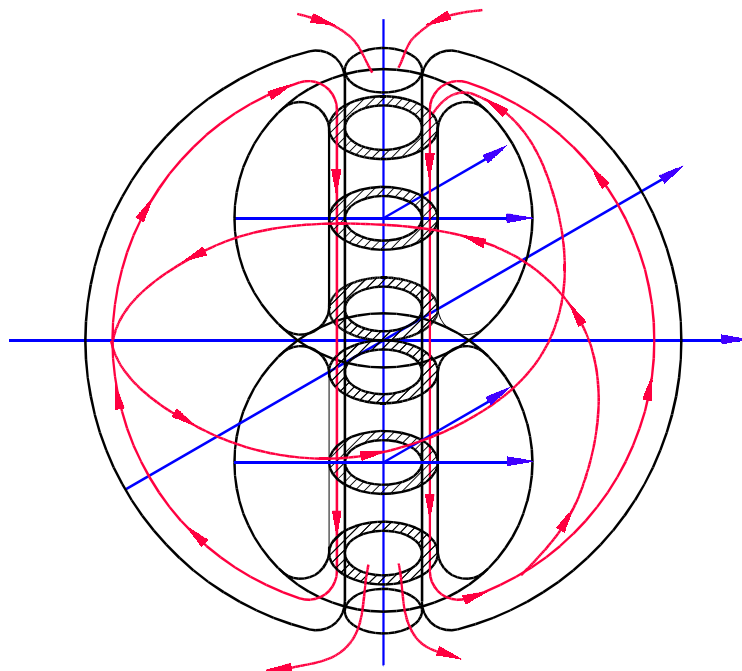




В.И.ЕЛИСЕЕВ

**ВВЕДЕНИЕ
В МЕТОДЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ
ПРОСТРАНСТВЕННОГО
КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО**

Издание второе, дополненное, переработанное

E-mail: eliseev@maths.ru eliseev@cityline.ru

<http://www.maths.ru/>

Москва, 1990 - 2002 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	5
ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ	11
1. Пространственная комплексная система чисел	11
Закон извлечения корня из числа	11
Решение квадратного уравнения в пространстве чисел	13
К вопросу об основной теореме алгебры	14
Пространственные комплексные числа	18
Геометрическая иллюстрация пространственного комплексного числа	19
Пространство делителей нуля. Геометрическая иллюстрация	26
Операция деления в комплексном пространстве	31
Замкнутость пространственной комплексной алгебры	35
2. Функции пространственного комплексного переменного	38
Дифференцируемость функций	38
Элементарные функции	43
А. Функции $\omega = v^n$ и $\omega = \sqrt[n]{v}$	44
В. Функция $\omega = 1/v$	47
С. Интерес представляет рассмотрение самого элемента пространства (v)	49
D. Экспоненциальная функция e^v	49
Е. Рассмотрим логарифмическую функцию $\ln(v)$	51
F. Элементарные тригонометрические функции	53
G. Тригонометрические и гиперболические функции	53
H. Функция аргумент v	56
Таблица производных элементарных функций классического анализа, определенных в комплексном пространстве	61
3. Интегральные теоремы Коши в комплексном пространстве	62
Связность комплексного пространства	62
Интеграл и первообразная	67
Распространение интегральных теорем на многосвязные области	77
Интегральная формула Коши	78
Интегральные теоремы Коши	80
Поверхностные интегралы	90
4. Ряды в пространстве	100
Теорема Н. Абеля	100
Ряд Лорана	105
5. Изолированные особые точки в пространстве	113
6. Вычеты в пространстве. Вычисление интегралов с помощью вычетов	115
7. Двойной интеграл	129
Элемент площади в комплексном пространстве	129
Интеграл от рациональных функций	131
Вычисление определенных двойных интегралов с помощью вычетов	135
Лемма (К. Жордана).	147
8. Конформные отображения в пространстве	161
Понятия конформного отображения в пространстве	161
ГЛАВА 2. ПОДСЧЕТ ПОДЪЕМНОЙ СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА ТЕЛО КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ В ПОТОКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ	170
1. Методика классического решения в Z-плоскости	170
2. Методика классического решения в пространстве	172

ГЛАВА 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОСНОВНЫХ СООТНОШЕНИЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ С ПОМОЩЬЮ АЛГЕБРЫ КОМПЛЕКСНОГО ПРОСТРАНСТВА	179
1. Преобразования Лоренца	179
2. Энергия в пространстве	183
3. Самосоогласованность взаимодействующих пространств	187
4. Исследование выражения интервала и соотношений теории относительности	188
Общие сведения	188
Интервал в комплексном выражении	189
Изолированное направление	193
Относительность времени	196
Эксперимент Майкельсона - Морли с позиции комплексного пространства	199
ГЛАВА 4. ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРИТАЦИЯ КОМПЛЕКСНОГО ПРОСТРАНСТВА	205
1. Физический смысл решения волнового уравнения	205
2. Критические линии при обтекании	209
3. Модель вихревого энергетического взаимодействия в пространстве. Физическая трактовка интегралов Коши.	210
4. Модель сложного структурного образования	213
ГЛАВА 5. ЦИКЛОННАЯ МОДЕЛЬ АТОМНОГО ЯДРА. ВЫВОД ФОРМУЛЫ ЭНЕРГИИ СВЯЗИ АТОМНЫХ ЯДЕР	219
1. Соответствие между периодической системой и формированием циклонных вихрей в атомном ядре	219
2. Энергетическая оценка выдвинутой гипотезы о циклонной структуре ядерной материи	227
3. Пространство ядерных сил	227
4. Вывод формулы энергии связи атомных ядер	229
Таблица 1. Электронные конфигурации основных состояний Атомов	236
Таблица 2. Энергия связи атомных ядер.	238
Таблица 3. Энергия связи легких ядер	243
5. Построение диаграммы состояния атомных ядер элементов периодической таблицы Д. И. Менделеева	244
Вывод формулы состояния ядерной материи	244
Построение диаграммы состояния ядер элементов Периодической таблицы Д. И. Менделеева	248
Оценка возбужденного состояния атомных ядер периодической таблицы элементов Д. И. Менделеева	253
Общий вид диаграммы состояния ядер элементов Периодической таблицы Д. И. Менделеева	256
ГЛАВА 6. ОБОСНОВАНИЕ ЦИКЛОННОЙ МОДЕЛИ АТОМНОГО ЯДРА В СООТВЕТСТВИИ СО СТРУКТУРОЙ ПРОСТРАНСТВА НА МАЛЫХ ЛИНЕЙНЫХ РАССТОЯНИЯХ ДЕЙСТВИЯ ЯДЕРНЫХ СИЛ. РАСЧЕТ ВОЗБУЖДЕННОГО СОСТОЯНИЯ ЯДЕР . РАСЧЕТ РАДИОАКТИВНОГО ПРЕВРАЩЕНИЯ ЯДЕР.	258
1. Модели атомных ядер. Обоснование циклонной модели атомного ядра.	258
2. Возбужденное состояние ядер с позиций структуры пространства малых линейных расстояний. Расчет электронного и позитронного распада ядер. Условия электронного и позитронного распада с позиций пространственной структуры.	265
3. Краткие сведения из теории альфа распада.	290
4. Схема расчета альфа распада. Ошибочность теории кулоновского барьера.	293
5. Обобщение результатов альфа распада. Расчет радиоактивных рядов.	301

ГЛАВА 7. КРИВИЗНА ФИЗИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА С ПОЗИЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ АЛГЕБРЫ. МИКРОЧАСТИЦЫ КАК РЕЗУЛЬТАТ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ МАСС.	311
1. Физические константы, фундаментальная масса и длина.	311
2. ОТО А. Эйнштейна и РТГ А. Логунова содержат в скрытой форме методы теории функций комплексного переменного.	313
3. Поле тяготения Шварцшильда в комплексном пространстве.	315
4. Комплексное пространство тяготения.	316
5. Оператор взаимодействия в структурном образовании.	318
6. Формула расчета масс элементарных частиц.	319
7. Гравитационно-электромагнитный потенциал в комплексном пространственном выражении. Модель частицы и микрочастицы. Определение электрического заряда, спина частиц.	322
8. Расчет модели атома водорода.	330
9. Доказательство гипотезы М. Планка о квантах энергии.	341
ГЛАВА 8. КЛАССИФИКАЦИЯ МИКРОЧАСТИЦ. СТРУКТУРА ФИЗИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА МИКРОЧАСТИЦ СООТВЕТСТВУЕТ СТРУКТУРЕ МНОГОСВЯЗАННОГО КОМПЛЕКСНОГО ПРОСТРАНСТВА.	345
1. Модели микрочастиц в гравитационном электрическом и лептонном комплексном пространстве. Соответствие между изолированными направлениями в комплексном пространстве и зарядовыми сопряжениями микрочастиц. Квантовые числа микрочастиц отражение многосвязности комплексного пространства.	345
2. Квантовые числа кварков есть следствие многосвязности пространства.	349
3. Рост многосвязности пространства определяет заряды S , C , B , t кварков. Модели кварков.	361
4. Лептоны, мезоны, барионы как линейная комбинация кварков u , d .	362
5. Структура глюонного поля. Расчет масс микрочастиц.	366
6. Система уравнений для расчета глюонного поля.	368
7. Оценка результатов расчетов глюонных полей и масс микрочастиц.	375
8. Сумма единичных глюонных вихрей с весовыми коэффициентами определяет структуру поля микрочастицы	381
9. Вычисление масс микрочастиц по кварковым композициям и модам распада. Вычисление квантовых чисел микрочастиц, исследование связи спина, изоспина, четности с величиной массы микрочастицы. Реализация квантовой СРТ-теоремы. Исследование закона не сохранения четности	397
10. Расчет энергии связи атомных ядер периодической таблицы элементов и их изотопов, исходя из структуры глюонных полей протона и нейтрона.	416
Таблица 8.2. Определитель из весовых коэффициентов протона, нейтрона, электрона, положительного пиона.	418
Таблица 8.3. Расчет массы атомных ядер периодической таблицы элементов и их изотопов	422
Литература	432

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория функций комплексного переменного ТФКП дошла до наших дней почти в том виде, в котором оставил нам ее создатель великий французский математик Огюстен Коши (1789-1857 гг.).

Связность функций на комплексной плоскости наиболее адекватно отражает ту связность, которая существует в реальных физических процессах. Методы ТФКП применяются во всех областях математического естествознания, начиная от макромира и кончая микромиром. Алгебра комплексных чисел отвечает классическим операциям над действительными числами. Поле комплексных чисел получено из поля действительных чисел присоединением лишь одного корня квадратного уравнения, не имеющего решения на действительной оси. С точки зрения современной абстрактной алгебры поле комплексных чисел алгебраически замкнуто, то есть, рассматривая корни многочленов, нельзя получить новых чисел.

Связность пространства, адекватно отражающего связность реального мира, требует создания аппарата комплексной пространственной алгебры с законами действительных и комплексных чисел. Эта связность определит в пространстве те геодезические линии, движение по которым является одним из математических условий, лежащих в основе теории гравитации.

Теорема Фробениуса отрицает возможность расширения поля комплексных чисел с коммутативным законом умножения элементов, то есть умножением, результат которого не зависит от перестановки сомножителей.

До настоящего времени считается невозможным обобщение числа в пространство. Совсем недавно математик Л. С. Понтрягин писал, “что никаких других логических возможностей для построения приемлемых в математике величин, аналогичных действительным и комплексным числам, кроме действительных и комплексных, не существует.

Исследователи за 140 лет после О. Коши не справились с основной проблемой математики – расширения поля чисел в N -мерное пространство с соблюдением законов алгебры действительных и комплексных чисел.

Попытка расширить поле комплексных чисел натолкнулась на появление новых чисел-объектов, свойство которых до настоящего времени не поддавались исследованию. Эти объекты получили название делителей нуля. Произведение двух чисел равно нулю, если одно из них равно нулю, а второе не равно нулю. Это тривиальный результат. Появились новые числа не равные нулю, дающие в произведении нуль. Исключить появление этих чисел возможно путем отказа от коммутативности умножения. В результате появились алгебры со скалярным, векторным, спинорным и тензорным умножением и т. д. Все это типовые варианты как показывает жизнь, которые постепенно обречены на вымирание.

Появление делителей нуля при росте размерности пространства закономерный результат, который следовал из теории функций О. Коши. Эти объекты связаны с пониманием структуры плоскости, задаваемой алгеброй комплексного числа. О. Коши показал, что на плоскости необходимо рассматривать точку с ее ε -окрестностью. Этот результат и должен был быть использован при построении и переходе в трехмерное пространство, когда к комплексной плоскости необходимо восстановить также комплексную плоскость, свернутую в ε -цилиндр. Тогда новые объекты – делители нуля, которые подчиняются законам классической алгебры, получают свое истолкование как числа с модулем рав-

ным корню из нуля и изолированным бесконечным аргументом. Именно, вследствие наличия изолированного направления, заключенного в третьем ε -цилиндре корень из нуля в пространстве для этих чисел не равен тождественно нулю. На действительной оси и в комплексной плоскости корень из нуля равен нулю. В трехмерном пространстве положение меняется. Срабатывает ε -окрестность начала координат. Доказательство основной теоремы алгебры не отрицает появление новых объектов, так как оно проведено без учета их свойств.

Исключение делителей нуля из рассмотрения привело к ограничению в расширении поля комплексных чисел и фактически исключило из рассмотрения математического естествознания изучение структуры пространства. Изучение структуры пространства пошло по тупиковым вариантам алгебр с законами операций, не соответствующих классическим законам чисел.

Основным признаком Декартовых координат и всех других, применяемых в исследованиях физических процессов, является то, что координатные оси имеют начало из одной точки и даже не из ее окрестности. Перенос системы координат из одной точки в другую, поворот осей координат и так далее, описывается около одной точки. Преобразования Галилея, описывающие переход от одной системы координат к другой системе, движущейся относительно первой равномерно и прямолинейно относятся к системам, в которых координатные оси исходят из одной точки.

Расстояние между двумя точками в декартовой системе координат даже для N -мерного пространства (где N -мерное пространство отождествляется с количеством координатных осей, также исходящих из одной точки) определено корнем квадратным из суммы квадратов разностей между этими точками по координатным осям. Эта формула дедуктивно перенесена из трехмерного пространства и также ошибочна.

Расстояние между двумя точками в N -мерном пространстве это корень N -степени из многочлена, представляющего сумму произведений координат в комбинациях дающих N -степень. Система линейных уравнений, применяемая при преобразовании одной системы координат в другую той же размерности с теми же законами алгебры (коммутативного или некоммутативного умножения), имеет определитель как сумму произведений координат, степень которой отвечает размерности пространства. В комплексной плоскости и комплексном пространстве определитель системы равен модулю комплексного числа возведенного для плоскости в квадрат, для пространства в степень рассматриваемого преобразования. Для четырехмерного пространства интервал равен корню четвертой степени из суммы произведений координат дающих в комбинации четвертую степень. В связи с этим никакими метрическими тензорами нельзя откорректировать интервал принятый в форме дедуктивного переноса его выражения как корня квадратного из многочлена, представляющего сумму квадратов комбинации координат.

Интервал Минковского есть частный случай квадрата расстояния между двумя точками в 4-мерном пространстве – времени. Этот частный случай совпал со скалярным произведением одноименных координат за вычетом координаты по времени. Перенос этой формы интервала как обобщение для рассмотрения интервала в неинерциальных системах отсчета является ошибкой.

Считается, что великий Лоренц, открыв свои знаменитые преобразования, полностью не осознал их значения. Это сделали различными путями Пуанкаре и Эйнштейн.

С позиций комплексного пространства становится очевидным, что Лоренц оставил свои преобразования в координатном выражении только потому, что не нашел необходимого математического аппарата.

Следом за ним Пуанкаре и Минковский открыли нам геометрию пространства-времени, а именно так называемую псевдоевклидову геометрию через интервал, полученный из преобразований Лоренца. Геометрия называется псевдоевклидовой, так как квадрат временного параметра в формуле расстояний между двумя точками входит в формулу со знаком минус. Таким образом, вместо того, чтобы разработать математический аппарат с законами классической алгебры, который одновременно соответствовал бы и преобразованию Лоренца и из которого интервал Минковского вытекал бы как частный случай реального физического расстояния между точками, исследователи пошли по пути подгонки под этот интервал координатных систем, введением метрических тензоров.

При этом самое существенное из теории О. Коши и преобразований Лоренца было потеряно, Этого не понял ни Минковский, ни Пуанкаре, ни Эйнштейн. Видимо это существенное, что появляется с ростом размерности пространства, а именно отказ от одной исходной точки в начале координатных осей понимал Лоренц и что до настоящего времени не понимает даже наш современник А. А. Логунов.

Преобразования Лоренца со всей очевидностью показывают, что координатные оси пространственные и временные исходят из разных точек окрестности начала координат. Не поняв этого Пуанкаре, Минковский, Эйнштейн выбросили из исследований самую существенную часть математического аппарата, которая отвечает за полевую структуру материи. Аппарат, обладающий модулем не равным нулю остался, а та часть которая отвечает за полевую материю, и разложена по осям координат, образуя крутящие моменты была выброшена в исходном состоянии исследований. Эта комплексная особенность пространства обуславливает кривизну пространства. В следствии этого не удалось теорию довести до логического конца.

Таким образом, выбросив из рассмотрения самую существенную особенность в координатных системах, которая и обуславливает кривизну пространства, разрабатываются теории гравитации ОТО А. Эйнштейна и РТГ А. Логунова, основанные на идеи кривизны пространства-времени.

Физические преобразования Лоренца требовали корректировки пространственно временных координат. Однако этого не произошло и из исследования была выброшена самая существенная часть —исследование формирования структуры с ростом размерности пространства.

Сечение трехмерного пространства плоскостью, проходящей через начало координат, имеет в этом начале эпсилон окрестность нуля. Сечение 4-х мерного пространства 3-х мерным дает в начале координат сферу эпсилон-радиуса. Наличие этой сферы и обуславливает искривление плоского пространственно-временного континуума. Эта последовательность логического построения учитывает и преобразования Лоренца и комплексный аппарат Коши. Пространство с любой метрикой псевдоевклидово.

Нельзя рассматривать координатные системы как абстрактное построение. Координатные системы с увеличением размерности должны адекватно отражать структуру материи. Иначе говоря, координатные системы чисел, подчиняющиеся классическим законам алгебры, содержат КОД формирования материи и не являются чем то абстрактным по отношению к ней. Законы классиче-

ской алгебры более адекватно отражают физические законы и процессы чем все физические теории.

Почти сто лет теоретическая физика работает в пространствах, из которых выброшены самые существенные объекты—делители нуля. Световой конус теории относительности это подпространство делителей нуля, величины которого обладают свойствами делителей нуля: модуль у которых равен корню из нуля, а аргумент определен изолированным направлением.

Интервал теории относительности Минковского показал, что пространственные координатные оси повернуты относительно временных на 90 градусов и имеют начало в разных точках начала координат. При равенстве пространственных и временных координат образуется подпространство делителей нуля — адекватное подпространству светового конуса.

Таким образом, для исследования полевой характеристики материи необходимо соблюдения двух условий: классических законов алгебры чисел, и использование системы координат с комплексной особенностью в ее начале.

Теоретическая физика допустила сразу две ошибки, введя скалярное умножение при выводе формулы интервала.

Опишем, что дает комплексная пространственная алгебра и систему комплексных пространственных координат.

Комплексная плоскость определяет точку с ε -окрестностью. Начало координат не является точкой, а является ε -окрестностью нуля. В связи с этим третья координатная ось не является линией, а является цилиндрической поверхностью радиуса ε . Понятие точки и координатных линий расширяются до понятий ε – сфер и ε -цилиндров. Если две координатные оси представляют цилиндры комплексных точек, то третья координатная ось представляет цилиндр с двойными стенками, между которыми расположены цилиндры, предыдущей размерности. В этом комплексном пространстве модуль комплекса равен интервалу теории относительности Минковского, выведенный из преобразований Лоренца.

Таким образом, интервал теории относительности возникает и получается естественным образом через соблюдение законов классической алгебры и правильного построения системы координат. В таком пространстве нет линий как таковых, а есть спирали намотанные на ε -цилиндры с переменной частотой витка. Ввиду малости ε - эти спирали воспринимаются как линии. В плоскости двух координатных цилиндров точка становится объемным объектом —сферой проколотой изолированными направлениями. Пространство, заключенное внутри этих цилиндров принадлежит пространству другого измерения. Функция определенная в таком пространстве соответствует физической трактовке суперпозиции волн.

В теоретической физике физическое поле описывается одно- или многокомпонентной функцией координат и времени, называемой функцией поля. В качестве переменных берутся величины, которые подчинены законам скалярной, спинорной, векторной и тензорной алгебр.

К полевым переменным теоретическая физика добавила метрический тензор пространства—времени. Теоретическая физика объясняет это определением естественной геометрии физического поля и выбором той или иной системы координат. Таким образом, совершив ошибки в самом начале исследований, делается попытка их исправления с помощью операций, не соответствующих числовым операциям. Не геометрия пространства—времени в данном случае при таком порядке исследований определяет интервал, а интервал через искусствен-

но введенные тензорные величины определяет геометрию пространства-времени. В этом порядке потеряно самое главное—возможность исследовать структурирование пространства с ростом его размерности. Геометрия должна четко определять как координаты одного измерения вписываются в координаты другого измерения, какую физическую нагрузку несет одно измерение относительно другого.

Для поиска естественной геометрии используются уравнения Гамильтона - Якоби, Фока,

Шредингера. Условия, которые получают из этих уравнений, накладывают на метрический тензор и тем самым утверждают, что получена естественная геометрия. Однако это тоже порочный круг, Условия должны вытекать из интегральных теорем N-мерного пространства, наподобие условиям Коши-Римана в плоскости.

Естественная геометрия должна определять структуру пространства, которая в свою очередь должна соответствовать структуре периодической таблицы элементов Д. И. Менделеева.

Исследования структуры N-мерного комплексного пространства, построенного на базе алгебры с классическими операциями чисел, дало полное соответствие с формированием периодической таблицы элементов

Теоретическая ядерная физика разработала ряд моделей атомного ядра, ни в одной из которых не учитывается структура пространства, так как она выброшена из рассмотрения из математического аппарата, и поэтому модели не в состоянии дать возможность рассчитать ключевые моменты ядерной физики. До настоящего времени не выведена формула энергии связи атомных ядер, не завершены теории радиоактивных распадов, механизм альфа распада объясняется просачиванием альфа частицы через кулоновский барьер. Для описания механизма альфа распада применено уравнение Шредингера и результат получился глубоко ошибочным.

Комплексное пространство вскрыло структуру тяжелых ядер. Ядра состоят из двух блоков потенциальных ядер первой половины периодической таблицы. Появление Лантаноидов связано с началом формирования второго блока в тяжелых ядрах. Устойчивым блоком следует считать блок из 6-ти мезонных зарядов, которые удерживают 51-56 протонов и от 70 до 90 нейтронов. Например при взрыве атомного ядра Урана происходит развал одного мезонного заряда, который находится в пространстве другого измерения, чем протоны и нейтроны ядра. Фактически происходит взрыв пространства другого измерения с выделением энергии до 200Мэв. При этом происходит асимметричный распад ядра ; имеем один блок из 6 мезонных зарядов и второй блок из 4 мезонных зарядов, так что имеем экспериментальное соотношение по массам между продуктами деления 3/2. Получен результат, который до настоящего времени представляет трудность ядерной физике.

Альфа-распад тяжелых ядер является следствием возбуждения ядра в результате радиоактивных превращений внутри материнского ядра между блоками-ядрами.

Полевая структура (иначе мезонный заряд, обменный квант и т. д.) имеет размерность более высокую по сравнению с пространством взаимодействующих структур (так же как компонента времени в преобразованиях Лоренца создает более высокую размерность) поэтому взаимодействию есть результат изменения параметров, которые характеризуют пространства разных измерений.

Этот вывод позволил получить формулу энергии связи атомных ядер, отвечающую экспериментальным данным.

Обращение к ядерной физике обусловлено наличием большого опубликованного справочного материала.

Введение структуры пространства, разработанной на базе классической алгебры над действительными и комплексными числами, и отвечающей физическим преобразованиям Лоренца, позволило эффективно рассчитать с большой степенью достоверности (почти 99%) с экспериментальными данными расчеты: электронного, позитронного, альфа распада, энергии связи атомных ядер.

ОТО (Общая теория относительности) А. Эйнштейна, РТГ (Релятивистская теория гравитации) Логунова не доведены до логического конца вследствие указанных выше ошибок.

Если допустить, что интервал теории относительности, откорректированный физическими условиями, введенными в РТГ Логуновым, соответствует реальному физическому пространству, то применяя к нему аппарат алгебры комплексного пространства, удастся представить его в четырехмерных физических координатах. В этом случае начало координат будет содержать сферическую окрестность нуля, которая будет содержать кроме направлений четырехмерного пространства-времени изолированное направление, не принадлежащее четырехмерному пространству-времени. Пространственные оси координат будут развернуты относительно временных на 90 градусов и имеют разные точки начала в этой сферической окрестности. Эта окрестность есть гравитационный радиус Шварцшильда (как частный случай).

Только в этом случае плоское пространство обладает кривизной, которая максимальна в начале координат и стремится к нулю на бесконечности.

Такое построение определяет как материальную так и полевую форму материи.

Фундаментальная масса $2 \cdot 10^{-5}$ г. в начале координат создает максимальную кривизну пространства. Фундаментальная длина есть в такой трактовке гравитационный радиус Шварцшильда $1,6 \cdot 10^{-33}$ см.

При взаимодействии двух фундаментальных масс на расстоянии комптоновской длины протона $0,2 \cdot 10^{-13}$ см получаем массу протона $1,6 \cdot 10^{-24}$ г.

Таким образом, преодолена та теоретическая брешь, которая образовалась между тяготением и теорией микрочастиц.

Идея о кривизне пространства-времени от СТО (Специальная теория относительности), ОТО А. Эйнштейна до РТГ А. А. Логунова остается в силе и для расчета микрочастиц

$$m_i c^2 = G m_g^2 / \lambda_i^{komp},$$

где m_i - масса микрочастицы, c - скорость света, G - гравитационная постоянная,

m_g - фундаментальная масса, λ_i^{komp} - комптоновская длина волны микрочастицы.

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Введены основные понятия теории функций пространственного комплексного переменного (ТФПКП): понятие функции, ее производной, интеграла. Показано, что обычные определения классического анализа и теории функций комплексного переменного (ТФКП) переносятся почти без изменения в ТФПКП, но содержание, особенно в критических точках пространства, меняется существенным образом.

Выведены пространственные условия дифференцируемости функции – аналог условий Коши – Римана. Исследована связность пространства и дана теорема – аналог теоремы Коши, как в случае криволинейного интеграла, так и в случае поверхностного.

Особое внимание уделено четырехмерному пространству, содержащему множество, образованное делителями нуля, которое в цилиндрических координатах образует конус-фильтр, состоящий из дискретных точек, а в сферических координатах этот конус сворачивается в цилиндрическую ось с изолированным направлением.

Классические функции анализа приобретают на этом конусе новые свойства, дополняющие понятия этих функций, определенных в плоскости комплексного переменного.

Показана принципиальная возможность создавать объемные конформные отображения и в качестве примеров рассмотрены конформные отображения, которые получаются с помощью дробно-линейной функции, функции Жуковского и их комбинаций.

Дана теория рядов Тейлора и Лорана, построена теория вычетов, получена лемма - аналог леммы Жордана в пространстве и дано применение этой леммы к вычислению не поддававшихся ранее вычислению несобственных двойных интегралов.

1.1. Пространственная комплексная система чисел

1.1.1. Закон извлечения корня из числа.

Алгебра плоского комплексного анализа определила закон извлечения корня из числа в виде формулы $Z_K = \sqrt[n]{|\alpha|} e^{\frac{i(\arg \alpha + 2K\pi)}{n}}$, где α есть комплексное число такое, что $\alpha \neq 0$, $\|\alpha\|$ есть модуль комплекса, $\arg \alpha$ есть аргумент комплекса, K есть целое число.

Рассмотрим простейшее уравнение $z^2 - 1 = 0$. Определим его корни, путем отыскания его корней по заданной формуле, то есть извлечем квадратный корень из +1.

На плоскости комплексного переменного число равное +1 имеет два аргумента $\arg \alpha = 0$ и $\arg \alpha = 2\pi i$ и определено двумя точками: одна точка на верхнем берегу разреза плоскости Z по прямой $0 \leq x \leq \infty$, другая точка на нижнем берегу разреза. Извлечение квадратного корня из этих точек с разными аргументами дает один и тот же результат ± 1

$$z_K = \sqrt[2]{1} e^{\frac{i(0+2K\pi)}{2}}, z_{K=0} = 1, z_{K=1} = -1$$

$$z_K = \sqrt[2]{1} e^{i(2\pi+2K\pi)\frac{1}{2}}, z_{K=0} = -1, z_{K=1} = 1$$

Квадратное уравнение для двух разных точек имеет два одинаковых корня. Две разные точки в плоскости (Z) определяют одно и тоже число +1. При построении комплексного пространства эту особенность необходимо учитывать. Рассмотрим решение квадратного уравнения по следующему варианту: $z^2 - (-1)(-1) = 0$. Так, что необходимо исследовать извлечение квадратного корня из произведения (-1)(-1).

$$z_K = \sqrt{(-1)} e^{(\pi i + 2K\pi i)\frac{1}{2}} \sqrt{(-1)} e^{(\pi i + 2K\pi i)\frac{1}{2}} = e^{(\pi i + 2K\pi i)\frac{1}{2}} e^{(\pi i + 2K\pi i)\frac{1}{2}}, K = 0, 1$$

получим $z_1 = -1; z_2 = -1$.

Единица была представлена как произведение двух отрицательных единиц, которые на плоскости (z) представляют одну точку с аргументом $\arg(-1) = \pi i$. Точка находится на верхнем берегу разреза комплексной плоскости (z) по оси $-\infty \geq x \leq 0$. Для получения второго корня в этом случае требуется перемешивание системы отсчета, то есть введение $K_1 = 0, 1$

$K_2 = 0, 1$ Тогда

$$z_K = e^{(\pi i + 2K_1\pi i)\frac{1}{2}} e^{(\pi i + 2K_2\pi i)\frac{1}{2}} \text{ так, что получаем}$$

$$z_1 = (z_K)_{K_1=0, K_2=1} = e^{\frac{\pi i}{2}} e^{\frac{\pi i}{2} + \pi i} = +1,$$

$$z_2 = (z_K)_{K_1=1, K_2=0} = e^{\frac{\pi i}{2} + \pi i} e^{\frac{\pi i}{2}} = +1, \text{ и если } K_1 = K_2 = 0, \text{ или}$$

$K_1 = K_2 = 1$ то имеем второй корень равный -1

$$z_1 = (z_K)_{K_1=K_2=0} = e^{\frac{\pi i}{2}} = -1,$$

$$z_2 = (z_K)_{K_1=K_2=1} = e^{(\frac{\pi i}{2} + \pi i)2} = -1.$$

Таким образом, показано, что закон извлечения корня из +1 в комплексной плоскости Z дает два корня ± 1 только в том случае когда системы отсчета перемешаны. В этом случае можно рассмотреть такую систему аргументов в пространстве чисел и их циклическое изменение при которых система отсчета K для обоих аргументов будет одним числом.

Представим

$$z_K = e^{(\pi i + 4k\pi i)\frac{1}{2} + (\pi j + 2k\pi j)\frac{1}{2}}, \text{ где } K = 0, 1, \text{ а мнимая единица } j \text{ отличается}$$

от мнимой единицы i только обозначением, тогда имеем

$$z_1 = (z_k)_{k=0} = e^{\frac{\pi i}{2}} e^{\frac{\pi j}{2}} = ji$$

$$z_2 = (z_k)_{k=1} = e^{(\frac{\pi i}{2} + 2\pi i)} e^{\frac{\pi j}{2} + \pi j} = -ji$$

Таким образом, комплексное число может быть представлено как пространственное с двумя аргументами в виде

$v = \text{Re}^{i\varphi + j\psi}$ с пространственным изменением аргументов и их циклическим приращением равным $\Gamma_k = (4\pi i + 2\pi j)k$, где k есть целое число.

Извлечение квадратного корня из $+1$, кроме тривиального решения $\sqrt{1} = \pm 1$, дает пространственное: $\sqrt{1} = \pm ji$, и имеем следующую алгебру мнимых единиц $(ji)^2 = (j)^2(i)^2 = i^2 j^2 = (-1)(-1) = +1$,
 $ji = ij$. (1.1.)

1.1.2. Решение квадратного уравнения в пространстве чисел.

Расширение поля комплексных чисел считается невозможным. Расширение поля комплексных чисел связывают с выявлением математической операцией над ними, которая не выполнялась бы в этом поле. В связи с отсутствием такой операции поле комплексных чисел определено как замкнутое. В этом заключена логическая ошибка. Ситуация, требующая расширения поля комплексных чисел существует и для этого необходимо вновь вернуться к рассмотрению решения квадратного уравнения. Рассмотрим классический ход решения квадратного уравнения

$v^2 + 2av + b = 0$, где коэффициенты a , b действительные или комплексные. Произведем последовательно операции

$$\begin{aligned} v^2 + 2av + b + a^2 - a^2 &\Rightarrow [(v + a)^2 - (a^2 - b)] \Rightarrow \\ &\Rightarrow [(v + a) - \sqrt{a^2 - b}] \cdot [(v + a) + \sqrt{a^2 - b}] \Rightarrow \\ &\Rightarrow (a^2 - b) \left[\frac{v + a}{\sqrt{a^2 - b}} - 1 \right] \cdot \left[\frac{v + a}{\sqrt{a^2 - b}} + 1 \right] = 0. \end{aligned}$$

Считаем $a^2 - b \neq 0$. Произведение двух сомножителей $X \cdot Y$ равно нулю в трех случаях:

- 1) $X = 0, Y \neq 0$
 - 2) $X \neq 0, Y = 0$
 - 3) $X \neq 0, Y \neq 0$.
- (1.2.)

Третий случай определяет произведение делителей нуля. Первые два варианта дают классический случай решения и два корня квадратного уравнения в действительной и комплексной областях

$$v_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - b}.$$

Это тривиальное решение. Исключить из рассмотрения третий случай не оправдано с логической точки зрения. Два сомножителя не равные нулю, в произведении дающих ноль, существуют в пространстве комплексных чисел.

Обозначим

$$\frac{v + a}{\sqrt{a^2 - b}} = \pm ji$$

где было введено: $i^2 = -1, j^2 = -1, ji = ij, (ji)^2 = +1$.

Подставляя выражение в квадратное уравнение, получим произведение

$$\Rightarrow (ji - 1)(ji + 1) = (ji)^2 - ji + ji - 1 = 0.$$

Откуда следует, что квадратное уравнение имеет еще два корня в пространственном поле чисел

$$v_{3,4} = -a \pm ji\sqrt{a^2 - b}.$$

Ввиду того, что $(ji)^2 = 1$ отыскание корней не представляет трудностей. Появление коэффициента ji перед дискриминантом в решении квадратного уравнения определяет разветвление в решении в силу изменения размерности пространства. Квадратный корень имеет разветвление на отрицательное и положительное значение в любой размерности пространства и поэтому корни являются сопряженными. Поэтому квадратное уравнение имеет по меньшей мере четыре корня.

Пример: Имеем квадратное уравнение

$$v^2 + 4v + 3 = 0$$

Корни в действительной области чисел $v_1 = -1, v_2 = -3$, уравнение разлагается на два сомножителя

$$v^2 + 4v + 3 = (v + 1)(v + 3) = 0$$

для этого разложения действует два первых варианта равенства нулю произведения двух множителей.

Корни в комплексном пространстве чисел соответственно равны

$$v_{3,4} = -2 \pm ji\sqrt{1}, \text{ откуда } v_3 = -2 + ji, v_4 = -2 - ji, \text{ уравнение раз-}$$

лагается на два сомножителя

$$v^2 + 4v + 3 = (v + 2 - ji)(v + 2 + ji) = 0$$

для этого варианта корней также действуют два первых варианта равенства нулю произведения двух множителей

Если во второе разложение подставить корни из плоскости -1 или -3 то разложение переходит в произведение делителей нуля (третий вариант равенства нулю произведений двух сомножителей)

$$v^2 + 4v + 3 = (-1 + 2 - ji)(-1 + 2 + ji) = (1 - ji)(1 + ji) = 0,$$

где $1 - ji \neq 0, 1 + ji \neq 0$

Аналогичная ситуация получается при подстановке корней из пространства чисел в разложение в действительной области. Корни из пространства одного измерения лежат на изолированной оси пространства другого измерения.

Пример: Квадратное уравнение $v^2 - 1 = 0$ имеет четыре корня: $v = 1, v = -1$ в действительной области чисел, $v_3 = ji, v_4 = -ji$. В пространстве квадратное уравнение разлагается по двум равноценным вариантам

$$v^2 - 1 = (v + 1)(v - 1) = (v + ji)(v - ji) = 0.$$

Подстановка любого корня уравнения из одной области пространства в разложение из другой области пространства дают произведение делителей нуля.

$$v^2 - 1 = (1 + ji)(1 - ji) = 0.$$

1.1.3. К вопросу об основной теореме алгебры.

Появление новых корней в квадратном уравнении не противоречит многочисленным формулировкам основной теоремы алгебры, а уточняет их в плане

принадлежности многочлена к определенной мерности пространства, способе разложения его на линейные множители и количестве вариантов этих разложений. Основная теорема алгебры относится к числовым полям и многочленам, определенным в них. Пространственная комплексная алгебра относится к числовым полям, поэтому необходима корректировка основной теоремы алгебры. До настоящего времени корректировка не требовалась, так как двумерному комплексному полю не было альтернативы. Многочлен в конечном счете эта функция, а функции всегда определены в каких либо полях, поэтому расширение поля комплексных чисел влечет за собой корректировку основной теоремы. Отыскание новых корней многочлена из условия когда два линейных множителя не равных нулю в произведении дают нуль не противоречит основной теореме алгебры, а показывает, что многочлен может быть разложен на произведение линейных множителей по целому ряду эквивалентных вариантов.

Пусть задан многочлен n степени

$$Q(v) = c_n v^n + c_{n-1} v^{n-1} + \dots + c_1 v + c_0,$$

в котором коэффициенты $c_n, c_{n-1}, \dots, c_0$ могут быть действительными или комплексными числами. Если многочлен не имеет обычных кратных корней, то он может быть разложен на произведение n линейных множителей

$$Q(v) = (v - a_1)(v - a_2) \cdot \dots \cdot (v - a_n)$$

Если многочлен имеет комплексные корни, то к произведению линейных множителей добавляются квадратные многочлены.

Произведение двух линейных множителей дает квадратный трехчлен в общем виде, который в пространстве может иметь эквивалентное разложение на линейные множители, корни в которых определены из условия существования в пространстве делителей нуля. В пространстве для многочлена степени n больше 2 эквивалентных разложений бесконечное множество, так как к каждому эквивалентному разложению можно применить формулу сочетаний из n по 2

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

Сочетание определяет количество возможных квадратных многочленов в эквивалентных разложениях, которые можно разложить на новые линейные множители, определенные из условия существования в пространстве делителей нуля. Перебирая в каждом эквивалентном разложении произведение линейных множителей получаем новое эквивалентное разложение

$(v - a_i)(v - a_k) = (v - \beta_i)(v - \bar{\beta}_i)$, где $\beta_i, \bar{\beta}_i$ -сопряженные корни, определенные из условия существования в пространстве делителей нуля.

Пример №3

Имеем $Q(v) = v^3 - 6v^2 + 11v + 6 = 0$, корни этого многочлена в действительной области

$v_1 = 1, v_2 = 2, v_3 = 3$, поэтому первый вариант разложения имеет вид

$Q(v) = (v - 1)(v - 2)(v - 3)$, многочлен может быть разложен еще по трем вариантам

$Q(v) = (v^2 - 3v + 2)(v - 3) = 0$, квадратный трехчлен имеет два пространственных корня

$$v_4 = \frac{3}{2} + j\frac{1}{2}, v_5 = \frac{3}{2} - j\frac{1}{2} \text{ по этому имеем}$$

$$Q(v) = (v - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}ji)(v - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}ji)(v - 3) = 0$$

Далее первый линейный множитель(или второй) в произведении с третьим даст также квадратное уравнение ,которое вновь может быть разложено на произведение линейных множителей с новыми корнями.

Второй вариант разложения

$$Q(v) = (v^2 - 4v + 3)(v - 2) = (v - 2 - ji)(v - 2 + ji)(v - 2) = 0,$$

Произведение первого или второго линейного множителя с третьим дадут также квадратный многочлен, решение которых позволит получить еще два эквивалентных разложения. Дналогично обстоит дело и с третьим исходным разложением.

Третий вариант разложения

$$Q(v) = (v^2 - 5v + 6)(v - 1) = (v - \frac{5}{2} - \frac{1}{2}ji)(v - \frac{5}{2} + \frac{1}{2}ji)(v - 1) = 0$$

Сочетание линейного множителя с другими линейными множителями в любом эквивалентном разложении даст новое квадратное уравнение ,решение которого даст новое разложение на линейные множители. Эта цепочка разложений бесконечна, так как сочетание из n по 2 для многочлена с $n > 2$ можно применить бесконечное число раз.

Подстановка любого корня из эквивалентных разложений в другие разложения обращают последние в ноль. В пространстве вычет нуля означает вычет всего подпространства делителей нуля. Вычет нуля означает вычет всего изолированного направления и всех эквивалентных разложений многочлена ,которые на этом направлении тождественно равны нулю.

Пример.Рассмотрим разложение многочлена третьей степени на эквивалентные разложения $Q(v) = (v - 1)(v + 1)(v - 2)$. Одно из эквивалентных разложений имеет вид $Q(v) = (v - ji)(v + ji)(v - 2)$.Далее рассматривая произведение первого множителя в этом разложении с третьим получим квадратное уравнение , решение которого даст новое разложение

$$Q(v) = \left(v - \frac{3 - ji}{2}\right) \left(v - \frac{3 + ji}{2}\right) (v + ji)$$

Таким образом, имеем цепочку эквивалентных разложений $Q(v) = (v - 1)(v + 1)(v - 2) = (v - ji)(v + ji)(v - 2) =$

$$= \left(v - \frac{3 - ji}{2}\right) \left(v - \frac{3 + ji}{2}\right) (v + ji) = \dots\dots\dots$$

Подстановка любого корня из одного разложения в другое обращает его в ноль по законам комплексной пространственной алгебры.

Каждое эквивалентное разложение имеет n корней в соответствии со степенью многочлена.

Перемешивание линейных множителей из одного эквивалентного разложения с другим недопустимо , ибо приводит к другому многочлену.

Произведение сопряженных делителей нуля определяют ноль в пространстве. При подстановке одного из корней разложения в другое эквивалентное разложен

не обращает два линейных множителя в произведение делителей нуля общего вида $v_d \overline{v_d} = \text{Are}^{i\varphi} \text{Are}^{i\varphi} (1 - ji)(1 + ji) = 0$. При этом эквивалентные разложения вычитаются из пространства вместе с вычетом этого корня.

Многочлен может быть представлен как сумма двух эквивалентных разложений, например

$$Q(v) = (v-1)(v+1)(v-2) = \frac{1}{2}(v-1)(v+1)(v-2) + \frac{1}{2}(v - ji)(v + ji)(v-2).$$

Это разложение применено в дальнейшем для исследования поведения функций и операций с ними. В дальнейшем можно будет ограничиться одним из эквивалентных разложений.

Пространство накладывает жесткое ограничение на варианты разложений. В пространстве для эквивалентных разложений квадратного многочлена область должна включать обо сопряженных корня, определяемых из условия наличия делителей нуля. Если рассматривается многочлен только в верхнем или только нижнем полупространстве то разложение не имеет эквивалентных.

Функции вида $\frac{P_m(v)}{Q_n(v)}$, где в числителе и знаменателе многочлены соответственно степени m и n и $m < n$, разлагается на сумму простых дробей вида

$$\frac{A}{(v-a)^r}, \frac{Bv+D}{(v^2+pv+q)^k}.$$

В пространстве квадратный трехчлен вне зависимости от знака дискриминанта $p^2 - 4q$ может быть разложен на линейные дроби по двум вариантам

$$\frac{1}{v^2+pv+q} = \frac{\alpha}{v-v_1} - \frac{\beta}{v-v_2},$$

где v_1, v_2 есть корни, могут быть действительными и комплексными в зависимости от видов коэффициентов p, q а также

$$\frac{1}{v^2+pv+q} = \frac{\eta}{v-v_3} - \frac{\lambda}{v-v_4},$$

где v_3, v_4 есть корни в пространстве.
Примечание. Линейный множитель $v - a = 0$ имеет только один корень a . Если принять

$$v = jia \text{ то } v - a = a(ji - 1) \neq 0. \text{ Поэтому дробь}$$

$$\frac{1}{v-a} \text{ имеет один корень в знаменателе } v = a.$$

Примечание: Квадратное уравнение $v^2 + pv + q = 0$ разлагается по двум вариантам (1.2.) в произведение линейных множителей $(v - v_1)(v - v_2) = (v - v_3)(v - v_4) = 0$, где v_1, v_2, v_3, v_4 являются корнями квадратного уравнения, определенные по трем вариантам, подстановка любого из них в исходное квадратное уравнение обращает его в ноль.

Таким образом, дробь должна в пространстве раскладываться на две простейшие дроби

$$\begin{aligned} \frac{1}{v^2 + pv + g} &= \frac{1}{2} \frac{1}{v^2 + pv + g} + \frac{1}{2} \frac{1}{v^2 + pv + g} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{(v - v_1)(v - v_2)} + \frac{1}{2} \frac{1}{(v - v_3)(v - v_4)} \end{aligned}$$

При подстановке корней v_1 или v_2 во вторую дробь последняя в знаменателе будет иметь ноль как произведение делителей нуля. При подстановке корней v_3 или v_4 в первую дробь в знаменателе также будем иметь ноль как произведение делителей нуля. Других корней квадратное уравнение не имеет. Разложение дроби на сумму двух простейших дробей единственно. Разложение показывает, когда переменная v равна одному из корней уравнения, стоящего в знаменателе, то обе дроби имеют в знаменателе ноль. Причем вторая дробь имеет ноль как произведение делителей нуля. Поэтому изолирование одного из корней в пространстве Y приводит к изолированию конуса делителей нуля, исходящего из точки, фиксированной этим корнем.

В результате дробь разлагается в пространстве на сумму четырех дробей, что позволяет исключить из рассмотрения в пространстве точек изолированной оси.

$$\frac{1}{v^2 + pv + q} = \frac{1}{2(v_1 - v_2)} \left[\frac{1}{v - v_1} - \frac{1}{v - v_2} \right] + \frac{1}{2(v_3 - v_4)} \left[\frac{1}{v - v_3} - \frac{1}{v - v_4} \right]$$

Если в знаменателе одну из разностей приравнять делителю нуля

$$v - v_k = re^{i\varphi + j\psi} (1 \pm ji) \text{ тогда}$$

$v = v_k + re^{i\varphi + j\psi} (1 \pm ji)$ и в соответствии с комплексной алгеброй заключаем, что точка v_k , являющаяся одним из корней уравнения, стоящего в знаменателе, окружена сферой из делителей нуля. В этом случае модуль r изменяется в пределах $\sqrt{0} \leq r \leq \infty$.

В силу свойств делителей нуля $v \pm v(1 \pm ji) \neq v$ последнее соотношение необходимо рассматривать как замену переменных и перенос критической точки в нулевую точку с изолированным направлением.

1.1.4. Пространственные комплексные числа

Учитывая вышесказанное пространственным комплексным числом назовем выражение вида

$$v = z + j\sigma \tag{1.3.}$$

где z и σ - комплексные числа вида $\chi + i\gamma$, $\xi + i\eta$, а символы i, j - мнимые единицы, таблица умножения которых задается в следующем виде:

$$\begin{aligned} ii &= jj = -1 \\ ij &= ji = k, \\ (ij)^2 &= (ij)^2 = k^2 = 1 \end{aligned}$$

Таким образом, пространственный комплекс v можно рассматривать, как векторную сумму двух плоских комплексов

$$v = z + j\sigma = (\chi + i\gamma) + j(\xi + i\eta). \tag{1.4.}$$

Комплексы z и σ будут являться действительной и мнимой частью пространственного комплекса v

$$z = \text{Re } v = \text{Re } (z + j\sigma)$$

$$\sigma = \text{Im } v = \text{Im } (z + j\sigma)$$

Числа χ, γ, ξ, η соответственно определяется выражениями:

$$\begin{aligned} \chi &= \text{Re } \text{Re } v, & \gamma &= \text{Re } \text{Im } v \\ \xi &= \text{Im } \text{Re } v, & \eta &= \text{Im } \text{Im } v \end{aligned}$$

Если $\sigma = 0$, то комплекс V плоский и равен z . Если $z = 0$, то комплекс V пространственно мнимый, $V = j\sigma$.

Два пространственных комплексных числа равны, если равны их мнимые и действительные части:

$$z_1 + j\sigma_1 = z_2 + j\sigma_2$$

тогда и только тогда, когда $z_1 = z_2$, $\sigma_1 = \sigma_2$.

Если $\sigma_1 = -\sigma_2$, то комплексное пространственное число V_2 будет называться пространственно сопряженным числом и обозначаться

$$\overline{z + j\sigma} = z - j\sigma = \bar{V}$$

Определим простейшие операции.

1. Сложение. Суммой $V_1 + V_2$ чисел $V_1 = z_1 + j\sigma_1$ и $V_2 = z_2 + j\sigma_2$ назовем комплексное число $V = V_1 + V_2 = (z_1 + z_2) + j(\sigma_1 + \sigma_2)$.

Разность двух комплексных чисел в пространстве обозначим символом $V_1 - V_2$. Очевидно $V = V_1 - V_2 = (z_1 - z_2) + j(\sigma_1 - \sigma_2)$

Для пространственных комплексных чисел выполняется переместительный и сочетательный законы сложения:

$$V_1 + V_2 = V_2 + V_1;$$

$$V_1 + (V_2 + V_3) = (V_1 + V_2) + V_3$$

2. Умножение. Произведением $V_1 V_2$ пространственных комплексных чисел

$$V_1 = z_1 + j\sigma_1, \quad V_2 = z_2 + j\sigma_2$$

называется пространственное комплексное число

$$V = V_1 V_2 = (z_1 z_2 - \sigma_1 \sigma_2) + j(z_1 \sigma_2 + \sigma_1 z_2).$$

Если $V_1 = j$, $V_2 = j$, то $jj = -I$.

Таким образом, конкретные примеры показывают, что операции сложения и умножения аналогичны операциям в комплексной плоскости до тех пор, пока комплексы z и σ взяты в общем виде.

Очевидно, на этом уровне справедливы законы умножения:

$$\text{Переместительный} \quad V_1 V_2 = V_2 V_1;$$

$$\text{Сочетательный} \quad V_1 (V_2 V_3) = (V_1 V_2) V_3;$$

$$\text{Распределительный} \quad (V_1 + V_2) V_3 = V_1 V_3 + V_2 V_3.$$

1.1.5. Геометрическая иллюстрация пространственного комплексного числа

Вершиной классической математики и математического анализа является теория функций комплексного переменного (ТФКП), основателем которой является французский математик О. Коши. Теория дошла до нашего времени почти в том виде, в котором она была создана.

Значительно усилив мощь математического аппарата в инженерных расчетах, теория Коши оставила инженерный аппарат плоским расчетным. Для перехода к описанию пространственных физических процессов и явлений требуется введение в аппарат дополнительных координат, которые не соответствуют определению пространственной точки и окрестности ее, которая заложена в теории Коши. В теоретической физике например, вводят матрицы, которые ближе к программному обеспечению чем к математическому аппарату.

Для описания пространственных явлений и процессов исследователи строят свои конкретные физико-математические модели. Инженерный расчет достигает успеха лишь в том случае, когда он проводится с соблюдением законов алгебры обычных чисел.

Сложность физических процессов, например, на уровне атомного ядра и электронных оболочек требует создание эффективной пространственной модели.

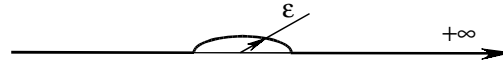


Рис. 1. Ось в комплексном пространстве

Теория Коши в этом плане дает предпосылки для построения такой пространственной модели и она используется в теоретической физике. Теоремы Коши об изолированных точках и вычетах, а также взаимосвязь точек на плоскости комплексных координат дают основание на пересмотр абстрактного понятия точки. Рассмотрим последовательно: линию, плоскость, пространство, опираясь на принятые понятия, но делая свои выводы.

Линия рассматривается как одномерное пространство, как и делают современные исследователи. Однако как только на линии ставится точка ноль, как начало координат, что означает на инженерном языке привязку этой линии к реальному пространству, назвать линию одномерным пространством означает допустить грубейшую ошибку. Переход по линии из $-\infty$ через точку 0 к $+\infty$ нельзя не обогнув 0 по дужке и совершив оборот на угол $\varphi = \pm\pi$.

Можно игнорировать этот факт, называя линию одномерным пространством, но можно утверждать, что линия терпит разрыв в точке начале координат, какой бы минимальный радиус

Дужке $\varepsilon \rightarrow 0$ не был, либо это уже не одномерное пространство.

Далее рассматриваем установившееся понятие двумерного (плоского) пространства. Если плоскость рисуется без начала координат, то это понятие не несет физического смысла. Если плоскость привязана к реальному пространству, то в ней фиксируется начало координат. В этом случае логика предыдущих рассуждений вступает в силу. Окрестность нуля не принадлежит этому двумерному миру. Окрестность нуля выколотое двумерное пространство. Определение, ноль имеет неопределенный аргумент $0 = 0e^{i\varphi}$, физически означает, что плоскость проколота лучом, исходящим из другого измерения. Последнее и утверждает, что плоскость несет в себе элемент пространства.

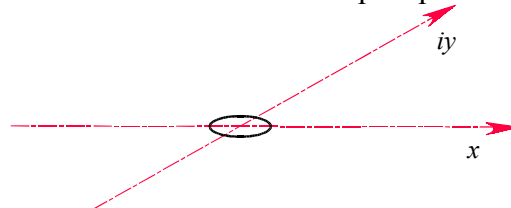


Рис. 2. Комплексная плоскость

Нельзя пройти точку ноль по прямой, не обогнув ее по дужке в его окрестности. Можно радиус дужки устремить к нулю, однако физическая сторона и в этом случае не меняется. Определение нуля как $0 = 0e^{i\varphi}$ в физических расчетах дает возможность игнорировать аргумент в точке ноль, до тех пор как ноль не становится критической точкой. Простейшую кривую на плоскости окружность нельзя стянуть в точку около критической точки.

Продолжая эту логическую цепочку, восстановим к плоскости не линию, как это делает классическая математика, а цилиндрическую трубочку радиуса

окрестности нуля. Сфера в таком пространстве является сферой с проколотыми вершинами. Пространство внутри сферы между ее внутренней поверхностью и наружной поверхностью цилиндрической оси есть пространство другого измерения, чем пространство вне сферы и внутри изолированной оси.

Простейшей пространственной кривой будет кривая C_3 . Кривая характеризуется двумя аргументами ϕ, ψ и двумя радиусами: R -радиус сферы, r_ϵ -радиус цилиндрической оси. Двигаясь по кривой C_3 аргумент ϕ получит приращение 4π , аргумент ψ получит приращение 2π . На кривую C_3 можно натянуть поверхность без точек самопересечения и нельзя сжать без складок в плоскую кривую. Более сложные кривые имеют, выражаясь физическим языком, большее количество намоток по поверхности сферы и цилиндрической оси.

Становится очевидным почему при извлечении корня из $+1$ имели два разных корня только при периодичности изменения аргументов 4π перед мнимой единицей I и 2π перед мнимой единицей J . (См. Извлечение корня 1.1.1.)

При такой геометрической интерпретации абстрактное понятие точки, линии, плоскости детализируются: точка есть сфера δ радиуса, линия есть цилиндр ϵ радиуса, плоскость

Имеет ϵ толщину.

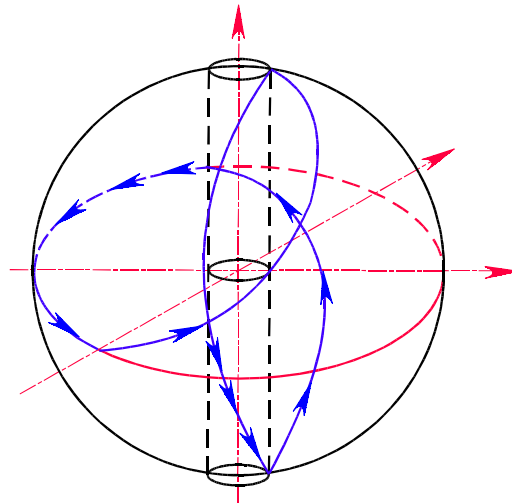


Рис. 3. Комплексное пространство.

Комплексное пространство впервые введено в работах [1], [2], [3], [4]. Оно может быть интерпретировано как в цилиндрических, так и сферических координатах в соответствии с формулами, его определяющими.

Раскроем комплексы z и σ , входящие в формулу (1.3. и 1.4.). В комплексной плоскости имеем

$$z = \rho e^{i\phi},$$

$$\sigma = r e^{i\psi},$$

где ρ, r - модули комплексных чисел z, σ :

$$\sigma = |z|,$$

$$r = |\sigma|;$$

где ϕ, ψ - аргументы комплексных чисел.

При таком обозначении комплексы z, σ определяются через свои полярные радиусы, соответственно равные:

$$|z| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$|\sigma| = r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2},$$

и аргументы $\phi = \arg z$, $\psi = \arg \sigma$, которые определены с точностью до любого слагаемого, кратного 2π :

$$\phi = \arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 2k\pi;$$

$$\psi = \arg \sigma = \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi} + 2k\pi.$$

Следовательно, имеем

$$v = z + j\sigma = \rho e^{i\phi} + jre^{i\psi}.$$

Так как единичные векторы i и j (мнимые единицы) связаны в пространстве законом коммутативного умножения $ij = ji$, то комплекс может быть преобразован и к следующему виду:

$$v = x + iy + j\xi + j\eta = (x + i\xi) + j(y + i\eta) = \rho_1 e^{j\phi_1} + jr_1 e^{j\psi_1},$$

где соответственно имеем уже:

$$\rho_1 = |x + j\xi|;$$

$$r_1 = |y + j\eta|;$$

$$\phi_1 = \arg(x + j\xi);$$

$$\psi_1 = \arg(y + j\eta).$$

В дальнейшем будет показано, что в пространстве комплексных чисел нет выделенного направления и обе записи эквивалентны.

Далее, применяя к пространственному комплексу v формулу Эйлера, получим

$$v = \rho e^{i\phi} + jre^{i\psi} = R_1 e^{j\beta}.$$

где R_1 определен как комплексный модуль, равный

$$R_1 = \sqrt{z^2 + \sigma^2};$$

β - комплексный аргумент, равный

$$\beta = \arg v = \operatorname{arctg} \frac{r}{\rho} e^{i(\psi-\phi)},$$

периодические свойства, которого будут выявлены в дальнейшем.

Преобразуем комплексный модуль по законам комплексной алгебры. Выделение действительного модуля дает выражение

$$\|v\| = \|R_1\| = R = \sqrt[4]{\rho^4 + r^4 + 2\rho^2 r^2 \cos 2(\phi - \psi)},$$

а действительного аргумента α - выражение

$$\alpha = \arg R_1 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\rho^2 \sin 2\phi + r^2 \sin 2\psi}{\rho^2 \cos 2\phi + r^2 \cos 2\psi}. \quad \text{Таким образом, про-}$$

странственный комплекс записывается в виде

$$v = R e^{ia+j\beta}. \quad (1.5.)$$

где R, α - действительные числа; а β - в общем случае комплексное число.

Перейдем к геометрической иллюстрации комплексного пространства.

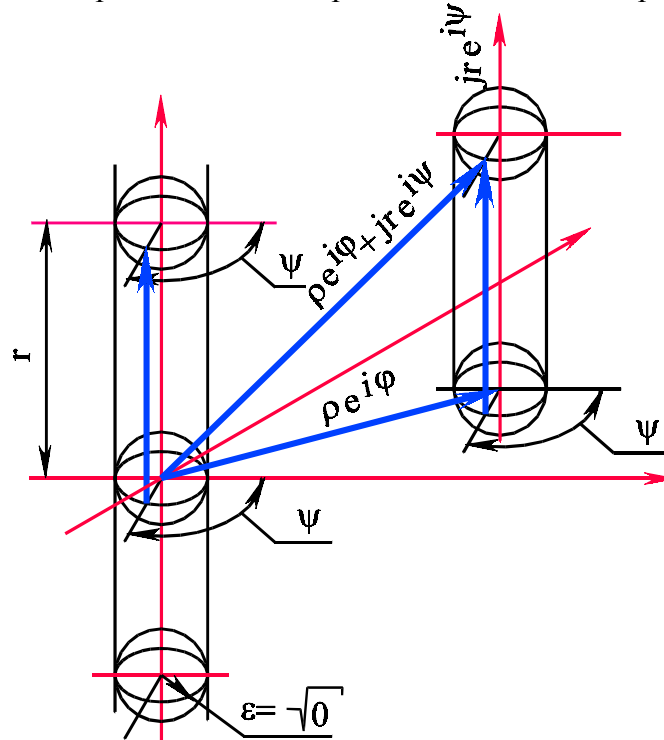


Рис. 4. Построение цилиндрической комплексной системы координат четырехмерного пространства. Сложение мнимых векторов в четырехмерном пространстве Y .

