов, — например, для случая, когда $\mathbf{K}$ есть n-мерная сфера, а $\boldsymbol{K}$ — произвольный n-мерный комплекс*. С условием, необходимым для того, чтобы два отображения φ и ψ принадлежали к одному классу, мы уже познакомились: осуществляемые посредством φ и ψ гомоморфные отображения групп Бетти комплекса $\boldsymbol{K}$ в группы Бетти $\mathbf{K}$, а также (определяемое с точностью до внутренних автоморфизмов) гомоморфное отображение фундаментальной группы комплекса $\boldsymbol{K}$ в фундаментальную группу $\mathbf{K}$ должны для φ и ψ совпадать.

Если, в частности, $\boldsymbol{K}$ и $\mathbf{K}$ суть ориентируемые и известным образом ориентированные замкнутые псевдомногообразия одинаковой размерности n, то n-мерные группы Бетти обоих комплексов суть свободные циклические группы. Пусть база гомологий комплекса $\boldsymbol{K}(\mathbf{K})$ состоит из n-мерного цикла $B^n(\mathbf{B}^n)$, получающегося при когерентной ориентации всех симплексов определенного симплициального разбиения комплекса $\boldsymbol{K}(\mathbf{K})$, и пусть образ цикла B^n гомологичен $\gamma\,\mathbf{B}^n$. Тогда осуществляемое непрерывным отображением φ комплекса $\boldsymbol{K}$ в $\mathbf{K}$ гомоморфное отображение n-мерной группы Бетти полностью определяется числом γ. γ называется *степенью отображения* φ[49]. Таким образом *степень отображения есть инвариант класса отображений.* Если реформировать φ в симплициальное отображение ψ (предварительно подразделив симплексы $\boldsymbol{K}$ достаточно мелко), то симплексы комплекса $\boldsymbol{K}$ переводятся отображением ψ в симплексы комплекса $\mathbf{K}$

*См. H. Hopf [19].

(иногда быть может вырождающиеся) и образ цикла B^n тогда не только гомологичен, а просто равен циклу $\gamma\mathbf{B}^n$. Пусть, например, в какой-нибудь определенный симплекс Σ^n симплициального разбиения $\mathbf{K}$ отображаются a симплексов комплекса $\boldsymbol{K}$ с сохранением ориентации и b симплексов с обращением ориентации. Тогда $\gamma = a - b$. Выражаясь наглядно, степень отображения показывает, сколько раз положительно накрывается комплекс $\mathbf{K}$ образом комплекса $\boldsymbol{k}$.

Примеры. Рассмотренное на стр. 154 отображение границы n-мерного симплекса на себя, при котором две вершины меняются местами, а все остальные вершины остаются неподвижными, имеет степень отображения $\gamma = -1$.

Пример отображения, имеющего произвольную степень γ, можно получить так: пусть λ представляет географическую долготу, а θ — широту на сфере $\boldsymbol{S}^2$. Формулы

$$\lambda' = \gamma\lambda, \quad \theta' = \theta$$

определяют непрерывное отображение сферы $\boldsymbol{S}^2$ на другую сферу $'\boldsymbol{S}^2$ с географическими координатами $'\lambda$, θ'. При надлежащей ориентации обеих сфер степень такого отображения есть γ. В самом деле, если $\gamma \neq 0$, то симплициальное разбиение сферы $\boldsymbol{S}^2$, получающееся, если мы проведем экватор и 3γ равноотстоящих меридианов, переходит при нашем отображении в симплициальное разбиение сферы $'\boldsymbol{S}^2$, осуществляемое экватором и тремя равноотстоящими меридианами. Все треугольники разбиения $'\boldsymbol{S}^2$ будут тогда покрыты в одинаковом смысле (т. е. либо все с сохранением ориентации, либо все с обращением ее) каждый $|\gamma|$ треугольниками сферы $\boldsymbol{S}^2$. Если же $\gamma = 0$, то вся сфера $\boldsymbol{S}^2$ отобразится в один меридиан сферы $'\boldsymbol{S}^2$, и степень отображения будет равна нулю на основании следующей теоремы:

Теорема. *Если при непрерывном отображении φ какая-нибудь точка P комплекса $\mathbf{K}$ оказывается непокрытой образом комплекса $\boldsymbol{K}$ или если φ можно деформировать в отображение ψ, оставляющее какую-нибудь точку непокрытой, то степень отображения $= 0$.*

Доказательство. Произведем настолько мелкое симплициальное разбиение комплекса $\mathbf{k}$, имеющее P своей вершиной, чтобы симплициальная звезда $\boldsymbol{S}\mathbf{t}^n$ вокруг P не имела общих точек с $\psi(\boldsymbol{K})$. Особый цикл $\psi(B^n)$ лежит тогда на комплексе $\overline{\mathbf{K}}$, получающемся из $\mathbf{K}$ отбрасыванием n-мерных симплексов звезды $\boldsymbol{S}\mathbf{t}^n$. По теореме о приближении (§ 28) на $\overline{\mathbf{K}}$ существует гомологичный циклу $\psi(B^n)$ симплициальный цикл. Но этот симплициальный цикл должен быть равен нулю, так как он не содержит симплексов звезды $\boldsymbol{S}\mathbf{T}^n$. Поэтому $\psi(B^n) \sim 0$ на $\mathbf{K}$, т. е. ψ имеет степень отображения $= 0$.

Если $\boldsymbol{K}$ совпадает с $\overline{\mathbf{K}}$, то получается такое предложение: *деформация комплекса на себя имеет степень отображения* $+1$. Это следует

из того, что тождественное отображение комплекса на себя имеет степень отображения $+1$.

Пусть φ есть непрерывное отображение комплекса $\boldsymbol{K}$ в $\mathbf{K}$, а φ_1 — непрерывное отображение комплекса $\mathbf{K}$ в $\mathbf{K}_1$. $\varphi_1\varphi$ представляет тогда непрерывное отображение комплекса $\boldsymbol{K}$ в $\mathbf{K}_1$. *Если γ и γ_1 суть степени отображений φ и φ_1, то степень отображения $\varphi_1\varphi$ равна $\gamma_1\gamma$.* В самом деле, если цикл $\mathbf{B}_1^n$ на $\mathbf{K}_1$ имеет то же значение, что B^n на $\boldsymbol{K}$ и $\mathbf{B}^n$ на $\mathbf{K}$, то

$$\varphi(B^n) \sim \gamma\mathbf{B}^n \quad (\text{на } \mathbf{K}), \tag{1}$$

$$\varphi_1(B^n) \sim \gamma_1\mathbf{B}_1^n \quad (\text{на } \mathbf{K}_1). \tag{2}$$

При отображении φ_1 гомология (1) сохраняется (§ 27, теорема I). Поэтому

$$\varphi_1\big(\varphi(B^n)\big) \sim \gamma\varphi_1(\mathbf{B}^n) \sim \gamma\gamma_1\mathbf{B}_1^n \quad (\text{на } \mathbf{K}_1),$$

что и требовалось доказать.

Если, в частности, φ есть топологическое отображение комплекса $\boldsymbol{K}$ на $\mathbf{K}$, а φ_1 — обратное отображение, то $\varphi_1\varphi$ представляет тождественное отображение, т. е. $\gamma\gamma_1 = 1$. Но тогда $\gamma = \gamma_1 = \pm 1$. *Топологическое отображение комплекса $\boldsymbol{K}$ на $\mathbf{K}$ имеет степень отображения* ± 1. По существу мы доказали это уже в § 36. На основании этой теоремы мы можем подразделить все топологические отображения комплекса $\boldsymbol{k}$ на $\mathbf{K}$ на отображения с сохранением ориентации или без сохранения ее, в зависимости от того, равна степень отображения $+1$ или -1.

Если $\mathbf{K}$ является не только псевдомногообразием, но даже *h-многообразием*, то степень отображения можно рассматривать так же, как индекс пересечения точки P комплекса $\mathbf{K}$ (ориентированной знаком $+$) с образом $\varphi(B^n) \sim \gamma\mathbf{B}^n$ цикла B^n. В самом деле, $\chi\big(P, \varphi(B^n)\big) = \chi(P, \gamma\mathbf{B}^n) = \gamma\chi(P, \mathbf{B}^n) = \gamma$ (стр. 317). Это определение можно применить и тогда, когда мы допускаем, что $\boldsymbol{K}$ есть *ограниченное* ориентируемое псевдомногообразие, а $\mathbf{K}$ — ориентируемое замкнутое h-многообразие, т. е. когда дело идет об отображении, например, круга на сферу. Степень отображения имеет смысл в этом случае, конечно, только по отношению к определенной точке комплекса $\mathbf{K}$, причем эта точка не должна, сверх того, принадлежать образу границы комплекса $\boldsymbol{K}$.

Упражнение. Пусть n-мерное ориентируемое ограниченное псевдомногообразие $\boldsymbol{k}$ непрерывно отображено в n-мерное ориентируемое h-многообразие $\mathbf{K}$. Докажем, что

a) если две точки P и Q на $\mathbf{K}$ можно соединить путем, не пересекающим образа границы комплекса $\boldsymbol{K}$, то степени отображения в P и Q одинаковы;

b) если отображение подвергается деформации и во все время деформации точка P комплекса $\mathbf{K}$ не попадает на образ границы комплекса $\boldsymbol{K}$, то степень отображения в P остается во время деформации неизменной.

§ 79. Формула следа

Теперь мы хотим перейти к предложениям относительно существования неподвижных точек непрерывных отображений, с этой целью мы выведем фундаментальную «формулу следа» Хопфа (H. Hopf).

Пусть $\boldsymbol{K}^n$ есть конечный n-мерный комплекс с определенным симплициальным разбиением. Пусть α^k — число его k-мерных симплексов и пусть

$$V_1^k,\ V_2^k,\ \ldots,\ V_{\alpha^k}^k$$

представляют базу свободной абелевой группы (решетки) L^k всех его k-мерных алгебраических комплексов. Ставя в соответствие каждому алгебраическому комплексу $V_\varkappa^k$ алгебраический комплекс

$$'V_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{\alpha^k} \tau_{\varkappa\lambda}^k V_\lambda^k \quad (\varkappa = 1,\ 2,\ \ldots,\ \alpha^k), \tag{1^k}$$

мы получаем линейное преобразование, осуществляющее гомоморфное отображение $\mathbf{T}^k$ решетки L^k в себя. Пусть такие линейные преобразования будут даны для всех размерностей $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$. При этом мы ставим еще условие, в силу которого отображения $\mathbf{T}^k$ не будут являться вполне независимыми друг от друга. Именно, мы требуем, чтобы отображения $\mathbf{T}^k$ *сохраняли границу*. Это значит, что если на основании уравнений (1^k) алгебраический комплекс

$$U^k = \sum_{\varkappa=1}^{\alpha^k} u_\varkappa V_\varkappa^k$$

переходит в алгебраический комплекс

$$'U^k = \sum_{\varkappa=1}^{\alpha^k} u_\varkappa\, 'V_\varkappa^k,$$

то $\dot{U}^k$ переходит на основании уравнений (1^{k-1}) в $'\overline{U}^k$. В следующем параграфе мы будем рассматривать сохраняющие границу отображения $\mathbf{T}^k$, получающиеся посредством симплициального отображения комплекса $\boldsymbol{K}^n$ в себя; здесь, однако, мы будем пользоваться лишь предположением, что граница сохраняется.

Из сохранения границы следует, что цикл переходит в цикл, цикл, гомологичный нулю, — в цикл, гомологичный нулю, и цикл, слабо гомологичный нулю, — в цикл, слабо гомологичный нулю. В самом деле, если, например, $U^{k-1} \approx 0$, т. е. $\dot{U}^k = cU^{k-1}$, то в силу сохранения границы $'\dot{U}^k = c\,'U^{k-1}$, т. е. $'U^{k-1}$ также слабо гомологичен нулю. Поэтому

классу слабо гомологичных между собой k-мерных циклов соответствует при отображении также определенный такой класс. Отсюда следует, что при сохраняющих границу отображениях $\mathbf{T}^k$ приведенные группы Бетти размерностей $0, 1, \ldots, n$ подвергаются гомоморфным отображениям в себя.

Пусть $B_\rho^k \quad (\rho = 1, 2, \ldots, p^k)$ — база слабых гомологий размерности k. Тогда гомоморфное отображение $\mathbf{B}^k$ k-мерной приведенной группы Бетти в себя задается слабыми гомологиями

$$'B_\rho^k \approx \sum_{\sigma=1}^{p^k} \beta_{\rho\sigma}^k B_\sigma^k \quad \rho = 1, 2, \ldots, p^k). \tag{2^k}$$

Формула, которую мы хотим вывести, устанавливает связь между следами преобразований $\mathbf{T}^k$ и $\mathbf{B}^k$. Под следом (Spur) линейного преобразования понимают сумму коэффициентов, стоящих на главной диагонали матрицы преобразования. Таким образом

$$\text{След } \mathbf{T}^k = \sum_{\varkappa=1}^{\alpha^k} \tau_{\varkappa\varkappa}^k,$$

$$\text{След } \mathbf{B}^k = \sum_{\rho=1}^{p^k} \beta_{\rho\rho}^k.$$

След есть инвариант преобразования и не зависит от выбора базисных элементов $V_\varkappa^k$ или соответственно B_ρ^{k*}.

Устанавливаемая формула следует непосредственно из приведенных одновременно к нормальной форме $\mathbf{H}^k \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$ матриц инциденций (§ 21). Во входах этих матриц стоят комплексы трех типов A^k, B^k, C^k. A^k суть циклы слабо гомологичные нулю, B^k образуют базу слабых гомологий, относительно которой мы предположим, что она совпадает с базой, обозначенной теми же буквами в формуле (2^k). Наконец, C^k не являются циклами. При этом

$$\dot{C}_\mu^k = c_\mu^{k-1} A_\mu^{k-1} \quad (\mu 1, 2, \ldots, \gamma^{k-1}). \tag{1}$$

Комплексы A^k, B^k, C^k образуют вместе базу решетки L^k всех k-мерных алгебраических комплексов. Поэтому их можно использовать в качестве базисных элементов V^k линейного преобразования (1^k). Квадратная матрица $(\tau_{\varkappa\lambda}^k) = \mathbf{T}^k$, состоящая из коэффициентов преобразо-

*См. О. Ю. Шмидт, «Абстрактная теория групп», второе издание, 1933г. стр. 139. След называют иногда также *характером* матрицы.

вания (1^k), распадется тогда на 9 прямоугольников

$\mathbf{T}^k$	A^k	B^k	C^k	
$'A^k$	$\alpha^k_{\rho\sigma}$	(12)	(13)	γ^k
$'B^k$	(21)	$\beta^k_{\rho\sigma}$	(23)	p^k
$'C^k$	(31)	(32)	$\gamma^k_{\rho\sigma}$	γ^{k-1}

$(\mathbf{T}^k)$

Воспользуемся теперь еще тем, что $\mathbf{T}^k$ есть отображение, сохраняющее границу. Из этого следует, во-первых, что комплексы $'A^k$ и $'B^k$ являются циклами, так как A^k и B^k являются циклами. Поэтому в выражения для $'A^k$ и $'B^k$ не могут входить комплексы C^k, т. е. коэффициенты прямоугольников (13) и (23) должны равняться нулю. Но тогда коэффициенты $\beta^k_{\rho\sigma}$ совпадают с уже обозначенными таким же образом коэффициентами $\beta^k_{\rho\sigma}$ слабых гомологий (2^k). Во-вторых, так как алгебраические комплексы A^k суть слабо гомологичные нулю циклы, то то же можно сказать про их образы $'A^k$. А тогда все коэффициенты матрицы (12) должны быть равны нулю. В-третьих, уравнение (3) должно оставаться в силе при замене входящих в него алгебраических комплексов их образами. Поэтому

$$'\dot{C}^k_\mu = c^{k-1}_\mu \, 'A^{k-1}_\mu \quad (\mu = 1, 2, \ldots, \gamma^{k-1}).$$

Линейное отображение $\mathbf{T}^k$ k-мерных алгебраических комплексов дает для $'C^k_\nu$ определенное линейное выражение через комплексы A^k, B^k, C^k, точно так же линейное отображение $\mathbf{T}^{k-1}$ $(k-1)$-мерных комплексов дает для $'A^{k-1}_\mu$ определенное выражение, однако, уже только через комплексы (циклы) A^{k-1}. Подставляя эти выражения в последнее уравнение и замечая, что алгебраические комплексы A^k и B^k ничего не добавляют к выражению границы, так как они являются циклами, мы получим

$$\left(\sum_{\nu=1}^{\gamma^{k-1}} \gamma^k_{\mu\nu}, C^k_\nu\right)^{\cdot} = c^{k-1}_\mu \sum_\nu \alpha^{k-1}_{\mu\nu} A^{k-1}_\nu,$$

или, пользуясь формулой (3),

$$\sum_\nu \gamma^k_{\mu\nu}, c^{k-1}_\nu A^{k-1}_\nu = c^{k-1}_\mu \sum_\nu \alpha^{k-1}_{\mu\nu} A^{k-1}_\nu,$$

вследствие чего

$$\gamma^k_{\mu\nu} c^{k-1}_\nu = c^{k-1}_\mu \alpha^{k-1}_\mu.$$

В частности, при $\mu = \nu$

$$\gamma^k_{\mu\mu} = \alpha^{k-1}_{\mu\mu} \quad (\mu = 1, 2, \ldots, \gamma^{k-1}).$$

Таким образом следы частичных матриц $\Gamma^k = (\gamma^k_{\mu\nu})$ и $\mathbf{A}^{k-1} = (\alpha^{k-1}_{\mu\nu})$ совпадают:

$$\text{След } \Gamma^k = \text{След } \mathbf{A}^{k-1}. \tag{2}$$

Пользуясь этим соотношением, мы получаем

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\text{След } \mathbf{T}^k = \sum(-1)^k\text{След } \mathbf{A}^k + \sum(-1)^k\text{След } \mathbf{B}^k +$$

$$+ \sum(-1)^k\text{След } \Gamma^k = \sum(-1)^k\text{След } \mathbf{B}^k + \text{След } \Gamma^0 + (-1)^n\text{След } \mathbf{A}^n.$$

Так как не существует слабо гомологичных нулю k-мерных циклов, то След $\mathbf{A}^n = 0$. Точно так же След $\Gamma^0 = 0$, так как все нульмерные алгебраические комплексы суть циклы. Поэтому мы получаем окончательно *формулу следа Хопфа*:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\text{След } \mathbf{T}^k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\text{След } \mathbf{B}^k. \tag{H}$$

Если взять в качестве отображений $\mathbf{T}^k$ тождественные отображения, то матрица $\mathbf{T}^k$ превращается в единичную матрицу, имеющую α^k строк, а $\mathbf{B}^k$ превращается в единичную матрицу, имеющую p^k строк. Поэтому

$$\text{След } \mathbf{T}^k = \alpha^k; \quad \text{След } \mathbf{B}^k = p^k,$$

и формула следа переходит в формулу Эйлера (§ 23):

$$\sum(-1)^k\alpha^k = \sum(-1)^k p^k,$$

обобщением которой и является формула Хопфа.

§ 80. Формула неподвижных точек

Мы рассматриваем теперь произвольное непрерывное отображение g_0 нашего конечного комплекса $\boldsymbol{k}^n$ в себя. Произведем два симплициальных разбиения комплекса $\boldsymbol{K}^n$, *крупное и мелкое*. Пусть мелкое разбиение получается из крупного m-кратным барицентрическим подразделением и пусть его симплексы настолько малы, что образ каждой симплициальной звезды лежит целиком внутри некоторой симплициальной звезды крупного разбиения, по теореме о равномерной непрерывности этого всегда можно добиться.

По теореме о деформации g_0 всегда можно деформировать в симплициальное отображение g_1. При отображении g_1 ориентированный k-мерный симплекс e_ν^k мелкого разбиения переходит в ориентируемый симплекс E_ν^k:

$$e_\nu^k \to E_\nu^k. \tag{1}$$

E_ν^k либо представляет k-мерный симплекс крупного разбиения, либо, если при симплициальном отображении e_ν^k переходит в симплекс размерности, меньшей чем k, вырождающийся симплекс, эквивалентный с нулевым k-мерным комплексом. Так как m-кратное барицентрическое подразделение $\overset{*}{E}{}_\nu^k$ симплекса E_ν^k представляет k-мерный алгебраический комплекс мелкого разбиения, то симплициальное отображение g_1 ставит в соответствие каждому k-мерному симплексу e_ν^k определенный k-мерный алгебраический комплекс $\overset{*}{E}{}_\nu^k$ мелкого разбиения:

$$e_\nu^k \to \overset{*}{E}{}_\nu^k. \tag{2}$$

Произвольному алгебраическому комплексу $\sum\limits_\nu u_\nu e_\nu^k$ соответствует тогда алгебраический комплекс $\sum\limits_\nu u_\nu \overset{*}{E}{}_\nu^k$. Вместе с тем задается гомоморфное отображение $\mathbf{T}^k$ решетки L^k всех k-мерных алгебраических комплексов мелкого разбиения в себя.

Это гомоморфное отображение сохраняет границу, так как $\dot{e}_\nu^k$ переходит в m-кратно барицентрически подразделенную границу симплекса E_ν^k, т. е. в $(\overset{*}{E}{}_\nu^k)^{\cdot}$ (граница барицентрического подразделения симплекса равна барицентрическому подразделению его границы; см. стр. 145). Поэтому мы можем применить к гомоморфному отображению $\mathbf{T}^k$ формулу (H) § 79.

Предположим теперь, что отображение g_0 не имеет неподвижных точек. Если допустить, что $\boldsymbol{K}^n$ лежит в евклидовом пространстве, то расстояние каждой точки P от ее образа $g_0(P)$ есть непрерывная функция от P. Так как g_0 не имеет неподвижных точек, то нижняя граница δ таких расстояний, действительно достигаемая по теореме III § 7, представляет положительное число. Допустим теперь, что уже симплексы крупного разбиения настолько малы, что диаметр каждого симплекса $< \frac{\delta}{2}$. Тогда произвольная точка комплекса $\boldsymbol{K}^n$ и ее образ при отображении g_0 принадлежат симплексам, не имеющим общих точек. То же самое имеет место при аппроксимирующем симплициальном приближении g_1, так как при аппроксимации ни одна точка не покидает симплекса, которому она принадлежала первоначально (§ 31). Поэтому

образ $\overset{*}{E}{}^{k}_{\nu}$ симплекса e^k_ν при гомоморфном отображении $\mathbf{T}^k$ не содержит симплекса e^k_ν. Отсюда следует, что

$$\text{След } \mathbf{T}^k = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

и формула следа (H) при отображении (2), не имеющем неподвижных точек переходит в формулу

$$\sum (-1)^k \text{След } \mathbf{B}^k = 0.$$

При этом дело идет сначала об отображениях групп Бетти, осуществляемых посредством соответствия (2). Но это те же отображения, которые осуществляются посредством (1). В самом деле, образ цикла при отображении (2) есть подразделение образа при отображении (1), а такие два образа гомологичны. Со своей стороны гомоморфное отображение, осуществляемое при (1), совпадает с отображением, осуществляемым при g_0, так как оба отображения деформируемы друг в друга (§ 31, теорема III).

Таким образом мы получаем следующий результат, в котором снова нет никаких аппроксимаций:

Теорема. *Необходимое условие для того, чтобы непрерывное отображение конечного комплекса $\boldsymbol{K}^n$ в себя не имело неподвижных точек, заключается в равенстве нулю альтернированной суммы следов гомоморфных отображений, которым подвергаются при непрерывном отображении группы Бетти комплекса:*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \text{След} \mathbf{B}^k = 0 \quad (\textit{формула неподвижных точек})^{50} \qquad (F)$$

§ 81. Приложения

Для предлагаемых примеров к формуле (F) имеют важное значение следующие три замечания:

Пусть $\boldsymbol{K}^n$ — связный комплекс. Тогда нульмерная база слабых гомологий образуется точкой, ориентированной знаком + (стр. 90). При непрерывном отображении такая точка снова переходит в точку, ориентированную знаком +. Поэтому след отображения нульмерной группы Бетти $= 1$. Другими словами,

(I) *Из* $p^0 = 1$ *следует* След $\mathbf{B}^0 = 1$.

Далее, так как в случае, когда $p^k = 0$, число k-мерных циклов базы слабых гомологий также $= 0$, мы получаем, что

(II) *Из* $p^k = 0$ *следует* След $\mathbf{B}^k = 0$.

(III) Если $\boldsymbol{K}^n$ есть ориентируемое n-мерное h-многообразие, то число Бетти $p^n = 1$ и база (слабых) гомологий представляет n-мерный цикл M^n, являющийся когерентно ориентированным многообразием. Тогда, *если образ цикла* M^n *гомологичен* γM^n, *то* След $\mathbf{B}^n = \gamma$, причем γ есть степень отображения.

Пример 1. *n-мерный шар.* Как показано в § 19,

$$p^0 = 1, \quad p^1 = p^2 = \ldots = p^n = 0.$$

Принимая во внимание замечания (I) и (II), мы получаем

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \text{ След } \mathbf{B}^k = 1 - 0 + 0 - \ldots = 1 \neq 0.$$

Непрерывное отображение шара в себя имеет всегда по крайней мере одну неподвижную точку.

Пример 2. *n-мерная сфера.* В силу § 19

$$p^0 = 1, \quad p^2 = \ldots = p^{n-1} = 0, \quad p^n = 1.$$

По формуле неподвижных точек, если отображение не имеет неподвижных точек, то

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \text{ След } \mathbf{B}^k = 1 + (-1)^n\gamma = 0.$$

Поэтому *степень неимеющего неподвижных точек непрерывного отображения n-мерной сферы в себя* $\gamma = (-1)^{n+1}$.

Этот результат легко получить и элементарным путем: пусть P' — образ точки P при непрерывном отображении g_0 единичной n-мерной сферы в себя. Заставим передвигаться P' по окружности большого круга, определяемой точками P и P', в точку, диаметрально-противоположную точке P. Такое передвижение представляет гомотопную деформацию отображения g_0, деформирующую g_0 в g_1, где g_1 есть отображение, переводящее каждую точку сферы в точку, диаметрально-противоположную. g_0 и g_1 имеют одинаковые степени отображения (стр. 361). Но степень отображения g_1 равна $(-1)^{n+1}$, так как замена друг другом диаметрально противоположных точек сферы эквивалентна произведению $(n+1)$ отражений, каждое из которых имеет степень отображения $= -1$.

Полученный результат нетрудно подтвердить на примерах сфер размерностей $1, 2, 3$.

Пример 3. *Деформации, неимеющие неподвижных точек.* Если непрерывное отображение комплекса в себя представляет деформацию, то соответствующее гомоморфное отображение групп Бетти есть тождественное отображение (§ 31, теорема IV), вследствие чего

$$\text{След } \mathbf{B}^k = p^k.$$

Поэтому по формуле (12) § 23

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^n \text{ След } \mathbf{B}^k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k p^k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \alpha^k = N.$$

Применяя формулу неподвижных точек, мы получаем, что *равенство нулю эйлеровой характеристики есть необходимое условие для существования деформаций, не имеющих неподвижных точек*[51].

Если комплекс $\boldsymbol{K}^n$ представляет, в частности, n-мерное h-*многообразие* $\boldsymbol{M}^n$, то при нечетных n это условие выполняется всегда (§ 69, теорема IV). При четных же n, напротив, это условие существенным образом влияет на число многообразий, допускающих деформации без неподвижных точек. Так, например, для *замкнутых поверхностей* ($n = 2$)

$$N = 2(1 - h), \quad \text{или} \quad = 2 - k,$$

где h и k — число ручек, или соответственно пленок Мебиуса замкнутой поверхности. N обращается в нуль только при $h = 1$ или $k = 2$, т. е. у тора и бутылки Клейна; таким образом, только относительно этих двух замкнутых поверхностей можно предполагать возможность существования деформаций без неподвижных точек. Для этих поверхностей такие деформации действительно существуют и их нетрудно указать.

Пример 4. *n-мерный шар с дырами.* Пусть имеется n-мерный шар $\boldsymbol{V}^n$, заданный в определенном симплициальном разбиении. Удалим из него внутренние точки l ориентированных симплексов E_1^n, E_2^n, ..., E_l^n, не имеющих общих точек ни между собой, ни с границей шара $\boldsymbol{V}^n$. У остающегося комплекса $\overline{\boldsymbol{V}}^n$ нульмерное число Бетти $p^0 = 1$. Всякий k-мерный цикл U^k симплициального разбиения при $k > 0$ гомологичен в $\boldsymbol{V}^n$ нулю (§ 19). Поэтому существует алгебраический комплекс U^{k+1}, для которого U^k является границей:

$$U^k = \dot{U}^{k+1}. \tag{1}$$

Если теперь $k < n - 1$, то n-мерные симплексы не входят в U^{k+1}, следовательно, не входят туда и удаляемые n-мерные симплексы E_1^n, E_2^n, ..., E_l^n, т. е. U^{k+1} гомологичен нулю даже и в $\overline{\boldsymbol{V}}^n$. Поэтому числа Бетти

$$p^0 = 1, \quad p^1 = p^2 = \ldots = p^{n-2} = 0. \tag{2}$$

Если, напротив, $k = n-1$, то заданный цикл U^{n-1} в силу уравнения (1) является границей алгебраического комплекса

$$U^n = \alpha_1 E_1^n + \ldots + \alpha_l E_l^n + {}'U^n \quad ({}'U^n \text{ принадлежит } \overline{\boldsymbol{V}}^n),$$

т. е.

$$U^{n-1} = \dot{U}^n = \alpha_1 \dot{E}_1^n + \ldots + \alpha_l \dot{E}_l^n + {}'\dot{U}^n,$$

или

$$U^{n-1} = \alpha_1 \dot{E}_1^n + \ldots + \alpha_l \dot{E}_l^n \quad (\text{на } \overline{\boldsymbol{V}}^n).$$

Это значит, что каждый $(n-1)$-мерный цикл комплекса $\overline{\boldsymbol{V}}^n$ гомологичен линейной комбинации l граничных комплексов

$$\dot{E}_1^n, \ldots, \dot{E}_l^n. \tag{3}$$

Но эти комплексы гомологично независимы. В самом деле, если бы для них выполнялось соотношение вида

$$\beta_1 \dot{E}_1^n + \ldots + \beta_l \dot{E}_l^n \sim 0,$$

то на $\overline{\boldsymbol{V}}^n$ существовал бы n-мерный комплекс $W^n \neq 0$, граница которого была бы равна

$$\dot{W}^n = \beta_1 \dot{E}_1^n + \ldots + \beta_l \dot{E}_l^n.$$

Это значило бы, что $W^n - \beta_1 E_1^n - \ldots - \beta_l E_l^n$ представляет n-мерный цикл в bV^n (в $\overline{\boldsymbol{V}}^n$ с «заделанными» дырками). А единственный такой цикл есть нулевой комплекс. Так как W^n не содержит ни одного из симплексов E_i^n, то отсюда следует, что $\beta_1 = \ldots = \beta_l = 0$. Таким образом l комплексов (3) образуют в $\overline{\boldsymbol{V}}^n$ $(n-1)$-мерную базу слабых гомологий, т. е. $p^{n-1} = l$.

Мы предполагаем теперь относительно внешней границы комплекса $\boldsymbol{V}^n$, что она переходит либо сама в себя, либо в гомологичный себе цикл, так, например, она может сжиматься. Если, сверх того, a из l граничных сфер (3) переходят каждая сама в себя или в гомологичный самой себе цикл, в то время как остальные $b = l - a$ сфер меняются местами друг с другом, то на главной диагонали матрицы отображения $\mathbf{B}^{n-1}$ стоят a единиц и b нулей. Поэтому

$$\text{След } \mathbf{B}^{n-1} = a,$$

а в силу (2)

$$\text{След } \mathbf{B}^0 = 1 \quad \text{След } \mathbf{B}^1 = \ldots = \text{След } \mathbf{B}^{n-2} = 0.$$

Формула неподвижных точек дает тогда следующее необходимое условие для того, чтобы не было неподвижных точек:

$$1 - 0 + \ldots + (-1)^{n-1} a = 0,$$

или

$$a = (-1)^n.$$

Так как a есть целое положительное число, то для нечетных n вообще не существует отображений комплекса $\overline{\boldsymbol{V}}^n$ без неподвижных точек, для четных же n такие отображения существуют лишь, когда $a = 1$. Так, например, круговое кольцо допускает неимеющее неподвижных точек вращение вокруг своего центра. Для сферического слоя, напротив, не существует никаких отображений без неподвижных точек, при которых обе граничные сферы переводятся в гомологичные им циклы.

Упражнения. 1. Если при однозначном и непрерывном отображении n-мерной сферы в себя какая-нибудь точка сферы остается свободной (непокрытой образом сферы), то такое отображение имеет неподвижную точку.

2. Непрерывное отображение проективного пространства $\boldsymbol{P}^n$ в себя при четном n всегда имеет неподвижную точку, при нечетном же n, для того чтобы отображение не имело неподвижных точек, степень отображения должна быть равна 1.

3. Непрерывное отображение двумерной сферы в себя обладает либо неподвижной точкой, либо «диаметральной точкой», либо и тем и другим.

4. На двумерной сфере нельзя задать никакого непрерывного векторного поля.

Глава XII

Вспомогательные сведения из теории групп

§ 82. Образующие и соотношения

Топология тесно связана с теорией групп. Мы коротко изложим в этой главе теоретико-групповые предложения, которыми мы пользовались при топологических исследованиях. В противоположность группам, рассматриваемым обычно в алгебре или геометрии, в топологии имеют дело главным образом с группами, задаваемыми образующими и соотношениями*. Мы рассмотрим поэтому сначала, в чем состоит такой способ задания группы.

Пусть F — конечная или бесконечная группа** и

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_a \tag{1}$$

— некоторое число ее элементов (среди которых могут встречаться и тождественные). Говорят, что эти элементы являются *образующими* группы F, если каждый элемент из F можно представить в виде произведения элементов $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_a$ и обратных элементов

$$A_1^{-1},\ A_2^{-1},\ \ldots,\ A_a^{-1}. \tag{2}$$

Такое произведение мы будем называть «*словом*». Так, например, словами являются $A_1A_1^{-1}$ или $A_2^{-4}A_6A_3^5$. Исходя из формальных соображений, мы вводим еще пустое слово, не содержащее ни одной образующей. Каждое слово представляет, таким образом, групповой элемент. Однако один и тот же элемент может быть представлен различными словами. Пустое слово является групповой единицей. Мы будем обозначать ее также знаком 1. Для сокращенной записи слова мы будем пользоваться символом $W(A_i)$, причем мы полагаем, что

$$W_1(A_i) \equiv W_2(A_i)$$

*Это утверждение справедливо в основном в применении к топологии двух- и трехмерных многообразий, теории узлов и т. п.; n-мерная топология, а также современная теоретико-множественная топология опирается главным образом на общую теорию бесконечных абелевых групп, новая эпоха в которых создана понтрягинской теорией характеров. (*Прим. ред.*)

**Определения и элементарные предложения из теории групп можно найти, например, в книге Ван – дер – Вардена «Современная алгебра», ч. I (ГТТИ, 1934 г.), глава II.

(читается *тождественно равно*), если каждый элемент одного слова совпадает с соответствующим элементом другого. Если же, напротив, слова $W_1(A_i)$ и $W_2(A_i)$ представляют один и тот же элемент группы, но не совпадают непременно одно с другим, то мы будем называть эти слова *равными*

$$W_1(A_i) = W_2(A_i).$$

Если написать все элементы слова в обратном порядке и одновременно изменить знак у каждого показателя степени на противоположный, то мы получим так называемое *обратное слово* $W^{-1}(A_i)$. Очевидно, это слово представляет групповой элемент, обратный групповому элементу $W(A_i)$.

Пусть два слова $W_1(A_i)$ и $W_2(A_i)$ равны. Уравнение

$$W_1(A_i) = W_2(A_i)$$

называется *соотношением*, существующим в группе F между образующими $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Обыкновенно соотношение записывают так, чтобы справа стояла групповая единица:

$$W_1(A_i)W_2^{-1}(A_i) = 1.$$

Таким образом вопрос об отыскании всех соотношений эквивалентен вопросу об отыскании всех слов, представляющих групповую единицу. Среди соотношений содержатся всегда *тривиальные соотношения*

$$A_iA_i^{-1} = 1 \quad \text{и} \quad A_i^{-1}A_i = 1. \tag{3}$$

Пусть теперь $R(A_i) = 1$ представляет соотношение, а $W(A_i)$ — какое-нибудь слово группы F. Тогда «*применяя соотношение* $R(A_i) = 1$», мы можем получить из $W(A_i)$ новое слово. Применение соотношения $R(A_i) = 1$ состоит в том, что либо из $W(A_i)$ вычеркивается входящее туда слово $R^{\pm 1}$, т. е. слово $W_1R^{\pm 1}W_2$ заменяется новым словом W_1W_2 либо в $W(A_i)$ вставляется слово $R^{\pm 1}$. Получающиеся таким образом слова в силу соотношения $R^{\pm 1} = 1$ равны исходному слову.

Пусть

$$R_1(A_i) = 1,\ R_2(A_i) = 1, \ldots, R_r(A_i) = 1 \tag{4}$$

представляют конечное число соотношений группы F, причем r может быть также и равным нулю. Если тогда, применяя конечное число раз соотношения (4) и тривиальные соотношения (3) к слову $W(A_i)$, мы можем превратить его в пустое слово, то

$$W(A_i) = 1$$

представляет соотношение группы F, называемое следствием соотношений (4). В случае, когда каждое соотношение группы F является

следствием соотношений (4), (4) называются *системой определяющих соотношений* группы F. Такая система характеризуется тем, что каждое представление групповой единицы может быть переведено путем применения соотношений системы (4) и тривиальных соотношений (3) в пустое слово. Отсюда следует также, что применением этих соотношений каждое слово может быть переведено в каждое равное ему слово. Мы не требуем от системы определяющих соотношений, чтобы соотношения ее были независимы, т. е. чтобы ни одно из них не являлось следствием остальных.

Система определяющих соотношений (4) вместе с образующими (1) полностью определяют группу F. В самом деле, задавая соотношения (4), мы задаем тем самым и все их следствия, а следовательно, и все представления групповой единицы. Но тогда для каждых двух слов устанавливается, дают ли они одинаковые элементы группы или разные. Несмотря на это вопрос о способе вычисления, позволяющем решить, равны ли два данных слова или нет, представляет до сих пор нерешенную в общем случае проблему теории групп (проблема слов — Wortproblem).

Сделанное нами предположение относительно конечности числа образующих и числа определяющих соотношений не может считаться естественным с точки зрения теории групп, так как существуют группы, представляемые лишь при помощи бесконечного множества образующих. В качестве примера такой группы можно указать группу всех рациональных чисел, за исключением нуля, в которой групповой операцией является умножение. Такая группа не может иметь конечного числа образующих ввиду существования бесконечного множества простых чисел. Однако в теории конечных комплексов, стоящей в центре наших топологических исследований, нам нужны лишь группы с конечным числом образующих и определяющих соотношений. Мы ограничимся поэтому для простоты рассмотрением только таких групп.

Пример 1.

Целые числа с алгебраическим сложением в качестве групповой операции образуют бесконечную группу. За образующую A этой группы можно выбрать число $+1$. Групповой единицей является число 0; элемент A^k представляет число $+k$. Слово $A^{\varepsilon_1}A^{\varepsilon_2}\ldots$, где $\varepsilon = \pm 1$, может быть переведено при помощи одних тривиальных соотношений в A^k и это слово равно групповой единице лишь в том случае, когда $k = 0$. Каждое соотношение группы является поэтому следствием тривиальных соотношений, вследствие чего система определяющих соотношений есть пустая система (не содержит ни одного соотношения). Такого рода группа, имеющая одну образующую и ни одного определяющего соотношения, называется *свободной циклической группой.*

Пример 2.

Классы вычетов целых чисел по модулю g образуют, если рассматривать в качестве групповой операции обычное сложение таких классов, группу порядка g. В качестве образующей этой группы можно взять класс A,

содержащий число 1. Система определяющих соотношений состоит из одного соотношения $A^g = 1$. В этом уравнении 1 означает групповую единицу, т. е. класс, содержащий число 0. Такая группа называется *циклической группой порядка* g.

Если группа задана системой образующих и определяющих соотношений, то из этой системы можно получить другие образующие и определяющие соотношения. Это производится при помощи следующих операций:

1. Добавление или исключение соотношения, являющегося *следствием* других соотношений.

Пусть

$$R_1(A_i) = 1,\ R_2(A_i) = 1,\ \ldots,\ R_r(A_i) = 1 \tag{5}$$

представляют систему определяющих соотношений группы F, и $R_{r+1}(A_i)$ есть следствие соотношений (5). Тогда

$$R_1(A_i) = 1,\ R_2(A_i) = 1,\ \ldots,\ R_r(A_i) = 1,\quad R_{r+1}(A_i) = 1 \tag{6}$$

также являются системой определяющих соотношений, и обратно. В самом деле, совокупность всех следствий системы (5) совпадает с совокупностью всех следствий системы (6).

2. Добавление или исключение одной *образующей*.

Пусть

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_a \tag{7}$$

суть образующие группы F, а (5) — определяющие соотношения. Тогда в качестве новой образующей можно ввести произвольное произведение $W(A_i) = A_{a+1}$. Для образующих

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_a,\ A_{a+1} \tag{8}$$

система

$$R_1(A_i) = 1,\ R_2(A_i) = 1,\ \ldots,\ R_r(A_i) = 1,\quad A_{a+1}^{-1}W(A_i) = 1 \tag{9}$$

является системой определяющих соотношений. В самом деле, пусть

$$R(A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_{a+1}) = 1$$

есть произвольное соотношение группы F. Применяя соотношение $A_{a+1} = W(A_i)$, мы получим соотношение

$$R\big(A_1,\ A_2,\ \ldots,\ W(A_i)\big) = 1, \tag{10}$$

в которое новый элемент A_{a+1} больше не входит. Это соотношение есть следствие соотношений (5), так как (5) есть система определяющих

соотношений группы F. Таким образом, посредством применения соотношений (5) и тривиальных соотношений левая часть формулы (10) может быть переведена в пустое слово.

Предполагая, напротив, что (9) есть система определяющих соотношений для образующих (8), мы можем доказать, что (7) также являются образующими группы, а (5) — системой определяющих соотношений для этих образующих. В самом деле, в силу равенства $A_{a+1} = W(A_i)$ каждое произведение *образующих* (8) можно выразить через образующие (7). Пусть теперь имеется соотношение $R(A_1, A_2, \ldots, A_a) = 1$. По предположению оно является следствием соотношений (9). Поэтому существует конечная последовательность слов

$$\begin{aligned} &R(A_1, A_2, \ldots, A_a),\\ &R'(A_1, A_2, \ldots, A_a, A_{a+1}),\\ &R''(A_1, A_2, \ldots, A_a, A_{a+1}),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

каждое из которых получается из предыдущего путем применению одного из соотношений (9) или тривиального соотношения $A_i^{\varepsilon} A_i^{-\varepsilon} = 1$ ($\varepsilon = \pm 1$; $i = 1, 2, \ldots, a+1$) и последнее из которых есть пустое слово. Заменяя всюду A_{a+1} словом $W(A_i)$, мы получим из этой последовательности последовательность слов

$$\begin{aligned} &R(A_1, A_2, \ldots, A_a),\\ &R'\big(A_1, A_2, \ldots, A_a, W(A_i)\big),\\ &R''\big(A_1, A_2, \ldots, A_a, W(A_i)\big),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Наше доказательство будет закончено, если мы покажем, что каждое из этих слов может быть переведено в следующее лишь при помощи соотношений (5) и тривиальных соотношений $A_i^{\varepsilon} A_i^{-\varepsilon} = 1 \quad (i = 1, \ldots, a)$. А это действительно имеет место, так как если какое-либо слово $R^{(k+1)}(A_1, A_2, \ldots, A_a, A_{a+1})$ получается из $R^{(k)}(A_1, A_2, \ldots, A_a, A_{a+1})$ применением одного из r первых соотношений (9) или одного из тривиальных соотношений $A_i^{\varepsilon} A_i^{-\varepsilon} = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, a)$, то слово $R^{(k+1)}\big(A_1, A_2, \ldots, A_a, W(A_i)\big)$ точно таким же образом получается из $R^{(k)}\big(A_1, A_2, \ldots, A_a, W(A_i)\big)$. Если же $R^{(k+1)}(A_1, A_2, \ldots, A_a, A_{a+1})$ получается из $R^{(k)}(A_1, A_2, \ldots, A_a, A_{a+1})$ применением соотношения $A_{a+1}^{-1} W(A_i) = 1$ или тривиального соотношения $A_{a+1}^{\varepsilon} A_{a+1}^{-\varepsilon} = 1$, то $R^{(k+1)}\big(A_1, A_2, \ldots, A_a, W(A_i)\big)$ получается из $R^{(k)}\big(A_1, A_2, \ldots, A_a, W(A_i)\big)$ применением соотношения $W^{\varepsilon}(A_i) W^{-\varepsilon}(A_i) = 1$, которое сводится к одним тривиальным соотношениям.

Существует теорема, утверждающая, что от каждого представления группы F при помощи образующих и определяющих соотношений можно перейти к каждому другому такому представлению, применяя конечное число раз описанные элементарные операции. В дальнейшем мы этой теоремой пользоваться не будем. Доказательство ее основывается на том, что введением новых образующих и соотношений каждое из данных представлений можно перевести в одно и то же третье представление, содержащее образующие как первого, так и второго представления.

§ 83. Гомоморфное отображение и дополнительная группа

Если каждому элементу F группы F однозначно ставится в соответствие элемент $\overline{F}$ другой группы $\overline{\mathrm{F}}$, причем так, что образ $\overline{F}_3$ произведения $F_1F_2 = F_3$ равен произведению образов $\overline{F}_1\overline{F}_2$, то мы говорим, что этим задается *гомоморфное отображение группы* F в $\overline{\mathrm{F}}$. В случае, когда каждый элемент группы $\overline{\mathrm{F}}$ является образом некоторого элемента группы F, говорят *о гомоморфном отображении группы* F *на* $\overline{\mathrm{F}}$. Если гомоморфное отображение F на $\overline{\mathrm{F}}$ взаимно однозначно, то F и $\overline{\mathrm{F}}$ называются изоморфными группами.

Для гомоморфных отображений одной группы на другую имеет место следующая основная теорема, относящая каждому гомоморфному отображению группы F на $\overline{\mathrm{F}}$ некоторую дополнительную группу группы F:

Теорема о гомоморфизме. *Каждая группа* $\overline{\mathrm{F}}$*, на которую группа* F *гомоморфно отображается, изоморфна дополнительной группе* F/N*; при этом* N *есть нормальный делитель группы* F*, состоящий из совокупности элементов, переходящих в единицу группы* F*. Обратно,* F *можно гомоморфно отобразить на каждую дополнительную группу* F/N (*где* N — *произвольный нормальный, делитель группы* F). Определение дополнительной группы* и доказательство этой теоремы можно найти, например, в книге Ван–дер–Вардена, «Современная алгебра», ч. 1, стр. 38 (ГТТИ, 1934 г.).

Пусть теперь F задана образующими и определяющими соотношениями § 82, (1), (4). Мы хотим представить таким же образом дополнительную группу $\overline{\mathrm{F}}$ =F/N. Предположим, что существует конечное число элементов $S_1(A_i)$, $S_2(A_i)$, ..., $S_s(A_i)$, для которых N является наименьшим нормальным делителем, содержащим эти элементы. (В случае, когда N имеет конечное число образующих $S_1(A_i)$,

*Дополнительную группу часто называют факторгруппой, или же группой вычетов.

$S_2(A_i)$, ..., $S_s(A_i)$, это предположение выполняется всегда.) Каждый элемент N является тогда произведением конечного числа элементов вида

$$F(A_i)S_\lambda^\varepsilon(A_i)F^{-1}(A_i) \quad (\varepsilon = \pm 1). \tag{1}$$

В самом деле, каждое такое произведение есть элемент подгруппы N, так как N есть нормальный делитель. С другой стороны, сами эти произведения образуют нормальный делитель; а так как N должен быть наименьшим нормальным делителем, то такие произведения исчерпывают всю подгруппу N. Будем обозначать надчеркиванием элемента группы F класс смежности дополнительной группы F/N, в котором этот элемент лежит. Тогда классы

$$\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_a \tag{2}$$

образуют, очевидно, систему образующих группы $\overline{\mathrm{F}}$ и имеют место соотношения

$$\left.\begin{aligned} R_1(\overline{A}_i) = \overline{1}, \ldots, R_r(\overline{A}_i) = \overline{1}, \\ S_1(\overline{A}_i) = \overline{1}, \ldots, S_s(\overline{A}_i) = \overline{1}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Класс $\overline{1}$, в котором лежит единица группы $\overline{\mathrm{F}}$, представляет при этом нормальный делитель.

Мы утверждаем, что (3) представляет систему определяющих соотношений группы $\overline{\mathrm{F}}$, т. е. что каждое соотношение $R(\overline{A}_i) = \overline{1}$ является следствием соотношений (3). В самом деле, $R(\overline{A}_i) = \overline{1}$ означает, что $R(A_i)$ принадлежит к N. Но каждый элемент N представляет произведение элементов вида (1). Поэтому с помощью соотношений $R_1(A_i) = 1, \ldots, R_r(A_i) = 1$ и тривиальных соотношений $R(A_i)$ может быть переведено в произведение элементов вида (1). Но тогда $R(\overline{A}_i)$ путем применения соотношений $R_1(\overline{A}_i) = \overline{1}, \ldots, R_r(\overline{A}_i) = \overline{1}$ и тривиальных соотношений может быть переведено в произведение трансформированных элементов $S_1^{\pm 1}(\overline{A}_i), \ldots, S_s^{\pm 1}(\overline{A}_i)$; это же последнее произведение может быть преобразовано в пустое произведение путем применения соотношений $S_1(\overline{A}_i) = \overline{1}, \ldots, S_s(\overline{A}_i) = \overline{1}$ и тривиальных.

Таким образом соотношения дополнительной группы получаются путем прибавления к соотношениям группы добавочных соотношений. В результате получается следующая теорема.

Теорема. *Если группа* F *имеет образующие*

$$A_1, A_2, \ldots, A_a$$

и соотношения

$$R_1(A_i) = 1, R_2(A_i) = 1, \ldots, R_r(A_i) = 1$$

и если N *есть наименьший нормальный делатель, содержащий некоторые элементы*

$$S_1(A_i),\ S_2(A_i),\ \ldots,\ S_s(A_i) = 1,$$

то дополнительная группа $\mathrm{F/N} = \overline{\mathrm{F}}$ *имеет образующие*

$$\overline{A}_1,\ \overline{A}_2,\ \ldots,\ \overline{A}_a$$

и определяющие соотношения

$$R_1(\overline{A}_i) = \overline{1},\ R_2(\overline{A}_i) = \overline{1},\ \ldots,\ R_r(\overline{A}_i) = \overline{1},$$
$$S_1(\overline{A}_i) = \overline{1},\ S_2(\overline{A}_i) = \overline{1},\ \ldots,\ S_r(\overline{A}_i) = \overline{1}.$$

При этом $\overline{A}_i$ *означает класс смежности, в котором лежит* A_i.

При выводе теоремы I мы исходили из определенного нормального делителя N и искали соотношения дополнительной группы F/N. Можно поступить и наоборот: присоединить к соотношениям группы F произвольные дополнительные соотношения. Мы получим тогда снова дополнительную группу F/N, именно дополнительную группу наименьшего нормального делителя, содержащего левые стороны дополнительных соотношений.

Выведем из теоремы о гомоморфизме следствие, которым мы воспользовались в § 20. Пусть из трех групп

$$\mathrm{F}, \mathrm{D}, \mathrm{N} \tag{4}$$

D и N являются нормальными делителями группы F, и N содержится в D. N определяет гомоморфное отображение группы F на фактор-группу $\mathrm{F/N} = \overline{tF}$. При этом группы (4) переходят соответственно в

$$\overline{\mathrm{F}} = \mathrm{F/N},\quad \overline{\mathrm{D}} = D/N,\quad \overline{\mathrm{N}} = N/N = \overline{1}.$$

Так как D есть нормальный делитель F, то $\overline{\mathrm{D}}$ есть нормальный делитель $\overline{\mathrm{F}}$ и существует гомоморфное отображение F на $\overline{\mathrm{F}}/\overline{\mathrm{D}}$. Выполненные одно за другим гомоморфные отображения F на $\overline{\mathrm{F}}$ и $\overline{\mathrm{F}}$ на $\overline{\mathrm{F}}/\overline{\mathrm{D}}$ дают одно гомоморфное отображение группы F на $\overline{\mathrm{F}}/\overline{\mathrm{D}}$, при котором в единицу группы $\overline{\mathrm{F}}/\overline{\mathrm{D}}$ переходят как раз элементы группы D. Таким образом имеем следующую *теорему об изоморфизмах Эмми Нетер*:

$$\mathrm{F/D} \quad \text{и} \quad \overline{\mathrm{F}}/\overline{\mathrm{D}} = (\mathrm{F/N})/(\mathrm{D/N})$$

изоморфны.

§ 84. Коммутирование групп

Мы применим теперь теорему I предыдущего параграфа к одному частному случаю, имеющему большое значение. Пусть F есть группа с образующими

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_a \tag{1}$$

и определяющими соотношениями

$$(\mathrm{F}) \qquad R_1(A_i) = 1,\ R_2(A_i) = 1,\ \ldots,\ R_r(A_i) = 1, \tag{2}$$

а N — наименьший нормальный делитель, содержащий все коммутаторы

$$A_i A_k A_i^{-1} A_k^{-1} \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ a).$$

По теореме I дополнительная группа $\mathrm{F/N} = \overline{\mathrm{F}}$ имеет тогда образующие

$$\overline{A}_1,\ \overline{A}_2,\ \ldots,\ \overline{A}_a \tag{$\overline{1}$}$$

и определяющие соотношения

$$(\overline{\mathrm{F}}) \qquad R_1(\overline{A}_i) = 1,\ R_2(\overline{A}_i) = \overline{1},\ \ldots,\ R_r(\overline{A}_i) = \overline{1}; \tag{$\overline{2}$}$$

$$\overline{A}_i \overline{A}_k \overline{A}_i^{-1} \overline{A}_k^{-1} \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ a). \tag{$\overline{3}$}$$

При этом $\overline{A}_i$ обозначает класс смежности элемента A_i группы F при разбиении ее по N. Вместо ($\overline{3}$) можно было бы написать также

$$\overline{A}_i \overline{A}_k = \overline{A}_k \overline{A}_i.$$

Таким образом образующие, а следовательно, и все элементы группы $\overline{\mathrm{F}}$, переместительны друг с другом, т. е. $\overline{\mathrm{F}}$ является *абелевой группой*. Говорят, что она получается из F *коммутированием*. Коммутированная группа получается из F присоединением соотношений (3), выражающих переместительность.

Мы должны показать еще, что $\overline{\mathrm{F}}$ определяется только самой группой F и не зависит, например, от выбора образующих или определяющих соотношений группы F. Мы сделаем это, дав для $\overline{\mathrm{F}}$ другое определение, делающее очевидной ее независимость от способа представления группы F. *Коммутированная группа* $\overline{\mathrm{F}}$ есть дополнительная группа группы F по коммутанту K. *Коммутантом группы* F называется, как известно, нормальный делитель K, порожденный всеми коммутаторами $F_\rho F_\sigma F_\rho^{-1} F_\sigma^{-1}$, где F_ρ и F_σ — произвольные элементы из F. Мы должны показать, что N=K. По теореме I § 83 N есть наименьший нормальный делитель, содержащий коммутаторы $A_i A_k A_i^{-1} A_k^{-1}$, т. е. *специальные* коммутаторы группы F. Поэтому N содержится в K. Но K содержится также в N, так как произвольный коммутатор $F_\rho F_\sigma F_\rho^{-1} F_\sigma^{-1}$ переходит при гомоморфном отображении $\to \overline{\mathrm{F}}$ в единичный элемент $\overline{1}$ в силу коммутативности группы $\overline{\mathrm{F}}$. Таким образом N содержит все коммутаторы группы F, а следовательно, и весь коммутант K, т. е. N=K.

§ 85. Свободное и прямое произведения

Группа F называется *свободным произведением* подгрупп F_1, F_2, ..., F_h, что записывается формулой

$$\mathrm{F} = \mathrm{F}_1 \bigcirc \mathrm{F}_2 \bigcirc \ldots \bigcirc \mathrm{F}_h, \tag{1}$$

если каждый отличный от единицы элемент группы F может быть однозначно представлен в виде произведения

$$F_{i\iota} F_{k\varkappa} \ldots F_{z\zeta}. \tag{2}$$

При этом элементы $F_{i\iota} F_{k\varkappa} \ldots$ суть отличные от единицы элементы групп F_i, F_k, ... и каждые два рядом стоящие элемента принадлежат различным из этих групп, так что $i \neq k$ и т. д. Структурой групп F_1, F_2, ..., F_h определяется также структура их свободного произведения F, так как для того, чтобы умножить два элемента, заданных выражениями вида (2),

$$F_{i'\iota'} F_{k'\varkappa'} \ldots F_{z'\zeta'} \quad \text{и} \quad F_{i''\iota''} F_{k''\varkappa''} \ldots F_{z''\zeta''},$$

нужно записать эти выражения одно за другим. Если $z' \neq i''$, то получающийся при этом элемент

$$F_{i'\iota'} F_{k'\varkappa'} \ldots F_{z'\zeta'} F_{i''\iota''} F_{k''\iota''} \ldots F_{z''\zeta''} \tag{3}$$

уже имеет вид (2). Если же $F_{z'\zeta'}$ и $F_{z''\zeta''}$ принадлежат одной и той же группе, то $F_{z'\zeta'} F_{i''\iota''}$ представляет определенный элемент $F_{z'}$ группы $\mathrm{F}_{z'}$. Если теперь $F_{z'} \neq 1$, то получающееся произведение имеет нормальную форму (2). В противном случае $F_{z'}$ можно вычеркнуть и применять процесс заново. Таким образом произведение либо примет однозначным образом определенную нормальную форму вида (2), либо окажется единицей группы.