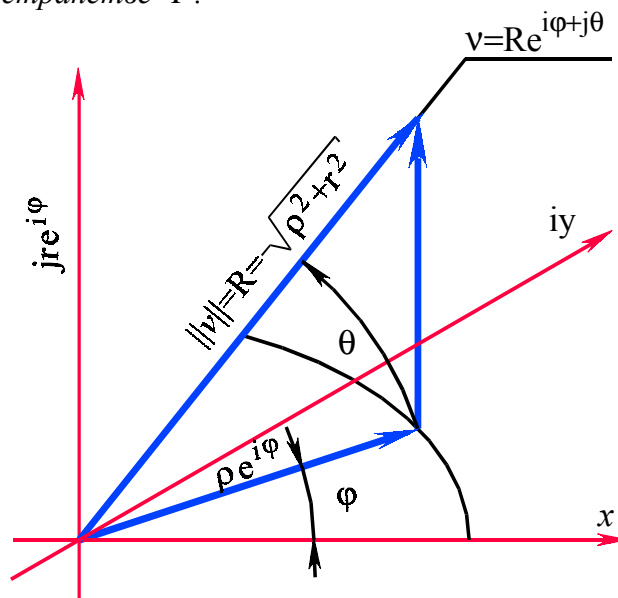


Рис. 5. Построение цилиндрической комплексной системы координат четырехмерного пространства. Сложение мнимых векторов в трехмерном пространстве Y .

В цилиндрических координатах (рис. 4) в соответствии с формулой (1.3.) к плоскости $z = \rho e^{i\phi}$ восстановим из начала координат вектор $j\sigma = jre^{i\psi}$, так что модуль r будет фиксировать расстояние от этой плоскости (z).

При такой интерпретации вектор $j\sigma = jre^{i\psi}$ при изменении
 $-\infty \leq r \leq +\infty$
 - и аргумента ψ
 $0 \leq \arg \sigma \leq 2\pi$

опишет цилиндрическую ось, сечение которой будет иметь некоторый строго положительный радиус ε , $\varepsilon > 0$, в том числе и сколь угодно малый на любом сечении, параллельном плоскости (z). Таким образом, вектор $j\sigma$ будет идти по образующей, фиксированной углом ψ на этой цилиндрической оси.

Конкретная точка v в цилиндрических координатах представляет сумму двух векторов: вектора $\rho e^{i\phi}$, лежащего в плоскости (z), и вектора $jre^{i\psi}$, лежащего на цилиндрической оси. В простейшем случае построенное четырехмерное пространство переходит в трехмерное. Это происходит при равенстве аргументов в плоских комплексах z , σ .

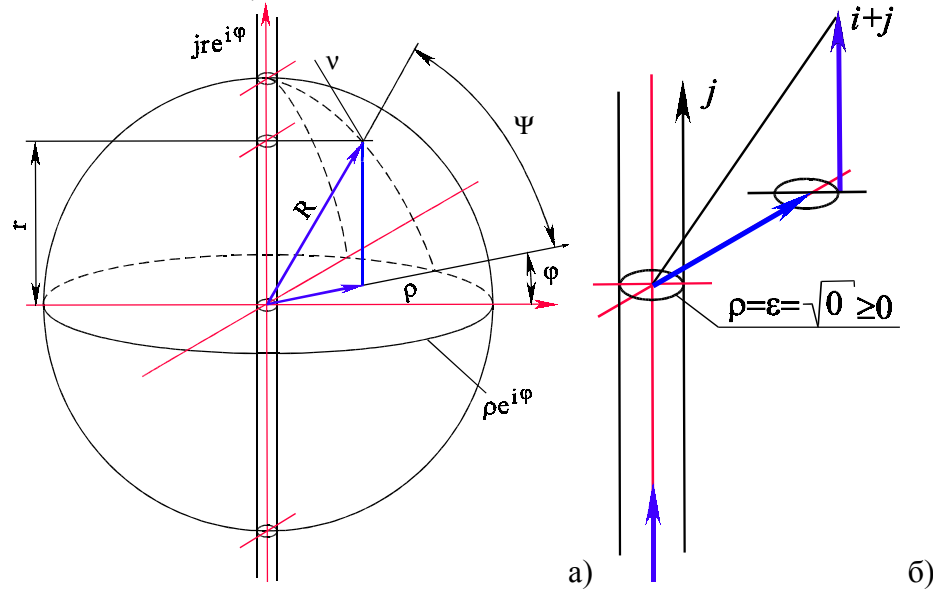


Рис. 6. Построение сферической комплексной системы координат: а- комплексная сферическая система координат трехмерного пространства; б - делители нуля в комплексной системе.

В этом случае все параметры, определяющие точку v , становятся действительными

$$v = \sqrt{\rho^2 + r^2} e^{i\phi + ja},$$

где $a = \arctg \frac{r}{\rho}$ - теперь тоже действительное число.

Изображение такой точки представлено на рис. 5, где угол a обозначен через θ . В этом случае точка определена тремя независимыми переменными r , ρ , ϕ ;

$$v = \rho e^{i\phi} + jre^{i\phi} = e^{i\phi} (\rho + jr).$$

Образующая, по которой идет вектор $jre^{i\phi}$, фиксирована углом ϕ , равным углу комплекса, лежащего в плоскости (z). Все три вектора лежат в одной плоскости: два составляющих $z = \rho e^{i\phi}$, $\sigma = jre^{i\phi}$ и суммарный вектор v

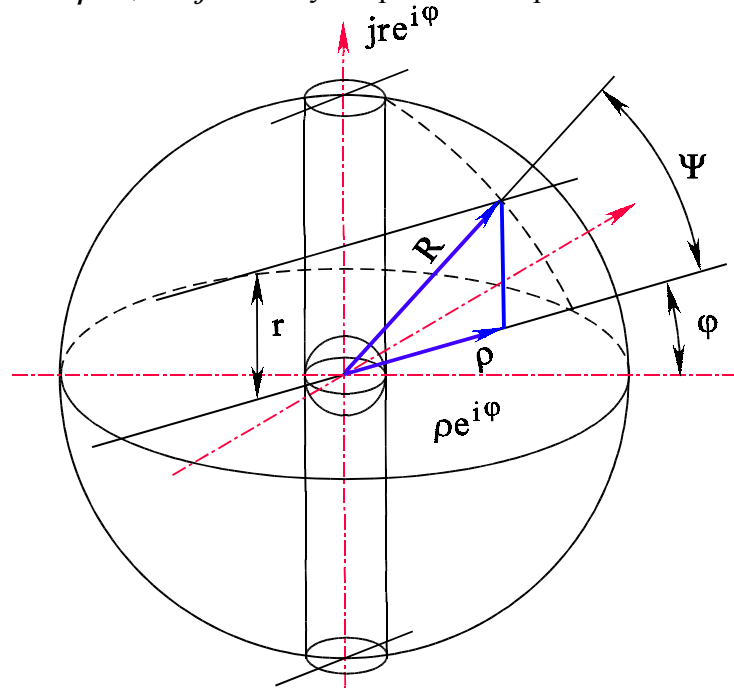


Рис. 7. Сферическая система координат трехмерного пространства: сфера в трехмерном комплексном пространстве.

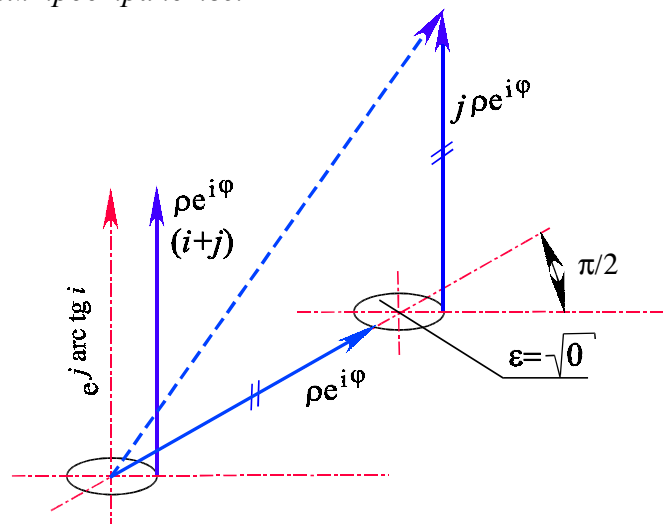


Рис. 8. Сферическая система координат трехмерного пространства: мнимый суммарный радиус-вектор делителей нуля.

При постоянном модуле $\|v\| = R$ и изменении аргументов a, ϕ в пределах $-\pi/2 \leq a \leq \pi/2$,

$$0 \leq \phi \leq 2\pi.$$

суммарный вектор v опишет сферу с выколотыми вершинами по оси $j\sigma$ (рис. 6, рис. 7.а.). Точка v в пространстве (v) фиксирована тремя действительными параметрами R, ϕ, a .

Формула (1.5.) определяет сферические пространственные комплексные координаты:

$$x = R \cos \phi \cos a;$$

$$y = iR \sin \phi \cos a;$$

$$z = j R e^{i\phi} \sin a.$$

Третья координата имеет вращение вокруг оси. (Этот вариант не рассматривается в квантовой механике, а вводится другими условиями, чтобы результат соответствовал эксперименту).

1.1.6. Пространство делителей нуля. Геометрическая иллюстрация.

Преобразуем аргумент a комплекса v в формуле (1.5.), Положим

$$a = \arctg\left(\frac{r}{\rho} e^{i(\psi-\phi)}\right) = S + i\sigma,$$

тогда (здесь, a - угол)

$$v = R e^{i\alpha + j\beta} = R e^{i\alpha + jS + ji\sigma}. \quad (1.6.)$$

В формуле (1.6.) комплекс v имеет все параметры R , α , S , σ - действительные числа.

Исследуем комплекс (1.6.). Положим

$$v = (x + iy) + j(\xi + i\eta),$$

тогда

$$R = \|v\| = \sqrt{x^4 + y^4 + \xi^4 + \eta^4 + 2x^2y^2 + 2x^2\xi^2 + 2y^2\eta^2 + 2\xi^2\eta^2 - 2x^2\eta^2 - 2y^2\xi^2 + 8xy\xi\eta}$$

Далее, если, $\xi = \eta = 0$, тогда $S = \sigma = 0$,

$$R = \rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$v = \rho e^{i\phi}.$$

Значит, угол ϕ есть угол между проекцией ρ вектора R на плоскость $(1, i)$ и осью i , то есть, имеем обычную комплексную плоскость;

если $y = \eta = 0$, тогда $v = x + j\xi$,

$$\phi = 0, \sigma = 0, R = R_z = \sqrt{x^2 + \xi^2}, v = R e^{jS},$$

откуда следует, что угол S есть угол между проекцией R_2 вектора R на плоскость $(1, j)$ и осью 1 ;

пусть $y = \xi = 0$, тогда

$$v = x + ji\eta = \sqrt{x^2 - \eta^2} e^{j \arctg\left(\frac{i\eta}{x}\right)};$$

и согласно (6) будем иметь $\phi = 0$, $S = 0$,

$$R = R_3 = \|v\|,$$

$$v = R_3 e^{ji\sigma}.$$

Значит, σ - угол между проекцией R_3 вектора R на плоскость $(1, ij)$ и осью 1 . Формула (1.6.) показывает, что пространственный модуль является действительной величиной. Кроме того, выполняется соотношение

Единичный элемент делителя нуля изображен на рис. 6, на рис. 8 приведен комплексный делитель нуля. На рис. 7 показано пространственное расположение множества элементов делителей нуля. При условии (1.8.) комплекс выразится в виде

$$v = \rho e^{i\phi} \pm j i \rho e^{i\phi} = \rho e^{i\phi} (1 \pm j i) = j \rho e^{i\phi} (-j \pm j) = j \rho e^{i\phi} (-j \pm i) = \dots$$

Составляющий вектор $j \rho e^{i\phi}$ (аппликата) идет по образующей, которая фиксирована на цилиндрической оси углом ϕ , и повернут относительно комплекса, лежащего в плоскости (z) на $\pi/2$. Модули составляющих комплексов равны по величине $r=\rho$ (рис. 8).

Множество элементов делителей нуля образуют в пространстве в цилиндрических координатах конус-фильтр дискретных точек (см. рис. 9, 10, 11).

Конус-фильтр элементов $\rho e^{i\phi} (i \pm j)$ делит пространство на две части, причем этот конус можно рассматривать как поворот поверхности конуса, у которого $r=\rho$, относительно другой поверхности этого же конуса - на $\pi/2$. В результате образуется двойная граница, которая и представлена на рис. 9, 10, 11. Двойная граница не изолирует обе части друг от друга.

Из одной части пространства можно пройти в другую часть по непрерывным кривым или прямым типа u_1 , C_1 , C_2 на которых не соблюдаются условия (1.8.). Двойная граница конуса-фильтра может быть пройдена в окрестности точек, которые создают эту двойную границу:

либо в окрестности точки

$$v = \rho e^{i\phi} = j i (\rho + \varepsilon) e^{i\phi},$$

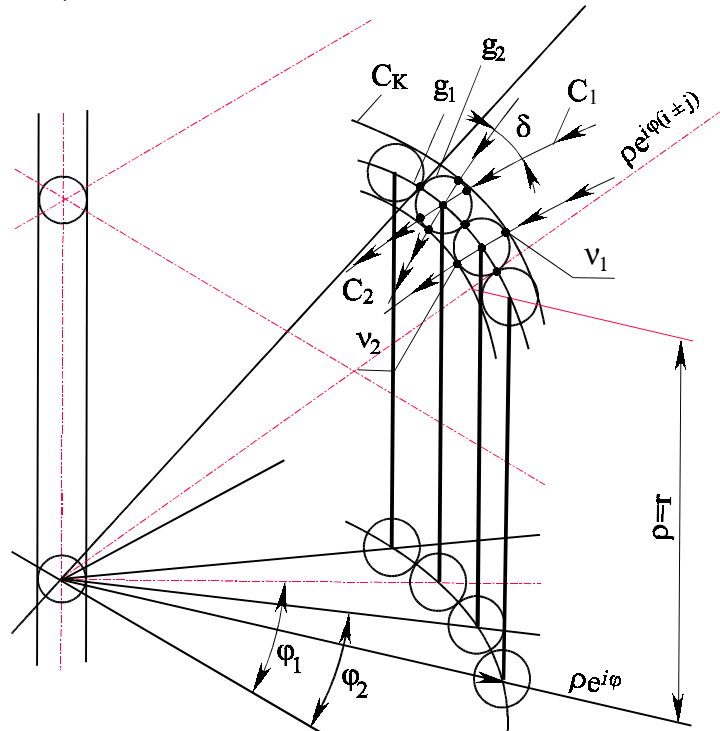


Рис. 10. Построение двойной границы конуса-фильтра делителей нуля

либо в окрестности точки

$$v = \rho e^{i\phi + i\varepsilon} + j e^{i\phi}.$$

Конус-фильтр в сферических координатах сворачивается в цилиндрическую ось радиуса $\sqrt{0}$, равного корню из нуля. Эта ось содержит в себе изолированное направление $\pm \arctg i$, согласно формулам (1.5.), (1.8.).

$$v_d = \rho e^{i\phi} (i \pm j) = \sqrt{0} \rho e^{i\phi} e^{\pm j \arctg(i)}. \quad (1.9.)$$

Формула (9) определяет все элементы делителей нуля в сферических координатах.

При коммутативном умножении векторов $ij=ji$ имели очевидное равенство

$$(i+j)(i-j) = ii + ji - ji - jj = -1 + ji - ij + 1 = 0. \quad (1.10.)$$

В этом равенстве нет неопределенности. Однако до настоящего времени открыт вопрос о равенстве произведения двух чисел нулю, если ни один из них не равен нулю. В пространстве чисел имеем

$$i+j \neq 0, i-j \neq 0,$$

однако

$$(i+j)(i-j) = 0.$$

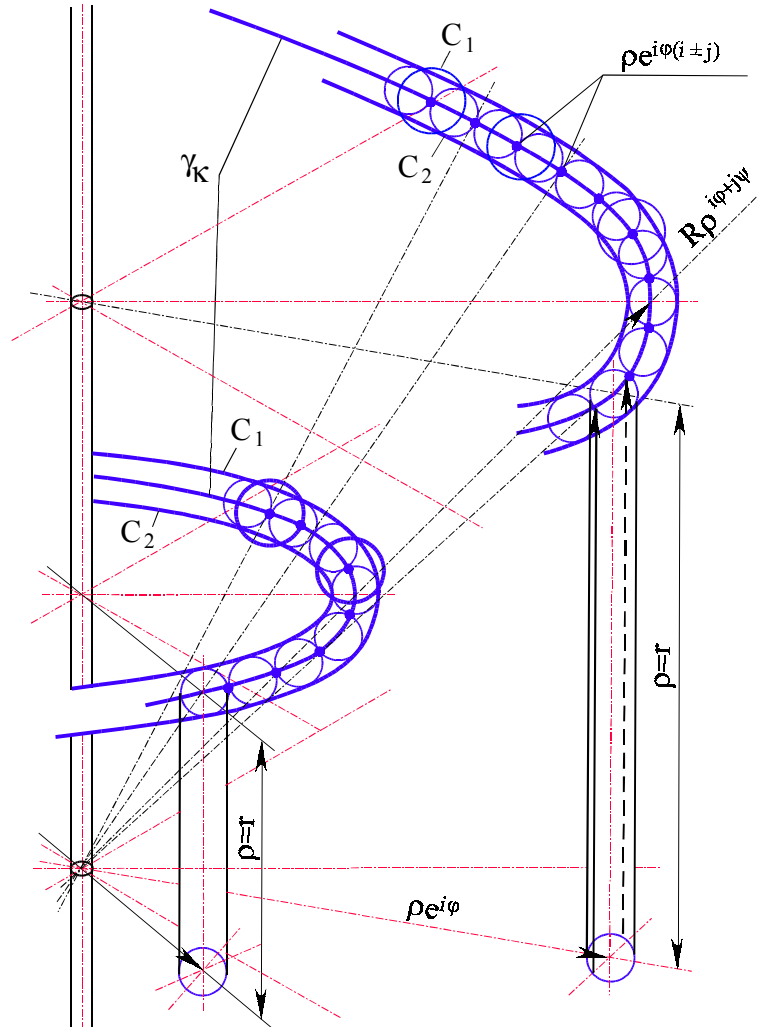


Рис. 11. Двойная граница конуса-фильтра в четырехмерном пространстве

Преобразуем сумму и разность единичных векторов по формуле (1.9.). Делители нуля не равны тождественно нулю и их запись по формуле (1.9.) не эквивалентна неопределенному выражению:

$$v_d = \rho e^{i\phi} (i + j) = \sqrt{0} \rho e^{i\phi} e^{-j \operatorname{arctg}(i)} \neq 0;$$

$$v_d = \rho e^{i\phi} (i - j) = \sqrt{0} \rho e^{i\phi} e^{+j \operatorname{arctg}(i)} \neq 0.$$

Модули делителей нуля равны корню из нуля, также не равному тождественно нулю ввиду наличия в комплексе изолированного направления аргумента

$$\|v_d\| = \sqrt{0};$$

$$\arg v_d = \pm \operatorname{arctg}(i).$$

В действительном и плоском комплексном пространстве корень из нуля тождественно равен нулю. В пространстве вследствие наличия изолированного направления, выражаемого через функцию arctg в изолированной точке i , корень из нуля не равен тождественно нулю. Если корень из нуля приравнять к нулю, то в этом случае будет нарушены операция преобразования комплекса при переходе от цилиндрических к сферическим координатам.

Комплексная алгебра расшифровывает очевидное равенство (1.10.) и не требует накладывания на единичные векторы i, j и их произведения дополнительных ограничений, как это выполнено в алгебре гиперкомплексных чисел.[5] или в векторном исчислении,

$$(i + j)(i - j) = \sqrt{0} e^{-j \operatorname{arctg}(i)} \sqrt{0} e^{+j \operatorname{arctg}(i)} = \sqrt{0} \sqrt{0} e^0 = 0. \quad (1.11.)$$

Порядок нуля сохраняется, неопределенность отсутствует. Алгебра не требует ограничений, отличных от обычных операций над действительными числами.

Еще раз подчеркнем, что только наличие делителей нуля привело к созданию гиперкомплексных чисел, теория которых оказалась тупиковым вариантом. Векторное исчисление не привело к созданию аппарата наподобие аппарата комплексных чисел и их теории аналитических функций.

По существу, вскрыто свойство делителей нуля. Делители нуля - это числа, представляющие сумму двух комплексов плоских областей z, σ в пространстве (v). Комплексы z и σ имеют равные модули $|z| = |\sigma|$, $\arg z - \arg \sigma = \pi/2$ и аргументы, отличающиеся друг от друга на $\pi/2$. В цилиндрических координатах элементы делителей нуля имеют равный корню из нуля модуль.

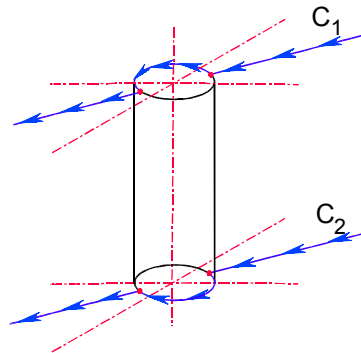


Рис. 12. Прохождение цилиндрической комплексной оси по прямым, расположенным на разных уровнях от начало координат

На рис. 8 суммарный комплекс изображен пунктиром. Суммарный комплекс v_d разлагается на два не суммируемых вектора, имеющих равные модули и разные точки приложения в окрестности изолированной оси, повернутые от-

носителем друг друга на $\pi/2$. Векторы взаимно перпендикулярны, приложены в разных точках окрестности нуля, равны по величине. Вследствие этого суммарный вектор практически заменяется крутящим моментом (в инженерной терминологии).

Таким образом, комплексное пространство имеет третью ось, также комплексную плоскость, свернутую, а цилиндрическую поверхность радиуса корня из нуля. Эта ось заключает в себе изолированное направление $\pm \arctg i$. Пространство внутри этой цилиндрической оси принадлежит пространству другого измерения. Пройти эту ось по прямой нельзя (рис. 12, прямая C_2). Вдали от начала координат огибать эту ось необходимо по прямой C_1 с криволинейным участком, огибающим цилиндрическую ось радиуса корня из нуля.

1.1.7. Операция деления в комплексном пространстве

Наличие в пространстве (v) изолированного направления, как было показано, обуславливает появление в пространстве новых объектов - делителей нуля. Остановимся на свойствах этих объектов.

Делители нуля обладают свойством нуля, для которого в действительной и комплексной областях справедливо равенство

$$a \cdot 0 = b \cdot 0 = 0, \quad (1.12.)$$

где a и b могут быть и пространственными числами v . Равенство (1.12.) сократить на нуль нельзя. Для делителей нуля есть аналогичное равенство, которое будет дано ниже, поэтому на них сокращать нельзя так же, как сокращать (1.12.) на нуль. Сокращение есть операция деления, поэтому делить на элементы делителей нуля нельзя так же, как делить на нуль. Следует отличать логический термин “делитель нуля” или “разделить невозможно”. Термин “делитель нуля” это условие алгебраического запрета на операцию. Термин “разделить невозможно” это тупик алгебраического построения, который возникает вследствие неправильного логического построения алгебраических операций.

Покажем наличие в пространстве (v) свойства делителей нуля, аналогичного свойству (1.12.) для нуля. Рассмотрим произведение числа (v) на делители нуля v_d :

$$\begin{aligned} vv_d &= (x + iy + j\xi + ji\eta)(i + j) = [(x - y) + i(y - \xi)](i + j); \\ vv_d &= (x + iy + j\xi + ji\eta)(i - j) = [(x + \eta) - i(\xi - y)](i - j). \end{aligned} \quad (1.13.)$$

Выражение (1.13.) получено на основе коммутативного умножения элементов. По смыслу выражение (1.13.) эквивалентно выражению (1.12.). Делить на элементы $v_d = i \pm j$ нельзя так же, как и делить на нуль. Однако, как и нуль, делители нуля имеют обратные элементы

$$\frac{1}{v_d} = \sqrt{\infty} e^{\pm j \arctg(i)}.$$

Второе свойство нуля

$$a + 0 = a$$

для делителей нуля не выполняется

$$v + v_d = v + i \pm j \neq v$$

Таким образом, в пространстве (v) есть объекты, которые обладают как свойством нуля (1.11.), так и свойством обычных элементов. Обратным элементом для нуля является бесконечность

$$\frac{1}{0} \sim \infty,$$

для делителей нуля обратными элементами являются бесконечные делители

$$\frac{1}{i \pm j} = \sqrt{\infty} e^{\mp j \arctg(i)}.$$

Необходимо отметить, что ноль в пространстве представим в виде

$$0 \sim 0e^{i\phi + jS + ji\sigma},$$

где ϕ, S, σ могут быть любыми числами и даже изолированным направлением.

Определим операцию деления как решение системы линейных уравнений, получаемых в пространстве комплексных чисел.

Обозначим:

$$v = a + ib + jc + jid;$$

$$v' = a' + ib' + jc' + jid'; \quad (1.14.)$$

$$\lambda = x + iy + j\xi + ji\eta.$$

Элемент λ считаем неизвестным, его надо получить из решения системы

$$\lambda v = v' \quad (1.14)$$

Раскрывая соотношение (1.14.), получим систему четырех линейных уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{aligned} ax - by - a\xi + d\eta &= a; \\ bx + ay - d\xi - c\eta &= b'; \\ cx - dy + a\xi - b\eta &= c'; \\ dx + cy + b\xi + a\eta &= d'. \end{aligned} \quad (1.15.)$$

Система (1.15.) получена на основе отделения действительных и мнимых частей в комплексном произведении $v\lambda$ и комплексе v' :

$$\text{Re Re}(v\lambda) = \text{Re Re } v' = a';$$

$$\text{Re Im}(v\lambda) = \text{Re Im } v' = b';$$

$$\text{Im Re}(v\lambda) = \text{Im Re } v' = c';$$

$$\text{Im Im}(v\lambda) = \text{Im Im } v' = d'.$$

Система имеет решение, когда ее определитель не равен нулю. Определитель системы (1.15.) оказался равным модулю комплекса $\|v\|$, возведенному в четвертую степень. Опуская элементарные выкладки, запишем как факт

$$\begin{vmatrix} a & -b & -c & d \\ b & a & -d & -c \\ c & -d & a & -b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = \|v\|^4.$$

Следовательно, система (1.14.) не имеет решения, когда выражение (1.15.) равно нулю. Для комплексного пространства (v) определитель (1.15.) равен нулю в двух случаях:

$$\|v\| = 0, \text{ что возможно при } a=0, b=0, c=0, d=0;$$

$\|v\| = \sqrt{0}$, когда $v \in v_d$ и комплекс является делителем нуля.

Во втором случае, даже если $v' \in v_d$, делить нельзя, так как вступает в силу соотношение (1.13.).

Таким образом, исследования решения системы линейных уравнений с четырьмя неизвестными, построенной на базе алгебры с коммутативным умножением, показали, что операция деления выполнима в комплексном пространстве, как в обычном действительном и плоском комплексном пространстве.

Пространственная комплексная алгебра (v) относится к алгебре с делением, к алгебре кольца класса вычетов [6] так же, как комплексная алгебра (z) если считать нуль за идеал. В пространстве (v) вычет нуля эквивалентен вычету всех элементов делителей нуля v_d . Это следует из выражения (1.13.).

Итак, доказано, что в пространстве (v) за вычетом нуля и элементов делителей нуля возможно проведение операций, аналогичных операциям над действительными и комплексными (z) числами.

Алгебра обладает свойством нормированной алгебры: норма произведения равна произведению норм

$$\|v_1 v_2\| = \|v_1\| \cdot \|v_2\|.$$

Теорема Фробениуса [5], которая запрещает обобщение поля действительных чисел, в своем доказательстве не учитывает свойств новых объектов - чисел делителей нуля, поэтому она не применима к построенной алгебре. Теорема Фробениуса утверждает, что расширением поля действительных и комплексных чисел является кватернионы - всякое обобщение чисел приводит к изоморфизму кватернионов.

Кватернионные единицы $1, i, j, k$ связаны следующими равенствами:

$$\begin{aligned} i^2 &= j^2 = k^2 = -1; \\ ij &= -ji = k; \\ jk &= -kj = i; \\ ki &= -ik = j. \end{aligned}$$

Свойство кватернионных единиц не соответствуют коммутативности умножения.

В настоящее время уже очевидно, что это свойство и явилось тем ограничением, которое не позволило обобщить методы теории функций комплексного переменного (z) в комплексное пространство.

Предлагаемая комплексная алгебра v снимает это ограничение.

Алгебра делителей нуля не требует введения ограничений на проведение операций с этими объектами, также как и введение новых. Необходимо иметь только ввиду, что делители нуля обладают как свойствами обычных чисел, так и свойством нуля. Например произведем умножение

$$\begin{aligned} vv_d &= \operatorname{Re}^{i\varphi+j\psi} \rho e^{i\varphi_1} (1 \pm ji) = \operatorname{Re}^{i\varphi+j\psi} \rho \sqrt{0} e^{i\varphi_1 \pm j \arctg i} = \\ &= R \rho \sqrt{0} e^{i\varphi+i\varphi_1+j\psi \pm j \arctg i} \end{aligned}$$

Но известно соотношение $\arctg z + \arctg z_1 = \arctg \frac{z \pm z_1}{1 - z_1 z}$, поэтому

$$\begin{aligned}
 \psi \pm \operatorname{arctg} i &= \operatorname{arctg} \frac{\frac{r}{\rho} e^{i(\psi-\varphi)} \pm i}{1 \pm \frac{r}{\rho} e^{i(\psi-\varphi)} i} = \\
 &= \operatorname{arctg} \frac{\frac{r}{\rho} e^{i(\psi-\varphi)} \pm i}{-i(i \pm \frac{r}{\rho} e^{i(\psi-\varphi)})} = \operatorname{arctg} i,
 \end{aligned} \tag{1.16.}$$

сложение изолированного аргумента с любым неизолитованным дает изолированный, поэтому произведение элемента пространства на делитель нуля дает делитель нуля.

$$\begin{aligned}
 vv_d &= \operatorname{Re}^{i(\varphi+\varphi_1)} \rho(1 \pm ji) \\
 \text{Возведение в степень делителей нуля дает следующую таблицу значений} \\
 (i \pm j)^0 &= 1, \text{ перенесено из действительного анализа,} \\
 (i \pm j)^1 &= i \pm j \\
 (i \pm j)^2 &= 2i(i \pm j) \\
 (i \pm j)^3 &= -4(i \pm j) \\
 (i \pm j)^4 &= -8i(i \pm j) \\
 \dots \\
 (i \pm j)^n &= (2i)^{n-1}(i \pm j)
 \end{aligned} \tag{1.17.}$$

Рассмотрим соотношение $(i \pm j)^2 = 2i(i \pm j)$. Сократить это равенство на делитель нуля нельзя, так как в этом случае делитель нуля становится равным обычному числу, возводя которое в степень не дает исходное равенство.

$$(i \pm j)^2 = \pm 2i(i \pm j) \Rightarrow (i \pm j)(i \pm j \pm 2i) = 0.$$

Равенство выполняется только при произведении делителей нуля. $i \pm j \neq 0, i \pm j \neq \pm 2i$.

Если имеем в двух частях равенства делители нуля, возведенные в степень выше единицы, то сократить на делитель нуля в степени, чтобы в результате в одной из частей равенства осталась степень не меньше единицы возможно. Например, имеем

$$(i \pm j)^5 = -8i(i \pm j)^2 \Rightarrow (i \pm j)^4 = -8i(i \pm j).$$

Извлечение корня из делителей нуля дает делитель нуля

$$(i \pm j)^2 = 2i(i \pm j) \Rightarrow (i \pm j) = \sqrt{2i} \sqrt{(i \pm j)} \Rightarrow \sqrt{(i \pm j)} = \frac{(i \pm j)}{\sqrt{2i}}.$$

В конечном счете ноль также является делителем нуля. В пространстве Y при такой интерпретации нуля область нуля как делителя нуля расширяется и является неотъемлемой частью пространства, как ноль на плоскости и прямой. Если обычные числа имеют своим продолжением в плоскости и пространстве числа, которые подчиняются обычным алгебраическим операциям, то ноль как делитель имеет расширение как пространство делителей нуля.

Ноль на плоскости есть $0 = 0e^{i\varphi}$, ноль в пространстве есть $0 = 0e^{i\varphi+j\psi}$, где ψ может быть и

$$\pm \arctg i.$$

Общий вид делителей нуля

$$v_d = \operatorname{Re}^{i\varphi+j\psi} (i \pm j), \quad (1.18.)$$

где $\psi \neq \pm \arctg i$.

Это выражение показывает, что любая точка в пространстве Y окружена сферой из делителей нуля.

1.1.8. Замкнутость пространственной комплексной алгебры

Докажем, что построенная алгебра с коммутативным умножением является замкнутой и элементы в ней определены однозначным образом независимо от способа их преобразования.

Ввиду коммутативности умножения единичных векторов i, j

$$ij = ji$$

комплекс v запишем в двух видах:

$$v_1 = (x + iy) + j(\xi + i\eta); \quad (1.19.)$$

$$v_2 = (x + j\xi) + i(y + j\eta). \quad (1.20.)$$

Согласно комплексной интерпретации пространственного числа по формуле (1.19.) геометрическая интерпретация соответствует цилиндрическим и сферическим координатам с выколотой осью, перпендикулярной плоскости (z) , а по формуле (1.20.) выколотая ось перпендикулярна плоскости (i, j) . Для наглядности первую ось можно рассматривать как лежащую в плоскости чертежа (рис. 13.), а вторую перпендикулярно плоскости чертежа.

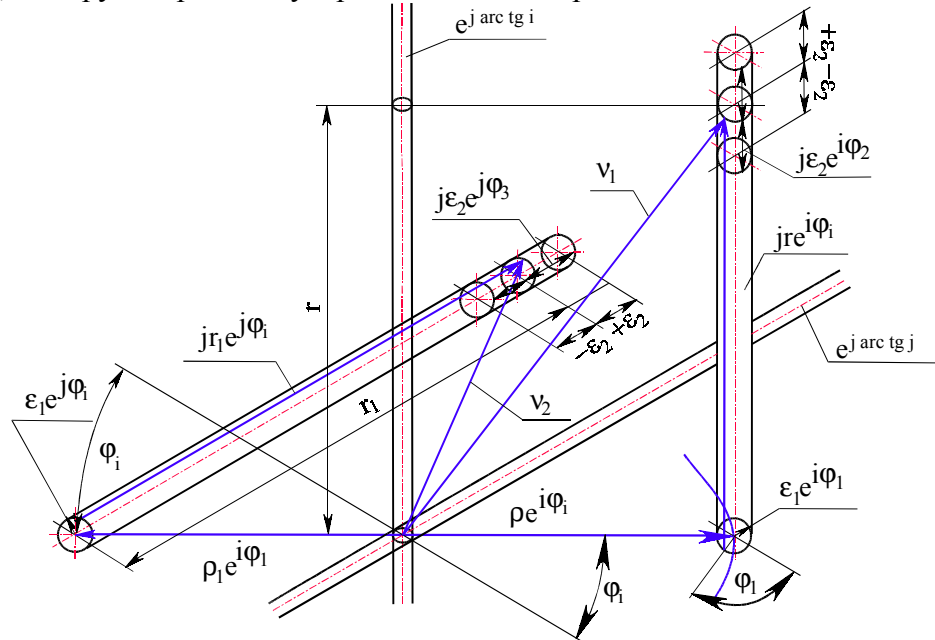


Рис. 13. Изолированные направления в многомерном комплексном пространстве.

Первая ось имеет изолированное направление $e^{\pm j \arctg(i)}$, вторая - изолированное направление $e^{\pm i \arctg(j)}$.

В сферических координатах согласно формуле (1.6.) комплексы (1.19.), (1.20.) запишутся в виде:

$$v_1 = R_1 e^{i\phi_1 + jS_1 + ji\sigma_1};$$

$$v_2 = R_2 e^{i\phi_2 + jS_2 + ji\sigma_2};$$

Докажем, что точка в комплексном пространстве определяется единственным образом и ее расположение не зависит от ориентации изолированных осей в пространстве. Преобразования комплексов (1.19.), (1.20.) инвариантны относительно выбранных изолированных направлений. Для этого следует доказать, что

$$R_1 = R_2, \phi_1 = \phi_2, S_1 = S_2, \sigma_1 = \sigma_2.$$

Доказательство. Произведем вычисление модулей комплексов (1.19.), (1.20.):

$$|v_1| = |(x + iy) + j(\xi + i\eta)| = \sqrt{(x^2 - y^2 + \xi^2 - \eta^2) + 2i(xy + \xi\eta)};$$

$$R_1 = |v_1| = \sqrt[4]{x^4 + y^4 + \xi^4 + \eta^4 + 2x^2y^2 + 2x^2\xi^2 \times$$

$$\times - 2x^2\eta^2 - 2y^2\xi^2 + 2y^2\eta^2 + 2\xi^2\eta^2 + 8xy\xi\eta};$$

$$|v_2| = |(x + j\xi) + i(y + j\eta)|;$$

$$R_2 = \|v_2\|.$$

Раскрывая модуль последнего выражения, получим:

$$\|v_1\| = \|v_2\|;$$

$$R_1 = R_2.$$

Угол ϕ_1 определяется аргументом выражения первого комплексного модуля

$$\phi_1 = \arg|v_1| = \frac{1}{2} \arctg \left(\frac{2xy + 2\xi\eta}{x^2 - y^2 + \xi^2 - \eta^2} \right)$$

Углы S_1 и σ_1 , выделяются, когда комплекс v_1 представлен в виде

$$v_1 = |v_1| e^{j \arctg \frac{\xi + i\eta}{x + iy}}.$$

Аргумент комплекса выразим через логарифмическую функцию

$$\arctg \frac{\xi + i\eta}{x + iy} = \frac{1}{2i} \ln \frac{1 + i \frac{\xi + i\eta}{x + iy}}{1 - i \frac{\xi + i\eta}{x + iy}}.$$

Действительная часть логарифма даст угол S_1 , а мнимая угол σ_1 . Соответственно имеем:

$$S_1 = \frac{1}{2} j \arctg \frac{2x\xi + 2y\eta}{x^2 + y^2 - \xi^2 - \eta^2};$$

$$\sigma_1 = -\frac{1}{2} ji \frac{\ln \|v_1\|^2}{(x + \eta)^2 + (y - \xi)^2}.$$

Применяя последовательно тот же расчетный алгоритм к комплексу (1.20.), получим требуемые для доказательства равенства.

Например, угол S_2 определяется как аргумент комплекса $|v_2|$

$$S_2 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x\xi + 2y\eta}{x^2 - \xi^2 + y^2 - \eta^2}.$$

Видно, что он равен углу S_1 , $S_2=S_1$ и так далее.

Расчет показывает, что при любом представлении пространственного комплекса v точка в пространстве определяется единственным образом.

Все операции в комплексном пространстве инвариантны относительно расположения выколотых изолированных осей.

Например. Комплекс $v=ij=ji$ определяет единственную точку, которая лежит на сфере радиуса $\|v\| = R = 1$ и фиксирована углами $S = \pi/2$, $\phi = \pi/2$, $\sigma = 0$.

1.2. Функции пространственного комплексного переменного

Основные понятия теории функций комплексного пространственного переменного: понятие функции, ее предела, производной, понятие аналитической функции, переносятся почти без изменения из теории функций комплексного переменного (z). В частности, определения заимствованы из [7]. В связи с этим излишнее повторение понятий и представлений не делается, а обращается внимание на те особенности, которые корректируют установившиеся понятия (без их в общем коренном изменении) в пространстве.

В пространстве (Y) так же, как и в плоскости (z), центральное место занимает теорема Коши - Римана. Реализация условий этой теоремы на элементарных функциях, определенных в пространстве (v), а также теорем Коши составляет содержание этого раздела.

1.2.1. Дифференцируемость функций

Задать функцию в пространстве (Y) означает задать закон, по которому каждой точке v из рассматриваемой области G пространства (Y) ставится в соответствие точка ω из пространства (Y).

Функция

$$\omega = f(v),$$

где

$$v = x + iy + j\xi + j\eta,$$

$$\omega = U + iV + jP + jR.$$

Следовательно, задание функции ω равносильно заданию от четырех действительных переменных:

$$U = U(x, y, \xi, \eta) = \operatorname{Re} \operatorname{Re} \omega(v);$$

$$V = V(x, y, \xi, \eta) = \operatorname{Re} \operatorname{Im} \omega(v);$$

$$P = P(x, y, \xi, \eta) = \operatorname{Im} \operatorname{Re} \omega(v);$$

$$R = R(x, y, \xi, \eta) = \operatorname{Im} \operatorname{Im} \omega(v).$$

Определение предела и непрерывности функций полностью совпадает с теми, которые даются в плоском случае [7].

Естественно пространственную комплексную функцию рассматривать как функцию от двух комплексных переменных (z). Так что, если

$$v = \rho e^{i\phi} + jre^{i\psi} = z + j\sigma,$$

то функцию целесообразно записать в виде

$$f(v) = W(z, \sigma) + jT(z, \sigma),$$

где соответственно будут выполняться соотношения:

$$W(z, \sigma) = \operatorname{Re} f(v);$$

$$T(z, \sigma) = \operatorname{Im}(v).$$

В комплексном пространстве предел функции $f(v)$ при $v \rightarrow v_0$ существует, если

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \sigma_0 \\ \sigma \rightarrow \sigma_0}} W(z, \sigma) = W_0;$$

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \sigma_0 \\ \sigma \rightarrow \sigma_0}} T(z, \sigma) = T_0;$$

и, следовательно,

$$\lim_{v \rightarrow v_0} f(v) = W_0 + jT_0 = f(v_0).$$

Остается в силе главное условие комплексного анализа (z) о независимости предела от способа приближения точки $v \rightarrow v_0$. Если предел существует, то при любом способе приближения $v \rightarrow v_0$ функция $f(v)$ будет приближаться к $f(v_0)$. Если функция определена и в точке v_0 , то она называется непрерывной в точке v_0 .

На все эти определения не оказывает влияние особенность комплексного пространства, обусловленная наличием конуса-фильтра дискретных точек делителей нуля.

Функция $f(v)$, определенная в некоторой точке окрестности точки v , дифференцируема в этой точке, если существует предел

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(v+h) - f(v)}{h} = f'(v). \quad (1.21.)$$

Этот предел является производной функции, определенной в пространстве (v).

Условия дифференцируемости функции $f(v)$ в терминах комплексных функций W и T будут давать:

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $f(v) = W(z, \sigma) + jT(z, \sigma)$ определена в точке v и некоторой окрестности ее, причем в этой точке функции T, W дифференцируемы в смысле комплексного переменного (z) и их частные производные непрерывны

$$\frac{\partial W}{\partial z}, \frac{\partial W}{\partial \sigma}, \frac{\partial T}{\partial z}, \frac{\partial T}{\partial \sigma},$$

тогда для дифференцируемости функции в точке v необходимо и достаточно, чтобы в этой точке имели место равенства:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial z} &= \frac{\partial T}{\partial \sigma}; \\ \frac{\partial T}{\partial z} &= -\frac{\partial W}{\partial \sigma}. \end{aligned} \quad (1.22.)$$

Эти условия являются аналогом условий Коши - Римана.

Проведем доказательство условий (1.22.). Пусть существует производная

$$f'(v) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(v+h) - f(v)}{h}.$$

Воспользуемся независимостью предела от способа стремления h к нулю.

А. Пусть точка $v+h$ стремится к точке v по комплексной оси $z=x+iy$. Тогда получим

$$f'(v) = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{W(z+S, \sigma) - W(z, \sigma)}{S} + \\ + j \lim_{S \rightarrow 0} \frac{T(z+S, \sigma) - T(z, \sigma)}{S} = \frac{\partial W}{\partial z} + j \frac{\partial T}{\partial z}.$$

Б. Найдем тот же предел в предположении, что точка $v+h$ стремится к v по комплексной оси $j\sigma$, то есть что $t \rightarrow 0$ и $h=jt$, где $t = \xi + i\eta$. Получим

$$f'(v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{W(z, \sigma + t) - W(z, \sigma)}{it} + \\ + j \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(z, \sigma + t) - T(z, \sigma)}{jt} = -j \frac{\partial W}{\partial \sigma} + \frac{\partial T}{\partial \sigma}.$$

Таким образом, имеем выражение для производной в двух видах

$$f'(v) = \frac{\partial W}{\partial z} + j \frac{\partial T}{\partial z} = -j \frac{\partial W}{\partial \sigma} + \frac{\partial T}{\partial \sigma}.$$

Комплексы в пространстве равны когда равны попарно составляющие их комплексы. Откуда и вытекают соотношения (1.22.).

Теорема может быть написана и в действительных переменных x, y, ξ, η . Однако этот вариант наиболее прост в изложении и более интересен вариант, когда комплексы представимы в цилиндрических трехмерных а). и четырехмерных координатах. Напомним эти выражения:

а) $v = \rho e^{i\phi} + jre^{i\phi};$

б) $v = \rho e^{i\phi} + jre^{i\psi}.$

Произведем вывод необходимых условий в координатах а).

Функция $f(v)$ записывается в виде

$$f(v) = W(\rho e^{i\phi}, re^{i\phi}) + jT(\rho e^{i\phi}, re^{i\phi}).$$

Приращение переменной, v при переходе к точке $v+h$ выразим как дифференциал вектора v

$$h = dv = d\rho e^{i\phi} + ie^{i\phi} \rho d\phi + jre^{i\phi} id\phi + jdre^{i\phi} = \\ = d\rho e^{i\phi} + jdre^{i\phi} + ie^{i\phi} (\rho + jr) d\phi.$$

Раскроем предел (1.21.) для трех специальных случаев стремления $h \rightarrow 0$:

$$d\rho \rightarrow 0, dr = d\phi = 0;$$

$$dr \rightarrow 0, dr = d\phi = 0;$$

$$d\phi \rightarrow 0, dr = d\rho = 0.$$

Первый случай соответствует пути по радиусу ρ при постоянном угле ϕ к постоянной аппликате по оси $j\sigma$; второй - пути по образующей цилиндрической оси $i\sigma$; третий - пространственной кривой, на которой изменяется только угол ϕ .

Для первого случая $\phi = \text{const}, r = \text{const}$, имеем

$$\begin{aligned}
 f'(v) &= \lim_{\Delta\rho \rightarrow 0} \frac{W[(\rho + \Delta\rho)e^{i\phi}, re^{i\phi}] - W[\rho e^{i\phi}, re^{i\phi}]}{\Delta\rho e^{i\phi}} + \\
 &+ j \lim_{\Delta\rho \rightarrow 0} \frac{T[(\rho + \Delta\rho)e^{i\phi}, re^{i\phi}] - T[\rho e^{i\phi}, re^{i\phi}]}{\Delta\rho e^{i\phi}} = \\
 &= e^{-i\phi} \frac{\partial W}{\partial \rho} + j e^{-i\phi} \frac{\partial T}{\partial \rho}.
 \end{aligned} \tag{1.23.}$$

Для второго случая, $\rho = \text{const}$, $\phi = \text{const}$, имеем

$$\begin{aligned}
 f'(v) &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{W[\rho e^{i\phi}, (r + \Delta r)e^{i\phi}] - W[\rho e^{i\phi}, re^{i\phi}]}{j\Delta r e^{i\phi}} + \\
 &+ j \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{T[\rho e^{i\phi}, (r + \Delta r)e^{i\phi}] - T[\rho e^{i\phi}, re^{i\phi}]}{j\Delta r e^{i\phi}} = \\
 &= -j e^{-i\phi} \frac{\partial W}{\partial r} + e^{-i\phi} \frac{\partial T}{\partial r}.
 \end{aligned} \tag{1.24.}$$

Для третьего случая, $\rho = \text{const}$, $r = \text{const}$, имеем

$$\begin{aligned}
 f'(v) &= \lim_{\Delta\phi \rightarrow 0} \frac{W[\rho e^{i\phi} + i\rho e^{i\phi}\Delta\phi, re^{i\phi} + ire^{i\phi}\Delta\phi] - W[\rho e^{i\phi}, re^{i\phi}]}{i\Delta\phi(\rho e^{i\phi} + jre^{i\phi})} + \\
 &+ \lim_{\Delta\phi \rightarrow 0} j \frac{T[\rho e^{i\phi} + i\rho e^{i\phi}\Delta\phi, re^{i\phi} + ire^{i\phi}\Delta\phi] - T[\rho e^{i\phi}, re^{i\phi}]}{\Delta\rho e^{i\phi}} + \\
 &+ \frac{e^{-i\phi}}{i(\rho + jr)} \left(\frac{\partial W}{\partial \phi} + j \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) = \\
 &= -ie^{-i\phi} \frac{\rho \frac{\partial W}{\partial \phi} + r \frac{\partial T}{\partial \phi}}{\rho^2 + r^2} + jie^{-i\phi} \frac{r \frac{\partial W}{\partial \phi} - \rho \frac{\partial T}{\partial \phi}}{\rho^2 + r^2}.
 \end{aligned} \tag{1.25.}$$

Выражения (1.23.), (1.24.), (1.25.) дают значения производной от пространственной комплексной функции $f(v)$ в цилиндрических координатах и необходимые условия ее существования

$$\begin{aligned}
 f'(v) &= e^{-i\phi} \frac{\partial W}{\partial \rho} + j e^{-i\phi} \frac{\partial T}{\partial \rho} = -j e^{-i\phi} \frac{\partial W}{\partial r} + e^{-i\phi} \frac{\partial T}{\partial r} = \\
 &= -ie^{-i\phi} \frac{\rho \frac{\partial W}{\partial \phi} + r \frac{\partial T}{\partial \phi}}{\rho^2 + r^2} + jie^{-i\phi} \frac{\frac{\partial W}{\partial \phi} - \rho \frac{\partial T}{\partial \phi}}{\rho^2 + r^2}.
 \end{aligned} \tag{1.26.}$$

Приравнявая действительные и комплексные части, получим необходимые условия дифференцирования функции:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial W}{\partial \rho} &= \frac{\partial T}{\partial r} = -i \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{\rho W + rT}{\rho^2 + r^2}; \\
 \frac{\partial T}{\partial \rho} &= -\frac{\partial W}{\partial r} = i \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{rW - \rho T}{\rho^2 + r^2}.
 \end{aligned} \tag{1.27.}$$

Если функция f определена в четырехмерном пространстве, то необходимые условия ее дифференцирования записываются в виде:

$$\begin{aligned} e^{-i\phi} \frac{\partial W}{\partial \rho} &= e^{-i\phi} \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} i e^{-i\phi} \frac{\partial W}{\partial \phi} = -\frac{i}{r} \frac{\partial T}{\partial \psi} e^{-i\psi}; \\ e^{-i\phi} \frac{\partial T}{\partial \rho} &= -e^{-i\psi} \frac{\partial W}{\partial r} = -\frac{i}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} e^{-i\phi} = \frac{i}{r} e^{-i\psi} \frac{\partial W}{\partial \psi}. \end{aligned} \quad (1.28.)$$

Производная

$$\begin{aligned} f'(v) &= e^{-i\phi} \frac{\partial W}{\partial \rho} + j e^{-i\phi} \frac{\partial T}{\partial \rho} = e^{-i\psi} \frac{\partial T}{\partial r} - j e^{-i\psi} \frac{\partial W}{\partial r} = \\ &= -\frac{1}{\rho} i e^{-i\phi} \frac{\partial W}{\partial \phi} - j \frac{i}{\rho} \frac{\partial T}{\partial \phi} e^{i\phi} = \dots \end{aligned} \quad (1.29.)$$

Методика вывода выражений (1.28.), (1.29.) аналогична предыдущей.

Условия (1.22.), (1.27.), (1.28.) являются необходимыми условиями существования производной от функции, определенной в комплексном пространстве. Достаточные условия доказываются как и в обычной (z) плоскости (как в двумерном случае).

Замечание. Предел, определяющий наличие производной, необходимо оценить в критических особых точках пространства - в элементах делителей нуля.

Если точка $v+h$ стремится к точке v по изолированному направлению

$$h = \Delta \rho e^{i\phi} (i \pm j),$$

Предел существует при рассмотрении выражения как единого символа и при $\Delta \rho \rightarrow 0$. Предел существует только при $\Delta \rho \rightarrow 0$, так как $(i \pm j)$ постоянная. Поэтому необходимо рассматривать $\Delta \rho e^{i\phi} (i \pm j)$ как единый символ.

$$\lim_{\Delta \rho \rightarrow 0} \frac{f[v + \Delta \rho e^{i\phi} (i \pm j)] - f(v)}{\Delta \rho e^{i\phi} (i \pm j)}. \quad (1.30.)$$

В обычной комплексной плоскости (z) при рассмотрении предела естественно выбрасывается $\Delta z = 0$. В пространстве вычет приращения $h=0$ влечет за собой и вычет элементов делителей нуля $\Delta \rho e^{i\phi} (i \pm j)$.

Однако в пространстве (Y) более правильным будет производная по изолированному направлению.

Каждая точка v_0 комплексного пространства Y является исходной точкой изолированного направления $v = v_0 + z(1 \pm ji)$. Геометрически это означает, что к точке v_0 прибавляется точка, не имеющая суммарного радиуса. Если выражение записать в виде $v - v_0 = z(1 \pm ji)$, то получаем перенос изолированного направления в точку v_0 . Для изолированного направления переменная z является модулем этого направления, остается в силе предельный переход

$$\lim_{z \rightarrow 0} (v - v_0) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} (v - v_0) = \infty(1 \pm ji).$$

Для определения производной от функции $f(v)$ в изолированном направлении, приращение переменной необходимо рассматривать как единый символ $\Delta v = \Delta v(1 \pm ji)$. Приращение функции выразится в виде $\Delta f = f[v_0 + \Delta v(1 \pm ji)] - f(v_0)$, так что производная выразится как предел

$$f'(v_0) = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{f[v_0 + \Delta v(1 \pm ji)] - f(v_0)}{\Delta v(1 \pm ji)}, \text{ или}$$

$$\lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta v(1 \pm ji)} = f'(v_0).$$

Приращение функции по изолированному направлению можно представить в виде

$$\Delta f = f[v_0 + \Delta v(1 \pm ji)] - f(v_0) = \frac{\partial f}{\partial v_0} \Delta v(1 \pm ji) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 v_0} \Delta^2 (1 \pm ji)^2 + \dots + 0(\Delta v(1 \pm ji))$$

Так, что ограничиваясь первым членом в разложении в ряд будем

$$\text{иметь} \quad \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial v_0} \Delta v(1 \pm ji)}{\Delta v(1 \pm ji)} = f'(v_0)$$

Последнее соотношение означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует

$$\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ такое, что неравенство } \left\| \frac{\Delta f}{\Delta v(1 \pm ji)} - f'(v_0) \right\| < \varepsilon \text{ имеет место,}$$

если $\sqrt{0} < \|\Delta v(1 \pm ji)\| < \delta$

В этом случае $\Delta f = f'(v_0) \Delta v(1 \pm ji) + 0(\Delta v(1 \pm ji))_{\Delta v \rightarrow 0}$, где $0(\Delta v(1 \pm ji))$ есть величина более высокого порядка малости, чем Δv . Справедливо и обратное утверждение

$\Delta f = A \Delta v(1 \pm ji) + 0(\Delta v(1 \pm ji))$, где A - есть комплексная постоянная, не зависящая от Δv . В этом случае функция $f(v)$ дифференцируема в точке v_0 и $A = f'(v_0)$

1.2.2. Элементарные функции

Рассмотрим классические функции анализа и распространим их определение в комплексное пространство.

Функции сохраняют свойства действительного и комплексного анализа и приобретают новые свойства, которые представляют интерес для практических приложений.

Наличие в пространстве выколотов оси по-новому ставит вопрос о циклических свойствах функций.

В действительной и комплексной плоскости простейшей циклической кривой является окружность, центр которой находится в начале координат или изолированной точке.

В комплексном пространстве циклическую кривую необходимо определить. Но для этого необходимо сформулировать критерии, которые определяют характер пространственной кривой. В связи с этим исследование многозначности

функций произведем после установления интегральных теорем. Остановимся на аппарате комплексного пространства:

- а.) определение функций, выделение в них комплексных и действительных чисел;
- б) аналитичность;
- с) таблица производных;
- д) поведение функций в особых точках.

А. Функции $\omega = v^n$ и $\omega = \sqrt[n]{v}$ где n - любое целое положительное число, определены во всем пространстве (Y).

Функция v^n в пространстве (v) за вычетом ϵ -туннеля дискретных точек представима в следующих выражениях:

$$\operatorname{Re}^{iF+j\theta} = r^n e^{in\phi+jn\psi}, \quad (1.31.)$$

откуда

$$R = r^n, F = n\phi, \theta = n\psi,$$

где величина ψ и соответственно θ могут быть комплексными.

Можно воспользоваться формулой (1.6), тогда

$$\operatorname{Re}^{iF+j\theta+jiS} = r^n e^{in\phi+jn\psi+jin\sigma}$$

и соотношения запишутся в виде:

$$R = r^n, F = n\phi, \theta = n\psi, S = n\sigma, \quad (1.32.)$$

где все параметры действительны.

Соотношения (1.31.), (1.32.) показывают, что отображение, осуществляемое функцией v^n , сводится к повороту всех углов ϕ, ψ, σ на угол $(n-1) \arg v$ и растяжению радиуса вектора $\|v\| = r$ в r^{n-1} раз.

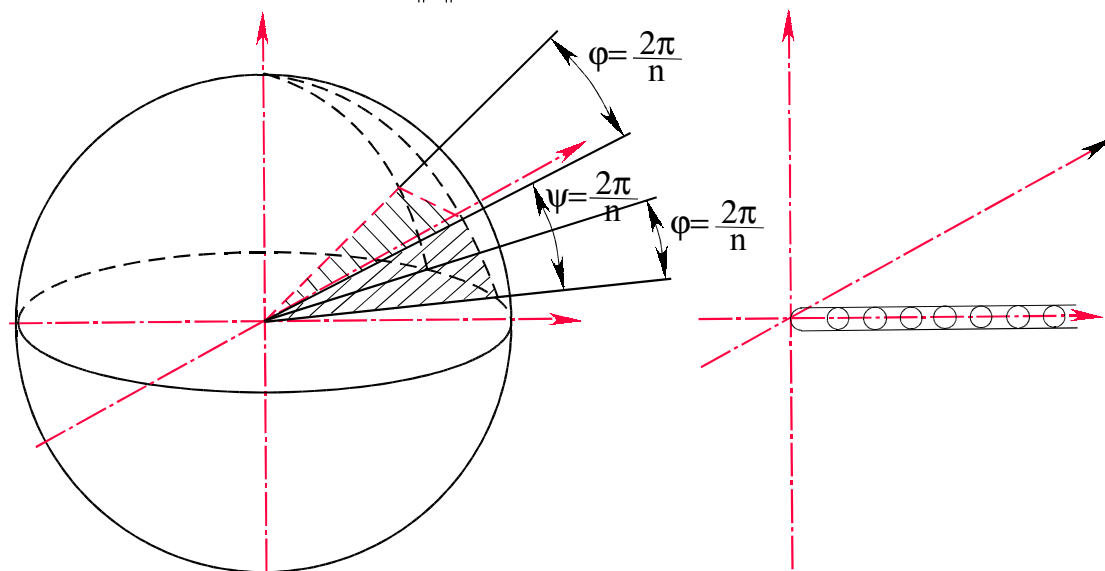


Рис. 14. Отображение пространственного сектора в полное пространство

В трехмерном пространстве можно записать

$$\operatorname{Re}^{iF+j\theta} = r^n e^{in\phi+jn\psi}.$$

$$R = r^n, F = n\phi, \theta = n\psi.$$

Полученные соотношения не отличаются от формул (1.31.) с той лишь оговоркой, что ψ и θ - действительные числа. В этом случае поверхность пространственного сектора на сфере r радиуса, ограниченная условиями

$$0 < \phi \leq \frac{2\pi}{n},$$

$$0 < \psi \leq \frac{2\pi}{n},$$

отображается на поверхность сферы радиуса, в r^{n-1} раз большего, и охватывает всю поверхность сферы (рис. 14).

Для однозначного отображения выкалывается ось, действительная в положительном направлении.

Докажем, что функция v^n аналитична в пространстве (v) . Раскроем предел (1.21.)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(v+h)^n - v^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{nv^{n-1}h + h^2}{h} = nv^{n-1}$$

Таким образом, для любого v существует предел и функция аналитична. Проверим условия дифференцирования функции на ее частном виде v^2 .

В цилиндрических координатах трехмерного пространства имеем

$$f(v) = v^2 = (\rho e^{i\phi} + jre^{i\phi})^2 = (\rho^2 - r^2)e^{2i\phi} + j2\rho re^{2i\phi},$$

откуда

$$W(\rho e^{i\phi}, re^{i\phi}) = \operatorname{Re}(v^2) = \rho^2 e^{2i\phi} - r^2 e^{2i\phi};$$

$$R(\rho e^{i\phi}, re^{i\phi}) = \operatorname{Im}(v^2) = 2\rho re^{2i\phi}.$$

Проверяем условия дифференцирования в форме (1.26.):

$$\begin{aligned} e^{-i\phi} \frac{\partial W}{\partial \rho} &= e^{-i\phi} \frac{\partial R}{\partial r} = 2\rho e^{-i\phi} = -ie^{-i\phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{\rho W + rR}{\rho^2 + r^2} = \\ &= -ie^{-i\phi} \frac{\rho \rho^2 2ie^{2i\phi} - r^2 \rho 2ie^{2i\phi}}{\rho^2 + r^2} + (-ie^{-i\phi}) \frac{r 2\rho r 2ie^{2i\phi}}{\rho^2 + r^2} = \\ &= e^{i\phi} \frac{2\rho}{\rho^2 + r^2} (\rho^2 + r^2) = 2\rho e^{i\phi}; \end{aligned}$$

$$e^{-i\phi} \frac{\partial R}{\partial \rho} = -e^{-i\phi} \frac{\partial W}{\partial r} = ie^{-i\phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{rW - \rho R}{\rho^2 + r^2} = 2re^{i\phi}.$$

Определяем производную

$$f'(v) = (v^2)' = -je^{-i\phi} \frac{\partial W}{\partial r} + e^{-i\phi} \frac{\partial R}{\partial \rho} = 2v.$$

Таким образом, табличная производная осталась без изменения.

В цилиндрических координатах четырехмерного пространства проверяем условия дифференцируемости в формах (1.28.), (1.29.):

$$f(v) = v^2 = \rho^2 e^{2i\phi} - r^2 e^{2i\psi} + j2\rho re^{i(\psi+\phi)}.$$

Отделение комплексных частей дает:

$$W(\rho e^{i\phi}, re^{i\psi}) = \operatorname{Re} f(v) = \rho^2 e^{2i\phi} - r^2 e^{2i\psi};$$

$$R(\rho e^{i\phi}, re^{i\psi}) = \operatorname{Im} f(v) = 2\rho re^{i(\phi+\psi)}.$$

В соответствии с условиями (1.28.), (1.29.) имеем:

$$e^{-i\phi} \frac{\partial W}{\partial \rho} = \frac{\partial R}{\partial r} e^{-i\psi} = -\frac{1}{\rho} i e^{-i\phi} \frac{\partial W}{\partial \phi} = -i \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \psi} e^{-i\psi} = 2\rho e^{i\phi};$$

$$e^{-i\phi} \frac{\partial R}{\partial \rho} = -\frac{\partial W}{\partial r} e^{-i\psi} = \frac{1}{\rho} i \frac{\partial R}{\partial \phi} e^{-i\phi} = \frac{1}{r} i \frac{\partial W}{\partial \psi} e^{-i\psi} = 2re^{+i\psi}.$$

Определяем производную:

$$f'(v) = e^{-i\phi} \frac{\partial W}{\partial \rho} + j e^{-i\phi} \frac{\partial R}{\partial \rho} = 2\rho e^{i\phi} + 2j re^{i\psi} = 2v.$$

Таким образом, табличная производная осталась в силе.

Функция v^n определена на выколотой оси, то есть в дискретных точках делителей нуля

$$f(v) = f(i+j) = (i+j)^n = (2i)^{n-1}(i+j).$$

Если

$$v_d = \rho e^{i\phi} (i+j).$$

то

$$v_d^n = \rho^n e^{2in\phi} (2i)^{n-1} (i+j).$$

По-прежнему имеем

$$\|v_d^n\| = \sqrt[2]{0}, \arg v_d = -\operatorname{arctg}(i).$$

Функция $\sqrt[n]{v}$ является обратной функции v^n .

Если

$$\omega = R \cdot e^{iF+j\theta},$$

$$v = re^{i\psi+j\psi},$$

то

$$R \cdot e^{iF+j\theta} = r^n e^{\frac{1}{n} i\phi + j \frac{\psi}{n}}.$$

Соотношения, определяющие отображения, имеет вид:

$$R = \sqrt[n]{r},$$

$$F = \frac{\phi}{n},$$

$$\theta = \frac{\psi}{n}.$$

Однако для этих отображений необходимо определить периодичность изменения аргументов ϕ, ψ . На этом остановимся после интегральных теорем.

Для однозначных ветвей для функции $\sqrt[n]{v}$ существует табличная производная

$$\frac{\partial \sqrt[n]{v}}{\partial v} = \frac{1}{n} v^{\frac{1}{n}-1}. \quad (1.33.)$$

Функция $\sqrt[n]{v}$ определена и в делителях нуля. Формально можно провести операции

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{v_d} &= \sqrt[n]{\rho e^{i\phi} (i+j)} = \rho^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\phi}{n}} \cdot 0^{\frac{1}{2n}} \cdot e^{-\frac{1}{n} j \arctg(i)} = \\ &= \rho^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\phi}{n}} \sqrt[n]{\sqrt{0} \cdot e^{-j \arctg(i)}}. \end{aligned}$$

При операциях с такими комплексами необходимо следить за порядком нуля и коэффициентом перед изолированным аргументом.

В. Функция $\omega = \frac{1}{v}$.

В трехмерном пространстве цилиндрической системы координат запишем

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{v} = \frac{1}{\rho e^{i\phi} + j r e^{i\phi}} = e^{-i\phi} \frac{1}{\rho + j r} = \\ &= e^{-i\phi} \frac{\rho}{\rho^2 + r^2} - j e^{-i\phi} \frac{r}{\rho^2 + r^2}. \end{aligned}$$

Выделение комплексных частей дает:

$$W(\rho e^{i\phi}, r e^{i\phi}) = \operatorname{Re} \omega = e^{-i\phi} \frac{\rho}{\rho^2 + r^2};$$

$$R(\rho e^{i\phi}, r e^{i\phi}) = \operatorname{Im} \omega = e^{-i\phi} \frac{r}{\rho^2 + r^2}.$$

Проверяем условия дифференцируемости функции в форме (1.27.):

$$\begin{aligned} e^{-i\phi} \frac{\partial W}{\partial \rho} &= e^{-2i\phi} \frac{r^2 - \rho^2}{(\rho^2 + r^2)^2} = e^{-i\phi} \frac{\partial R}{\partial r} = \\ &= -i e^{-i\phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{\rho W + r R}{\rho^2 + r^2} = \\ &= -i e^{-i\phi} \frac{-i e^{-i\phi} \frac{\rho}{\rho^2 + r^2} \rho + i e^{-i\phi} r \frac{\rho}{\rho^2 + r^2}}{(\rho^2 + r^2)^2} = \\ &= e^{-2i\phi} \frac{r^2 - \rho^2}{(\rho^2 + r^2)^2}; \end{aligned}$$

$$e^{-i\phi} \frac{\partial R}{\partial \rho} = -i e^{-i\phi} \frac{\partial W}{\partial r} = e^{-2i\phi} \frac{2\rho r}{(\rho^2 + r^2)^2} = i e^{-i\phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{r W - \rho R}{\rho^2 - r^2} =$$

$$= -ie^{-i\phi} \frac{(-ie^{-ri\phi} r\rho - r\rho ie^{-i\phi})}{(\rho^2 + r^2)^2} = e^{-2i\phi} \frac{2r\rho}{(\rho^2 + r^2)^2}.$$

Необходимые условия выполняются. Определим производную функции

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{v} \right) &= e^{-i\phi} \frac{\partial W}{\partial \rho} + je^{-i\phi} \frac{\partial R}{\partial \rho} = \\ &= e^{-2i\phi} \frac{r^2 - \rho^2}{(\rho^2 + r^2)^2} + je^{-2i\phi} \frac{2\rho r}{(\rho^2 + r^2)^2} = \\ &= e^{-2i\phi} \frac{(r + j\rho)^2}{(\rho^2 + r^2)^2} = e^{-2i\phi} \frac{[j(-jr + \rho)]^2}{(\rho^2 + r^2)^2} = \\ &= -e^{-2i\phi} \frac{\left(\sqrt{\rho^2 + r^2} \right)^2}{(\rho^2 + r^2)^2} e^{-2j \arctg\left(\frac{r}{\rho}\right)} = \\ &= -e^{-2i\phi - 2j\psi} \frac{1}{\rho^2 + r^2} = -\frac{1}{v^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, и для этой функции остается без изменения вид табличной производной

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{v} \right) = -\frac{1}{v^2}.$$

Определим функцию $\frac{1}{v}$ в пространстве четырех переменных в цилиндрических координатах

$$\omega = \frac{1}{v} = \frac{1}{\rho e^{i\phi} + jre^{i\psi}} = \frac{\rho e^{i\phi}}{\rho^2 e^{2i\phi} + r^2 e^{2i\psi}} - j \frac{re}{\rho^2 e^{2i\phi} + r^2 e^{2i\psi}}.$$

Выделение комплексных частей дает:

$$\begin{aligned} W(\rho e^{i\phi}, re^{i\psi}) &= \operatorname{Re} \omega = \frac{\rho e^{i\phi}}{\rho^2 e^{2i\phi} + r^2 e^{2i\psi}}; \\ R(\rho e^{i\phi}, re^{i\psi}) &= \operatorname{Im} \omega = -\frac{re^{i\psi}}{\rho^2 e^{2i\phi} + r^2 e^{2i\psi}}. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что комплексные части W , R удовлетворяют условиям дифференцирования в формах (1.28.), (1.29.). Не останавливаясь на элементарных выкладках, определим производную в этом пространстве

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{v} \right) = e^{-i\phi} \frac{\partial W}{\partial \rho} + je^{-i\phi} \frac{\partial R}{\partial \rho} =$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{\rho^2 e^{2i\phi} - r^2 e^{2i\psi}}{\rho^2 e^{2i\phi} + r^2 e^{2i\psi}} + j \frac{2r\rho e^{i\psi+i\phi}}{\rho^2 e^{2i\phi} + r^2 e^{2i\psi}} = \\
 &= \frac{-\rho^2 e^{2i\phi} + 2jr\rho e^{i\psi+i\phi} + r^2 e^{2i\psi}}{\rho^2 e^{2i\phi} + r^2 e^{2i\psi}} = \\
 &= -\frac{\left(\sqrt{\rho^2 e^{2i\phi} + r^2 e^{2i\psi}}\right)^2}{\left(\rho^2 e^{2i\phi} + r^2 e^{2i\psi}\right)^2} e^{-2j \arctg\left(\frac{r}{\rho}\right) e^{i(\psi+\phi)}} = -\frac{1}{v^2}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, вид производной от функции $\frac{1}{v}$, определенной в

четырёхмерном пространстве, соответствует табличному виду производной от функции, определенной как в плоскости комплексного переменного (z), так и действительной области

$$\frac{\partial}{\partial v_1} \left(\frac{1}{v} \right) = -\frac{1}{v^2}. \quad (1.34.)$$

Функция $\frac{1}{v}$ в особых точках пространства не определена так же, как она не определена в точке О. Вычет нулевой точки соответствует вычету всех элементов делителей нуля, расположенных на цилиндрической выколотой оси.

С. Интерес представляет рассмотрение самого элемента пространства (v).

Если

$$v = \rho e^{i\phi} + jre^{i\psi}, \text{ то } \operatorname{Re} v = \rho e^{i\phi}, \operatorname{Im} v = re^{i\psi}.$$

Условия дифференцируемости в форме (1.23.) легко проверяются. Производная от функции

$$\frac{\partial}{\partial v}(v) = e^{-i\phi} \frac{\partial W}{\partial \rho} + je^{-i\phi} \frac{\partial R}{\partial \rho} = e^{-i\phi} e^{+i\phi} + 0 = 1. \quad (1.35.)$$

В пространстве четырех переменных элемент выражается в виде

$$v = \rho e^{i\phi} + jre^{i\psi}, \operatorname{Re} v = \rho e^{i\phi}, \operatorname{Im} v = re^{i\psi}.$$

Для него выполняются условия дифференцирования в формах (1.28.), (1.29.).

Производная рассчитывается по формуле

$$\frac{\partial}{\partial v}(v) = e^{-i\phi} \frac{\partial W}{\partial \rho} + je^{-i\phi} \frac{\partial R}{\partial \rho} = e^{-i\phi} e^{+i\phi} + j \cdot 0 = 1.$$

Д. Экспоненциальная функция e^v определена во всем пространстве (v), включая элементы делителей нуля и им эквивалентные числа. Нигде функция не обращается нуль

$$\|\omega\| = \|e^{i\pm j}\| = \|e^i \cos 1 \pm je^i \sin 1\| = \|e^i\| \cdot \sqrt{\cos^2 1 + \sin^2 1} = 1.$$

Модуль комплекса равен 1.

Рассмотрим также функцию от элементов делителей нуля

$$e^{\rho e^{i\phi}(i+j)} = e^{\rho e^{i\phi}i + j\rho e^{i\phi}} = e^{\rho e^{i\phi}i} \cos(\rho e^{i\phi}) + j e^{\rho e^{i\phi}i} \sin(\rho e^{i\phi})$$

$$\left| \rho e^{\rho e^{i\phi}(i+j)} \right| = e^{\rho e^{i\phi}i} = e^{i\rho \cos\phi - \rho \sin\phi} \left| e^{\rho e^{i\phi}i} \right| = e^{-\rho \sin\phi}$$

$$\text{Окончательно } \left\| e^{\rho e^{i\phi}(i+j)} \right\| = e^{-\rho \sin\phi}$$

$$\|\omega\| = \left\| e^{\rho e^{i\phi}(j+j)} \right\| = \left\| e^{i\rho e^{i\phi}} + j\rho e^{i\phi} \right\| = \left\| e^{\rho e^{i\phi}} + j \frac{\pi}{2} \right\| = \left\| e^{-\rho \sin\phi} \right\| = e^{-\rho \sin\phi}.$$

Определим комплексные части функции при условии, что элемент v определен в трехмерном комплексном пространстве цилиндрических координат:

$$W(\rho e^{i\phi}, r e^{i\phi}) = \operatorname{Re} \omega = e^{\rho e^{i\phi}} = \cos(r e^{i\phi}),$$

$$R(\rho e^{i\phi}, r e^{i\phi}) = \operatorname{Im} \omega = e^{\rho e^{i\phi}} = \sin(r e^{i\phi})$$

Для проверки необходимых условий дифференцируемости в форме (1.27.) определим шесть производных:

$$\frac{\partial W}{\partial \rho} = e^{\rho e^{i\phi}} e^{i\phi} \cos(r e^{i\phi}),$$

$$\frac{\partial W}{\partial r} = -e^{\rho e^{i\phi}} e^{i\phi} \sin(r e^{i\phi}),$$

$$\frac{\partial W}{\partial \phi} = e^{\rho e^{i\phi}} e^{i\phi} i \cos(r e^{i\phi}) - r e^{i\phi} i \sin(r e^{i\phi}) e^{\rho e^{i\phi}};$$

$$\frac{\partial R}{\partial \rho} = e^{\rho e^{i\phi}} e^{i\phi} \sin(r e^{i\phi}),$$

$$\frac{\partial R}{\partial r} = e^{\rho e^{i\phi}} e^{i\phi} \cos(r e^{i\phi}),$$

$$\frac{\partial R}{\partial \phi} = e^{\rho e^{i\phi}} \rho e^{i\phi} i \sin(r e^{i\phi}) + e^{\rho e^{i\phi}} r i e^{i\phi} i \cos(r e^{i\phi})$$

Сравнение этих производных в соответствии с условиями (1.27.) показывает справедливость последних. Функция является аналитической.

Определим производную от этой функции

$$\frac{\partial e^v}{\partial v} = e^{-i\phi} \frac{\partial W}{\partial \rho} + j e^{-i\phi} \frac{\partial R}{\partial \rho} = e^{-i\phi} e^{\rho e^{i\phi}} \cos(r e^{i\phi}) + j e^{-i\phi} e^{\rho e^{i\phi}} \sin(r e^{i\phi}) =$$

$$= e^{\rho e^{i\phi}} [\cos(r e^{i\phi}) + j \sin(r e^{i\phi})] = e^{\rho e^{i\phi} + j r e^{i\phi}} = e^v.$$

Таким образом, табличная производная для экспоненциальной функции осталась в силе

$$\frac{\partial e^v}{\partial v} = e^v \quad (1.36.)$$

Аналогично обстоит дело и в четырехмерном пространстве.

Е. Рассмотрим логарифмическую функцию $\ln(v)$.

Проведем операции в трехмерном пространстве.

Если

$$v = \rho e^{i\phi} + jre^{i\phi},$$

то

$$\ln v = \ln(R \cdot e^{iF+j\theta}) = \ln R + iF + j\theta;$$

$$\operatorname{Re}(\ln v) = \ln \sqrt{\rho^2 + r^2} + i\phi;$$

$$\operatorname{Im}(\ln v) = \operatorname{arctg}\left(\frac{r}{\rho}\right)$$

Проверяем необходимые условия дифференцирования функции в форме (1.27.):

$$-e^{-i\phi} \frac{\partial W}{\partial \rho} = e^{-i\phi} \frac{\partial R}{\partial r} = e^{-i\phi} \frac{\rho}{\rho^2 + r^2} =$$

$$= -je^{-i\phi} \frac{\rho i + r0}{\rho^2 + r^2} = -ie^{-i\phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{rR + \rho W}{\rho^2 + r^2};$$

$$e^{-i\phi} \frac{\partial R}{\partial \rho} = -e^{-i\phi} \frac{r}{\rho^2 + r^2} = -e^{-i\phi} \frac{\partial W}{\partial r} =$$

$$= -e^{-i\phi} \frac{r}{\rho^2 + r^2} = ie^{-i\phi} \frac{r \frac{\partial W}{\partial \phi} - \frac{\partial R}{\partial \phi}}{\rho^2 + r^2} =$$

$$= ie^{-i\phi} \frac{ri}{\rho^2 + r^2} = -e^{-i\phi} \frac{r}{\rho^2 + r^2};$$

Необходимые условия дифференцирования выполняются.

Определим производную

$$\frac{\partial}{\partial v} (\ln v) = e^{-i\phi} \frac{\partial W}{\partial \rho} + je^{-i\phi} \frac{\partial R}{\partial \rho} = e^{-i\phi} \frac{\rho}{\rho^2 + r^2} - je^{-i\phi} \frac{r}{\rho^2 + r^2} =$$

$$= \frac{\rho - jr}{\rho^2 + r^2} e^{-i\phi} = e^{-i\phi - j\psi} \frac{\sqrt{\rho^2 + r^2}}{\rho^2 + r^2} = e^{-i\phi - j\psi} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + r^2}} = \frac{1}{v}.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial v} (\ln v) = \frac{1}{v}. \quad (1.37.)$$

Проведем операции в четырехмерном пространстве

$$v = \rho e^{i\phi} + jre^{i\psi}.$$

Выделение комплексных частей дает выражения:

$$W(\rho e^{i\phi}, re^{i\psi}) = \operatorname{Re}(\ln v) = \ln \sqrt{\rho^2 e^{2i\phi} + r^2 e^{2i\psi}};$$

$$R(\rho e^{i\phi}, re^{i\psi}) = \operatorname{Im}(\ln v) = \operatorname{arctg}\left(\frac{r}{\rho}\right) e^{i(\psi-\phi)};$$

Следовательно, для доказательства необходимых условий дифференцирования в формах (1.28.), (1.29.) вычислим восемь производных от функций W и R по переменным ρ , r , ϕ , ψ и сопоставим:

$$\frac{\partial W}{\partial \rho} = \frac{1}{2} \frac{2\rho e^{2i\phi}}{\rho^2 e^{2i\phi} + r^2 e^{2i\psi}};$$

$$\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{re^{2i\psi}}{\rho^2 e^{2i\phi} + r^2 e^{2i\psi}};$$

$$\frac{\partial W}{\partial \phi} = \frac{i\rho^2 e^{2i\phi}}{\rho^2 e^{2i\phi} + r^2 e^{2i\psi}};$$

$$\frac{\partial W}{\partial \psi} = \frac{ir^2 e^{2i\psi}}{\rho^2 e^{2i\phi} + r^2 e^{2i\psi}};$$

$$\frac{\partial R}{\partial \rho} = -\frac{1}{1 + \frac{r^2 e^{2i\psi}}{\rho^2 e^{2i\phi}}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{re^{i\psi}}{\rho e^{i\phi}} \right) = \frac{re^{i\phi} e^{i\psi}}{\rho^2 e^{2i\phi} + r^2 e^{2i\psi}};$$

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{\rho e^{i\phi} e^{i\psi}}{\rho^2 e^{2i\phi} + r^2 e^{2i\psi}};$$

$$\frac{\partial R}{\partial \phi} = \frac{i\rho re^{i\phi} e^{i\psi}}{\rho^2 e^{2i\phi} + r^2 e^{2i\psi}};$$

$$\frac{\partial R}{\partial \psi} = \frac{i\rho re^{i\phi} e^{i\psi}}{\rho^2 e^{2i\phi} + r^2 e^{2i\psi}};$$

Легко проверяется, что необходимые условия для дифференцирования функции в пространстве выполняются.

Определим производную в четырехмерном пространстве

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln v}{\partial v} &= e^{-i\phi} \frac{\partial W}{\partial \rho} + j e^{-i\phi} \frac{\partial R}{\partial \rho} = \\ &= \frac{\rho e^{-i\phi}}{\rho^2 e^{2i\phi} + r^2 e^{2i\psi}} - j \frac{re^{i\psi}}{\rho^2 e^{2i\phi} + r^2 e^{2i\psi}} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{\rho^2 e^{2i\phi} + r^2 e^{2i\psi}} e^{-j \arctg\left(\frac{r}{\rho}\right)} e^{i\psi - i\phi}}{\rho^2 e^{2i\phi} + r^2 e^{2i\psi}} = \frac{1}{v}.$$

Таким образом, и в четырехмерном пространстве табличная производная осталась в силе

$$\frac{\partial}{\partial v} (\ln v) = \frac{1}{v}. \quad (1.38.)$$

Рассмотрим логарифмическую функцию, определенную на выколотой оси делителей нуля

$$\ln[\rho e^{i\phi} (i \pm j)] = \ln \rho + i\phi + \ln(i \pm j) = \ln \rho + i\phi + \ln \sqrt{0} \pm j \arctg(i).$$

Е. Элементарные тригонометрические функции. Определим функции $\sin(v)$ и $\cos(v)$ через экспоненциальные функции e^v :

$$e^{jv} = \cos v + j \sin v;$$

$$e^{-jv} = \cos v - j \sin v.$$

Оба выражения являются распространением формул (z) -плоскости в пространство (v) . Складывая и вычитая выражения друг с другом, получим

$$\sin v = \frac{e^{jv} - e^{-jv}}{2j};$$

$$\cos v = \frac{e^{jv} + e^{-jv}}{2}.$$

Так как табличная производная от экспоненциальной функции осталась без изменения (1.34.), то легко определяются производные от $\sin(v)$ и $\cos(v)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\sin v)}{\partial v} &= \cos v; \\ \frac{\partial(\cos v)}{\partial v} &= -\sin v; \end{aligned} \quad (1.39.)$$

Вид табличных производных остался без изменения. Остаются в силе и тригонометрические зависимости:

$$\sin^2 v + \cos^2 v = 1;$$

$$\sin 2v = 2 \sin v \cos v, \dots$$

Г. Тригонометрические и гиперболические функции в пространстве Y .

В плоскости комплексного переменного z тригонометрические функции определяются через функции $\sin(z)$, $\cos(z)$, которые выражены формулами

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \text{ которые являются следствием}$$

формулы Эйлера. Мнимая единица j отличается от мнимой единицы i только обозначением. В пространстве Y эта единица фиксирует третье координатное направление. Алгебра этой единицы совпадает с алгеброй мнимой единицы i . Поэтому в силе остаются и формулы

$$\sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j}, \cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2}.$$

Далее формулы распространяются в пространство Y .

$$\sin v = \frac{e^{jv} - e^{-jv}}{2j}, \cos v = \frac{e^{jv} + e^{-jv}}{2}.$$

При переходе от v к jv получаем гиперболические функции в пространстве Y .

$$shv = \frac{e^v - e^{-v}}{2}, chv = \frac{e^v + e^{-v}}{2}$$

$$thv = \frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}}, cthv = \frac{e^v + e^{-v}}{e^v - e^{-v}}$$

Гиперболические функции выражаются через тригонометрические

$$shv = -j \sin jv, chv = \cos jv$$

$$thv = -jtgjv, cthv = jcthjv$$

Особенность этих формул заключается в том, что они представляют функции от двух комплексных переменных z, σ , в силу комплексности переменной v . Это позволяет получить ряд зависимостей. Например

$$shv = sh(z + j\sigma) = \frac{e^{z+j\sigma} - e^{-z-j\sigma}}{2} =$$

$$\frac{1}{2}(e^z \cos \sigma + je^z \sin \sigma - e^{-z} \cos \sigma + je^{-z} \sin \sigma) =$$

$$= \frac{1}{2}[(e^z - e^{-z}) \cos \sigma + j \sin \sigma (e^z + e^{-z})] = shz \cos \sigma + j \sin \sigma chz.$$

Аналогичные преобразования дают

$$chv = chz \cos \sigma - jshz \sin \sigma.$$

$$|shv| = \sqrt{sh^2 z \cos^2 \sigma + \sin^2 \sigma ch^2 z} =$$

$$\sqrt{sh^2 z \cos^2 \sigma + ch^2 z - \cos^2 \sigma ch^2 z} =$$

$$= \sqrt{\cos^2 \sigma (sh^2 z - ch^2 z) + ch^2 z} = \sqrt{ch^2 z - \cos^2 \sigma}, \quad \text{так как известно}$$

соотношение в комплексной плоскости $ch^2 z - sh^2 z = 1$

Комплексный аргумент будет равен

$$\arg_2 shv = \arctg \frac{\sin \sigma chz}{\cos \sigma cthz} = \arctg(tg \sigma cthz)$$

Можно продолжить выделение модуля от четырех переменных

$$\|shv\| = \left| \sqrt{ch^2 z - \cos^2 \sigma} \right|, \text{ однако ввиду громоздкости и элементарности}$$

выкладок в настоящий момент это не представляет интереса.

Исследуем поведение функций $\sin v$ и $\cos v$ в особых точках пространства на множестве элементов делителей нуля. Рассмотрим функцию $\sin(i \pm j)$ как функцию от суммы двух углов i и j

$$\sin(i \pm j) = \sin i \cos j \pm \cos i \sin j =$$

$$= \frac{e^{-1} - e^{+1}}{2i} \frac{e^{-1} + e^{+1}}{2} \pm \frac{e^{-1} - e^{+1}}{2i} \frac{e^{-1} + e^{+1}}{2} = \frac{e^{-2} - e^{+2}}{4ij} (i \pm j).$$

Расшифруем полученный результат. Функция принадлежит элементам делителей нуля:

$$\sin(i \pm j) \neq 0;$$

$$\|\sin(i \pm j)\| = \sqrt{0};$$

$$\arg(\sin(i \pm j)) = \pm \operatorname{arctg}(i).$$

Квадрат $\sin(i \pm j)$, равный

$$\sin^2(i \pm j) = \frac{(e^{-2} - e^{+2})^2}{16} (-2 + 2ij),$$

также принадлежит элементам делителей нуля.

Рассмотрим функцию косинус от делителя нуля

$$\cos(i + j) = \cos i \cos j - \sin i \sin j$$

последовательно заменяя на гиперболические функции получим

$$\cos i \cos j = \frac{e^{-1} + e^{+1}}{2} \frac{e^{-1} + e^{+1}}{2} = \frac{e^{-2} + 2 + e^{+2}}{4}$$

$$\sin i \sin j = \frac{e^{-1} - e^{+1}}{2i} \frac{e^{-1} - e^{+1}}{2j} = \frac{e^{-2} - 2 + e^{+2}}{4ji}$$

$$\text{следовательно } \cos(i + j) = \frac{e^{-2} + 2 + e^{+2}}{4} - \frac{e^{-2} - 2 + e^{+2}}{4ji}$$

$$\cos^2(i + j) = \frac{e^{-4} + e^{+4}}{8} + \frac{6}{8} - \frac{e^{-4} + e^{+4} - 2}{8ji}$$

Сложение квадратов тригонометрических функций синуса и косинуса от делителей нуля получим $\cos^2(i + j) + \sin^2(i + j) = 1$

Определим аналогично функцию $\cos(i \pm j)$:

$$\cos(i \pm j) = \frac{ij(e^{-1} + e^{+1})^2 - (e^{-1} - e^{+1})^2}{4ij};$$

$$\cos^2(i \pm j) = \frac{(e^{-1} + e^{+1})^4 - 2ij(e^{-2} - e^{+2})^2 + (e^{-1} - e^{+1})^4}{16}.$$

Таким образом, функция $\cos v$, определенная на элементах делителей нуля, не принадлежит этим элементам. Модуль комплекса $\cos(i \pm j)$ не равен нулю и не равен 1

$$\|\cos(i \pm j)\| = \frac{1}{4} \sqrt{(e^{-1} + e^{+1})^4 + (e^{-1} - e^{+1})^4};$$

$$\arg \cos(i \pm j) \neq \operatorname{arctg}(i).$$

Таким образом, функции $\sin v$ и $\cos v$ - основные тригонометрические функции, приобрели в пространстве новые свойства, сохранив прежние, присущие им в z -плоскости и на действительной оси без изменения.

Основное тригонометрическое равенство осталось без изменения и на выколотой оси

$$\begin{aligned} \cos^2(i \pm j) + \sin^2(i \pm j) &= \\ &= \frac{(e^{-1} + e^{+1})^4 - 2ij(e^{-2} - e^{+2})^2 + (e^{-1} - e^{+1})^4}{16} + \\ &+ \frac{(e^{-2} - e^{+2})^2(-2 + 2ij)}{16} = \\ &= \frac{2e^{-4} + 12 + 2e^4 - 2ij(e^{-4} - 2 + e^4)}{16} - \\ &- \frac{(e^{-4} - 2 + e^{+4})^2 - 2ij(e^{-4} - 2 + e^4)}{16} = \frac{12 + 4}{16} = 1. \end{aligned}$$

Итак,

$$\cos^2(i \pm j) + \sin^2(i \pm j) = 1.$$

Новые свойства функций $\sin v$ и $\cos v$ определяют и новые свойства остальных тригонометрических функций. Например,

$$\|tg(i + j)\| = \sqrt{0};$$

$$\arg tg(i + j) = \operatorname{arctg}(i).$$

Н. Функция $\arg v$

Исследуем поведение элемента пространства v , представив его в сферических координатах

Если имеем $v = \rho e^{i\varphi} + jre^{i\psi}$, то переходя к сферическим координатам получим

$$v = R e^{iF + j\Psi}, \text{ где}$$

$$\begin{aligned} R &= \sqrt[4]{\rho^4 + r^4 + 2\rho^2 r^2 \cos 2(\psi - \varphi)}, \\ F &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\rho^2 \sin 2\varphi + r^2 \sin 2\psi}{\rho^2 \cos 2\varphi + r^2 \cos 2\psi}, \end{aligned} \quad (1.40.)$$

$$\Psi = \operatorname{arctg} \frac{r}{\rho} e^{i(\psi - \varphi)}.$$

Точка v в пространстве определена модулем R и двумя аргументами F, Ψ или четырьмя независимыми переменными ρ, φ, r, ψ . Однозначное определение точки в пространстве требует равенства четырех независимых переменных: $v_0 = v_1$ когда $\rho_0 = \rho_1, \varphi_0 = \varphi_1, r_0 = r_1, \psi_0 = \psi_1$.

Функцию $Ln v = Ln R + iF + j\Psi$ можно рассматривать как функцию двух комплексных

$$\begin{aligned} \alpha &= Ln R + iF, \\ \beta &= \Psi \end{aligned}$$

В этом случае функции $\alpha = \alpha(z, \sigma), \beta = \beta(z, \sigma)$ где

$$\alpha = Ln \sqrt{z^2 + \sigma^2}, \beta = \operatorname{arctg} \frac{\sigma}{z}.$$

Комплекс v представляется в полярных комплексных координатах

$$v = z + j\sigma, \text{ где}$$

$$z = R \cos \beta,$$

$$\sigma = R \sin \beta.$$

Аргумент β комплексный, а тригонометрические функции

$$\cos \beta = \frac{z}{\sqrt{z^2 + \sigma^2}}, \sin \beta = \frac{\sigma}{\sqrt{z^2 + \sigma^2}} \text{ также будут комплексными.}$$

Выведем формулу приращения комплексного аргумента на кривой γ .

Определим дифференциалы $dz, d\sigma$

$$dz = \cos \beta dR - R \sin \beta d\beta$$

$$d\sigma = \sin \beta dR + R \cos \beta d\beta$$

так, что будем иметь $Rd\beta = -\sin \beta dz + \cos \beta d\sigma$, а с учетом

$$\text{тригонометрических функций получим } d\beta = d \arg v = \frac{-\sigma dz + z d\sigma}{z^2 + \sigma^2}.$$

Рассмотрим интеграл $\int_{\gamma} d \arg v$. Интеграл определяет разность значений аргумента между конечной и начальными точками на кривой γ .

$$\Delta_{\gamma} \arg v = \int_{\gamma} \frac{-\sigma dz + z d\sigma}{z^2 + \sigma^2}.$$

В пространстве знаменатель подынтегральной функции имеет две особенности : 1) $z = 0, \sigma = 0$, что равносильно точке с $\rho = 0, r = 0$, фиксирующей начало координат ;

2) $\rho^2 e^{2i\varphi} + r^2 e^{2i\psi} = 0$, раскрывая это соотношение между модулями комплексов и аргументами получим ,что соотношение выполняется при равенстве $\rho = r, \psi - \varphi = \frac{\pi}{2}$.

Полученные соотношения определяют изолированную ось в пространстве .Таким образом , выбрасывая из рассмотрения начало координат необходимо учитывать изолированную ось делителей нуля как особенность в пространстве Область D за вычетом этих особенностей является односвязной областью и для каждой кривой γ_1, γ имеет место равенство

$$\int_{\gamma_1} Pdz + Qd\sigma = \int_{\gamma} Pdz + Qd\sigma$$

$$\text{где } P(z, \sigma) = -\frac{\sigma}{z^2 + \sigma^2}, Q(z, \sigma) = \frac{z}{z^2 + \sigma^2}$$

$$\text{и выполняется равенство } \frac{dP}{d\sigma} = \frac{dQ}{dz}$$

Таким образом , если кривые γ, γ_1 выходят из одной точки и приходят в одну точку ,оставаясь

В области определения, то имеет место равенство $\Delta_{\gamma} \arg v = \Delta_{\gamma_1} \arg v$. Кривые γ, γ_1 можно непрерывно деформировать в пространстве .В комплексном пространстве аргументы

F, Ψ имеют комплексную периодичность $4\pi i + 2\pi j$, так что комплекс V имеет вид

$v = \operatorname{Re} e^{iF + j\Psi + 4k\pi i + 2k\pi j}$, где $k=0,1,2,\dots$ есть целое. Эта периодичность следует из закона извлечения квадратного корня из $+1$ в пространстве чисел и пространственной кривой C_3 .

Рассмотрим комплексный аргумент Ψ как комплексную функцию в плоскости $z = \tau e^{i\delta}$, где для удобства введены обозначения $\tau = \frac{r}{\rho}, \delta = \psi - \varphi$. Функция Ψ является аналитической функцией в расширенной плоскости z с выколотыми точками $\pm i$, которые являются логарифмическими точками ветвления.

$$\Psi = \operatorname{arctg} \frac{r}{\rho} e^{i(\psi - \varphi)} = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1 + i \frac{r}{\rho} e^{i(\psi - \varphi)}}{1 - i \frac{r}{\rho} e^{i(\psi - \varphi)}}.$$

Условия выделения изолированной оси или иначе говоря конуса делителей нуля выражаемые равенством

$$r = \rho, \psi - \varphi = \pm \frac{\pi}{2}$$

показывают, что в пространстве имеется логарифмическая ось ветвления. Произведем выделение действительной и мнимой части комплекса $\Psi = \eta + is$. Преобразуя Ln

по законам комплексной алгебры Z получим

$$s = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \sqrt{\frac{1 - 2 \frac{r}{\rho} \sin \delta + \left(\frac{r}{\rho}\right)^2}{1 + 2 \frac{r}{\rho} \sin \delta + \left(\frac{r}{\rho}\right)^2}}$$

$$\sigma = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2 \frac{r}{\rho} \cos \delta}{1 - \left(\frac{r}{\rho}\right)^2}$$

знаменателя

Комплексный аргумент имеет вид

$$\Psi = \sigma + is = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2 \frac{r}{\rho} \cos \delta}{1 - \left(\frac{r}{\rho}\right)^2} + \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \sqrt{\frac{1 - 2 \frac{r}{\rho} \sin \delta + \left(\frac{r}{\rho}\right)^2}{1 + 2 \frac{r}{\rho} \sin \delta + \left(\frac{r}{\rho}\right)^2}} \quad (1.41.)$$

При обходе цилиндрической оси комплексный аргумент имеет приращение только по действительной части. Мнимая часть представляет

однозначную логарифмическую функцию, приращение которой дает нуль. В вершинах пространственной сферы при $\rho = 0$ при любом r .

δ и любом r имеем $dLn\sqrt{\frac{r^2}{r^2}} = 0$. Действительная часть в вершинах сферы равна

$$\sigma_{\rho \rightarrow \sqrt{0}} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2 \frac{r}{\rho} \cos \delta}{1 - \left(\frac{r}{\rho}\right)^2} \Rightarrow \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 0 = \frac{1}{2} (\pm \pi) \quad (1.42.)$$

При условиях выделения изолированной оси $r = \rho, \psi - \varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ имеем

$$\sigma = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\pm 2 \cdot 1}{1 - 1} = \frac{1}{2} \left(\pm \frac{\pi}{2} \right) = \pm \frac{\pi}{4}$$

$$s = \frac{1}{2} \ln \sqrt{\frac{1 \mp 2 + 1}{1 \pm 2 + 1}} = \mp \infty$$

Рассмотрим значение параметров σ, s в особых точках пространства:

1) Если $\rho = \sqrt{0}$, то при любом δ имеем

$$\sigma = \operatorname{arctg} \frac{2 \rho r \cos \delta}{\rho^2 - r^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 0 = \pm \frac{\pi}{2} \quad s = \frac{1}{2} \ln \sqrt{\frac{r^2}{r^2}} = 0. \text{ В этом случае}$$

аргумент $\psi = \pm \frac{\pi}{2}$ и комплекс $v = e^{\pm \frac{\pi}{2} j} r e^{i \varphi_1} = \pm j r e^{i \varphi_1}$. Если принять

$\rho = \sqrt{0} = 0$, то $\sigma = 0$, комплекс $v = r e^{i \varphi_1}$.

2) Если $\delta = \pm \frac{\pi}{2}, \rho \neq r$, то и в этом случае берем

$$\sigma = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 0 = \pm \frac{\pi}{2}, s = \frac{i}{2} Ln \frac{\rho \pm r}{\rho \mp r}, \text{ аргумент } \psi \text{ в этом случае состоит из}$$

действительной и комплексной частей $\psi = \pm \frac{\pi}{2} + i s$.

3) Если $\delta = \pm \frac{\pi}{2}, \rho = r$ то действительная часть аргумента ψ становится

неопределенной, так как мнимая часть равна мнимой бесконечности $\pm \infty \frac{i}{2}$.

Последнее означает, что $\psi = \pm \operatorname{arctg} i$. Эта величина также определяет комплексную бесконечность. В пространстве Y при этих условиях можно рассматривать аргумент ψ , выражаемый равноценными значениями

$$\psi = \pm j i \infty = \pm j i \operatorname{arctg} \frac{\pi}{2} = \pm j \operatorname{arctg} i. \text{ Таким образом, доказано, что изолированная}$$

ось определена направлением $\pm \operatorname{arctg} \frac{\pi}{2}$.

4) Если $\rho = \sqrt{0}, \delta = \frac{\pi}{2}$, то $\sigma = \pm \frac{\pi}{2}, s = 0$, аргумент $\psi = \pm \frac{\pi}{2}$.

Свойство введенного пространства раскрываются при анализе интегрального представления функции $\arctg v$. Функция при действительном

переменном x допускает интегральное представление $\arctg x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.

Переходя к пространству Y , выразим функцию через логарифм $\int_0^v \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \frac{1}{2} \int_0^v \frac{1}{1-i\xi} d\xi + \frac{1}{2} \int_0^v \frac{1}{1+i\xi} d\xi = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+iv}{1-iv}$.

Следовательно $\arctg v = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+iv}{1-iv}$ и функция аналитична в пространстве с выколотыми точками $\pm i$.

Аналогичные выкладки дают и для точек $\pm j$. Так, что $\arctg v = \frac{1}{2j} \ln \frac{1+jv}{1-jv}$. Функция в пространстве имеет еще две выколотые точки $\pm j$.

Функция $(1+Z^2)^{-1}$ регулярна во всей комплексной плоскости Z с выколотыми точками $\pm i$

Функция $\arctg Z = \int_0^Z \frac{d\xi}{1+\xi^2}$ аналитична в комплексной плоскости с выколотыми точками $\pm i$

Функция $(1+v^2)^{-1}$ регулярна во всем пространстве Y за исключением четырех точек $v = \pm i, v = \pm j$. Поэтому целесообразно разложить дробь на четыре простейшие дроби

$$\frac{1}{1+\xi^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1-i\xi} + \frac{1}{1+i\xi} + \frac{1}{1+j\xi} + \frac{1}{1-j\xi} \right)$$

При таком разложении каждая дробь не регулярна в одном из полюсов. Делители нуля также исключаются из рассмотрения, так как подстановка нерегулярной точки в другие дроби невозможно ибо в этом случае дробь не принадлежит разложению исходной дроби.

Точки $\pm ji$ не являются корнями знаменателя исходной дроби.

Функцию $\arctg v$ в пространстве Y следовательно можно записать в виде

$$\begin{aligned} \arctg v &= \frac{1}{4} \int_0^v \left(\frac{1}{1-i\xi} + \frac{1}{1+i\xi} + \frac{1}{1+j\xi} + \frac{1}{1-j\xi} \right) d\xi = \\ &= \frac{1}{4i} \ln \frac{1+i\xi}{1-i\xi} + \frac{1}{4j} \ln \frac{1+j\xi}{1-j\xi} \end{aligned}$$

Таким образом, функция $\arctg v$ в пространстве Y выражается суммой логарифмов.

Таблица производных элементарных функций классического анализа, определенных в комплексном пространстве

Сведем формулы (1.29.) – (1.35.) в таблицу:

$$\begin{aligned}
 f(v) &= v, \frac{\partial}{\partial v} v = 1; \\
 \omega &= v^2, \frac{\partial}{\partial v} v^2 = 2v; \\
 \omega &= v^n, \frac{\partial}{\partial v} v^n = nv^{n-1}; \\
 \omega &= \frac{1}{v}, \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{v} \right) = -\frac{1}{v^2}; \\
 \omega &= \ln v, \frac{\partial}{\partial v} (\ln v) = \frac{1}{v}; \\
 \omega &= e^v, \frac{\partial}{\partial v} (e^v) = e^v
 \end{aligned} \tag{1.43.}$$

и так далее.

Из таблицы видно, что классические функции анализа имеют таблицу производных, которая ничем не отличается от таблицы производных этих функций, определенных в z плоскости и на действительной оси.

1.3. Интегральные теоремы Коши в комплексном пространстве

1.3.1. Связность комплексного пространства

Пространственные комплексные координаты, введенные в исследование, по-новому определили точку в пространстве связность, непрерывность этого пространства.

Комплексная ось $jre^{i\phi}$ является естественным продолжением в построении системы комплексных координат, ибо к плоскости (z) восстановлена плоскость, только свернутая в цилиндрическую поверхность с радиусом корня из нуля. При построении комплексной плоскости (z) оси x и y топологически равноценны и выступают как обозначения, которые можно переставить. Продолжая этот принцип к плоскости (z), была восстановлена также плоскость (σ), свернутая в цилиндр, на поверхности которого остаются в силе все метрические соотношения, заданные на плоскости: сумма углов треугольника по-прежнему равна 180 град., равными остаются расстояния между вершинами и величина площади. Гауссова кривизна цилиндра равна нулю. В этом смысле декартова система координат становится совершенно непригодной из-за того, что третья ось не несет топологии плоскости, к которой она восстановлена.

На внешней поверхности выколотой оси $j\sigma$ можно получить все точки плоскости (z). В цилиндрических координатах, каждая точка v имеет окрестность γ_r , с радиусом $\varepsilon_r \sim \sqrt{0}$, которая расположена от плоскости (z) на расстоянии r. (см. рис. 4, 5, 6, 7). Поверхность выколотой оси $j\sigma$ содержит точки, у которых угол $\beta = \pm \frac{\pi}{2}$. Тогда согласно формуле (1.5.) можно записать

$$v = R \cdot e^{i\alpha + j\pi/2} = R \cdot e^{i\alpha} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + jR \cdot e^{i\alpha} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = jR \cdot e^{i\alpha}.$$

Поэтому изолированное направление $\pm j \arctg(i)$ следует считать заключенным внутри этой выколотой оси, а бесконечное множество делителей нуля v_d образует внутреннюю поверхность выколотой оси. Все это бесконечное множество, расположенное на конусе с мнимой поверхностью в цилиндрической системе координат, собирается в выколотую ось в сферических координатах. Мнимый конус-фильтр состоит из окрестностей точек γ_r , поверхность которых повернута относительно поверхности обычных точек v на $\pi/2$ согласно условию (1.8.).

Точка делителей нуля в цилиндрических координатах имеет место (рис. 8), однако в нее нельзя провести радиус-вектор, поэтому поверхность, образованную множеством этих точек, считаем мнимой. Эта поверхность образована множеством не суммируемых, взаимно перпендикулярных векторов с равными по величине модулями и имеющих начало в равных точках окрестности нуля $\varepsilon_r \sim \sqrt{0}$, повернутых одна относительно другой на угол $\pi/2$.

Из классического анализа известно, что для получения взаимно однозначного отображения необходимо из пространства координат исключить некоторую область: в простейшем случае это нуль, в сферических координатах это линия, в комплексной z - плоскости это окрестность нуля.

Согласно формуле (1.5.) сферические комплексные координаты выражаются в виде:

$$x = R \cos \phi \cos \psi;$$

$$y = iR \cos \psi \sin \phi;$$

$$\sigma = jR \cdot e^{i\phi} \sin \psi.$$

Якобиан отображения пространства v в пространство $v(R, \phi, \psi)$ будет равен

$$\frac{\partial(x, y, \sigma)}{\partial(R, \phi, \psi)} = j i R^2 e^{i\phi} \cos \psi.$$

Формула показывает, что якобиан равен нулю в следующих случаях:

$$R = 0; \psi = \pm \frac{\pi}{2}; R = \sqrt{0}.$$

Первый случай тривиален, второй рассмотрен выше и указывает на исключение из рассмотрения поверхности выколотой оси. Третий случай говорит о том, что если из пространства (v) выбросить выколотую ось радиуса $\varepsilon_r \sim \sqrt{0}$, то вследствие наличия в якобиане квадрата радиуса на пространства одновременно выбрасывается все множество делителей нуля v_d , которые характеризуются углами ψ , равными изолированному направлению $\arctg i$.

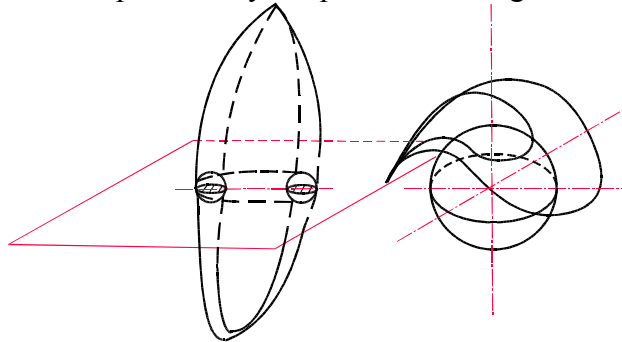


Рис. 15. Поры в пространстве.

Исключение из пространства выколотой оси равносильно исключению нуля в z -плоскости. Наличие в пространстве (v) выколотой оси ставит по-новому вопрос о связности пространства кривых и поверхностей в нем.

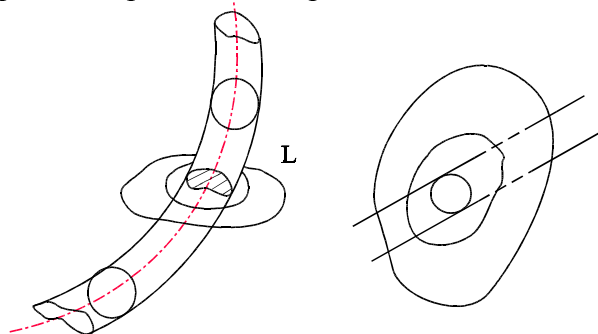


Рис. 16. Кривая a , не стягиваемая в точку

Для реализации интегральных теорем Коши необходимо рассмотреть вопрос об односвязности поверхности, которая натягивается на циклическую пространственную кривую. В комплексном пространстве решающее значение имеет характер кривой и ее расположение относительно выколотой оси. Реализация естественно зависит и от подынтегральной функции.

В классическом анализе связность пространства определяется теоремами Стокса и Остроградского. В z -плоскости реализована только теорема Стокса.

Для применения теоремы Стокса требуется, чтобы Контур и поверхность, которая натянута на этот контур, целиком лежали в области, где выполнены соответствующие условия. Теорема Остроградского остается в силе и для объема с порами (рис. 15). Под термином "пора" понимается ограниченная область, целиком лежащая в рассматриваемой области и исключенная из рассмотрения.

На рис. 16, 17 даны примеры из классического анализа односвязного и многосвязного.

В связном пространстве контур стягивается в точку непрерывным образом, причем и сама точка принадлежит рассматриваемой области. В односвязном, двухсвязном и многосвязных пространствах контур z не может быть стянут в точку непрерывным образом, как это показано на рис. 16, 17, не пересекая при этом границы области. Это примеры общего логического плана.

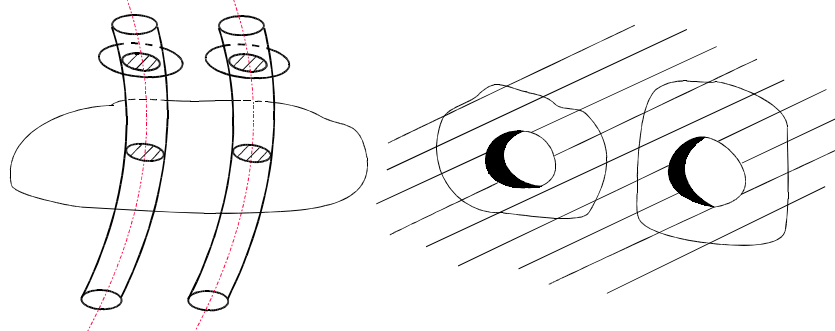


Рис. 17. Пример многосвязного пространства

В комплексном пространстве выколота ось, стянутая из точек мнимой поверхности конуса выступает как бесконечная трубка радиуса $\sqrt{0}$, заключающая в себе пространство другого измерения, а ее поверхность является границей раздела пространств разной по величине размерности (рис. 18). Трубка приходит из бесконечности и уходит в бесконечность.

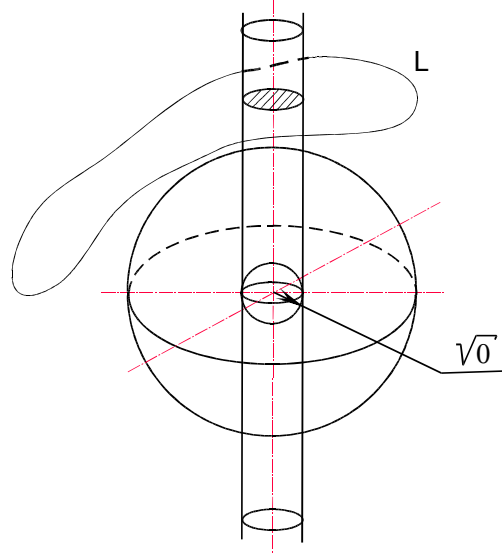


Рис. 18. Изолированная ось в комплексном пространстве, обуславливающая его связность.

Кривые C_0 , C_1 , C_2 (рис. 19), охватывающие выколотую ось, нельзя стянуть в точку радиуса ноль, так как ноль в пространстве имеет окрестность радиуса корня из нуля.

Кривую C_0 можно стянуть в точку, так как она охватывает выколотую ось (рис. 20).

Кривая C_1 , лежит в плоскости, параллельной плоскости (z) , и стягивается в окружность радиуса $\sqrt{0}$.

Кривая C_3 является простейшей пространственной кривой, на которую можно натянуть непрерывным образом без точек самопересечения поверхность так, чтобы внутри содержался объем.

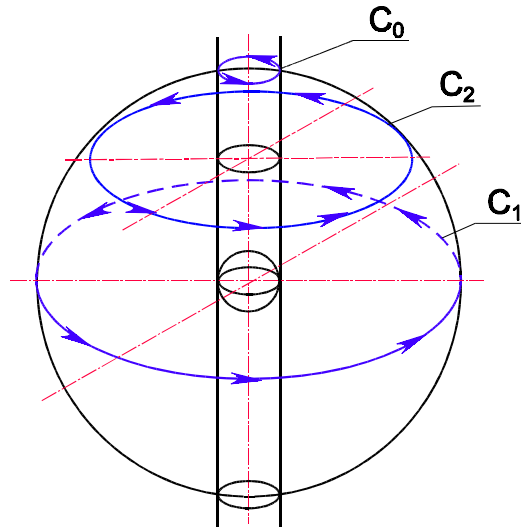


Рис. 19. Кривые C_0 , C_1 , C_2 , стянутые в точку из-за наличия в комплексном пространстве изолированного направления.

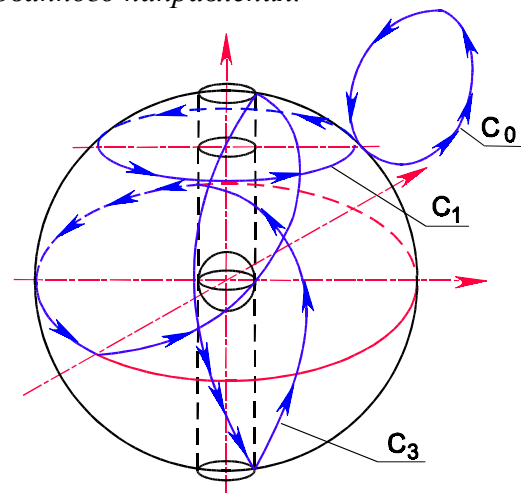


Рис. 20. Кривая C_0 , стянутая в точку, кривая C_1 , не стянутая в точку, и кривая C_3 - простейшая циклическая кривая в пространстве.

Простейшей комплексной кривой в z -плоскости является окружность. Натянуть на окружность поверхность так, чтобы в ней был заключен объем, не представляется возможным.

Контур C_3 является простейшим пространственным контуром, он состоит из кривой, идущей по внешней поверхности сферы, и кривой, идущей по внешней поверхности выколотой оси.

Пространство (v) может быть сжато в комплексную плоскость с выколотыми осями по z , $j\sigma$. Замкнутая кривая C_4 будет обходить выколотые оси по полуокружностям.

Кривая C состоит из двух окружностей, лежащих во взаимно перпендикулярных плоскостях (см. рис. 21).

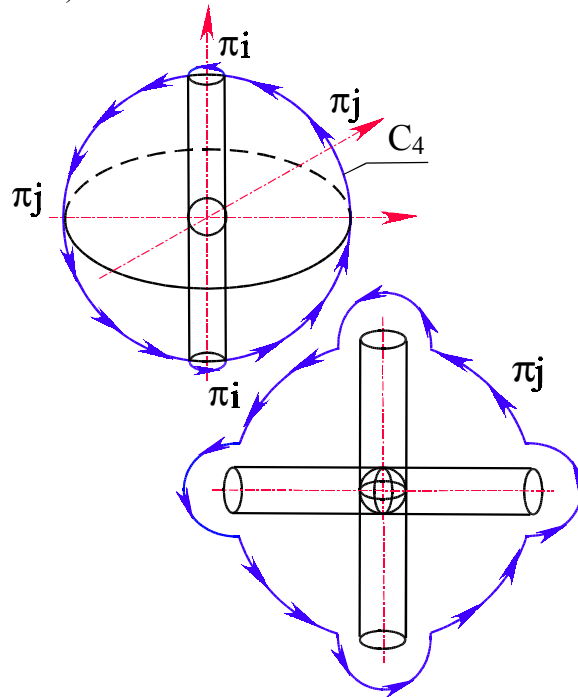


Рис. 21. Пространственная кривая C_4 , охватывающая две изолированные оси. Внутренний контур кривой C_3 можно деформировать так, что он пойдет по внутренней поверхности сферы, при этом образуется оболочка толщиной δ (рис. 17).

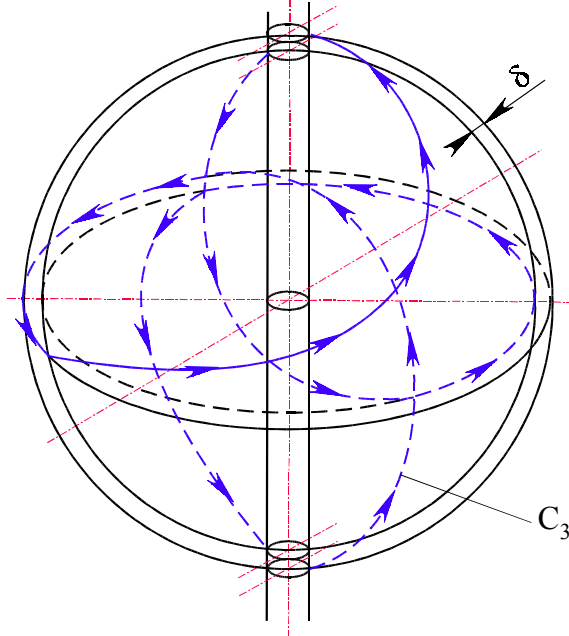


Рис. 22. Деформация простейшей пространственной кривой C_3 с выделением поверхностного слоя δ .

Оболочку можно увеличить до толщины S , как это показано на рис. 23. В этом случае пространство будет заключено между двумя сферическими поверхностями, соединенными между собой цилиндрической поверхностью

выколотовой оси. Иными словами, в любом случае простейшей поверхностью становится тороидальная поверхность.

Дадим определение кривой C_3 в пространстве (v) , которую назовем главной простой кривой в пространстве.

Определение. Простой кривой в пространстве трех (четырёх измерений) будем называть кривую C_3 (рис. 20) которая получается деформацией из плоской кривой длины $2\pi R_0$, путем натягивания ее на сферу с выколотовым ϵ -туннелем, так, что часть кривой, равная $2R_\epsilon$, проходит через ϵ -туннель, а оставшая часть, равная $2\pi R_0 - 2R_\epsilon$, проходит по поверхности сферы так, что сфера при фиксированном R_0 имеет наибольший радиус. При этом точка v , проходящая один раз замкнутую кривую C_3 , делает в ϵ -туннеле и по поверхности сферы в исчислении по углу ϕ два полных оборота 4π , а по углу ψ один оборот 2π .

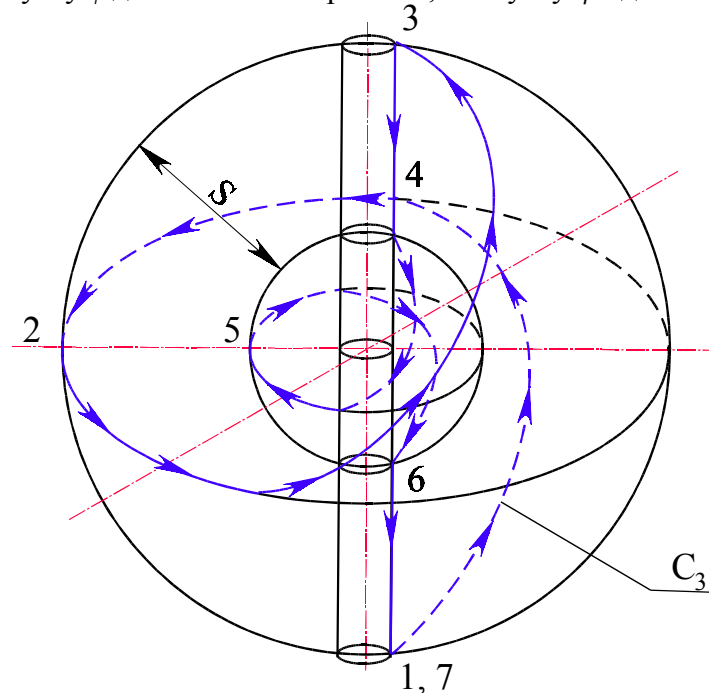


Рис. 23. Деформация простейшей пространственной кривой C_3 с выделением шарового слоя S .

Если двигаться по кривой C_0 (рис. 20), то из точки вернемся в ту же точку без изменения аргументов.

Кривые C_0 , C_1 , C_2 (рис. 19) лежат в плоскости, параллельной z -плоскости, поэтому для них $\psi = \text{const}$ и при обходе изменяется только аргумент ϕ , добавляя к своему значению за один оборот. 2π .

Движение по кривой C_3 (рис. 20) дает приращение аргументов $\Delta\psi = 2\pi$, $\Delta\phi = 4\pi$. В общем случае, кривая C_i может иметь различные исчисления по аргументам ϕ , ψ в зависимости от того, как она проходит выколотовую ось.

1.3.2. Интеграл и первообразная.

Определение интеграла вдоль кривой C в комплексном пространстве по виду ничем не отличается от определения интеграла в действительной и комплексной областях.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n f(\xi_k)(v_{k+1} - v_k) = \int_C f(v)dv,$$

где $v_0 = a, v_1 \dots v_{n+1} = b$ - точки, разбивающие C на n участков, a и b есть концы C , ξ_k - произвольная точка, лежащая на участке $[v_k, v_{k+1}]$ кривой C . Предел предполагает

$\max \|v_{k+1} - v_k\| \rightarrow 0$ При доказательстве существования интеграла в комплексной плоскости Z предел сводили к двум интегралам от действительных функций. В пространстве предел достаточно свести к интегралам от комплексных функций. В самом деле

$$f(v) = Q(z, \sigma) + jR(z, \sigma)$$

$$v_k = z_k + j\sigma_k, z_{k+1} - z_k = \Delta z_k, \sigma_{k+1} - \sigma_k = \Delta \sigma_k$$

$$\xi_k = \zeta_k + i\eta_k. \text{ Обозначим также } Q(\zeta_k, \eta_k) = Q_k, R(\zeta_k, \eta_k) = R_k.$$

Подставляя в интегральную сумму получим

$$\sum_{k=0}^n f(\xi_k)(v_{k+1} - v_k) = \sum_{k=0}^n [Q_k \Delta z_k - R_k \Delta \sigma_k] + j \sum_{k=0}^n [Q_k \Delta \sigma_k + R_k \Delta z_k]$$

Переходя к пределам получим

$$\int_C f(v)dv = \int_C Qdz - R d\sigma + j \int_C R d\sigma + Q d\sigma$$

Существование интеграла в комплексном пространстве сводится к существованию двух комплексных интегралов

$$\int_{\gamma} f(v)dv = \int_{\gamma} (Q(z, \sigma) + jR(z, \sigma))(dz + j d\sigma) = \int_{\gamma} Q(z, \sigma)dz - R(z, \sigma)d\sigma +$$

$$+ j \int_{\gamma} Q(z, \sigma)d\sigma + R(z, \sigma)dz$$

Функции $Q(z, \sigma), R(z, \sigma)$ определены на пространственной кривой γ и интеграл зависит как от этих функций так и от кривой. В свою очередь интегралы сводятся к четырем интегралам от действительных переменных. Введем обозначения

$$U(x, y, \zeta, \eta) = \operatorname{Re} Q(z, \sigma) = \operatorname{Re} Q((x + iy), (\zeta + i\eta))$$

$$V(x, y, \zeta, \eta) = \operatorname{Im} Q(z, \sigma) = \operatorname{Im} Q((x + iy), (\zeta + i\eta))$$

$$P(x, y, \zeta, \eta) = \operatorname{Re} R(z, \sigma) = \operatorname{Re} R((x + iy), (\zeta + i\eta))$$

$$\Phi(x, y, \zeta, \eta) = \operatorname{Im} R(z, \sigma) = \operatorname{Im} R((x + iy), (\zeta + i\eta))$$

а также имеем $dz = dx + idy$

$d\sigma = d\zeta + id\eta$. Подставляя в интеграл и отделяя все интегралы с мнимыми коэффициентами получим

$$\int_{\gamma} f(v)dv = \int_{\gamma} Udx - Vdy - Pd\zeta + \Phi d\eta +$$

$$+ i \int_{\gamma} Vdx + Udy - \Phi d\zeta - Pd\eta +$$

$$+ j \int_{\gamma} Pdx - \Phi dy + Ud\zeta - Vd\eta +$$

$$+ \oint_{\gamma} \Phi dx + Pdy + Vdz + Ud\eta.$$

Существование криволинейного интеграла свелось к существованию и определению криволинейных интегралов от функций четырех действительных переменных. Для исследования этих интегралов необходимо обратиться к теоремам Стокса, Грина, Остроградского.