Теорему о существовании свободного произведения h произвольных групп F_1, F_2, ..., F_h мы здесь доказывать не будем. Доказательство ее можно найти в книге F. Klein, Höhere Geometrie, стр. 361, Berlin 1926 (ОНТИ подготавливает издание русского перевода этой книги).

Если группы F_1, F_2, ..., F_h заданы образующими и определяющими соотношениями, то из них можно вывести образующие и определяющие соотношения их свободного произведения. Покажем это для двух групп F_1 и F_2 с образующими и определяющими соотношениями

$$\left.\begin{array}{l} A_1, A_2, \ldots, A_a, \\ R_1(A_i) = 1, R_2(A_i) = 1, \ldots, R_r(A_i) = 1, \end{array}\right\} \tag{F_1}$$

$$\left.\begin{array}{l} B_1, B_2, \ldots, B_b, \\ S_1(B_k) = 1, S_2(B_k) = 1, \ldots, S_s(B_k) = 1. \end{array}\right\} \tag{F_2}$$

Очевидно, что элементы

$$A_1,\ A_1,\ \ldots,\ A_a, \quad B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_b$$

порождают свободное произведение $\mathrm{F} = \mathrm{F}_1 \bigcirc \mathrm{F}_2$ и что в этом свободном произведении выполняются соотношения

$$R_1(A_i) = 1,\ \ldots,\ R_r(A_i) = 1, \quad S_1(B_k) = 1,\ \ldots,\ S_s(B_k) = 1. \qquad (\mathrm{F})$$

Эти соотношения являются определяющими соотношениями свободного произведения, т. е. каждое соотношение свободного произведения является следствием этих соотношений. В самом деле, пусть имеется какое-нибудь равное единице группы F произведение, образованное из элементов A и B. Разобьем его на возможно более длинные сомножители (частичные произведения), каждый из которых состоит или только из A, или только из B, так что в общем произведении рядом с каждым таким сомножителем, состоящим из A, стоит сомножитель, в который входят только B, и обратно. В силу (2) каждый из этих сомножителей в отдельности должен быть равен единице. Поэтому путем применениях соотношений (F), — именно, либо r первых, либо s последних из этих соотношений — и тривиальных соотношений каждый из сомножителей может быть преобразован в пустое слово, а тогда то же самое справедливо по отношению ко всему данному произведению. Доказательство остается в силе, очевидно, и в случае любого числа групп, в результате чего получается следующая теорема.

Теорема I. *Для того чтобы получить систему образующих и определяющих соотношений свободного произведения некоторого числа групп, нужно выписать вместе образующие и соотношения всех перемножаемых групп.*

В качестве примера рассмотрим свободное произведение h свободных циклических групп $\mathrm{F}_1,\ \mathrm{F}_2,\ \ldots,\ \mathrm{F}_h$. Группа F_i имеет тогда одну образующую A_i и не имеет никаких соотношений. Поэтому свободное произведение F имеет h образующих и также не имеет никаких соотношений. F *называют свободной группой с* h *образующими* $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_h$.

Мы можем теперь показать, что сколько бы мы ни задали образующих и соотношений произвольного вида, всегда существует группа F, порождаемая этими образующими и имеющая данные соотношений своими определяющими соотношениями. Для того чтобы построить группу F, мы построим сначала из данных образующих свободную группу. Добавление соотношений приводит нас, по теореме I § 83, к дополнительной группе, обладающей требуемыми свойствами.

Упражнение. Докажите, что свободное произведение двух групп может иметь конечный порядок лишь в том случае, когда один из сомножителей состоит только из единицы.

Группа F называется *прямым произведением* подгрупп $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_h$, что записывается формулой

$$\mathrm{F} = \mathrm{F}_1 \times \mathrm{F}_2 \times \ldots \times \mathrm{F}_h, \tag{4}$$

если каждый элемент группы F однозначно представляется в виде произведения

$$F_{1\iota} F_{2\varkappa} \ldots F_{h\zeta} \tag{5}$$

и каждый элемент группы F_ν при $\mu \neq \nu$ перестановочен с каждым элементом из F_μ. Структура прямого произведения однозначно определяется структурой его сомножителей, так как уравнение

$$\begin{aligned} F_{1\iota'} F_{2\varkappa'} \ldots F_{h\zeta'} \cdot F_{1\iota''} F_{2\varkappa''} \ldots F_{h\zeta''} = \\ = (F_{1\iota'} F_{1\iota''}) (F_{2\varkappa'}, F_{2\varkappa''}) \ldots (F_{h\zeta'} F_{h\zeta''}) \end{aligned} \tag{6}$$

сводит умножение элементов в прямом произведении к умножению элементов в его сомножителях.

Существование прямого произведения, имеющего сомножителями произвольно заданные группы, доказывается построением такого произведения: в качестве элементов вводят символические произведения или последовательности букв (5) и определяют их перемножение при помощи уравнений (6).

Если группы $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_h$ заданы образующими и соотношениями, то мы можем найти и образующие, и соотношения прямого произведения. Мы рассмотрим опять случай двух групп с образующими и определяющими соотношения (F_1) и (F_2). Элементы

$$A_1, A_2, \ldots, A_a, \quad B_1, B_2, \ldots, B_b$$

являются, очевидно, *образующими* прямого произведения $\mathrm{F}_1 \times \mathrm{F}_2 = \mathrm{F}$. Точно так же очевидно, что *соотношения*

$$R_1(A_i) = 1, \ldots, R_r(A_i) = 1, \quad S_1(B_k) = 1, \ldots, S_s(B_k) = 1$$

вместе с соотношениями, выражающими коммутативность образующих:

$$A_i B_k A_i^{-1} B_k^{-1} = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, a;\ k = 1, 2, \ldots, b),$$

являются соотношениями, выполняющимися в F. Эти соотношения образуют систему определяющих соотношений, так как каждое произведение, составленное из элементов A и B, можно с помощью соотношений коммутативности привести к виду

$$\prod_i A_i \cdot \prod_k B_k,$$

и если это произведение $= 1$, то $\prod\limits_i A_i$ и $\prod\limits_k B_k$ в отдельности должны равняться 1. В самом деле, по определению каждый элемент прямого произведения однозначно представляется в виде (5), следовательно, единичный элемент может быть представлен лишь произведением $1 \cdot 1$. Но тогда каждое из произведений $\prod\limits_i A_i$ и $\prod\limits_k B_k$ может быть переведено в пустое слово лишь при помощи соответственно соотношений групп F_1 и F_2 и пустых слов.

В результате получается следующая теорема.

Теорема II. *Для того чтобы получить систему образующих и определяющих соотношений прямого произведения $F = F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_h$, нужно выписать вместе образующие и соотношения отдельных групп $F_1, F_2, \ldots, F_h$ и добавить к ним соотношения коммутативности между образующими каждых двух групп F_i, F_k $(i \neq k)$.*

В качестве примера рассмотрим прямое произведение h свободных циклических групп $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_h$, порожденных элементами $A_1, A_2, \ldots, A_h$. Образующими прямого произведения являются эти A, а определяющими соотношениями — одни соотношения коммутативности

$$A_i A_k A_i^{-1} A_k^{-1} = 1 \quad (i, k = 1, 2, \ldots, h).$$

Так как сомножители здесь суть абелевы группы, то таковой же является и само прямое произведение. Такое прямое произведение называется *свободной абелевой группой* с h образующими. Так как каждый элемент группы F_i однозначно представляется в виде $A - i^{\alpha_i}$, то каждый элемент свободной абелевой группы с h образующими однозначно представляется в виде

$$F = A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \ldots A_h^{\alpha_h}$$

и произведение двух элементов

$$A_1^{\alpha_1'} A_2^{\alpha_2'} \ldots A_h^{\alpha_h'} \quad \text{и} \quad A_1^{\alpha_1''} A_2^{\alpha_2''} \ldots A_h^{\alpha_h''}$$

есть элемент

$$A_1^{\alpha_1'+\alpha_1''} A_2^{\alpha_2'+\alpha_2''} \ldots A_h^{\alpha_h'+\alpha_h''}.$$

Если поэтому поставить в соответствие элементу F целочисленный вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h)$, то тем самым устанавливается изоморфизм между F и группой всех целочисленных h-мерных векторов (имеющей групповой операцией векторное сложение). Таким образом каждый элемент группы F может быть представлен целочисленным h-мерным вектором или, что то же, точкой с целочисленными координатами в h-мерном евклидовом пространстве. Все такие точки образуют h-мерную точечную

решетку. Поэтому вместо термина «свободная абелева группа с h образующими» употребляют иногда термины «*h-мерная решетка*». Вместо того чтобы представлять элемент вектором, мы могли бы представлять его параллельным перенесением, осуществляемым этим вектором, таким образом свободная абелева группа с h образующими изоморфна группе трансляций h-мерной точечной решетки. Под нульмерной решеткой мы понимаем группу, состоящую только из единичного элемента.

Сделаем еще одно замечание! В прямом произведении $\mathrm{F} = \mathrm{F}_1 \times \mathrm{F}_2 \times \times \ldots \times \mathrm{F}_h$ каждая из подгрупп $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_h$ есть нормальный делитель. Класс смежности в разложени F по F_1 состоит из совокупности элементов, получающихся, если зафиксировать в выражении (5) элементы $F_{2\varkappa}, \ldots, F_{h\zeta}$ и заставить $F_{1\iota}$ пробегать все элементы группы F_1. Таким образом дополнительная группа по F_1 изоморфна группе $\mathrm{F}_2 \times \ldots \times \mathrm{F}_h$.

§ 86. Абелевы группы

До сих пор мы употребляли для обозначения групповой операции знак алгебраического умножения. Однако, когда речь идет об абелевых группах, то знак умножения обычно заменяют знаком сложения — а для обозначения единицы группы пользуются вместо знака 1 знаком 0. Вместо произведения двух элементов тогда говорят об их сумме, вместо прямого произведения-прямая сумма, вместо единичного элемента — нулевой элемент. Такая терминология служит для того, чтобы оттенить тесную связь, существующую между теорией абелевых групп и теорией линейных уравнений с целочисленными коэффициентами. Всюду, где мы будем пользоваться *аддитивной транскрипцией*, мы будем считать, что групповая операция является абелевой; в этом случае мы не будем выписывать отдельно соотношения коммутативности. Соотношение, характеризующее циклическую группу порядка p, записывается в аддитивной транскрипции не в виде $A^p = 1$, а в виде $pA = 0$. (Из этого соотношения нельзя заключить, как мы это делали в случае алгебраических уравнений, что $A = 0$. По обе стороны от знака равенства у нас стоят здесь групповые элементы, а не числа, и имеющееся сходство является чисто внешним.)

Рассмотрим сначала свободную абелеву группу F_m с образующими

$$A_1, A_2, \ldots, A_m. \tag{1}$$

Как мы видели на стр. 386, каждый элемент группы F_m однозначно представляется в виде

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_m A_m. \tag{2}$$

Совокупность элементов, обладающих тем свойством, что каждый элемент из F_m однозначно представляется в виде линейной комбинации этих элементов, называется *базой* группы F_m; таким образом элементы (1) образуют базу. Пусть

$$A'_1,\ A'_2,\ \ldots,\ A'_n \tag{3}$$

есть какая-нибудь другая база F_m. Докажем прежде всего, что n должно быть равно m. В самом деле, допустим, например, что $m < n$. Выразим элементы новой базы через элементы старой

$$A'_\nu = \sum_{\mu=1}^{m} \alpha_{\nu\mu} A_\mu \quad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{4}$$

Так как $m < n$, то между строчками матрицы $(\alpha_{\nu\mu})$ существует линейное соотношение с рациональными коэффициентами, а следовательно, также и линейное соотношение с целочисленными коэффициентами (из которых не все обращаются одновременно в нуль). Но тогда такое же соотношение существует между элементами A'_ν, что противоречит их свойству быть базисными элементами. Таким образом матрица $(\alpha_{\nu\mu})$ есть квадратная матрица, вместе с чем одновременно доказано, что число m (размерность решетки) является инвариантом ее:

Теорема I. *Две решетки изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые размерности.*

Элементы A_μ, наоборот, однозначно выражаются через A'_ν:

$$A_\mu = \sum_{\lambda=1}^{m} \beta_{\mu\lambda} A'_\lambda \quad (\mu = 1,\ 2,\ \ldots,\ m). \tag{5}$$

Подставляя (5) в (4), мы получаем

$$A'_\nu = \sum_{\mu,\lambda=1}^{m} \alpha_{\nu\mu}\beta_{\mu\lambda} A'_\lambda. \tag{6}$$

Поэтому в силу свойств базисных элементов A'_ν

$$\sum_{\mu=1}^{m} \alpha_{\nu\mu}\beta_{\mu\lambda} = \delta_{\nu\lambda} \begin{cases} = 1 & \text{при } \nu = \lambda, \\ = 0 & \text{при } \nu \neq \lambda, \end{cases} \tag{7}$$

или, в матричных обозначениях,

$$(\alpha_{\iota\varkappa})(\beta_{\iota\varkappa}) = (\delta_{\iota\varkappa}).$$

Переходя к детерминантам, мы будем иметь

$$|\alpha_{\iota\varkappa}|\,|\beta_{\iota\varkappa}| = 1,$$

а так как $(\alpha_{\iota\varkappa})$ и $(\beta_{\iota\varkappa})$ — целочисленные матрицы, то

$$|\alpha_{\iota\varkappa}| = \pm 1,$$

и из формулы (7) следует, что $(\beta_{\iota\varkappa})$ является матрицей, обратной для $(\alpha_{\iota\varkappa})$. *Переход от одной базы к другой осуществляется, следовательно, целочисленным унимодулярным преобразованием.*

Теорема II. *Подгруппа* G m*-мерной решетки* F_m *также является решеткой, размерность которой не превышает* m.

Доказательство. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_m$ — образующие группы F_m, и F_{m-1} есть решетка, порождаемая элементами $A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}$ (F_{m-1} есть, очевидно, подгруппа группы F_m). Пусть, далее, H есть подгруппа, состоящая из всех элементов G, принадлежащих F_{m-1}. Предположим, что для F_{m-1} теорема уже доказана. Тогда H есть максимум $(m-1)$-мерная решетка. Пусть $B_1, B_2, \ldots, B_{k-1}$ есть база группы H ($k \leqslant m$). Будем искать среди всех элементов

$$\mathrm{G} = g_1 A_1 + \ldots + g_m A_m$$

группы G элемент

$$B_k = g_1^* A_1 + \ldots + g_m^* A_m,$$

у которого последний коэффициент имеет возможно меньшее положительное значение. (Случай, когда g_m, постоянно $= 00$, мы можем исключить, так как тогда G=H и'нам нечего доказывать.) g_m, является, очевидно, числом, кратным числу g_m^*, вследствие чего

$$\mathrm{G} - \frac{g_m}{g_m^*} B_k$$

есть элемент группы H, т. е. линейная комбинация элементов $B_1, B_2, \ldots, B_{k-1}$. Таким образом $B_1, B_2, \ldots, B_k$ являются системой образующих группы G. Каждый элемент группы G представляется элементами $B_1, B_2, \ldots, B_k$ *однозначно*. В самом деле, иначе существовало бы соотношение

$$x_1 B_1 + x_2 B_2 + \ldots + x_k B_k = 0$$

по крайней мере с одним не равным нулю коэффициентом. Заменяя здесь B их выражениями через A, мы получим в качестве коэффициента при A_m число $x_k g_m^* \neq 0$, в то время как элементы A_m по условию не могут быть связаны никаким линейным соотношением. Таким образом G есть k-мерная решетка ($k \leqslant m$) с базой $B_1, B_2, \ldots, B_k$. Так как

теорема, очевидно, справедлива при $k = 0$, то она выполняется и при любом k.

Пусть теперь $\overline{\mathrm{F}}$ есть произвольная абелева группа с образующими

$$\overline{A}_1,\ \overline{A}_2,\ \ldots,\ \overline{A}_m$$

и F_m — m-мерная решетка с базой

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_m.$$

Поставим в соответствие каждому элементу

$$a_1A_1 + a_2A_2 + \ldots + a_mA_m$$

группы F_m элемент

$$a_1\overline{A}_1 + a_2\overline{A}_2 + \ldots + a_m\overline{A}_m$$

группы $\overline{\mathrm{F}}$. Мы получим тогда гомоморфное отображение решетки F_m на группу $\overline{\mathrm{F}}$. Те элементы из F_m, которые отображаются в нулевой элемент группы $\overline{\mathrm{F}}$, образуют подгруппу N группы F_m и элементы группы $\overline{\mathrm{F}}$ взаимно однозначно соответствуют классам разбиения группы F_m по N. Сама $\overline{\mathrm{F}}$ изоморфна дополнительной группе F_m/N.

Выберем теперь из N какие-нибудь образующие

$$N_1,\ N_2,\ \ldots,\ N_n;$$

так как N — решетка, размерность которой не превышает m, то это всегда возможно. При этом мы не требуем, чтобы выбранные образующие представляли базу подгруппы N. Если

$$N_\nu = \sum_{\mu=1}^{,} a_{\nu\mu}A_\mu \quad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

то *матрица коэффициентов*

$$(a_{\nu\mu}) \tag{8}$$

полностью определяет N_ν, следовательно, и N, следовательно, также и $\mathrm{F}_m/\mathrm{N} = \overline{\mathrm{F}}$. Обратное, очевидно, неверно, так как группа $\overline{\mathrm{F}}$ может быть выражена при помощи матрицы $(a_{\nu\mu})$ бесчисленным множеством способов. Так, например, мы получим новую матрицу, если заменим образующие $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_m$ и $N_1,\ N_2,\ \ldots,\ N_n$ групп F_m и N новыми образующими $A'_1,\ A'_2,\ \ldots,\ A'_m$ и $N'_1,\ N'_2,\ \ldots,\ N'_n$, связанными со старыми целочисленными унимодулярными преобразованиями. Мы хотим теперь при помощи таких преобразований привести матрицу $(a_{\nu\mu})$ к нормальной форме. Для этого мы применим последовательно конечное число

раз следующие специальные унимодулярные преобразования (*элементарные преобразования*);

a) Замена образующей A_σ образующей $A_\sigma - A_\tau$ $(\sigma \neq \tau)$.

В матрице $(a_{\nu\mu})$ такой замене соответствует прибавление *столбца* с номером σ *к столбцу* с номером τ. В самом деле,

$$N_\nu = \sum a_{\nu\mu} A_\mu = \ldots + a_{\nu\sigma} A_\sigma + a_{\nu\tau} A_\tau + \ldots =$$
$$= \ldots + a_{\nu\sigma}(A_\sigma - A_\tau) + \ldots + (a_{\nu\tau} + a_{\nu\sigma}) A_\tau + \ldots$$

b) Замена образующей A_τ образующей $-A_\tau$.

Такая замена сопровождается изменением знаков всех элементов τ-го столбца матрицы $(a_{\nu\mu})$.

Точно так же можно произвести соответствующие замены образующих $N_1, N_2, \ldots, N_n$:

a′) Замена $N_\varkappa$ образующей $N_\varkappa + N_\lambda$ $(\varkappa \neq \lambda)$ осуществляет сложение λ-й *строки с* $\varkappa$*-й строкой.*

b′) Замена N_λ через $-N_\lambda$ влечет за собой перемену знаков у элементов λ-й *строки.*

Комбинируя надлежащим образом эти четыре операции — сложение строк и столбцов и замену знаков в строке или столбце, — мы можем получить другие операции, например, замену друг другом двух строчек или столбцов. Как показано в § 87, при помощи таких преобразований матрицу ранга γ можно привести к диагональной форме

$$\begin{array}{c} \overset{\longleftarrow\quad m\quad\longrightarrow}{} \\ \left.\begin{array}{c} \\ n \\ \\ \end{array}\right\| \begin{array}{ccc} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & c_\gamma & \\ 0 & & 0 \end{array} \left\| \right. \end{array} .$$

При этом каждое из чисел c делится на последующие; первые ρ из них отличны от 1, последние $\gamma - \rho$ равны 1. Числа c называются *инвариантными множителями* матрицы $(a_{\nu\mu})$.

Если $A'_1, A'_2, \ldots, A'_m$ — получившиеся новые базисные элементы группы F_m, то элементы

$$c_1 A'_1, c_2 A'_2, \ldots, c_\gamma A'_\gamma$$

и все их линейные комбинации представляют в точности все элементы подгруппы N. Поэтому два элемента

$$p_1 A'_1 + p_2 A'_2 + \ldots + p_m A'_m$$

и

$$q_1 A'_1 + q_2 A'_2 + \ldots + q_m A'_m$$

группы F_m принадлежат одному и тому же смежному классу подгруппы N в том и только в том случае, когда

$$(p_1 - q_1)A'_1 + (p_2 - q_2)A'_2 + \ldots + (p_m - q_m)A'_m$$

принадлежит к N, т. е. когда

$$p_1 \equiv q_1(\text{ мод } c_1),\ p_2 \equiv q_2(\text{ мод } c_2),\ \ldots,\ p_\gamma \equiv q_\gamma(\text{ мод } c_\gamma),$$
$$p_{\gamma+1} = q_{\gamma+1},\ \ldots,\ p_m = q_m.$$

Но тогда элементы

$$\xi_1 A'_1 + \xi_2 A'_2 + \ldots + \xi_\gamma A'_\gamma + \eta_{\gamma+1} A'_{\gamma+1} + \ldots + \eta_m A'_m \tag{9}$$
$$(0 \leqslant \xi_\mu < c_\mu,\ \eta_\mu \text{ произвольны}) \tag{10}$$

доставляют в точности по одному представителю из каждого класса. Другими словами, элементы дополнительной группы $\overline{\mathrm{F}} = \mathrm{F}_m/\mathrm{N}$ (мы будем снова обозначать их при помощи надчеркивания) при нормирующих условиях (10) однозначно записываются в виде

$$\xi_1 \overline{A}'_1 + \xi_2 \overline{A}'_2 + \ldots + \xi_\gamma \overline{A}'_\gamma + \eta_{\gamma+1} \overline{A}'_{\gamma+1} + \ldots + \eta_m \overline{A}'_m. \tag{11}$$

Так как элементы $\overline{A}'_\mu$ дополнительной группы $\overline{\mathrm{F}}$ имеют соответственно порядки $c_1, c_2, \ldots, c_\gamma$ или ∞, то $\overline{\mathrm{F}}$ есть прямая сумма порожденных элементами $\overline{A}'_1, \overline{A}'_2, \ldots, \overline{A}'_m$ циклических подгрупп. В результате мы получаем теорему:

Теорема III. *Каждая абелева группа* F *с конечным числом образующих есть прямая сумма* ρ *конечных циклических групп порядков* $c_1, c_2, \ldots, c_\rho$ *и* p *свободных циклических групп; при этом можно допустить, что каждое* c *делится на последующее.* $c_1, c_2, \ldots, c_\rho$ *суть отличные от единицы инвариантные множители матрицы коэффициентов* $(a_{\gamma\mu})$*, при помощи которой группа* $\overline{F}$ *задается, а* p *есть разность между числом столбцов матрицы* m *и ее рангом* γ*. Числа* $c_1, c_2, \ldots, c_\rho$ *и* $p = m - \gamma$ *однозначно определяются абелевой группой* $\overline{F}$ *и называются соответственно коэффициентами кручения и числом Бетти группы.*

Такие названия находят свое оправдание в геометрическом значении, которое имеют указанные числа в случае, когда $\overline{\mathrm{F}}$ есть группа Бетти комплекса (§ 18, 61).

Мы должны еще доказать однозначность чисел $c_1, c_2, \ldots, c_\rho$ и p. Порожденная элементами $\overline{A}'_1, \overline{A}'_2, \ldots, \overline{A}'_\rho$ подгруппа $\overline{\mathrm{U}}$ порядка $c_1, c_2, \ldots, c_\rho$ состоит, очевидно, из совокупности элементов конечного

порядка группы $\overline{\mathrm{F}}$ и поэтому не зависит от выбора образующих. $\overline{\mathrm{F}}/\overline{\mathrm{U}}$, как показано на стр. 381, изоморфна подгруппе, порожденной элементами $\overline{A}'_{\gamma+1}, \ldots, \overline{A}'_m$, т. е. изоморфна p-мерной решетке. Таким образом мы видим, что число p есть инвариант группы $\overline{\mathrm{F}}$ и нам остается рассмотреть еще только конечную подгруппу $\overline{\mathrm{U}}$. Если мы умножим все элементы порожденной $\overline{A}'_\mu$ циклической подгруппы порядка c_μ на целое положительное число x, то получающиеся при этом элементы представляют циклическую подгруппу порядка $\frac{c_\mu}{(c_\mu,\, x)}$*. В соответствии с этим при умножении всех элементов группы $\overline{\mathrm{U}}$ на x мы получим подгруппу группы $\overline{\mathrm{U}}$ порядка

$$M(x) = \frac{c_1}{(c_1,\, x)} \frac{c_2}{(c_2,\, x)} \cdots \frac{c_\rho}{(c_\rho,\, x)}.$$

$M(x)$ только тогда $= 1$, когда все его сомножители $= 1$, т. е. когда x есть кратное числа c_1. Таким образом мы получаем инвариантную характеристику числа c_1. Охарактеризовав инвариантно числа c_μ $(\mu < \rho)$, мы рассматриваем числа x, для которых

$$M(x) = \frac{c_1}{(c_1,\, x)} \frac{c_2}{(c_2,\, x)} \cdots \frac{c_\mu}{(c_\mu,\, x)}.$$

Это равенство выполняется в том и только в том случае, когда каждый из множителей

$$\frac{c_{\mu+1}}{(c_{\mu+1},\, x)}, \ldots, \frac{c_\rho}{(c_\rho,\, x)}$$

равен 1, т. е. когда x делится на $c_{\mu+1}$. Таким образом $c_{\mu+1}$ также получает инвариантную характеристику.

С помощью инвариантов абелевой группы мы можем также различать неабелевы группы. В самом деле, из каждой неабелевой группы F мы можем посредством коммутирования получить — и при этом однозначно — абелеву группу $\overline{\mathrm{F}}$. Назовем *коэффициентами кручения* и *числом Бетти* неабелевой группы F коэффициенты кручения и число Бетти коммутированной группы $\overline{\mathrm{F}}$. Тогда необходимое условие изоморфности двух групп F_1 и F_2 заключается в совпадении их коэффициентов кручения и чисел Бетти. Если группа F задана образующими

$$A_1,\, A_2,\, \ldots,\, A_m \tag{12}$$

и определяющими соотношениями

$$R_1(A_i) = 1,\, R_2(A_i) = 1,\, \ldots,\, R_r(A_i) = 1, \tag{13}$$

* $(a,\, b)$ означает общий наибольший делитель чисел a, b.

то коэффициенты кручения и число Бетти могут быть получены следующим образом: определяющие соотношения группы $\overline{\mathrm{F}}$ суть соотношения (13) вместе с соотношениями коммутативности

$$A_iA_k = A_kA_i \quad (i,\, k = 1,\, 2,\, \ldots,\, m). \tag{14}$$

Вместо того чтобы рассматривать $\overline{\mathrm{F}}$ как дополнительную группу группы F по коммутанту, мы можем считать, что $\overline{\mathrm{F}}$ получается из m-мерной решетки F_m, определяемой соотношениями (14), путем присоединения добавочных соотношений (13). Но это означает, что $\overline{\mathrm{F}}$ есть дополнительная группа решетки F_m по подгруппе N, порождаемой левыми частями соотношений (13). Поэтому матрица, определяющая подгруппу N в F_m, есть просто матрица коэффициентов аддитивно записанных соотношений (13). Коэффициенты кручения и число Бетти определяются из этой матрицы указанным выше способом.

В качестве иллюстрации описанного процесса рассмотрим группу F тремя образующими и четырьмя определяющими соотношениями:

$$A^2 = B^3 = C^4 = ABC = 1.$$

Заметим, что F есть группа вращений октаэдра: A представляет вращение вокруг середины ребра, B — вращение вокруг середины прилегающего к этому ребру треугольника и C — вращение вокруг вершины октаэдра*. Соотношения коммутированной группы $\overline{\mathrm{F}}$ суть

$$2\overline{A} = 3\overline{B} = 4\overline{C} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} = 0.$$

Матрица коэффициентов этой группы имеет вид

$$\begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}, \text{ а ее нормальная форма } \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Таким образом, рассматриваемая группа имеет один коэффициент кручения, равный 2, а число Бетти ее равно 0.

Если группа $\overline{\mathrm{F}}$ имеет отличное от нуля число Бетти, то коммутированная группа $\overline{\mathrm{F}}$, следовательно, тем более сама группа F есть бесконечная группа. Если известно, напротив, что число Бетти $= 0$, то этого еще недостаточно, чтобы сказать, конечна группа или бесконечна. Так, например, свободное произведение двух групп второго порядка, точно так же, как их прямое произведение (представляющее нециклическую группу 4-го порядка — Vierergruppe), имеет два коэффициента кручения, равные 2, и число Бетти 0. Однако свободное произведение этих групп есть бесконечная группа, а прямое произведение — конечная[52].

Упражнение. Определите коэффициенты кручения симметрической группы подстановок из n цифр.

*Доказательство см. у *W. v. Dyck*, Math. Ann. 20 (1882), стр. 35.