Рассмотрим формулу Грина. Пусть функции от двух действительных переменных $U(x, y), V(x, y)$ и их частные производные $\frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial x}$ непрерывны в простой области G . Тогда справедливо равенство

$$\oint_{\gamma} Udx + Vdy = \iint_G \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) dx dy, \quad \text{где криволинейный интеграл}$$

берется по границе γ области G в положительном направлении, так что формула Грина связывает интеграл по границе области с интегралом по самой области. Важнейшим условием в определении интеграла является свойство области G . Введено определение. Область G на плоскости называется односвязной, если для любого замкнутого контура, лежащего в этой области, ограниченная им часть плоскости целиком принадлежит области G . Для таких областей независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования определяется следующими условиями :

1. Для любого замкнутого контура γ , расположенного в области G , справедливо равенство

$$\oint_{\gamma} Udx + Vdy = 0.$$

2. Для любых двух точек A, B в области G криволинейный интеграл $\int_{AB} Udx + Vdy$ не зависит от кривых γ , расположенных в этой области.

3. Выражение $Udx + Vdy$ является полным дифференциалом функции $F(x, y)$, существующей в области G , такой, что $dF = Udx + Vdy$. При этом для любой кривой γ из области G имеет место равенство

$$\int_{AB} Udx + Vdy = F(A) - F(B)$$

Все три условия эквивалентны равенству $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x}$, выполняемому в области G .

В пространстве трех действительных переменных имеет место формула Стокса, сформулированная следующим теоремой :

Пусть гладкая xyz проектируемая ориентируемая поверхность Φ ограничена кусочно-гладким контуром γ и расположена внутри области G , в которой функции $U(x, y, z), V(x, y, z), P(x, y, z)$

Имеют непрерывные частные производные первого порядка. Тогда справедлива формула

$$\oint_{\gamma} Udx + Vdy + Pdz = \\ = \iint_G \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) dx dz + \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) dx dy,$$

где контур γ обходится в положительном направлении. При $\int_{\gamma} Pdz = 0$

получается формула Грина. В пространстве x, y, z вводится понятие поверхностно односвязной области G , такой, что

для любого контура γ , лежащего в G найдется поверхность, ограниченная этим контуром. С точки зрения комплексного пространства кривая γ должна соответствовать кривой пространственной кривой C_3 . На все другие кривые в пространстве нельзя натянуть поверхность без точек самопересечения, так чтобы она содержала внутри себя объем.

Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования доставляется также тремя условиями:

1) если выполняется равенство $\oint_{\gamma} Udx + Vdy + Pdz = 0$;

2) если выполняется условие $\oint_{\gamma} Udx + Vdy + Pdz = \oint_{\gamma^1} Udx + Vdy + Pdz$;

3) если выражение $Udx + Vdy + Pdz$ является полным дифференциалом некоторой функции $F(x, y, z)$, определенной в области G

$dF = Udx + Vdy + Pdz$, так что

$$\int_{AB} Udx + Vdy + Pdz = F(A) - F(B)$$

Все три условия заменяются тремя равенствами

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z}, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y}$$

Поверхность Φ в формуле Грина расположена на одной проекционной площадке. Сочетание двух независимых переменных (X, Y) дают одну проекционную площадку.

Поверхность Φ в формуле Стокса имеет три проекционные площадки. Сочетание из трех по два рано трем.

Пространственный комплексный интеграл сначала свели к двум комплексным интегралам, каждый из которых определен на комплексной плоскости (z, σ) . Функции $Q(z, \sigma), R(z, \sigma)$

имеют частные производные $\frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial \sigma}, \frac{\partial R}{\partial z}, \frac{\partial R}{\partial \sigma}$.

В комплексном пространстве можно определить область G , ограниченную кривой C с соблюдением всех условий теоремы и формулы Грина. Применяя формулу Грина к криволинейному интегралу, выраженному в пространственных комплексах (z, σ) получим

Два интеграла

$$\oint_{\gamma} Qdz - R d\sigma = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial \sigma} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dz d\sigma$$

$$\oint_{\gamma} R dz + Q d\sigma = \iint_G \left(\frac{\partial R}{\partial \sigma} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dz d\sigma$$

Как следствие получаем условие независимости криволинейного интеграла в пространстве в комплексном виде

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0, \frac{\partial R}{\partial \sigma} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0$$

Эти условия были исследованы при исследовании комплексного аргумента. Раскрывая частные производные по законам комплексного анализа, получим систему необходимых условий в действительных функциях от четырех действительных переменных. Из первого условия

приравнявая действительные и мнимые части в равенстве, получим

$$\frac{\partial U}{\partial \zeta} = \frac{\partial V}{\partial \eta} = -\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial \zeta} = -\frac{\partial U}{\partial \eta} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Из второго соотношения получим следующую систему равенств

$$\frac{\partial P}{\partial \zeta} = \frac{\partial Q}{\partial \eta} = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial \zeta} = -\frac{\partial P}{\partial \eta} = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y}$$

Таким образом, из комплексных соотношений получены необходимые условия независимости криволинейного интеграла от пути в пространстве в действительных выражениях. Покажем, что эти соотношения имеют место в пространстве. Координатное пространство от четырех независимых переменных будет иметь шесть проекционных площадок

$dx dy, d\zeta dx, dx d\eta, dy d\zeta, d\eta dy, d\eta d\zeta$. К каждому из интегралов

применим формулу Грина и Стокса получим:

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma} U dx - V dy - P d\zeta + \Phi d\eta = \\ & = \iint_G \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) dx dy + \left(\frac{\partial U}{\partial \zeta} + \frac{\partial P}{\partial x} \right) dx d\zeta + \\ & + \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) dx d\eta + \left(-\frac{\partial V}{\partial \zeta} + \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy d\zeta + \\ & + \left(-\frac{\partial V}{\partial \eta} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) dy d\eta + \left(-\frac{\partial P}{\partial \eta} - \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) d\eta d\zeta \\ & \int_{\gamma} V dx + U dy - \Phi d\zeta - P d\eta = \\ & = \iint_G \left(\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial x} \right) dx dy + \left(\frac{\partial V}{\partial \zeta} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) dx d\zeta + \\ & + \left(\frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{\partial P}{\partial x} \right) dx d\eta + \left(\frac{\partial U}{\partial \zeta} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) dy d\zeta + \\ & + \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy d\eta + \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \frac{\partial P}{\partial \zeta} \right) d\eta d\zeta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{\gamma} Pdx - \Phi dy + Ud\zeta - Vd\eta = \\
 & = \oint_G \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial \zeta} \right) dyd\zeta + \left(\frac{\partial P}{\partial \zeta} - \frac{\partial U}{\partial x} \right) dxd\zeta + \\
 & + \left(\frac{\partial P}{\partial \eta} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) dxd\eta + \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) dyd\zeta + \\
 & + \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} - \frac{\partial V}{\partial y} \right) dyd\eta + \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{\partial V}{\partial \zeta} \right) d\eta d\zeta \\
 & \int_{\gamma} \Phi dx + Pdy + Vd\zeta + Ud\eta = \\
 & = \oint_G \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) dxdy + \left(\frac{\partial P}{\partial \zeta} - \frac{\partial U}{\partial x} \right) dxd\zeta + \\
 & + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} - \frac{\partial U}{\partial x} \right) dxd\eta + \left(\frac{\partial P}{\partial \eta} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) dyd\eta + \\
 & + \left(\frac{\partial P}{\partial \zeta} - \frac{\partial V}{\partial y} \right) dyd\zeta + \left(\frac{\partial V}{\partial \eta} - \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right) d\eta d\zeta
 \end{aligned}$$

Независимость каждого криволинейного интеграла от пути в комплексном пространстве зависит от равенства нулю 24-х соотношений между частными производными, стоящими в подынтегральных скобках по каждой проекционной площадке поверхности Φ в пространстве.

Все 24-ре соотношения соответствуют равенствам, выведенным из условия независимости пространственного криволинейного интеграла, выраженного через комплексные независимые

Z, σ . Подынтегральные соотношения получены циклической перестановкой частных производных по проекционным площадкам дедуктивным распространением формул Стокса и Грина в четырехмерное действительное пространство. Таким образом, фактически обоснована формула Грина и Стокса в четырехмерном действительном пространстве.

Условия независимости криволинейного интеграла в пространстве от пути C интегрирования аналитической функции $f(v)$ позволяют интеграл $\int_C f(v)dv$ записать через интеграл

$$\int_{v_0}^v f(v)dv, \text{ где } v_0, v - \text{ концы кривой } C. \text{ В пространстве справедлива}$$

теорема о первообразной функции для интеграла. Следуя законам действительного и комплексного анализа Z , разберем теорему о первообразной функции. Если функция

$$F(v) = \int_{v_0}^v f(v)dv, \text{ имеет производную равную } F'(v) = f(v) \text{ для всех}$$

точек области D пространства, то функция $F(v)$ будет первообразной функцией $f(v)$. Докажем, что интеграл

$\int_{v_0}^v f(v)dv$, рассматриваемый от своего верхнего предела, также является аналитической функцией в D пространства Y , причем

$$F'(v) = \frac{d}{dv} \int_{v_0}^v f(\xi) d\xi = f(v)$$

Определение производной в пространстве не изменено, поэтому для направлений с исключением изолированного, которое рассмотрим отдельно, будем иметь

$$\begin{aligned} F'(v) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(v+h) - F(v)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\int_{v_0}^{v+h} f(\xi) d\xi - \int_{v_0}^v f(\xi) d\xi \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_v^{v+h} f(\xi) d\xi \end{aligned}$$

В силу непрерывности $f(v)$ в точке v произведем замену $f(\xi) = f(v) + \eta(\xi)$, где $\eta(\xi) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow v$, тогда

$$F'(v) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_v^{v+h} f(v) d\xi + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_v^{v+h} \eta(\xi) d\xi$$

Первый предел равен

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_v^{v+h} f(v) d\xi = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(v) \int_v^{v+h} d\xi = f(v)$$

Если $h \rightarrow 0$ по изолированному направлению $h = h(1 \pm ji) \rightarrow 0$, то

$$\lim_{h(1 \pm ji) \rightarrow 0} \frac{1}{h(1 \pm ji)} \int_v^{v+h(1 \pm ji)} f(v) d\xi = \lim_{h(1 \pm ji)} \frac{1}{h(1 \pm ji)} f(v) \int_v^{v+h(1 \pm ji)} d\xi = f(v)$$

В первом случае $\int_v^{v+h} d\xi = h$, во втором случае $\int_v^{v+h(1 \pm ji)} d\xi = h(1 \pm ji)$

Второй предел запишем, используя свойство интеграла в виде

$$\begin{aligned} \left\| \int_v^{v+h} \eta(\xi) d\xi \right\| &\leq \max \|\eta(\xi)\| \cdot \|h\| \\ \left\| \int_v^{v+h(1 \pm ji)} \eta(\xi) d\xi \right\| &\leq \max \|\eta(\xi)\| \cdot \|h(1 \pm ji)\| \text{ для изолированного направления.} \end{aligned}$$

Таким образом $F'(v) = f(v)$, что и требовалось доказать. Все классические функции анализа, имеющие табличные производные, определены в пространстве и имеют первообразную, так что

$$\int_{v_0}^v f(\xi) d\xi = F(v) - F(v_0)$$

В пространстве Y справедливо следующее утверждение: Интеграл от аналитической функции

$f(v)$ в односвязной области G вдоль любого замкнутого контура C , лежащего в G , равен нулю. $\oint_C f(v)dv = 0$.

Основные свойства интегралов в действительной и комплексной области остаются в силе и в пространстве.

$\int_C [af(v) + bg(v)]dv = a \int_C f(v)dv + b \int_C g(v)dv$, где a, b –любые действительные и комплексные постоянные.

$\int_{C_1+C_2} f(v)dv = \int_{C_1} f(v)dv + \int_{C_2} f(v)dv$, где C_1, C_2 -определяют кривую $C_1 + C_2$

$\int_C f(v)dv = \int_{C^-} f(v)dv$, где C^- кривая, проходимая в противоположном направлении кривой C . В силе остается еще одно свойство интеграла : Пусть $M = \max \|f(v)\|$ на кривой C и L длина C , и $L = L(1 \pm ji)$ длина кривой по изолированному направлению, тогда

$$\left\| \int_C f(v)dv \right\| \leq \int_C \|f(v)\| \cdot dv \leq ML, \text{ или } ML(1 \pm ji).$$

Это свойство вытекает из определения интеграла

$$\left\| \sum_{k=0}^n f(\xi_k) \Delta v_k \right\| \leq \sum_{k=0}^n \|f(\xi_k)\| \cdot \|\Delta v_k\| \leq M \sum_{k=0}^n \|\Delta v_k\|, \text{ где } \sum_{k=0}^n \|\Delta v_k\| \text{ есть}$$

длина ломаной $\xi_0 \dots \xi_n$, вписанной в кривую C , так что в пределе при $\Delta v_k \rightarrow 0$ получаем L , а по изолированному направлению $L(1 \pm ji)$. Откуда и вытекает свойство.

Пример .

Вычислить криволинейный интеграл по кривой C от точки $v_0 = 0$ до точки $v_1 = \sqrt{3} + i + j + ji\sqrt{3}$ от функции $f(v) = v$

Ввиду того, что функция v аналитична в пространстве можно воспользоваться теоремой о первообразной и вычислить интеграл вне зависимости от кривой C :

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\sqrt{3}+i+j+ji\sqrt{3}} v dv = \frac{v^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{3}+i+j+ji\sqrt{3}} = \frac{[(\sqrt{3}+i)+j(1+i\sqrt{3})]^2}{2} = \\ &= \frac{3+2\sqrt{3}i-1-1-2\sqrt{3}i+3}{2} + 2j \frac{(\sqrt{3}+i)(1+\sqrt{3}i)}{2} = \\ &= 2 + j(\sqrt{3}+i+3i-\sqrt{3}) = 2 + 4ji \end{aligned}$$

Рассмотрим решение в пространственных комплексных координатах z, σ . В этом случае точка

v_1 может быть представлена двумя точками пространственной комплексной плоскости

$z = \sqrt{3} + i, \sigma = 1 + \sqrt{3}i$. Интеграл распадается на два криволинейных интеграла

$$\begin{aligned} J &= J_1 + jJ_2 = \int_0^{v_1} f(v)dv = \int_{\gamma} (z + j\sigma)(dz + jd\sigma) = \\ &= \int_{\gamma_1} z dz - \sigma d\sigma + j \int_{\gamma_2} \sigma dz + z d\sigma \end{aligned}$$

Рассмотрим для примера путь $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, где γ представляет путь γ_1 по оси z от нуля до точки $z = \sqrt{3} + i$, плюс γ_2 представляет путь по вертикальной прямой, параллельной оси σ , так что переменная σ меняется от 0 до $\sigma = 1 + i\sqrt{3}$. На линии 0--- z имеем $\sigma = 0, d\sigma = 0$

$$J_1 = \int_0^{\sqrt{3}+i} z dz = \frac{z^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{3}+i} = \frac{(\sqrt{3}+i)^2}{2} = \frac{3+2i\sqrt{3}-1}{2} = 1+i\sqrt{3}$$

Интеграл $J_2 = 0$ в этом случае.

На линии z --- σ имеем $z = \text{const}, dz = 0, z = \sqrt{3} + i$.

$$J_1 = \int_0^{1+i\sqrt{3}} -\sigma d\sigma = -\frac{\sigma^2}{2} \Big|_0^{1+i\sqrt{3}} = -\frac{(1+i\sqrt{3})^2}{2} = 1-i\sqrt{3}$$

$$J_2 = \int_0^{1+i\sqrt{3}} \sigma dz + z d\sigma = \int_0^{1+i\sqrt{3}} z d\sigma = z\sigma \Big|_0^{1+i\sqrt{3}} =$$

$$= (\sqrt{3} + i)(1 + i\sqrt{3}) = \sqrt{3} + i + 3i - \sqrt{3} = 4i$$

Следовательно по пути γ_2 интеграл $J = 1 - \sqrt{3}i + 4ji$

Окончательно получим

$$J = 1 + i\sqrt{3} + 1 - i\sqrt{3} + 4ji = 2 + 4ji$$

Таким образом, получен предыдущий результат. Криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования.

Вычислим тот же интеграл в цилиндрических пространственных координатах

$$v = \rho e^{i\varphi} + jre^{i\psi}$$

В этих координатах $z = \sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$, откуда имеем: $\rho = 2, \varphi = \frac{\pi}{6}$

$$\sigma = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}, \text{ следовательно } r = 2, \psi = \frac{\pi}{3}$$

Согласно вышеизложенной теории интеграл также распадется на два интеграла $J = \int_{\gamma} f(v)dv = J_1 + J_2$, где

$$J_1 = \int_{\gamma_1} \rho e^{2i\varphi} d\rho + i\rho^2 e^{2i\varphi} d\varphi - re^{2i\psi} dr - r^2 e^{2i\psi} d\psi$$

$$J_2 = \int_{\gamma_2} re^{i(\varphi+\psi)} d\rho + ir\rho e^{i(\varphi+\psi)} d\varphi + \rho e^{i(\varphi+\psi)} dr + i\rho re^{i(\varphi+\psi)} d\psi$$

Интегрирование произведем по сумме простейших кривых в пространстве, чтобы на каждой из них изменялся один параметр из четырех рис 24.

Интеграл по прямой 0—1 вычисляется при следующих параметрах

$\sqrt{0} \leq \rho \leq 2, \varphi = 0, \psi = 0, r = 0$, на линии 1—2 имеем

$$\rho = 2 = const, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}$$

$$J_1 = \int_0^2 \rho d\rho + \int_0^{\frac{\pi}{6}} i(\rho^2)_{\rho=2} e^{2i\varphi} d\varphi = 2 + 2e^{2i\varphi} \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = 2 + 2e^{i\frac{\pi}{3}} - 2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$J_2 = 0$$

Рассмотрим путь 1—3, на котором $\psi = 0, \rho = 2, \varphi = \frac{\pi}{6}, 0 \leq r \leq 2$

$$J = -\int_0^2 r e^{2i\psi} dr + j \int_0^2 \rho e^{i\varphi} dr e^{i\psi} = -2 + 4j e^{i\frac{\pi}{6}}$$

На линии 3—5 меняется угол ψ , остальные параметры остаются постоянными $\rho = 2, r = 2, \varphi = \frac{\pi}{6}$. Угол ψ изменяется в пределах $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{3}$. Тогда

$$J = -\int_0^{\frac{\pi}{3}} r e^{i\psi} i e^{i\psi} r d\psi + j \int_0^{\frac{\pi}{3}} \rho e^{i\varphi} i r e^{i\psi} d\psi = -2e^{\frac{2\pi i}{3}} + 2 + j2e^{\frac{i\pi}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} i r e^{i\psi} d\psi = -2e^{\frac{2\pi i}{3}} + 2 + 4j e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right)} - 4j e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Произведем суммирование полученных результатов

$$J = J_{0-2-3} + J_{1-3} + J_{3-5} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} - 2 + 4j e^{i\frac{\pi}{6}} - 2e^{\frac{2\pi i}{3}} + 2 + 4ji - 4j e^{i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} - 2e^{\frac{2\pi i}{3}} + 4ji = 2 + 4ji.$$

Результат соответствует ранее вычисленному. В цилиндрических координатах когда комплексы, составляющие элемент пространства имеют разные углы $\varphi \neq \psi$ поворот около изолированной оси одного комплекса z , относительно другого можно охарактеризовать появлением контура типа 1—2—3—4 (Рис. 24). Контур интегрирования 1—3—4 или контур 1—2—4 может быть заменен кривой 1—4, находящейся на цилиндрической поверхности, выделенной контуром 1—2—3—4. Отрезок контура 4—5 в этом случае характеризуется следующими параметрами $\rho = const, r = const, \varphi = const, \delta = \psi - \varphi$. Это находится в строгом соответствии с представлением комплекса в виде.

$v = e^{i\varphi} (\rho + jre^{i(\psi-\varphi)})$. Комплекс, стоящий в скобках $\rho + jre^{i\delta}$, состоит из отрезка ρ , идущего по действительной оси и криволинейного отрезка, находящегося на цилиндрической аппликате радиуса $\sqrt{0}$ и имеющего начало в

точке ρ , которая имеет угол равный нулю, и точки $re^{i\delta}$, которая находится на высоте r и закручена по этой цилиндрической аппликате на угол δ . Этот комплекс повернут как одно целое на угол φ .

Каждая точка z на плоскости Z в пространстве Y представима как окружность радиуса $\sqrt{0}$ на расстоянии ρ от начала координат. На этой ε окружности точка фиксируется дополнительно углом φ . В координатах $x, iy, j\sigma$ точка имеет свое отображение. Точка 2 (Рис. 24) имеет свой аналог точку 2'. Поэтому путь интегрирования в пространстве непрерывен 1—2'—3—4—5.

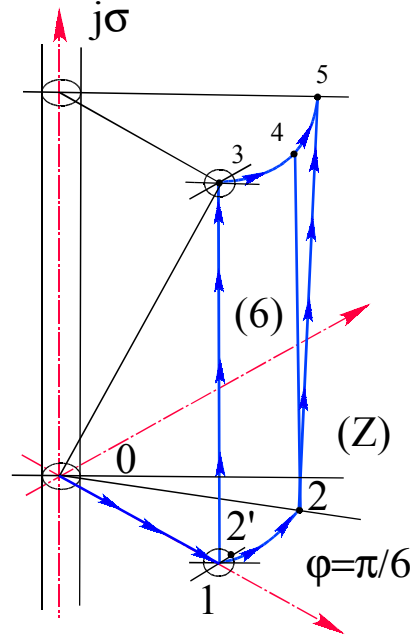


Рис. 24. Независимость криволинейного интеграла от пути в пространстве.

Вычисление криволинейного интеграла в пространстве следует проводить в два этапа :

- 1) в плоскости Z , приняв $\sigma = 0$;
- 2) в плоскости σ , приняв $z = const$.

1.3.3. Распространение интегральных теорем на многосвязные области.

Если функция $f(v)$ определена в области G пространства Y и ее конструкция имеет особенность в этой области, то теорема о равенстве нулю криволинейного интеграла по замкнутому контуру неверна. Так функция

$f(v) = \frac{1}{v}$ в комплексной плоскости аналитична всюду в кольце $0 < |z| < 2$. В

пространстве функция аналитична в сфере $\sqrt{0} < \|v\| < 2$

То есть в области сферы с удаленной из нее областью изолированной оси радиуса $\varepsilon = \sqrt{0}$ и изолированным направлением $\pm \arctan i$. В сферических координатах

$$\xi = \operatorname{Re} e^{i\varphi + j\psi}.$$

Составим логарифмическую функцию $Ln v = \int_1^v \frac{d\xi}{\xi}$, где интеграл будем брать по кривой C_3 .

Имеем $d\xi = e^{i\varphi+j\psi} dR + ie^{i\varphi+j\psi} R d\varphi + je^{i\varphi+j\psi} R d\psi$, где $R = \|\xi\|$, тогда интеграл будет равен $Ln v = \int_{\gamma} \frac{e^{i\varphi+j\psi} dR + ie^{i\varphi+j\psi} R d\varphi + je^{i\varphi+j\psi} R d\psi}{Re^{i\varphi+j\psi}} =$
 $= \int_{C_3} \frac{dR}{R} + i \int_{C_3} d\varphi + j \int_{C_3} d\psi = \ln\|v\| + i\Delta_{C_3} \arg_1 v + j\Delta_{C_3} \arg_2 v$, где

$\Delta_{C_3} \arg_1 v$ -- приращение аргумента φ вдоль кривой C_3 ,.

$\Delta_{C_3} \arg_2 v$ --приращение аргумента ψ вдоль кривой C_3 .

Многозначный характер логарифмической функции в пространстве определяется двумя аргументами. Итак

$Ln v = \ln\|v\| + i\Delta_{C_3} \varphi + j\Delta_{C_3} \psi$. Для замкнутой кривой C_3

$Ln v = \ln v + 4\pi i + 2\pi j$.

Обобщением предыдущего интеграла служит $J_n = \oint_{C_\rho} (v-a)^n dv$, где

C_ρ -пространственная кривая типа C_3 около точки a , так что $(v-a) = \rho$, $\rho \succ \sqrt{0}$. Уравнение кривой C_ρ запишется в виде $v-a = \rho e^{i\varphi+j\psi}$, так что изолированная ось перенесена в точку a . Тогда

$dv = i\rho e^{i\varphi+j\psi} d\varphi + j\rho e^{i\varphi+j\psi} d\psi$. При $n=-1$ интеграл равен

$$J = \oint_{C_\rho} \frac{1}{\rho} e^{-i\varphi-j\psi} \rho e^{i\varphi+j\psi} (id\varphi + jd\psi) = \int_0^{4\pi} id\varphi + \int_0^{2\pi} jd\psi = 4\pi i + 2\pi j$$

При

$n \neq -1$ получаем $J = \int_{C_\rho} \rho^{n+1} i e^{i(n+1)\varphi+j(n+1)\psi} d\varphi + \rho^{n+1} j e^{i(n+1)\varphi+j(n+1)\psi} d\psi$. В

интеграле можно произвести отделение комплексных частей, однако не нарушая общего подхода в изложении, будем рассматривать мнимые числа i, j как обыкновенные постоянные. В этом случае к интегралу можно применить формулу Грина.

$$J = \oint_S \left(\rho^{n+1} (n+1) i j e^{i(n+1)\varphi+j(n+1)\psi} - \rho^{n+1} (n+1) i j e^{i(n+1)\varphi+j(n+1)\psi} \right) d\varphi d\psi = 0$$

1.3.4. Интегральная формула Коши.

Выведем аналог интегральной теоремы Коши в пространстве Y .

Теорема. Пусть функция $f(v)$ дифференцируема в односвязной области G пространства Y и пусть кривая C_3 замкнута, лежит в G и ориентирована против часовой стрелки. Тогда для любой точки v , лежащей внутри поверхности S , натянутой без точек самопересечения на кривую C_3 , справедлива формула

$$f(v) = \frac{1}{4\pi i + 2\pi j} \oint_{\gamma \equiv C_3} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - v}$$

Доказательство. Функция $\frac{f(\xi)}{\xi - v}$ дифференцируема по ξ в области G с

выколотой точкой v .

Область G в пространстве Y это область ограниченная поверхностью S , натянутой на кривую

γ без точек самопересечения. В любом пространстве кривая должна проходить через ε туннель, так как в противном случае она при стягивании в δ сферу вырождается в точку не содержащую область G пространства. Через точку v проведем ε туннель и окружим ее кривой γ_ρ типа кривой C_3 , так чтобы она целиком лежала в области G вместе с поверхностью S_ρ , натянутой на эту кривую. В этом случае изолированная ось будет проходить через точку v и δ сферу, радиус которой $\geq \sqrt{0}$. То есть зададим $\|\xi - v\| = \rho \geq \sqrt{0}$ и границу γ_ρ . Тогда согласно интегральным теоремам будем иметь

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{4\pi i + 2\pi j} \oint_{C_3} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - v} = \frac{1}{4\pi i + 2\pi j} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - v} = \\ &= \frac{1}{4\pi i + 2\pi j} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi) - f(v) + f(v)}{\xi - v} d\xi = \\ &= J_1 + \frac{f(v)}{4\pi i + 2\pi j} \oint_{\gamma_\rho} \frac{d\xi}{\xi - v} = J_1 + f(v). \text{ Где остается доказать, что} \\ J_1 &= \frac{1}{4\pi i + 2\pi j} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi) - f(v)}{\xi - v} d\xi = 0. \end{aligned} \quad \text{Для доказательства}$$

воспользуемся оценкой модуля этого интеграла.

Функция $f(\xi)$ непрерывна в точке v , поэтому найдется соотношение

$\|f(\xi) - f(v)\| < \varepsilon$, при $\|\xi - v\| < \delta$, где $\delta = \delta(\varepsilon) > \sqrt{0}$, а $\varepsilon > \sqrt{0}$, в том числе и по изолированному направлению $\|f(\xi) - f(v)\| < \varepsilon(1 \pm ji)$, при $\|\xi - v\| < \delta(1 \pm ji)$, где $\delta = \delta(\xi) > \sqrt{0}$, а

$\varepsilon > \sqrt{0}$. Следовательно

$$\|J_1\| \leq \frac{1}{2\sqrt{3}\pi} \oint_{\gamma_\rho} \frac{\|f(\xi) - f(v)\|}{\|\xi - v\|} \|d\xi\| < \frac{1}{2\sqrt{3}\pi} \frac{\varepsilon}{\rho} \oint_{\gamma_\rho} \|d\xi\|.$$

Интеграл $\oint_{\gamma_\rho} \|d\xi\| = 2\sqrt{3}\pi\rho$, а для изолированного направления

$$\oint_{\gamma_\rho} \|d\xi\| = 2\sqrt{3}\pi\rho(1 \pm ji), \text{ но}$$

В этом случае $\|\xi - v\| < \rho(1 \pm ji)$. Вследствие этого во всех возможных вариантах интеграл имеет одну оценку $\|J_1\| < \varepsilon$. Поэтому при стремлении $\varepsilon \rightarrow 0$ и в том случае когда $\varepsilon \rightarrow 0$, как коэффициент при делителях нуля, интеграл равен нулю. Формула доказана.

Если область G заключена между двумя поверхностями S, S_1 , натянутыми на эквидистантные

Пространственные кривые γ, γ_1 , то для точек этой области справедлива формула

$$f(v) = \frac{1}{4\pi i + 2\pi j} \oint_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - v} d\xi - \frac{1}{4\pi i + 2\pi j} \oint_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - v} d\xi$$

Интегрирование по кривым γ, γ_1 идет в противоположных направлениях.

Если точка v лежит вне замкнутой поверхности S , то подынтегральная функция аналитична всюду и интеграл равен нулю. Итак

$$\frac{1}{4\pi i + 2\pi j} \oint_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - v} d\xi = \begin{cases} f(v), v \in G \\ 0, v \notin G \end{cases}.$$

1.3.5. Интегральные теоремы Коши

Теорема 1 Если функция $f(v)$ имеет производную в односвязной области G комплексного пространства (v) , то для всех кривых, лежащих в этой области и имеющих общие концы, интеграл $\int_C f(v) dv$ имеет одно и то же значение.

Доказательство. Определение интеграла переносятся без изменений из z -плоскости.

Рассмотрим интегральную теорему 1 в пространстве по кривой C_3 и ее модификациям, как главной пространственной кривой, которая лежит в односвязной области G пространства (v) , так как поверхность сферы и поверхность выколотой оси принадлежат одной области G с одним пространственным измерением.

Рассмотрим комплексное пространство в цилиндрических координатах

$$v = \rho e^{i\phi} + jre^{i\psi}.$$

Дифференциал элемента v равен

$$dv = e^{i\phi} d\rho + je^{i\psi} dr + ie^{i\phi} \rho d\phi + jire^{i\psi} d\psi.$$

Функция $f(v)$ распадается на сумму двух комплексных частей

$$f(v) = W(\rho e^{i\phi}, re^{i\psi}) + jR(\rho e^{i\phi}, re^{i\psi})$$

Составим интеграл $l = \int_C f(v) dv$.

Разобьем его на два комплексных интеграла

$$l = l_1 + jl_2$$

где

$$l_1 = \oint_C W e^{i\phi} d\rho - iW \rho e^{i\phi} d\phi - R \cdot e^{i\psi} dr - iR r e^{i\psi} d\psi; \quad (1.44.)$$

$$l_2 = \oint_C We^{i\psi} dr + ie^{i\psi} Wrd\psi - R \cdot e^{i\phi} d\rho - iR\rho e^{i\phi} d\phi. \quad (1.45.)$$

В интегралах l_1 и l_2 сделаем переход по формуле Стокса к поверхностным интегралам. Условий, которые ограничивали бы применение формулы Стокса к составленному интегралу, в пространстве нет. Четырехмерное пространство имеет шесть проекционных площадок, которые до настоящего времени не удалось установить. В комплексном пространстве эти площадки удалось выявить.

Итак, имеем:

$$\begin{aligned} l_1 = & \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} We^{i\phi} - \frac{\partial}{\partial \rho} iW\rho e^{i\phi} \right) d\rho d\phi + \\ & + \left(\frac{\partial}{\partial r} We^{i\phi} - \frac{\partial}{\partial \rho} R \cdot e^{i\psi} \right) d\rho dr + \\ & + \left(\frac{\partial}{\partial \psi} We^{i\phi} - \frac{\partial}{\partial \rho} iR \cdot e^{i\psi} r \right) d\psi d\rho + \\ & + \left(\frac{\partial}{\partial r} iW\rho e^{i\phi} - \frac{\partial}{\partial \phi} R \cdot e^{i\psi} \right) dr d\phi + \\ & + \left(\frac{\partial}{\partial \psi} iW\rho e^{i\phi} - \frac{\partial}{\partial \phi} R \cdot e^{i\psi} r \right) d\psi d\phi + \\ & + \left(-\frac{\partial}{\partial \psi} R \cdot e^{i\psi} + \frac{\partial}{\partial r} iR \cdot e^{i\psi} r \right) dr d\psi; \end{aligned} \quad (1.46.)$$

$$\begin{aligned} l_2 = & \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial}{\partial \psi} We^{i\psi} - \frac{\partial}{\partial r} Wr \right) dr d\psi + \\ & + \left(\frac{\partial}{\partial \rho} We^{i\phi} - \frac{\partial}{\partial r} R \cdot e^{i\phi} \right) d\rho dr + \\ & + \left(\frac{\partial}{\partial \phi} We^{i\psi} - \frac{\partial}{\partial r} i\rho e^{i\phi} R \right) d\phi dr + \\ & + \left(\frac{\partial}{\partial \rho} ie^{i\psi} rW - \frac{\partial}{\partial \psi} e^{i\phi} R \right) d\rho d\psi + \\ & + \left(\frac{\partial}{\partial \phi} Wie^{i\psi} r - \frac{\partial}{\partial \psi} i\rho e^{i\phi} R \right) d\psi d\phi + \\ & + \left(\frac{\partial}{\partial \phi} R \cdot e^{i\phi} r - \frac{\partial}{\partial \rho} ie^{i\phi} \rho R \right) d\phi d\rho. \end{aligned} \quad (1.47.)$$

В подынтегральных выражениях (1.44.), (1.45.) содержатся необходимые условия дифференцирования функции в формах (1.28.), (1.29.). Таким образом,

если входящая под знак интеграла функция имеет производную в каждой точке поверхности σ четырехмерного пространства (v), то оба интеграла равны нулю. Рассмотрим вариант цилиндрических координат в трехмерном пространстве.

Если

$$v = \rho e^{i\phi} + jre^{i\phi},$$

то

$$f(v) = W(\rho e^{i\phi}, re^{i\phi}) + jR(\rho e^{i\phi}, re^{i\phi}).$$

Составим интеграл $l = \oint_{C_i} f(v) dv$ и рассмотрим его реализацию на различных

кривых C_i в пространстве.

А. На кривых C_0, C_1, C_2 (рис. 19) контур лежит в плоскости, параллельной z -плоскости, поэтому у него

$$r = \text{const}; \phi = \text{var}; \rho = \text{var}.$$

Определим дифференциал

$$dv = i\rho e^{i\phi} d\phi + e^{i\phi} d\rho + jire^{i\phi} d\phi.$$

Составим интеграл •

$$l = \oint_{C_0} (W + jR)(i\rho e^{i\phi} d\phi + e^{i\phi} d\rho + jire^{i\phi} d\phi) = l_1 + jl_2 =$$

$$= \oint_{C_0} W i \rho e^{i\phi} d\phi + W e^{i\phi} d\rho - R i r e^{i\phi} d\phi +$$

$$+ j \oint_{C_0} R i \rho e^{i\phi} d\phi + R \cdot e^{i\phi} d\rho + i W r e^{i\phi} d\phi.$$

Последовательно рассматриваем оба интеграла l_1, l_2 :

$$l_1 = \oint_{C_0} W i \rho e^{i\phi} d\phi + W e^{i\phi} d\rho - R i r e^{i\phi} d\phi =$$

$$= \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial W e^{i\phi}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial \rho} (W \rho e^{i\phi} i - R i r e^{i\phi}) \right) d\phi d\rho =$$

$$= \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial W}{\partial \phi} e^{i\phi} + i e^{i\phi} W - \frac{\partial W}{\partial \rho} i e^{i\phi} \rho - W e^{i\phi} i + \frac{\partial R}{\partial \rho} i r e^{i\phi} \right) d\rho d\phi =$$

$$= \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial W}{\partial \rho} e^{i\phi} - \frac{\partial W}{\partial \rho} \rho i e^{i\phi} + \frac{\partial R}{\partial \rho} i r e^{i\phi} \right) d\phi d\rho;$$

$$l_2 = \oint_{C_0} (R i \rho e^{i\phi} - i W r e^{i\phi}) d\phi + R \cdot e^{i\phi} d\rho =$$

$$= \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial \phi} e^{i\phi} + i e^{i\phi} R - \frac{\partial R}{\partial \rho} i \rho e^{i\phi} - R \cdot e^{i\phi} i - i \frac{\partial W}{\partial \rho} r e^{i\phi} \right) d\rho d\phi =$$

$$= \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial \phi} e^{i\phi} + \frac{\partial R}{\partial \rho} i \rho e^{i\phi} - i \frac{\partial W}{\partial \rho} r e^{i\phi} \right) d\rho d\phi.$$

Криволинейный интеграл сведен к поверхностному по области σ .

Если подынтегральные функции

$$P_1 = \frac{\partial W}{\partial \phi} - \rho i \frac{\partial W}{\partial \rho} + \frac{\partial R}{\partial \rho} ir; \quad (1.48.)$$

$$P_2 = \frac{\partial R}{\partial \phi} - \rho i \frac{\partial R}{\partial \rho} + ir \frac{\partial W}{\partial \rho}; \quad (1.49.)$$

оказываются равными нулю, то контур C_0 можно последовательно стянуть в контур C , охватывающий цилиндрическую ось.

Для аналитических функций в пространстве операторы (1.46.), (1.47.) равны нулю, так как они легко получаются из условий (1.27.), необходимых для дифференцирования функций.

В. Рассмотрим интеграл по контуру C_5 , лежащему на цилиндрической поверхности $\rho = \text{const}$ (рис. 20).

Имеем дифференциал $dv = \rho i e^{i\phi} d\phi + j i r e^{i\phi} d\phi + j d r e^{i\phi}$. Составим интеграл и по формуле Грина перейдем к поверхностному интегралу.

Имеем

$$\begin{aligned} l &= \oint_{C_5} f(v) dv = \oint_{C_5} (W + jR) (\rho i e^{i\phi} d\phi + j i r e^{i\phi} d\phi + j d r e^{i\phi}) = l_1 + j l_2 = \\ &= \oint_{C_5} W \rho i e^{i\phi} d\phi + j r e^{i\phi} R d\phi - e^{i\phi} R dr + \\ &+ j \oint_{C_5} \rho i e^{i\phi} R d\phi + i r W e^{i\phi} d\phi + W e^{i\phi} R dr. \end{aligned}$$

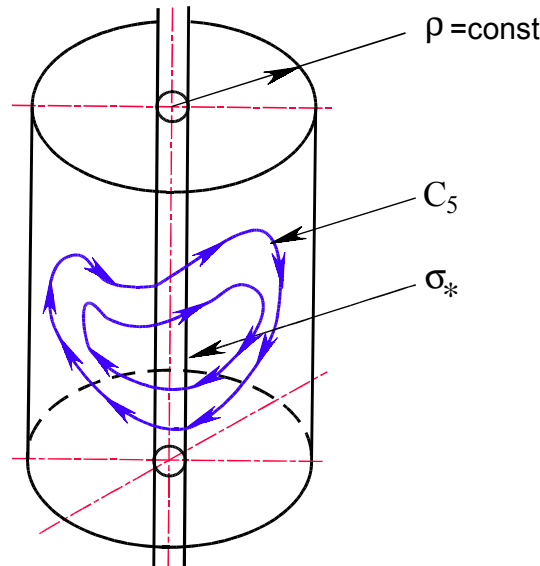


Рис. 25. Кривая C_5 и поверхность σ , лежащие на цилиндрической поверхности.

Рассмотрим последовательно каждый из полученных интегралов:

$$l_1 = \oint_{C_5} (\rho i e^{i\phi} W - i r e^{i\phi} R) d\phi - e^{i\phi} R dr =$$

$$\begin{aligned}
 &= \iint_{\sigma} \left(-e^{i\phi} \frac{\partial R}{\partial \phi} - ie^{i\phi} R - \rho ie^{i\phi} \frac{\partial W}{\partial r} + ire^{i\phi} \frac{\partial R}{\partial r} + ie^{i\phi} R \right) d\phi dr = \\
 &= \iint_{\sigma} \left(-e^{i\phi} \frac{\partial R}{\partial \phi} - i\rho e^{i\phi} \frac{\partial W}{\partial r} + ire^{i\phi} \frac{\partial R}{\partial r} \right) d\phi dr = \iint_{\sigma} P_3 d\phi dr; \\
 l_2 &= \oint_{C_5} (i\rho e^{i\phi} R + ire^{i\phi} W) d\phi + e^{i\phi} W dr = \\
 &= \iint_{\sigma} \left(e^{i\phi} \frac{\partial W}{\partial \phi} + ie^{i\phi} W - i\rho e^{i\phi} \frac{\partial R}{\partial r} - ire^{i\phi} \frac{\partial W}{\partial r} - ie^{i\phi} W \right) dr d\phi = \\
 &= \iint_{\sigma} \left(e^{i\phi} \frac{\partial W}{\partial \phi} - i\rho e^{i\phi} \frac{\partial R}{\partial r} - ire^{i\phi} \frac{\partial W}{\partial r} \right) d\phi dr = \iint_{\sigma} P_4 d\phi dr.
 \end{aligned}$$

где за P_3 и P_4 обозначены:

$$P_3 = \left(-\frac{\partial R}{\partial \phi} - i\rho \frac{\partial W}{\partial r} + ir \frac{\partial R}{\partial r} \right) e^{i\phi}; \quad (1.50.)$$

$$P_4 = e^{i\phi} \frac{\partial W}{\partial \phi} - i\rho e^{i\phi} \frac{\partial R}{\partial r} - ire^{i\phi} \frac{\partial W}{\partial r}. \quad (1.51.)$$

Эти операторы получаются из необходимых условий дифференцирования функций, данных в форме (1.27.). Поэтому интеграл равен нулю.

С. Третий случай: контур C находится на поверхности $\phi = const$. В этом случае дифференциал

$$dv = d\rho e^{i\phi} + jdre^{i\phi};$$

интеграл

$$\begin{aligned}
 l &= \oint_C (W + jR) (d\rho e^{i\phi} + jdre^{i\phi}) = l_1 + jl_2 = \\
 &= \iint_{\sigma} \left(-e^{i\phi} \frac{\partial R}{\partial \rho} - e^{i\phi} \frac{\partial W}{\partial r} \right) d\rho dr + j \iint_{\sigma} \left(e^{i\phi} \frac{\partial R}{\partial r} - e^{i\phi} \frac{\partial W}{\partial \rho} \right) dr d\rho.
 \end{aligned}$$

Подынтегральные выражения и в этом случае соответствуют необходимым условиям дифференцирования функций в форме (1.28.), Интеграл не зависит от формы пространственной кривой.

Д. Четвертый случай обобщает все предыдущие. Возьмем интеграл по простейшей пространственной кривой C_3 .

Дифференциал

$$dv = d\rho e^{i\phi} + ie^{i\phi} \rho d\phi + je^{i\phi} dr + ije^{i\phi} r d\phi.$$

составим интеграл

$$\begin{aligned}
 l &= \oint_{C_3} (W + jR) (d\rho e^{i\phi} + i\rho e^{i\phi} d\phi + je^{i\phi} dr + jie^{i\phi} r d\phi) = l_1 + jl_2 = \\
 &= \oint_C (We^{i\phi} d\rho + i\rho e^{i\phi} W d\phi - e^{i\phi} R dr - ie^{i\phi} r R d\phi) +
 \end{aligned}$$

$$+ j \oint_C e^{i\phi} R d\rho + i\rho e^{i\phi} R d\phi + e^{i\phi} W dr + ie^{i\phi} r W d\phi.$$

Рассмотрим поочередно полученные интегралы l_1 и l_2 .

$$\begin{aligned} l_1 &= \oint_{C_3} e^{i\phi} W d\rho - e^{i\phi} R dr (i\rho e^{i\phi} W - i\rho e^{i\phi} R) d\phi = \\ &= \iint_{\sigma} \left(-e^{i\phi} \frac{\partial R}{\partial \phi} - e^{i\phi} \frac{\partial W}{\partial r} \right) d\rho dr + \\ &+ \left(i\rho e^{i\phi} \frac{\partial W}{\partial r} - i\rho e^{i\phi} \frac{\partial R}{\partial r} - ie^{i\phi} R + ie^{i\phi} R + e^{i\phi} \frac{\partial R}{\partial \phi} \right) d\phi dr + \\ &+ \left(ie^{i\phi} W + e^{i\phi} \frac{\partial W}{\partial \phi} - ie^{i\phi} W - i\rho e^{i\phi} \frac{\partial W}{\partial \rho} + i\rho e^{i\phi} \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) d\phi d\rho; \\ l_2 &= \oint_{C_3} e^{i\phi} R d\rho + i\rho e^{i\phi} R d\phi + e^{i\phi} W dr + ie^{i\phi} r W d\phi = \\ &= \iint_{\sigma} \left(e^{i\phi} \frac{\partial W}{\partial \rho} - e^{i\phi} \frac{\partial R}{\partial r} \right) d\rho dr + \\ &+ \left(i\rho e^{i\phi} \frac{\partial R}{\partial r} + ie^{i\phi} W + i\rho e^{i\phi} \frac{\partial W}{\partial r} - ie^{i\phi} W - e^{i\phi} \frac{\partial W}{\partial \phi} \right) dr d\phi + \\ &+ \left(e^{i\phi} \frac{\partial R}{\partial \phi} + ie^{i\phi} R - ie^{i\phi} R - i\rho e^{i\phi} \frac{\partial R}{\partial \rho} - i\rho e^{i\phi} \frac{\partial W}{\partial \rho} \right) d\phi d\rho. \end{aligned}$$

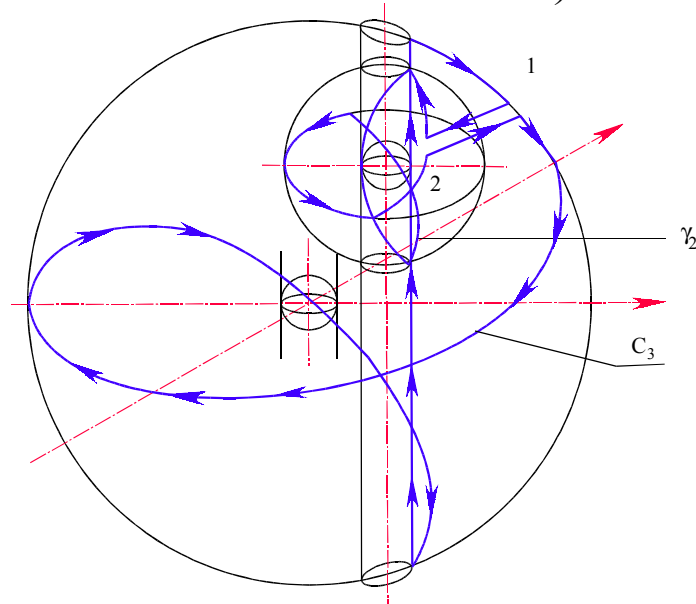


Рис. 26. Перенос изолированного направления в особую точку

Первый интеграл содержит в подынтегральных выражениях операторы P_2 , P_1 , которые вытекают из необходимых условий дифференцирования функций в форме (1.28) и само условие (1.28.). Второй содержит операторы P_4 , P_3 , и условие (1.28.) также вытекающие из условий (1.23.). В связи с этим и для

общего случая справедливо утверждение: кривую C_3 можно стянуть в геометрически подобную кривую γ_r около изолированной точки (рис. 26).

Общий случай показывает, что поверхностные интегралы l_1, l_2 по формуле Остроградского при общих условиях ее применения могут быть переведены в объемные интегралы.

В этом случае поверхность должна без точек самопересечения натянута на кривую C_3 . Эта поверхность должна содержать объем и образовывать тело. В конкретном случае это тор, или сфера с выколотым ε -туннелем.

Имеем

$$\begin{aligned}
 l_1 &= \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial \phi} \left(-e^{i\phi} \frac{\partial R}{\partial \rho} - e^{i\phi} \frac{\partial W}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(i\rho e^{i\phi} \frac{\partial W}{\partial r} - i r e^{i\phi} \frac{\partial R}{\partial r} + e^{i\phi} \frac{\partial R}{\partial \phi} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial r} \left(e^{i\phi} \frac{\partial W}{\partial \phi} - i\rho e^{i\phi} \frac{\partial W}{\partial \rho} + i r e^{i\phi} \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) \right] = \\
 &= \iiint_V \left[-e^{i\phi} \frac{\partial^2 R}{\partial \phi \partial \rho} - i e^{i\phi} \frac{\partial R}{\partial \rho} - i e^{i\phi} \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial \phi} - i e^{i\phi} \frac{\partial W}{\partial r} + \right. \\
 &\quad + i e^{i\phi} \frac{\partial W}{\partial r} + i\rho e^{i\phi} \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial \rho} - i r e^{i\phi} \frac{\partial^2 R}{\partial \rho \partial r} + e^{i\phi} \frac{\partial^2 R}{\partial \phi \partial \rho} + \\
 &\quad \left. + e^{i\phi} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi \partial r} - i\rho e^{i\phi} \frac{\partial^2 W}{\partial \rho \partial r} + i e^{i\phi} \frac{\partial R}{\partial \rho} + i r e^{i\phi} \frac{\partial^2 R}{\partial \rho \partial r} \right] d\rho d\phi dr = \\
 &= \iiint_V 0 d\rho d\phi dr = 0; \\
 l_2 &= \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial \phi} \left(e^{i\phi} \frac{\partial W}{\partial \rho} - e^{i\phi} \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(i\rho e^{i\phi} \frac{\partial R}{\partial r} + i r e^{i\phi} \frac{\partial W}{\partial r} - e^{i\phi} \frac{\partial W}{\partial \phi} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial r} \left(e^{i\phi} \frac{\partial R}{\partial \phi} - i\rho e^{i\phi} \frac{\partial R}{\partial \rho} - i r e^{i\phi} \frac{\partial W}{\partial \rho} \right) \right] d\rho d\phi dr = \\
 &= \iiint_V \left[i e^{i\phi} \frac{\partial W}{\partial \rho} + e^{i\phi} \frac{\partial^2 W}{\partial \rho \partial \phi} - i e^{i\phi} \frac{\partial R}{\partial r} - e^{i\phi} \frac{\partial^2 R}{\partial r \partial \phi} + \right. \\
 &\quad + i e^{i\phi} \frac{\partial R}{\partial r} + i\rho e^{i\phi} \frac{\partial^2 R}{\partial r \partial \rho} + i r e^{i\phi} \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial \rho} - e^{i\phi} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi \partial \rho} + \\
 &\quad \left. + e^{i\phi} \frac{\partial^2 R}{\partial \phi \partial r} - i\rho \frac{\partial^2 R}{\partial r \partial \rho} - i e^{i\phi} \frac{\partial W}{\partial \rho} - i r e^{i\phi} \frac{\partial^2 W}{\partial \rho \partial r} \right] d\rho d\phi dr = \\
 &= \iiint_V 0 \cdot dv = 0;
 \end{aligned}$$

На языке векторных полей последние выкладки утверждают, что пространственное комплексное поле является безвихревым и соленоидальным.

Если в пространстве (v) задана вектор-функция $\bar{a}$, то имеем следующую последовательность реализации векторных теорем:

$$\oint_{C_3} \bar{a} dr = \iint_{\sigma^*} \text{rot} \bar{a} d\sigma = \iiint_V \text{div} \text{rot} \bar{a} dv = 0$$

или как в классическом анализе

$$\text{div} \text{rot} \bar{a} = 0.$$

и комплексное пространство потенциально.

В результате исследований криволинейного интеграла получены:

Теорема 2. Пусть C_3 - замкнутый (в геометрическом смысле) контур в пространстве (v) и такой, что существует гладкая поверхность, натянутая на него, и функция, стоящая под знаком интеграла, в каждой точке имеет производную. Тогда интеграл $\oint_{C_3} f(v) dv$ равен нулю.

Теорема 3. Пусть функция $f(v)$ дифференцируема в односвязной области G пространства (v) и пусть простая замкнутая кривая C_3 лежит в G и ориентируема в положительном направлении.

Тогда для любой точки v_0 , лежащей внутри области, охватываемой поверхностью, натянутой на кривую C_3 справедлива формула

$$f(v_0) = \frac{1}{4\pi i + 2\pi j} \oint_{C_3} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - v_0} \quad (1.52.)$$

Доказательство. На замкнутую кривую C_3 для дифференцируемых функций наложены условия равенства

$$\oint_{C_3} f(v) dv = \oint_{\gamma} f(v) dv$$

где контур γ_r охватывается контуром C_3 (рис. 26)

Функция $f(\xi)$ аналитична в пространстве (v) в области G с выколотым ε -туннелем, проходящим через точку v_0 . В пространстве для этой функции происходит перенос ε -туннеля из начала координат так, чтобы он проходил через точку v_0 . Иными словами, чтобы знаменатель

$$\xi - v_0 = \rho e^{i\phi + j\psi} (i \pm j)$$

был равен делителям нуля. В классическом активе обычно знаменатель приравнивался нулю $\xi - v_0 = 0$.

Выберем контур γ_r так, чтобы он охватывался контуром C_3 , как показано на рис. 25. В этом случае можно положить $\|\xi - v_0\| = R$, а интеграл записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{4\pi i + 2\pi j} \oint_{\gamma_r} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - v_0} = \frac{1}{4\pi i + 2\pi j} \oint_{C_R} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - v_0} = \\ &= \frac{1}{4\pi i + 2\pi j} \oint_{C_R} \frac{f(\xi) - f(v_0) + f(v_0)}{\xi - v_0} d\xi = \\ &= \frac{1}{4\pi i + 2\pi j} \oint_{C_R} \frac{f(\xi) - f(v_0)}{\xi - v_0} d\xi + \frac{f(v_0)}{4\pi i + 2\pi j} \oint_{C_R} \frac{d\xi}{\xi - v_0} = J_1 + f(v_0) J_2. \end{aligned}$$

Рассмотрим интегралы J_2 и J_1 :

$$J_2 = \frac{1}{4\pi i + 2\pi j} \int_{C_R} \frac{d\xi}{\xi - v_0} = \frac{1}{4\pi i + 2\pi j} \int_{C_R} \frac{R \cdot e^{i\phi + j\psi} (id\phi + jd\psi)}{R \cdot e^{i\phi + j\psi}} =$$

$$= \frac{1}{4\pi i + 2\pi j} \left[i \int_0^{4\pi} d\phi + j \int_0^{2\pi} d\psi \right] = 1.$$

в силу непрерывности функции $f(\psi)$ в точке v_0 для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что неравенство

$$\|f(\xi) - f(v_0)\| < \varepsilon.$$

выполняется, как только $\|\xi - v_0\| < \delta$. Следовательно, как только $R < \delta$, будет выполняться оценка

$$\|I_1\| < \frac{1}{2\sqrt{3}\pi} \oint_{C_R} \frac{\|f(\xi) - f(v_0)\|}{\|\xi - v_0\|} \|d\xi\| < \frac{1}{2\sqrt{3}\pi} \frac{\varepsilon}{R} \oint_{C_R} \|d\xi\| \leq \varepsilon.$$

Учитывая, что J_1 не зависит от R , получаем, что $J_1 = 0$, то есть $J = f(v)$. Формула доказана. Полученный результат можно написать

$$f(v_0) = \frac{1}{4\pi i + 2\pi j} \oint \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - v_0} = \begin{bmatrix} f(v_0), & v_0, & G \\ 0, & v_0, & G \end{bmatrix} \quad (1.53.)$$

Если знаменатель подынтегральной функции приравнять делителем нуля, то есть

$$\xi - v_0 = re^{i\phi + j\psi} (i \pm j) = \lambda(i \pm j)$$

$$d\xi = d\lambda(i \pm j)$$

В этом случае к интегралу применима формула Коши и предыдущий результат остается в силе

$$f(v_0) = \frac{1}{4\pi i + 2\pi j} \oint_{\gamma} \frac{f(v_0 + \lambda(i \pm j)) d\lambda(i \pm j)}{\lambda(i \pm j)} =$$

$$= \frac{1}{4\pi i + 2\pi j} \oint_{\gamma} \frac{f(v_0 + \lambda(i \pm j))}{\lambda} d\lambda$$

Перенос начала координат в изолированную точку, сопровождается переносом изолированной оси в эту точку.

Пример. Рассмотрим интеграл $\oint_{C_3} \frac{1}{v} dv$ в пространстве (Y) за вычетом

изолированной оси. Считаем $\sqrt{0} \leq \|v\| \leq R$, где R - сколь угодно большое число.

Для функции $\frac{1}{v}$ сферы радиуса нуль и радиуса корня из нуля, а также выколота ось дискретных точек являются полюсами функции. Функция на поверхности вырожденного тора является функцией аналитической. В силу интегральных теорем 1, 2, 3 любой путь, замкнутый в пространстве, можно деформировать так, что он будет идти по простейшей кривой C_3 , так что

$$\Gamma = \oint_{C_3} f(v)dv = \oint_{C_3} \frac{1}{e^{i\phi+j\psi}} e^{i\phi+j\psi} (id\phi + jd\psi) = 4\pi i + 2\pi j.$$

При расчете этого интеграла принято, что кривая C_3 лежит на внутренней и внешней поверхностях сферы радиуса R (рис. 20), то есть проход по внутренней поверхности заменяет проход по ε -туннелю. Тот отрезок прямой, который идет по ε -туннелю, соединяя две оболочки, можно сделать сколь угодно малым вместе с толщиной оболочки δ . Эту добавку к интегралу можно также сделать сколь угодно малой, поэтому она не учитывается.

Величину $\Gamma=4\pi i+2\pi j$ назовем главной циклической постоянной в пространстве (v) . Естественно можно указать путь (рис. 21), когда величина Γ будет равна $2\pi f+2\pi i$ и циклическая постоянная будет принадлежать делителям нуля.

Если рассматривать путь от 1 до (v) , который состоит из кривой C_4 и кривой C_3 , то интеграл будет равен

$$\int_1^v \frac{\partial v}{v} = \int_1^v \frac{\partial v}{v} + 4k_1\pi i + 2k_2\pi j,$$

где k_1 и k_2 - целые числа, показывающие, сколько раз и в каком направлении проходимся поверхностью сферы и выколотой оси (рис. 27). C_4 - путь от 1 до любой точки v ; C_3 - любой путь, охватывающий сферу и путь от 1 до v .

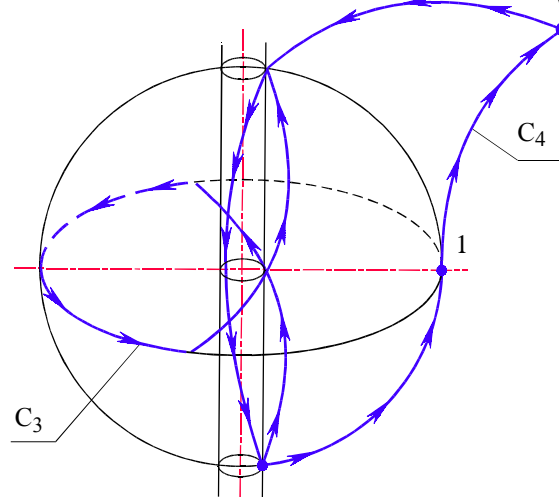


Рис. 27. Путь C_4 от точки 1 до точки v , включающий простейшую кривую C_3 .

Таким образом, от интеграла пришли к многозначности логарифмической функции

$$\begin{aligned} \text{Ln } v &= \int_1^v \frac{dv}{v} = \int_1^v \frac{dv}{v} + 4k_1\pi i + 2k_1\pi j = \\ &= \ln v \Big|_1^{v'} + 4k_1\pi i + 2k_1\pi j = \ln v + 2k_1\pi i + 2k_1\pi j, \end{aligned} \quad (1.54.)$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$, k_1 может быть, например, равным $k = k_1 + 1$.

Кривые C_0 не содержащие внутри себя выколотой оси в пространстве (v) , функцией $\ln v$ при каждом обходе их точкой v сдвигаются в пространстве U, V, W , давая кривые C_0, C_{01}, C_{03} . Сдвиг определяется величиной $\Gamma = 2\pi k i + 2k_1\pi j$.

Если кривая в пространстве разомкнута, то она и в координатах U, V, W будет разомкнута и иметь различные ветви. Эти ветви будут однозначными ветвями многозначной функции (рис. 28). На этих ветвях функция $\ln v$ обладает производной. Если кривая будет охватывать ось, то ветви функции не отделяются друг от друга. Выколота ось является осью разветвления функции.

1.3.6. Поверхностные интегралы

Рассмотрим в пространстве поверхность, которая охватывает объем, и сформулируем условия существования поверхностного интеграла.

Разобьем произвольную поверхность в пространстве на элементарные площадки $d\sigma$, образованные пересечением кривых C^* , C^* . Сетку из кривых определим, анализируя дифференциалы.

Рассмотрим

$$dv|_{\phi=\text{const}} = d\rho e^{i\phi} + j d\rho e^{i\phi}$$

и

$$dv|_{\substack{\rho=\text{const} \\ r=\text{const}}} = i\rho e^{i\phi} d\phi + j i\rho e^{i\phi} d\phi$$

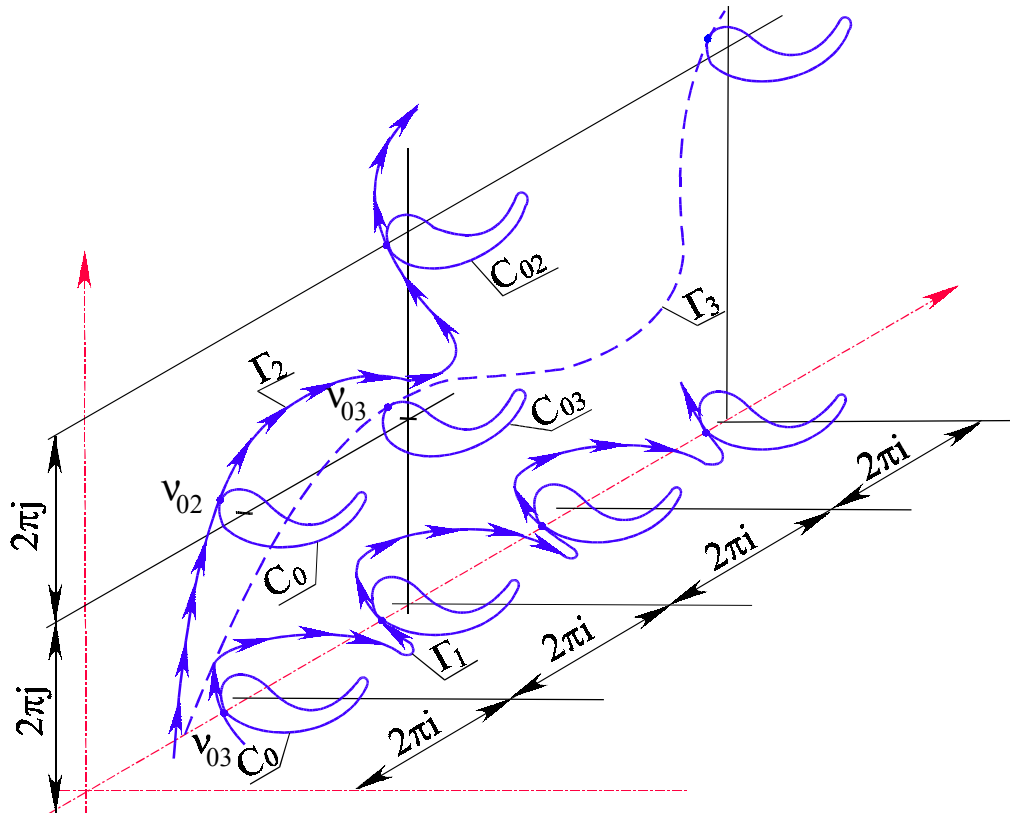


Рис. 28. Различные варианты однозначных ветвей логарифмической функции

Элемент площадки $d\sigma^*$ образуется пересечением

$$d\sigma^* = dv|_{\phi^*} dv|_{\rho}.$$

Имеем

$$d\sigma^* = d\rho e^{2i\phi} d\phi d\rho - i e^{2i\phi} \rho d\phi d\rho + j i\rho e^{2i\phi} d\phi d\rho + j i\rho e^{2i\phi} d\phi d\rho.$$

Поверхность $d\sigma$ состоит из четырех поверхностей

$$d\sigma^* = d\sigma_1 - d\sigma_2 + d\sigma_3 + d\sigma_4.$$

На рис. 28 дана геометрическая взаимосвязь площадок.

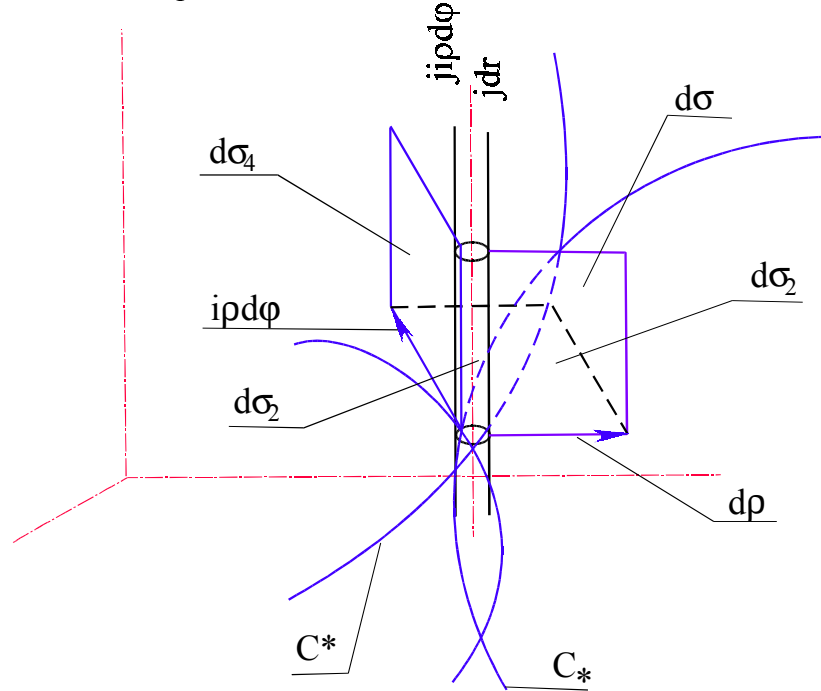


Рис. 29. Расположение элементарных площадок в комплексном пространстве.

Элемент $d\sigma^*$ состоит из суммы проекционных площадок, одна из которых $d\sigma_2$ взята с отрицательным знаком, так как согласно геометрической интерпретации (рис. 29) эта площадка дважды входит в элемент: один раз в площадку $d\sigma_3$ и один раз в площадку $d\sigma_4$.

Определим поверхностный интеграл

$$\begin{aligned} \iint_S f(v) d\sigma^* &= \\ &= \iint_S (U + jV) (ipe^{2i\phi} d\phi dp - ire^{2i\phi} d\phi dr + jire^{2i\phi} d\phi dp + jipe^{2i\phi} d\phi dr) = \\ &= \iint_S (ipe^{2i\phi} U d\phi dp - ire^{2i\phi} U d\phi dr + ire^{2i\phi} V d\phi dp - ipe^{2i\phi} V d\phi dr) + \\ &+ j \iint_S (ipe^{2i\phi} V d\phi dp - ire^{2i\phi} V d\phi dr + ire^{2i\phi} U d\phi dp + ipe^{2i\phi} U d\phi dr) = \\ &= JJ_1 + jJJ_2. \end{aligned}$$

рассмотрим последовательно интегралы JJ_1 и JJ_2 :

$$\begin{aligned} JJ_1 &= \iint_S ie^{2i\phi} d\phi (U\rho dp - Urdr - Vrdp - V\rho dr); \\ JJ_2 &= \iint_S ie^{2i\phi} d\phi (V\rho dp - Vrdr + Urdr + U\rho dr). \end{aligned}$$

Преобразуем интегралы JJ_1 и JJ_2 в повторные интегралы по сеткам C^* , C_* :

$$JJ_1 = \iint_{C^*} ie^{2i\phi} d\phi \int_{C_*} (U\rho - Vr) d\rho - (Ur + V\rho) dr;$$

$$JJ_2 = \iint_{C^*} ie^{2i\phi} d\phi \int_{C^*} (V\rho + Ur)d\rho - (Vr - U\rho)dr.$$

Криволинейные интегралы по C^* сведем к поверхностным, применив формулу Грина:

$$\begin{aligned} JJ_1 &= \int_{C^*} (U\rho - Vr)d\rho - (Ur + V\rho)dr = \\ &= \iint_{\sigma_*} \left[\frac{\partial}{\partial r} (U\rho - Vr) + \frac{\partial}{\partial \rho} (Ur + V\rho) \right] d\rho dr = \\ &= \iint_{\sigma_*} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \rho - \frac{\partial V}{\partial r} r - V + \frac{\partial U}{\partial \rho} r + \frac{\partial V}{\partial \rho} \rho + V \right) d\rho dr = \\ &= \iint_{\sigma_*} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) - r \left(\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) \right] d\rho dr; \\ J_2 &= \iint_{\sigma_*} \left[\frac{\partial}{\partial r} (U\rho + Ur) + \frac{\partial}{\partial \rho} (Vr - U\rho) \right] d\rho dr = \\ &= \iint_{\sigma_*} \left[\frac{\partial V}{\partial r} \rho + \frac{\partial U}{\partial r} r + U + \frac{\partial V}{\partial \rho} r - \frac{\partial U}{\partial \rho} \rho - U \right] d\rho dr = \\ &= \iint_{\sigma_*} \left[\rho \left(\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + r \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) \right] d\rho dr \end{aligned}$$

В результате преобразований имеем

$$\begin{aligned} JJ_1 &= \iint_{\sigma} f(v) d\sigma = \oint_{C^*} ie^{2i\phi} \iint_{\sigma_*} \left[\rho \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) - r \left(\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) \right] d\rho dr + \\ &+ j \oint_{C^*} ie^{2i\phi} \iint_{\sigma_*} \left[\rho \left(\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + r \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) \right] d\rho dr = \\ &= \iiint_V \left[i\rho e^{2i\phi} \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) - i r e^{2i\phi} \left(\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) \right] d\rho dr d\phi + \\ &= j \iiint_V \left[i\rho e^{2i\phi} \left(\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + i r e^{2i\phi} \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) \right] d\rho dr d\phi. \end{aligned}$$

Подынтегральное выражение преобразуется к следующему виду объемного интеграла

$$J = \iiint_V \left[\left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + j \left(\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) \right] d\rho dr (i\rho e^{2i\phi} d\phi + j r e^{2i\phi} d\phi).$$

Подынтегральное выражение этого интеграла было получено на контуре $\phi = \text{const}$ при исследовании криволинейного интеграла, когда по формуле Грина делался переход к поверхностному интегралу, поэтому

$$\begin{aligned}
 JJ &= \iint_S f(v) d\sigma = \int_{C^*} \left(\int_{C^*} (U + jV) (d\rho e^{i\phi} + j d\rho e^{i\phi}) (i\rho e^{i\phi} d\phi + j i\rho e^{i\phi} d\phi) \right) = \\
 &= \int_{C^*} \left(\int_{C^*} f(v) dv_1 \right) dv_2. \quad (1.55.)
 \end{aligned}$$

В итоге поверхностный интеграл по элементарной площадке $d\sigma^*$ свели к двукратному интегрированию сначала по кривой C^* , а затем по кривой C_* . Вследствие этого, если кривая является замкнутой кривой C_3 , то поверхностный интеграл не зависит от формы поверхности, которая натянута в пространстве на эту кривую.

От поверхности натянутой на кривую C_3 (рис. 26), можно непрерывным образом перейти к поверхности γ_r , натянутой на кривую γ_r , окружающую изолированную точку v_0 .

Этот вывод сформулируем как Следствие 1. Если функция $g(v)$ дифференцируема в односвязном пространстве D , то двойной интеграл от $g(v)$ не зависит от формы поверхности интегрирования. Если поверхности S_γ, S_{γ_1} касаются друг друга в двух точках по изолированному направлению, либо в других двух точках, то

$$\iint_{S_\gamma} g(v) d\sigma = \iint_{S_{\gamma_1}} g(v) d\sigma.$$

Это соотношение справедливо и для не односвязных областей. Справедлива в пространстве и следующая теорема.

Если D –ограниченная односвязная область с кусочно-гладкой поверхностью S_γ и функция $g(v)$ дифференцируема в области D и непрерывна вплоть до ее границы, тогда

$$\iint_{S_\gamma} g(v) d\sigma = 0.$$

Пример. $\iint_{S_\gamma} = \iint_{S_\gamma} (v - a)^n d\sigma$, где n – целое число, S_γ –поверхность сферы $\|v - a\| = R \geq \sqrt{0}$. Точка поверхности S_γ записывается в виде

$$v = a + \text{Re}^{i\varphi + j\psi}, \text{ где } 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}. \text{ Тогда}$$

$$dv_\varphi = i \text{Re}^{i\varphi + j\psi} d\varphi,$$

$$dv_\psi = j \text{Re}^{i\varphi + j\psi} d\psi$$

Откуда $d\sigma = dv_\varphi dv_\psi = j i R^2 e^{2i\varphi + 2j\psi} d\varphi d\psi$. Интеграл приобретает вид

$$\iint = j i R^{n+2} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{i(n+2)\varphi + j(n+2)\psi} d\varphi d\psi. \quad \text{Проанализируем полученное}$$

выражение интеграла.

При $n = -2$ имеем $\iint = ji2\pi \cdot \pi = 2\pi^2 ji$

При $n \neq -2$, последовательно вычислим интеграл

$$\begin{aligned} \iint &= jiR^{n+2} \int_0^{2\pi} e^{i(n+2)\varphi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{j(n+2)\psi} d\psi = \\ &= ji \frac{R^{n+2}}{(n+2)(n+2)} e^{i(n+2)\varphi} \Big|_0^{+\frac{\pi}{2}} e^{j(n+2)\psi} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = \\ &= ji \frac{R^{n+2}}{(n+2)^2} \left(e^{i(n+2)2\pi} - e^0 \right) \left(e^{j(n+2)\frac{\pi}{2}} - e^{-j(n+2)\frac{\pi}{2}} \right) = 0, \text{ так как} \end{aligned}$$

$e^{i(n+2)2\pi} - e^0 = 0$ при n - четных и нечетных положительных и отрицательных ,

$e^{j(n+2)\frac{\pi}{2}} - e^{-j(n+2)\frac{\pi}{2}} = 0$ при n -четных и $n = 0$,

$e^{j(n+2)\frac{\pi}{2}} - e^{-j(n+2)\frac{\pi}{2}} = \pm 2j$ при n -нечетных и отрицательных.

$$\iint = 0.$$

Пример. Вычислить интеграл $\oiint_{S_\gamma} e^v d\sigma$.

Проведем подстановку аналогичную предыдущему примеру получим :

$$\oiint_{S_\gamma} e^{\rho e^{i\varphi+j\psi}} j\rho^2 e^{2i\varphi+2j\psi} d\varphi d\psi = \oiint_{S_\gamma} j i e^v v^2 d\varphi d\psi$$

В комплексном пространстве функции e^v, v^2 есть функции одной переменной v , поэтому целесообразно экспоненциальную функцию разложить в ряд ,который сходится для любого v .

В результате подынтегральная функция приобретает вид

$$e^v v^2 = v^2 + v^3 + \frac{v^4}{2!} + \frac{v^5}{3!} + \dots \text{ и возвращаясь к переменной}$$

$v = r e^{i\varphi+j\psi}$ получим следующий ряд

$$e^v v^2 = r^2 e^{2i\varphi+2j\psi} + r^3 e^{3i\varphi+3j\psi} + \frac{r^4 e^{4i\varphi+4j\psi}}{2!} + \dots$$

Подставляя в исходный интеграл, получим

$$\oiint_{S_\gamma} e^v d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} j i \left(r^2 e^{2i\varphi+2j\psi} + r^3 e^{3i\varphi+3j\psi} + \frac{r^4 e^{4i\varphi+4j\psi}}{2!} + \dots \right) d\varphi d\psi = 0$$

Интеграл равен нулю, так как каждый член сходящегося ряда при интегрировании дает ноль.

Теорема 4. Пусть функция $f(v)$ дифференцируема в односвязной области G пространства (v) и пусть имеется гладкая поверхность σ . Тогда для любой точки v_0 , лежащей внутри объема G , заключенного внутри замкнутой (геометрически) поверхности, имеет место формула

$$f(v_0) = \frac{1}{4\pi^2 ij} \iint_{\sigma} \frac{f(\xi) d\sigma}{(\xi - v_0)^2}, \quad (1.56.)$$

где $d\sigma$ - дифференциал упомянутой поверхности.

Доказательство начнем со следующего замечания. Если около точки v_0 построена шаровая поверхность (в нашем случае сфера с проколотыми вершинами)

$$\|\xi - v_0\| = R,$$

то в этом случае

$$d\sigma = d\xi_{\phi} d\xi_{\psi} = R^2 e^{2i\phi+2j\psi} ij d\phi d\psi,$$

а

$$\xi - v_0 = R \cdot e^{i\phi+j\psi}.$$

Поэтому

$$\iint_{\sigma_R} \frac{d\sigma}{(\xi - v_0)^2} = ij \int_0^{2\pi+\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\phi d\psi = 2\pi^2 ij. \quad (1.57.)$$

Интеграл 1.57 не зависит от радиуса поверхности, на который она натянута.

Далее в соответствии с заключением предыдущего параграфа о независимости интеграла от формы поверхности делаем заключение

$$\iint_{\sigma_R} \frac{f(\xi)}{(\xi - v_0)^2} d\sigma = \iint_{\sigma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - v_0)^2} d\sigma, \text{ где радиус } r \text{ можно сделать сколь угодно}$$

малым - δ .

Тогда, на основании этого равенства и соотношения 1.57 запишем

$$\frac{1}{2\pi^2 ji} \iint_{\sigma_R} \frac{f(\xi)}{(\xi - v_0)^2} d\sigma - f(v_0) = \frac{1}{2\pi^2 ji} \iint_{\sigma_r} \frac{1}{(\xi - v_0)^2} (f(\xi) - f(v_0)) d\sigma.$$

Обозначим интеграл в правой части за $\iint$ и докажем, что он равен нулю

. Обозначим

$$\xi - v_0 = \delta e^{i\phi+j\psi}$$

$$d\xi_{\phi} d\xi_{\psi} = ji \delta^2 e^{2i\phi+2j\psi} d\phi d\psi, \text{ тогда интеграл равен}$$

$$\begin{aligned} \iint &= \frac{1}{2\pi^2 ji} \iint_{\sigma_r} \frac{f(v_0 + \delta e^{i\phi+j\psi}) - f(v_0)}{\delta^2 e^{2i\phi+2j\psi}} ji \delta^2 e^{2i\phi+2j\psi} d\phi d\psi = \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \iint_{\sigma_r} [f(v_0 + \delta e^{i\phi+j\psi}) - f(v_0)] d\phi d\psi \end{aligned}$$

Величина δ характеризует радиус поверхности сферы σ_r и может быть взята сколь угодно малой $\delta(\varepsilon)$. Приращение функции в точке v_0 может в свою очередь стать равным ε . Так, что

Приращение функции по модулю равно
 $\|f(v_0 + \delta(\varepsilon)e^{i\varphi+j\psi}) - f(v_0)\| = \varepsilon$ следовательно интеграл

$$\iint \leq \frac{1}{2\pi^2} 2\pi^2 \varepsilon \cdot \iint \leq \varepsilon.$$

Левая часть равенства не зависит r , правая часть равна нулю, поэтому приходим к результату:

$$\frac{1}{2\pi^2} \iint_{\sigma_R} \frac{f(\xi)}{(\xi - v_0)^2} d\sigma = f(v_0), v_0 \in \Omega, \text{ и равен } 0, \text{ если } v_0 \notin \Omega, \text{ где}$$

Ω -область заключенная внутри поверхности σ_R .

Рассматривая $\Delta v = \delta(\varepsilon)e^{i\varphi+j\psi}$ как приращение переменной в точке v_0 , приращение функции

Δf можно представить в виде ряда

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial v_0} \Delta v_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 v_0} \Delta v_0^2 + \dots 0(\delta^2), \text{ так как функция регулярна во}$$

всем пространстве Y , в том числе и точки v_0 . Это приращение может быть сколь угодно малым ε при $r = \delta[\varepsilon] \rightarrow 0$.

Наличие изолированного направления не ограничивает общности рассуждений и подтверждает конечный результат формулы.

Если приращение переменной v

идет по изолированному направлению $\xi - v_0 = \delta(\varepsilon)e^{i\varphi+j\psi}(1 + ji)$,

$(\xi - v_0)^2 = \delta(\varepsilon)^2 e^{2i\varphi+2j\psi} (1 + ji)^2$, то

$$\Delta f = (1 + ji) \left[\frac{\partial f}{\partial v_0} \delta(\varepsilon)e^{i\varphi+j\psi} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 v_0} \delta^2(\varepsilon)e^{2i\varphi+2j\psi} + \dots \right] \leq \varepsilon$$

Вывод теоремы Коши в пространстве необходимо рассмотреть с разных позиций, которые диктуются геометрией и алгеброй комплексного пространства.

В классическом виде ноль это выражение вида $0 = 0e^{i\varphi+j\psi}$, где φ, ψ могут быть как действительными, так и комплексными. Но в пространстве ноль представим как произведение делителей нуля $0 = e^{i\varphi+j\psi}(1 + ji)(1 - ji)$. В последнем случае ноль заменен произведение делителей нуля с противоположными направлениями. Если в первом случае ноль окружен

Сферой с изменением аргументов в пределах

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, \text{ то во втором случае}$$

Поверхность сферы рассматривается из двух полусфер. Верхняя полусфера определена делителем нуля в верхнем полупространстве с изменением аргументов

$0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$, полусфера в нижнем полупространстве определена делителем нуля с

отрицательным изолированным направлением и изменением аргументов

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq 0.$$

Функция $\frac{1}{v^2}$ не регулярна в точке $v = 0$. Поэтому рассмотрим выражение нуля в пространстве

По второму варианту. В силу делимости нуля дробь

$$\frac{1}{v^2(1+ji)(1-jj)}$$
 можно разложить

На две простейшие дроби

$$\frac{1}{v^2(1+ji)(1-jj)} = \frac{1}{v^2} \left[\frac{1}{2(1+ji)} + \frac{1}{2(1-jj)} \right].$$

Составим поверхностный интеграл от правой части равенства

$$\iint = \iint_{\sigma_1} \frac{d\sigma_1}{v^2(1+ji)^2} + \iint_{\sigma_2} \frac{d\sigma_2}{v^2(1-jj)^2}, \text{ где использовано свойство делителей}$$

нуля

$$(1 \pm ji)^2 = 2(1 \pm ji).$$

В первом интеграле поверхность σ_1 есть верхняя полусфера, точки на которой определяются

В виде $v = v_0(1+ji) = re^{i\varphi+j\psi}(1+ji)$. Элемент поверхности равен

$$d\sigma_1 = jir^2 e^{2i\varphi+2j\psi} (1+ji)^2 d\varphi d\psi, \text{ где аргументы изменяются в пределах}$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Во втором интеграле поверхность σ_2 есть нижняя полусфера, точки на которой определяются

В виде $v = v_0(1-jj) = re^{i\varphi+j\psi}(1-jj)$. Элемент поверхности равен

$$d\sigma_2 = jir^2 e^{2i\varphi+2j\psi} (1-jj)^2 d\varphi d\psi, \text{ где аргументы изменяются в пределах}$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq 0.$$

Подставим выражения в интегралы

$$\begin{aligned}
 \iint &= ji \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2 e^{2i\varphi+2j\psi} (1+ji)^2 d\varphi d\psi}{r^2 e^{2i\varphi+2j\psi} (1+ji)^2} + ji \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{r^2 e^{2i\varphi+2j\psi} (1-ji)^2 d\varphi d\psi}{r^2 e^{2i\varphi+2j\psi} (1-ji)^2} = \\
 &= ji \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi d\psi + ji \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d\varphi d\psi = 2\pi^2 ji.
 \end{aligned}$$

Оба интеграла могут быть объединены в один интеграл

$$\begin{aligned}
 \iint &= ji \int_0^{2\pi} \frac{r^2 e^{2i\varphi+2j\psi} (1+ji)^2 (1-ji)^2}{r^2 e^{2i\varphi+2j\psi} (1+ji)^2 (1-ji)^2} d\varphi \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d\psi \right] = \\
 &= ji \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi d\psi = 2\pi^2 ji.
 \end{aligned}$$

Таким образом, критическая точка ноль представлена как произведение

делителей нуля. Интеграл $\iint = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\sigma}{v^2}$ в пространстве распадается на сумму

трех интегралов

$$\iint = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\sigma}{v^2} + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\sigma}{v^2 (1+ji)^2} + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{d\sigma}{v^2 (1-ji)^2} = 2\pi^2 ji.$$

Итак, классический интеграл в пространстве Y представлен в виде суммы трех интегралов.

Первый интеграл рассматривает ноль как критическую точку в его классическом виде.

Два вторых интеграла рассматривают ноль, как критическую точку в пространстве представленную произведением делителей нуля. В этом случае вычисления проводятся по поверхностям верхней и нижней полусфер, окружающих в пространстве классическую

Нулевую точку. Если вычислять интеграл только по верхней полусфере, то получим

$$\iint = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\sigma}{v^2} + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\sigma}{v^2 (1+ji)^2} = \pi^2 ji.$$

Если вычислять интеграл по нижней полусфере около точки ноль, то получим

$$\iint = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{d\sigma}{v^2} + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{d\sigma}{v^2(1 - ji)^2} = -\pi^2 ji.$$

Теорема 5. (о среднем). Пусть функция дифференцируема внутри шара $\|\xi - v_0\| < R$ и непрерывна вплоть до его границы. Тогда значение этой функции в центре шара равно среднеарифметическому ее значению по поверхности, то есть

$$f(v_0) = \frac{1}{2\pi^2 ji} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(v_0 + R \cdot e^{i\phi + j\psi}) d\phi d\psi.$$

Доказательство. Положим $\xi = v_0 + R \cdot e^{i\phi + j\psi}$ и подставим в интеграл (1.56)

$$f(v_0) = \frac{1}{2\pi^2 ij} \iint_{\sigma_R} \frac{f(\xi) d\sigma}{(\xi - v_0)^2} = \frac{1}{2\pi^2 ji} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(v_0 + R \cdot e^{i\phi + j\psi}) d\phi d\psi.$$

что требовалось доказать.

Формулы (1.52.), (1.56) допускают дифференцирование слева и справа (под знаком интеграла) по переменной. При этом равенство сохраняется и таким образом получается формула n-производной рассматриваемой функции

$f^n(v_0)$ как через одномерный, так и двойной интегралы. Заодно доказывается и существование производной.

1.4. Ряды в пространстве

1.4.1. Теорема Н. Абеля.

Если степенной ряд $\sum_0^{\infty} C_n(v-a)^n$ сходится в точке v_0 , то он сходится и в любой точке v , расположенной ближе к центру a , чем v_0 , причем в любой сфере $\|(v-a)\| \leq k\|(v_0-a)\|$, где $0 < k \leq 1$, сходимость ряда равномерна.

Понятие области сферы в пространстве Y неразрывно связано с простейшей замкнутой кривой $C_3; \gamma_R \equiv C_3$. Под областью G сферы понимается область пространства, находящейся внутри замкнутой поверхности S_R , натянутой без точек самопересечения на кривую γ_R , то есть эта область определяется как $0 < \sqrt{0} < \|(v-a)\| < R$ и представляет область сферы с выколотой изолированной осью, проходящей через точку a . Предположим v_0 произвольная точка области G и представим n -ый член ряда в виде

$$C_n(v-a)^n = C_n(v_0-a)^n \left(\frac{v-a}{v_0-a} \right)^n$$

В силу сходимости в точке v_0 член

$C_n(v-a)^n$ ограничен по модулю $\|C_n(v_0-a)^n\| \leq M$ и стремится к нулю.

Кроме того

$$\left\| \frac{(v-a)}{(v_0-a)} \right\| \leq k \quad \text{и} \quad \text{следовательно} \quad \text{для} \quad \text{всех} \quad n \quad \text{имеем}$$

$\|C_n(v-a)^n\| \leq Mk^n, 0 < k < 1$. Откуда вытекает равномерная сходимость на сфере $\|(v-a)\| \leq k\|(v_0-a)\|$. Так как, k может быть сколь угодно близким к 1, то имеем $\|(v-a)\| < \|(v_0-a)\|$. Из теоремы Абеля, перенесенной в пространство

Y следует, что областью сходимости степенного ряда $\sum_0^{\infty} C_n(v-a)^n$ является сфера с центром в точке a радиуса R , равного радиусу сходимости ряда.

Радиус сходимости определяется по формуле $\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|C_n\|}$. Следовательно ряд будет сходиться в области сферы $\|(v-a)\| < R$ в пространстве Y . Это верхняя граница сходимости.

Нижняя граница сходимости определяется как $\|(v-a)\| = 0$. Для изолированного направления

Область сходимости будет определяться как $\|(v-a)(1 \pm ji)\| \leq R(1 \pm ji)$. Радиус сходимости становится коэффициентом перед делителем нуля. Нижняя граница $\|(v-a)\| = \sqrt{0}$.

При разложении функции в ряд по степеням $(v-a)$, происходит перенос изолированной оси в точку a . Этот перенос и определяет область G сходимости ряда

$$0 < \lim_{\|z_\rho\| \rightarrow 0} z_\rho (1 \pm ji) < \|(v-a)\| < \lim_{\|z_\rho\| \rightarrow \infty} z_R (1 \pm ji) < R$$

Справедливо следующее утверждение: Однозначная аналитическая функция $f(v)$ в области G разлагается в окрестности точки a в степенной ряд Тейлора

$$f(v) = \sum_0^\infty C_n (v - v_0)^n, \text{ где коэффициенты ряда } C_n \text{ определяются фор-}$$

мулами

$$C_n = \frac{1}{n!} f^n(v_0) \text{ или}$$

$$C_n = \frac{1}{4\pi i + 2\pi j} \oint_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - v_0)^{n+1}} d\xi, \text{ кривая } \gamma \text{ натянута на сферу радиуса}$$

$R_1 < R$, которая имеет центром точку a и целиком лежит в окрестности этой точки. Радиус сферы сходимости определяется расстоянием от точки v_0 до ближайшей особой точки функции $f(v)$ в пространстве Y , либо до ближайшей особой точки, расположенной на изолированной оси. Остаются в пространстве Y справедливыми следующие разложения элементарных функций классического анализа

в точке $v = 0$.

$$e^v = \sum_0^\infty \frac{v^n}{n!},$$

$$\sin v = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n v^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos v = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n v^{2n}}{2n!}, \quad (1.58.)$$

$$shv = \sum_0^\infty \frac{v^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$chv = \sum_0^\infty \frac{v^{2n}}{2n!}$$

Эти соотношения имеют место во всем комплексном пространстве Y и имеют место на множестве делителей нуля. Непосредственным вычислением производных получим разложение в точке $v_0 = 0$

$$Ln(1+v) = v - \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{v^n}{n}$$

$$(1+v)^n = 1 + \alpha v + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} v^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha+n-1)}{n!} v^n \quad (1.59.)$$

, в частности при $n = -1$, получим

$$\frac{1}{1+v} = 1 - v + v^2 - \dots + (-1)^n v^n.$$

Радиус сходимости этих функций равен 1. Ближайшей особой точкой служат $v_0 = -1$. Функции $e^v, \sin v, \cos v, sh v, ch v$ и др., представленные сходящимся степенным рядом во всем пространстве Y , будут называться целыми функциями.

Сумма, разность и произведение целых функций дают целые функции. Это свойство широко используется при разложении в степенные ряды.

Рассмотрим ряд примеров. Функция e^v представляется степенным рядом $\sum_0^\infty \frac{v^n}{n!}$, сходящимся во всем пространстве Y . Рассмотрим сходимость ряда на конусе делителей нуля (или на изолированной оси). Определим $v = \rho e^{i\varphi + j\psi} (1 \pm ji)$ и воспользуемся формулой возведения делителей нуля в целую степень n , согласно таблице $(1 \pm ji)^n = (2i)^{n-1} (1 \pm ji)$

Подставим данные соотношения в исходный ряд

$$e^{v(1 \pm ji)} = \sum_0^\infty \frac{v^n (1 \pm ji)^n}{n!} = 1 + \frac{v(1 \pm ji)}{1!} + \frac{v^2 (1 \pm ji)^2}{2!} + \dots + \frac{v^n (1 \pm ji)^n}{n!} =$$

$$= 1 + (1 \pm ji) \sum_{n=1}^\infty \frac{(2i)^{n-1} v^n}{n!}.$$

Коэффициент $C_n = \frac{(2i)^{n-1}}{n!}$ определяет радиус сходимости ряда по изолированной оси и определяет расстояние от нуля до особой точки на этой оси.

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|(2i)^{n-1}\| (n+1)!}{\|(2i)^n\| n!} = \left(\frac{n+1}{n} \right)_{n \rightarrow \infty} = \infty.$$

Таким образом, в области определяемой делителями нуля, ряд также имеет бесконечный радиус сходимости. Если $f(0) = C_0 = 1$, то имеем $\lim_{v \rightarrow 0} e^{v(1 \pm ji)} = C_0 = 1$, так как

$$\lim_{v \rightarrow 0} (1 \pm ji) \sum_1^\infty \frac{(2i)^{n-1} v^n}{n!} \equiv 0,$$

естественно, что в этих выражениях v рассматривается без делителей нуля.

Далее имеем $e^{v(1+j)} = e^v \cos iv + j e^v \sin iv$

$e^{v(1-j)} = e^v \cos iv - j e^v \sin iv$ Складывая и вычитая эти два равенства

получим
$$\frac{e^{v(1+j)} + e^{v(1-j)}}{2} = e^v \cos iv = e^v \left(\frac{e^v + e^{-v}}{2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{e^{2v}}{2}$$

$$\frac{e^{v(1+j)} - e^{v(1-j)}}{2j} = e^v \sin iv = e^v \left(\frac{e^{-v} - e^v}{2i} \right) = -\frac{1}{2}i + \frac{e^{2v}}{2}i$$

Учитывая, что функция $e^{2v} = \sum_0^{\infty} \frac{2^n v^n}{n!}$ получим

$$e^v \cos iv = \frac{1}{2} + \sum_0^{\infty} \frac{2^n v^n}{n!} = 1 + \sum_1^{\infty} \frac{2^{n-1} v^n}{n!}$$

Таким образом, получено выражение для первой комплексной части при разложении функции

$$e^{v(1+ji)} = 1 + (1+ji) \sum_1^{\infty} \frac{2^{n-1} v^n}{n!} = 1 + \sum_1^{\infty} \frac{2^{n-1} v^n}{n!} + ji \sum_1^{\infty} \frac{2^{n-1} v^n}{n!}$$

в ряд по изолированному направлению. Вторая комплексная часть получается аналогичным образом

$$je^v \sin iv = -ji \left(\frac{1}{2} \right) + ji \frac{1}{2} \sum_0^{\infty} \frac{2^n v^n}{n!} = ji \sum_1^{\infty} \frac{2^{n-1} v^n}{n!}$$

В комплексной плоскости Z разложение функции $f(z)$ в окрестности точки a представляется рядом Тейлора $f(z) = \sum_0^{\infty} C_n (z-a)^n$ в круге сходимости радиуса R (то есть для всех точек этого круга). Центр окружности Γ круга сходимости находится в точке a . Эта окружность проходит через особую точку ξ функции $f(z)$, ближайшую к точке a . Коэффициенты ряда C_n вычисляются

по формуле $C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{(z-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, где $n=0,1,2, \dots$. В пространстве Y

круг сходимости радиуса R заменяется на сферу сходимости радиуса R , так что для всех v в сфере сходимости имеем $f(v) = \sum_0^{\infty} C_n (v-a)^n$. Однако необходимо подчеркнуть еще раз, в сфере сходимости из точки a исходит изолированное направление, которое записывается в виде делителей нуля

$v = a + \rho e^{i\varphi + j\psi} (1 \pm ji)$, где в этом случае параметры ρ, φ, ψ не содержат условий, приводящих к делителям нуля. Точка a может быть любой из пространства Y . В этом случае подставляя v в ряд будем иметь

$$f(v) = \sum_0^{\infty} C_n v^n (1 \pm ji)^n = (1 \pm ji) \sum_0^{\infty} C_n (2i)^{n-1} v^n$$

Радиус сходимости этого ряда определяется из соотношения $R_d = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{2^{n-1} C_n}{2^n C_{n+1}} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{C_n}{2 C_{n+1}} \right\|$. В

пределах этого радиуса точка v определяется параметрами не дающими изолированного направления. Радиус сходимости по изолированному направлению сокращен в два раза по отношению к обычному радиусу. Ряд сходится для всех точек начиная от окрестности точки $v = a + \varepsilon e^{i\varphi + j\psi} (1 \pm ji)$ до точки

$$v = a + R_d e^{i\varphi + j\psi} (1 \pm ji).$$

При разложении в ряд Тейлора функции $f(v)$ по изолированному направлению, целесообразно разложение производить отдельно первой и второй комплексных частей.

$f(v) = \operatorname{Re}elf(v_d) + j\operatorname{Im}f(v_d)$. Рассмотрим ряд характерных примеров.

Пример. Рассмотрим разложение логарифмической функции на конусе делителей нуля. Согласно (1.59) имеем

$$\operatorname{Ln}(1+v) = v - \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3} - \frac{v^4}{4} + \frac{v^5}{5} - \dots = \sum_1^{\infty} \frac{v^n}{n} (-1)^{n-1}$$

Известно, что ряд сходится в области сферы радиуса $\|v\| < 1$, за вычетом изолированного направления. Исследуем поведение ряда в делителях нуля. Обозначим $v = v_d = v(1 \pm ji)$. Раскроем левую часть

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln}(1+v \pm jiv) &= \operatorname{Ln}\sqrt{(1+z)^2 - z^2} + j\operatorname{arctg} \frac{zi}{1+z} = \\ &= \frac{1}{2} \ln(1+2z) + j\operatorname{arctg} \frac{zi}{1+z}. \end{aligned}$$

Замена переменных v на z сделана на ос-

новании свойства изолированного аргумента. Подставим $v_d = z(1 \pm ji)$ в правую часть получим

$$\begin{aligned} \ln(1+z \pm jiz) &= z(1 \pm ji) - \frac{z^2}{2}(1 \pm ji)^2 + \frac{z^3(1 \pm ji)^3}{3} + \dots = \\ &= (1+ji) \left\{ z - z^2 + \frac{2^2 z^3}{3} - \frac{2^3 z^4}{4} + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Если $z \neq 0$, ряд сходится и

имеет радиус сходимости равный $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n-1}(n+1)}{2^n n} = \frac{1}{2}$. Приравнявая комплексные части с левой и правой стороны получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln(1+2z) &= \left\{ z - \frac{z^2 2}{2} + \frac{z^3 2^3}{3} - \dots \right\} \\ \operatorname{arctg} \frac{iz}{1+z} &= i \left\{ z - \frac{z^2 2}{2} + \frac{z^3 2^3}{3} - \dots \right\} \end{aligned}$$

Таким образом, чтобы не было противоречий в разложении исходной функции как единого пространственного комплекса необходимо доказать, что вторая комплексная часть в левой стороне равна первой, а именно в комплексной плоскости имеем

$$\operatorname{arctg} \frac{iz}{1+z} = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+i \frac{iz}{1+z}}{1-i \frac{iz}{1+z}} = \frac{1}{2i} \ln \frac{1}{1+2z} = -\frac{1}{2i} \ln(1+2z) = i \frac{1}{2} \ln(1+2z),$$

что и требовалось доказать. Одновременно получено следующее соотношение

$$\ln(1+z(1+ji)) = \frac{1}{2}(1+ji) \ln(1+2z)$$

Пример.

$$\sin v = \sum_0^{\infty} \frac{v^{2n+1}}{(2n+1)!} (-1)^n, \text{ ряд сходится во всем пространстве } Y. \text{ Ис-}$$

следуем сходимость ряда в подпространстве делителей нуля. Заменим $v = z(1 + ji)$ в левой и правой частях равенства

$$\sin(z + zji) = \sin z \cos jiz + \cos z \sin jiz = \sin z \cos z + \cos z \sin jiz,$$

так как функция $\cos z$ есть четная функция и $\cos jiz = \cos z$. Первая комплексная часть равна

$$\operatorname{Re} \sin(z + jiz) = \sin z \cos z. \text{ Произведем замену}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \text{ получим}$$

$$\operatorname{Re} \sin(z + zji) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{2iz} - e^{-2iz}}{4i}$$

Разлагая в ряд экспоненциальные функции получим

$$\operatorname{Re} \sin(z + jiz) = z - \frac{4}{3!} z^3 + \frac{8}{5!} z^5 - \frac{16}{7!} z^7 + \dots = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

радиус сходимости этого ряда равен

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} (2n+2)!}{2^{2n+1} (2n+1)!} = n+1 = \infty. \text{ Область сходимости по изоли-}$$

рованному направлению равна бесконечности.

Пример. Ряд $\frac{1}{1+v} = 1 - v + v^2 - v^3 + \dots + (-1)^n v^n = \sum_0^{\infty} (-1)^n v^n$ имеет ра-

диус сходимости сферы $R=1$. По изолированному направлению ряд запишется в виде

$$\frac{1}{1+v(1 \pm ji)} = 1 + (1 \pm ji) \sum_1^{\infty} (-1)^n v^n 2^{n-1}, \text{ радиус сходимости этого ряда ра-}$$

$$\text{вен } R_d = \frac{1}{2}.$$

1.4.2. Ряд Лорана.

$$\text{Ряд вида } \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_n (v-a)^n, \text{ } a - \text{ фиксированная точка пространства, вклю-}$$

чая точки изолированного направления, C_n - коэффициенты – пространственные комплексные числа в том числе и из пространства делителей нуля,

Называется рядом Лорана.

Ряд Лорана есть обобщение ряда Тейлора на отрицательные степени разложения функции в ряд. Ряд Тейлора входит в ряд Лорана как составная

часть, к разложению функции по положительным степеням $\sum_{n=0}^{n=+\infty} C_n (v-a)^n,$

добавляется разложение по отрицательным степеням

$\sum_{n=-1}^{-\infty} C_n (v-a)^n$. Если ряды сходятся, то сходится и ряд Лорана. Область сходимости ряда по положительным степеням разложения функции в ряд есть сфера радиуса сходимости $\|(v-a)\| \leq R$. В области этой сферы лежит и область сходимости ряда по изолированному направлению делителей нуля. Если $R=0$, то ряд сходится только в точке a , если $R \rightarrow \infty$, то ряд сходится во всем пространстве Y .

Ряд по отрицательным степеням разложения функции сходится в сфере сходимости $\|(v-a)\| > r$. Если $r < R$, то ряд сходится в области заключенной между двумя концентрическими сферами $r < \|(v-a)\| \leq R$. На эту область накладывается область сходимости рядов по изолированному направлению. Сферы в пространстве это прежде всего поверхности S_r, S_R , натянутые без точек самопересечения на пространственные кривые γ_r, γ_R , эквивалентные кривым типа C_3 . В области G , заключенной между двумя этими сферами, необходимо рассматривать область сходимости ряда по изолированному направлению, для точек $v_d = v(1 \pm ji)$.

Для точек, лежащих вне этих областей будет расходиться один из рядов, а следовательно будет расходиться и общая сумма. Критические точки в пространстве Y в конечном счете определяются из общего условия разложения функции на линейные или квадратные многочлены. Согласно этим условиям в пространстве имеются два вида критических точек, таких что подстановка одного из вида критических точек в другой переводит произведение линейных множителей в произведение делителей нуля. В связи с этим два вида критических точек в полном пространстве Y , однозначно определяют область сходимости ряда Лорана и нет необходимости дополнительного исследования областей делителей нуля. Стремление к критической точке по изолированному направлению по определенному закону, приводит к критической точки другого вида. Пространственная точка включает в себя все варианты разложения функции на линейные и квадратные множители. Поэтому в пространстве справедлива теорема Абеля и Вейерштрасса.

Если имеется область $r \leq r_1 \leq \|(v-a)\| \leq R_1 < R$, учитывающая все виды критических точек, то в ней ряд сходится равномерно и сумма его $f(v)$ регулярна в области сходимости. Справедливо и обратное утверждение. Таким образом, подошли к утверждению теоремы.

Функция $f(v)$, регулярная в области $G : r < \|(v-a)\| < R$, представляется в этой области сходящимся рядом Лорана

$$f(v) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_n (v-a)^n, \quad (1.60.)$$

$$\text{где } C_n = \frac{1}{2\pi^2 ji} \oint_{\|(\xi-a)\| < R_0} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+2}} d\sigma,$$

где $r < R_0 < R, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ $d\sigma$ -элемент пространственной поверхности

Для определения коэффициентов ряда умножим правую и левую часть ряда на

$$(v-a)^{-n-2} \text{ получим соотношение } \frac{f(v)}{(v-a)^{n+2}} = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_k (v-a)^{k-n-2}, \text{ ко-}$$

торое проинтегрируем по поверхности S_{R_0} . Для любого целого n выполняется соотношение

$$\oint_S (v-a)^n d\sigma_s = \begin{cases} 0, & n \neq -2; \\ 2\pi^2 ji, & n = -2. \end{cases} \text{ Откуда получаем выражение}$$

для коэффициентов ряда Лорана в виде.

Пример.

$$f(v) = \frac{1}{v^2 - 2v - 3}, \text{ знаменатель имеет четыре критические точки :}$$

$$v_1 = 3, v_2 = -1$$

$v_3 = 1 + 2ji, v_4 = 1 - 2ji$, поэтому функция может быть разложена по двум равноценным вариантам:

$$f(v) = \frac{1}{v^2 - 2v - 3} = \frac{1}{(v-3)(v+1)} = \frac{1}{4(v-3)} - \frac{1}{4(v+1)}$$

$$f(v) = \frac{1}{v^2 - 2v - 3} = \frac{1}{(v-1-2ji)(v-1+2ji)} =$$

$$= \frac{1}{4ji(v-1-2ji)} - \frac{1}{4ji(v-1+2ji)}$$

Каждую из полученных дробей обозначим по порядку $g_1(v), g_2(v), g_3(v), g_4(v)$, разложим в ряд Тейлора.

$$g_1(v) = \frac{1}{4(v-3)} = -\frac{1}{12} \left(\frac{1}{1 - \frac{v}{3}} \right) =$$

$$= -\frac{1}{12} \left(1 + \frac{v^1}{3} + \frac{v^2}{3^2} + \frac{v^3}{3^3} + \frac{v^4}{3^4} + \dots + \frac{v^n}{3^n} \right), \text{ ряд сходится в границах сферы}$$

$R \leq 3$.

$$g_2(v) = -\frac{1}{4(v+1)} = -\frac{1}{4} (1 - v + v^2 - v^3 + v^4 - \dots +), \text{ ряд схо-}$$

дится в границах сферы $R \leq 1$. Суммируя коэффициенты при одинаковых степенях получим ряд для исходной функции

$$f(v) = g_1(v) + g_2(v) = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \frac{1}{3} v - \frac{7}{3} \frac{1}{3^2} v^2 + \frac{20}{3 \cdot 3^3} v^3 - \dots$$

Ряд сходится в границах сферы $R \leq 1$.

$$g_3(v) = \frac{1}{4ji(v-1)} = -\frac{1}{4ji(1+2ji-v)} = -\frac{1}{4ji} \frac{1}{(1+2ji)} \frac{1}{(1 - \frac{v}{1+2ji})} =$$

$$= -\frac{1}{4ji} \frac{1}{1+2ji} \left\{ 1 + \frac{v}{1+2ji} + \frac{v^2}{(1+2ji)^2} + \frac{v^3}{(1+2ji)^3} + \dots \right.$$

ряд сходится для точек сферы $R \leq \|(1+2ji)\| = \sqrt{3}$.

$$g_4(v) = -\frac{1}{4ji} \frac{1}{(v-1+2ji)} = -\frac{1}{4ji} \frac{1}{(-1+2ji+v)} =$$

$$= -\frac{1}{4ji} \frac{1}{(-1+2ji)} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{v}{-1+2ji}} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{4ji} \frac{1}{(-1+2ji)} \left(1 - \frac{v}{-1+2ji} + \frac{v^2}{(-1+2ji)^2} - \frac{v^3}{(-1+2ji)^3} + \dots \right)$$

ряд сходится для точек сферы $R \leq \|(-1+2ji)\| = \sqrt{3}$.

Суммируем коэффициенты при одинаковых степенях v

$$C_0 = -\left(\frac{1}{4ji} \frac{1}{(1+2ji)} + \frac{1}{4ji} \frac{1}{(-1+2ji)} \right) = -\frac{-1+2ji+1+2ji}{4ji(4-1)} = -\frac{1}{3}$$

$$C_1 = -\frac{1}{4ji} \frac{1}{1+2ji} \frac{1}{1+2ji} + \frac{1}{4ji} \frac{1}{-1+2ji} \frac{1}{-1+2ji} =$$

$$= \frac{-(1+2ji)^2 + (-1+2ji)^2}{4ji3 \cdot 3} =$$

$$= \frac{-1+4ji-4+1+4ji+4}{4ji3^2} = \frac{2}{3} \frac{1}{3}$$

и так далее

Суммируя ряды $g_3(v), g_4(v)$ получаем тейлоровское разложение функции $f(v)$ по второму варианту разложения функции в пространстве на дроби. В силу совпадения коэффициентов при одинаковых степенях v разложение совпадает с разложением по первому варианту. Разложение в пространстве функции в ряд Тейлора является единственным разложением.

Произведем разложение исходной функции по отрицательным степеням.

$$g_1(v) = \frac{1}{4(v-3)} = \frac{1}{4} \frac{1}{v} \frac{1}{(1-\frac{3}{v})} = \frac{1}{4v} \left(1 + \frac{3}{v} + \frac{3^2}{v^2} + \frac{3^3}{v^3} + \dots \right)$$

ряд сходится для всех $R \geq 3$.

$$g_2(v) = -\frac{1}{4} \frac{1}{1+v} = -\frac{1}{4v} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{v}} \right) = -\frac{1}{4v} \left(1 - \frac{1}{v} + \frac{1}{v^2} - \frac{1}{v^3} + \dots \right)$$

ряд сходится для всех $R \geq 1$.

Складывая коэффициенты при одинаковых степенях v , получим

$$C_0 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

$$C_1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

$$C_2 = \frac{3^2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$C_3 = \frac{3^3}{4} + \frac{1}{4} = 7$$

Таким образом, функция разложена в ряд по отрицательным степеням

$$f(v) = \frac{1}{v^2} + \frac{2}{v^3} + \frac{7}{v^4} + \dots \text{ ряд сходится для всех } \|v\| \geq 3. \text{ Далее произведем}$$

разложение функции по второму варианту

$$g_3(v) = \frac{1}{4ji(v-1-2ji)} = \frac{1}{4jiv} \frac{1}{\left(1 - \frac{1+2ji}{v}\right)} =$$

$$= \frac{1}{4ji} \left(1 + \frac{1+2ji}{v} + \frac{(1+2ji)^2}{v^2} + \frac{(1+2ji)^3}{v^3} + \dots \right)$$

$$g_4(v) = -\frac{1}{4jiv} \frac{1}{1 + \frac{-1+2ji}{v}} =$$

$$= -\frac{1}{4jiv} \left(1 - \frac{-1+2ji}{v} + \frac{(-1+2ji)^2}{v^2} - \frac{(-1+2ji)^3}{v^3} + \dots \right)$$

ряды сходятся для всех точек сферы $\|v\| \geq \sqrt{3}$. Суммируя коэффициенты при одинаковых степенях v ,

$$C_0 = \frac{1}{4ji} - \frac{1}{4ji} = 0$$

$$C_1 = \frac{1}{4ji} (1+2ji - 1+2ji) = 1$$

$$C_2 = \frac{1}{4ji} ((1+2ji)^2 - (-1+2ji)^2) = \frac{1}{4ji} (1+4ji+4-1+4ji-4) = 2$$

Таблица коэффициентов совпадает с предыдущей. Разложение функции по отрицательным степеням в пространстве также является единственным. В этом варианте корни определенные из условия существования делителей нуля не входят в область сходимости функции при разложении, поэтому разложение должно ограничиваться первым вариантом разложения.

Рассмотрим разложение исходной функции по положительным и отрицательным степеням.

$$f(v) = -\frac{1}{12} \left(1 + \frac{v}{3} + \frac{v^2}{3^2} + \frac{v^3}{3^3} + \dots \right) - \frac{1}{4v} \left(1 - \frac{1}{v} + \frac{1}{v^2} - \frac{1}{v^3} + \dots \right)$$

Полученный ряд Лорана сходится в сферическом кольце $1 < \|v\| < 3$. Рассмотрим разложение по второму варианту.

$$f(v) = -\frac{1}{4ji} \frac{1}{1+2ji} \left\{ 1 + \frac{v}{1+2ji} + \frac{v^2}{(1+2ji)^2} + \frac{v^3}{(1+2ji)^3} + \dots \right. \\ \left. - \frac{1}{4jiv} \left(1 - \frac{-1+2ji}{v} + \frac{(-1+2ji)^2}{v^2} - \frac{(-1+2ji)^3}{v^3} + \dots \right) \right\}$$

Ряд сходится на сфере радиуса $\|v\| = \sqrt{3}$. Сферическое кольцо в котором сходится ряд Лорана для этого разложения сжалось до поверхности сферы. В этом случае корни многочлена $v = -1, v = 3$ перестают быть изолированными точками для функции.

Проведем обобщение результатов примера. Знаменатель функции $f(v)$ представляет квадратный трехчлен, имеющий четыре корня, которые для функции являются критическими

Точками. Для определения областей регулярности функции целесообразно дробь разложить на простейшие дроби.

$$f(v) = \frac{1}{v^2 - 2v - 3} = \frac{1}{8(v-3)} - \frac{1}{8(v+1)} + \frac{1}{8ji(v-1-2ji)} - \frac{1}{8ji(v-1+2ji)}.$$

Введем обозначения, обозначив последовательно каждую из дробей по порядку $g_1(v), g_2(v), g_3(v), g_4(v)$.

Разложение по положительным степеням дробей $g_1(v), g_2(v)$ в ряд Тейлора возможно для областей с радиусом сходимости соответственно $r \leq 3, r \leq 1$. Ряд Тейлора для суммы функций

$$g_1(v) - g_2(v) \text{ имеет радиус сходимости } r \leq 1.$$

Сумма функций $g_3(v) - g_4(v)$ дает тот же ряд Тейлора с радиусом сходимости $r \leq \sqrt{3}$, а так как $\sqrt{3} > 1$, то ряд Тейлора функции $f(v)$ сходится в области сферы радиуса $r \leq 1$.

Разложение суммы функций $g_1(v) - g_2(v)$ по отрицательным степеням v дает ряд с радиусом сходимости $r \geq 3$.

Разложение суммы функций $g_3(v) - g_4(v)$ по отрицательным степеням v дает радиус сходимости $r \geq \sqrt{3}$.

Если раскладывать функцию по положительным и отрицательным степеням v , используя различные варианты разложения дробей, то область сходимости ряда будет изменяться.

Например, разложение функции по схеме

$$f(v) = g_1^+(v) - g_2^-(v) + g_3^+(v) - g_4^-(v), \text{ где знак } \pm \text{ определяет разложение по положительным или отрицательным степеням, дает ряд, имеющий область сходимости поверхность сферы } r = \sqrt{3}.$$

Для ряда $f(v) = g_1^+(v) - g_2^-(v) + g_3^+(v) - g_4^-(v)$ область сходимости определяется соотношением $1 \leq \|v\| \leq \sqrt{3}$.

Однако нельзя использовать разложение из одного эквивалентного варианта с разложением из другого эквивалентного разложения.

Разложение дроби на простейшие, в знаменателе которой стоит квадратный многочлен, существенным образом зависит от области определения дроби как функции в пространстве и способа разложения этой дроби в ряды. Возможны варианты, при которых разложение по одному варианту не допускает разложение по другому. Если область определения ограничена только верхним или только нижним полупространством, то разложение на условия существования делителей нуля недопустимо, так как исключаются условия для определения критических точек.

Способ и варианты разложения тесно связаны с областями сходимости ряда и критическими точками функции.

Иными словами, если критические точки эквивалентных разложений в пространстве не входят в область сходимости ряда то это разложение не действительно.

Пример. Рассмотрим различные варианты разложения функции $f(v) = \frac{1}{(v-1)(v+2)}$ в областях пространства Y . Функция регулярна в области $G_1: \|v\| < 1, G_2: 1 < \|v\| < 2, G_3: \|v\| > 2$.

Найдем разложение функции в ряд Лорана в этих областях. Знаменатель дроби, которая представляет функцию имеет четыре корня в пространстве, которые и диктуют распределение в пространстве областей регулярности функции. Этими корнями являются:

$v_1 = +1, v_2 = -2, v_3 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}ji, v_4 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}ji$. Представим функцию в виде суммы простых дробей:

$$f(v) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} \frac{1}{1-v} + \frac{1}{3} \frac{1}{v+2} \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3ji \left(v + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}ji \right)} - \frac{1}{3ji \left(v + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}ji \right)} \right]$$

Обозначим дроби по порядку через $g_1(v), g_2(v), g_3(v), g_4(v)$. Если $\|v\| < 1$, то

$$g_1^+(v) = \frac{1}{1-v} = \sum_{n=0}^{\infty} v^n, g_2^+(v) = \frac{1}{v+2} = \frac{1}{2 \left(1 + \frac{v}{2} \right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n v^n}{2^{n+1}}$$

Знак $\pm$ в символе функции отвечает за разложение дроби по положительным или отрицательным степеням. Сумма функций

$$g_1^+(v) + g_2^+(v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{6} \left[1 + \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \right] v^n \text{ сходится для}$$

$\|v\| < 1$. В области $\|v\| < \sqrt{2}$ разность функций

$$g_3^+(v) - g_4^+(v) =$$

$$\frac{1}{3ji\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}ji\right)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{v^n}{\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}ji\right)^n}-\frac{1}{3ji\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}ji\right)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{v^n}{\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}ji\right)^n}$$

Ряд имеет больше радиус сходимости, чем ряд предыдущей суммы: $\|v\| < \sqrt{2} > 1$. Функция разлагается в ряд по положительным степеням в пространстве и имеет радиус сходимости $\|v\| < 1$. В связи с этим необходимо выбирать как способ разложения, так и область сходимости этого разложения.

В силу равенства $(1-v)(v+2)=-\left(v+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}ji\right)\left(v+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}ji\right)$ ряды от сумм функций равны

$g_1^+(v)+g_2^+(v)=g_3^+(v)+g_4^+(v)$. Для доказательства достаточно вычислить коэффициенты C_n при равных степенях n переменной v .

При $n=0$ имеем: $C_0(g_1^++g_2^+)=\frac{1}{2}$. $C_0(g_3^+-g_4^+)=-\frac{1}{2}$. Знак минус переходит в плюс, вследствие минуса перед квадратной скобкой в исходном разложении функции на дроби.

Рассмотрим область $G:1\leq\|v\|\leq 2$. Функцию $g_1(v)$ разложим по отрицательным степеням v .

$$g_1^-(v)=\frac{1}{1-v}=-\frac{1}{v\left(1-\frac{1}{v}\right)}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{v^n}. \text{ В этом случае сумма функций}$$

$$g_1^-(v)+g_2^+=-\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{v^n}+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nv^n}{2^{n+1}}$$

представляет ряд с отрицательными и положительными степенями переменной v . Следующую сумму функций также представим в виде ряда с положительными и отрицательными степенями v .

$$g_3^-(v)+g_4^+(v)=\frac{1}{3ji}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-3ji)^n}{2^nv^n}-\frac{1}{3ji}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}v^n}{(1+3ji)^{n+1}}.$$

Ряд сходится на сфере $\|v\|=\sqrt{2}$.

Таким образом, если функция $f(v)$ в области $G:1\leq\|v\|\leq 2$ разложить в ряд Лорана по схеме входящих в нее дробей

$f(v)=g_1^-(v)+g_2^+(v)+g_3^-(v)+g_4^+(v)$, то полученный ряд Лорана будет иметь область сходимости в виде сферы $\|v\|=\sqrt{2}$. В этом случае допускается разложение только по второму эквивалентному варианту.

Если функцию разложить только по отрицательным степеням v по схеме

$$f(v)=\sum_{k=1}^{k=4}g_k^-(v)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2^{n-1}-1)}{3v^n}+$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3ji} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-3ji)^{n-1}}{2^{n-1}v^n} - \frac{1}{3ji} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+3ji)^{n-1}}{2^n v^n} \right],$$

то ряд будет сходиться для $\|v\| > 2$. Коэффициенты C_n при одинаковых степенях v первой суммы ряда совпадают с коэффициентами ряда стоящего в квадратных скобках. Например, при $n = 0$ имеем:

$$C_0(g_1^- + g_2^-) = 0, C_0(g_3^- + g_4^-) = \frac{1}{3ji} - \frac{1}{3ji} = 0.$$

Примеры показывают, что наличие изолированной оси в пространстве Y влияет на область сходимости рядов Лорана.

В соответствии с алгебраическими операциями над степенными рядами заключаем. Если даны функции $f_1(v), f_2(v)$, регулярные в окрестности точки $v = a$, представленные рядами

$$f_1(v) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (v-a)^n, f_2(v) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (v-a)^n, \text{ где первый ряд сходится в}$$

сфере $\|v-a\| \geq r_1$, а ряд второй в сфере $\|v-a\| \geq r_2$, причем $r_2 \geq r_1$, тогда имеют место разложения:

$$f(v) = f_1(v) \pm f_2(v) = \sum_{n=0}^{\infty} (C_n \pm d_n) (v-a)^n,$$

$$f(v) = f_1(v) \cdot f_2(v) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (C_n d_{n-k}) (v-a)^n \right]. \text{ Ряды сходятся в сфере}$$

$$\|v-a\| \geq r_2.$$

1.5. Изолированные особые точки в пространстве.