§ 87. Нормальная форма целочисленных матриц

В § 86 мы пользовались теоремой, что каждая целочисленная матрица $\mathbf{E}$ при помощи элементарных преобразований, т. е. при помощи прибавления или вычитания одной строки (столбца) из другой, перемены знаков всех элементов строки (столбца), замены друг другом двух строк (столбцов), может быть приведена к диагональной форме. Докажем теперь эту теорему. Пусть

$$\mathbf{E} = (\varepsilon_{\iota\varkappa}) \quad (\iota = 1, 2, \ldots, n;\ \varkappa = 1, 2, \ldots, m)$$

есть данная матрица, $\varepsilon_{\iota\varkappa}$ представляет целое число, стоящее на пересечении ι-й строки с $\varkappa$-м столбцом. Пусть ранг матрицы $\mathbf{E}$ равен γ.

Если $\gamma = 0$, то матрица уже имеет нормальный вид. Пусть $\gamma > 0$. Выберем отличный от нуля элемент матрицы и переведем его на место $(\iota, \varkappa) = (1, 1)$. Обозначим этот элемент снова через ε_{11}. Допустим теперь, что не все элементы первой строчки и столбца делятся на ε_{11}, — пусть, например, ε_{1k} есть элемент первой строчки, дающий при делении на ε_{11} остаток $\varepsilon'_{11} < \varepsilon_{11}$. Повторяя надлежащее число раз прибавление или вычитание первого столбца из k-го, мы можем добиться, чтобы на месте $(1, k)$ стояло число ε'_{11}. Меняя местами первый и k-й столбцы, мы переносим ε'_{11} на место $(1, 1)$. Точно так же мы поступим, если в первом столбце имеется элемент, не делящийся на ε_{11}. Описанный процесс мы повторяем до тех пор, пока все элементы первой строки и столбца не будут делиться на элемент, занимающий место $(1, 1)$; этот элемент мы снова обозначим через ε_{11}. Что мы в конце концов непременно придем к такому элементу, следует из того, что при каждом шаге абсолютная величина элемента ε_{11} уменьшается. Прибавляя или вычитая теперь первый столбец (строчку) соответствующее число раз к остальным столбцам (строчкам), мы можем превратить все элементы первой строчки (столбца), за исключением элемента ε_{11}, в нули. Пусть в получающейся таким образом новой матрице имеется элемент ε_{ik} ($i \neq 1$, $k \neq 1$), не делящийся на ε_{11}. Мы можем тогда путем прибавления i-й строки к первой перенести этот элемент в первую строку и начать описанный процесс снова. Таким же образом мы будем продолжать до тех пор, пока все элементы не будут делиться на элемент, стоящий на месте $(1, 1)$, и в первой строке и столбце будут стоять сплошь нули, за исключением элемента ε_{11}.

Рассмотрим теперь матрицу $\mathbf{E}_1$, получающуюся из $\mathbf{E}$ вычеркиванием первой строчки и столбца. Любые элементарные преобразования матрицы $\mathbf{E}$ могут быть осуществлены элементарными преобразованиями матрицы $\mathbf{E}_1$, не оказывающими никакого влияния на первую строку и столбец матрицы $\mathbf{E}$ (ввиду стоящих в первой строке и столбце нулей). При помощи таких преобразований мы можем добиться, чтобы на месте $(2, 2)$ стоял элемент ε_{22}, являющийся делителем всех остальных

элементов матрицы $\mathbf{E}$, в то время как все отличные от ε_{22} элементы второй строки и столбца будут нули. Так как при элементарных преобразованиях матрицы $\mathbf{E}$ делимость всех элементов матрицы $\mathbf{E}$ на ε_{11} сохраняется, то ε_{22} делится на ε_{11}. Продолжая подобный процесс дальше, мы придем к матрице, в которой все элементы, за исключением некоторых стоящих на диагонали, равны 0. Число отличных от нуля элементов такой матрицы должно быть равно γ, так как при элементарных преобразованиях ранг матрицы γ не меняется. Каждый из диагональных элементов $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \ldots, \varepsilon_{\gamma\gamma}$ есть делитель следующего за ним. Эти диагональные элементы, называющиеся *инвариантными множителями* матрицы $\mathbf{E}$, отличаются от чисел c, о которых говорится на стр. 391, только порядком своего расположения (а этот порядок может быть сделан произвольным с помощью перестановки строк и столбцов): $\varepsilon_{11} = c_\gamma, \ldots, \varepsilon_{\gamma\gamma} = c_1$. Однозначность получающейся таким образом нормальной формы, т. е. независимость ее от того, каким образом мы ведем нормирующий процесс, мы показали уже в § 86, установив там, что инвариантные множители однозначно характеризуются заданной при помощи матрицы абелевой группой. Можно показать также однозначность нормальной формы матрицы и непосредственно. Обозначим через D_i общий наибольший делитель всех детерминантов i-го порядка матрицы $\mathbf{E}$. По известным теоремам теории детерминантов* D_i не меняется при элементарных преобразованиях матрицы. Но в нормальной форме D_i, равен произведению первых i диагональных элементов $\varepsilon_{11}, \ldots, \varepsilon_{ii}$, поэтому

$$\varepsilon_{ii} = \frac{D_i}{D_{i-1}},$$

т. е. инвариантные множители определяются уже самой матрицей $\mathbf{E}$.

В практических случаях не всегда выгодно в точности придерживаться описанного процесса; иногда выгоднее применять преобразования матрицы в другой последовательности. Рассмотрим в качестве примера матрицу, являющуюся матрицей инциденций псевдомногообразия (см. стр. 119). Такая матрица $\mathbf{E}$ имеет n строк и m столбцов и обладает следующими свойствами:

(a) В каждой строчке стоят в точности два отличных от нуля элемента, абсолютная величина каждого из них равна 1.

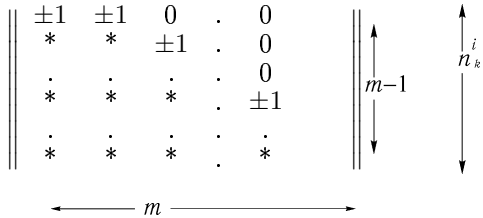
(b) Если разделить все столбцы на два произвольных класса, то непременно найдется строчка, обе единицы которой стоят в столбцах различных классов.

Приведение к нормальной форме осуществляется следующими четырьмя шагами:

1-й шаг. Производя перестановки строк и столбцов, мы можем при-

* См. *М. Бохер*, «Введение в высшую алгебру», ГТТИ, 1933.

вести матрицу $\mathbf{E}$ к виду



(I)

где звездочки обозначают элементы (нули или единицы), которые нас ближе не интересуют. Для того чтобы получить из $\mathbf{E}$ матрицу (I), мы переводим сначала при помощи перестановок столбцов обе единицы первой строчки на первое и второе места. В силу (b) существует строка, скажем, i-я, одна единица которой находится в первом или втором столбце, а другая — в k-м. Переставляя тогда третий столбец с k-м и i-ю строчку со второй, мы получим матрицу, первые две строчки которой совпадают с первыми двумя строчками матрицы (I). Продолжая аналогичным образом, мы придем к матрице (I).

2-й шаг. Меняя знаки столбцов, мы можем добиться, чтобы в каждой из $m-1$ первых строк находилась в точности одна $+1$ и одна -1.

3-й шаг. Прибавим все столбцы, начиная со второго, к первому. Матрица примет тогда вид

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & * & * & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & * & \dots & * \end{Vmatrix}. \tag{II}$$

В первом столбце стоят теперь либо нули, либо двойки (причем двойки могут находиться лишь в последних $n-m+1$ строчках). Для того чтобы все выписанные единицы имели знак $+$, мы должны лишь надлежащим образом изменить знаки строчек.

4-й шаг. Прибавляя (или вычитая) первую, соответственно вторую,..., $(m-1)$-ю строчку к остальным, мы можем оставить во втором, соответственно в третьем, ..., в m-м столбце только по одной единице. Матрица будет иметь тогда вид

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & 0 & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix}. \tag{III}$$

Все элементы последних $n - m + 1$ строчек, за исключением элементов первого столбца, суть нули, первый же столбец остался неизменным. Если теперь первый столбец совсем не содержит двоек, а состоит только из нулей, то мы получаем нормальную форму

$$\left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix}\right\|. \qquad \text{(IV)}$$

Если же в первом столбце имеется несколько двоек, то при помощи вычитания или сложения строк мы можем уничтожить все эти двойки, за исключением одной, а эту остающуюся двойку перевести в левый верхний угол, мы получим тогда матрицу

$$\left\|\begin{matrix} 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix}\right\|. \qquad \text{(V)}$$

Нормальная форма (IV) или (V) получается в соответствии с тем, имеет ли исходная матрица $\mathbf{E}$ ранг $m - 1$ или m.

Примечания

1 (стр. 12). *Узлы* в $\boldsymbol{R}^4$. Если допускать самопересечения, то каждый узел может быть деформирован в окружность уже в трехмерном пространстве xyz. Если же считать, что пространство xyz вложено в четырехмерное пространство $xyzt$, то в этом четырехмерном пространстве такая деформация может быть осуществлена без самопересечений. Предположим, например, что при деформации узла в окружность пересекаются два маленьких куска узла, определенных следующим образом: a есть отрезок $-1 \leqslant x \leqslant +1$, $y = z = 0$; b есть полуокружность $y^2 + z^2 = 1$, $x = 0$, $z \geqslant 0$. Тогда дело заключается в том, чтобы перевести кусок b в полуокружность b', заданную соотношениями $y^2 + z^2 = 1$, $x = 0$, $z \leqslant 0$, не пересекая при этом лежащего в пространстве xyz узла. Этого можно добиться, вращая полуокружность b как твердое тело евклидова пространства yzt вокруг оси y до тех пор, пока она не придет в положение b'.

2 (стр. 15). Склеивание двойного тора из восьмиугольника особенно ясно представлено в книге Гильберта и Кон–Фоссена (Hilbert und Cohn–Vossen [I], стр. 265)*. В этой книге можно найти интересный материал, который может служить дополнением к нашей первой главе.

3 (стр. 18). *Вложение неориентируемых поверхностей в пространство.* Все возможные способы вложения проективной плоскости в евклидово пространство $\boldsymbol{R}^3$, для которых кривые самопересечения не имеют двойных точек, найдены Боем (Boy) [I]. Смотрите также Schilling [I], конец первого тома: Топологическое осуществление проективной плоскости в пространстве посредством не имеющей особенностей поверхности. Проективную плоскость, не имеющую самопересечений, можно получить в четырехмерном евклидовом пространстве следующим образом: мы проектируем границу листа Мебиуса, расположенного в трехмерном евклидовом подпространстве $\boldsymbol{R}^3$ нашего четырехмерного пространства, из точки, не принадлежащей $\boldsymbol{R}^3$, и затем присоединяем проектирующий конус к листу Мебиуса. Что проективная плоскость может представлять в $\boldsymbol{R}^4$ даже *алгебраическую* поверхность, показано в прибавлении I к книге Hilbert und Cohn–Vossen [1]**. В этой книге можно найти также интересные замечания относительно замыкания листа Мебиуса в $\boldsymbol{R}^3$ и относительно различных пленок Мебиуса.

---

*В русском переводе стр. 262.

**См. русский перевод этой книги, стр. 295.

4 (стр. 24). *Бесконечные поверхности* систематически рассмотрены в книге B. Kerékjártó [6], отдел V: Offene Flächen.

5 (стр. 27). *Замыкание пространства и группы.* В связи с изложенной точкой зрения на проективное и сферическое пространства естественно возникает вопрос, можно ли замкнуть евклидово пространство еще каким-нибудь способом, налагая требование взаимной однозначности на преобразование других групп, кроме конформной и проективной. Примеры таких замыканий можно найти у Seifert [I], стр. 30. Конформная и проективная группы отличаются от других групп тем, что только для них в замкнутом пространстве выполняются условия подвижности (Beweglichkeitsbedingungen)* Ли–Гельмгольца. Относительно замыкания комплексного числового пространства при помощи групп рациональных преобразований см. *H. Behnke* и *P. Thullen*, Theorie der Funktionen mehrer komplexer Veränderlichen, Berlin 1934, стр. 3.

6 (стр. 27). *Пространства конфигураций в механике.* Пространство конфигураций механической системы приобретает особо важное механическое значение, если мы будем рассматривать не только его *топологические свойства*, а, следуя Якоби**, введем в нем метрику, в которой траектории являются геодезическими линиями. При этом общая энергия задается раз навсегда постоянной, а потенциальная является функцией точки. См. хотя бы E. T. Whittacker, Analytische Dynamik, Berlin 1914, § 104. Если, например, в случае плоского двойного маятника, подвешенного в поле тяготения, общая энергия настолько велика, что маятник может достигать любого положения, то пространство конфигураций представляет весь тор. Так как каждая замкнутая кривая на торе может быть переведена [при некоторых условиях***, в данном случае выполняющихся] в геодезическую линию установленной указанным выше способом метрики и так как на торе существует бесчисленное множество негомотопных друг другу замкнутых кривых, то отсюда следует существование бесчисленного множества различных периодических движений плоского двойного маятника.

7 (стр. 30). Относительно *фазовых пространств в механике* см. Birkhoff [5].

8 (стр. 34). В литературе чаще всего пользуются так называемым *хаусдорфовым окрестностным пространством.* Аксиомы Хаусдорфа суть следующие (Hausdorff [I], стр. 213 и 260): (A) — аксиома A текста. (B) *Для каждых двух окрестностей точки P существует окрестность этой точки, принадлежащая их пересечению.* (C) *Если точка Q лежит в окрестности $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{P})$ точки P, то существует окрестность $\boldsymbol{U}(Q)$, являющаяся, подмножеством $\boldsymbol{U}(P)$* (таким

* *H. Weyl*, Mathematische Analyse des Raumproblems, Berlin 1923, стр. 30.

** *C. G. Jacobi*, Gesammelte Werke, Supplementband, Berlin 1884, стр. 44.

*** См. например, *L. Bieberbach*, Differentialgleichungen, 3 изд., Berlin 1930, стр. 195.

образом окрестности являются открытыми множествами). (D) *Всякие две различные точки имеют непересекающиеся окрестности.* Аксиомам Хаусдорфа удовлетворяют, например, открытые шаровые или открытые кубические окрестности евклидова пространства. (См. в тексте примечание редактора и указанную там литературу.)

9 (стр. 34). *Однородность евклидова (числового) пространства.* Мы не определяем точки евклидова пространства как математические объекты, которые *могут быть* поставлены во взаимно однозначное соответствие с совокупностями из n действительных чисел. Для нас точка евклидова пространства *есть* совокупность n чисел. На стр. 54 мы вводим в евклидовом пространстве систему декартовых координат. Тогда каждая точка $x_1, x_2, \ldots, x_n$ получает декартовы координаты $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Необходимо отличать совокупность n чисел, определяющую точку, от совокупности n декартовых координат ее, несмотря на то, что, в частности, может быть $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2,, \ldots, x_n = y_n$. евклидово пространство не является однородным в логическом смысле слова*, т. е. в том смысле, что две его точки на основании аксиом нельзя отличить одну от другой. В евклидовом пространстве это не так, ввиду того, что числа по своим свойствам представляют отличающиеся друг от друга индивидуумы. Однородность евклидова пространства нужно понимать в том единственно важном с точки зрения математики смысле, что евклидово пространство является многообразием (см. § 12).

10 (стр. 65). *Чисто комбинаторная топология.* О значении комбинаторных методов см. Kneser [4], Tietze–Vietouis [8]. Исчерпывающее чисто комбинаторное изложение *топологии поверхностей* дает Reidemeister [7], комбинаторный очерк топологии поверхностей Levi [1] и Chuard [I]. Комбинаторной *теорией узлов* занимается Reidemeister [6]. Статья о топологии в энциклопедии (Dehn–Heegard [1]) также дает комбинаторное изложение, однако трудности, на которые мы наталкиваемся при строгом проведении чисто комбинаторных методов, не выявляются там полностью. С этими *трудностями*, с которыми мы встречаемся уже при рассмотрении основных понятий и которые в настоящее время непреодолимы более, чем в трех измерениях, можно познакомиться у Bilz [I], Kneser [4], Furch [2], [3], [5], Weyl [2]. Попытки преодолеть их посредством надлежащим образом выбранного определения понятия «элементарное преобразование» предпринимали среди других Newmann [I], [4], Alexander [18], Tucker [3]. Смотри, далее, связанную с работой Weyl [2] статью de Rham [I], далее, Mayer [1] и Bergmann [2].

В недавно вышедшей работе Nöbeling (Monatshefte f. Math. u. Phys.) дается доказательство так называемой основной гипотезы комбинаторной топологии (Nauptvermutung), радикально устраняющей все упомянутые трудности. Однако в опубликованном доказательстве Nöbeling есть неясные места. В своем докладе на 1-й международ-

* *H. Weul*, Philosophe der Mathematik und Naturwissenschaften, München 1927.

ной топологической конференции (сентябрь 1935) автор указал, что в последующей публикации дефекты его первого доказательства будут исправлены.

11 (стр. 73). Строго говоря, мы доказали в тексте только то, что при отождествлении границ двух конгруэнтно отображенных друг на друга шаров получается сфера. Для того чтобы показать, что сфера получается также при *произвольном* топологическом отображении A границ двух шаров, $\boldsymbol{V}_1$ и $\boldsymbol{V}_2$, можно поступить так: пусть A' есть *конгруэнтное* отображение границы шара $\boldsymbol{V}_1$ на границу шара $\boldsymbol{V}_2'$. Тогда границы шаров $\boldsymbol{V}_2$ и $\boldsymbol{V}_2'$ топологически отображаются одна на другую посредством отображения $A'A^{-1}$. Это топологическое отображение границ можно распространить до топологического отображения шара $\boldsymbol{V}_2$ на шар $\boldsymbol{V}_2'$, например, посредством линейных отображений друг на друга соответствующих радиусов шаров $\boldsymbol{V}_2$ и $\boldsymbol{V}_2'$. В силу доказанного на стр. 49, при склеивании шаров $\boldsymbol{V}_1$ и $\boldsymbol{V}_2$ получается то же окрестностное пространство, что и при склеивании шаров $\boldsymbol{V}_1$ и $\boldsymbol{V}_2'$. Но последнее склеивание дает сферу, так как границы $\boldsymbol{V}_1$ и $\boldsymbol{V}_2'$ отображены друг на друга конгруэнтно.

12 (стр. 78). *Пространства линейных элементов.* В упражнении приведено два примера пространств, «точками» которых являются линейные элементы замкнутой поверхности. Вопрос о всех пространствах, состоящих из ориентированных или неориентированных линейных элементов замкнутых поверхностей, разрабатывали Nielsen [6] стр. 306 (там даны фундаментальные группы всех пространств, состоящих из ориентированных линейных элементов), Hotelling [I], [2], Threlfall [3]. См. далее v. d. Waerden, Jahresber. Deutsch. Math.-Vereinig. 42 (1933), задача 124, стр. 112 (неориентированные линейные элементы проективной плоскости) и стр. 229, упражнение 4 в тексте книги.

13 (стр. 96). (*Примечание переводчика*). В немецком тексте авторы книги пользуются терминологией, отличной от той, которая дана в переводе. *Группу Бетти* они называют группой гомологий, а *приведенную группу Бетти* — просто группой Бетти.

14 (стр. 98). Введением матриц инциденций Пуанкаре (Poincaré, в особенности в работе [4]) сделал значительный шаг вперед в деле арифметизации топологии.

15 (стр. 109). *Алгебраические комплексы по модулю* m. С алгебраической точки зрения алгебраический комплекс представляет не что иное, как линейную форму, в которой роль переменных играют ориентированные симплексы. Коэффициенты такой линейной формы принадлежат определенной области коэффициентов. (Общие области коэффициентов впервые введены Александровым [14].) Если эта область представляет совокупность целых чисел, то мы получаем обыкновенные алгебраические комплексы, рассматриваемые в § 15–22. Если взять в качестве коэффициентов классы вычетов по модулю 2, то получаются алгебраические комплексы по модулю 2. Общее в качестве

коэффициентов можно взять классы вычетов по произвольному целому модулю $m \neq 1$. Таким образом получаются группы и числа Бетти по модулю m, топологическая инвариантность которых может быть доказана так же, как в случае обыкновенных алгебраических комплексов. Числа Бетти по модулю m определяются обыкновенными числами Бетти (называемыми иногда также числами Бетти по модулю 0) и коэффициентами кручения. Обратно, коэффициенты кручения могут быть вычислены по числам Бетти по модулю m $(m = 0, 2, 3, \ldots)$. Таким образом, в вопросах гомологий числа Бетти по модулю m не дают никаких преимуществ по сравнению с обычными группами Бетти. Однако в последнее время они приобрели значение для других исследований (теоремы двойственности, вопросы отображений), см. напр. Hopf [13], [19], Понтрягин [3]. Группы Бетти по модулю 2 были введены Tietze [1] и затем рассматривались Veblen [5]. Группы Бетти по модулю m ввел Alexander [15].

16 (стр. 122). Для общих окрестностных пространств *определение группы Бетти* выбирается так, чтобы сохранялось возможно больше теорем, имеющих место в теории комплексов. Следующий простой пример может пояснить это: рассмотрим на евклидовой плоскости множество точек, декартовы координаты которых задаются соотношениями

$$y = \sin \frac{1}{x} \text{ для } x \neq -0,$$
$$-1 \leqslant y \leqslant +1 \text{ для } x = 0,$$

и дополним это множество еще бесконечно удаленной точкой, присоединение которой превращает плоскость в двумерную сферу $\boldsymbol{S}^2$. Таким образом мы получим замкнутое подмножество $\boldsymbol{M}$ сферы $\boldsymbol{S}^2$, в котором, как легко убедиться, каждый особый одномерный цикл ~ 0. С другой стороны, множество $\boldsymbol{M}$ разбивает сферу $\boldsymbol{S}^2$ в точности на две области. Таким образом при нашем определении особых групп Бетти закон двойственности Александера (см. прим. 47), по которому число областей на единицу больше одномерного числа Бетти вложенного комплекса, теряет свою силу для общих замкнутых множеств. Относительно того, какое определение групп Бетти целесообразно давать в случае произвольных замкнутых подмножеств евклидовых пространств, см. Александров [7], [10], Čech [2], Lefschetz [12], Vietoris [2], [4].

17 (стр. 148). *Доказательства инвариантности групп Бетти.* Идея применить для доказательства топологической инвариантности симплициальных групп Бетти симплициальное приближение особых алгебраических комплексов принадлежит Александеру (J. W. Alexander). В своем первом доказательстве [1] он показывает изоморфность симплициальных групп Бетти двух различных симплициальных разбиений одного и того же комплекса, однако он пользуется не таким определением топологически инвариантных групп Бетти, какое дано у нас в тексте. Он исходит из более простого понятия особого

алгебраического комплекса (как непрерывного образа симплициального алгебраического комплекса). Во втором своем доказательстве [15] Александер вообще не пользуется никакими особыми алгебраическими комплексами, а аппроксимирует подразделение одного симплициального разбиения комплекса в другом, и обратно.

Мы доказали в тексте инвариантность *чисел Бетти* по модулю 2 тем, что дали их выражения через обычные числа Бетти и коэффициенты кручения. С таким же успехом инвариантность их можно было бы доказать непосредственно, введя особые алгебраические комплексы по модулю 2, т. е. употребляя в качестве коэффициентов вместо целых чисел классы вычетов по модулю 2. Доказательство теоремы о приближении, а вместе с тем и доказательство инвариантности групп Бетти по модулю 2 проводится для новой области коэффициентов совершенно так же, как в тексте.

18 (стр. 157). *Комплексное проективное пространство.* Таким же методом доказывается, что *в комплексном проективном* пространстве — многообразий $2n$ измерений — группы Бетти четных размерностей $0, 2, 4, \ldots, 2n$ суть свободные циклические группы, а группы нечетных размерностей состоят только из нулевого элемента. Базы гомологий состоят из комплексных проективных подпространств. (Точками комплексного проективного пространства являются системы отношений $(n+1)$ чисел, пробегающих независимо друг от друга все комплексные числа, за исключением системы, состоящей только из нулей. Окрестности определяются так же, как мы определяли их на стр. 74 для действительного проективного пространства.) Сравните v. d. Waerden [2].

19 (стр. 158). *Инвариантность в целом* (im Grossen). Для частного случая *замкнутого псевдомногообразия* инвариантность размерности следует уже из результатов главы IV. В самом деле, размерность n можно определить как наименьшее число, обладающее тем свойством, что $(n+1)$-е и все следующие числа Бетти по модулю 2 равны 0.

20 (стр. 159). *Группы Бетти в точке.* Вместо того чтобы определять группы Бетти в точке с помощью определенного симплициального разбиения и устанавливать затем их топологическую инвариантность, можно определить их с самого начала топологически инвариантно, как мы делали это для особых групп Бетти (§ 27). С этой целью, следуя van Kampen [3], мы будем считать два особых k-мерных алгебраических комплекса U^k и V^k полиэдра $\boldsymbol{K}$ «одинаковыми в точке P», когда $U^k - V^k$ не содержит точки P. Алгебраический комплекс U^k называется «циклом в P», если $\dot{U}$ не проходит через P. Наконец, $U^k \sim V^k$ в P, если комплекс $U^k - V^k$ гомологичен алгебраическому комплексу, не содержащему P. Другими словами, мы не обращаем внимания во всех алгебраических комплексах на симплексы, принадлежащие к $\boldsymbol{K} - P$, т. е. не содержащие точки P; мы рассматриваем «алгебраические

комплексы по модулю $(\boldsymbol{K} - P)$». k-мерные циклы в P можно разбить на классы гомологичных друг с другом циклов. Эти классы образуют абелеву группу, которая по определению топологически инвариантна и которая при $k > 1$ совпадает с $(k-1)$-мерной группой Бетти окрестностного комплекса в точке P, что можно доказать при помощи симплициального приближения. Алгебраические комплексы и группы Бетти по модулю $\boldsymbol{L}$, где $\boldsymbol{L}$ есть произвольное замкнутое подмножество полиэдра $\boldsymbol{K}$, применялись Лефшецем, например, в теории ограниченных многообразий (Lefschetz [12]); сравните прим. 41.

21 (стр. 165). Под теоремой об инвариантности размерности понимается большей частью предложение, сформулированное в упражнении 2 § 32. Инвариантность размерности была впервые доказана Брауэром (Brouwer [6]). Другие доказательства см. Александров [16], Lefschetz [12], Sperner [I].

22 (стр. 181). В чисто комбинаторной топологии поверхностей, в которой исходными объектами являются конечное или счетное число точек, отрезков и элементов поверхности, имеет смысл лишь вопрос о возможности элементарного преобразования, а не гомеоморфизма. Поэтому теорема текста в чисто комбинаторной топологии является *основной теоремой теории поверхностей*. Она была доказана сначала комбинаторно Деном и Хегором (Dehn und Heegaard [I], стр. 190). Нормальная форма поверхности не является у Дена и Хегора фундаментальным многоугольником, а состоит из трех элементов поверхности. Фундаментальный многоугольник фигурирует при комбинаторном доказательстве основной теоремы у Levi [I], стр. 71, точно так же у Reidemeister [7]. О других канонических формах поверхности см. Threlfall [I], о комбинаторных доказательствах — у Chuard [I].

23 (стр. 192). Решением проблемы гомеоморфизма еще не исчерпываются все вопросы *топологии поверхностей*. Так, например, трехмерная топология ставит перед топологией поверхностей ряд трудных задач, требуя построения всех возможных диаграмм Хегора и средств для различения их друг от друга (ср. с прим. 34). Однако, в то время как проблема гомеоморфизма решается при помощи гомологических свойств замкнутых кривых на поверхности, вопросы, о которых идет речь, связаны со свойствами гомотопии и изотопии. Вопрос о том, в каком случае две кривые на поверхности свободно гомотопны (§ 49), есть, как показано на стр. 226, чисто теоретико-групповой вопрос: для его решения нужно лишь найти все классы сопряженных элементов фундаментальной группы поверхности. Эта проблема была полностью решена Деном (Dhen [3], [4]), она включает в себя вопрос о существовании *амфидромных кривых*, т. е. таких кривых, которые могут быть гомотопно деформированы на поверхности в кривые, обратные самим себе, другими словами, направление обхода которых может быть гомотопной деформацией изменено на обратное. Об изотопии кривых на поверхности см. Baer [I], [2]. Дальнейший относящийся сюда результат дает

следующая теорема, доказанная Нильсеном (Nielsen [6]): каждый автоморфизм фундаментальной группы ориентируемой поверхности может быть осуществлен топологическим отображением поверхности на себя. Об отображениях поверхностей и теоремах о неподвижных точках см. Neilsen [2]–[6], Brouwer [I], [5], [14], [15], Kneser [7], [9], Hopf [14]. Исчерпывающее изложение чисто комбинаторной топологии поверхностей дает Reidemeister [7].

24 (стр. 194). Определение равенства путей отличается, таким образом, от определения равенства ориентированных особых одномерных симплексов, — для тех требовалось, чтобы их прообразы отображались друг на друга линейно. Если бы мы потребовали этого также при равенстве путей, то ассоциативный закон для произведения $(ab)c = a(bc)$, вообще говоря, не выполнялся бы.