В пространстве Y точка v_0 называется изолированной особой точкой функции $f(v)$, если существует окрестность $0 < \sqrt{0} < \|(v-v_0)\| < \delta$ этой точки, в которой $f(v)$ аналитична, кроме самой точки $v = v_0$. Окрестность из круга в плоскости Z превращается в δ сферу. Если существует конечный предел функции $f(v)$ в точке v_0 , то точка называется устранимой.

Вопрос об определении и классификации изолированных особых точек функции в пространстве оставляет без изменения теоремы, так как речь идет только о способе отыскания этих особых точек. Точка v_0 называется полюсом функции $f(v)$, если $\lim_{v \rightarrow v_0} f(v) = \infty$. Для изолированного направления $v(1 \pm ji)$ существует бесконечный делитель. Если

$$\lim_{v(1 \pm ji) \rightarrow v_0(1 \pm ji)} f(v) = \infty = \sqrt{\infty} e^{jarktg i} \sqrt{\infty} e^{-jarktg i}. \text{ Для того, чтобы}$$

точка v_0 была полюсом функции $f(v)$ необходимо и достаточно, чтобы эта

$$\text{точка была нулем для функции } \varphi(v) = \frac{1}{f(v)}.$$

Точка нуль в пространстве определяется еще одним условием $0 = v(1+ji)(1-jj)$, поэтому для изолирован-

ного направления функция $\varphi(v)$ должна представлять произведение делителей нуля. Бесконечность в пространстве представляется также как произведение двух бесконечных делителей $\infty = \sqrt{\infty} e^{j \arg t g i} \sqrt{\infty} e^{-j \arg t g i}$.

Точка v_0 называется полюсом порядка $n, n \geq 1$ функции $f(v)$, если эта точка является нулем порядка n для функции $\varphi(v) = \frac{1}{f(v)}$. При $n=1$ полюс называется простым.

Если функция имеет порядок нуля равный n , то она представима в виде

$$f(v) = \frac{\varphi(v)}{(v - v_0)^n},$$
 где функция $\varphi(v)$ аналитична в точке v_0 и $\varphi(v_0) \neq 0$.

Дробная функция или мероморфная не имеют других особенностей, кроме полюсов. Примером мероморфных функций остаются все целые функции и дробно-рациональные, тригонометрические функции и др. Алгебраическая комбинация мероморфных функций сумма, разность, произведение и частное двух мероморфных функций снова являются функцией мероморфной.

Мероморфная функция имеет конечное число полюсов. Разложение мероморфной функции в ряд имеет следующий вид

$$f(v) = \frac{C_{-k}}{(v - v_0)^k} + \dots + \frac{C_{-1}}{(v - v_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (v - v_0)^n.$$

Наибольший из показателей степеней у разностей $v - v_0$, стоящих в знаменателе членов главной части ряда Лорана совпадает с порядком полюса функции.

Если функция имеет бесконечное число членов главной части Лорановского разложения в окрестности точки, то эта точка считается устранимой особой точкой.

Существенно особой точкой считается точка, в которой функция не имеет предела ни конечного ни бесконечного.

Неравенство Коши.

Неравенство Коши остается в силе и в пространстве Y . Обозначим через M максимум функции

$f(v)$ в области G пространства. Через R обозначим расстояние точки v до границы области. Тогда поверхность σ сферической области будет равна $2\pi^2 R^2$. Подставим в формулу

$$\|f^n(v)\| = \frac{n!}{2\pi^2} \left\| \oint_{\sigma} \frac{f(\xi) d\sigma}{(\xi - v)^{n+2}} \right\| \leq \frac{n! M 2\pi^2 R^2}{2\pi^2 R^{n+2}}. \quad \text{Откуда} \quad \text{получа-}$$

ем $\|f^n(v)\| \leq \frac{Mn!}{R^n}, n = 0, 1, 2, \dots$ v_0 -конкретная точка в области G . Следствием этого неравенства являются две теоремы.

Теорема. Если функция $f(v)$ аналитична во всем пространстве Y и ограничена, то она постоянна.

Доказательство: Для первой производной согласно формуле имеем

$$\|f'(v)\| \leq \frac{M}{R}.$$

По условию теоремы M –ограничено, а при увеличении R модуль может быть сколь угодно мал $\|f'(v)\| \cong 0$. Откуда следует, что во всем пространстве Y $f(v) \cong 0$. Выразим это соотношение через двойной интеграл

$$f'(v) = \frac{2!}{2\pi^2 ji} \iint_{\sigma} \frac{f(\xi) d\sigma}{(\xi - v)^3}$$

При рассмотрении двух точек : v_1, v_0 равных соответственно $v_1 = v + \hbar, v_0 = v$, где $\hbar$ -малое, подынтегральная функция может быть представлена как разность двух дробей

$$\frac{f(\xi)}{(\xi - v)^3} = \left(\frac{f(\xi)}{(\xi - v - \hbar)^2} - \frac{f(\xi)}{(\xi - v)^2} \right) \frac{1}{\hbar}, \text{ так что интеграл выражается}$$

через разность двух интегралов

$$\begin{aligned} f'(v) &= \frac{2!}{2\pi^2 ji} \iint_{\sigma} \frac{f(\xi) d\sigma}{(\xi - v)^3} = \frac{1}{\hbar} \left(\frac{2!}{2\pi^2 ji} \iint_{\sigma} \frac{f(\xi) d\sigma}{(\xi - v - \hbar)^2} - \frac{2!}{2\pi^2 ji} \iint_{\sigma} \frac{f(\xi) d\sigma}{(\xi - v)^2} \right) = \\ &= \frac{f(v + \hbar) - f(v)}{\hbar}. \end{aligned}$$

Полученное выражение отвечает формуле производной при стремлении $\hbar \rightarrow 0$, которая равна нулю, поэтому $f(v) = const$. Что и требовалось доказать.

1.6. Вычеты в пространстве. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

В пространстве имеет место две формулы вычетов: криволинейный и поверхностный. Введем определение вычетов.

Пространственным криволинейным вычетом функции $f(v)$ в точке a называется коэффициент C_{-1} ряда Лорана для функции в окрестности точки a , то есть число, которое обозначается символом $res_{v \rightarrow a} f(v)$.

$$C_{-1} = res_{v=a} f(v) = \frac{1}{4\pi i + 2\pi j} \oint_{\gamma_r \cong C_3} f(\xi) d\xi \quad (1.61.)$$

Формула следует из формулы для определения коэффициентов ряда Лорана. Под кривой γ_r понимаем кривую типа C_3 , которая натянута на сферу радиуса r с проколотым изолированным направлением радиуса δ , так что $\|(v - a)\| = r > \delta$. Формула приводит к вычислению интегралов

$$\oint_{\gamma_r} f(\xi) d\xi = (4\pi i + 2\pi j) res_{\xi \rightarrow a} f(\xi) \quad (1.62.)$$

Очевидно, что если точка a точка регулярности функции, либо устранимая особая точка, то вычет равен нулю. Если в разложении функции в ряд Лорана отсутствует с первой отрицательной степенью $n = -1$, то вычет равен 0.

Поверхностным вычетом функции $f(v)$ в точке a обозначим и назовем число

$$ress_{v=a} f(v) = \frac{1}{2\pi^2 j} \iint_{\sigma} f(\xi) d\sigma, \quad (1.63.)$$

где σ - поверхность, натянутая на кривую $\gamma_r \equiv C_3$ без точек самопересечения, радиус которой равен $\|v - a\| = r$. Из формул для коэффициентов ряда

Лорана получим $ress_{v=a} f(v) = C_{-2}$. Следовательно двойной интеграл равен

$$\iint_{\sigma} \frac{f(\xi) d\sigma}{(\xi - a)^2} = 2\pi^2 j ress_{\xi=a} f(\xi) \quad (1.64.)$$

Вычисление вычета в полюсе простого или кратного определяется видом ряда Лорана для функции. Если имеем

$$f(v) = C_{-2}(v - a)^{-2} + C_{-1}(v - a)^{-1} + \sum_{n=0}^{n=\infty} C_n(v - a)^n, \text{ откуда находим}$$

$$C_{-1} = \lim_{v \rightarrow a} ((v - a)f(v)), \quad \text{так что} \quad res_{v=a} f(v) = \lim_{v \rightarrow a} ((v - a)f(v)), \text{ а также } C_{-2} = \lim_{v \rightarrow a} ((v - a)^2 f(v)),$$

так что $ress_{v=a} f(v) = \lim_{v \rightarrow a} ((v - a)^2 f(v))$.

Если ряд Лорана имеет вид

$$f(v) = \frac{C_{-n}}{(v - a)^n} + \dots + \frac{C_{-1}}{(v - a)} + C_0 + C_1(v - a) + \dots \text{ то функция в ок-}$$

рестности точки a имеет полюс кратности n . Умножая это разложение на $(v - a)^n$, дифференцируя $n-1$ раз и затем переходя к пределу при $v \rightarrow a$ получим выражение

$$res f(a) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{v \rightarrow a} \frac{d^{n-1}}{dv^{n-1}} [(v - a)^n f(v)] \quad (1.65.)$$

По той же схеме получим

$$ress f(a) = \frac{1}{(n-2)!} \lim_{v \rightarrow a} \frac{d^{n-2}}{dv^{n-2}} [(v - a)^n f(v)] \quad (1.66.)$$

Пример. Определить вычет функции $e^{\frac{1}{v}}$ в точке $v = 0$. Функция разлагается в ряд Лорана в окрестности точки $v = 0$ в ви-

$$де $e^{\frac{1}{v}} = 1 + \frac{1}{v} + \frac{1}{2v^2} + \dots$, где $C_{-1} = 1, C_{-2} = \frac{1}{2}$$$

$$\text{Следовательно } res_{v=0} e^{\frac{1}{v}} = 1, res_{v=0} e^{\frac{1}{v}} = \frac{1}{2}. \quad \text{Откуда имеем}$$

$$\oint_{\|v\|=1} e^{\frac{1}{v}} dv = (4\pi i + 2\pi j) res_{v=0} e^{\frac{1}{v}} = 4\pi i + 2\pi j,$$

$$\oint_{\sigma} e^{\frac{1}{v}} d\sigma = 2\pi^2 j i \operatorname{ress}_{v=0} e^{\frac{1}{v}} = \pi^2 j i.$$

Пример. Пусть $f(v) = \frac{\sin v}{v^5}$. Разложение функции $\sin v$ в ряд Тейлора

дает представление функции $f(v)$ в виде $f(v) = \frac{1}{v^5} (v - \frac{v^3}{3!} + \frac{v^5}{5!} + \dots$

Откуда $C_{-1} = 0, \operatorname{res}_{v=0} \frac{\sin v}{v^5} = 0, C_{-2} = -\frac{1}{3!}, \operatorname{ress}_{v=0} \frac{\sin v}{v^5}$. Двойной интеграл

$$\oint_{\sigma} \frac{\sin v}{v^5} d\sigma = -\frac{2\pi^2 j i}{6} = -\frac{1}{3} \pi^2 j i$$

Пример. Пусть $f(v) = \frac{v}{(v-1)(v+3)}$. Функция имеет полюс первого

порядка в точке $v=1$ и полюс первого порядка в точке $v=-3$. Поэтому по формуле имеем $\operatorname{res}_{v=1} \left[\frac{v}{v+3} \right] = \frac{1}{4} = C_{-1}$. $\operatorname{res}_{v=-3} \left[\frac{v}{v-1} \right] = \frac{3}{4}$. Данная функция

в пространстве имеет еще две особые точки, которые соответствуют корням алгебраического уравнения стоящего в знаменателе. Последовательно получим $(v-1)(v+3) = 0 \Rightarrow v^2 + 2v - 3 = 0$. Откуда $v_3 = -1 + 2ji, v_4 = -1 - 2ji$. Следовательно функция представима в следующем виде

$f(v) = \frac{v}{(v - (-1 + 2ji))(v - (-1 - 2ji))}$ Особые изолированные пространственные точки позволяют вычислить еще два выче-

$$\operatorname{res}_{v=-1+2ji} f(v) = \left[\frac{v}{v - (-1 - 2ji)} \right] = \frac{-1 + 2ji}{-1 + 2ji + 1 + 2ji} = -\frac{1}{4} ji + \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{res}_{v=-1-2ji} f(v) = \left[\frac{v}{v - (-1 + 2ji)} \right] = \frac{-1 - 2ji}{-1 - 2ji + 1 - 2ji} = \frac{1}{4} ji + \frac{1}{2}.$$

Пример. Рассмотрим функцию $f(v) = \frac{v}{(v-1)^2(v+3)^2}$. Функция име-

ет особые точки $v_1 = 1$ полюс второго порядка, $v_2 = -3$, полюс второго порядка. Используя формулу (1.65) для расчета вычетов кратных полюсов будем последовательно иметь.

$$\operatorname{res}_{v=1} f(v) = \left[\frac{v}{(v+3)^2} \right]' =$$

$$\left[(v+3)^{-2} - 2v(v+3)^{-3} \right]_{v=1} = \frac{1}{16} - \frac{2}{64} = \frac{1}{32}$$

$$\operatorname{res}_{v=-3} f(v) = \left[\frac{v}{(v-1)^2} \right]'_{v=-3} =$$

$$= \left[(v-1)^{-2} - 2v(v-1)^{-3} \right]_{v=-3} = \frac{1}{16} - \frac{6}{64} = -\frac{1}{32}$$

Функция имеет также два пространственных полюса второго порядка (см. пример)

$$v_3 = -1 + 2ji, v_4 = -1 - 2ji$$

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{v=-1+2ji} f(v) &= \left[\frac{v}{(v+1+2ji)^2} \right]'_{v=-1+2ji} = \\ &= \left[(v+1+2ji)^{-2} - 2v(v+1+2ji)^{-3} \right]_{v=-1+2ji} = \\ &= \left[(-1+2ji+1+2ji)^{-2} - 2(-1+2ji)(-1+2ji+1+2ji)^{-3} \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{16} - \frac{2(-1+2ji)}{64ji} = \frac{4ji+2-4ji}{64ji} = \frac{1}{32}ji$$

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{v=-1-2ji} f(v) &= \left[v(v+1-2ji)^{-2} \right]_{v=-1-2ji} = \\ &= \left[(v+1-2ji)^{-2} - 2v(v+1-2ji)^{-3} \right]_{v=-1-2ji} = \\ &= \left[(-1-2ji+1-2ji)^{-2} - 2(-1-2ji)(-1-2ji+1-2ji)^{-3} \right] = \\ &= \frac{1}{16} - \frac{2+4ji}{64ji} = \frac{4ji-2-4ji}{64ji} = -\frac{1}{32}ji. \end{aligned}$$

По формуле (1.63) вычислим пространственные вычеты

$$\operatorname{ress}_{v=-1+2ji} f(v) = \left[\frac{v}{(v+1+2ji)^2} \right]_{v=-1+2ji} =$$

$$= \frac{-1+2ji}{(-1+2ji-1+2ji)^2} = \frac{-1+2ji}{16}$$

$$\operatorname{ress}_{v=-1-2ji} f(v) = \left[\frac{v}{(v+1-2ji)^2} \right]_{v=-1-2ji} =$$

$$= \frac{-1-2ji}{(-1-2ji+1-2ji)^2} = \frac{-1-2ji}{16}$$

$$\operatorname{ress}_{v=1} f(v) = \left[\frac{v}{(v+3)^2} \right]_{v=1} = \frac{1}{16}$$

$$\operatorname{ress}_{v=-3} f(v) = \left[\frac{v}{(v-1)^2} \right]_{v=-3} = \frac{-3}{16}$$

Пример. Пусть дана функция $f(v) = \frac{e^v}{(v-1)^2(v+3)^2}$. Используя

результаты предыдущего примера, вычислим пространственные вычеты.

$$\begin{aligned}
 \text{ress}_{v=1} &= \left[\frac{e^v}{(v+3)^2} \right]_{v=1} = \frac{e}{16} \\
 \text{ress}_{v=-3} &= \left[\frac{e^v}{(v-1)^2} \right]_{v=-3} = \frac{e^{-3}}{16} \\
 \text{ress}_{v=-1+2ji} &= \left[\frac{e^v}{(v+1+2ji)^2} \right]_{v=-1+2ji} = \frac{e^{-1+2ji}}{16} \\
 \text{ress}_{v=-1-2ji} &= \left[\frac{e^v}{(v+1-2ji)^2} \right]_{v=-1-2ji} = \frac{e^{-1-2ji}}{16}
 \end{aligned}$$

Пример . Пусть дана функция $f(v) = \frac{e^v}{(v-1)^2(v+3)}$. Определить пространственные вычеты. Представим функцию в следующем виде $f(v) = \frac{e^v(v+3)}{(v-1)^2(v+3)^2}$. Используя результаты предыдущего примера будем иметь

$$\text{ress}_{v=1} = \frac{e}{4}$$

В пространстве Y функция представима также в виде $f(v) = \frac{e^v(v+1+2ji)}{(v+1-2ji)^2(v+1+2ji)^2}$.

$$\text{Откуда будем иметь } \text{ress}_{v=-1+2ji} f(v) = \left[\frac{e^{-1+2ji}}{4ji} \right]$$

$$\text{ress}_{v=-1-2ji} f(v) = \frac{e^{-1-2ji}(-1-2ji+1+2ji)}{(-1-2ji+1-2ji)^2} = 0.$$

Эти выкладки показывают, что пространственный корень $v = -1 - 2ji$ является особой точкой первого порядка.

Вычет в бесконечно удаленной точке.

В соответствии с комплексной пространственной алгебре элемент v изображается в сферических координатах в виде $v = R e^{i\varphi + j\psi}$, так что бесконечная точка характеризуется бесконечным радиусом модулем $\|v\| = R = \infty$. Точка ноль определяется в пространстве как это неоднократно утверждалось в виде $\|v\| = 0$ и произведением $v = R e^{i\varphi + j\psi} (1 + ji)(1 - ji)$, где параметры R, φ, ψ действительные, а $\sqrt{\infty} \neq R \succ \sqrt{0}$.

Если положить $v = \frac{1}{\xi}$ и рассматривать функции

$$f(v) = f\left(\frac{1}{\xi}\right) = \mu(\xi),$$

тогда функция $\mu(\xi)$ будет аналитической в некоторой окрестности точки ноль, которая будет особой точкой того же типа, что и точка

$v = \infty$ для функции $f(v)$; $\lim_{v \rightarrow \infty} f(v) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \mu(\xi)$. Так что бесконечная точка есть $v = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi} = \infty$ или на изолированной оси

$$v = \frac{1}{\operatorname{Re}^{i\varphi+j\psi}} \frac{1}{\sqrt{0}e^{jarktgi}} \frac{1}{\sqrt{0}e^{-jarktgi}} = \frac{1}{0} \equiv \infty$$

Теорема. Пусть функция $f(v)$ непрерывна на границе области G поверхности σ , натянутой без точек самопересечения на пространственную кривую типа C_3 и аналитична внутри этой области всюду, кроме конечного числа особых точек $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, тогда имеем в пространстве Y следующие соотношения

$$\oint_{C_3} f(v)dv = (4\pi i + 2\pi j) \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(\alpha_k)$$

$$\oiint_{\sigma} f(v)d\sigma = 2\pi^2 ji \sum_{k=1}^n \operatorname{ress} f(\alpha_k)$$

Если точка α_k лежит внутри области G и если точка $v = \infty$ также принадлежит этой области, то

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(\alpha_k) + \operatorname{res} f(v)_{v=\infty} = 0, \quad \sum_{k=1}^n \operatorname{ress} f(\alpha_k) = -\operatorname{ress} f(v)_{v=\infty}$$

Пространственная кривая C_3 рис 20 отличается от пространственной кривой C_4 количеством оборотов по аргументу F . В первом случае имеем 2-ва полных оборота, во втором один. В связи с этим интегральная пространственная формула Коши должна записываться в виде

$$f(v) = \frac{1}{2\pi i k + 2\pi j} \oint_{C_k} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - v}, \text{ где } k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \text{ - целое число, которое}$$

определяет сколько раз и в каком направлении проходит аргумент F изолированную ось в ее проекции на плоскость Z на кривой C_k . Другими словами, сколько полных оборотов по аргументу F делает кривая C_k при одном полном обороте аргумента ψ . В этом случае пространственный вычет записывается в

виде $C_{-1} = \operatorname{res}|_{v=a} f(v) = \frac{1}{2\pi i k + 2\pi j} \oint_{\gamma_k=C_k} f(\xi)d\xi$ Интегральная формула

преобразуется к виду $\oint_{C_k} f(\xi)d\xi = [2\pi i \operatorname{res}|_{v=a} f(v)]k + 2\pi j \operatorname{res}|_{v=a(1 \pm ji)} f(v)$,

где $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ - целое число показывает количество вычетов изолированной оси в ее проекции на плоскость Z .

Разложим интеграл на сумму двух проекций: на плоскость Z и плоскость $j\sigma$.

$$\oint_{C_k} f(\xi)d\xi = \oint_{c_z} \operatorname{Re} e f(\xi)_{\xi=z} dz + \oint_{C_{j\sigma}} \operatorname{Im} m f(\xi)_{\xi=j\sigma} j d\sigma = \left[2\pi i \sum_1^n \operatorname{res}|_{v=v_n} f(v) \right] k + .$$

$$+ 2\pi j \sum_1^n \operatorname{res} \Big|_{v=v_k} f(v).$$

$$\oint_{C_z} \operatorname{Re} \operatorname{el} f(\xi)_{\xi=z} dz = \oint_{C_z} f(z) dz = k 2\pi i \sum_1^n \operatorname{res} \Big|_{z=z_n} f(z)$$

$$\oint_{C_{j\sigma}} Jmmf(\xi)_{\xi=j\sigma} j d\sigma = \oint_{C_{j\sigma}} f(j\sigma) j d\sigma = 2\pi j \sum_1^n \operatorname{res} \Big|_{j\sigma=j\sigma_k} f(j\sigma) \quad \text{Разложение по-}$$

дынтегральной функции в ряд Лорана по изолированным точкам, лежащим в плоском пространстве Z и по точкам, лежащим в плоскости $j\sigma$ совпадают. Коэффициенты C_{-1} при минус первой степени переменной ряда равны. Поэтому $\operatorname{res} f(z) = \operatorname{res} f(j\sigma)$. В рассмотренном выше примере имеем

$$\oint_{C_k} \frac{e^v dv}{v^2 - 2v - 3} = \oint_{C_z} \frac{e^z dz}{z^2 - 2z - 3} + \oint_{C_{j\sigma}} \frac{e^{j\sigma} j d\sigma}{(j\sigma)^2 - 2(j\sigma) - 3}.$$

Первый с право интеграл равен $\oint_{C_z} \frac{e^z dz}{z^2 - 2z - 3} = \frac{\pi}{2} i (e^3 - e^{-1}) k$. В при-

мере $k = 2$.

Второй интеграл преобразуем к виду

$$\oint_{C_{j\sigma}} \frac{e^{j\sigma} j d\sigma}{(j\sigma)^2 - 2(j\sigma) - 3} = \oint_{C_\xi} \frac{e^\xi d\xi}{\xi^2 - 2\xi - 3}$$

В комплексной плоскости $\xi = j\sigma$ к интегралу применима формула Коши

$$\oint_{C_\xi} \frac{e^\xi d\xi}{\xi^2 - 2\xi - 3} = \frac{\pi}{2} j (e^3 - e^{-1}) \quad \text{Знаменатель подынтегрального выра-}$$

жения имеет в плоскости изолированной оси два корня $(j\sigma)_3 = 1 + 2ji, (j\sigma)_4 = 1 - 2ji$. Сумма вычетов по этим полюсам равна сумме вычетов по полюсам-корням знаменателя $\xi = (j\sigma)_1 = 3, \xi = (j\sigma)_2 = -1$. Так, что второй интеграл есть вычет по изолированному направлению.

Если внутри области G имеется контур Γ или поверхность σ содержащими внутри себя особые точки $\alpha_k, v = \infty$, то справедливы следующие интегральные соотношения

$$\oint_{C_3} f(v) dv = (4\pi i + 2\pi j) \left(\sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(\alpha_k) + \operatorname{res} f(\infty) \right)$$

$$\oint_{\sigma} f(v) d\sigma = 2\pi^2 ji \left(\sum_{k=1}^n \operatorname{ress} f(\alpha_k) + \operatorname{ress} f(\infty) \right)$$

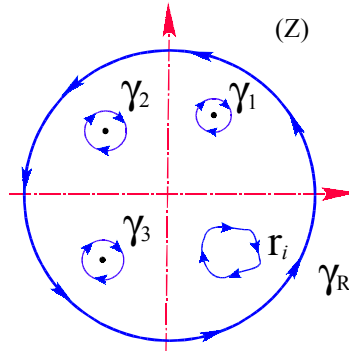


Рис. 30. Связность области в комплексной плоскости.

Вычетом функции в бесконечной точке будет число

$$resf(\infty) = \frac{1}{4\pi i + 2\pi j} \oint_{C_3^-} f(v) dv, \text{ а также}$$

$$ressf(\infty) = \frac{1}{2\pi^2 j i} \iint_{\sigma} f(v) d\sigma, \text{ где поверхность } \sigma \text{ натянута на кривую}$$

C_3^- достаточно большой сферы $\|v\| = R$, которая проходится в обратном направлении. Поэтому вычеты равны $resf(\infty) = -C_{-1}, ressf(\infty) = -C_{-2}$, где C_{-1}, C_{-2} есть коэффициенты перед v^{-1}, v^{-2} соответственно в лорановском разложении функции в окрестности бесконечно удаленной точки.

В комплексной плоскости Z теорема о вычетах соответствовала Рис. 30, где область G находится между границей Γ_R , где $R \rightarrow \infty$ и Γ , состоящей из конечного числа ограниченных кусочно-гладких кривых γ_r , где $r \rightarrow 0$.

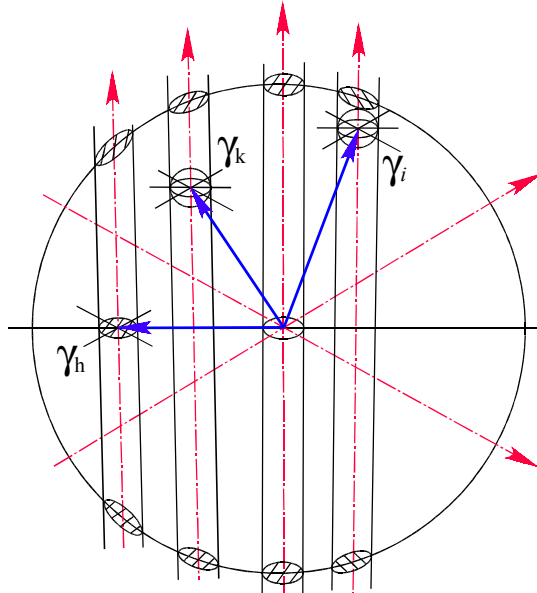


Рис. 31. Связность области в комплексном пространстве.

В комплексном пространстве Y рассматривается сфера с поверхностью, натянутой на бесконечно большой радиус $R \rightarrow \infty$. Особые точки окружены сферами бесконечно малого радиуса $r \rightarrow \sqrt{0}$. Так как через особую точку про-

ходит изолированное направление, то на границе области фиксируются проколы поверхности бесконечно малого радиуса. (Рис. 31.)

Пример. Вычислить интеграл $\iint_{\sigma} \frac{e^v d\sigma}{(v-1)^2(v+3)^2}$, где поверхность σ на-

тянута на сферу $\|v\| = 4$. Решение. В области сферы $R \leq 4$ подынтегральная функция имеет четыре особые пространственные точки, в которых она не регулярна. Эти точки определяются решением квадратного уравнения стоящего в знаменателе функции: $v_1 = 1, v_2 = -3, v_3 = -1 + 2ji, v_4 = -1 - 2ji$. Можно рассмотреть три способа вычисления интеграла. Первый способ. Разложим подынтегральную дробь на простейшие дроби.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(v-1)^2(v+3)^2} &= \frac{1}{16} \left[\frac{1}{v-1} - \frac{1}{v+3} \right]^2 = \\ &= \frac{1}{16} \left[\frac{1}{(v-1)^2} - \frac{2}{(v-1)(v+3)} + \frac{1}{(v+3)^2} \right]. \end{aligned}$$

В этом разложении рассматриваем первую и третью дробь в квадратных скобках, для которых точки

$v = 1, v = -3$ являются полюсами второго порядка. Произведем разложение дроби также для пространственных точек

$$\begin{aligned} \frac{1}{(v-1)^2(v+3)^2} &= \frac{1}{(v+1-2ji)^2(v+1+2ji)^2} = \\ &= \frac{1}{16} \left[\frac{1}{(v+1-2ji)^2} + \frac{1}{(v+1+2ji)^2} \right]. \end{aligned}$$

В этом разложении взяты дроби, для которых пространственные точки являются полюсами второго порядка. Подставляя в интеграл полученное двойное разложение будем

$$\begin{aligned} \text{иметь } \iint_{\sigma} \frac{e^v d\sigma}{(v-1)^2(v+3)^2} &= \frac{1}{32} \iint_{\sigma} \frac{e^v d\sigma}{(v-1)^2} + \frac{1}{32} \iint_{\sigma} \frac{e^v d\sigma}{(v+3)^2} + \\ &+ \frac{1}{32} \iint_{\sigma} \frac{e^v d\sigma}{(v+1-2ji)^2} + \frac{1}{32} \iint_{\sigma} \frac{e^v d\sigma}{(v+1+2ji)^2} \end{aligned}$$

К каждому из интегралов применима формула Коши. $\iint_{\sigma} = 2\pi^2 ji \frac{1}{32} [e + e^{-3} + e^{-1}(e^{2ji} + e^{-2ji})] =$

$$\begin{aligned} &= \frac{\pi^2}{16} ji [e + e^{-3} + e^{-1} 2 \cos 2i] = \\ &= \frac{\pi^2}{16} ji \left[e + e^{-3} + e^{-1} 2 \frac{e^{-2} + e^{+2}}{2} \right] = \frac{\pi^2}{8} (e + e^{-3}) ji. \end{aligned}$$

Рассмотрим второй способ вычисления интеграла. В области определения интеграла построим сферы $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ с центрами

$v_1 = 1, v_2 = -3, v_3 = -1 + 2ji, v_4 = -1 - 2ji$ достаточно малых радиусов, так чтобы поверхности $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ этих сфер не пересекались. В пяти-связной области, ограниченной поверхностью $\|v\| = 4$, и поверхностями σ_k подынтегральная функция всюду аналитична. По теореме Коши для многосвязных областей $\iint_{\sigma} f(v) d\sigma = \sum_{k=1}^n \iint_{\sigma_k} f(v) d\sigma$. Вычисление интеграла сводится к вычислению четырех интегралов, каждый из которых имеет одну особую точку.

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} \frac{e^v d\sigma}{(v-1)^2(v+3)^2} &= \frac{1}{2} \iint_{\sigma_1} \frac{e^v (v+3)^2}{(v-1)^2} d\sigma + \\ &+ \frac{1}{2} \iint_{\sigma_2} \frac{e^v (v-1)^2}{(v+3)^2} d\sigma + \frac{1}{2} \iint_{\sigma_3} \frac{e^v (v+1+2ji)^2}{(v+1-2ji)^2} d\sigma + \frac{1}{2} \iint_{\sigma_4} \frac{e^v (v+1-2ji)^2}{(v+1+2ji)^2} d\sigma = \\ &= 2\pi^2 ji \left(\frac{1}{2} \frac{e}{16} + \frac{1}{2} \frac{e^{-3}}{16} + \frac{1}{2} \frac{e^{-1+2ji}}{16} + \frac{1}{2} \frac{e^{-1-2ji}}{16} \right) = \frac{\pi^2}{8} (e + e^{-3}) ji. \end{aligned}$$

Третий способ вычисления интеграла основан на теореме о вычетах, которая вытекает из формулы для многосвязных областей

$\iint_{\sigma} f(v) d\sigma = 2\pi^2 ji \sum_{k=1}^n \text{ress} f(\alpha_k)$, где α_k – есть полюса второго порядка для функции $f(v)$.

Поэтому вычисляемый интеграл вновь равен $\iint = \frac{\pi^2}{8} (e + e^{-3}) ji$.

Если область определения интеграла содержит все пространственные точки, которые являются полюсами второго порядка подынтегральной функции, то значение интеграла можно вычислить по формуле

$\iint_{\sigma} \frac{f(v) d\sigma}{(v-\alpha)^2(v-\beta)^2} = 2\pi^2 ji [\text{ress} g_1(\alpha) + \text{ress} g_2(\beta)]$, где поверхность σ натянута на радиус сферы $\|v\| = r > \|\alpha\|, \|v\| = r > \beta$, где α, β могут быть пространственно комплексные,

$$g_1(v) = \frac{f(v)}{(v-\beta)^2}, g_2(v) = \frac{f(v)}{(v-\alpha)^2}.$$

$$\iint_{\sigma_{r=4}} \frac{e^v d\sigma}{(v-1)^2(v+3)^2} = 2\pi^2 ji [\text{ress} g_1(1) + \text{ress} g_2(-3)] = \frac{\pi^2}{8} (e + e^{-3}) ji.$$

Если поверхность натянута на сферу $\alpha \leq r \leq \beta$, то интеграл вычисляется от суммы трех вычетов

$$\begin{aligned} & \oint_{\sigma(\alpha \leq r \leq \beta)} \frac{f(v) d\sigma}{(v-\alpha)^2 (v-\beta)^2} = \\ & = 2\pi^2 ji \frac{1}{2} \left[\text{ress}g_2(\alpha) + \text{ress}g_3\left(\frac{(\alpha+\beta) + ji(\alpha-\beta)}{2}\right) \right] + \\ & + 2\pi^2 ji \frac{1}{2} \left[\text{ress}g_4\left(\frac{(\alpha+\beta) - ji(\alpha-\beta)}{2}\right) \right], \text{ где} \end{aligned}$$

$\frac{1}{2}[(\alpha+\beta) \pm ji(\alpha-\beta)]$ являются полюсами второго порядка и корнями знаменателя v_3, v_4 подынтегральной функции. Модуль $\|v_3\| = \|v_4\| = \sqrt{\alpha\beta}$ при $\beta > \alpha$, заключен в интервале $\beta > \sqrt{\alpha\beta} > \alpha$.

$$g_3(v) = \frac{f(v)}{(v-v_4)^2} \quad g_4(v) = \frac{f(v)}{(v-v_3)^2}$$

Если в рассматриваемом выше примере для вычисления интеграла взять область σ , натянутую на сферу радиуса $1 < (r=2) < 3$, то

$$\begin{aligned} & \oint_{\sigma} \frac{e^v d\sigma}{(v-1)^2 (v+3)^2} = \pi^2 ji [\text{ress}g_1(1) + \text{ress}g_3(1+2ji) + \text{ress}g_4(1-2ji)] = \\ & = \frac{\pi^2}{16} ji (e + e^{-1+2ji} + e^{-1-2ji}) = \left(\frac{\pi^2}{8} e + \frac{\pi^2}{16} e^{-3} \right) ji. \end{aligned}$$

Если область определения интеграла представляет сферическое кольцо

$$\frac{3}{2} < r < 4, \text{ то интеграл будет равен } \oint_{\sigma} \frac{e^v d\sigma}{(v-1)^2 (v+3)^2} = \left(\frac{\pi^2}{8} e^{-3} + \frac{\pi^2}{16} e \right) ji.$$

Рассмотрим вариант, когда подынтегральная функция имеет два полюса : полюс второго порядка и полюс первого порядка . Например

$$\oint_{\sigma} g(v) d\sigma = \oint_{\sigma} \frac{f(v)}{(v-\alpha)^2 (v-\beta)} d\sigma. \text{ Если поверхность } \sigma \text{ натянута на радиус}$$

сферы $\|v\| = r > \alpha, r > \beta$, то интеграл можно вычислить с помощью вычетов

$$\oint_{\sigma} g(v) d\sigma = \oint_{\sigma} \frac{f(v)}{(v-\alpha)^2 (v-\beta)} d\sigma = 2\pi^2 ji \text{ress}g(\alpha) = 2\pi^2 ji \frac{f(\alpha)}{(\alpha-\beta)}.$$

Однако в пространстве Y этот результат не очевиден и требует доказательств. Сведем вычисления к выше разобранным схеме.

$$\begin{aligned} & \oint_{\sigma} g(v) d\sigma = \oint_{\sigma} \frac{f(v)(v-\beta)}{(v-\alpha)^2 (v-\beta)^2} = 2\pi^2 ji [\text{ress}g_1(\alpha) + \text{ress}g_2(\beta)] = \\ & = 2\pi^2 ji \frac{f(\alpha)(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)} + 2\pi^2 ji \frac{f(\beta)(\beta-\beta)}{(\beta-\alpha)^2} = 2\pi^2 ji \frac{f(\alpha)}{(\alpha-\beta)}. \end{aligned}$$

Если область определения интеграла представляет сферическое кольцо $\beta < r < \alpha$, то

$$\begin{aligned} \oint_{\sigma} g(v) d\sigma &= \oint_{\sigma} \frac{f(v)(v - \beta)}{(v - \alpha)^2 (v - \beta)^2} d\sigma = \\ &= 2\pi^2 j \operatorname{ress}_g(\beta) = 2\pi^2 j i \frac{f(\beta)(\beta - \beta)}{(\beta - \alpha)^2} = 0. \end{aligned}$$

Результат очевиден, так как β есть полюс первого порядка.

Пример Вычислить интеграл $\iint_{\sigma} \frac{e^v d\sigma}{(v - 1)^2 (v + 3)}$, где поверхность

σ есть сферическая поверхность радиуса $\|v\| = r = 2$. $\iint_{\sigma} = 2\pi^2 j i \frac{e}{4} = \pi^2 \frac{e}{2} j i$.

Интегралы

вида

$\oint_{\sigma} \mu(\cos \varphi \cos \psi, \cos \varphi \sin \psi, \sin \varphi \cos \psi, \sin \varphi \sin \psi) d\varphi d\psi$, где поверхность

σ натянута на сферу радиуса $\|v\| = 1$, так что переменные φ, ψ изменяются со-

ответственно в пределах $0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$. Для сокращения записей

введем

обозначения

$\alpha = \cos \varphi \cos \psi, \beta = \sin \varphi \sin \psi, \zeta = \sin \varphi \cos \psi, \eta = \cos \varphi \sin \psi$. Так, что

интеграл перейдет в интеграл $\oint_{\sigma} \mu(\alpha, \beta, \zeta, \eta) d\varphi d\psi$.

На поверхности сферы имеем $v = e^{i\varphi + j\psi}, \bar{v} = e^{-i\varphi - j\psi}$ и введенные переменные могут быть записаны через одну переменную v в комплексном ви-

де $i\zeta + j\eta = \frac{1}{2} \left(v - \frac{1}{v} \right), \alpha + j\beta = \frac{1}{2} \left(v + \frac{1}{v} \right)$. Элемент площади $d\sigma$ выра-

зится как произведение $dv_{\varphi} dv_{\psi}$

$$d\sigma = dv_{\varphi} dv_{\psi} = i j e^{2i\varphi + 2j\psi} d\varphi d\psi, \quad \text{откуда} \quad \text{получаем}$$

$d\varphi d\psi = j i d\sigma e^{-2i\varphi - 2j\psi}$ и в силу $\|v\| = 1$ будем иметь $d\varphi d\psi = j i \frac{d\sigma}{v^2}$. Исход-

ный интеграл сводится к вычислению двойного интеграла по поверхности

$JJ = \oint_{\sigma, \|v\|=1} \mu_1(v) d\sigma$, где $\mu_1 = \frac{1}{v^2} \mu \left(\frac{1}{2} \left(v - \frac{1}{v} \right), \frac{1}{2} \left(v + \frac{1}{v} \right) \right)$ - есть рациональная

функция от v . Тогда по теореме о вычетах

$$JJ = 2\pi^2 j i \sum_k^n \operatorname{ress}_{v=v_k} \mu_1(v), \quad \text{где} \quad v_1, v_2, \dots, v_k - \text{все полюсы рациио-}$$

нальной функции $\mu_1(v)$, лежащие в сфере $\|v\| = 1$.

Пример

Вычислить

интеграл

$$JJ = \oint_{\|v\|=1} \frac{d\varphi d\psi}{[a + 2(\cos \varphi \cos \psi + j i \sin \varphi \sin \psi)]^2}$$

Преобразуем

знаменатель.

$$2(\cos \varphi \cos \psi + ji \sin \varphi \sin \psi) = e^{i\varphi + j\psi} + e^{-i\varphi - j\psi} = \frac{1}{v} + v \quad d\varphi d\psi = ji \frac{d\sigma}{v^2}.$$

Подставляя полученные выражения в исходный интеграл, будем иметь

$$\begin{aligned} JJ &= \oint_{\sigma} \frac{jid\sigma}{v^2 \left[a + \left(v + \frac{1}{v} \right) \right]^2} = \\ &= \oint_{\sigma} \frac{jid\sigma v^2}{(av + v^2 + 1)^2 v^2} = \oint_{\sigma} \frac{jid\sigma}{(av + v^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

Знаменатель имеет корни $v_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}, v_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}$.

Первый корень при $a > 2$ является особой точкой подынтегральной функции – полюсом второго порядка.

Знаменатель имеет два пространственных корня

$$v_{3,4} = \frac{-a + ji\sqrt{a^2 - 4}}{2}. \text{ Пространственные корни при } a > 2 \text{ имеют модуль}$$

$\|v_{3,4}\| > 1$ и не являются особыми точками подынтегральной функцией. Если

$$\begin{aligned} \text{принять } a > 2, a = 2 + \varepsilon, \text{ то } v_1 &= \frac{-(2 + \varepsilon) + \sqrt{4 + 2\varepsilon + \varepsilon^2 - 4}}{2} = \\ &= \frac{-2 - \varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 2\varepsilon}}{2} = \frac{-2 - \varepsilon + \varepsilon + \delta}{2} = \frac{-2 + \delta}{2} < 1, \end{aligned}$$

где $1 > \delta > 0$.

При тех же условиях

$$\|v_{3,4}\| = \frac{1}{2} \sqrt{(2 + \varepsilon)^2 - 2\varepsilon - \varepsilon^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 4\varepsilon + \varepsilon^2 - 2\varepsilon - \varepsilon^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 2\varepsilon} > 1.$$

Поэтому согласно теореме о вычетах имеем

$$\text{ressf}(v)_{v=v_1} = \left[\frac{1}{(v - v_2)^2} \right]_{v=v_1} = \frac{1}{a^2 - 4}. \text{ Окончательно интеграл равен}$$

$$JJ = 2\pi^2 ji \frac{1}{a^2 - 4}$$

Подынтегральную функцию преобразуем на сумму первых комплексных функций. Для этого обозначим $\cos \varphi \cos \psi = \alpha, \sin \varphi \sin \psi = \beta$ и подставим в подынтегральную функцию

$$f(v) = \frac{1}{[(a + 2\alpha) + 2ji\beta]^2} = \frac{[(a + 2\alpha) - 2ji\beta]^2}{[(a + 2\alpha)^2 - 4\beta^2]^2}. \text{ Следовательно пер-}$$

$$\text{вая комплексная часть равна } \text{Re}elf(v) = \frac{(a + 2\alpha)^2 + 4\beta^2}{[(a + 2\alpha)^2 - 4\beta^2]^2}, \text{ вторая ком-}$$

плексная часть равна

$$Jmf(v) = \frac{-4ji\beta(a+2\alpha)}{[(a+2\alpha)^2 - 4\beta^2]^2}, \text{ В результате имеем расчет двух двой-}$$

ных интегралов

$$JJ_1 = \oint\limits_{\|v\|=1} \frac{(a+2\cos\varphi\cos\psi)^2 + 4\sin^2\varphi\sin^2\psi}{[(a+2\cos\varphi\cos\psi)^2 - 4\sin^2\varphi\sin^2\psi]^2} d\varphi d\psi = 0$$

$$JJ_2 = \oint\limits_{\|v\|=1} \frac{4\sin\varphi\sin\psi(a+2\cos\varphi\cos\psi)}{[(a+2\cos\varphi\cos\psi)^2 - 4\sin^2\varphi\sin^2\psi]^2} d\varphi d\psi = -\frac{\pi^2}{a^2 - 4}$$

1.7. Двойной интеграл.

1.7.1. Элемент площади в комплексном пространстве

В комплексной плоскости (Z), если функция $g(z)$ дифференцируема в односвязной области D и ее производная непрерывна в D, то интеграл от $g(z)$ по любой замкнутой кривой γ , лежащей в области D и охватывающей эту область равен нулю:

$$\oint_{\gamma} g(z) dz = 0$$

Это утверждение является следствием выполнения условий Коши-Римана

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial V}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi},$$

где $g(z) = U(\rho, \varphi) + iV(\rho, \varphi)$

$$z = \rho e^{i\varphi}$$

В интеграле по замкнутому контуру (γ) в соответствии с утверждениями параграфа сделаем переход к двойному интегралу, считая мнимую единицу i обычным постоянным числом, так что последовательно будем иметь

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} g(z) dz &= \oint_{\gamma} (U + iV) (d\rho e^{i\varphi} + i\rho e^{i\varphi} d\varphi) = \\ &= \oint_{\gamma} (U + iV) d\rho e^{i\varphi} + i\rho e^{i\varphi} (U + iV) d\varphi = \\ &= \iint_{\sigma} \left[\frac{\partial(U + iV)e^{i\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{\partial(U + iV)i\rho e^{i\varphi}}{\partial \rho} \right] d\varphi d\rho \end{aligned}$$

Где σ есть область в плоскости комплексного переменного в границах замкнутого контура γ .

Продолжая преобразования, под знаком двойного интеграла получим следующее выражение.

$$\iint_{\sigma} \lambda g(z) \rho d\rho d\varphi e^{i\varphi} = 0$$

$$\text{где } \lambda = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \rho} i$$

Если функция является аналитической в области исследования, то оператор от этой функции равен нулю, так как, действуя этим оператором на функцию, получаем разность равных производных в двух направлениях.

Элемент площади $d\sigma = d\sigma_z = i\rho e^{i\varphi} d\rho d\varphi$ определяет элементарную площадку с вращением по углу φ . Если угол φ изменяется в пределах $0 < \varphi < 2\pi$ то элементарная площадка будет представлять трубочку шириной $d\rho$. Определим выражение элементарной площадки в плоскости (z) как проекции элементарной пространственной площадки $d\sigma$.

В пространстве (v) элементарная площадка представлена была ранее как произведение

$$dv_{\varphi} dv_{\psi} = d\sigma,$$

где $v = R \cdot e^{i\varphi + j\psi}$.

$$\begin{aligned} d\sigma &= jIR^2 e^{2i\varphi + 2j\psi} d\varphi d\psi = jIR^2 e^{2i\varphi} \cos 2\psi d\varphi d\psi - iR^2 e^{2i\varphi} \sin 2\psi d\varphi d\psi = \\ &= jIR^2 e^{2i\varphi} (\cos^2 \psi - \sin^2 \psi) d\varphi d\psi - 2iR^2 e^{2i\varphi} \sin \psi \cos \psi d\varphi d\psi = \\ &= jIR^2 e^{2i\varphi} \cos \psi \sin \psi d\varphi d\psi - \\ &- jIR^2 e^{2i\varphi} \sin^2 \psi d\varphi d\psi - 2iR^2 e^{2i\varphi} \sin \psi \cos \psi d\varphi d\psi. \end{aligned}$$

В пространстве $R \cos \psi = \rho, R \cos \psi d\psi = d\rho$. Проекцию $d\sigma$ на плоскость Z рассматриваем как предел, к которому стремится элементарная площадка в пространстве при стремлении угла

ψ к нулю. $\lim_{\psi \rightarrow 0} d\sigma_{\psi \rightarrow 0} = d\sigma_Z$. Этот предел, совместно с проекциями радиуса R на плоскость Z

дает выражение $d\sigma_z = j\rho d\rho e^{2i\varphi} d\varphi$. В плоскости Z в пространстве Y элемент $d\sigma_z = d(\rho e^{i\varphi})_\rho d(\rho e^{i\varphi})_\varphi = ie^{2i\varphi} \rho d\rho d\varphi$.

Поэтому переходим в интегралах от пространственной поверхности к ее проекции на плоскость Z

Делается замена $d\sigma_z = -j \lim_{\psi \rightarrow 0} d\sigma_{\psi \rightarrow 0}$.

Проекция элементарной площадки dS на плоскость Z определяется как $dS_z = -j \lim_{\psi \rightarrow 0, r \rightarrow 0} dS$. Проекция элементарной площадки dS на изолированную ось, которая представляет также комплексное пространство, свернутое в трубочку, определяется условиями $dS_\sigma = \lim_{\psi \rightarrow \frac{\pi}{2}, \rho \rightarrow \sqrt{0}} dS$.

$$\begin{aligned} dS_\sigma &= jIR^2 e^{2i\varphi} (\cos^2 \psi - \sin^2 \psi) d\varphi d\psi - \\ &- 2iR^2 e^{2i\varphi} \sin \psi \cos \psi d\varphi d\psi = -j\rho d\rho e^{2i\varphi} d\varphi. \end{aligned}$$

Были введены чисто геометрические соотношения $R \sin \psi = r, R \sin \psi d\psi = dr$.

Приращение радиуса ρ в плоскости Z , при его проекции из пространства равно $\Delta\rho = R \cos \psi_1 - R \cos \psi_2$, где R, ψ_1, ψ_2 могут быть комплексными. Заменим ψ_2 .

$\psi_2 = \psi_1 + \Delta\psi$, где $\Delta\psi$ - приращение пространственного угла.

Последовательно получим

$$\begin{aligned} \Delta\rho &= R \cos \psi_1 - R \cos(\psi_1 + \Delta\psi) = \\ &= R \cos \psi_1 - R \cos \psi_1 \cos \Delta\psi + R \sin \psi_1 \sin \Delta\psi \end{aligned}$$

В этом равенстве можно перейти к ρ, r .

$\Delta\rho = \rho - \rho \cos \Delta\psi + r \sin \Delta\psi$. Разложим тригонометрические функции косинус и

синус в ряд. $\Delta\rho = \rho - \rho + \rho \frac{\Delta\psi^2}{2!} - \dots \delta_1(\Delta\psi) + r\Delta\psi - r \frac{\Delta\psi^3}{3!} + \dots \delta_2(\Delta\psi)$.

При $r \rightarrow 0$ будем иметь $\Delta\rho \cong \rho \frac{\Delta\psi^2}{2}$. Квадрат дает возможность

рассматривать приращение $\Delta\psi$ от комплекса $\Delta\psi = \Delta\sigma + id\sigma$ в соответствии с

формулой 1.41, как приращение квадрата модуля пространственного аргумента. С точностью до малого первого порядка можно положить

$$\Delta \rho \approx \rho \Delta \psi. \text{ При проектировании элемента площади на изолированную ось } \sigma \text{ рассмотрим симметричное выражение } \Delta r = R \sin(\psi + \Delta \psi) - R \sin \psi = \\ = R \sin \psi \cos \Delta \psi + R \sin \Delta \psi \cos \psi - R \sin \psi = \\ = r \cos \Delta \psi + \rho \sin \Delta \psi - r = -r \frac{\Delta \psi^2}{2} + \rho \Delta \psi - \rho \frac{\Delta \psi^3}{3!}. \text{ При } \rho \rightarrow 0 \text{ получим}$$

$$dr = -r \frac{\Delta \psi^2}{2}. \quad \text{Так, что элемент площади}$$

$$dS = R^2 e^{2i\varphi} \cos 2\psi = R^2 e^{2i\varphi} \cos^2 \psi - R^2 e^{2i\varphi} \sin^2 \psi \quad \text{в проекциях на плоскости } Z, \sigma \text{ соответственно равны. } dS_z = \rho d\varphi d\rho e^{i2\varphi}, dS_\sigma = r d\varphi dr e^{2i\varphi}.$$

Двойной интеграл в пространстве (v), определенный по формуле

$$JJ = \iiint_{\sigma} \mu(v) d\sigma \quad \text{переходит в двойной интеграл от функции } \mu(z), \text{ при}$$

стремлении второго пространственного аргумента к нулю

$$\lim_{\psi \rightarrow 0} \iiint_{\sigma} \mu(v) d\sigma_v = -j \iint_{G_z} \mu(z) d\sigma_z$$

1.7.2. Интеграл от рациональных функций.

Пусть $\mu(v) = \frac{P_n(v)}{Q_m(v)}$, где $P_n(v)$ и $Q_m(v)$ есть многочлены степени n и m соответственно

Сходимость интеграла от функции $\mu(v)$ обеспечивается соотношением степеней многочленов как $m - n \geq 3$. В соответствии с пространственной комплексной алгеброй многочлен знаменателя $Q_m(v)$ разложим на произведение квадратных трехчленов, как минимальных по степени многочленов, содержащих два вида корней: два корня в плоскости (z) два корня в пространстве (v).

При вычислении интегралов в пространстве необходимо соблюдать условия, которые обеспечивают эквивалентные разложения подынтегральной функции в области ее определения. Нахождение критических точек в пространстве зависит от области определения функции и возможности ее разложения на эквивалентные разложения. Например, если функция определена в полном пространстве, то можно не использовать эквивалентные разложения. Если функция определена только в верхнем или только в нижнем полупространстве то нет условий для эквивалентных разложений. В первом случае условия есть, но ими можно не пользоваться, во втором случае их вообще нельзя применить. Если из полного пространства вычтена плоскость Z , то критические точки определяются из условия существования делителей нуля. Возможно существование областей, в которых содержатся не все критические точки, характеризующие эквивалентные разложения.

Пример $Q_m(v) = v^2 - 2v - 3 = 0$

$$v_1 = 3$$

$$v_2 = -1$$

$$v_3 = 1 + 2ji$$

$$v_4 = 1 - 2ji$$

Корни v_1 и v_2 лежат в плоскости (z), корни v_3 и v_4 лежат в пространстве (v) рис 32.

$$v^2 - 2v - 3 = (v + 1)(v - 3) = 0$$

Многочлен разлагается на множители по двум вариантам

$$v^2 - 2v - 3 = (v + 1)(v - 3) = (v - 1 - 2ji)(v - 1 + 2ji) = 0$$

Второй вариант разложения в комплексном пространстве представим в виде

$$(v - 1 - 2ji)(v - 1 + 2ji) = \sqrt{(v - 1)^2 + 4} e^{-j \arctg \frac{2i}{v-1}} \cdot \sqrt{(v - 1)^2 + 4} e^{+j \arctg \frac{2i}{v-1}}$$

Разложение представлено произведением двух комплексных пространственных чисел. Радиусы этих чисел представлены корнем квадратным из исходного многочлена. Аргументы комплексных чисел представлены функцией $\arctg$ от одинаковых комплексных чисел. Если переменная $v=1$, то произведение состоит из двух множителей, модуль каждого из которых равен 2, а аргумент соответственно

$+\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2}$. Если переменная v равна соответственно корням многочлена $v=-1$

или $v=3$ то множители превращаются в делители нуля.

Этот пример показывает, что изолированная ось делителей нуля смещается в точку $v=1$. На изолированной оси в пространстве v находятся пространственные корни многочлена v_3 и v_4 , а также и точки v_1 и v_2 .

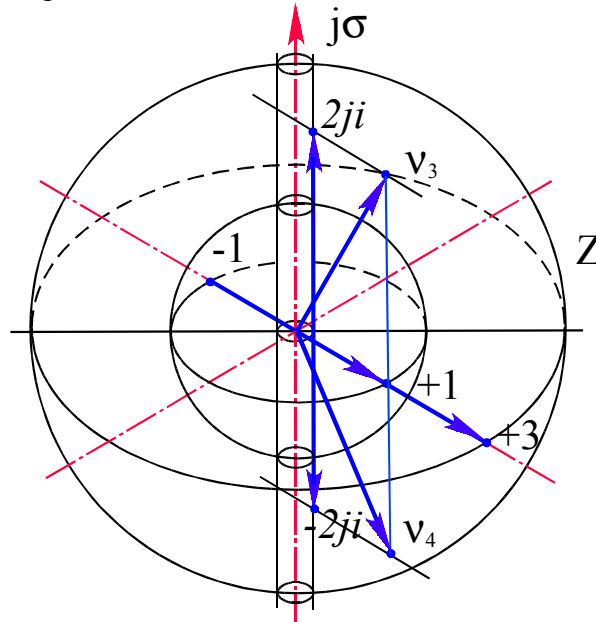


Рис. 32. Особые точки в пространстве

Пример

$$\mu(v) = \frac{v - 1}{(v^2 - 2v - 3)^2}$$

Разложим функцию $\mu(v)$ на дроби в пространстве

$$\mu(v) = \frac{v-1}{(v^2-2v-3)^2} = \frac{1}{8ji(v-1-2ji)^2} - \frac{1}{8ji(v-1+2ji)^2}$$

В пространстве нуль доставляется как произведением делителей нуля так и конкретно нулем. Поэтому при разложении по второму варианту в пространстве точки V_1 и V_2 дают нуль как произведение делителей и критические точки располагаются на изолированной оси. Это подтверждает разложение $\mu(v)$ на сумму дробей. В знаменателе этого разложения нуль есть при $v = v_3$ и $v = v_4$. При $v = v_1$ и $v = v_2$ знаменатели дробей не превращаются в нуль, поэтому рассматриваются эти точки как критические точки на изолированной оси. В этом случае имеем нуль как произведение делителей нуля.

Функция $\mu(v)$ не регулярна в пространственных точках v_3 и v_4 , которые являются пространственными корнями квадратного трехчлена в соответствии с примером.

Изолирование точек $v_3 = 1 + 2ji$ и $v_4 = 1 - 2ji$ в пространстве происходит при окружении точек сферой $\text{Re}^{i\varphi+j\psi}$, радиус которой стремится к нулю

$$\lim(v-1-2ji) = \lim_{R \rightarrow 0} \text{Re}^{i\varphi+j\psi} \Rightarrow 0$$

$$\lim(v-1+2ji) = \lim_{R \rightarrow 0} \text{Re}^{i\varphi+j\psi} \Rightarrow 0$$

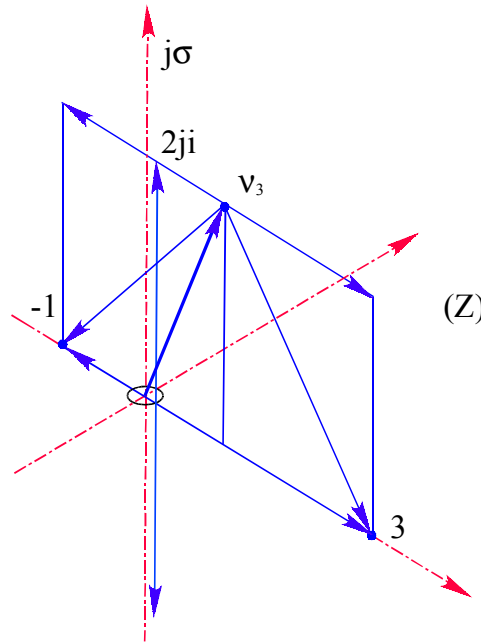


Рис. 33. Эквивалентность особых точек из плоскости Z в пространстве Y .

В пространстве в соответствии с ее геометрией любая точка может быть окружена сферой из делителей нуля

$$(v-1-2ji) = \text{Re}^{i\varphi+j\psi} (1+ji)$$

$$(v-1+2ji) = \text{Re}^{i\varphi+j\psi} (1-jj)$$

Радиус R становится коэффициентом при сфере радиуса $\sqrt{0}$, аргументы φ и ψ при этом в зависимости от знака изолированного направления $\pm \arctg i$ описывает верхнюю или нижнюю половину сферы. Сфера из точек делителей

нуля около точки v_3 , лежащей в верхней части полупространства состоит из двух полусфер. Нижняя полусфера делителей нуля определяется изоляцией точки v_2 из плоскости Z , верхняя полусфера определяется сферой делителей нуля изолированной точки v_1 , лежащей также в плоскости Z с поворотом по углу $\varphi = \pi$.

В нижнем полупространстве сфера из делителей нуля около точки v_4 образуется также из двух полусфер: верхняя полусфера образуется выделением точки v_1 , нижняя полусфера выделением точки v_2 с поворотом по углу на $\varphi = \pi$.

Если точка v_3 окружена сферой делителей нуля то при стремлении $R \Rightarrow 2, \varphi \Rightarrow 0, \psi \Rightarrow 0$ то двигаясь по изолированному направлению получим точку $v_1 = 3$.

$$v - 1 - 2ji \Rightarrow 2 - 2ji = 3$$

$$v - 1 + 2ji \Rightarrow 2 + 2ji = 3$$

Аналогично, если $R \Rightarrow 0, \varphi \Rightarrow \pi, \psi \Rightarrow 0$ то имеем:

$$v - 1 - 2ji = -2ji - 2 = -1$$

$$v - 1 + 2ji = -2 + 2ji = -1$$

Таким образом поверхность составленная из точек делителей нуля около пространственных точек, в которых функция теряет аналитичность стягивается в поверхность сферы $R = \sqrt{0}$ внутри изолированной оси и происходит пространственная изоляция точек из плоскости Z . (рис 33)

Пример

$$\mu(v) = \frac{1}{v} \text{ где } v = Re^{i\varphi + j\psi}. \text{ Вычислим интеграл } \oint_{C_3} \frac{1}{v} dv.$$

Определим $dv = i Re^{i\varphi + j\psi} d\varphi + j Re^{i\varphi + j\psi} d\psi$. Подставляя в интеграл получим

$$J = \int_0^{4\pi} id\varphi + \int_0^{2\pi} jd\psi = 4\pi i + 2\pi j. \text{ Пределы интегрирования расставлены в}$$

соответствии с элементарной кривой C_3 в пространстве.

Пример

$$\mu(v) = \frac{1}{v^2}. \text{ Вычислим интеграл } JJ = \oiint_{\sigma} \mu(v) d\sigma$$

Элементарная площадка $d\sigma = dv_{\varphi} dv_{\psi} = jiR^2 e^{2i\varphi + 2j\psi} d\varphi d\psi$. Подставляя в интеграл выражение функции и элементарной площадки получим

$$JJ = \oiint_{\sigma} \frac{1}{v^2} jiv^2 d\varphi d\psi = ji \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\psi = 2\pi^2 ji.$$

Пределы интегрирования взяты из условия, что замкнутая поверхность σ натянута без точек

Самопересечения на пространственную кривую C_3 . Однако в сферических координатах необходимо ввести систему отсчета углов φ и ψ по поверхности

сферы $\|v\| = R$, без учета поверхности изолированной оси. В этом случае интеграл JJ будет вычисляться в следующих пределах

$$JJ = ji \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\psi = 2\pi^2 ji$$

Расстановка пределов интегрирования определяется аргументом ψ , так как он в зависимости от рассматриваемого пространства может быть действительным и комплексным в соответствии с (1.42)

1.7.3. Вычисление определенных двойных интегралов с помощью вычетов.

Теоремы о вычетах позволяют сводить вычисление интегралов от комплексных пространственных функций по замкнутой поверхности к нахождению вычетов подынтегральных функций внутри этой замкнутой поверхности. Тем же способом можно вычислить двойные интегралы от действительных переменных. Для этого достаточно подобрать пространственную функцию, проекция которой на плоскость Z , соответствовала бы вычисляемому интегралу. Наличие изолированного направления в пространстве вносит свои особенности в отыскание исходной пространственной функции.

Если функция имеет изолированные точки в Z плоскости и изолированные точки в верхнем или нижнем полупространстве то возможны варианты. Изолированные точки в Z плоскости можно исключить из рассмотрения, заключив их в $\mathcal{E}$ — полусферы. В этом случае критическими точками становятся пространственные точки, определенные на основе существования делителей нуля и могут рассматриваться независимо друг от друга.

Двойной интеграл в пространстве Y представим последовательно следующим образом. Подынтегральную функцию $\mu(v)$ представим в виде суммы действительной первой и первой мнимой частью. $\mu(v) = \text{Re} \mu(v) + j \text{Im} \mu(v) = g_1(v) + jg_2(v)$.

Элементарная площадка

$$dS = jiR^2 e^{2i\varphi} \cos 2\psi d\varphi d\psi - iR^2 e^{2i\varphi} \sin 2\psi d\varphi d\psi.$$

Составим интеграл

$$\begin{aligned} \iint_{S_R} &= \iint_{S_R} [g_1(v) + jg_2(v)] (jiR^2 e^{2i\varphi} \cos 2\psi d\varphi d\psi - iR^2 e^{2i\varphi} \sin 2\psi d\varphi d\psi) = \\ &= ji \iint_{S_R} g_1(v) R^2 e^{2i\varphi} \cos 2\psi d\varphi d\psi - g_2(v) R^2 e^{2i\varphi} \sin 2\psi d\varphi d\psi - \\ &- \iint_{S_R} ig_1(v) R^2 e^{2i\varphi} \sin 2\psi d\varphi d\psi + ig_2(v) R^2 e^{2i\varphi} \cos 2\psi d\varphi d\psi. \end{aligned}$$

Учитывая преобразования, которые проводились в предыдущем разделе, по преобразованию элементарных проекционных площадок, определим проекцию этого интеграла на комплексную плоскость Z .

$$\iint_{S_R} = \lim_{\psi \rightarrow 0, r \rightarrow 0} = j \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} g_1(z) i e^{2i\varphi} \rho d\rho d\varphi + \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} g_2(z) i e^{2i\varphi} \rho d\rho d\varphi, \quad \text{где}$$

$$g_1(z) = \operatorname{Re} \ell \mu(v)_{\sigma=0, v \in Z}, g_2(z) = \operatorname{Im} \mu(v)_{\sigma=0, v=v_k(1+ji)}.$$

Интеграл имеет первые действительную и мнимую части, как результат наличия в пространстве изолированного направления. Докажем одну из лемм. Предположим, дан двойной интеграл в плоскости Z .

$$\iint_{S_Z} = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \mu(z) \rho d\rho e^{2i\varphi} d\varphi, \quad \text{который сходится и подынтегральная функция имеет}$$

конечное число особых точек в комплексной плоскости Z . Теорему о вычетах применить к двойному интегралу нельзя, поэтому сведем вычисления в пространство вычетов. Плоскость Z замкнем поверхностью S_R и рассмотрим интеграл $\iint_{S_R} \mu(\xi) d\xi$, где $\mu(\xi) = \operatorname{Re} \ell \mu(\xi) + j \operatorname{Im} \mu(\xi)$. Пусть функция

$\mu(\xi)$ регулярна в комплексном верхнем пространстве $\xi = \rho e^{i\varphi} + j \rho e^{i\tau}$, $\operatorname{Re} \ell(\xi) \geq 0$. Последнее не означает, что берется только $\xi_z = \rho e^{i\varphi}$, так как в пространстве существует изолированное направление $\xi = \operatorname{Re}^{i\varphi+j\psi}(1 \pm ji)$, необходимо взять изолированное направление в верхнем пространстве

$\operatorname{Re} \ell \xi_{(1 \pm ji)} = \operatorname{Re}^{i\varphi+j\psi}(1 + ji)$. Эта особенность диктует появление в проекции интеграла на плоскость Z первой мнимой части. Предположим, что функция имеет конечное число особых точек в верхней половине пространства.

По условию, если сходится $\iint_{S_Z}$, то сходится $\iint_{S_R} = \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{S_R} \mu(\xi) dS_{\xi} = 0$,

где S_R — поверхность верней полусферы $\|v\| = R, \operatorname{Im} v > 0$, включая и изолированное направление. Тогда по теореме Коши для многосвязных областей запишем равенство

$$\iint_{S_Z} = \pi^2 j i \sum_{k=1}^n \operatorname{ress} \mu(\xi_k)_{\operatorname{Im} \xi > 0, \xi = \xi_k} + \pi^2 j i \sum_{k=1}^n \operatorname{ress} \mu(\xi_k)_{\operatorname{Im} \xi > 0, \xi = \xi_k(1+ji)}, \quad \text{где}$$

первая сумма есть сумма вычетов особых точек, лежащих в плоскости Z , вторая сумма есть сумма вычетов функции по точкам изолированного направления, находящихся в верхнем полупространстве. Вторая сумма равна нулю, ибо имеем два эквивалентных разложения и второе эквивалентное разложение недопустимо, так как рассматривается только верхнее полупространство (нет сопряженного делителя для отыскания критических точек). Первая сумма в этом случае умножается на 2.

Доказательств. Область, охватываемая поверхностью $S_{R \rightarrow \infty}$, при бесконечном увеличении R , содержит все особые точки функции. По теореме Коши о вычетах имеем

$$\iint_S \mu(\xi) dS = \iint_{S_Z} + \iint_{S_{R_n}} \mu(\xi) dS_{R_n} =$$

$$\pi^2 ji \sum_{k=1}^n \text{ress} \mu(\xi) \Big|_{\xi=\xi_k} + \pi^2 ji \sum_{k=1}^n \text{ress} \mu(\xi) \Big|_{\xi=\xi_k(1+ji)}.$$

Двойка перед суммами исчезает, так как она учитывается при разложении подынтегральной функции на два направления. В силу условия $\lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{S_{R_n}} \mu(\xi) dS_{R_n} = 0$ и сходимости интегралов получим

$$\begin{aligned} \iint_{S_z} &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_0^{\rho} \int_0^{2\pi} j i g_1(z) e^{2i\varphi} \rho d\rho d\varphi + \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_0^{\rho} \int_0^{2\pi} i g_2(z) e^{2i\varphi} \rho d\rho d\varphi = \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} j i g_1(z) e^{2i\varphi} \rho d\rho d\varphi + \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} i g_2(z) e^{2i\varphi} \rho d\rho d\varphi \end{aligned}$$

Пример1. Вычислить интеграл по плоскости Z от пространственной функции

$$\mu(v) = \frac{e^v}{(v^2 - 2v - 3)^2}.$$

$$\iint_{S_z} \mu(\xi) dS_z$$

Рассмотрим подынтегральную функцию. В пространстве Y функция имеет четыре не регулярные точки, которые являются корнями знаменателя : $v_1 = 3, v_2 = -1, v_3 = 1 + 2ji, v_4 = 1 - 2ji$. В верхнем полупространстве $\text{Im} v \geq 0$ находятся три первых нерегулярных точек. Разложим функцию на сумму функций, для каждой из которой нерегулярной будет только одна точка. Для этого вначале представим функцию в виде

$$\mu(v) = \frac{1}{2} \frac{e^v}{(v^2 - 2v - 3)^2} + \frac{1}{2} \frac{e^v}{(v^2 - 2v - 3)^3} = \lambda_1(v) + \lambda_2(v).$$

разложим на простейшие дроби по точкам v_1, v_2 , вторую дробь по точкам v_3, v_4 . Последовательно проведем преобразования

$$\begin{aligned} \lambda_1(v) &= \frac{e^v}{2} \left[\frac{1}{(v-3)(v+1)} \right]^2 = \frac{e^v}{2} \frac{1}{16} \left[\frac{1}{(v-3)} - \frac{1}{(v-1)} \right]^2 = \\ &= \frac{e^v}{32} \left[\frac{1}{(v-3)^2} + \frac{1}{(v+1)^2} - \frac{2}{(v-3)(v+1)} \right]. \end{aligned}$$

В этом разложении нас интересуют только дроби первые две, в которых нерегулярные точки являются полюсами второго порядка. Поэтому,

$$\lambda_1(v) = \frac{e^v}{32} \left[\frac{1}{(v-3)^2} + \frac{1}{(v+1)^2} \right]$$

Аналогично вторая дробь примет вид

$$\lambda_2(v) = \frac{e^v}{32} \left[\frac{1}{(v-1-2ji)^2} + \frac{1}{(v-1+2ji)^2} \right].$$

Таким образом,

подынтегральная функция $\mu(v)$ в пространстве разлагается на сумму четырех

функций, обозначенных по порядку $\mu(v) = \sum_{k=1}^4 \mu_k(v) = \frac{e^v}{32} \sum_{k=1}^4 \frac{1}{(v - v_k)^2}$. По

теореме Коши для многосвязных областей в пространстве составим интегральное соотношение

$$\iint_{S_z} + \iint_{S_{R \rightarrow \sqrt{0}, v=-1}} + \iint_{S_{R \rightarrow \sqrt{0}, v=3}} + \iint_{S_{R \rightarrow \infty}} = 2\pi^2 j \operatorname{ress} \mu(v) \Big|_{v=1+2ji}.$$

В этом интегральном равенстве имеем одну критическую точку v_3 вне зависимости от способа ее определения. Критические точки v_1, v_2 исключены из области рассмотрения $\mathcal{E}$ — полусферами. Это как раз тот случай когда критические точки, определенные из условия существования в пространстве делителей нуля становятся обычными критическими точками независимыми друг от друга и могут быть разделены областью определения.

Рассмотрим по порядку каждый из интегралов. Подынтегральная функция первого интеграла в соответствии с леммой представляет сумму проекций действительной и мнимой первой части от функций μ_k , где $k=1,2,3$, так как рассматривается верхнее полупространство. Произведем выделение действительных и мнимых частей этих функций.

$$\mu_1(v) = \frac{e^v}{32} \frac{(z-3-j\sigma)^2}{(z-3+j\sigma)^2(z-3-j\sigma)^2} = \frac{1}{32} \frac{[e^z \cos \sigma + e^v \sin \sigma]}{[(z-3)^2 + \sigma^2]^2},$$

$$\operatorname{Re} \mu_1(v) \Big|_{\sigma=0} = \frac{e^z (z-3)^2}{32(z-3)^4} = \frac{e^z}{32(z-3)^2},$$

$$\operatorname{Im} \mu_1(v) \Big|_{\sigma=0} = 0.$$

Для функции $\mu_2(v)$ получим:

$$\operatorname{Re} \mu_2(v) \Big|_{\sigma=0} = \frac{e^v}{32(z+1)^2}, \operatorname{Im} \mu_2(v) \Big|_{\sigma=0} = 0.$$

Рассмотрим функцию

$$\mu_3(v). \mu_3(v) = \frac{(e^z \cos \sigma + j e^z \sin \sigma) [(z-1) - j(\sigma - 2i)]^2}{[(z-1)^2 + (\sigma - 2i)^2]^2} \cdot 32. \quad \text{Откуда имеем}$$

также действительную и мнимую части.

$$\operatorname{Re} \mu_3(v) \Big|_{\sigma=0} = \frac{e^z}{32} \frac{(z^2 - 2z + 5)}{(z^2 - 2z - 3)^2} = \frac{e^z}{32} \frac{1}{(z^2 - 2z - 3)} + \frac{e^z}{4} \frac{1}{(z^2 - 2z - 3)^2}.$$

$$\operatorname{Im} \mu_3(v) \Big|_{\sigma=0} = \frac{4e^z (z-1)i}{32(z^2 - 2z - 3)^2}.$$

В результате подынтегральная функция

$\mu(v)$ в проекции на плоскость Z в соответствии с формулой, выведенной в

$$(1.8.1), \text{ равна } \mu(z) = g_1(z) + j g_2(z) = \sum_{k=1}^3 \operatorname{Re} \mu_k(v) + j \sum_{k=1}^3 \operatorname{Im} \mu_k(v).$$

$$\mu(z) = \frac{e^z}{32} \left[\frac{1}{(z-3)^2} + \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{(z^2-2z-3)} + \frac{8}{(z^2-2z-3)^2} \right] +$$

$$+ j \frac{e^z}{32} \frac{4i(z-1)}{(z^2-2z-3)^2}$$

$$\mu(v) = \frac{e^z}{32} \frac{3(z^2-2z+5)}{(z^2-2z-3)^2} + j \frac{e^z}{32} \frac{4i(z-1)}{(z^2-2z-3)^2}$$

В результате имеем выражение для интеграла

$$\iint_{S_z} = j i \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} g_1(z) \rho d\rho e^{2i\varphi} d\varphi + \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} i g_2(z) \rho d\rho e^{2i\varphi} d\varphi, \quad \iint_{S_{R \rightarrow \infty}} = 0 \quad \text{на основании}$$

Леммы.

$$\text{ress} \mu(v) \Big|_{v=1+2ji} \pi^2 ji = \pi^2 ji \frac{e^{1+2ji}}{32} =$$

$$= ji \frac{\pi^2}{32} e(\cos 2i + j \sin 2i) =$$

$$= ji \frac{\pi^2}{32} e \left(\frac{e^{-2} + e^2}{2} \right) + ji \frac{\pi^2}{32} e j \frac{e^{-2} - e^2}{2i} =$$

$$= ji \frac{\pi^2}{64} (e^{-1} + e^3) - \frac{\pi^2}{64} (e^{-1} - e^3)$$

Вычислим интегралы $\iint_{S_{R \rightarrow \sqrt{0}, v=-1}}$, $\iint_{S_{R \rightarrow \sqrt{0}, v=3}}$.

Имеем

$$e^v = e^{-1} \frac{1}{(v+1)^2} + o(v), e^v = e^3 \frac{1}{(v-3)^2} + o(v).$$

Вычисляем интегралы

$$\iint_{S_{R \rightarrow 0, v=-1}} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-1}}{32(v+1)^2} ds = \frac{e^{-1}}{32} \pi^2 ji,$$

$$\iint_{S_{R \rightarrow \sqrt{0}, v=3}} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^3}{32(v-3)^2} ds = \frac{e^3}{32} \pi^2 ji.$$

Эти интегралы берутся со знаком минус, как интегралы взятые по поверхности с выпуклостью во внутрь области, ограниченной поверхностями в интегральном равенстве. Собирая результаты вычислений интегралов, получим

$$\iint_{S_z} = \frac{e^{-1}}{32} \pi^2 ji + \frac{e^3}{32} \pi^2 ji + \frac{e^{-1}}{32} \pi^2 ji + \frac{e^3}{64} \pi^2 ji - \frac{\pi^2}{64} (e^{-1} - e^3) =$$

$$= ji \left(\frac{\pi^2}{16} e^{-1} + \frac{3\pi^2}{64} e^3 \right) - \frac{\pi^2}{64} (e^{-1} - e^3)$$

Приравнявая мнимые и действительные части правой и левой части равенства, получим

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{(z^2 - 2z + 5)}{(z^2 - 2z - 3)^2} e^z \rho d\rho e^{2i\varphi} d\varphi = \frac{2}{3} \pi^2 e^{-1} + \frac{1}{2} e^3 \pi^2 = \pi^2 \left(\frac{2}{3} e^{-1} + \frac{1}{2} e^3 \right).$$

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{(z-1)}{(z^2 - 2z - 3)^2} e^z \rho d\rho e^{2i\varphi} d\varphi = \frac{\pi^2}{8} i (e^{-1} - e^3)$$

Вычисление интеграла показывает, что разложение функции на эквивалентные выражения в полном пространстве можно и не производить и ограничиться обычным разложением. Это в принципе прямое доказательство, что вычет изолированного направления влечет за собой вычет критических точек, определенных из условия существования в пространстве делителей нуля.

Пример 2. Вычислить интеграл $\iint_{S_{R=4}} \frac{e^v}{(v^2 - 2v - 3)^2} dS$. Подынтегральная

функция равна функции в рассмотренном выше примере. Поверхность S , образующая область сферы радиуса $\|v\| = 4$, охватывает все критические точки подынтегральной функции. Поэтому интеграл по теореме Коши равен сумме вычетов подынтегральной функции во всех критических точках.

$$\begin{aligned} \iint &= \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^v}{(v^2 - 2v - 3)^2} dS = \\ &= \pi^2 ji \sum_{k=1}^2 \text{ress} \mu_k(v) \Big|_{v=v_k} + \pi^2 ji \sum_{k=3}^4 \text{ress} \mu_k(v) \Big|_{v=v_k} (1 \pm ji), \end{aligned}$$

где функции μ_k , а также полюса v_k вычислены выше в примере. Раскрывая введенные обозначения, последовательно будем иметь

$$\begin{aligned} \iint &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^v}{(v^2 - 2v - 3)^2} dS + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^v}{(v^2 - 2v - 3)^2} dS = \\ &= \frac{1}{32} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^v}{(v-3)^2} dS + \frac{1}{32} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^v}{(v+1)^2} dS + \\ &+ \frac{1}{32} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^v}{(v-1-2ji)^2} dS + \frac{1}{32} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^v}{(v-1+2ji)^2} dS = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{32} 2\pi^2 ji(e^3 + e^{-1}) + \frac{1}{32} 2\pi^2 ji(e^{1+2ji} + e^{1-2ji}) = \\
 &= ji \frac{\pi^2}{16} (e^3 + e^{-1}) + ji \frac{\pi^2}{16} e(e^{2ji} + e^{-2ji}) = \\
 &= ji \frac{\pi^2}{16} (e^3 + e^{-1}) + ji \frac{\pi^2}{8} e(\cos 2i) = \\
 &= ji \frac{\pi^2}{16} (e^3 + e^{-1}) + ji \frac{\pi^2}{8} e \left(\frac{e^{-2} + e^2}{2} \right) = ji \frac{\pi^2}{8} (e^3 + e^{-1})
 \end{aligned}$$

Этот результат был бы получен ,если использовать только одно эквивалентное разложение(ограничиваясь первой суммой ,умноженной на 2)

Переменная v содержит все пространственные направления , в том числе и изолированные. В соответствии с формулами 1.40, 1.41 переменная v в сферических координатах выразится в виде $v = \text{Re}^{iF+j\sigma+jis}$. Преобразуем это выражение, с выделением изолированного направления.

$$\begin{aligned}
 v &= \text{Re}^{iF+j\sigma} (\cos is + j \sin is) = \text{Re}^{iF+j\sigma} \left(\frac{e^{-s} + e^{+s}}{2} - ji \frac{e^{-s} - e^{+s}}{2} \right) = \\
 &= \text{Re}^{iF+j\sigma-s} \frac{1-jj}{2} + \text{Re}^{iF+j\sigma+s} \frac{1+jj}{2}.
 \end{aligned}$$

Переменная представляет сумму двух взаимно противоположных изолированных направлений. В этом случае все параметры R, F, σ, s являются действительными числами. Это представление позволяет вычислить интеграл $\int_{c_3} \frac{1}{v} dv$ с других позиций. Подынтегральная

функция $\frac{1}{v}$ не регулярна в точке $v=0$, а также в точках $v=v(1+jj)(1-jj)$.

Поэтому подынтегральная функция раскладывается на сумму двух выражений $\frac{1}{v} = \frac{1}{2} \frac{1}{v} + \frac{1}{2v} \frac{1}{(1+jj)(1-jj)}$.

Знаменатель первой дроби не содержит изолированных направлений. Модуль $R = \sqrt[4]{\rho^4 + r^4 + 2\rho^2 r^2 \cos 2(\tau - \varphi)}$ в этом случае равен нулю при $\rho=0, r=0$. Модуль переменной во второй дроби не равен нулю . Разложим вторую дробь на простейшие дроби .

$$\frac{1}{2v} \frac{1}{(1+jj)(1-jj)} = \frac{1}{2v} \frac{1}{2} \frac{1}{1+jj} + \frac{1}{2v} \frac{1}{2} \frac{1}{1-jj} .$$

Выше было показано, что переменная содержит изолированные направления и может быть представлена в виде их суммы, поэтому знаменатели дробей заменим выражениями

$$v(1+jj) = \text{Re}^{iF+j\sigma+s} (1+jj), v(1-jj) = \text{Re}^{iF+j\sigma-s} (1-jj)$$

Составим интеграл

$$\begin{aligned}
 \int_{C_3} \frac{1}{v} dv &= \int_{C_3} \frac{dv}{4 \operatorname{Re}^{iF+j\sigma+s} (1+ji)} + \int_{C_3} \frac{dv}{4 \operatorname{Re}^{iF+j\sigma-s} (1-ji)} = \\
 &= \oint_{C_3} \frac{\operatorname{Re}^{iF+j\sigma+s} (1+ji)(idF + j\sigma + ds)}{\operatorname{Re}^{iF+j\sigma+s}} + \\
 &+ \oint_{C_3} \frac{\operatorname{Re}^{iF+j\sigma-s} (1-ji)(idF + jd\sigma - ds)}{\operatorname{Re}^{iF+j\sigma-s}} = \\
 &= \frac{1}{2} \oint_{C_3} (idF + jd\sigma). \text{ Параметры } F, \sigma \text{ в полярных координатах на замкнутой кривой}
 \end{aligned}$$

C_3 изменяются в пределах $0 \leq F \leq 4\pi, 0 \leq \sigma \leq 2\pi$. Интеграл от первой дроби, которая не содержит изолированного направления, равен

$$\begin{aligned}
 \oint_{C_3} \frac{1}{2} \frac{dv}{v} &= \frac{1}{2} \oint_{C_3} \frac{\operatorname{Re}^{iF+j\sigma} (idF + jd\sigma)}{\operatorname{Re}^{iF+j\sigma}} = \\
 &= \frac{1}{2} \oint_{C_3} idF + jd\sigma. \text{ Параметры } F, \sigma \text{ действительны, параметр } S \text{ исключен из}
 \end{aligned}$$

рассмотрения на основании выводов по исследованию функции аргумента и формулы 1.41. Также как и в предыдущем случае он не дает приращения на замкнутой кривой. В результате интеграл равен

$$\oint_{C_3} \frac{dv}{v} = \oint_{C_3} idF + jd\sigma = 4\pi i + 2\pi j.$$

Разложение переменной на сумму двух изолированных направлений определяет в пространстве наличие мнимых поверхностей радиуса R . Рассмотрим несколько пространственных точек на кривой C_3 . В сферических

координатах при $\rho = 0$, имеем $R = r, F = \tau, \sigma = -\frac{\pi}{2}, s = 0$ в соответствии с

формулами (1.40), (1.41). Переменная выразится в виде $v = -jre^{i\tau}$ и мы имеем

нижний полюс сферы. При $\sigma = +\frac{\pi}{2}$ имеем верхний полюс сферы и $v = jre^{i\tau}$.

При значении $\rho = \sqrt{0}$ имеем $R = r, F = \tau, \sigma = \pm\frac{\pi}{2}, s = 0$ также верхний и

нижний полюса сферы. При $\rho = r, \tau - \varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ имеем

$R = r\sqrt{0}, \sigma = \pm\frac{\pi}{2}, S = \pm i\infty = \pm \operatorname{arctgi}$. Определим аргумент F .

$$F = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sin 2\varphi + \sin 2\tau}{\cos 2\varphi + \cos 2\tau} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2 \sin(\varphi + \tau) \cos(\varphi - \tau)}{2 \cos(\varphi + \tau) \cos(\varphi - \tau)} = \frac{\varphi + \tau}{2}$$

Собирая все параметры в одну формулу, получим вершины мнимой сферы

$v = r\sqrt{0}e^{\pm j \arctg i} e^{i\frac{\varphi+\tau}{2} \pm j\frac{\pi}{2}} = \pm jre^{i\frac{\varphi+\tau}{2}} (1 \pm ji)$. Этот вывод можно получить минув формулы (1.40, 1.41) непосредственно через выражение переменной в цилиндрических координатах

$v = \rho e^{i\varphi} + jre^{i\tau} = re^{i\varphi} (1 \pm ji)$. Далее если воспользоваться формулой (1.16), то выражение примет вид $v = re^{i\varphi+j\sigma} (1 \pm ji)$. Это выражение определяет все точки мнимой сферы.

Вычислим ряд криволинейных интегралов. $\int_k = \oint_{C_3} \frac{f_k(v)dv}{v^2 - 2v - 3}$, где

функцию $f_k(v)$ возьмем последовательно равной $e^v, e^{v^2}, e^{jv}, e^{jv^2}$.

Раскладывая дробь $\frac{1}{v^2 - 2v - 3}$ на сумму простейших дробей относительно

полюсов дроби в пространстве, будем иметь

$$\frac{1}{v^2 - 2v - 3} = \frac{1}{8(v-3)} - \frac{1}{8(v+1)} + \frac{1}{8ji(v-1-2ji)} - \frac{1}{8ji(1-1+2ji)},$$

где сумма после двух дробей учитывает полюса дроби, при равенстве знаменателя нулю в изолированном направлении. Корни знаменателя дроби $v_1 = 3, v_2 = -1, v_3 = 1 + 2ji, v_4 = 1 - 2ji$, являются полюсами функции подынтегрального выражения при условии если кривая C_3 натянута на поверхность, которая заключает в себе область со всеми точками, определяемыми в пространстве этими корнями. Функции $f_k(v)$ регулярны в этих точках. Составим интеграл для первой функции

$$\oint_{C_3} \frac{e^v dv}{v^2 - 2v - 3} = \frac{1}{8} \left[\oint_{C_3} \frac{e^v dv}{v-3} - \oint_{C_3} \frac{e^v dv}{v+1} + ji \oint_{C_3} \frac{e^v dv}{v-1-2ji} - ji \oint_{C_3} \frac{e^v dv}{v-1+2ji} \right] =$$

, к интегралам можно применить формулу Коши

$$= (4\pi i + 2\pi j) \left[\frac{e^3 - e^{-1}}{8} + \frac{e^{1+2ji} - e^{1-2ji}}{8ji} \right] =$$

$$= \left((4\pi i + 2\pi j) \left[\frac{e^3 - e^{-1}}{8} + \frac{e}{4i} \frac{e^{2ij} - e^{-2ij}}{2j} \right] \right) =$$

$$= (4\pi i + 2\pi j) \left[\frac{e^3 - e^{-1}}{8} + \frac{1}{4i} e \sin 2i \right] =$$

$$= (4\pi i + 2\pi j) \left[\frac{e^3 - e^{-1}}{8} - \frac{e^{-2} - e^2}{8} e \right] =$$

$$= (4\pi i + 2\pi j) \left[\frac{e^3 - e^{-1}}{8} + \frac{e^3 - e^{-1}}{8} \right] = \frac{4\pi i + 2\pi j}{4} (e^3 - e^{-1}).$$

Вычисляем следующий интеграл для функции e^{v^2} .
$$\oint_{C_3} \frac{e^{v^2} dv}{v^2 - 2v - 3} =$$
$$= (4\pi i + 2\pi j) \left[\frac{1}{8} (e^9 - e) + \frac{1}{8ji} \left(e^{(1+2ji)^2} - e^{(1-2ji)^2} \right) \right] = (4\pi i + 2\pi j) \frac{e^9 - e}{4}.$$

Для функции e^{jv} имеем $\oint_{C_3} \frac{e^{jv} dv}{v^2 - 2v - 3} = \frac{4\pi i + 2\pi j}{4} (e^{3j} - e^{-j})$. Для функции e^{jv^2} .

$$\oint_{C_3} \frac{e^{jv^2} dv}{v^2 - 2v - 3} = \frac{4\pi i + 2\pi j}{4} (e^{9j} - e^{-j})$$

Разложение подынтегральной

функции на четыре дроби, две из которых представляют разложение по изолированному направлению в пространстве и дальнейшее вычисление интеграла показывают, что сумма первых двух интегралов от разложения равна сумме интегралов по изолированному направлению. Это в том случае, если область интегрирования, охватываемая пространственной кривой C_3 , содержит все пространственные полюса. Если область G заключена между поверхностями S_1, S_2 , натянутыми на эквидистантные кривые γ_1, γ_2 , то для полюсов функции справедлива формула

$$\oint_{\gamma_1} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - v} - \oint_{\gamma_2} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - v} = (4\pi i + 2\pi j) f(v).$$

Применим эту формулу к расчету первого интеграла для различных областей. Предположим, что кривая γ_3 натянута на поверхность сферы радиуса $\|v\| = 2$, а

кривая γ_4 на поверхность сферы радиуса $\|v\| = \frac{3}{2}$. В этом случае область G содержит две точки $v = v_3, v = v_4$, которые являются полюсами подынтегральной функции. Интеграл по кривой C_3 распадается на разность двух интегралов по кривой γ_3 и кривой γ_4 . Кривые подобны кривой C_3 .

$$\oint_{C_3} = \oint_{\gamma_3} - \oint_{\gamma_4} = (4\pi i + 2\pi j) (\text{res} f(v_3) + \text{res} f(v_4)), \quad \text{Используя разложение}$$

подынтегральной функции на дроби в пространстве, получим выражение для суммы вычетов функции

$$\begin{aligned} \text{res} ji \frac{e^v}{v - 1 - 2ji} \frac{1}{8} + \text{res} -ji \frac{e^v}{v - 1 + 2ji} \frac{1}{8} &= \frac{1}{8} (e^{1+2ji} - e^{1-2ji}) = \\ \frac{1}{8} jie (e^{2ji} - e^{-2ji}) &= \frac{1}{8} jie \frac{e^{2ji} - e^{-2ji}}{2j} 2j = \\ &= -\frac{1}{8} ei 2 \sin 2i = -\frac{1}{8} 2i \frac{e^{-2} - e^2}{2i} e = \frac{1}{8} (e^3 - e^{-1}) \end{aligned}$$

Подставляя в интеграл, получим
$$\oint_{\gamma_3-\gamma_4} \frac{e^v dv}{v^2 - 2v - 3} = \frac{4\pi i + 2\pi j}{8} (e^3 - e^{-1}).$$

Если область G заключена между поверхностями S_1, S_2 , натянутыми на кривые γ_5, γ_6 , со сферическими радиусами соответственно $\|v\| = 2, \|v\| = 4$, то подынтегральная функция будет иметь один полюс $v = 3$. Интеграл будет равен

$$\oint_{\gamma_5-\gamma_6} \frac{e^v dv}{v^2 - 2v - 3} = \frac{4\pi i + 2\pi j}{8} e^3.$$

Произведем выделение первых мнимых и действительных частей в правой и левой части вычисленного интеграла. Предварительно проведем операции и введем обозначения для сокращения записи формул. $v^2 - 2v - 3 = \alpha + j\beta$, где $\alpha = z^2 - 2z - \sigma^2 - 3, \beta = 2\sigma(z - 1)$.

$e^v dv = \zeta + j\eta$, где

$\zeta = e^z \cos \sigma dz - e^z \sin \sigma d\sigma, \eta = e^z \sin \sigma dz + e^z \cos \sigma d\sigma$. В этих обозначениях проведем выделение мнимой и действительной частей подынтегральной функции

$$\frac{e^v dv}{v^2 - 2v - 3} = \frac{(\zeta + j\eta)(\alpha - j\beta)}{(\alpha + j\beta)(\alpha - j\beta)} = \frac{\zeta\alpha + \eta\beta}{\alpha^2 + \beta^2} + j \frac{\eta\alpha - \zeta\beta}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Подставим в исходный интеграл и приравняем правые и левые действительные и мнимые части

$$\text{Reel} \oint_{\gamma_3-\gamma_4} = \oint_{\gamma_3-\gamma_4} \frac{(\alpha e^z \cos \sigma + \beta e^z \sin \sigma) dz - e^z (\alpha \sin \sigma - \beta \cos \sigma) d\sigma}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\pi i}{2} (e^3 - e^{-1}).$$

$$\text{Jmm} \oint_{\gamma_3-\gamma_4} = \oint_{\gamma_3-\gamma_4} \frac{e^z (\alpha \sin \sigma - \beta \cos \sigma) dz + e^z (\alpha \cos \sigma - \beta \sin \sigma) d\sigma}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\pi}{2} (e^3 - e^{-1}).$$

Определим проекцию интеграла по кривым $\gamma_3 - \gamma_4$ на плоскость Z . В этом случае надо принять

$\alpha|_{\sigma=0} = z^2 - 2z - 3, \beta|_{\sigma=0} = 0$. Проекция пространственного интеграла на плоскость Z равна

$$\int = \oint_{C_z} \frac{e^z (z^2 - 2z - 3) dz}{(z^2 - 2z - 3)^2} = \oint_{C_z} \frac{e^z dz}{z^2 - 2z - 3}.$$

При отображении область между двумя концентрическими сферами перейдет в область между двумя окружностями. Область будет содержать полюса функции в плоскости Z . Интеграл можно вычислить по формуле Коши.

$$\oint_{C_z} \frac{e^z dz}{z^2 - 2z - 3} = \frac{\pi i}{2} (e^3 - e^{-1}).$$

Рассмотрим проекцию интеграла на изолированную ось σ , которая также представляет комплексное плоское пространство. Проекция одновременно является мнимой частью пространственного интеграла

$$Jmm \int_{C_3} = \oint_{z=0} \frac{je^{j\sigma} d\sigma}{(j\sigma)^2 - 2j\sigma - 3}.$$

Комплексная ось $j\sigma$ имеет две изолированные точки $(j\sigma)_1 = 3, (j\sigma)_2 = -1$.

Если точки входят в область определения интеграла, то по интегральной формуле Коши его можно вычислить

$$\oint_{C_\sigma} = \frac{\pi}{2} (e^3 - e^{-1}).$$

Мнимая часть от пространственного интеграла также

равна этой величине. Результаты совпадают. Рассмотрим результаты вычислений проекций на комплексные плоскости Z, σ , через пространственный интеграл, и сравним их с вычислениями этих проекций в плоскостях для различных областей определения пространственного интеграла.

Область охватывает только одну изолированную точку $v = -1$. В этом случае

$$Reel \oint_{C_3} \frac{e^v dv}{v^2 - 2v - 3} = -\pi i e^{-1} + \pi i \frac{1}{2} e^3,$$

$$\oint_{C_z} Reel \frac{e^v dv}{v^2 - 2v - 3} = \oint_{C_z} \frac{e^z dz}{z^2 - 2z - 3} = -\frac{\pi}{2} i e^{-1}.$$

$$Jmm \oint_{C_3} \frac{e^v dv}{v^2 - 2v - 3} = -\frac{\pi}{2} e^{-1},$$

$$\oint_{C_\sigma} Jmm \frac{e^v dv}{v^2 - 2v - 3} = \oint_{C_\sigma} \frac{je^{j\sigma} d\sigma}{(j\sigma)^2 - 2j\sigma - 3} = -\frac{\pi}{2} e^{-1}.$$

Если область определения интеграла включает в себя три изолированные точки $v_1 = -1, v_3 = 1 + 2ji, v_4 = 1 - 2ji$, то имеем

$$\oint_{C_z} = -\frac{\pi}{2} i e^{-1}, \quad \oint_{C_3} = -\pi i e^{-1} + \frac{\pi}{2} i e^3$$

$$\oint_{C_\sigma} = -\frac{\pi}{2} e^{-1}, \quad \oint_{C_3} = -\frac{\pi}{2} e^{-1} + \frac{\pi}{4} e^3.$$

Если область определения пространственного интеграла содержит все изолированные точки

$$\oint_{C_\sigma} = -\frac{\pi}{2} e^{-1} + \frac{\pi}{2} e^3, \quad \oint_{C_3} = -\frac{\pi}{2} e^{-1} + \frac{\pi}{2} e^3$$

$$\oint_{C_z} = -\frac{\pi}{2} e^{-1} + \frac{\pi}{2} e^3, \quad \oint_{C_3} = -\pi i e^{-1} + \pi i e^3$$

В пункте 1.7.2 рассмотрена связь изолированных точек в пространстве на примере рис 32 и рис 33. Изолированные точки v_3, v_4 проектируются особым образом в точки v_1, v_2 . Поверхность сферы, изолирующая особую точку в пространстве, разделяется на нижнюю и верхнюю полусферу. Соответственно

этому ведут себя и пространственные кривые, окружающие эти точки. При проектировании на плоскость Z эти полусферы в зависимости от их расположения переходят в нижнюю или верхнюю полусферу точек, лежащих в этой плоскости. Этим объясняется расхождение результатов интегрирования в пространстве от вычислений интегралов от проекций подынтегральной функции на плоскости Z или σ . Решение квадратного уравнения в плоском пространстве не содержит пространственных корней, определяемых на основе существования делителей нуля. В то же время изоляция полюса окружностью малого радиуса в плоскости есть след третьей изолированной оси на плоскости. Если функция $\mu(v)$ представлена как частное от деления двух многочленов степени n и m ,

$$\mu(v) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}, \text{ то для сходимости интеграла в плоскости } Z \text{ необходимо, чтобы}$$

степень многочлена в знаменателе функции превышала степень многочлена числителя на две единицы

$m - n = 2$ и функция $\mu(v)$ может в пределе рассматриваться в виде

$$\mu(v) \approx \frac{A}{v^K}, v \rightarrow \infty, K \geq 3, \text{ где } K \text{ - целое. В этом случае модуль } \|\mu(v)\| \leq \frac{C}{\|v^3\|}$$

при достаточно больших R .

Тогда имеем

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left\| \iint_{\sigma_{R_n}} \mu(v) d\sigma_v \right\| < CR^{-3} R^2 \pi^2 \rightarrow 0$$

Тем самым выявлено условие сходимости интеграла и доказана лемма

$$\begin{aligned} JJ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(z) dx dy = 2\pi^2 ji \sum_{\text{Im } v_K > 0, v=v_K} \text{ress} \mu(v) + 2\pi^2 ji \sum_{\text{Im } v_K > 0, v=v_K (1 \pm ji)} \text{ress} \mu(v) \\ \iint_{S_Z} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} ji q_1(z) e^{2i\varphi} \rho d\rho d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} i q_2(z) e^{2i\varphi} \rho d\rho d\varphi, \end{aligned}$$

где $q_1(z) = q_2(z)$.

1.7.4. Лемма К. Жордана в комплексном пространстве Y

Пусть имеем $\lambda > 0$ и выполняются условия:

- 1) функция $g[v]$ непрерывна в области пространства $\text{Im } v > 0, \|v\| \geq R_0 > \sqrt{0}$
- 2) $M(R) = \max_{v \in \sigma_R} \|g(v)\| \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$, где σ_R - верхняя полусфера

$$\|v\| = R, \text{Im } v > 0. \text{ Тогда } \iint = \lim_{\sigma_R \rightarrow \infty} \iint_{\sigma_R} g(v) \sin i\lambda v d\sigma = 0.$$

Доказательство. Заменяем в интеграле функцию синус ее представлением в пространстве

$$\sin i\lambda v = \frac{e^{ji\lambda v} - e^{-ji\lambda v}}{2j}.$$

$$\begin{aligned} \iint = \iint_{\sigma_R} g(v) \frac{e^{ji\lambda v} - e^{-ji\lambda v}}{2j} d\sigma = \iint_1 + \iint_2 = \iint_{\sigma_R} g(v) \frac{e^{ji\lambda v}}{2j} d\sigma + \\ + \iint_{\sigma_R} g(v) \frac{e^{-ji\lambda v}}{2j} d\sigma. \end{aligned}$$

Так, что необходимо исследовать два интеграла

$$\iint_1, \iint_2. \text{ Рассмотрим первый интеграл. } \iint_1 = \iint_{\sigma_R} g(v) \frac{e^{ji\lambda v}}{2j} d\sigma. \text{ Определим}$$

модуль функции $\frac{e^{ji\lambda v}}{2j}$.

$$\begin{aligned} \left\| \frac{e^{ji\lambda v}}{2j} \right\| &= \left\| \frac{e^{ji\lambda \operatorname{Re}^{i\varphi+j\psi}}}{2j} \right\| = \frac{1}{2} \left\| e^{ji\lambda \operatorname{Re}^{i\varphi} \cos\psi - i\lambda \operatorname{Re}^{i\varphi} \sin\psi} \right\| = \\ &= \frac{1}{2} \left| e^{-i\lambda \operatorname{Re}^{i\varphi} \sin\psi} \right| = \frac{1}{2} \left| e^{-i\lambda R \cos\varphi \sin\psi + \lambda R \sin\varphi \sin\psi} \right| = \frac{1}{2} e^{\lambda R \sin\varphi \sin\psi}. \end{aligned}$$

Пусть $v = \operatorname{Re}^{i\varphi+j\psi}$ принадлежит верхней полусфере $\operatorname{Im} v > 0$. Для той части полусферы где аргументы изменяются в пределах $\pi \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$, будем иметь $\frac{1}{2} e^{\lambda R \sin\varphi \sin\psi} \leq 1$.

Модуль функции $\left\| \frac{e^{-ji\lambda v}}{2j} \right\| = \frac{1}{2} e^{-\lambda R \sin\varphi \sin\psi}$ меньше единицы для той части

верхней полусферы, для которой аргументы изменяются в интервалах $0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$. Изолированное направление для верхнего

полупространства характеризуется выражение переменной v в виде $v = \operatorname{Re}^{i\varphi+j\psi} (1 + ji)$. Оценка интегралов по изолированному направлению будет рассмотрена ниже. Для оценки интеграла, воспользуемся соотношением

$\sin\psi < \frac{2}{\pi}$, которое справедливо для интервала изменения аргумента

$$0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Оценим интеграл по модулю

$$\left\| \iint_1 \right\| = \frac{1}{2} R^2 \max_{v \in \sigma_R} \|g(v)\| \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\lambda R \sin\varphi \left(\frac{2}{\pi}\right) \psi} d\varphi d\psi.$$

От элемента площади остался один модуль R^2 . В силу условий леммы интеграл преобразится к виду

$$\begin{aligned} \|\iint_1\| &= \frac{1}{2} R^2 M(R) \int_{\pi}^{2\pi} \left| \frac{e^{\frac{\lambda R}{2} \psi \sin \varphi}}{\frac{2}{\pi} \lambda R \sin \varphi} \right|^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{1}{2} R^2 M(R) \int_{\pi}^{2\pi} \frac{e^{\lambda R \sin \varphi} - 1}{\frac{2}{\pi} \lambda R \sin \varphi} d\varphi = \\ &= \frac{\pi}{4} R^2 M(R) \int_{\pi}^{2\pi} \frac{e^{\lambda R \sin \varphi} - 1}{\lambda R \sin \varphi} d\varphi. \end{aligned}$$

Заменим подынтегральную функцию ее максимальным значением в интервале интегрирования. Функция $\frac{e^{\lambda R \sin \varphi} - 1}{\lambda R \sin \varphi}$ на концах интервала интегрирования неопределена. Раскроем эту неопределенность

$$\lim_{\varphi \rightarrow \pi, \varphi \rightarrow 2\pi} \frac{(e^{\lambda R \sin \varphi} - 1)'}{\lambda R \sin' \varphi} = \frac{\lambda R \cos \varphi e^{\lambda R \sin \varphi}}{\lambda R \cos \varphi} = 1.$$

Эта величина является максимальной величиной функции в заданном интервале. Оценим величину функции в промежутках интервала интегрирования $\pi < \varphi < 2\pi$. Обозначим $\sin \varphi = -\beta, |\beta| < 1$.

Тогда $A = \frac{e^{-\lambda R \beta} - 1}{-\lambda R \beta}$. Для случая $\lambda R \beta < 1$, разложим экспоненциальную функцию в ряд и используя два первых члена разложения будем иметь. $A = \frac{1 - \lambda R \beta - 1 + O(\lambda R \beta)}{\lambda R \beta} = -1 + o(\lambda R \beta)_{R \rightarrow 0} \rightarrow 0$.

Если произведение $\lambda \beta R > 1$, $|A| = \left| \frac{e^{-\lambda \beta R} - 1}{\lambda \beta R} \right| < 1$,

так как $|e^{-\lambda \beta R} - 1| < 1, \lambda \beta R > 1$.

Следовательно подынтегральная функция имеет максимальное значение равное единице. Поэтому интеграл $\|\iint_1\| = \frac{\pi^2}{4} R^2 M(R)$. Если максимальное значение модуля функции

$$\|g(v)\| \equiv \frac{1}{R^3}, \text{ то } \lim_{R \rightarrow \infty} \|\iint_1\| = \frac{\pi^2}{4R} \rightarrow 0.$$

Доказано, что $\iint_1 = \iint_{\sigma_{R \rightarrow \infty}} \frac{e^{ji\lambda v}}{2j} g(v) d\sigma = 0$.

Все операции по первому интегралу переносятся во второй $\iint_2$ для интервала

$$0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Так, что $\iint_2 = \iint_{\sigma_{R \rightarrow \infty}} \frac{e^{-ji\lambda v}}{2j} g(v) d\sigma = 0$.

Следовательно интеграл для верхней полусферы

$$\iint = \iint_1 - \iint_2 = \iint_{\sigma_{R \rightarrow \infty}} g(v) \sin i\lambda v d\sigma = 0.$$

Проведем доказательство для изолированного направления в верхнем полупространстве. Интегралы $\iint_1, \iint_2$ приобретают вид :

$$\iint_1 = \iint_{\sigma_R} g(v) \frac{e^{(1+ji)\lambda v}}{2j} d\sigma, \iint_2 = \iint_{\sigma_R} g(v) \frac{e^{-(1-ji)\lambda v}}{2j} d\sigma.$$

Для интервала $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3}{2}\pi$, имеем

$$\left\| \frac{e^{(1+ji)\lambda v}}{2j} \right\| = e^{\lambda R \cos \varphi \cos \psi} < 1,$$

для интервала $\frac{3}{2}\pi \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, имеем $\left\| \frac{e^{-(1-ji)\lambda v}}{2j} \right\| = e^{-\lambda R \cos \varphi \cos \psi} < 1$.

В верхней половине полусферы аргумент ψ изменяется в пределах $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$ и

функция

$\cos \psi \geq 0$. Оценка модуля интегралов $\iint_1, \iint_2$ сводятся к оценки выражений

$$\begin{aligned} \|\iint_1\| &= \frac{1}{2} R^2 M(R) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\lambda R \cos \varphi \cos \psi} d\varphi d\psi, \\ \|\iint_2\| &= \frac{1}{2} R^2 M(R) \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda R \cos \varphi \cos \psi} d\varphi d\psi. \end{aligned}$$

В пределах $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$, $\cos \psi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) \leq 1 - \frac{2}{\pi}\psi$. Таким образом, для

оценки интегралов необходимо рассмотреть интегралы

$$\iint_{11} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\lambda R \cos \varphi \left(1 - \frac{2}{\pi}\psi\right)} d\varphi d\psi, \iint_{22} = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda R \left(1 - \frac{2}{\pi}\psi\right) \cos \varphi} d\varphi d\psi.$$

Преобразуем интегралы к повторным

$$\begin{aligned} \iint_{11} &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{\lambda R \cos \varphi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda R \frac{2}{\pi} \psi \cos \varphi} d\psi = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{\lambda R \cos \varphi} d\varphi \left[\frac{e^{-\lambda R \frac{2}{\pi} \psi \cos \varphi}}{-\lambda R \frac{2}{\pi} \cos \varphi} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{(1 - e^{-\lambda R \cos \varphi})}{-\lambda R \frac{2}{\pi} \cos \varphi} d\varphi. \end{aligned}$$

Второй интеграл дает выражение $\iint_{22} = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - e^{-\lambda R \cos \varphi}}{\lambda R \frac{2}{\pi} \cos \varphi} d\varphi$.

Подынтегральные выражения на концах интервала имеют неопределенность. Раскрывая неопределенность получим

$$\begin{aligned} \lim_{\varphi \rightarrow \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - e^{\lambda R \cos \varphi})'}{\left(-\frac{2}{\pi} \lambda R \cos \varphi\right)'} &= \frac{\pi}{2}, \\ \lim_{\varphi \rightarrow \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - e^{-\lambda R \cos \varphi})'}{\left(\lambda R \frac{2}{\pi} \cos \varphi\right)'} &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Подставляя эти оценки в исходные интегралы получим

$$\|\iint_1\| = \|\iint_2\| = \frac{\pi^2}{4} R^2 M(R). \text{ Если максимальное значение}$$

Функции $\|g(v)\| \equiv \frac{1}{R^3}$, то $\|\iint_1\| = \|\iint_2\| = \frac{\pi^2}{4R} = 0, R \rightarrow \infty$. Таким образом ,

доказана вторая часть леммы. Сумма интегралов доставляет доказательство леммы К. Жордана в пространстве Y .

$$\iint = \iint_1 + \iint_2 = \iint_{\sigma_R \rightarrow \infty, Jmv \geq 0} g(v) \sin i\lambda v d\sigma = 0.$$

Проекция интеграла на плоскость Z даст интеграл

$$\iint_z = -j \iint_{\sigma_z} g(z) \sin i\lambda z d\sigma_z. \text{ Если функция } g(v), \text{ соответствует условиям}$$

Леммы и содержит ограниченное число полюсов в верхнем полупространстве , то по теореме Коши для многосвязных областей имеет место равенство

$$-j \iint_{\sigma} \sin i\lambda z g(z) d\sigma_z + \iint_{\sigma_R} \sin(i\lambda v) g(v) d\sigma =$$

$$= 2\pi^2 ji \sum_{k=1, \text{Im} v_k \geq 0}^n \text{ress}[\sin(i\lambda v_k)g(v_k)]$$

Но по лемме К. Жордана $\iint_{\sigma_{R \rightarrow \infty}} = 0$, поэтому имеем

$$\iint_{\sigma_z} g(z) \sin(i\lambda z) d\sigma_z = -2\pi^2 i \sum_{k=1, \text{Im} v_k > 0} \text{ress}[g(v_k) \sin(i\lambda v_k)].$$

Пример .Вычислить интеграл $\iint = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sin iz}{z^3} d\sigma_z$. Выберем вспомогательную

функцию $g(v) = \frac{\sin iv}{v^3}$, проекция которой на плоскость Z , дает подынтегральную функцию. Поверхность интегрирования состоит из суммы поверхностей : верхняя полусфера $\sigma_{R \rightarrow \infty}$, полусфера около нулевой точки $\sigma_{\rho \rightarrow 0}$, поверхность $\sigma_{\rho, \varphi}$, где $0 \leftarrow \rho \rightarrow \infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$. По теореме для многосвязных областей имеем равенство

$\iint_{\sigma_{\rho, \varphi}} + \iint_{\sigma_{\rho}} + \iint_{\sigma_R} = 0$. Подынтегральная функция не имеет особых точек в верхнем

полупространстве. Кроме того, $\iint_{\sigma_R} = 0$ по лемме Жордана. Для вычисления

интеграла σ_{ρ} , рассмотрим Лорановское разложение функции синус в окрестности точки 0 и оценим подынтегральную функцию

$$f(v) = \frac{iv - \frac{(iv)^3}{3!} + \frac{(iv)^5}{5!} - \dots}{v^3} = i \frac{1}{v^2} + P(v),$$

где $P(v)$ есть непрерывная функция в точке ноль.

$$\text{Поэтому } \iint_{\sigma_{\rho}} i \frac{1}{v^2} d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} i \frac{1}{v^2} v^2 j d\varphi d\psi = -j\pi^2 + o(\rho)_{\rho \rightarrow 0} \rightarrow 0 = -j\pi^2.$$

Проекция интеграла на плоскость Z равна

$$\iint_{\sigma_{\rho, \varphi}} = \lim_{\psi \rightarrow 0} \iint_{\sigma_R} = -j \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sin iz}{z^3} d\sigma_z. \text{ Окончательно получим}$$

$$\int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sin iz}{z^3} e^{2i\varphi} \rho d\rho d\varphi = \pi^2. \text{ Преобразуем подынтегральное выражение. Введем}$$

$$z = \rho e^{i\varphi}.$$

$$\sin i\rho^{i\varphi} \frac{e^{2i\varphi}}{\rho^3 e^{3i\varphi}} = \sin i\rho e^{i\varphi} \frac{1}{\rho^3} e^{-i\varphi} = \sin(i\rho \cos \varphi - \rho \sin \varphi) \frac{1}{\rho^3} (\cos \varphi - i \sin \varphi) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sin(i\rho \cos \varphi) \cos(\rho \sin \varphi) \frac{1}{\rho^3} (\cos \varphi - i \sin \varphi) - \cos(i\rho \cos \varphi) \sin(\rho \sin \varphi) \frac{1}{\rho^3} (\cos \varphi - i \sin \varphi) \\
 &= \frac{e^{-\rho \cos \varphi} - e^{+\rho \cos \varphi}}{2i} \cos(\rho \sin \varphi) \frac{1}{\rho^3} \cos \varphi - \frac{e^{-\rho \cos \varphi} - e^{+\rho \cos \varphi}}{2} \cos(\rho \sin \varphi) \frac{1}{\rho^3} \sin \varphi - \\
 &+ \frac{e^{-\rho \cos \varphi} + e^{+\rho \cos \varphi}}{2} \sin(\rho \sin \varphi) \frac{1}{\rho^3} i \sin \varphi - \frac{e^{-\rho \cos \varphi} + e^{+\rho \cos \varphi}}{2} \sin(\rho \sin \varphi) \frac{1}{\rho^3} \cos \varphi = \\
 &\text{суммируя мнимую и действительную части получим} \\
 &= \frac{1}{2\rho^3} i \left[e^{-\rho \cos \varphi} (\cos(\rho \sin \varphi + \varphi)) + e^{\rho \cos \varphi} \cos(\rho \sin \varphi - \varphi) \right] + \\
 &- \frac{1}{2\rho^3} \left[e^{-\rho \cos \varphi} \sin(\rho \sin \varphi + \varphi) - e^{\rho \cos \varphi} \sin(\rho \sin \varphi - \varphi) \right].
 \end{aligned}$$

Отделяя действительную и мнимую часть в исходном интеграле получим :

$$\begin{aligned}
 Jm \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\sin iz}{z^3} e^{2i\varphi} \rho d\varphi d\rho &= \\
 &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\rho \cos \varphi} \cos(\rho \sin \varphi + \varphi) + e^{\rho \cos \varphi} \cos(\rho \sin \varphi - \varphi)}{\rho^3} \rho d\rho d\varphi = 0 \\
 Re \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\sin iz}{z^3} e^{2i\varphi} \rho d\rho d\varphi &= \\
 &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{e^{\rho \cos \varphi} \sin(\rho \sin \varphi - \varphi) + e^{-\rho \cos \varphi} \sin(\rho \sin \varphi + \varphi)}{\rho^3} \rho d\rho d\varphi = 2\pi^2
 \end{aligned}$$

Пример 3. Продолжение исследования вычисления примеров 1,2 пункта 1.7.1. Вычислим интеграл примера 2 . Представим интеграл в виде суммы двух равных частей

$$\oint_S = \oint_S \frac{1}{2} \frac{e^v}{(v^2 - 2v - 3)^2} ds + \frac{1}{2} \frac{e^v}{(v^2 - 2v - 3)^2} ds =$$

Знаменатели дроби выразим через произведение линейных множителей , на которые раскладывается квадратный трехчлен. На основании равенства $(v - v_1)(v - v_2) = (v - v_3)(v - v_3)$ интеграл преобразуем к виду

$$= \oint_S \frac{1}{2} \frac{e^v}{(v+1)^2(v-3)^2} ds + \frac{1}{2} \frac{e^v}{(v-1-2ji)^2(v-1+2ji)^2} ds =$$

Если поверхность S , охватывает все изолированные точки, то применяя последовательно формулу Коши получим

$$\begin{aligned}
 &= 2\pi^2 ji \frac{e^3}{32} + 2\pi^2 ji \frac{e^{-1}}{32} + 2\pi^2 ji \frac{e^{1+2ji}}{32} + 2\pi^2 ji \frac{e^{1-2ji}}{32} = \\
 &= \frac{2\pi^2}{32} ji (e^3 + e^{-1}) = \frac{\pi^2}{8} (e^3 + e^{-1}) ji.
 \end{aligned}$$

Совпадает с результатом расчета примера 2 пункта 1.7.1.

Вычислим интеграл по другому варианту. Разложение квадратного трехчлена на простейшие множители в пространстве позволяет квадрат этого трехчлена записать в виде произведения четырех множителей. Интеграл примет вид

$$\begin{aligned} \oint_S = \oint_S|_1 \frac{e^v}{2(v+1)(v-3)(v-1-2ji)(v-1+2ji)} dS + \\ + \oint_S|_2 \frac{e^v}{2(v+1)(v-3)(v-1-2ji)(v-1+2ji)} dS = \end{aligned}$$

в этих выражениях каждый из интегралов содержит по четыре изолированные точки – полюса подынтегральной функции. Каждая из пространственных точек является полюсом второго порядка. Вычисление интеграла сводится к вычислению четырех интегралов. По теореме для многосвязных областей каждую изолированную пространственную точку окружим сферической поверхностью с радиусом стремящимся к нулю.

$$\begin{aligned} \oint_S|_1 = \oint_S|_2 = \oint_{S_1} \frac{1}{2} \frac{\frac{e^v}{(v-3)} dS}{(v+1)(v-1-2ji)(v-1+2ji)} + \\ + \oint_{S_2} \frac{1}{2} \frac{\frac{e^v}{(v+1)} dS}{(v-3)(v-1-2ji)(v-1+2ji)} + \\ + \oint_{S_3} \frac{1}{2} \frac{\frac{e^v}{(v-1-2ji)} dS}{(v+1)(v-3)(v-1+2ji)} \\ + \oint_{S_4} \frac{1}{2} \frac{\frac{e^v}{(v-1+2ji)} dS}{(v+1)(v-3)(v-1-2ji)} = \end{aligned}$$

Для первого интеграла примем

$$v+1 = \operatorname{Re} e^{i\varphi+j\psi}, v-1 = \operatorname{Re} e^{i\varphi+j\psi},$$

для второго интеграла

$$v = 3 + \operatorname{Re} e^{i\varphi+j\psi},$$

для третьего интеграла $v = 1 - 2ji + \operatorname{Re} e^{i\varphi+j\psi}$,

для четвертого интеграла

$$v = 1 + 2ji + \operatorname{Re} e^{i\varphi+j\psi}. dS = jiR^2 e^{2i\varphi+2j\psi} d\varphi d\psi.$$

Подставим замену переменных в интегралы и возьмем предел при стремлении радиуса поверхности, окружающего изолированную точку к нулю.

$$\begin{aligned}
 & \lim_{R \rightarrow 0} \iint_{S_1} \frac{e^{-1 + \operatorname{Re} i\varphi + j\psi}}{-4 + \operatorname{Re} i\varphi + j\psi} \left(\operatorname{Re} i\varphi + j\psi - 2 - 2ji \right) \left(\operatorname{Re} i\varphi + j\psi - 2 + 2ji \right) ji R^2 e^{i2\varphi + 2j\psi} d\varphi d\psi + \\
 & + \lim_{R \rightarrow 0} \iint_{S_2} \frac{e^{3 + \operatorname{Re} i\varphi + j\psi}}{4 + \operatorname{Re} i\varphi + j\psi} \left(\operatorname{Re} i\varphi + j\psi + 2 - 2ji \right) \left(\operatorname{Re} i\varphi + j\psi + 2 + 2ji \right) ji R^2 e^{i2\varphi + 2j\psi} d\varphi d\psi + \\
 & + \lim_{R \rightarrow 0} \iint_{S_3} \frac{e^{1 - 2ji + \operatorname{Re} i\varphi + j\psi}}{-4ji + \operatorname{Re} i\varphi + j\psi} \left(\operatorname{Re} i\varphi + j\psi + 2 - 2ji \right) \left(\operatorname{Re} i\varphi + j\psi - 2 - 2ji \right) ji R^2 e^{i2\varphi + 2j\psi} d\varphi d\psi + \\
 & + \lim_{R \rightarrow 0} \iint_{S_4} \frac{e^{1 + 2ji + \operatorname{Re} i\varphi + j\psi}}{4ji + \operatorname{Re} i\varphi + j\psi} \left(\operatorname{Re} i\varphi + j\psi + 2 + 2ji \right) \left(\operatorname{Re} i\varphi + j\psi - 2 + 2ji \right) ji R^2 e^{i2\varphi + 2j\psi} d\varphi d\psi =
 \end{aligned}$$

проведем алгебраические операции под знаками интеграла и перейдем к пределу, получим

$$\begin{aligned}
 & = 2\pi^2 ji \left[\frac{e^{-1}}{2(-4)(-4)} + \frac{e^3}{2 \cdot 4 \cdot 4} + \frac{e^{1-2ji}}{2(-4ji)(-4ji)} + \frac{e^{1+2ji}}{2 \cdot 4ji \cdot 4ji} \right] = \\
 & = 2\pi^2 ji \frac{e^{-1} + e^3}{32} 2 = \frac{\pi^2}{8} ji (e^{-1} + e^3)
 \end{aligned}$$

Следовательно исходный интеграл равен $\iint_S = 2 \frac{\pi^2}{8} ji (e^3 + e^{-1})$, однако с

учетом, что вычеты изолированных точек взяты также дважды, окончательно будем иметь

$$\iint_S \frac{e^v}{(v^2 - 2v - 3)} dS = \frac{\pi^2}{8} ji (e^3 + e^{-1})$$

Результат расчета совпадает с предыдущим вычислением.