25 (стр. 199). Понятие фундаментальной группы введено Пуанкаре (Poincaré [2], [7]). Способ отыскания образующих и соотношений при помощи вспомогательных путей мы заимствовали у Tietze [I].

26 (стр. 204). *Теорема. Евклидова плоскость есть единственное двумерное просто-связное бесконечное многообразие.* Для доказательства построим отображение такого многообразия $\boldsymbol{K}$ на евклидову плоскость. Мы будем исходить из некоторого фиксированного симплициального разбиения многообразия $\boldsymbol{K}$. Каждое циклическое сечение (Rückehrschnitt) $\boldsymbol{k}$ вытекает из $\boldsymbol{K}$ *однозначно* определяемый элемент поверхности. В самом деле, $\boldsymbol{k}$ гомотопно нулю, следовательно ~ 0 по модулю 2, т. е. является границей двумерного подкомплекса $\boldsymbol{E}$. Этот подкомплекс есть ограниченная поверхность, именно — элемент поверхности. В силу § 40, для того чтобы доказать это, нам нужно только показать, что каждый одномерный цикл и по модулю 2 на $\boldsymbol{E}$ гомологичен нулю по модулю 2. $\boldsymbol{u}$, наверное, гомологичен нулю по модулю 2 на $\boldsymbol{K}$, поэтому существует конечный подкомплекс $\boldsymbol{U}$ с границей $\boldsymbol{u}$. $\boldsymbol{U}$ не может содержать ни одного треугольника, лежащего вне $\boldsymbol{E}$, так как иначе $\boldsymbol{U}$ должен был бы содержать все треугольники, лежащие вне $\boldsymbol{E}$, — это следует из того, что $\dot{U}$ лежит на $\boldsymbol{E}$. Но $\boldsymbol{U}$ содержит только конечное число треугольников. Поэтому и гомологичен нулю по модулю 2 уже на $\boldsymbol{E}$. $\boldsymbol{E}$ определяется однозначно, так как если бы на $\boldsymbol{k}$ можно было натянуть еще вторую поверхность $\boldsymbol{E}'$, то $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{E}'$ вместе представляли бы цикл по модулю 2, а на $\boldsymbol{K}$ не может существовать никаких других циклов по модулю 2, кроме нулевого комплекса, так как такой цикл наряду с одним треугольником должен был бы содержать все остальные. Если теперь $\boldsymbol{E}_1$ есть произвольный состоящий из треугольников элемент поверхности нашего многообразия, имеющий границей $\boldsymbol{k}_1$, то этот элемент поверхности может быть однозначным образом расширен при помощи добавления к нему треугольников, имеющих общее ребро или вершину с треугольниками из $\boldsymbol{E}_1$. Дополним теперь — снова однозначным образом — получающийся таким способом подкомплекс $\boldsymbol{T}$,

который, вообще говоря, может иметь «отверстия» всеми элементами поверхности, имеющими своими границами циклические сечения комплекса $\boldsymbol{T}$. Мы утверждаем, что комплекс $\overline{\boldsymbol{T}}$, который получится при этом, есть элемент поверхности. В самом деле, из способа построения $\boldsymbol{T}$ следует, что условие связности (Π_{M_3}) стр. 117 выполняется. Рассмотрим тогда циклическое сечение $\boldsymbol{k}_2$, состоящее из граничных ребер комплекса $\overline{\boldsymbol{T}}$. Это циклическое сечение лежит также на границе комплекса $\boldsymbol{T}$, так как при переходе от $\boldsymbol{T}$ к $\overline{\boldsymbol{T}}$ никакие новые граничные ребра не добавлялись. Поэтому натянутый на $\boldsymbol{k}_2$ элемент поверхности $\boldsymbol{E}_2$ в силу конструкции принадлежит к $\overline{\boldsymbol{T}}$. С другой стороны, по условию (Π_{M_3}) $\overline{\boldsymbol{T}}$ состоит из всех треугольников, которые можно соединить с каким-нибудь треугольником комплекса $\boldsymbol{T}$, в частности, с каким-нибудь из треугольников, принадлежащих $\boldsymbol{E}_2$. Но такими треугольниками являются только треугольники самого $\boldsymbol{E}_2$, так как граница $\boldsymbol{E}_2$ принадлежит также к границе $\overline{\boldsymbol{T}}$. Поэтому $\overline{\boldsymbol{T}}$ принадлежит также к $\boldsymbol{E}_2$, откуда следует, что $\overline{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{E}_2$ есть элемент поверхности. Совокупность треугольников комплекса $\boldsymbol{E}_2$, не принадлежащих к $\boldsymbol{E}_1$, образует элемент поверхности с отверстием, т. е. круговое кольцо $\boldsymbol{Z}_1$ с внутренним граничным кругом $\boldsymbol{k}_1$ и с внешним $\boldsymbol{k}_2$. Отобразим теперь $\boldsymbol{E}_1$ топологически на единичный круг евклидовой плоскости, а $\boldsymbol{Z}_1$ отобразим на круговое кольцо плоскости с внутренним радиусом 1 и внешним 2 так, чтобы отображения $\boldsymbol{E}_1$ и $\boldsymbol{Z}_1$ совпадали на круге $\boldsymbol{k}_1$, общем им обоим; далее, отобразим $\boldsymbol{Z}_2$ на круговое кольцо с внутренним радиусом 2 и внешним 3 и т. д. При этом мы получим топологическое отображение комплекса $\boldsymbol{K}$ на всю евклидову плоскость.

27 (стр. 207). Отсюда следует, что два выходящие из O и деформируемые друг в друга *непрерывно* замкнутые линейчатые пути w_1 и w_2 могут быть деформированы друг в друга также *комбинаторно*. В самом деле, при помощи комбинаторной деформации w_1 можно перевести сначала в $w_1 \cdot w_2^{-1} w_2$, а затем в w_2, так как $w_1 w_2^{-1}$ гомотопен нулю непрерывно, а следовательно, в силу (II), и комбинаторно.

28 (стр. 226). Определите среди замкнутых поверхностей такие, на которых существуют *амфидромные* кривые (прим. 23). В проективном пространстве, кроме (всегда амфидромных) кривых, гомотопных нулю, амфидромны еще проективные прямые, т. е. вообще все кривые; в пространстве линзы $(3, 1)$ амфидромны только кривые, гомотопные нулю.

29 (стр. 227). Переход от замкнутого пути w_1 к гомологичному ему пути также может быть осуществлен при помощи деформационного процесса, именно при помощи «деформации с разрывами». Под этим понимается следующее: мы деформируем сначала путь w_1 в путь $\overline{w}_1$, имеющий двойную точку (самокасание) P, причем относительно этой точки можно предположить, что она является начальной точкой пути $\overline{w_1}$, w_1 представляет тогда произведение двух замкнутых путей w_1'

и w_2'. Будем теперь свободно деформировать их независимо друг от друга так, чтобы в конце концов они снова слились в один путь w_2. К w_2 можно применить тот же процесс, как к w_1, и т. д. После r шагов мы получим путь w_r, который, очевидно, будет гомологичен исходному пути w_1. Легко сообразить, что таким способом можно, действительно, получить любой путь, гомологичный пути w_1. Вместе с тем трем классам, о которых шла речь на стр. 226–227, — классу путей, классу сопряженных элементов и классу гомологий — соответствуют теперь три вида деформаций: связанные деформации, свободные деформации, деформации с разрывами.

30 (стр. 230). Определение *групп Бетти* составного комплекса дал Вьеторис (Vietoris [6]). Сравните, далее, Mayer [I]. О фундаментальной группе см. Seifert [I].

31 (стр. 232). Общее, группа с одним соотношением $A^m = B^n$ только тогда изоморфна группе с соотношением $A^{m'} = B^{n'}$, когда пары чисел m, n и m', n' совпадают (независимо от того, в каком порядке берутся числа в каждой паре). Для доказательства нужно взять дополнительную группу от группы $A^m = B^n$ по ее центру, порождаемому элементом A^m. Дополнительная группа имеет соотношения $\overline{A}^m = \overline{B}^n$, и каждый элемент конечного порядка ее может быть трансформирован в степень $\overline{A}$ или $\overline{B}$. Таким образом, числа m и n получают инвариантную характеристику. См. Schreier [I]. Необходимое условие эквивалентности (§ 65) двух винтовых узлов m, n и m', n' заключается, таким образом, в совпадении обеих пар. Однако при $m = m'$ и $n = n'$ мы еще не можем утверждать, что оба узла эквивалентны, так как приходится отличать узел от его зеркального отражения. Так, например, существует «правый» и «левый» простейший узел. См. Dehn [5], Goeitz [2], Seifert [4].

32 (стр. 256). См. Reidemeister [4].

33 (стр. 279). Относительно открытия пространств Пуанкаре см. Poincaré [7]. Данный у него на стр. 106 пример представляет пространство сферического додекаэдра (см. Weber и Seifert [1]). Первый способ построения бесчисленного множества различных пространств Пуанкаре дал М. Ден (см. § 65). Другой подобный способ дает теория волокнистых пространств (см. прим. 38 и Seifert [3], стр. 207). Оказывается, что каждое пространство Пуанкаре, которое может быть разбито на волокна, допускает такое разбиение только единственным способом (обыкновенную трехмерную сферу, допускающую разбиение на волокна бесчисленным множеством способов, мы не причисляем к пространствам Пуанкаре) и что оно взаимно однозначно определяется кратностями $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ своих особых волокон (Ausnahmefasern), кратности эти должны только удовлетворять условию — не иметь попарно общих множителей. Среди волокнистых пространств Пуанкаре сферическое пространство додекаэдра есть единственный комплекс, имеющий конечную

фундаментальную группу. Что многообразие стр. 289, получаемое из простейшего узла по способу Дена, гомеоморфно сферическому пространству додекаэдра, следует из возможности разбиения его на волокна (см. Threlfall и Seifert [2], II, стр. 568). Такими же методами доказывается, что сферическое пространство додекаэдра дает не только пятилистное циклическое накрытие простейшего узла, но и двухлистное накрытие винтового узла $3,5$ и трехлистное накрытие винтового узла $5,2$ (Seifert [3], стр. 222).

34 (стр. 282). См. Seifert [1] и Goeiretz [I]. Относительно диаграмм Хегора более высоких родов см. Goeiritz [4], Kreines [I], Reidemeister [8], [9], Singer [I].

35 (стр. 283). См. Alexander [3], [8].

36 (стр. 284). Данное в тексте доказательство для проективной плоскости может служить, очевидно, для любой неориентируемой поверхности. Что такая поверхность не только не может быть подкомплексом симплициального разбиения, но и вообще не может быть каким-нибудь образом вложена топологически в трехмерное пространство, следует из закона двойственности Алексадера (прим. 47).

37 (стр. 286). Этот результат другим образом был получен Кнезером (Kneser [5]).

38 (стр. 286). Два другие способа построения замкнутых трехмерных многообразий получаются в связи *с проблемой пространственных форм* и теорией *волокнистых пространств*. Под пространственной формой понимают n-мерное h-многообразие, на котором, во-первых, определена сферическая, евклидова или гиперболическая метрика, т. е. каждая точка которого имеет окрестность, допускающую конгруэнтное отображение на шар одной из трех основных метрических форм, именно, на шар n-мерного сферического, евклидова или гиперболического пространства (условие метрической однородности). Во-вторых, на пространственную форму налагается условие неограниченности, по которому из каждой точки по каждому направлению можно неограниченно продолжать геодезический луч (при этом может случиться, что луч этот возвратится сам на себя); это условие исключает, например, возможность того, что каждое открытое подмножество пространственной формы снова есть пространственная форма. Среди всех пространственных форм три основные формы (сфера, евклидова и гиперболическая плоскости) занимают особое положение, так как они являются единственными просто-связными пространствами. (Если добавить к ним еще эллиптическое пространство, получающееся из метрического сферического пространства путем отождествления диаметрально-противоположных точек его, то эти четыре пространственные формы являются, сверх того, единственными, для которых выполняются условия движения Ли–Гельмгольца.) Оказывается, что в случае двух измерений каждая замкнутая поверхность является областью разрывности для неимеющей неподвижных точек группы движения одной из

трех основных метрических форм (см., например, Koebe [1]). Соответствующее предложение для трех измерений несправедливо, как можно убедиться на примере топологического произведения сферы на окружность. Тем не менее области разрывности в трех измерениях дают богатый источник для примеров; мы брали оттуда все примеры главы IX. Группы движения сферического и евклидова пространств с конечной областью разрывности могут быть полностью перечислены см. Hopf [2], Threlfall и Seifert [2], Hantzsche и Wendt, Euklidische Raumformen. Об областях разрывности гиперболического пространства известно мало, см. Löbell [4], Weber и Seifert [I].

Повод к рассмотрению волокнистых пространств дают области разрывности сферических групп движения, так же как пространства линейных элементов замкнутых поверхностей (прим. 12), так как эти пространства могут быть определенным образом разбиты на волокна. Волокнами областей разрывности являются траектории непрерывных групп движения единичной трехмерной сферы (называемой также гиперсферой); в пространствах линейных элементов волокно образуется элементами, принадлежащими фиксированной точке поверхности. Волокнистое пространство представляет трехмерное многообразие, точки которого разбиваются на ∞ замкнутых кривых, так называемых волокон, через каждую точку которых проходит в точности одно волокно, и каждое волокно H имеет «волокнистую окрестность», т. е. содержащее H подмножество волокон, которое может быть отображено на «волокнистое трехмерное кольцо» так, что волокно переходит в волокно; причем H отображается в среднее волокно. Волокнистое трехмерное кольцо есть прямой круговой цилиндр евклидова пространства, волокна которого суть прямые, параллельные оси, и нижнее и верхнее основания которого повернуты на рациональный угол и склеены друг с другом.

Вместо того чтобы рассматривать ныне еще нерешенную проблему гомеоморфизма — дать полную систему топологических инвариантов трехмерных многообразий, — можно поставить проблему, поддающуюся разрешению, — дать для волокнистых пространств полную систему инвариантов отображений, переводящих волокна в волокна (Seifert [3]). Получающиеся при этом инварианты, посредством которых может быть вычислена фундаментальная группа, являются, конечно, инвариантами не рассматриваемого многообразия, а его разбиения на волокна, так что иногда остается открытым вопрос, не могут ли два различных волокнистых пространства быть топологически эквивалентными как точечные множества.

Кроме того, существуют многообразия, которые вообще не могут быть разбиты на волокна, так как возможность такого разбиения связана с определенными свойствами фундаментальной группы. Так, например, все замкнутые гиперболические пространственные формы точно так же, как почти все топологические «суммы» (см. стр. 280), не мо-

гут быть разбиты на волокна. Тем не менее инварианты волокнистых разбиений оказываются полезными в топологии многообразий, так как во многих случаях они позволяют установить топологическое различие (негомеоморфность) многообразий. Примером здесь могут служить области разрывности групп движения единичной трехмерной сферы, допускающих неподвижные точки (в силу того, что такие области могут быть разбиты на волокна, их можно полностью перечислить), а также пространства Пуанкаре, о которых упоминается в прим. 33.

39 (стр. 286). *Эквивалентность узлов.* Можно было бы считать два узла эквивалентными в том случае, если один из них может быть переведен в другой посредством изотопной деформации отображения прообраза узла (см. § 31). Однако тогда каждый узел можно было бы перевести в окружность. Для этого нужно было бы только, туго натягивая узел, стянуть заузление в точку. Другое понятие эквивалентности исходит из возможности перевести один узел в другой при помощи изотопной деформации всего пространства (стр. 286). Мы не доказываем, что это понятие совпадает с приведенным в тексте. Именно, каждая изотопная деформация пространства осуществляет, очевидно, топологическое отображение всего пространства на себя, сохраняющее ориентацию. Однако мы оставляем открытым вопрос о том, может ли быть, обратно, каждое такое топологическое отображение пространства на себя осуществлено изотопной деформацией. Если определять узел как прямолинейный полигон, то можно применять комбинаторные деформации, которым соответствуют специальные изотопные деформации отображения прообраза и при которых стягивание заузления в точку исключается. Узлы тогда представляют некоторый класс комбинаторно деформируемых друг в друга пространственных полигонов, см. Reidemeister [6].

40 (стр. 302). Это определение топологически инвариантно, так как мы доказали в § 32, что группы Бетти в точке являются топологическими инвариантами. Мысль рассматривать вместо многообразий h-многообразия возникла независимо у нескольких авторов — Александера, Понтрягина, Вьеториса (Vietoris [2]), Вейля (Weyl [2]). Детальное рассмотрение впервые проведено Ван–Кампеном (van Kampen [3]).

41 (стр. 303). *Ограниченные многообразия.* Ограниченное n-мерное многообразие можно определить, как показал van Kampen [3], стр. 37, как ограниченный однородный комплекс, удвоение которого есть замкнутое многообразие. Так как дуальный звездный комплекс клеточного разбиения ограниченного многообразия не является опять клеточным комплексом, то формальное доказательство закона двойственности Пуанкаре (§ 69) для ограниченных многообразий неприменимо, и сам закон оказывается неверным. Напротив, если из дуального звездного комплекса мы откинем все звезды, центры которых лежат на границе, то мы снова получим клеточный комплекс. Поэтому для того чтобы перенести закон двойственности Пуанкаре на ограниченные

многообразия, мы можем, следуя Лефшецу (Lefschetz [12], стр. 154), рассматривать алгебраические комплексы по модулю границы $\boldsymbol{B}$ (см. прим. 20). Тогда (обыкновенное) число Бетти p^k равняется $(n-k)$-мерному числу Бетти по модулю $\boldsymbol{B}$. Точно так же (обыкновенные) k-мерные коэффициенты кручения совпадают с $(n-k-1)$-мерными по модулю $\boldsymbol{B}$. Напротив, теория индексов пересечения переносится на ограниченные многообразия без существенных изменений. Особые алгебраические комплексы должны, помимо условия E, подчиняться еще условию, чтобы пересечение покрытых этими комплексами множеств не имело общих точек с границей. См. van Kampen [3].

42 (стр. 309). В определении индексов пересечения возможен некоторый произвол, причем в литературе это определение не стандартизовано. Вместо того чтобы полагать $\chi(a^k,\, bn-k) = \xi\eta\zeta$, можно было бы определить индекс пересечения как произведение $\xi\eta\zeta\omega(k,\, n)$, где $\omega(k,\, n)$ есть некоторая функция чисел k и n, равная по величине $+1$. Так, например, у ван–Кампена (van Kampen [3]) $\omega = -(-1)^k$. Подобный произвол, впрочем, допустим и в определении границы и коэффициента зацепления.

43 (стр. 324). Данное здесь доказательство теорем I и II примыкает к доказательству Веблена (Veblen [4]).

44 (стр. 339). Следуя Лефщецу (Lefschetz [6], [7], [12]), мы установили возможность перехода от одного клеточного разбиения к другому тем, что посредством полной индукции свели индекс пересечения $\chi(A^k,\, B^{n-k})$ к индексу пересечения $\chi(A60,\, B^n)$, инвариантность которого доказывается легко. Аналогичными методами Лефшец доказывает, что двум особым циклам A^r и B^s может быть поставлен в соответствие при $r+s \geqslant n$ $(r+s-n)$-мерный цикл (пересечение) C^{r+s-n}, класс гомологий которого однозначно определяется классами гомологий циклов A^r и B^s. Этот класс гомологий можно считать «произведением» классов гомологий, содержащих циклы A^r и B^s. Таким образом классы гомологий можно не только складывать друг с другом, но и перемножать. Вследствие этого классы гомологий образуют кольцо. На это кольцо вместе с фундаментальной группой можно смотреть, следуя Хопфу, как на алгебраическую характеристику многообразия, описывающую его свойства, но, конечно, не исчерпывающую их. Кольцо многообразия имеет значение, между прочим, в теории непрерывных отображений (Hopf [12], [14]).

45 (стр. 346). Два циклических сечения ориентируемой замкнутой поверхности называются *сопряженными*, если они гладко пересекаются в точности в *одной* точке. На рис. 128, стр. 343 a и b, например, точно так же, как c и d, представляют пару сопряженных циклических сечений.

46 (стр. 347). Индексы пересечения играют роль в приложениях топологии к *алгебраической геометрии*. Рассмотрим, например, в комплексной проективной плоскости алгебраическую кривую C_m m-го по-

рядка, которая получается приравнением нулю тернарной формы m-й степени. Можно доказать, что точки C_m образуют подкомплекс, который можно рассматривать — после соответствующего симплициального разбиения и когерентной ориентации его двумерных симплексов — как особый двумерный алгебраический комплекс в четырехмерном многообразии комплексной проективной плоскости. Если пересечь C_m с надлежащим образом выбранной проективной прямой C_1 (т. е с двумерной сферой комплексной проективной плоскости), то получаются в точности m точек пересечения. При этом оказывается, что *топологический* индекс пересечения $\chi(C_m, C_1)$ обоих двумерных циклов C_m и C_1 также равен m. Но тогда индекс пересечения C_m с произвольной *проективной* прямой C_1', также равен m в силу $C_1 \sim C_1'$ (прим. 18), несмотря на то, что действительное число общих точек циклов C_m и C_1 может быть (например, когда C_1 касается C_m) меньше, чем m. Если определить теперь индекс пересечения двух произвольных алгебраических кривых как топологический индекс пересечения соответствующих им циклов, то тогда легко получается теорема Безу: индекс пересечения кривой m-го порядка C_1 с кривой n-го порядка C_n равен mn. Доказательство: так как проективная прямая представляет двумерную базу гомологий, то $C_m \sim \mu C_1$. Индекс пересечения гомологичного нулю цикла $C_m - \mu C_1$ с проективной прямой C_1' равен нулю. Поэтому $\chi(C_m, C_1') = \mu\chi(C_1, C_1')$. Но, как выше установлено, $\chi(C_m, C_1') = m$ и $\chi(C_1, C_1') = 1$. Поэтому $m = \mu$, т. е. кривая m-го порядка гомологична проективной прямой, взятой с коэффициентом m. Отсюда следует, что $\chi(C_m, C_n) = \chi(mC_1, nC_1') = mn\chi(C_1, C_1') = mn$, что и требовалось доказать. Этот пример должен только пояснить, каким образом топология может быть использована в алгебраической геометрии. Подробное изложение топологических методов алгебраической геометрии см. v. d. Waerden [2], [3], Lefschetz [2], [4], [12], также F. Severi.

47 (стр. 354). Коэффициенты зацепления были введены Брауэром (Brouwer [9]). С теорией коэффициентов зацепления связано одно из самых красивых и содержательных предложений топологии — *закон двойственности Александера* (Alexander [5]). Пусть в n-мерном евклидовом пространстве $\boldsymbol{R}^n$ $(n > 1)$ рассматривается конечный n-мерный комплекс $\boldsymbol{K}^r$ (т. е. $\boldsymbol{K}^r$ есть подмножество пространства $\boldsymbol{R}^n$). Пусть $\boldsymbol{R}^n - \boldsymbol{K}^r$ означает множество пространства $\boldsymbol{R}^n$, дополнительное к $\boldsymbol{K}^r$. Как подмножество евклидова пространства, $\boldsymbol{R}^n - \boldsymbol{K}^r$ также представляет комплекс, притом бесконечный (стр. 79). То же самое имеет место по отношению к множеству $\boldsymbol{S}^n - \boldsymbol{K}^r$, получающемуся, если мы присоединением одной бесконечно удаленной точки превратим $\boldsymbol{R}^n$ в n-мерную сферу $\boldsymbol{S}^n$. Закон двойственности Александера устанавливает связь между группами Бетти комплекса $\boldsymbol{K}^r$ и $\boldsymbol{S}^n - \boldsymbol{K}^r$. Он гласит: если p^k есть k-мерное число Бетти комплекса $\boldsymbol{K}^r$, а $\overline{p}^k$ k-мерное число Бетти дополнительного пространства $\boldsymbol{S}^n - \boldsymbol{K}^r$, то

$$p^k = \overline{p}^{n-k-1} \quad (k \neq 0,\ k \neq n-1),$$

а для обоих исключительных случаев (которые, впрочем, можно подчинить общей формуле, изменив определение нульмерного числа Бетти) $p^0 = \overline{p}^{n-1} + 1$, $p^{n-1} = \overline{p}^0 - 1$. Более глубокая причина существования таких зависимостей между числами Бетти выясняется, если мы рассмотрим базы слабых гомологий $\boldsymbol{K}^r$ и $\boldsymbol{S}^n - \boldsymbol{K}^r$. Оказывается, что можно выбрать k-мерную базу слабых гомологий комплекса $\boldsymbol{K}^r$

$$B_1^k, \ldots, B_{p^k}^k$$

и $(n-k-1)$-мерную базу комплекса $\boldsymbol{S}^n - \boldsymbol{B}^r$

$$\overline{B}_1^{n-k-1}, \ldots, \overline{B}_{\overline{p}^{n-k-1}}^{n-k-1}$$

(при $k \neq 0$, $k \neq n-1$) так, что матрица коэффициентов зацепления будет иметь вид

$$V(B_i^k, \overline{B}_j^{n-k-1}) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

При $k = 0$ вместо базы слабых гомологий (которая состоит тогда, как известно, из стольких точек, сколько имеется у комплекса компонент, т. е. связных изолированных частей) нужно взять полную систему гомологично независимых нульмерных циклов, имеющих алгебраическое значение 0 (таких циклов имеется на 1 меньше, чем компонент); в случае $k = n-1$ для базы $\overline{B}_j^0$ нужно поступить соответственно.

Закон двойственности Александера справедлив также по модулю 2; в этом случае нужно только взять вместо баз слабых гомологий и чисел Бетти базы гомологий и числа Бетти по модулю 2 (Alexander [5], Понтрягин [3]). Эта теорема распространена с n-мерной сферы на любые многообразия (van Kampen |3], Понтрягин [3]).

Следствия из закона двойственности Александера:

1. Число областей, на которые n-мерная сфера $\boldsymbol{S}^n$ разбивается комплексом $\boldsymbol{K}^r$, определяется только самим этим комплексом и не зависит от того, каким образом $\boldsymbol{K}^r$ вложен в $\boldsymbol{S}^n$. Это число равно на единицу увеличенному $(n-1)$-мерному числу Бетти, а также на единицу увеличенному $(n-1)$-мерному числу Бетти по модулю 2 комплекса $\boldsymbol{K}^r$. Отсюда следует, что $(n-1)$-мерное *неориентируемое* псевдомногообразие не может быть вложено в $\boldsymbol{S}^n$ (Brouwer [10]). В самом деле, для такого псевдомногообразия $p^{n-1} = 0$, а число Бетти по модулю 2 $q^{n-1} = 1$, так что число областей, на которое разбивалась бы сфера $\boldsymbol{S}^n$, должно было бы, с одной стороны, $= 1$, а с другой $= 2$. Эту теорему мы уже доказали (стр. 284 и прим. 36) для поверхностей, вложенных в трехмерную сферу $\boldsymbol{S}^3$, однако мы рассматривали не произвольные топологические вложения поверхности, а только симплициальные. Вложенное

в S^n *ориентируемое* $(n-1)$-мерное многообразие M^{n-1}, напротив, разбивает S^n в точности на две области, так как $p^{n-1} = 1$. Область, содержащая «бесконечно удаленную точку» сферы S^n обычно называется внешней частью многообразия M^{n-1}, а вторая область — внутренней его частью. Частным случаем последнего предложения является теорема Жордана, утверждающая, что евклидова плоскость разбивается топологическим образом круга на две области.

2. *Теорема об инвариантности области.* Если область G (т. е. открытое подмножество) n-мерного евклидова пространства R^n топологически отображено на подмножество G' другого n-мерного евклидова пространства $'R^n$, то G' также является областью (Brouwer [12]). Докажем сначала лемму: пусть S^n есть n-мерная сфера, получающаяся из R^n присоединением бесконечно удаленной точки P, и E^n — лежащий в R^n топологический n-мерный симплекс с граничной сферой S^{n-1}. Если тогда J и A суть внутренняя и внешняя области, на которые S^n разбивается в силу пункта 1 сферой S^{n-1}, то E^n представляет в точности точечное множество $J + S^{n-1}$. *Доказательство*: индекс пересечения по модулю 2 точки P с E^n равен нулю, так как P не принадлежит к E^n. Но тогда индекс пересечения по модулю 2 симплекса E^n с каждой другой точкой области A также равен нулю, так как каждые две точки A можно соединить путем, не пересекающим S^{n-1}. Если бы теперь в J существовала непринадлежащая E^n точка, то по тем же причинам был бы равен нулю индекс пересечения по модулю 2 *каждой* точки области J с E^n. Но тогда для каждого лежащего в $S^n - S^{n-1}$ и гомологичного нулю в S^n нульмерного цикла U^0 по модулю 2 мы имели бы $V(S^{n-1}, U^0) = \chi(E^n, U^0)$, что противоречит закону двойственности Александера. Таким образом все точки области J принадлежат E^n. Точка области A, очевидно, не может принадлежать к E^n, так как каждые две внутренние точки симплекса могут быть соединены отрезком, не пересекающим границы. Из леммы следует, в частности, что центр симплекса E^n является внутренней относительно R^n точкой E^n. Теорема об инвариантности области получается теперь немедленно, если мы для каждой точки X области G построим маленький принадлежащий G прямолинейный n-мерный симплекс, имеющий X своим центром. Образ n-мерного симплекса является тогда топологическим симплексом, принадлежащим G' и X' является внутренней точкой.

48 (стр. 356). Асимметрию пространства линзы $(3, 1)$ заметил Kneser [8]. Дальнейшие подробности о различении многообразий при помощи коэффициентов зацепления см. Alexander [10], de Rham [I], Reidemeister [9], Seifert [4].

49 (стр. 361). *Степень отображения* была введена Брауэром (Brouwer [8]). Проблема построения непрерывного отображения комплекса K^n в $\mathbf{K}^n$ с заданной степенью отображения не всегда имеет решение. Так, например, если K^n есть ориентируемая поверхность ро-

да $p > 0$, $\mathbf{K}^n$ — такая же поверхность рода q, то степень отображения γ должна удовлетворять условию: $|\gamma|\,(q-1) \leqslant p-1$. Отсюда следует, в частности, что при непрерывном отображении поверхности рода $p > 1$ самое на себя речь может идти лишь о значениях степени отображения $\gamma = 0, +1, -1$ (Kneser [9]). В связи с этим возникает вопрос, может ли всегда отображение степени γ быть деформировано так, чтобы (малая) область комплекса $\mathbf{K}^n$ была покрыта в точности $|\gamma|$ раз? Положительное решение этого вопроса дали Hopf [19] (часть II) и Kneser [9]. Теория степени отображения является только одним из примеров алгебраическо-теоретико-групповых методов, применяемых для изучения непрерывных отображений. Относительно этих методов см. работы Hopf [12], [14], [19], в этих работах имеются указания на дальнейшую литературу.

50 (стр. 369). *Формула неподвижных точек.* Данный в тексте вывод формулы неподвижных точек примыкает к работе Hopf [9]. Сама формула является частным случаем *обобщенной формулы неподвижных точек* Лефшеца–Хопфа, утверждающей, что *для произвольного непрерывного отображения f однородного комплекса $\boldsymbol{K}^n$ самого на себя $\sum(-1)^k$ След $\mathbf{B}^k$ равна взятой со знаком минус сумме индексов всех неподвижных точек.* Индекс изолированной неподвижной точки P, если P является внутренней точкой n-мерного симплекса, определяется следующим образом: опишем вокруг P маленькую сферу $\boldsymbol{S}^{n-1}$ и проведем из каждой точки Q этой сферы вектор $\mathbf{v}_Q$, ведущий в образ $f(Q)$. Пусть луч, проведенный из P параллельно $\mathbf{v}_Q$, пересекает $\boldsymbol{S}^{n-1}$ в точке $\varphi(Q)$. φ представляет непрерывное отображение сферы $\boldsymbol{S}^{n-1}$, и степень этого отображения называется *индексом неподвижной точки.* Понятие индекса неподвижной точки фактически обязано своим происхождением Пуанкаре (Poincaré [1] 3 и 4 части). Обобщенную формулу неподвижных точек Хопф доказал сведением к специальной формуле, выведенной в тексте (Hopf [7], [11]). Первоначальное доказательство Лефшеца (Lefschetz [6], [7]) использует «*метод топологического произведения*». Коротко он заключается вот в чем:

Непрерывное отображение f комплекса $\boldsymbol{K}^n$ в комплекс $\mathbf{K}^m$ может быть задано следующим образом: мы составляем топологическое произведение $\boldsymbol{K}^n \times \mathbf{K}^m$ и соответственно каждой точке P комплекса $\boldsymbol{K}^n$ отмечаем в этом произведении точку $P \times f(P)$. Такие точки образуют гоыеоморфное с $\boldsymbol{K}^n$ подмножество топологического произведения, называемое *характеристическим подкомплексом* отображения f. Если, кроме отображения f, задано еще отображение g комплекса $\boldsymbol{K}^n$ в $\mathbf{K}^m$, то под точкой совпадения отображений f и g понимают точку P, для которой $f(P) = g(P)$. Точки совпадения соответствуют, следовательно, общим точкам обоих характеристических подкомплексов отображений f и g. Если, в частности, $\boldsymbol{K}^n$ и $\mathbf{K}^m$ суть многообразия одинаковых размерностей, то обоим характеристическим подкомплексам отображений f и g соответствует индекс пересечения, называемый

алгебраическим числом точек совпадения. Лефшец дал формулу, которая позволяет вычислить это число, если известны осуществляемые отображениями f и g гомоморфные отображения групп Бетти. Обобщенная формула неподвижных точек получается из формулы Лефшеца в частном случае, когда $\boldsymbol{K}^n$ и $\mathbf{K}^m$ совпадают и g есть тождественное отображение. Доказательство Лефшеца годится, таким образом, только для многообразий (ограниченных и неограниченных), но зато оно охватывает многозначные отображения. Метод топологического произведения оказался, впрочем, плодотворным и для других проблем, касающихся отображений (см., например, Hopf [12], [14]).

Формула неподвижных точек находится в тесной связи с теорией *непрерывных векторных полей*. «Малое преобразование» f т. е. отображение комплекса на себя, сдвигающее точки лишь немного, определяет векторное поле, векторы которого ведут из точки (прообраза) в ее образ. Векторное поле непрерывно всюду, за исключением своих особых точек, соответствующих неподвижным точкам отображения. Мы предположим, что имеется лишь конечное число особых точек поля. Под индексом особой точки векторного поля понимается индекс соответствующей неподвижной точки малого преобразования. Так как при малом преобразовании След $\mathbf{B}^i = p^i$ и альтернированная сумма чисел Бетти равна эйлеровой характеристике, то мы получаем теорему Хопфа (Hopf [5]): *сумма индексов особых точек векторного поля равна по величине эйлеровой характеристике многообразия.*

Формула неподвижных точек позволяет иногда установить существование неподвижных точек (§ 81). От этого вопроса нужно отличать вопрос о наименьшем числе неподвижных точек класса отображений, т. е. о наименьшем числе неподвижных точек, которое может быть достигнуто деформацией данного отображения. Оценку наименьшего числа неподвижных точек мы можем получить по Нильсену, разбивая неподвижные точки на *классы неподвижных точек.* Две неподвижные точки считаются принадлежащими одному классу неподвижных точек, если их можно соединить путем w таким, что w вместе со своим образом составляет гомотопный нулю замкнутый путь. Эквивалентное определение получается, если мы перенесем отображение основного комплекса на универсальный накрывающий, что возможно осуществить, вообще говоря, многими способами. Точки, соответствующие на основном комплексе неподвижным точкам одного из таких отображений универсального накрывающего, принадлежат тогда одному классу. См. Neilsen [4], [6] и Hopf [6]; там же имеются литературные ссылки на работы Александера, Брауэра, Биркхофа и других авторов, занимавшихся этим вопросом.

51 (стр. 371). Вообще справедлива теорема о том, что $(2k+1)$-мерное многообразие допускает деформации, не имеющие неподвижных точек, см. Hopf [5].

52 (стр. 394). Что топология дает *теоретико-групповые результаты*, которые невозможно или во всяком случае трудно получить, идя чисто арифметическим путем, мы уже видели на примере стр. 260 при рассмотрении накрывающих полиэдров. Далее, такие результаты получаются при определении структуры группы, заданной образующими и соотношениями, в частности, при решении проблемы изоморфизма: являются ли изоморфными две группы, заданные образующими и соотношениями. Очень красивый пример к этому доставляет теория кос Артина (Artin [2]), — там показывается, что симметрическая группа перестановок из n цифр есть группа, заданная двумя образующими a и σ, соотношениями $a^n = (a\sigma)^{n-1}$, $\sigma^2 = 1$ и соотношениями коммутативности: σ перестановочна с $a^i\sigma a^{-i}$ (при $2 \leqslant i \leqslant \frac{n}{2}$). Другой пример можно найти у Threlfall и Seifert [2], стр. 577. Способ, который позволяет — принципиально всегда, а практически во многих случаях — получить представление о группе, заключается в построении образа группы (Gruppenbild), т. е. топологического линейчатого или поверхностного комплекса, получающегося при помощи образующих и соотношений (Dehn [4], Threlfall [1]). Если, например, мы как-нибудь заменим многообразие многогранников (способом, указанным в § 60) и построим универсальное накрывающее многообразие, то этот многогранник определит на накрывающем клеточное разбиение. Линейчатый комплекс дуального клеточного разбиения представляет групповой образ фундаментальной группы (Ден). Так, например, сферическое пространство додекаэдра позволяет определить, что группа с ссотношениями $A^5 = B^2 = C^3 = ABC$ есть бинарная группа икосаэдра 120-го порядка. Чтобы оценить трудности проблемы изоморфизма, достаточно выбрать из бесконечного числа возможных способов превращения многообразия в многогранник какие-нибудь два и попытаемся выразить каждую из получающихся при этом систем образующих и соотношений при помощи другой (ср. § 62).

Указатель литературы

Прилагаемый указатель литературы ни в коей мере не претендует на полноту. Литература до 1907 г. указана у Dehm [1], до 1923 г. — у Kerékjártó [6], до 1930 г. — у v. d. Waerden [1] и S. Lefscherz [12]. У V. Tietze und L. Vietoris [8] литература указана до 1930 г., однако полностью лишь до 1926 г. Литературу по теории узлов можно найти у K. Reidemeister [6] (до 1932 г.).

Allexander, J. W.

1. A proof of the invarince of certain constants in Analysis Situs. Trans. Amer. Math. Soc. 16 (1915), стр. 148–154.

2. Note on two threedimensional manifolds with the same group. Trans. Amer. Math. Soc. 20 (1919), стр. 339–342.

3. Note on Riemann spaces. Amer. Math. Soc. Bull. 26 (1919), стр. 370–372.

4. On transformations with invariant points. Trans. Amer. Math. Soc. 23 (1922), стр. 89–95.

5. A proof and extension of the Jordan – Brouwer separation theorem. Trans. Amer. Math. Soc. 23 (1922), стр. 333–349.

6. On the deformation of an n-cell. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 9 (1923), стр. 406–407.

7. Invariant points of a surface transformation of given class. Trans. Amer. Math. Soc. 25 (1923), стр. 173–184.

8. A lemma on a system of knotted curves. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 9 (1923), стр. 93–95.

9. On the subdivision of 3-Space dy a polyhedron. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 10 (1924), стр. 6–8.

10. New topological invariants expressible as tensors. Там же, стр. 99–101.

11. On certain new topological invariants of a maniford. Там же, стр. 101–103.

12. Topological invariants of a manifold. Proc. Nat. Akad. Sci. USA. 10 (1924), стр. 493–494.

13. On the intersection invariants of a manifold. Proc. Nat. Acad. USA. 11 (1925), стр. 143–146.

14. Note on a theorem of H. Kneser. Там же, стр. 250–251.

15. Combinatorial Analysis Situs. Trans. Amer. Math. Soc. 28 (1926), стр. 301–329.

16 (и G. B. Briggs). On types of knotted curves. Ann. of Math. (2) 28 (1927), стр. 562–586.

17. Topological invariants of knots abd links. Trans. Amer. Math. Soc. 30 (1928), стр. 275–306.

18. The combimatorial theory of complexes. Ann. of Math. (2) 31 (1930), стр. 294–322.

19. (и L. W. Cohen). A classiffication of the homology groups of compact. spaces. Ann. of Math. (2) 33 (1932), стр. 538–566.

20. Some problems in topology. Verh. Math.-Kongr. 1 (1932), стр.249–257.

21. A matrix knot invariant. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 19 (1933), смтр. 272–275.

22. См. Veblen.

Allexandroff, P.

1. Zur Begründung der n-dimensionalen mengentheoretischen Topologie. Math. Ann. 94 (1925), стр. 296–308.

2. Simpliziale Approximationen in der allgemeinen Topologie. Math. Ann. 96 (1927), стр. 489–511.

3. Über kombinatorische Eigenschaften allgemeiner Kurven. Там же, стр. 512–554.

4. Über stetige Abbildungen kompakter Räime. Там же, стр. 555–571.

5. Über den allgemeinen Dimensionsbegriff und seine Beziehung zur elementaren geometrischen Anschauung. Math. Ann. 98 (1928), стр. 617–636.

6. Über die Dualität zwischen den Zusammenhangszahlen einer abgeschlossenen Menge und des zu ihr komplementären Raumes. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1927, стр. 323–329.

7. Une définition des nembres de Betti pour un ensemble fermé quuelconque. Comptes Rendus 184 (1927), стр. 317–319.

8. Surcla décomposition de l'espace par des ensemdles fermés. Comptes Rendus 184 (1927), стр. 425–428.

9. Zum allgemeinen Dimensionsproblem. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1928, стр. 25–44.

10. Untersuchungen über Gestalt und Lage beliebiger abgeschlossener Mengen. Ann. of Math. 30 (1928), стр. 101–187.

11. (и P. Urysohn). Mémoire sur les espaces topologiques compacts. Verh. Akad. Wetensch. Amsterdam. (1) 14 Nr. 1 (1929).

12. Sur la notion de dimension des ensembles fermés. Jouun. Math. pures appl. (9) 11 (1932), стр. 283–298.

13. Über einen Satz von Herrn Borsuk. Monatsh. Math. Phys. 40 (1933), стр. 127–128.

14. Über die Urysohnschen Konstanten. Fundam. Math. 20 (1933), стр. 140–150.

15. Dimensionstheorie, ein Beitrag zur Theorie der abgescglossenen Mengen. Math. Ann. 106 (1932), стр. 161–238.

16. Einfachste Grundbegriffe der Toplogie (Berlin 1932).

17. Local properties of closed sets. Ann. of math. 36 (1935), стр. 1–35.

18. (и Hopf) Toplogie I (Berlin 1935).

19. Diskrete Raume. Мат. сборник 2 (44) 1937, стр. 501–519.

20. Открытые счетнократные отображения DAH.

Antoine, L.

1. Sur l'homémorphie de deux figures et de leurs voisinages. Journ. Math. pures appl. (8) 4 (1921), стр. 221–325.

2. Sur les ensembles parfaits partout discontinus. Comptes Rendus. 173 (1921), стр. 284–285.

Artin, E.

1. Zur Isotopie zweidimensionaler Flächen im R_4. Abh. math. Hamburg. Univ. 4 (1925), стр. 174–177.

2. Theorie der Zöpfe. Там же, стр. 47–72.

3. Ср. также Klein [1], стр. 346.

Baer R.

1. Kurventypen auf Flächen. Journ. reine angew. Math. 156 (1927), стр. 231–246.

2. Isotopie von Kurven auf orientierbaren, geschlossenen Flächen und ihr Zusammenhang mit der topologischen Deformation der Flächen. Journ. reine angew. Math. 159 (1928), стр. 101–116.

Bankwitz, C.

1. Über die Torsionszahlen der zyklischen Überlagerungsräume des Knotenaussenraumes. Ann. of Math. 31 (1930), стр. 131.

2. Über die Fundamentalgruppe des inversen Knotens und des gerichteten Knotens. Там же, стр. 129.

3. Über die Torsionzahlen der alternierenden Knoten. Math. Ann. 103 (1930), стр. 145–162.

Bergmann, G.

1. Zwei Bemerkugen zur abstrakten und kombinatorischen Topologie. Monatsh. f. Math. 38 (1931), стр. 245–256.

2. Zur algebraisch-axiomatischen Begründung der Topologie. Math. Ztschr. 35 (1932), стр. 502–511.

Betti, E.

1.Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni. Ann. Mat. pura appl. (2) 4 (1871), стр. 140–158.

Bilz E.

1. Beitrag zu den Grundlagen der kombinatorischen Analysis Situs. Math. Ztschr. 18 (1923), стр. 1–41.

Birkhoff, G. D.

1. Proof of Poincaré's geometric theorem. Trans. Am. Math. Soc. 14 (1913), стр. 14–22.

2.Dynamical Systems with two degrees of freedom. Am. Math. Soc. 18 (1917), стр. 199–300.

3. Une generalisation á n dimensions du dernier théoréme de gémétrie de Poincaré Comptes Rendus 192 (1921), стр. 196–198.

4. (и O. D. Kellogg). Invariant points in function space. Trans. Amer. Math. Soc. 23 (1922), стр. 96–115.

5. Dynamical Systems. Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. IX (New York, 1927).

6. (и P. A. Smith). Structure Analysis of surface transformations. Journ. Math. pures appl. (9) 7 (1928), стр. 345–379.

7. Einige Probleme der Dynamik. Jhber. Deutsch. Math.-Vereinig. 38 (1929), стр. 1–16.

Borsuk, K.

1. Über Schnitte der n-dimensionalen euklidischen Räume. Math. Ann. 106 (1932), стр. 239–248.

2. Über die Abbildungen der metrischen kompakten Räume auf die Kreslinie Fundam. Math. 20 (1933), стр. 224–231.

3.Drei Sätze über die n-dimensionalen euklidischen Sphäre. Там же, стр. 177–190.

Boy, W.

1.Üder die Curvatura integra und die Topologie gaschlossener Flächen. Math. Ann. 57 (1903), стр. 151–184.

Brauner, K.

1. Zur Geometrie der Funktionen zweier komplexen Veränderlichen. II. Das Verhalten der Funktionen in der Umgebung ihrer Verzweigungsstellen Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 6 (1928), стр. 1–55.

Briggs, G. B.

1. См. Alexander.

Brouwer, L. E. J.

1. On one-one continuous transformations of surfaces into themselves. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 11 (1908), стр. 788–798; 12 (1909), стр. 286–297; 13 (1910), стр. 767–777; 14 (1911), стр. 300–310; 15 (1912), стр. 352–360; 22 (1920), стр. 811–814; 23 (1920), стр. 232–234.

2. On cntinuous vector distributions on surface. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 11 (1908), стр. 850–858; 12 (1909), стр. 716–734; 13 (1910), стр. 171–186.

3. Zur Analysis situs. Math. Ann. 68 (1910), стр. 422–434.

4. Beweis des Jordanscgen Kurvensatzes. Math. Ann. 69 (1910), стр. 169–175.

5. Über eindeutige stetige Transformationen von Flächen in sich. Там же, стр. 176–180.

6. Beweis der invarianz der Dimensionenzhl. Math. Ann. 70 (1911), стр. 161–165.

7. Sur le théoréme de M. Jordan dans l'espace á n dimensions. Comptes Rendus 153 (1911), стр. 542–544.

8. Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. 71 (1912), стр. 97–115 и стр. 598.

9. On looping coefficients. Akad. Wetersch. Amsterdam, Proc. 15 (1912), стр. 113–122.

10. Über Jordansche Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. 71 (1912), стр. 320–327.

11. Beweis des Jordanschen Satzes für den n-dimensionalen Raum. Math. Ann. 71 (1912), стр. 314–319.

12. Beweis der Invarianz des n-dimensionalen Gebietes. Math. Ann. 71 (1912), стр. 305–313 и 72 (1912), стр. 55–56.

13. Über den natürlichen Dimensionsbegriff. Jahrb. f. Math. 142 (1913), стр. 146–152; Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 26 (1923), стр. 795–800; Math. Ztschr. 21 (1924), стр. 312–314.

14. Aufzählung der Abbildungsklassen endlichfach zusammenhängender Flächen. Math. Ann. 82 (1921), стр. 280–286.

15. Über die Minimalzahl der Fixpunkte bei den Klassen von eindeutigen stetigen Transformations der Ringflächen. Math. Ann. 82 (1921), стр. 94–96.

16. On transformations of Projektive Spaces. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 29 (1926), стр. 864–865.

Brown, A. B.

1. An extension of the Alexander duality theorem. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 16 (1930), стр. 407–408.

2. On the join of two complexes. Bull. Amer. Soc. 37 (1931), стр. 417–420.

3. Group invariants and torsion coefficients. Ann. of Math. (2) 33 (1932), стр. 373–376.

4. (см. Koopman).

5. Topological invariance of subcomplexes of singularities. Amer. Journ. Math. 54 (1932), стр. 117–122.

Burau, W.

1. Über Zopfinvarianten, Abh. math. Sem. Hamburg. Univ. 9 (1932), стр. 117–124.

2. Kennzeichnung der Schlauchknoten. Там же, стр. 125–133.

Carathéodory, C.

1. Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete. Math. Ann. 73 (1913), стр. 323–370.
2. Reelle Funktionen. 2 издю (Leipzig 1927).

Čech, E.

1. Trois théorémes sur l'homologie. Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk 144 (1931), стр. 1–21.
2. Théorie générale de l'homogie dans un espace quelconque. Fundam. math. 19 (1932), стр. 149–183.
3. Eine Verallgemeinerung des Jordan – Brouwerschen Satzes. Erg. math. Kolloqu. Тетрадь 5 (1933), стр. 29–31.
4. Théorie générale des variétés et de leurs théorémes de dualité. Ann. of Math. (2) (1933), стр. 621–730.
5. Introduction á la théorie de l'homologie, Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk No. 184 (1933), стр. 1–34 (На чешском языке с французским резюме, стр. 35–36).

Chuard, J.

1. Questions d'analysis situs. Rend. Circ. mat. Palermo 46 (1922), стр. 185–224.

Cohen, L. W.

1. См. Alexander.

Cohn – Vossen.

1. См. D. Hilbert.

Dehn, M.

1. (и P. Heegaard). Analysis Situs. Enz. Math. Wiss. III AB 3 (Leipzig 1907).
2. Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes Math. Ann. 69 (1910), стр. 137–168.
3. Transformation der Kurven auf zweiseitigen Flächen. Math. Ann. 71 (1912), стр. 413–421.
4. Über unendliche diskontinuierliche Gruppen. Math. Ann. 71 (1912), стр. 116–144.
5. Die beiden Kleedlattschlingen Math. Ann. 75 (1914), стр. 402–413.

Dyck, W.

1. Beiträge zur Analysis. Situs. I. Math. Ann. 32 (1888), стр. 457–512; II. Math.. Ann. 37 (1890), стр. 273–316.
2. Beiträge zur Analysis. Situs. Ber. Sächs. Akad. Wiss, 37 (1885), стр. 314–325 (I); 38 (1886), стр. 53–69 (II); 39 (1887), стр. 40–52 (III).

Ehresmann, C.

1. Sur la topologie de certaines variétés algébriques. Comptes Rendus 196 (1933), стр. 152–154.

Errera, A.

1. L'origine et les problémes le l'analysis situs. Revue de l'Univ. de Bruxelles 7–8 (1921), стр. 1–15.

2. Sur les polyédres régulies de l'analysis situs. Mém. Acad. Belgique (2) 7 (1922).

Feigl, G.

1. Fixpunktsätze für spezielle n-dimensionale Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. 98 (1927), стр. 355-398.

2. Geschichtliche Entwicklung der Topologie. Jhber. Deutsch. Math. — Vereinig. 37 (1928), стр. 273–286.

Fenchel, W.

1. Elememtare Beweise und Anwendungen einiger Fixpunktsätze. Mat. Tidsskr BH. 3/4 (1932), стр. 66–87.

Fischer, A.

1. Gruppen und Verkettungen. Comment. math. helv. 2 (1930), стр. 253–268.

Flexner, W. W.

1. (и S. Lefschetz). On the duality theorem for the Betti numbers of topological manifolds. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 16 (1930), стр. 530–533.

2. The Poincaré duality theorem for topological manifolds. Ann. of Math. II. см. 32 (1931), стр. 539–548.

3. On topological manifolds. Ann. of Math. (2) 32 (1931), стр. 393–406.

Frankl, F.

1. Topologische Beziehungen in sich kompakter Teilmengen euklidischer Räume zu ihren Komplementen. S.-B. Akad. Wiss. Wien 136 (1927), стр. 689–699.

2. (и L. Ponrjagin). Ein Knotensatz mit Anwendung auf die Dimensions–theorie. Math. Ann. 102 (1930), стр. 785–789.

3. Zur Topologie des dredimensionalen Raumes. Monattsch. f. Math. Phys. 38 (1931), стр. 357–364.

Furch, R.

1. Orientierung von Hyperflächen im projektiven Raum. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 1 (1922), стр. 210–212.

2. Zur Grundlegung der kombinatorischen Topologie. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 3 (1924), стр. 69–88.

3. Zur kombinatorischen Topologie des dreidimensionalen Raumes. Там же, стр. 237–245.

4. Über den Schnitt zweir Sphären im R^3. Math. Ztschr. 28 (1928), стр. 556–566.

5. Plyedrale Gebilde verschiedener Metrik. Math. Ztschr. 32 (1930), стр. 512–544.

Gawehn, J.

1. Über unberandete zweidimensionale Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. 98 (1927), стр. 321–354.

Gieseking, H.

1. Analytische Untersucgungen über topologische Gruppen (Hilchenbach 1912).

Goeritz, L.

1. Die Heegaard-Diagramme des Torus. Abh. math. Hamdurg. Univ. 9 (1932), стр. 187–188.
2. Knoten und quadratische Formen. Math. Ztsche. 36 (1933), стр. 647–654.
3. Normalformen der Systeme einfacher Kurven auf orientierbaren Flächen. Abh. math. Hamburg, Univ. 9 (1933), стр. 223–243.
4. Die Abbildungen der Brezelfläche und der Vollbrezel vom Geschlecht 2. Там же, стр. 244–259.

Hadamard, J.

1. La géometrie de situation et son role en mathématiques. Rev. du mois. 8 (1909), стр. 38–60.
2. Sur quelques applications de l'indice de Kronecker. Appendice á J. Tannery, Théorie des Fonctions (Paris 1910).

Hausdorff, F.

1. Grundzüge der Mengenlehre (Leipzig 1914).
2. Та же книга, 2 изд. (Berlin 1927).
3. Гаусдорф, Теория множеств, Москва (1937) (русский перевод предыд. книги).

Heegaard, P.

1. См. Dehn.
2. Sur l'Analysis Situs. Bull. Soc. Math. France. 44 (1916), стр. 161–242.

Heesch, H.

1. Über topologisch reguläre Teilungen geschlossener Flächen. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen I. N. 27 (1932), стр. 268–273.

Hilbert, D.

1. (и S. Cogn.–Vossen). Anschauliche Geometrie (Berlin 1932). Имеется русский перевод: Д. Гильберт и С. Кон–Фоссен, Наглядная геометрия (Москва 1936).

Hopf, H.

1. Die Curvatura integra Clifford–Kleinscher Raumformen. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1925, стр. 131–141.
2. Zum Clifford–Kleinscher Raumformen. Math. Ann. 95 (1925), стр. 313–339.
3. Über die Curvatura integra geschlossenen Hyperflächen. Там же, стр. 340–367.
4. Abbildungsklassen n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. 96 (1927), стр. 209–224.
5. Vektorfelder in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. Там же, стр. 225–250.

6. Über Mindestzahlen von Fizpunkten. Math. Ztschr. 26 (1927), стр. 726–774.

7. A new proof of the Lefschetz formula en invariant points. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 14 (1928), стр.149–153.

8. On some properties of one-valued transformations. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 14 (1928), стр. 206–214.

9. Eine Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1928, стр. 127–136.

10. Zur Topologie der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten. I. Neue Darstellung der Theorie des Abbildungsgrades für ropologische Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. 100 (1928), стр. 579–608; II. Rlasseninvarianten von Abbildungen. Math. Ann. 102 (1929), стр. 562–623.

11. Über die algebtasche Anzahl von Fixpunkten. Math. Ztschr. 29 (1929), стр. 493–524.

12. Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten. Journ. reine angew. Math. 163 (1930), стр. 71–88.

13. Über wesentliche und unwesentliche Abbildung von Komplexen. Москва. Математический сборник (1930), стр. 53–62.

14. Beiträge zur Klassifizierung der Flächenabbildungen. Journ. reine angew. Math. 165 (1931), стр. 225–236.

15. Géometrie infinitesimale et Topologie. L'Enseignement math. 30 (1931), стр. 233–240.

16. Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche. Math. Ann. 104 (1931), стр. 637–665.

17. (и W. Rinow). Über den Begriff der vollständigen differentialdeometrischen Fläche. Comment. math. helv. 3 (1931), стр. 209–225.

18. Differentialdeometrie und topolofische Gestalt. Jhber. Deutsch. Math.–Vereinig. 41 (1932), стр. 209–229.

19. Die Klassen der Abbildungen der n-dimensionalen Polyeder auf die n-dimensionale Sphäre. Comment. math. helv. 5 (1933), стр. 39–54.

20. (и Erika Pannwitz). Über stetige Deformationen von Komplexen in sich. Math. Ann. 108 (1933), стр. 433–465.

Hotelling, H.

1. Threedimensional manifolds of states of motions. Trans. Amer. Math. Soc. 27 (1925), стр. 329–344.

2. Multiple-sheeted spaces and manifolds of states of motions. Trans. Amer. Math. Soc. 28 (1926), стр. 479–490.

Johansson, J.

1. Topologische Untersuchungen über unverzweigte Überlagerungsflächen. Skr. norske Vid. Akad. Oslo Math.-naturv. Kl. Nr. 15 (1931), стр. 1–69.

2. Zu den zweidimensionalen Homotopiegruppen. Norsk. Mat. Forenings Skr., (2) Nr. 1/12 (1933), стр. 55–59.

Kähler, E.

1. Über die Verzweigung einer algebraischen Funktion zweier Veränderlichen in der Umgebung einer singulären Stelle. Math. Ztschr. 29 (1929), стр. 188–204.

Kampen, E. R. van.

1. Eine Verallgemeinerung des Alexanderschen Dualitätssatzses. Akad. Wetensch. Amsterdam. Proc. 31 (1928), стр. 899–905.

2. Zur Isotopie zweidimensionaler Flächen im R_4. Abhandl. Math. Sem. Hamdurg. Univ. 6 (1928), стр. 216.

3. Die komdinatorische Topologie und die Dualitätssätze. (Den Haag 1929).

4. Komplexe in euklidischen Räumen. Abh. math. Sem. Hamburg. Univ. 9 (1932), стр. 72–78 и стр. 152–153.

5. Some remarks on the join of two complexes and on invariant subsets of a complex. Amer. J. Math. 54 (1932), стр. 543–550.

6. On the Fundamental Group of an aigebraic curve. Amer. Journ. Math. 55 (1933), стр. 255–260.

7. On the connection between the fundamental groups of some related spaces. Там же, стр. 261–267.

8. On somme lemmas in the theory of groups. Там же, стр. 268–273.

Kellogg, O. D.

1. См. Birkhoff.

Kerékjártó, B.

1. Beweis des Jordanschern Kurvensatzes. Ber. Ungar. Akad. Wiss. 38 (1919), стр. 194–198.

2. Über die Brouwerschen Fixpunktsätze. Math. Ann. 80 (1919), стр. 29–32.

3. Über Transformationen des ebenen Kreisringes. Там же, стр. 33–35.

4. Zur Gebietsinvarianz. Ber. Ung. Akad. Wiss. 39 (1921), стр. 220–221.

5. Kurvenscharen auf Flächen. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1922), стр. 71–79.

6. Vorresungen über Topologie (Berlin 1923).

Kiang, Tsai – Han.

1. On the groups of orientable two-manifolds Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 17 (1931), стр. 142–144.

Klein, F.

1. Höhere Geometrie (Berlin 1926). (Подготавливается русский перевод).

Kneser, H.

1. Kurvenscharen auf geschlossenen Flächen. Jhber. Deutsch. Math.-Vereinig 30 (1921), стр.83–85.

2. Reguläre Kurvenscharen auf den Ringflächen. Math. Ann. 91 (1924), стр. 135–154.

3. Ein topologischer Zerlegungsstz. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 27 (1924), стр. 601–616.

4. Die Topologie der Mannigfaltigkeiten. Jhber. Deutsch. Math.-Vereinig. 34 (1925), стр. 1–14.

5. Eine Bemerkung über dreidimensionale Mannigfaltigkeuten, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1925, стр. 128–130.

6. Die Deformationssätze der einfachzusammenhägenden Flächen. Math. Ztschr. 25 (1926), стр. 362–372.

7. Glätting von Flächenabbildungen Math. Ann. 100 (1928), стр. 609–617.
8. Geschlossene Flächen in dreidimensionale Mannigfaltigkeiten. Jhber. Deutsch. Math.-Vereinig. 38 (1929), стр. 248–260.
9. Die kleinste Bedeckungszahl innerhalb einer Klasse von Flächenabbildungen. Math. Ann. 103 (1930), стр. 347–358.

Koebe, P.

1. Riemannsche Mannigfaltgkeiten und nichteuklidische Raumformen. I. S. Ber. Preuss. Akad. Wiss. (1927), стр. 164–196; II. (1928), стр. 345–348; III. (1928), стр. 385–442; IV. (1929), стр. 414–457; V. (1930), стр. 304–364; VI. (1930), стр. 505–541; VII. (1931), стр. 249–284.

Koopman, B. O.

1. (и Brown, A. B.). On the covering of analytic loci by complexes. Trans. Amer. Math. Soc. 34 (1932), стр. 231–251.

Kreines, M.

1. Zur Konstruktion der Poincaré – Räume. Rend. Cicr. mat. Palermo 56 (1932), стр. 277–280.

Kronecker, L.

1. Über Systeme von Funktionen mehrerer Variabeln. Monatsberichte Berl. Akad. (1969), стр. 159–193 и стр. 688–698.

Künneth, H.

1. Zur Bestimmung der Fundamentalgruppe einer Produktmannigfaltigkeit. S.-Ber. physik.-med. Soz. Erlangen 54/55 (1922/23), стр. 190–196.
2. Über die Bettischen Zahlen einer Produktmennigfaltigkeit. Math. Ann. 90 (1923), стр. 65–85.
3. Über die Torsionszahlen von Produktmennigfaltigkeiten. Math. Ann. 91 (1924), стр. 125–134.

Kuratowski, C.

1. Topologie I. Espaces métrisables, espaces complets (Warschau 1933).

Landsberg, G.

1. Deträge zur Topologie geschlossener Kurven mit Knotenpunkten und zur Kroneckerschen Charakteristikentheorie. Math. Ann. 70 (1911), стр. 563–579.

Lefschetz, S.

1. Algebraic Surfaces, their cycles and integrals. Ann. of Math. 21 (1920), стр. 225–258.
2. On certain numerical invariants of algebraic varieties, with application to Abelian varieties. Trans. Amer. Math. Soc 22 (1921), стр. 327–482.
3. Continuous transformations of manifolds. Proc. Nat. Sci. USA. 9 (1923), стр. 90–93.
4. L'Analysis Situs et le Géométrie algábrique (Paris, 1924).
5. Intersections of complexes and manifolds. Proc. Nat. Sci. USA. 11 (1925), стр. 287–289.

6. Intersections and transformations of complexes and manifolds. Trans. Amer. Math. Soc. 28 (1926), стр. 1–49.

7. Manifolds with a boundary and their transformations. Trans. Amer. Math. Soc. 29 (1927), стр. 429–462.

8. The residual set of a complex on a manifold and related questions. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 13 (1927), стр. 614–622; стр. 805–807.

9. Closed points sets on a manifold. Ann. of Math. 29 (1928), стр. 232–254.

10. Duality relation in topologiy. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 15 (1929), стр. 367–369.

11. On transformations of closed sets. Ann. of Math. (2) 32 (1930), стр. 273–282.

12. Topology (New York 1930).

13. On compact spaces. Ann. of Math. II 32 (1931), стр. 521–538.

14. On singular chains and cycles. Bull. Amer. Math. Soc. 39 (1933), стр. 124–129.

15. On generalized manifolds. Amer. Journ. Math. 55 (1933), стр. 469–504.

16. См. Flexner.

Lennes, N. J.

1. Theorems on the simple finite polygon and polyhedron. Amer. Journ. Math. 33 (1911), стр. 37–62.

2. Curves and surfaces in analysis situs. Bull. Amer. Math. Soc. (2) 17 (1911), стр. 525.

Lense, J.

1. Über die Indikatrix der projektiven Räume. Ihber. Deutsch. Math.-Vereinig. 34 (1926), стр. 243–244.

Levi, F.

1. Geometrische Konfigurationen (Leipxig 1929).

Listing, J. B.

Vorstudien zur Topologie. Gött. Studien 1847, стр. 811–875.

2. Der Census räumlicher Komplexe. Abh. FGes. Wiss. Göttingen 10 (1861), стр. 352–358.

Löbell, F

1. Über die geodätischen Linden der Clifford – Kleinschen Flächen. Math. Ztschr. 30 (1929), стр. 572–607.

2. Fin Satz úber die eindeutigen Bewegungen Cliford- Kleinscher Flächen in sich. Journ. reine. angew. Math. 162 (1930), стр. 114–125.

3. Zur Frage der Struktur der geschlossenen geodätischen Linien in den offenen Clifford – Kleinschen Flächen. mit positiner Charakteristik. Journ. reine angew. Math. 162 (1930), стр. 125–131.

4. Beispiele geschlossener dreidimensionaler Clifford – Kleinscher Räume negativer Krümmung. Ber. Sächs. Akad. Wiss. 83 (1931), стр. 168–174.

Mayer, W.

1. Über abstrakte Topologie, Monatsh. Math. Phys. 36 (1929), стр. 1–42 и стр. 219 до 258.

Menger, K.

1. Dimensionstheorie (Leipzig 1928).

Morse, H. M.

1. Recurrent geodesis on a surface of negative curvature. Trans. Amer. Math. Soc. 22 (1921), стр. 84–100.

2. A fundamental class of geodesics on any closed surface of genus greater than one. Trans. Amer. Math. Soc. 26 (1924), стр. 25–60.

3. Singular points of vector fields under general boundary conditions. Amer. Journ. Math. 51 (1929), стр. 165–178.

Newman, M. H. A.

1. On the foundations of Comdinatory Analysis Situs. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 29 (1926), стр. 611–641; 30 (1927), стр. 670–673.

2. A property of 2-dimensional elements. Akad. Wetensch. Amsterdam. Proc. 29 (1926), стр. 1401–1405.

3. On the superposition of n-dimensional menifolds. Journ. London. Math. Soc. 2 (1927), стр. 56–64.

4. Topological equivalence of complexes. Math. Ann. 99 (1928), стр. 399–412.

5. Combinatory topology of convex regions. Proc. Nat. Sci. USA. 16 (1930), стр. 240–242.

6. Combinatory topology and Euclidean n-space. Proc. London. Math. Soc. (2) 30 (1930), стр. 339–346.

7. Intersection-complexes. I. Combinatory theory. Proc. Camvridge philos. Soc. 27 (1931), стр. 491–501.

8. A theorem in combinatory topology. Journ. Lond. Math. Soc. 6 (1931), стр. 186–192.

9. A theorem on periodix transformations of space. Quart. Journ. Math. Oxford. ser. 2 (1931), стр.1–8.

10. On the products and in topology. Journ. London Math. Soc. 7 (1932), стр. 143–147.

Neilsen, J.

1. Die Isomorphismen der allgemeinen unendichen Groppe mit zwei Erzeugenden. Math. Ann. 78 (1918), стр. 385–397.

2. Über fixpunktfreie topologische Abbildunegen geschlossener Flächen. Math. Ann. 81 (1920), стр. 94–96.

3. Über die Minimalzahl der Fixpunkte bei den Abbildungstypen der Ringflächen. Math. Ann. 82 (1920), стр. 83–93.

4. Über topologische Abblidungen geschlossener Flächen. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 3 (1924), стр. 246–260.

5. Zur Topologie der geschlossenen Flächen. Vorträge 6. Math.-Kongr. Kopenhagen (1925).

6. Untersuchungen zur Ropologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen I. Acta math. 50 (1927), стр. 189–358; II. 53 (1929), стр. 1–76; III. 58 (1932), стр. 87–167.

7. Über reguläre Reimannsche Flächen (dänisch). Mat. Tidsskr. BH. 1 (1932), стр. 1–18.

Nöbeling, G.

1. Die neuesten Ergebnisse der Dinamensionstheorie. Jhber. Deutscher Math.-Vereinig. 41 (1931), стр. 1–17.

Pannwitz, E.

1. Fine elementargeometrische Eigenschaft von Verschlingungen und Knoten. Math. Ann. 108 (1933), стр. 629–672.
2. См. hopf.

Poincaré, H.

1. Sur les courbes définies par une éqation différentielle. Journ. Math. pures appl. (3) 7 (1881), стр. 375–424; (3) (1882), стр. 251–296; (4) 1 (1885), стр. 167 до 244; (4) (1886), стр. 151–217.
2. Analysis situs. Journ. Ecole polytechn. (2) 1 (1895), стр. 1–121.
3. 1^r Complément á l'analysis xitus. Rend. circ, Palermo 13 (1899), стр. 285–343.
4. 2^d Complément. Proc. London Math. Soc. 32 (1900), стр. 277–308.
5. 3^e Complément. Bull. Soc. Math. France 30 (1902), стр. 49–70.
6. 4^e Complément. Journ. Math. pures appl. (5) 8 (1902), стр. 169–214.
7. 5^e Complément. Rend. circ. mat. Palermo 18 (1904), стр. 45–110.
8. Sur un théoréme de Géométrie. Rend. circ. mat. Palermo 33 (1912), стр. 375–407.

Pontrjagin, L.

1. Zum Alexanderschen Dualitätssatz. Naxhr. Ges. Wiss. Cöttingen (1927), стр. 315 до 322 и стр. 446–456.
2. Sur une hypothése fondamentale de la théorie de la dimension. Comptes Rendus 190 (1930), стр. 1105–1107.
3. Über den algebraischen Inhalt topologischer Dualitätssätze. Math. Ann. 105 (1931), стр. 165–205.
4. См. Frankl.

Radó, T.

1. Über den Begriff der Reimannschen Fläche. Acta. Litt. Sci. Szeged, 2 (1925), стр. 101–121.

Reidemeister, K.

1. Knoten und Gruppen. Abh. Semin. Hamburg. Univ. 5 (1926), стр. 7–23.
2. Elementare Begründung der Knotentheorie. Ebd. Там же, стр. 24–32.
3. Über Knotengruppen. Abd. math. Semin. Hamburg. Univ. 6 (1928), стр. 56–64.
4. Fundamentalgruppe und Überlagerungsräume. Nachr. Wiss. Göttingen (1928), стр. 69–76.
5. Knoten und Verkettungen. Math. Ztschr. 29 (1929), стр. 713–729.
6. Knotentheorie (Berlin 1932).
7. Einführung in die komdinatorische Topologie (Braunschweig 1932).
8. Zur dreidimensionalen Topologie. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 9 (1933), стр. 189–194.

9. Heegaardiagramme und Invarienten von Mannigfaltigkeiten. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 10 (1934).

10. Homotopiegruppen von Komplexen. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. (1934).

Rey Pastor, J.

1. Sulla topologia dei dimini di uno spazio ad n dimensioni. Atti. Accad. naz. Lincei, Rend. VI s. 15 (1932), стр. 524–527.

Rham, G. de.

1. Sur l'analysis situs des variétés á n dimensions. Journ. math. pures appl. IX 10 (1931), стр. 115–120.

2. Sur la théorie des intersections et les integrales multiples. Comment. math. helv. 4 (1932), стр. 151–154.

Reimann, B.

1. Fragment aus der Analysis Situs. Werke 2 изд., стр. 474.

2. Abelsche Funktionen § 19. Werke стр. 84.

Rinow, W.

1. См. Hopf.

Rubarz, J.

1. Über grei Fragen der abstrakten Topologie. Monatsh. Math. Phys. 38 (1931), стр. 215–244.

Scherrer, W.

1. Geometrische Deutung des Gausschen Verschlingungsintegrals. Comment. math. helv. 5 (1933), стр. 25–27.

Schilling, F.

1. Projektive und nichteuklidische Geometrie (Leipzig 1931).

Schreier, O.

1. Über die Gruppen $A^aB^b = 1$. Abh. math. Hamburg. Univ. 3 (1924), стр. 167–169.

2. Die Verwandtschaft stetiger Gruppen im Grossen. Abh. mat. Semin. Hamburg. Univ. 5 (1927), стр. 233–244.

Seifert, H.

1. Konstruktion dreidimensionaler geschlossener Räume. Ber. Sächs. Akad. Wiss. 83 (1931), стр. 26–66.

2. Homologiegruppen berandeter dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten. Math. Ztschr. 35 (1932), стр. 609–611.

3. Topologie dreidimensionaler gefaserter Räume. Acta math. 60 (1932), стр. 147–238.

4. Verschlingungsinvarianten. Sitz. Ber. Preuss. Akad. Wiss. 16 (1933), стр. 811–826.

5. См. Threlfall.

6. См. Weber.

Severi, F.

1. Über die Grundlagen der algebraischen Geometrie. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 9 (1933), стр. 335–364.

2. Sulla topologia e sui fondamenti dell'analisi generale. Rend. Semin. mat. Roma (2) 7 (1931), стр. 5–37.

Singer, C.

1. Three-dimansional manifolds and their Heegaard diagrams. Trans. Amer. Math. Soc. 35 (1933), стр. 88–111.

Smith, P. A.

1. См. Birkhoff.

Sperner, E.

1. Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und Gebietes. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 6 (1928), стр. 265–272.

2. Über die fixpunltfreien Abbildungen der Ebene (Hamburg. math. Einzelschr. Тетрадь 14, Leipzig 1933).

Steinitz, E.

1. Beiträge zur Analysis situs. Sitz.-Ber. Berl. Math. Ges. 7 (1908), стр. 29–49.

2. Polyeder und Rau,einreilungen. Encykl. Math. Wiss. III AB 12 , стр. 139 (Leipzig 1916).

Tait, P. G.

1. On Knots. Trans. Roy. Soc. Edinburgh 28 (1879), стр. 145–190; 32 (1887), стр. 327 до 339 и 493–506.

Threlfall, W.

1. Gruppenbilder. Abh. math.-phys. Kl. Sächs. Akad. Wiss. 41 Nr. 6 (1932), стр. 1–59.

2. (и H. Seifert). Topolgische Untersuchung der Diskontinuitätsbereiche endicher Bewegungsgruppen des dreidimensionalen sphärischen Raumes. I. Math. Ann. 104 (1930), стр. 1–70. II. Math. Ann. 107 (1932), стр. 543–586.

3. Räume aus Linienelementen. Jhber. Deutsch. Math.-Vereinig. 42 (1932), стр. 88–110.

Tietze, H.

1. Über die topologischen Invarianten mahrdimensionaler Mannigaltigkeiten. Monatsh. Math. Phys. 19 (1908), стр. 1–118.

2. Sur les representations continues des surfaces sur alles-memes. Comptes Rendus 157 (1913), стр. 509–512.

3. Über stetige Abbildungen einer Quadratfläche auf sich selbst. Rend. circ. mat. Palermo 38 (1914), стр. 247–304.

4. Über den Richtungssinn und seine Verallgemeinerung. Jhber. Deutsch. Math.-Vereinig. 29 (1920), стр. 95–123.

5. Über Analysis Situs. Abh. math. Hamburg. Univ. 2 (1923), стр. 37–68.

6. Zur Topologie berandeter Mannigfaltigleiten. Monatsh. Math. Phys. 35 (1928), стр. 25–44.

7. Beiträge zur allhemeinen Topologie. I. Axiome für verschiedene Fassungen des Umgebungsbegriffs. Math. Ann. 88 (1923), стр. 290–312. II. Über die Einführung uneigentlicher Elemente. Math. Ann. 91 (1924), стр. 210–224. III. Über die Komponenten offener Mengen. Monatsh. Math. Phys. 33 (1923), стр. 15–17.

8. (и L. Vietoris). Beziehungen zwischen den verschiedenen Zweigen der Topologie. Encykl. Math. Wiss. III AB 13 (Leipzig 1930).

Tucker, A. W.

1. On combinatorial topology. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 18 (1932), стр. 86–89.

2. Modular homology charakters. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 18 (1932), стр. 467–471.

3. An abstract approach to manifolds. Ann. of Math. 34 (1933), стр. 191–243.

Ursell, H. D.

1. Intersections of complexes. Journ. London Math. Soc. 3 (1928), стр. 37–48.

Urysohn, P.

1. См. Alexandroff.

Veblen, O.

1. Theory of plane curves in non-metrical analysis situs. Trans. Amer. Math. Soc. 6 (1905), стр. 83–98.

2. (и J. W. Alexander). Manifolds of dimensions. Ann. of Math. 14 (1913), стр. 163–178.

3. On the deformation of an n-cell. Proc. Acad. Sci. USA. 3 (1917), стр. 654–656.

4. The intersection numbers. Trans. Amer. Math. Soc. 25 (1923), стр. 540–550.

5. Analysis situs. 2 изд. Amer. Math. Soc. Colloquium publ. 5 Pt. II. New York Amer. Math. Soc. (1931).

Vietoris, L.

1. Über stetige Abbildungen einer Kugelfläche. Akad. Wetensch. Amsterdam. Proc. 29 (1926), стр. 443–453.

2. Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen. Math. Ann. 97 (1927), стр. 454–472.

3. Über die Symmetrie der Zummanhangszalen kombinatorischer Mannigfaltigkeiten. Monatsch. f. Math. 35 (1928), стр. 165–174.

4. Zum höheren Zusammenhang der kompakten Räume. Math. Ann. 101 (1929), стр. 219–225.

5. Erzeugung der regulären Unterteilung von simplizialen Komplexen durch. wiederholte Zweiteilung. Monatsh. f. Math. u. Phys. 37 (1930), стр. 97–102.

6. Über die Homologiegruppen der Vereinigung zweier Komplexe. Monatsh. Math. Phys. 37 (1930), стр. 159–162.

7. См. Tietze.

8. Über den höheren Zusammenhang von Vereinigungsmengen und Durchschnitten. Fundam. math. 19 (1932), стр. 265–273.

Waerden, B. L. van der.

1. Kombinatorische Topologie. Jhber. Deutsche. Jhber. Deutsch. Math.–Vereinig. 39 (1930), стр. 121 до 139.

2. Topologische Begründung das Kalkuls der abzählenden Geometrie. Math. Ann. 102 (1929), стр. 337–362.

3. Zur angebraischen Heometrie. IV. Die Homologiezahlen der Quadriken und die Formeln von Halphen der Liniengeometrie. Math. Ann. 109 (1933), стр. 7–12.

Weber, C.

1. (и H. Seifert). Die beiden Dodekaederräume. Math. Ztschr. 37 (1933), стр. 237–253.

Weyl, H.

1. Über die Idee der Riemannschen Fläche (Leipzig 1913).

2. Análysis Situs Combinatorio. Rev. mat. hisp-amer. 5 (1923), стр. 209–218; 241 до 248; 273–279; 6 (1924), стр. 33–41.

Wilder, R. L.

1. Point sets in three and higher dimensions and their investigation by means of a unified analysis situs. Bull. Amer. Math. Soc. 38 (1932), стр. 649–692.

Wilson, W. A.

1. Representation of a simplicial manifold on a locally simplicial manifold Akad. Wetensch. Amsterdam. Proc. 29 (1926), стр. 1129–1133.

2. Representation of manifolds. Math. Ann. 100 (1928), стр. 552–578.

Wirtinger, W.

1. Über die Verzweigungen bei Funktionen zwei Veränderlichen. Jhber. Deutsch. Math.-Vereinig. 14 (1905), стр. 517.

Zariski, O.

1. On the topology of algebroid singularities. Amer. Journ. Math. 54 (1932), стр. 453–465.

Предметный указатель

$A_{\text{п}}$ — знак аппроксимации 326

Абелева группа § 86; аддитивная запись 387
Автоморфизм фундаментальной группы при перемене начальной точки 201
— фундаментальной группы одномерной группы Бетти тора; упр. 1. 131
— — — при деформации 227
— — — при перемене поверхности 405
Аксиомы окрестного пространства 33
Алгебраическая геометрия 412
Алгебраическое значение нульмерного цикла 91
Александера закон двойственности 413
Альтернированая сумма чисел Бетти 116
Амфидромная кривая (28), 405
Амфидромные кривые 407
Аппроксимация (= приближение) симплициальная IV гл., в частности 138
— барицентрического подразделения 147
— границы 146
— одновременная 329
— особых комплексов 145
Аппроксимирующая вершина 142
Асимметрия ориентированного многообразия (48), 357
Афинное (=линейное) отображение симплекса 56

База гомологий k-мерная 90, 97, 106
— — дуальная 322
— — по модулю 2 191
— — поверхности 191
— слабых гомологий дуального клеточного разбиения 332
База решетки 388
— L^k всех k-мерных комплексов 100
Барицентрические координаты 53
Барицентрическое подразделение звездного комплекса 292
— — ориентированного n-мерного симплекса 133
— — особого алгебраического комплекса 140
— — полиэдра 264
— — симплициального комплекса 68
Бесконечные поверхности (4), 24
Бесконечный комплекс 66
— — его группы Бетти 92
— — его топологическая инвариантность 66
— — как евклидова плоскость 42
— — как открытое подмножество евклидова пространства 79
Бинарная группа икосаэдра (52), 279
Бутылка Клейна 23

Веблена обобщение закона двойственности Пуанкаре 323
Векторное поле на сфере 372
— — непрерывное 416
Верхний индекс (=индекс размерности) 60, 68
Вершина многогранника 264
— полигона 170
— полиэдральной поверхности 171
— симплекс 52
Взаимно однозначное отображение 384
Винтовой узел (31), 230
Вложение неориентируемой поверхности 399
Внутренние топологические свойства 12
Внутренняя точка выпуклой области 55
— — ее топологическая инвариантность 40
— — ограниченного псевдомногообразия 120
— — подмножества 36
— — топологического симплекса 59
Волокнистое пространство 409
Волокно волокнистого пространства 410
Вспомогательные пути группы симплициальных путей 214
Выпуклая область 55, 134
— — ее граница, внутренняя точка 55
— — есть n-мерный элемент 71
— — как симплициальная звезда 74
— — топологическое произведение двух выпуклых областей 77
Выпуклое замыкание 56

Вырождающееся отображение симплекса $\boldsymbol{E}^n$ на $'\boldsymbol{E}^r$ 56
Вырождающийся особый симплекс 56
— — его граница 128
— — — записанный формально в виде суммы 108
Высверливание узла 287
Вычеты целых чисел по модулю 2 110

Гиперболические пространственные формы 410
Гиперболическое пространство додекаэдра 279
Гипотеза Пуанкаре 204, 279
Гладкое пересечение особых комплексов 343
Гомеоморфизм 10, 40
— пространств линзы 268, 274, 282
Гомологии (знак $\sim$) 86
— слабые (знак $\approx$) 95
Гомологическая сфера (=пространство Пуанкаре), определение 279
— примеры (33), 290
Гомологично независимые k-мерные алгебраические комплексы 90
— — — — по модулю 2 113
Гомологичные алгебраические комплексы § 7, 98
— — — по модулю 2 111
— нулю пути 223
— — циклы 86
— — циклы по модулю 89
— пути 221
Гомоморфное отображение групп Бетти 130
— — группы 379
— — — — инвариантно относительно деформаций 155, 227
— — фундаментальной группы 202
Гомоморфное отображение фундаментальной группы 201
Гомотопная деформация комплекса в себя 150
— — отображения 150
— — пути 195
Гомотопный нуль путь 199
Граница 36
— n-мерного элемента 71
— алгебраического комплекса (42), 82
— — — по модулю 2 112
— барицентрического подразделения особого симплекса 141
— выпуклой области 55, 72
— нульмерного алгебраического комплекса 83
— ограниченного многообразия 283
— однородного комплекса 67
— ориентированного симплекса 82
— особого алгебраического комплекса 128
— особого симплекса 127
— симплекса 56, 59
— топологическая инвариантность 167
Граничная точка подмножества 37
— точка; ее топологическая инвариантность 41
Граничная сторона ограниченной поверхности 184
Граничные соотношения 98, 99
Граничный алгебраический комплекс 81
— — — по модулю 2 111
Граничный путь двухмерного симплекса 205
— — куска поверхности 210
Группа 374
— Бетти бесконечного $k = 0$ 90
— — бесконечного $k > 0$ 90
— — бесконечного n-мерного симплекса, n-мерной сферы, n-мерной звезды 94
— — бесконечного комплекса 92
— — бесконечного листа Мебиоса 103
— — бесконечного псевдомногообразия 117
— — бесконечного размерности k § 18, 27
— — бесконечного специальных комплексов: кругового кольца, проективной плоскости, тора 92
— — в точке § 32, их топологическая инвариантность (20), 158
— — и фундаментальная группа 220
— — общего окрестностного пространства 403
— — особая § 27, 127
— — по модулю подмножества 404
— — составного комплекса 200
— — трехмерного многообразия 235, 244
— винтового узла 231
— гомологий 402
— дополнительная (=факторгруппа) 379
— комутант 382
— свободная 384
— свободная абелева 386
— свободная циклическая 376
— симплициальных путей симплициального комплекса 205
— — — линейного и поверхностного комплекса 210
— скольжений 251
— узла 357
— циклическая 376

Группа Бетти; гомоморфное отображение 111
Группа Бетти; доказательство топологической инвариантности; нахождение 403
Групповая единица 374
Групповые аксиомы 200
Группы Бетти k-мерные 96, 105
— — — дуальные 322
— — и коэффициенты кручения 92
— — и ориентируемость 155
— — — на поверхности 191

Двойной маятник 28
— тор дуальные базы гомологии 343
— тор (=крендель) 15, 224, 254
Двойной тор; накрытие двулистное 261
Двойной тор; накрытие трехлистное 235, 251
Двулистное накрытие 250
— — ориентируемое 348
Двусторонность § 76, 18
Двухбережное циклическое сечение 192
Декартовы координаты (9), 87
Детерминант преобразования линейного отображения 34, 132
Деформация комплекса без двойных точек (51), 371
— — — — в себя 150
— — ее степень отображения 362
— отображения § 31, 149
— — в симплициальное отображение 152
— — гомотопная 150
— — группы Бетти 154
— — изотопная 150
— — особые алгебраические комплексы 152
— — фундаментальная группа 226
— пути гомотопная 195
— пути комбинаторная 205
— пути непрерывная 205
— пути с разрывами (29), 407
— пути свободная 225
— пути связанная 225
Деформация без неподвижных точек 371
Диагональная форма матрицы 391
Диаграмма Хегора (34), 280
Диаметр множества евклидова пространства 46
Додекаэдра поверхность 171
Дополнительное пространство винтового узла 231
— — узла 287, 359
Дополнительное множество 37, 355
Дуальные базы 318
— — слабых гомологий 322
— звезды 295
— клеточные базы 320
— клеточные разбиения h-многообразий 308
Дуальные базы на поверхности 321

Евклидова плоскость гомеоморфна внутренности круга 42
— — гомеоморфна проколотой сфере 41
— — есть полиэдр 61
— — просто-связна (26), 204
Евклидово пространство группы Бетти в точке евклидова пространства 164
— пространство; однородность 401
— пространство; ориентация 132
Евклидовы пространственные формы 409
Единичная n-мерная сфера 72
Единичная билинейная форма 319
Единичный элемент группы 374

Жирный шрифт для неориентируемых образов 58
Жордана теорема 413

Зависимость гомологическая 90, 112
— линейная 91, 113
Закон двойственности Пуанкаре 309
— — обобщенный Вебленом 322
— — по модулю 2 315
Закрученная лента 12, 17
Замкнутая поверхность § 2, 170
Замкнутое h-многообразие 261, 302
Замкнутое подмножество окрестностного пространства 36
Замкнутый путь 195
Замыкание 36
— множества в евклидовом пространстве 44
— пространства при помощи групп 400
Зацепления коэффициенты (42), (47), (48), 353
Звездное разбиение h-многообразия 309
Звездный комплекс 291
— однородный 293
Значение алгебраическое нульмерного алгебраического комплекса (=сумма коэффициентов) 91

Идентификация *см.* отождествление
Изоморфные группы 379
— звездные комплексы 294
Изотопные деформации отображений 150
— пространства 196
Изотопные кривые на поверхности 24

Икосаэдра группа бинарная (52), 279
Инвариантность топологическая 40, 123, 141, 149
— — в малом 158
— — в целом 404
— — границы 165
— — групп Бетти 148
— — индексов пересечения 332
— — конечного комплекса 66
— — области 413
— — однородности 166
— — окресности 40
— — ориентируемости § 36, 121
— — открытого подмножества 40
— — псевдомногообразия 167
— — размерности 67, 165
— — размерности § 33, 21, 405
— — связанного комплекса 67
— — точки наклонения 40
— — чисел Бетти и коэффициентов кручения 149
— — эйлеровой характеристики 149
Инвариантность группы Бетти при непрерывном отображении 130
Инвариантные множители целочисленной матрицы 102, 391
Инварианты в целом и в малом 158
— численные (=числа Бетти и коэффициенты кручения) 106
Индекс пересечения дуальных его топологическая инвариантность 332
— — клеток 309
— — клеточных алгебраических комплексов дуальных клеточных разбиений 316
— — особых алгебраических комплексов 329
— — по модулю 2 318, 346
— — произвол в определении 412
Индекс неподвижной точки 416
Индекс размерности всегда ставится вверху 61, 68
Индуцированная ориентация стороны клетки 299
— — симплекса 82
Инцидентные звезды звездного комплекса 292
— симплесы 61

H-классы соединяющих путей 246
Кватернионы; пространство кватернионов 254
Классы гомологий 25, 85, 129, 407
— их инварианты 155, 226, 361
— линейчатых путей $[w]$ 207
— неподвижных точек 416
— отображений 150
— путей w 200
Клетка k-мерная 298
— ориентированная 299
— по модулю 2 (=неориентированная) 302
Клеточная аппроксимация 325
— — клеточных алгебраических комплексов по модулю 2 328
Клеточное разбиение h-многообразий 308
Клеточный комплекс 298
— — алгебраический 299
— — по модулю 2 301
— подкомплекс 325
Когерентная ориентация 117
Когредиентные преобразования и ряды переменных 319
Кольцо закрученное 12, 18
— классов гомологий 412
Комбинаторная гомотопия 176
— топология (10), 65
Комбинаторные деформации (27), (39), 205
Коммутант 382
Коммутативная запись абелевых групп 387
Коммутатор 382
Комплекс 59
— алгебраический 80
— — k-мерный 81
— — клеточный 298
— — по модулю m 402
— — по модулю 2 110
— бесконечный как открытое подмножество евклидова пространства 79
— деформации 150
— конечный 66
— однородной ограниченной 67
— особый 325
— с границей, равной нулю (цикл) 82
— связный 66
— симплициальный 60
— симплициальный вложенный прямолинейно в евклидово пространство 65
— удвоение 168
Комплексная проективная плоскость 412
Комплексное проективное пространство 404
Конечная точка отрезка 58
— — пути 194
Конечно-листные покрытия 254
Контрагредиентные преобразования 319
Координаты барицентрические 53
— декартовы 54

Коэффициенты зацепления (42), (47), (48), 353
— кручения (42), (47), (48), 354
Коэффициенты кручения абстрактной k-мерные, симплициального комплекса 89
— — n-мерные 92
— — вычисление из кусочков матриц инциденций 107
— — вычисление из матриц инциденций 106
— — геометрическое значение для пространств линзы 272
— — группы 392
— — группы октаэдра 394
— — нульмерные 91
— — поверхностей 188
— — проективной плоскости 92
— — псевдомногообразия 119
— — топологическая инвариантность 148
Край симплициальной звезды 74
Кратность накрытия (=число листов) 239
— симплекса в алгебраическом комплексе 65
Круг, отображение его на себя 42
Круг; Удвоение 169
Круг; отождествление всех граничных точек 51
Круговая стрелка, ориентирующая 58, 173
Кручения k-мерная база 79, 324
— k-мерная группа 96
Куб ее эйлерова характеристика 178
— как комплекс, дуальный октаэдру 298
— поверхность 171
Куски симплициального разбиения 106
Кусочная система 108
— — клеточного комплекса 301
— — поверхности 188
— — трехмерного многообразия 270
Кусочная система и группа Бетти 106
Кусочные комплексы 15
— — по модулю 2 114

Ли – Гельмгольца условия движения (38), 400
Линейно зависимые k-мерные алгебраические комплексы 91
— — по модулю 2 113
Линейное отображение (=афинное) призмы 133
— — симплекса 56, 59
Линейные элементы; пространство линейных элементов (12), 254
Линейчатый комплекс 117
— — его фундаментальная группа 217
— — огибается поверхностью упр. 2, 183
— — упр. 3, 210
Лист Мебиуса 18
— — замкнутый (=проективная плоскость) 19
— — как ограниченное псевдомногообразие 120, 121
Локальные свойства 158

Максимум; теорема о максимуме 44
Матриц преобразование 100, 390
Матрица инциденций клеточная 301
— — кусочная 107
— — по модулю 2 112
— — псевдомногообразия 119
— — симплициальная 98
— нормальная форма 102
Матричное исчисление 99
Мебиуса пленка 22, 178
— их число неориентируемой поверхности 181
— связь с канонической формой неориентируемой поверхности 179
Меридиан тора 13
Метод топологического произведения 416
Метрика 409
Многообразие 68
— двумерное 183
— просто-связное 204
— трехмерное 261
Многообразия гомологические h-многообразия n-мерные гл. 10, (41), 291
— группы Бетти 270, 279
— замкнутые 261
— из узлов 286
— ограниченные 411
— ограниченные (20), 283
— построения при помощи диаграммы Хегора и средством разветвленных накрытий 280
— симметричные 357
— трехмерные гл. 9 261
— фундаментальная группа § 62 273
Многоугольник (=полигон) 170
Множества в евклидовом пространстве 36
Множители инвариантные целочисленные матрицы 101, 391
Модуль m; алгебраический комплекс по модулю m 402
Модуль 2; алгебраический комплекс по модулю 2 110

Модуль; алгебраические комплексы по модулю подмножества (41), 404
— индекс пересечения по модулю 2 318, 346
— особый алгебраический комплекс по модулю 2 403
Монодромии группа 254

Накрывающий комплекс VIII гл. 233
— полиэдр неразветвленный 233
— полиэдр VIII гл.; 233
— путь 237
— равенство накрывающих полиэдров 235
Накрытие в частности, простейшего узла 258
— внешнего и подгруппа фундаментальной группы 241
— — пространства узла 358
— двойного тора 235, 250
— двулистное 250
— конечно-листное 254
— кругового кольца 233
— кругового узла 234
— регулярное 250
— трехмерной сферы разветвленное 282
— универсальное 248
Накрытия дополнительного пространства простейшего узла 258, 283
Направление обхода многоугольника 17, 173
— — треугольника 58
Натягивание элемента поверхности 211
Начальная вершина отрезка 58
— точка пути 194
Независимые (в смысле гомологий) k-мерные алгебраические комплексы 90
— групповые соотношения 376
— линейно k-мерные алгебраические комплексы 91
Неограниченность; условие неограниченности для пространственных форм 409
— условие неограниченности накрывающего полиэдра 233
Неориентируемая вложение поверхностей 399
— поверхность 18, 176
Неориентируемое многообразие 263
— — трехмерное 263
— псевдомногообразие 99
Неориентируемый тор (=бутылка Клейна) 23
Неподвижные деформации, не имеющие неподвижных точек, (51), 370
— минимальное число их 416
— отображения n-мерной сферы на себя (51), 370
— точки (50), 367
Неподвижные точки отображения шара на себя 370
Неподвижные точки при отображении проективного пространства на себя 370
Непосредственно инцидентные звезды 292
Непрерывная деформация пути, (27), 205
— функция 38
Непрерывное отображение 37
Непрерывное отображение тора на себя 131
Непрерывность обратного отображения 51
Непрерывность; класическое определение 38
— равномерная 44
— сущность 31
Неразветвленность накрывающего полиэдра 233
— псевдомногообразия 117
Неразветвленный накрывающий полиэдр 233
Несобственная прямая 20
n-мерная сфера 72
n-мерный симплекс § 9, *см.* симплекс
Нормализатор подгруппы фундаментальной группы 253
Нормальная форма матриц инциденций 99
— — ограниченныхь поверхностей 184
— — полиэдральных поверхностей 176
— — симметрическая 182
— — целочисленных матриц 102, 395
Нулевой элемент абелевой группы 388

Область (= открытое подмножество) 164
— разрывности как пространственная форма 409
Образ группы 418
— множества 37
— точки 38
Образующая группы 374
— фундаментальной группы 184
Обратное отображение 34, 51
Обратный противоположный элемент 375
— путь 195
Обращение ориентации при топологическом отображении 169
Обходная дуга 350

Ограниченная поверхность 184
Ограниченное n-мерное многообразие 411
— множество евклидова пространства 44
— псевдомногообразие 120
— трехмерное многообразие 283
Ограниченный однородный комплекс 68
Одинаково ориентированные симплексы евклидова пространства 132
—— симплициальные разбиения псевдомногообразия 169
Одинаково направленные трансверсальные однородные одномерные клетки 350
Одновременная аппроксимация алгебраических комплексов 329
Одномерные классы гомологий симплициального разбиения 86
Однородность евклидова пространства 401
— метрическая (38), 409
Однородный комплекс 67
—— звездный 293
Одностороннее многообразие 348
Односторонние поверхности 16, 348
Окрестностное пространство 33
Окрестностные аксиомы (8), 33
Окрестностный комплекс 159
Окрестность 34
— в евклидовом пространстве 33
— в комплексе 60
— в подмножестве евклидова пространства 43
— в связке прямых 51
— кубическая 39
— на кривых 35
— отмеченная 234
— симплициальная 159
— точки симплекса 54
— шаровая 34
Окружность; универсальная накрывающая ее 248
— фундаментальная группа ее 217
Октаэдр как звездный комплекс 298
Октаэдра группа 394
— пространство 273
— фундаментальная группа пространства октаэдра 279
Октаэдральное разбиение n-мерной сферы 109
Определение фундаментальной группы трехмерного многообразия при помощи поверхностного комплекса 263
Определяющие соотношения группы 376
—— дополнительной группы 381
—— подгруппы 260
—— фундаментальной группы 216
Ориентация 58
— n-мерных алгебраических комплексов и одинаковая 168
— n-мерных симплексов одинаковая 132
— евклидова пространства 132
— индуцированная 82
— клетки 298
— многоугольника 174
— нульмерного симплекса 58
— особого симплекса 123
Ориентируемость многообразия 262, 272
— ограниченной поверхности 185
— поверхности; двусторонность 348
Ориентирующие циклическое сечение 193
Ориентирующий n-мерный алгебраический комплекс на псевдомногообразии 169
Основания призмы 132
Основная теорема топология поверхности (22), 182
Основная точка 233
Основной путь 237
Основные формы, метрические 409
Особая симплициальная звезда 142
Особое круговое кольцо 25
Особые группы Бетти 127
Особый алгебраический комплекс 125
— комплекс 325
— комплекс по модулю 403
— прямоугольник деформации 274
— симплекс 122
—— вырождающийся 124
— элемент поверхности 199
Ось призмы 133
Открытое подмножество евклидова пространства 36
—— евклидова пространства есть бесконечный комплекс 79
Отмеченная окрестность 234
Отображение 37
— в и на множество 37
— гомоморфное групп 379
—— группы Бетти 129
—— фундаментальной группы 202
— линейное (= афинное) n-мерное симплекса 56
—— призмы 133
— непрерывное 37, 361
—— n-мерной сферы 155
— обратное 37
— топологическое 21
—— с и без обращения ориентации 169

Отображение с помощью обратных радиус-векторов 28
Отображение симплициальное 151
Отображение, сохраняющие границу 364
Отображение; их произведение UT (справа T, затем U) 50
Отождествление точек как способ построения комплексов 47
— — окрестностного пространства 48
Отражение n-мерной обращает ориентацию 169
— — сферы 155
Отрезок (= одномерный симплекс) 54
— и окружность негомеоморфны 11
Отрезок соединяющий две точки топологического симплекса 55

Параллельные координаты (= декартовы координаты) (3), 53
Параметр деформации 155
Пеано кривая 123, 166
Перенос ориентации вдоль пути 352
Пересечение 35
Перестановка вершин n-мерного симплекса 57
Пленка Мебиуса 17, 178
Плоскость проективная 14, 20
Поверхностный комплекс 210
Поверхность бесконечная (4), 24
— как многообразие 171
— ограниченная 184
— ориентируемая 353
— разбитая на многоугольники 170
Подкомплекс комплекса 66, 328
— однородный (= алгебраический) комплекс по модулю 2 110
Подмножество окрестностного пространства 35
Подразделения поверхностного комплекса 210
— системы многоугольников 172
Подразделенная поверхность 176
— — элементарно преобразуемая 175
Полый шар 280
Предельная точка последовательности 40
Представление группы 255
— — транзитивное 255
Преобразование элементарное всех базы всех k-мерных алгебраических комплексов 101
— — матриц 101
— — системы многоугольников 174
Преобразование групповых элементов 201
Преобразования контрагредиентное и конгредиентное 319
Преобразования целочисленные унимодулярные 97, 389
Приведение матриц инциденций к каноническому виду 106
— — — по модулю 2 110
Приведенная группа Бетти (13), 96
Призмы евклидова пространства 132
Применение теоретико-групповых отношений 374
Принцип точки накопления 36
Проблема гомеоморфизма 275, 276
Проблема сфер 302
Проблема топологии поверхностей 405
Проективная плоскость как алгебраическая поверхность четырехмерного евклидова пространства 399
— — как замкнутый лист Мебиуса 17
— — как пучок прямых 62
— — комплексная 412
— — не может быть вложена в трехмерное евклидово пространство (3), 284
— — односторонняя в проективном пространстве 348
— — получается отождествлением диаметрально диаметрально-противоположных точек сферы 62
— — циклы по модулю 2 112
— — числа Бетти модулю 2 113
Проективное пространство 28
— — n-мерное 74
— — как пространство линзы 269
— — как фазовое пространство 30, 78
— — комплексное 404
— — трехмерное, разбиваемое однополосным гиперболоидом на два трехмерных кольца 78
— — характеристика 116
Проектирующий конус 55
Проекция параллельная 55
— стереографическая 73
— точечного множества 54
— центральная 42
Произведение UT двух отображений (сначала T, потом U) 37
— двух путей $w = uv$ сначала u, затем v 195
— двух элементов группы (в абелевой группе называется суммой) 387
— классов гомологий 412
— путей и сумма алгебраических комплексов 189
— свободное и прямое групп 383
Проколотая сфера 10
— — n-мерная 72

— — есть бесконечный комплекс 66
Прообраз особого симплекса 123
Простейший узел 11
— — как винтовой 230
— — правый и левый 408
Просто-связанные пространственные свойства (= основные формы) 409
Пространственные клетки 352
Пространственных форм проблема 409
Пространство волокнистое 409
— всех проективных прямых 29
— додекаэдра гиперболическое 276
— додекаэдра сферическое 277, 283, 290
— конгруэнций 28
— конфигураций (6), 30
— линейных элементов (12), 254
— линзы, асимитричные (48), 357
— линзы, определение 269
— окрестностное 31
— проективное (18), (28) 27, 74
— проективное (18), (28), 75
— сферическое 27, 31
— сферическое, эллиптическое, евклидово, гиперболическое 409
— топологическое (8), 32
— фазовое 30
— числовое (евклидово) 34
Противоположно ориентированный особый симплекс 124
Прямая сумма абелевых групп 387
Прямое произведение групп 386
Прямолинейный комплекс 64
— симплекс евклидова пространства 53
Прямоугольник деформации особый 274
— — пути 196
Псевдомногообразие его размерность (19), 117
— ограниченное 120
— ориентируемое 117
Псевдомногообразие, определение 117
Пуанкаре гипотеза 204, 282
Пуанкаре закон двойственности 309
Пустое множество 33
— слово 374
— слово (= единичный элемент) 374
Путей группа 195
Путь 194
— гомологичный нулю 220
— симплициальный и непрерывный 195

Равенство накрывающих комплексов 235
— особых симплексов 125
— путей (24), 202
— слов из групповых элементов 375
— топологических симплексов 59
Равенство путей 406
Равномерная непрерывность; теорема о равномерной непрерывности 43
Разбиение комплекса симплициальное 60
— призмы 133
Разбиение путей на классы 226
Развертывание поверхностей (2), 13
Размерность выпуклой области 55
— замкнутого многообразия 404
— решетки 388
— симплекса 56
— симплициального комплекса 68
Разрывы; деформация с разрывами 407
Расстояние двух точек евклидова пространства 34
— двух точечных множеств 48
Рациональные числа 376
Ребро массивного полиэдра 264
— многообразия 351
— полиэдра 171
— симплекса 55
Регулярная группа перестановок 257
Регулярное накрытие 252
Регулярное накрытие тора 248
Решетка (= свободная абелева группа) 388
— всех k-мерных циклов 97
— всех k-мерных циклов, гомологичных нулю 98
— всех k-мерных циклов, слабо гомологичных нулю 97
— сопоставление решеток 104
Род 183
— замкнутой поверхности 188
Рукав заузленный 11
— односторонний 19
Ручка 17, 180, 183

Светлые латинские буквы для обозначения ориентированных образов 57
Свободная абелева группа h образующих 384
Свободная деформация пути (29), 225
Свободная цилиндрическая группа (= свободная группа с одной образующей) 217
Свободно гомотопные пути 225
Свободное произведение групп 383
Связанная деформация пути (29), 225
Связанная пара особых алгебраических комплексов 331
Связность; условие связности многоугольников 168
Связный комплекс 66

Симметрическая нормальная форма трехмерных многообразий 357
Симплекс n-мерный 52
— — вырождающийся 124
— — особый 122
— — получается проектированием 54
— — прямолинейный евклидова пространства 53
— — топологический 56
— вершины, ребра, стороны его 53, 54
— выпуклость его 55
— граница, внутренняя точка, центр 55
Симплициальная звезда 74
— — как ограниченное псевдомногообразие 120
— — особая 142
— окрестность 158
Симплициальная аппроксимация 149
Симплициальная звезда; характеристика 261
Симплициальное отображение 151
— разбиение комплекса 60
— разбиение призмы 133
Симплициальный комплекс 59
— — определяемый матрицами инциденций 98
— — получается посредством отождествления 63
— — прямолинейно вложенный в евклидово пространство 69
— путь поверхностного комплекса 210
— — симплициального комплекса 195
Система многоугольников 172
Скольжение накрывающего комплекса 251
Слабые гомологии (знак $\approx$) 95
След матрицы 365
Следа формула § 79, 367
Слова, проблема в теории групп 376
Слово из групповых элементов 374
Сложение трехмерных многообразий 279, 357
Соединяющий алгебраический комплекс, с аппроксимацией 140
— — — с клеточной аппроксимацией 326
Соответствие первого (второго) рода сторон многоугольника 18
— (второго)рода многоугольника 272
Соотношения определяющие, группы 374
— — дополнительной группы 379
— — подгруппы 260
— — тривиальные 375
— — фундаментальной группы 214
Сопряженные циклические сечения (45), 345
— элементы фундаментальной группы 226
Соседние h-классы 244
— трансверсальные одномерные клетки 349
Составной комплекс; его его группы Бетти 408
— его фундаментальная группа 228
Сохранение ориентации при топологическом отображении 169
Степень отображения 361
— — деформации 331
— — топологического 363
Стереографическая проекция 41
— — для n измерений 72
Стороны многогранника 263
— многоугольника 170
— особого симплекса 123
— симплекса 54
Стрелка, воткнутая в поверхность 351
— круговая 58, 173
— ориентирующая отрезок 58
Стягивание сторон многоугольника 177
Сумма двух алгебраических комплексов по модулю 2 110
— двух особых комплексов 126
— коэффициентов нульмерного алгебраического комплекса 91
— множеств 33
— прямая 387
— трехмерных многообразий 280, 357
Сумма
— алгебраических комплексов 443
Сфера n-мерная 75
— — как универсальный накрывающий полиэдр 254
— двумерная 17
— — как метрическая поверхность 409
— — как пространство линейных элементов 254
— — октаэдрально триангулированная 72
— — просто-связная 204
— — с h ручками 17
— — тетраэдрально триангулированная 62
— получается из шара 75
— простая связность ее 204
— трехмерная, разбитая на два трехмерных кольца 78
— четырехмерная, просверленная 232
Сфера; характеристика 183
Сферические пространственные формы 409
Сферическое пространство 27
— — додекаэдра 276–279

— — метрическое 409
Сферы, проблема 302
Схема полиэдра 266
— симплициального комплекса 62, 244
— системы многоугольников 174
Сходящаяся последовательность точек в окрестностном пространстве 37

Тело неориентируемое 284
— рода h 280
Теорема Безу 412
Теорема о гомоморфизме групп 379
Теорема о деформации 152
Теорема об аппроксимации 147
Теория размерности 32
Тетраэдр (= трехмерный симплекс) 54
— ориентация 57
— перестановка вершин 53
Тетраэдральное разбиение n-мерной сферы 72
Тождественные слова из групповых элементов 375
Топологическая инвариантность ориентируемости 168
Топологическая инвариантность размерности (21), 165
Топологическая инвариантность эйлеровой характеристики 149
Топологический симплекс 56
Топологическое произведение 76
— — двух сфер 204
— — окружностей 269
— — окружности и сферы 269
Топологическое вложение поверхности 409
Топологическое отображение 10, 40
Топологическое произведение проективной плоскости на окружность 348
Топологическое пространство 400
Топология поверхностей (10), 170
Топология поверхностей; основная теорема (22), 182
Топология чисто комбинаторная 401
Тор 12
— как пространство конфигураций двойного маятника 28
— неориентируемый (= бутылка Клейна) 18, 175
— особый (= непрерывный образ тора) 15
— рассматриваемый как квадрат 13
— с отверстием (= ручка) 15
Тор; Эйлерова характеристика 175
Тор; диаграмма Хегора 281
Точечные множества в евклидовых пространствах 43
Точка накопления подмножества 36, 40
Точка накопления подмножества; ее топологическая инвариантность 40
Точки совпадения 416
Транзитивное представление групп 255
Трансверсальная одномерная клетка многообразия 349
Трансляция; группа трансляций евклидовой плоскости 47
Транспонирование матрицы 313
Треугольник (= двумерный симплекс) 54
— согнутый (= особый двумерный симплекс) 123, 127
Трехмерное кольцо (= топологическое произведение окружности на круг) 78
— — волокнистое 409
— — и пространства линзы 269
— — как ограниченное многообразие 279
Трехмерные многообразия; см. многообразия 261
Триангулируемый 14
Тривиальные соотношения 216, 375

Удвоение ограниченного однородного комплекса 169
— поверхности с r отверстиями 188
Узел простейший 11
Узлы в четырехмерном евклидовом пространстве 399
Укрупнение системы многоугольников 175
Универсальное накрытие 248
Условие подвижности (38), 400
Условие связности псевдомногообразия 117

Фазовое пространство 30
Фигура геометрическая 13, 19
Формула неподвижных точек § 80, 370
— — — общая 416
— связи в аппроксимациях 149
— — в особой призме 153
— — в призме 135
— следа § 79, 365
Формула неподвижных точек для полого шара 370
Фундаментальная группа n-мерного евклидова пространства 203
— — n-мерного симплекса 203
— — VII гл., (25), 14
— — в точке 227
— — дополнительного пространства винтового узла 230
— — замкнутой поверхности 204
— — и группы Бетти 220

— — и деформация отображений 227
— — как группа скольжений 233
— — неориентированного трехмерного многообразия 263
— — окружности, кольца, трехмерного кольца 217
— — проективной плоскости 253
— — составного комплекса 228
— — топологического произведения 196
— — трехмерного многообразия § 62, 349
— — четырехмерного многообразия 232
Фундаментальная группа 194, 250
Фундаментальная группа топологического произведения 202
Фундаментальная группа тора 217
Фундаментальный многоугольник (0), (h), (k), 181
— — двойного тора (рис. 10) 16
— — поверхности 15
— — проективной плоскости (рис. 18) 23
— — сферы (рис. 11) 17
— — тора (рис. 19) 23
— — тора (рис. 5) 15
Функция непрерывная 38

Характер матрицы (= след) 365
Характеристика эйлерова n-мерной сферы и n-мерного проективного пространства упр. 2 117
— — замкнутого трехмерного многообразия 263
— — замкнутой поверхности 182
— — как альтернирующая сумма чисел Бетти 116
— — куба и тора 175
— — накрытия g-листного 239
— — ограниченного трехмерного многообразия 283
— — ограниченной поверхности 185
— — полиэдральной поверхности 175
— — реберного комплекса 218
— — симплициального комплекса 116
— — симплициальной звезды 267
Хаусдорфа аксиомы топологического пространства 400
Хегора диаграмма § 63, 409

Центр n-мерного симплекса 54
— призмы 133
— симплициальной звезды 94
Цикл 129
— в точке 404
— по модулю 2 112
Циклическая группа 376
Циклическое сечение на поверхности (45), 192
— — однобережное и двубережное 192
— — превращающее поверхность в ориентирующую 192
Циклическое накрытие узла 259, 359
— — — в малом 259
Циклическое сечение; аналог циклического сечения для образов высших размерностей 345

Четырехлистные накрытия тора 235
Четырехмерное пространство (1), (3), 232
Числа Бетти абстрактной группы 394
— — группы октаэдра 394
Численные инварианты (= числа Бетти и коэффициенты кручения) 106
Число Бетти k-мерное симплициального комплекса 89
— — n-мерного псевдомногообразия 118
— — n-мерное 92
— — n-мерное псевдомногообразия 118
— — p^1 ориентируемого ограниченного трехмерного многообразия 285
— — p^2 топологического произведения двух сфер 285
— — по модулю m 402
— — по модулю 2 k-мерное 112
— — поверхности 188
— — проективной плоскости 116
Число Бетти; геометрическое значение 191
Число Бетти; его вычисление с помощью матриц инциденций 106
Число Бетти; его вычисление с помощью матриц кусочных инциденций 106
Число Бетти; топологическая инвариантность 131, 148
Число листов g накрывающего комплекса 239
Числовая прямая (= евклидова прямая) просто-связная 204

Шар евклидова пространства 71
— как ограниченное многообразие 283
— как трехмерный полиэдр 280
— просверленный 371
Шар; отождествление всех граничных точек, см. симплекс 73

Эйлерова формула обобщенная 367
— — полиэдров 116
Эйлерова полиэдральная поверхность 175
Эквивалентные точки окрестностного пространства (отождествление) 47
Эквивалентные узлы (39), 287

Элемент n-мерный; *см.* также симплекс и шар
Элемент поверхности 171
Элемент поверхности особый (= непрерывный образ круга) 199
Элементарная преобразуемость 65
— — полиэдральных поверхностей 174
Элементарная комбинированная деформация 205
Элементарные преобразования базы k-мерных алгебраических комплексов 101
— — матрицы 100, 391
— — системы многоугольников 174

Ящичная форма кососимметрической матрицы 345

Г. Зейферт, В. Трельфалль

Топология

Дизайнер М. В. Ботя
Технический редактор А. В. Широбоков
Компьютерная верстка Р. Р. Сафин
Корректор М. А. Ложкина

Подписано в печать 10.09.01. Формат $60 \times 84^1/_{16}$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 26,04. Уч. изд. л. 26,34.
Гарнитура Computer Modern Roman. Бумага газетная.
Тираж 1000 экз. Заказ №

Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика»
426057, г. Ижевск, ул. Пастухова, 13.
Лицензия на издательскую деятельность ЛУ №084 от 03.04.00.
http://rcd.ru E-mail: borisov@rcd.ru

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных диапозитивов в ГИПП «Вятка».
610033, г. Киров, ул. Московская, 122.