Проведенные исследования показали, что в пространстве $[v]$ удалось реализовать теорию вычетов для поверхностных интегралов.

Пример Вычислить интеграл $\iint_{S_R} = \iint_{S_R} \frac{\sin iv}{(v - \alpha)^2 (v - \beta)^2} dS$, где S_R -

поверхность сферы радиуса $R > \alpha > \beta$. α, β - действительные числа.

Подынтегральная функция нерегулярна в двух точках α, β , находящихся на действительной оси пространства. Эти точки являются полюсами второго порядка. В соответствии с комплексной алгеброй в пространстве имеются еще

две точки, в которых функция нерегулярна. Для нахождения этих точек решаем квадратное уравнение $(v - \alpha)(v - \beta) = v^2 - (\alpha + \beta)v + \alpha\beta = 0$.

$v_{3,4} = \lambda \pm j\tau$, где $\lambda = \frac{\alpha + \beta}{2}, \tau = \frac{\alpha - \beta}{2}$. Таким образом, знаменатель подынтегральной функции можно представить как произведение четырех линейных множителей.

$$(v - \alpha)^2(v - \beta)^2 = (v - \alpha)(v - \beta)(v - \lambda - j\tau)(v - \lambda + j\tau).$$

Интеграл приобретает вид

$$\oint_{S_R} \frac{\sin i v}{(v - \alpha)(v - \beta)(v - \lambda - j\tau)(v - \lambda + j\tau)} dS.$$

Подынтегральная функция имеет четыре нерегулярные точки, а интеграл имеет четыре полюса второго порядка. Полюс второго порядка обеспечивается простым полюсом плюс полюс первого порядка от произведения делителей нуля.

Таким образом, изолированная ось в пространстве увеличивает порядок полюса на единицу.

Поверхность S_R , натянутая на сферу радиуса $R > \alpha > \beta$, заключает в себе область, в которой находятся изолированные точки $v_{3,4}$, так как

$$\|\lambda \pm j\tau\| = \sqrt{\lambda^2 - \tau^2} = \sqrt{\left[\frac{(\alpha + \beta)^2}{4} - \frac{(\alpha - \beta)^2}{4}\right]} = \sqrt{\alpha\beta} \text{ и } \alpha > \sqrt{\alpha\beta} > \beta$$

Построим сферы S_1, S_2, S_3, S_4 с центрами в точках $v = \alpha, v = \beta, v = \lambda + j\tau, v = \lambda - j\tau$ достаточно малых радиусов таких, чтобы сферы не пересекались и целиком лежали в сфере S_R . В пятисвязной области, ограниченной сферами S_1, S_2, S_3, S_4 и сферой S_R подынтегральная функция всюду аналитична. По теореме Коши для многосвязной области

$$\oint_{S_R} = \oint_{S_1} + \oint_{S_2} + \oint_{S_3} + \oint_{S_4}.$$

Вычислим интегралы стоящие в правой части равенства. Рассмотрим первый интеграл. Произведем замену переменной $v = \alpha + re^{i\varphi + j\psi}$. В дальнейшем также будем иметь в виду следующие равенства. $\alpha - \beta = 2\tau, \alpha - \lambda = \tau$. Преобразуем интеграл

$$\begin{aligned} & \oint_{S_1} \frac{\sin i(\alpha + re^{i\varphi + j\psi}) jir^2 e^{2i\varphi + 2j\psi} d\varphi d\psi}{re^{i\varphi + j\psi} (2\tau + re^{i\varphi + j\psi}) (\tau - j\tau + re^{i\varphi + j\psi}) (\tau + j\tau + re^{i\varphi + j\psi})} = \\ & = \oint_{S_1} \frac{\sin i(\alpha + re^{i\varphi + j\psi}) jir^2 e^{2i\varphi + 2j\psi} d\varphi d\psi}{re^{i\varphi + j\psi} (2\tau + re^{i\varphi + j\psi}) (\tau re^{i\varphi + j\psi} + j\tau re^{i\varphi + j\psi} + \tau re^{i\varphi + j\psi} - j\tau re^{i\varphi + j\psi} + r^2 e^{2i\varphi + 2j\psi})} = \\ & = \oint_{S_1} \frac{\sin i(\alpha + re^{i\varphi + j\psi}) jir^2 e^{2i\varphi + 2j\psi} d\varphi d\psi}{r^2 e^{2i\varphi + 2j\psi} (2\tau + re^{i\varphi + j\psi})^2}. \end{aligned}$$

Произведя сокращения и беря предел при $r \rightarrow 0$, получим

$$\oint_{S_1} = \lim_{r \rightarrow 0} \oint_{S_1} \frac{\sin i(\alpha + re^{i\varphi+j\psi}) jid\varphi d\psi}{(2\tau + re^{i\varphi+j\psi})^2} = 2\pi^2 ji \frac{\sin i\alpha}{4\tau^2}.$$

Во втором интеграле делаем замену переменной $v = \beta + re^{i\varphi+j\psi}$ и учитывая равенства $\beta - \alpha = -2\tau$, $\beta - \lambda = -\tau$, преобразуем интеграл к виду

$$\begin{aligned} & \oint_{S_2} \frac{\sin i(\beta + re^{i\varphi+j\psi}) jir^2 e^{2i\varphi+2j\psi} d\varphi d\psi}{(-2\tau + re^{i\varphi+j\psi}) re^{i\varphi+j\psi} (-\tau - ji\tau + re^{i\varphi+j\psi}) (-\tau + ji\tau + re^{i\varphi+j\psi})} = \\ & = \oint_{S_2} \frac{\sin i(\beta + re^{i\varphi+j\psi}) jir^2 e^{2i\varphi+2j\psi} d\varphi d\psi}{r^2 e^{2i\varphi+2j\psi} (-2\tau + re^{i\varphi+j\psi})^2}. \end{aligned}$$

Проведем сокращения и возьмем предел интеграла при $r \rightarrow 0$.

$$\oint_{S_2} = \lim_{r \rightarrow 0} \oint_{S_2} \frac{\sin i(\beta + re^{i\varphi+j\psi}) jid\varphi d\psi}{(-2\tau + re^{i\varphi+j\psi})^2} = 2\pi^2 ji \frac{\sin i\beta}{4\tau^2}.$$

В третьем интеграле делаем замену переменной $v = \lambda + ji\tau + re^{i\varphi+j\psi}$

$$\begin{aligned} & \oint_{S_3} \frac{\sin i(\lambda + ji\tau + re^{i\varphi+j\psi}) jir^2 e^{2i\varphi+2j\psi} d\varphi d\psi}{(-\tau + ji\tau + re^{i\varphi+j\psi}) (\tau + ji\tau + re^{i\varphi+j\psi}) re^{i\varphi+j\psi} (2ji\tau + re^{i\varphi+j\psi})} = \\ & = \oint_{S_3} \frac{\sin i(\lambda + ji\tau + re^{i\varphi+j\psi}) jid\varphi d\psi}{(2ji\tau + re^{i\varphi+j\psi})^2}. \end{aligned}$$

Перейдем к пределу при $r \rightarrow 0$.

$$\oint_{S_3} = \lim_{r \rightarrow 0} \oint_{S_3} \frac{\sin i(\lambda + ji\tau + re^{i\varphi+j\psi}) jid\varphi d\psi}{(2ji\tau + re^{i\varphi+j\psi})^2} = 2\pi^2 ji \frac{\sin i(\lambda + ji\tau)}{4\tau^2}.$$

В четвертом интеграле делаем замену переменной $v = \lambda - ji\tau + re^{i\varphi+j\psi}$

$$\begin{aligned} & \oint_{S_4} \frac{\sin i(\lambda - ji\tau + re^{i\varphi+j\psi}) jir^2 e^{2i\varphi+2j\psi} d\varphi d\psi}{(-\tau - ji\tau + re^{i\varphi+j\psi}) (\tau - ji\tau + re^{i\varphi+j\psi}) (-2ji\tau + re^{i\varphi+j\psi}) re^{i\varphi+j\psi}} = \\ & = \oint_{S_4} \frac{\sin i(\lambda - ji\tau + re^{i\varphi+j\psi}) jid\varphi d\psi}{(-2ji\tau + re^{i\varphi+j\psi})^2}. \end{aligned}$$

Перейдем к пределу при $r \rightarrow 0$.

$$\oint_{S_4} = \lim_{r \rightarrow 0} \oint_{S_4} \frac{\sin i(\lambda - ji\tau + re^{i\varphi+j\psi}) jid\varphi d\psi}{(-2ji\tau + re^{i\varphi+j\psi})^2} = 2\pi^2 ji \frac{\sin i(\lambda - ji\tau)}{4\tau^2}.$$

Суммируя вычисленные интегралы в правой части исходного равенства интеграла, получим

$$\oint_{S_R} \frac{\sin i v}{(v - \alpha)^2 (v - \beta)^2} ds = \frac{\pi^2}{2\tau^2} ji [\sin i\alpha + \sin i\beta + \sin i(\lambda + ji\tau) + \sin i(\lambda - ji\tau)]$$

. Проведем суммирование тригонометрических функций.

$$\begin{aligned} \oint_{S_R} &= \frac{\pi^2}{2\tau^2} j i \left[2 \sin i \frac{\alpha + \beta}{2} \cos i \frac{\alpha - \beta}{2} + 2 \sin i \lambda \cos j \tau \right] = \\ &= 8\pi^2 j i \frac{\sin i \frac{\alpha + \beta}{2} \cos i \frac{\alpha - \beta}{2}}{(\alpha - \beta)^2} \end{aligned}$$

Получили окончательный результат

$$\oint_{S_R} \frac{\sin i v}{(v - \alpha)^2 (v - \beta)^2} dS = 8\pi^2 j i \frac{\sin i \frac{\alpha + \beta}{2} \cos i \frac{\alpha - \beta}{2}}{(\alpha - \beta)^2}.$$

Пример Вычислить интеграл $\oint_{S_Z} \frac{\sin iz}{(z - \alpha)^2 (z - \beta)^2} dS_z$.

Возьмем вспомогательную функцию, равную подынтегральной функции в предыдущем примере. $f(v) = \frac{\sin iv}{(v - \alpha)^2 (v - \beta)^2}$. Поверхность интегрирования

составим из следующих частей: полусфера верхнего полупространства радиуса $R > \alpha > \beta$, полусферы около изолированных точек α, β , находящиеся в верхнем полупространстве, комплексная плоскость Z . Точки α, β окружим полусферами радиуса $r \rightarrow 0$. Так, что $v = \alpha + re^{i\varphi + j\psi}$, $v = \beta + re^{i\varphi + j\psi}$, где аргументы меняются в пределах $0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$. В верхнем

полупространстве имеется еще одна особая точка $v_3 = \frac{\alpha + \beta}{2} + j i \frac{\alpha - \beta}{2}$. По

теореме $\oint_{\Sigma^S} = \oint_{S_Z} + \oint_{S_R} = \text{Re} \left(2\pi^2 j i \text{ress}_{v=v_3} f(v) - \pi^2 j i \text{ress}_{v=\alpha} f(v) - \pi^2 j i \text{ress}_{v=\beta} f(v) \right)$.

Из леммы Жордана видно, что $\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{S_R} = 0$. Сумма вычетов

$\pi^2 j i (\text{ress}_{v=\alpha} f(v) + \text{ress}_{v=\beta} f(v)) = \frac{1}{2} \oint_{S_\alpha} + \frac{1}{2} \oint_{S_\beta}$. При стремлении радиуса

полусфер около точек α, β к нулю, имеем полную комплексную плоскость Z . Для оценки интегралов около этих полусфер рассмотрим лорановское разложение $f(v)$ в окрестности этих точек. Предварительно функцию представим в виде

$$f(v) = \frac{\sin(i v - i \alpha + i \alpha)}{(v - \alpha)^2 (v - \beta)^2} = \frac{\sin i(v - \alpha) \cos i \alpha + \sin i \alpha \cos i(v - \alpha)}{(v - \alpha)^2 (v - \beta)^2}.$$

В числителе интерес представляет только второе произведение, лорановское разложение которого имеет вид.

$$\sin i\alpha \cos i(v-\alpha) = \sin i\alpha \left[1 + \frac{(v-\alpha)^2}{2!} - \frac{(v-\alpha)^4}{4!} + \dots \right].$$

В результате в изолированной точке α рассматриваем функцию $f(v) = \frac{\sin i\alpha}{(v-\beta)^2} \left[\frac{1}{(v-\alpha)^2} + P(v-\alpha) \right]$, где $P(v-\alpha)$ непрерывная в точке α функция. Отсюда вытекает, что интеграл

$$\begin{aligned} \oint_{S_\alpha} &= \oint_{S_\alpha} \frac{\sin i\alpha}{(v-\beta)^2} \frac{1}{(v-\alpha)^2} ds + \oint_{S_\alpha} \frac{\sin i\alpha}{(v-\beta)^2} P(v-\alpha) dS = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin i\alpha}{(v-\beta)^2 (v-\alpha)^2} ds + 0 = \pi^2 ji \frac{\sin i\alpha}{(\alpha-\beta)^2}. \end{aligned}$$

Интеграл около изолированной точки β выразится в виде

$$\oint_{S_\beta} = \pi^2 ji \frac{\sin i\beta}{(\alpha-\beta)^2}$$

Оба интеграла не имеют действительной пространственной части и не вносят вклад в вычисление. Интеграл в верхней половине пространства около изолированной точки $v_3 = \frac{\alpha+\beta}{2} + ji \frac{\alpha-\beta}{2}$ равен вычету, рассчитанному выше в примере. В итоге имеем

$$\begin{aligned} \oint_{S_z} \frac{\sin iz}{(z-\alpha)^2 (z-\beta)^2} ds_z &= \operatorname{Re} \left[2\pi^2 ji \frac{\sin i \left(\frac{\alpha+\beta}{2} + ji \frac{\alpha-\beta}{2} \right)}{(\alpha-\beta)^2} \right] = \\ &= \operatorname{Re} \left[2\pi^2 ji \frac{\sin i \frac{\alpha+\beta}{2} \cos j \frac{\alpha-\beta}{2} - \sin j \frac{\alpha-\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2}}{(\alpha-\beta)^2} \right] = \\ &= -\pi^2 i \frac{e^{-\frac{\alpha-\beta}{2}} - e^{\frac{\alpha-\beta}{2}}}{(\alpha-\beta)^2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \end{aligned}$$

Окончательно имеем интеграл

$$\oint_{S_z} \frac{\sin iz}{(z-\alpha)^2 (z-\beta)^2} dS_z = \pi^2 i \frac{e^{\frac{\alpha-\beta}{2}} - e^{-\frac{\alpha-\beta}{2}}}{(\alpha-\beta)^2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Пример.

Вычислить двойной интеграл $JJ = \iint_{\sigma} \frac{e^v d\sigma}{(v^2 - 2v - 3)^2}$, где σ - поверхность - сферы радиуса $\|v\| = 5$.

Решение. Область G , ограниченная данной поверхностью, содержит четыре особые точки второго порядка. Этими особыми точками являются корни квадратного уравнения, которое находится в знаменателе подынтегральной функции $f(v) = \frac{e^v}{(v^2 - 2v - 3)^2}$. В соответствии с алгеброй

Комплексного пространства Y квадратный многочлен имеет согласно условиям (1.2) пункта 1.1.2. четыре корня в пространстве $v_1 = -1, v_2 = 3, v_3 = 1 + 2ji, v_4 = 1 - 2ji$ и может быть разложен на произведение линейных множителей по двум эквивалентным вариантам

$$v^2 - 2v - 3 = (v + 1)(v - 3) = (v - 1 - 2ji)(v - 1 + 2ji) = 0$$

Согласно пункту 1.6 и формуле 1.64 интеграл JJ будет равен сумме вычетов по всем особым точкам подынтегральной функции

$$JJ = \pi^2 ji \left(\text{ress}_{v=v_1} f(v) + \text{ress}_{v=v_2} f(v) + \text{ress}_{v=v_3} f(v) + \text{ress}_{v=v_4} f(v) \right)$$

В силу единственности разложения в ряд Тейлора и Лорана (пункты и примеры в них 1.4.1, 1.4.2) аналитических в выделенной области пространства функций и эквивалентности их разложения на произведение линейных множителей сумма вычетов по изолированным точкам v_1, v_2 , равна сумме вычетов по изолированным точкам v_3, v_4 . В результате интеграл в пространстве

$$\text{Можно вычислить как } JJ = 2\pi^2 ji \left(\text{ress}_{v=v_3} f(v) + \text{ress}_{v=v_4} f(v) \right)$$

Произведем вычисления

$$\begin{aligned} \text{ress}_{v=v_1} f(v) + \text{ress}_{v=v_2} f(v) &= \frac{e^{-1} + e^3}{16} \\ \text{ress}_{v=v_3} f(v) + \text{ress}_{v=v_4} f(v) &= \frac{e^{1+2ji}}{(1+2ji-1+2ji)^2} + \frac{e^{1-2ji}}{(1-2ji-1-2ji)^2} = \\ &= \frac{e^{1+2ji} + e^{1-2ji}}{16} = \frac{e(e^{2ji} + e^{-2ji})}{16} = \frac{e(\cos 2i + j \sin 2i + \cos(-2i) - \sin(2i))}{16} = \\ &= \frac{2e \cos 2i}{16} = \frac{2e(e^{-2} + e^2)}{16} = \frac{e^{-1} + e^3}{16} \end{aligned}$$

Таким образом, суммы вычетов равны и окончательно интеграл равен

$$JJ = \iint_{\sigma} \frac{e^v d\sigma}{(v^2 - 2v - 3)^2} = 2\pi^2 ji \frac{e^{-1} + e^3}{16} = ji\pi^2 \frac{e^{-1} + e^3}{8}$$

Если область интегрирования ограничена верхней половиной пространства, так что необходимо вычислить несобственный двойной интеграл

$$JJ = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^v d\sigma}{(v^2 - 2v - 3)^2}$$

Подынтегральная функция удовлетворяет лемме (К.Жордана) пункт 1.7.3. В верхней половине пространства находится одна пространственная особая точка $v = v_3$.

Как было показано выше сумма вычетов по особым точкам v_1, v_2 эквивалентна сумме вычетов по особым точкам v_3, v_4 , поэтому интеграл будет равен

$$JJ = 2 \cdot 2\pi^2 ji \left(\text{ress}_{v=v_3} f(v) + \text{ress}_{v=v_4} f(v) \right) - 2\pi^2 j i \text{ress}_{v=v_4} f(v) = \\ = 4\pi^2 j i \text{ress}_{v=v_3} f(v) + 2\pi^2 j i \text{ress}_{v=v_4} f(v)$$

Окончательно получим

$$JJ = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^v d\sigma}{(v^2 - 2v - 3)^2} = 4\pi^2 ji \frac{e^{1+2ji}}{16} + 2\pi^2 ji \frac{e^{1-2ji}}{16}.$$

1.8. Конформные отображения в пространстве

1.8.1. Понятия конформного отображения в пространстве

Теорема 7. Пусть функция $W=f(v)$ имеет в точке v_0 производную $f'(v_0)$, отличную от нуля и от корней из нуля, то есть $ji f'(v_0) \neq 0, \neq i \pm j$. Тогда эта функция реализует в точке конформные отображения. Это значит, что при переходе из пространства (v) в пространство (W) касательная к любой гладкой кривой в фиксированной точке v_0 поворачивается на один и тот же угол в пространстве и имеет один и тот же коэффициент растяжения.

Доказательство. Пусть в некоторой области пространства (v)

$$v = (\rho + jr)e^{i\phi} = R \cdot e^{i\phi + ja}; a = \text{arctg} \frac{r}{\rho}; R = \sqrt{\rho^2 + r^2}$$

задана функция $W = f(v)$, дифференцируемая в точке v_0 и $f'(v_0) \neq 0$ (неравна корням из нуля).

Рассмотрим уравнение гладкой кривой γ в пространстве в виде $v=S(t)$, где t - параметр, меняющийся вдоль этой кривой, проходящий через точку $v_0 = R_0 \cdot e^{i\phi_0 + j\psi_0}$. Проведем касательную к этой кривой в точке v_0 . Положение касательной в пространстве (ее наклоны к координатным плоскостям) характеризуется углами ϕ_0, ψ_0 .

Пусть γ' – образ этой кривой, полученный при отображении $W = f(v)$,

иными словами $W = W(t) = f(S(t))$.

Дифференцируем сложную функцию

$$W'(t_0) = f'(v_0)S'(t_0)$$

по условию

$$S'(t_0) \neq 0, i \pm j, f'(v_0) \neq 0, i \pm j,$$

тогда

$$W'(t_0) \neq 0, i \pm j.$$

обозначим $\arg v = i\phi + ja..$ Пусть $\arg W'(t_0) = i\theta' + j\beta, \arg S'(t_0) = i\theta + j\beta.$

Тогда из соотношения производной для сложной функции имеем $i\theta' + j\beta' = \arg f'(v_0) + i\theta + j\beta.$ (1.67.)

Величину $i\theta_1 + j\beta_1 = i(\theta' - \theta) + j(\beta' - \beta).$ условимся называть комплексным углом поворота кривой γ в точке v_0 при отображении $W = f(v)$. Из формулы (1.64.) следует, что если $f(v_0) \neq 0, i \pm j$, то угол поворота в точке v_0 не зависит от кривой и равен $\arg f'(v_0)$ иначе говоря, все гладкие кривые, проходящие через точку v_0 поворачиваются при отображении на один и тот же угол, равный аргументу производной в этой точке.

Замечание 1. Единственность касательной к гладкой пространственной кривой известна из дифференциальной геометрии.

Замечание 2. В случае, если $\psi \neq \phi$ то имеем дело с четырехмерным пространством, доказательство в котором аналогично.

Замечание 3. Постоянство коэффициента растяжения в точке доказывается стандартным образом как и в случае z -плоскости. Он равен $\|f'(v_0)\|$.

Таким образом, здесь речь идет о подлинном отображении, конформном в трехмерном и более высокого числа измерений пространстве.

Рассмотрим теперь некоторые конкретные отображения.

А. Дробно-линейная функция

$$\omega(v) = \frac{av + b}{cv + a}, \quad (1.68.)$$

где a, b, c, a - комплексные пространственные переменные

$$aa - bc \neq 0 \text{ при } v = -\frac{d}{c}, \omega(v) = \infty.$$

$$\text{Если } v = A(i \pm j) - \frac{d}{c}, \text{ то } \omega(v) = \sqrt{\infty}(i \pm j);$$

$$\frac{d\omega}{dv} = \frac{ad - bc}{(v + d)^2}$$

$$\text{существует при } v \neq -\frac{d}{c} \text{ и } v \neq -\frac{d}{c} + A(i \pm j).$$

Уравнение однозначно разрешимо относительно v

$$v = \frac{b - d\omega}{c\omega - a}.$$

и функция определена в пространстве (ω) .

$$\text{В точке } \omega = \frac{a}{c} \text{ функция равна } \infty, \text{ а в точке } \omega = \infty, v = -\frac{d}{c}.$$

Таким образом, дробно-линейная функция осуществляет отображение пространства v на пространство ω .

Функцию (1.65.) можно представить в виде

$$\omega = B + \beta / v - c.$$

Рассмотрим отображение, которое является основой

$$v_2 = R \cdot e^{iF} + jPe^{i\theta} = \frac{e^{-i\sigma} (re^{i\phi} - jre^{i\psi})}{\|v\|^2} = \frac{e^{-i\phi-j\psi}}{\|v\|},$$

где ψ - комплексное.

Итак, если $v_2 = R \cdot e^{iF+j\psi}$, то

$$R = \frac{1}{\|v\|}; F = -\phi; \Psi = -\psi.$$

Таким образом лучи в пространстве (v) , идущие под углами ϕ, ψ , поворачиваются и проходят под углами $-\phi, -\psi$.

Отображение обладает свойством инверсии (рис. 34.)

$$\|(v - v_0) \|v^* - v_0\| = R_0^2.$$

Для доказательства можно рассмотреть сечения плоскостями $\phi = \text{const}$ и проекцию на плоскость (z) .

В. Отображение шара в шар. Рассмотрим дробно-линейную функцию следующего вида:

$$\omega = e^{ia+j\beta} \frac{v-a}{1-\bar{a}v} = e^{ia+j\beta} \frac{re^{i\phi+j\psi} - a}{1-\bar{a}re^{i\phi+j\psi}}. \quad (1.69.)$$

где a, β - действительные числа.

Если $a = z + j\sigma$, то

$$\bar{a} = \bar{z} - j\sigma = \overline{z + j\sigma}, a = a_1 + ja_2.$$

Рассмотрим "сечения":

а) $\beta = 0, \psi = 0, a = a_1$, тогда

$$\omega = e^{ia} \frac{re^{i\phi} - a_1}{1 - \bar{a}_1 re^{i\phi}}, \text{ то есть имеем круг в соответствующем сечении;}$$

б) при $a = 0, \phi = 0, a = a_2$, имеем

$$\omega = e^{i\beta} \frac{re^{i\psi} - a_2}{1 - \bar{a}_2 re^{i\psi}},$$

это снова круг.

Замечание. Аналогично тому, как это сделано в [7] для плоского случая, можно показать, что подмножество дробно-линейных преобразований дающих отображение шара на себя, является множеством движений пространства Лобачевского (если шар с выколотой осью назвать пространством Лобачевского).

Проведем выкладки, связанные с этим отображением, более детально:

$$\omega = e^{ia+j\phi} \frac{v-a}{1-\bar{a}v}, v = R \cdot e^{i\phi+j\psi} = e^{i\phi+j\psi}, R = 1;$$

$$a = re^{i\phi_0+j\psi_0}, \bar{a} = r \cdot e^{-i\phi_0-j\psi_0}, 0 < r < 1;$$

$$\omega = \frac{e^{i\phi+j\psi} - re^{i\phi_0+j\psi_0}}{1 - re^{i(\phi-\phi_0)+j(\psi-\psi_0)}} = \frac{e^{i\phi+j\psi} - re^{i\phi_0+j\psi_0}}{e^{i\phi_0+j\psi_0} - re^{i\phi+j\psi}} e^{i\phi_0+j\psi_0} =$$

$$= e^{i\phi_0 + j\psi_0} \frac{e^{i(\phi - \phi_0) + j(\psi - \psi_0)} - r}{1 - re^{i(\phi - \phi_0) + j(\psi - \psi_0)}} = e^{i\phi_0 + j\psi_0} \frac{A}{B}.$$

Распишем числитель этого выражения А

$$\begin{aligned} & \left| e^{i(\phi - \phi_0)} \cos(\psi - \psi_0) + je^{i(\phi - \phi_0)} \sin(\psi - \psi_0) - r \right| = \\ & = \sqrt{\left(e^{i(\phi - \phi_0)} \cos(\psi - \psi_0) - r \right)^2 + \left(e^{i(\phi - \phi_0)} \sin(\psi - \psi_0) \right)^2} = \\ & = \sqrt{e^{2i(\phi - \phi_0)} - 2re^{i(\phi - \phi_0)} \cos(\psi - \psi_0) + r^2}, \end{aligned}$$

а также знаменатель В

$$\begin{aligned} & \left| 1 - re^{i(\phi - \phi_0) + j(\psi - \psi_0)} \right| = \\ & = \sqrt{\left(1 - re^{i(\phi - \phi_0)} \cos(\psi - \psi_0) \right)^2 + \left(re^{i(\phi - \phi_0)} \sin(\psi - \psi_0) \right)^2} = \\ & = \sqrt{1 - 2re^{i(\phi - \phi_0)} \cos(\psi - \psi_0) + r^2 e^{2i(\phi - \phi_0)}}; \\ & |\omega| = \left| \frac{1}{B} \right| = 1. \end{aligned}$$

С. Отображение верхнего полупространства на единичный шар. Функция (рис. 35)

$$\omega = \frac{v - a_0}{v - \hat{a}_0},$$

где $a_0 = jr_0 e^{i\phi_0}$, $r_0 > 0$, $\hat{a}_0 = -jr_0 e^{i\phi_0}$

отображает верхнее полупространство на внутреннюю область, ограниченную единичной сферой, причем точка ω переходит на плоскости в точку $0, \hat{a}_0 \rightarrow \infty$.

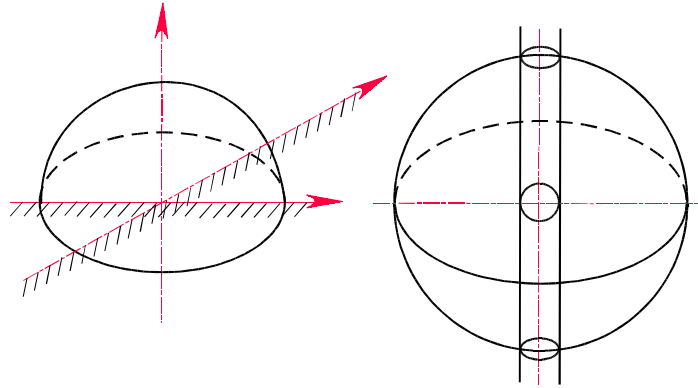


Рис. 35. Отображение верхнего полупространства в полное пространство

Доказательство. Достаточно показать, что всякая точка плоскости (z) переходит при указанном отображении на поверхность единичной сферы. В самом деле

$$\|\omega\|_G = \left| \frac{\rho e^{i\phi} - jr_0 e^{i\phi_0}}{\rho e^{i\phi} + jr_0 e^{i\phi_0}} \right| = 1.$$

В общем виде отображение записывается в виде

$$\omega = e^{ia+j\beta} \frac{v - a_0}{v - \hat{a}_0},$$

где a, β - любые действительные числа.

Д. Функция Жуковского.

Рассмотрим функцию

$$\omega(v) = \frac{1}{2} \left(v + \frac{1}{v} \right) \quad (1.70.)$$

и определим области однолистности этого отображения в пространстве. Как обычно, положим

$v = \rho e^{i\phi + j\psi}$, где ρ, ϕ действительные числа; ψ - комплексное.

Предположим, что v_1 и v_2 переходят в одну точку в пространстве (ω)

$$v_1 + \frac{1}{v_1} = v_2 + \frac{1}{v_2}, (v_1 - v_2) \left(1 - \frac{1}{v_1 v_2} \right) = 0.$$

Таким образом, область однолистности пространства (v) не должна содержать точек, связанных соотношением

$$v_1 v_2 = 1, v_1 v_2 = \rho e^{i\phi(i \pm j)}.$$

В пространстве (v) - это точки, лежащие внутри или вне сферы $\|v\| = 1$ с выколотой осью.

Исследуем отображение при соблюдении этих ограничений

$$\omega(v) = W + jR =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left(\rho e^{i\phi} \cos \psi + j \rho e^{i\phi} \sin \psi + \frac{1}{\rho} e^{-i\phi} \cos \psi - j \frac{1}{\rho} e^{-i\phi} \sin \psi \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\rho e^{i\phi} + \frac{1}{\rho} e^{-i\phi} \right) \cos \psi + j \left(\rho e^{i\phi} - \frac{1}{\rho} e^{-i\phi} \right) \sin \psi \right]. \end{aligned}$$

Проведем преобразование комплексных частей

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \cos \psi \left(\rho \cos \phi + i \rho \sin \phi + \frac{1}{\rho} \cos \phi - \frac{i}{\rho} \sin \phi \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cos \psi \left[\left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) \cos \phi + i \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) \sin \phi \right]. \\ R &= \frac{1}{2} \sin \psi \left(\rho \cos \phi + i \rho \sin \phi + \frac{1}{\rho} \cos \phi + \frac{i}{\rho} \sin \phi \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sin \psi \left[\left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) \cos \phi + i \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) \sin \phi \right]. \end{aligned}$$

Применим формулу Эйлера:

$$W = \frac{1}{2} \sqrt{\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} + 2 \cos 2\phi} \cdot e^{iF_1} \cos \psi = R_1 e^{iF_1} \cos \psi;$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} - 2 \cos 2\phi \cdot e^{iF_2} \sin \psi} = R_2 e^{iF_2} \sin \psi.$$

Проведем последовательно сечения сферы плоскостями, параллельными плоскости (z). Это плоскости $\psi = \text{const}$. Сначала положим $\psi = 0$, тогда

$$\omega(v) = \frac{1}{2} \left[\left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) \cos \phi + i \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) \sin \phi \right].$$

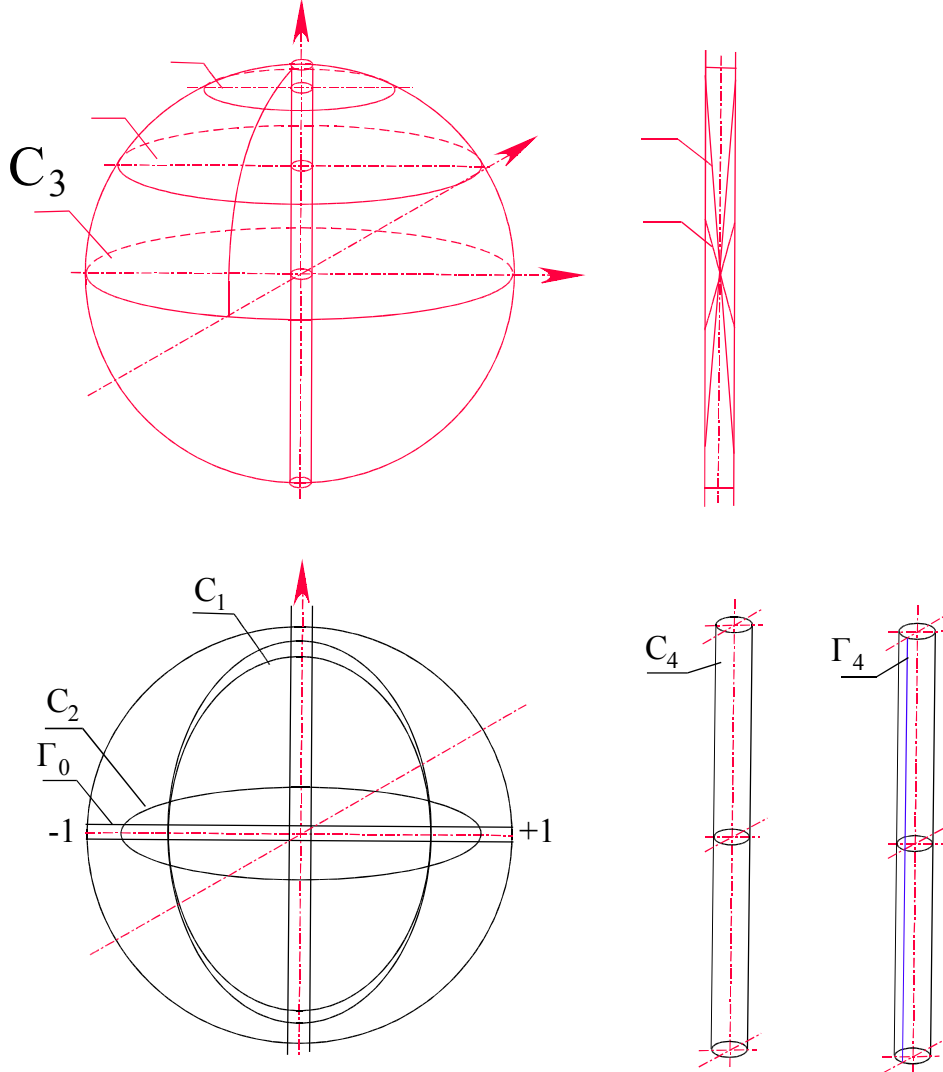


Рис. 36. Отображение внешнего пространства сферы в пространство круга радиуса, равного радиусу сферы толщиной.

Это прежняя функция Жуковского в плоскости (z). На рис.36 представлено отображение, осуществляемое этой функцией. Поверхность сферы сжимается в круг с двойной границей, который по диаметру перерезает выколота ось. Покажем, что кривые C_1 , C_2 , C_3 , C_4 при своем отображении не имеют точек пересечения в круге радиуса $R = \rho$ получим комплекс

$$\omega(v) = \cos^2 \phi \cos^2 \psi - \sin^2 \phi \sin^2 \psi.$$

Преобразуем его по формуле Эйлера

$$\omega(v) = \sqrt{\cos^2 \phi \cos^2 \psi - \sin^2 \phi \sin^2 \psi} \cdot e^{j \arctg i(\tg \phi \tg \psi)} = R_m e^{iF_m}.$$

Если рассматривать отображение плоскости, заданной углами $\phi=0$, $\phi=\pi$, то получим контур C . Система этих контуров и задает отображение (рис. 37).

ГЛАВА 2. ПОДСЧЕТ ПОДЪЕМНОЙ СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА ТЕЛО КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ В ПОТОКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Классическая задача Н.Е. Жуковского о подсчете вектора подъемной силы, действующей на тело конечных размеров в потоке сплошной среды, с применением методов теории функций пространственного комплексного переменного имеет принципиально новое решение. Решение проведем так, чтобы показать непрерывность математического перехода от решения в z -плоскости к пространственному (Y). Покажем, что решение в пространстве содержит решение в плоскости как частный случай.

Летающее тело в пространстве рассматриваем как изолированную особую точку. Пространственный поток для тела выступает как поле его взаимодействия, имеющее более высокий порядок по размерности.

1. Методика классического решения в Z -плоскости

Классическая формула С.А. Чаплыгина (1910 год) получена для подсчета подъемной силы, действующей на цилиндрическое тело в плоскопараллельном потоке. Вектор, сопряженный по i -му вектору подъемной силы, выражается в виде

$$P = \frac{\rho i}{2} \oint_C [f'(\xi)]^2 d\xi.$$

Решение относится к дозвуковым скоростям, следовательно скорость v , плотность потока ρ связаны уравнением Бернулли-Эйлера

$$P = A - \frac{\rho}{2} V^2. \quad (2.1.)$$

В плоскости комплексного переменного комплексный потенциал, описывающий плоский поток, обтекающий окружность радиуса R , получается наложением циркуляционного потока [7]

$$\frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z \text{ на бесциркуляционный поток}$$

$$X(z) = \bar{V}_{\infty} z + \frac{V_{\infty}}{z} R^2,$$

где $\bar{V} = V_{\infty} e^{-i\theta}$ - скорость потока на бесконечности.

Окончательное решение доставляется потенциалом

$$\omega(z) = f(z) = \bar{V}_{\infty} z + \frac{V_{\infty}}{z} R^2 + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z.$$

Бесциркуляционный поток получен, как результат наложения на функцию Жуковского реализующую отображения внешности круга $|z| > R$ на внешность отрезка действительной оси, условия скорости на бесконечности. Комплексный потенциал дает вихрь в центре круга $|z| < R$ интенсивностью Γ . Таким образом, задача об обтекании цилиндра имеет множество решений в зависимости от величины наложенной циркуляции Γ . В этом решении Н. Е. Жуковский заменяет крыло некоторым воображаемым жидким крылом, ограниченным замкнутой

линией тока, и предполагает внутри наличие вихря, имеющего интенсивность, равную сумме интенсивностей вихрей, которые образовались бы в тонком слое на поверхности тела при обтекании его реальной жидкостью. Такой вихрь назван присоединенным.

Этим приемом, оставаясь в рамках идеальной жидкости, Н.Е. Жуковский описал обтекание тела реальной жидкостью с трением. В зависимости от величины циркуляции при обтекании цилиндра возможны различные случаи нарушения симметрии потока относительно одной из осей координат. В силу этого главный вектор давления жидкости отличен от нуля, так как в слоях жидкости под цилиндром скорости бесциркуляционного потока обтекания цилиндра и чисто циркуляционного потока вокруг цилиндра складываются, а над цилиндром вычитаются.

С помощью дополнительного допущения Н.Е. Жуковский и С.А. Чаплыгин теоретически определили величину присоединенного вихря, выдвинув постулат о конечности скорости на задней острой кромке крылового профиля.

Величина циркуляции согласно классическим исследованиям определяется через критические точки потока. Для этого модуль производной комплексного потенциала

$$|f'(z)|$$

для точек, лежащих на цилиндре $R \cdot e^{i\psi}$, приравнивают нулю. Последовательно можно получить

$$f'(z) = V_{\infty} (e^{i\theta} - e^{i\theta-2i\psi}) - \frac{\Gamma i}{2\pi R} e^{i\psi},$$

для простоты полагают $\theta=0$

$$\left| V_{\infty} (1 - e^{-2i\psi}) - \frac{\Gamma i}{2\pi R} e^{-i\psi} \right| = 0$$

откуда циркуляция (с учетом угла θ) равна

$$\Gamma = 4\pi R v_{\infty} \sin(\psi - \theta).$$

При пространственном обтекании крыла конечного размаха присоединенный вихрь согласно классической теореме Гельмгольца должен приходить и уходить в бесконечность. Согласно второй теореме Гельмгольца направление вихря должно быть перпендикулярным плоскости вихря.

Решение в комплексной плоскости содержит такое исправление, которое одновременно удовлетворяет обеим теоремам Гельмгольца. Это направление функции $\arctg i$ в изолированной точке i которое до сих пор остается незамеченным, хотя оно несет в себе всю топологию обтекания.

Исходя из этого нового физического условия, определим величину циркуляции

$$\arctg i = \arctg \frac{\operatorname{Im} f'(z)}{\operatorname{Re} f'(z)}.$$

Для выполнения этого условия необходимо найти решение уравнения.

$$\arg f'(z) = \arctg i.$$

Положим $|\theta = 0|$,

$$f'(z) = v_{\infty} - v_{\infty} e^{-2i\psi} - \frac{\Gamma i}{2\pi R} \cos \psi - \frac{\Gamma}{2\pi R} \sin \psi;$$

$$\operatorname{arctg} i = \operatorname{arctg} \frac{v_{\infty} \sin 2\psi - \frac{\Gamma}{2\pi R} \cos \psi}{v_{\infty} - v_{\infty} \cos 2\psi - \frac{\Gamma}{2\pi R} \sin \psi};$$

откуда величина циркуляции будет равна

$$\Gamma = -2\pi R \cdot e^{i\psi} (iv_{\infty} - iv_{\infty} e^{-2i\psi}) = 2\pi R v_{\infty} \frac{e^{+i\psi} - e^{-i\psi}}{i} = 4\pi R v_{\infty} \sin \psi.$$

Таким образом, применив формулу гиперболического синуса, получили прежнюю формулу для величины циркуляции.

Новое физическое условие по определению величины циркуляции объясняет схему несущей линии Прандтля.

Сущность схемы крыла конечного размаха заключается в следующем: присоединенный вихрь крыла заменяют несущей линией вихря (с направлением $\pm \operatorname{arctg} i$), а свободные вихри в виде уходящих в бесконечность лучей представляются перпендикулярными этой вихревой линии.

2. Методика классического решения в пространстве

Математическая модель пространства (Y) стыкуется с идеальной схемой несущей линии Прандтля. Несущая линия может быть интерпретирована как выколота ось в пространстве (Y), содержащая делители нуля, которые по своей математической природе являются причинами вихреисточника.

Кроме того, выколота ось включает в себе изолированное направление и тем самым удовлетворяет двум теоремам Гельмгольца.

Пелена от свободных вихрей может быть поверхностью вихрей с пространственной циркуляцией.

В комплексном пространстве тело конечных размеров заключим внутри поверхности σ , заданной сеткой интегральных кривых $r = \text{const}$, $\phi = \text{const}$.

На элемент поверхности $d\sigma$ действует векторная сила, направленная внутрь поверхности, поэтому согласно, формуле (2.1.) получим

$$ijPd\sigma = Aijd\sigma - ij \frac{\rho}{2} v^2 d\sigma.$$

Скорость потока в точках ξ поверхности σ будет направлена по касательной к поверхности σ

$$V = \bar{f}'(\xi) = v e^{i\phi + j\psi},$$

где ϕ , ψ - аргументы точки ξ .

Отсюда величина скорости равна (рис. 29)

$$v = \bar{f}'(\xi) e^{-i\phi - j\psi},$$

и двойной интеграл по поверхности будет определять давление на всю конечную область пространства, ограниченную этой поверхностью,

$$P = -\frac{\rho}{2} ij \iint_{\sigma} [f'(\xi)]^2 e^{-2i\phi - 2j\psi} d\sigma = -ij \frac{\rho}{2} \iint_{\sigma} [f'(\xi)]^2 d\sigma,$$

$$\text{где } d\sigma e^{-2i\phi - 2j\psi} = e^{-i\phi - j\psi} |d\sigma| = d\sigma.$$

Сопряженность комплексных величин в пространстве рассматриваем относительно обоих направлений i и j .

На основании интеграла формула справедлива для любого вида поверхности, охватывающей тело конечных размеров. Поэтому рассматриваем элементарную сетку

$r = \text{const}, \phi = \text{const}.$

с периодами 2π по обоим аргументам ϕ, ψ .

Вектор, комплексно-сопряженный вектору подъемной силы, выразится

$$\bar{P} = ij \frac{\rho}{2} \iint_{\sigma} [f'(\xi)]^2 d\sigma. \quad (2.2.)$$

Это и будет классическая формула А.С. Чаплыгина в пространстве для подъемной силы, действующей на тело, охватываемое произвольно замкнутой поверхностью.

В пространстве (Y) воспользуемся функцией Жуковского, реализующей однолистное отображение сферы на внутренность круга с двойной границей (рис. 38).

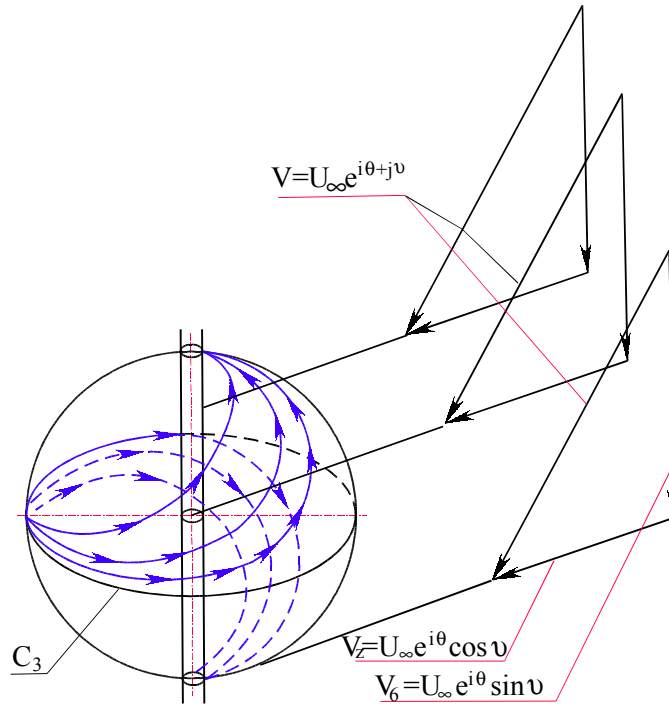


Рис. 38. Обтекание сферы пространственным потоком, вызывающее на ее поверхности циклонный вихрь. Траектории частиц циклонного вихря отвечают простейшей пространственной кривой

Таким образом, используется модель конечных размеров, интегрирование проводится по замкнутой поверхности, а не по контуру, как это делается в z -плоскости.

Комплексный потенциал можно построить, используя и особо простые профили Жуковского (рис. 38).

В (z) -плоскости использовались контурный интеграл

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z},$$

и основанная на нем теорема о вычетах

$$\text{res } f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz = C_{-1},$$

поэтому из лорановского разложения скорости в окрестности изолированной бесконечно удаленной точки

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = f(z) = \left\{ v_{\infty} + \frac{C_{-1}}{z} \right\} + \frac{C_{-2}}{z^2} + \dots$$

вклад в решение вносят только два первых члена (взяты в фигурные скобки). Для плоских контуров в пространстве (Y) справедлив интеграл Коши в форме (1.52), применение которой не изменяет вида формулы Жуковского

$$P = -j\rho \Gamma v_{\infty}.$$

Однако следует иметь ввиду, что циркуляция здесь пространственная по контуру C_3 , охватывающему тело конечных размеров. Скорость V_{∞} пространственно-комплексная

$$V_{\infty} = v_{\infty} e^{i\theta + j\psi}.$$

В зависимости от выбора исходных углов атаки ψ и θ сферы пространственным потоком и их знаков получим различные выражения комплексного потенциала. Однако остановимся на варианте исследований, которые содержат в себе частный случай плоского варианта.

Считаем поток, идущий из бесконечности, $\bar{V}_{\infty} = v_{\infty} e^{-i\theta - j\psi}$.

Тогда из формулы Жуковского получим потенциал, описывающий бесциркуляционное обтекание сферы

$$X(v) = \bar{V}_{\infty} v + \frac{V_{\infty} R^2}{v}.$$

Накладывая на него чисто циркуляционный поток, равный в пространстве

$$\frac{\Gamma}{4\pi i + 2\pi j} \ln v,$$

получим окончательное решение задачи по определению потенциала потока в пространстве

$$\omega(v) = f(v) = \bar{V}_{\infty} v + \frac{V_{\infty} R^2}{v} + \frac{\Gamma}{4\pi i + 2\pi j} \ln v. \quad (2.3.)$$

Скорость потока для этого потенциала выражается сопряженной скоростью

$$\bar{V}_{\infty} = v_{\infty} e^{-i\theta - j\psi},$$

в которой углы атаки, θ - действительные величины.

Случай, когда скорость будет выражаться суммой двух потоков, пока не рассматривается

$$\bar{V}_{\infty} = v_{1\infty} e^{i\theta_1} + j v_{2\infty} e^{i\theta_2}, \quad v_{1\infty} \neq v_{2\infty}, \quad \theta_{1\infty} \neq \theta_{2\infty}.$$

Исследуем решение по двум вариантам определения критических точек в пространственном обтекании сферы сплошным потоком.

Первый вариант соответствует классическому решению — критические точки потока там, где скорость потока равна нулю

$$\|\omega'(\theta)\| = 0.$$

Для этого варианта получаем уравнение.

$$v^2 + \frac{\Gamma}{(4\pi i + 2\pi j)v_{\infty}} v - R^2 e^{2i\theta + 2j\psi} = 0,$$

решая которое, получаем выражение для отыскания критических точек потока

$$v_{кр} = \frac{-\Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 + 4v_{\infty}^2 (4\pi i + 2\pi j)^2 R^2}}{(4\pi i + 2\pi j)2v_{\infty}},$$

Видно, что расположение критических точек зависит от величины циркуляции Γ . Рассмотрим случай, когда величина циркуляции равна

$$\Gamma = 4\pi(4i + 2j)v_{\infty}R$$

(корень в числителе обращается в нуль).

В этом случае величина циркуляции находится в плоскости, в которую отображается сфера (рис. 36). Главный вектор циркуляции будет равен Γ и наклонен под углом $\arctg \frac{1}{2i}$ к действительной оси.

Критические скорости располагаются на сфере. Рассмотрим этот случай более подробно.

Полагая на сфере $v = R e^{i\phi + j\psi}$, определим модуль производной комплексного потенциала

$$\|f'(v)\| = \|v_{\infty} e^{-i\phi - j\psi} \left(e^{-i\theta - j\theta + i\phi + j\psi} - e^{i\theta + j\theta - i\phi - j\psi} + \frac{\Gamma}{(4\pi i + 2\pi j)v_{\infty}R} \right)\|$$

Произведем преобразование фигурных скобок

$$e^{-i\theta - j\theta + i\phi + j\psi} - e^{i\theta + j\theta - i\phi - j\psi} = -2i \sin(\theta - \phi) \cos(\theta - \psi) - 2j \cos(\theta - \phi) \sin(\theta - \psi).$$

Для сокращения записи введем обозначения:

$$A = -2i \sin(\theta - \phi) \cos(\theta - \psi);$$

$$B = -2 \cos(\theta - \phi) \sin(\theta - \psi).$$

Преобразуем величину, содержащую циркуляцию

$$\frac{\Gamma}{(4\pi i + 2\pi j)R v_{\infty}} = \left(-\frac{2}{3}i + \frac{1}{3}j \right) \frac{\Gamma}{2\pi R v_{\infty}},$$

где

$$\frac{\Gamma}{2\pi R v_{\infty}} = X.$$

С учетом введенных обозначений, производная примет вид

$$f'(v) = v_{\infty} e^{-i\phi - j\psi} \left[\left(A - \frac{2}{3}X \right) i + \left(\frac{1}{3}X + B \right) j \right].$$

Определим модуль выражения

$$\|f'(v)\| = v_{\infty} \sqrt{-\left(A - \frac{2}{3}X \right)^2 + \left(\frac{1}{3}X + B \right)^2}.$$

Приравняем величину, стоящую под корнем нулю и получим циркуляцию

$$X = 2A + B \pm \sqrt{A^2 + 4AB + 2B^2}$$

В результате величина циркуляции выразится

$$\Gamma = 2\pi v_{\infty} R \left| 2A + B \pm \sqrt{A^2 + 4AB + 2B^2} \right|.$$

Формула инвариантна относительно осей координат. При переходе к плоскости z получим в обоих случаях решение Н.Е. Жуковского:

при $\theta - \phi = 0$, $A = 0$, $B = -2 \sin(\theta - \psi)$

$$\Gamma = 4\pi R v_{\infty} \sin(\theta - \psi);$$

при $\theta - \psi = 0$, $B = 0$, $A = -2 \sin(\theta - \phi)$

$$\Gamma = 4\pi R v_{\infty} \sin(\theta - \phi)$$

(в обоих случаях взят знак минус квадратного корня).

При положительном знаке квадратного корня имеем величину, которая превышает классический плоский вариант:

$$\Gamma = -6\pi R v_{\infty} \sin(\theta - \psi);$$

$$\Gamma = -6\pi R v_{\infty} \sin(\theta - \phi).$$

Второй вариант связан с наличием в пространстве изолированной оси, которая может трактоваться как вихревой шнур естественной циркуляции. Дискретные точки делителей нуля по своей природе имитируют в пространстве наличие крутящего момента, что и определяет третье условие для определения критических точек потока. Первые два условия:

$$|f'(z)| = 0,$$

$$\arg f'(z) = \pm \arctg i$$

реализованы как в плоскости комплексного переменного, так и в пространстве

$$f'(v) = R \cdot e^{i\phi} (i \pm j).$$

В этом случае делители нуля можно трактовать как причины вихреисточника. Согласно свойствам этих элементов и их геометрической иллюстрации при обтекании пространственного тела сплошной средой возникают на некоторых линиях такие условия обтекания, когда скорость разлагается на два взаимно перпендикулярных вектора, не имевших векторной суммы и приложенных к разным точкам, расположенным в окрестности точек той линии, на которой эти условия возникают. Образовавшееся плечо приводит к образованию крутящего момента в точке. Каждая среда имеет свою критическую скорость и свой радиус вы колотой оси.

Равенство производной от комплексного потенциала делителям нуля отвечает нахождению в решении критических линий потока. В этом коренное отличие решения в пространстве.

Таким образом, комплексный потенциал с учетом принятых обозначений

$$f'(v) = v_{\infty} e^{-i\phi - j\psi} \left[\left(A - \frac{2}{3} X \right) i + \left(\frac{1}{3} X + B \right) j \right]$$

равен делителям нуля при выполнении условия

$$\left(A - \frac{2}{3} X \right)^2 = \left(B + \frac{1}{3} X \right)^2,$$

так как, если комплекс $ia + j\beta$ имеет $a^2 = \beta^2$, то его модуль равен корню из нуля, а аргумент соответственно $\arctg i$

$$\|v\| = \sqrt{(ai)^2 + (j\beta)^2} = \sqrt{0} \rightarrow 0;$$

$$\arg v = \arctg i.$$

Раскроем выражение $f'(v)$ и получим

$$A - B = \frac{1}{6} \frac{\Gamma}{\pi R v_{\infty}} + \frac{2}{6} \frac{\Gamma}{\pi R v_{\infty}} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma}{\pi R v_{\infty}}.$$

Подставим обозначения А, В

$$\begin{aligned} & -2 \sin(\theta - \phi) \cos(\theta - \psi) + 2 \cos(\theta - \phi) \sin(\theta - \psi) = \\ & = \cos(\theta - \phi) \sin(\theta - \psi) - \sin(\theta - \phi) \cos(\theta - \psi) = \frac{1}{4} \frac{\Gamma}{\pi R v_{\infty}} \end{aligned}$$

Выражение для циркуляции принимает вид

$$\Gamma = 4\pi R v_{\infty} [\cos(\theta - \phi) \sin(\theta - \psi) - \sin(\theta - \phi) \cos(\theta - \psi)].$$

Выражение содержит частные случаи плоскопараллельного обтекания:

при $\theta - \phi = 0$, $\theta - \psi = \pi$

$$\Gamma_1 = \pm 4\pi R v_{\infty} \sin(\theta - \psi);$$

при $\theta - \psi = 0$, $\theta - \phi = \pi$

$$\Gamma_2 = \pm 4\pi R v_{\infty} \sin(\theta - \phi).$$

Решение содержит классические решения как частный случай.

Потенциал потока в пространстве (2.4.) в виде (2.3.) дает скорость

$$\frac{\partial \omega}{\partial v} = \bar{V}_{\infty} - \frac{V_{\infty} R^2}{v^2} + \frac{\Gamma}{(4\pi i + 2\pi j) v},$$

где $\bar{V}_{\infty} = V_{\infty} e^{-i\theta - j\psi}$

Квадрат скорости дает

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \omega}{\partial v} \right)^2 &= \bar{V}_{\infty}^2 - \frac{V_{\infty}^2 R^2}{v^4} + \frac{\Gamma^2}{(4\pi i + 2\pi j)^2} \frac{1}{v^2} - 2 \frac{\bar{V}_{\infty} V_{\infty} R^2}{v^2} + 2 \frac{\bar{V}_{\infty} \Gamma}{(4\pi i + 2\pi j) v} \\ &- 2 \frac{V_{\infty} R^2 \Gamma}{(4\pi i + 2\pi j) v^3} \end{aligned}$$

В соответствии с формулой (2.2.) и теорией о вычитках в этом выражении используется два

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial v} \right)^2 = \frac{1}{v^2} \left(\frac{\Gamma^2}{(4\pi i + 2\pi j)^2} - 2 \bar{V}_{\infty} V_{\infty} R^2 \right)$$

И величина подъемной силы будет выражена как

$$\begin{aligned} P &= \frac{\rho j i}{2} 2\pi^2 j i \left[\frac{\Gamma^2}{(4\pi i + 2\pi j)^2} - 2 \bar{V}_{\infty} V_{\infty} R^2 \right] = \\ &= \pi^2 \rho \left[\frac{\Gamma^2}{(4\pi i + 2\pi j)^2} - 2 \bar{V}_{\infty} V_{\infty} R^2 \right] \end{aligned}$$

Формула значительно отличается от формулы Жуковского

$$P = -i\rho \Gamma \bar{V}_{\infty}$$

Однако ни формула Н.Е. Жуковского, ни выведенные формулы не претендуют на окончательное решение, а демонстрируют рабочий аппарат для введения многообразных факторов, участвующих в процессе обтекания.

Представленное решение показало, что математические объекты - делители нуля, получили свое гидродинамическое толкование как источники вихря. Кроме того, выражение циклической постоянной, выбранное в главе 1, равное

$$\Gamma = 4\pi i + 2\pi j.$$

соответствует физическому смыслу, ибо в противном случае при переходе к частным случаям из пространства к плоскости выражения не имели бы прежнего вида. Определение простейшей кривой C в пространстве также оправдано.

Проведенные решения показывают, что методика Н.Е. Жуковского реализуется в пространстве любого числа измерений. Введение новой размерности пространства уточняет решение и является методом введения структурных взаимодействий в этом сложном процессе, таким, например, как взаимодействие поверхностного слоя с потоком и с поверхностью тела.

В этом случае надо также учитывать, что контурные интегралы дают круг решений в дозвуковой области, а если применять объемный интеграл Коши

$$f(v_0) = \frac{1}{8\pi^3{}_{ijK}} \iiint_v \frac{f(\xi) d\xi^3}{(\xi - v_0)^3}$$

и теорему о вычетах в форме

$$\text{res } f(a) = \frac{1}{8\pi^3{}_{ijK}} \iiint_v f(\xi) d\xi^3 = C_{-3},$$

то происходит переход в область газовой динамики $v > C_\rho$. Зависимость скорости потока и плотности вводится интегралом Бернулли. Все это путь к исследованию структурных взаимодействий.

ГЛАВА 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОСНОВНЫХ СООТНОШЕНИЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ С ПОМОЩЬЮ АЛГЕБРЫ КОМПЛЕКСНОГО ПРОСТРАНСТВА

3.1. Преобразования Лоренца

Преобразования Лоренца явились математическим фундаментом для развития основных принципов теории относительности. Скорость света в теории относительности является предельной скоростью распространения взаимодействий, а также возможно достижимой скоростью движения материи -

$$c = 2.988 \cdot 10^{10} \text{ см/с}$$

Из соображения "наглядности" в теории относительности пользуются воображаемым четырехмерным пространством, на осях которого откладываются три пространственные координаты x , y , и временная ct . Расстояние между двумя точками в таком пространстве

$$\rho_{1,2} = [c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (\xi_2 - \xi_1)^2]^{1/2}$$

является интервалом между событиями 1 и 2.

Принцип относительности гласит: "интервал между двумя событиями во всех инерциальных системах отсчета одинаков". Воображаемое преобразование одной системы координат к другой математически выражается как вращение четырех мерной системы. Этот физический смысл пространства установлен в геометрии Миньковского [8].

Связь между старыми и новыми координатами в этой геометрии дается следующей матрицей, записанной в наиболее общем виде:

$$x = x' ch\psi + ct' sh\psi$$

$$ct = y = x' sh\psi + ct' ch\psi$$

Где ψ - угол поворота.

При этом преобразовании соблюдается соответствие интервалов

$$c^2 t^2 - x^2 = c^2 t'^2 - x'^2$$

Покажем, что преобразования Миньковского вытекают из связи чисел во введенном комплексном пространстве Рассмотрим пока плоский случай, хотя это определение для пространства чисто условное. Умножим равенство с координатой x на вектор ij и сложим со вторым равенством

$$ct + jix = x' ch\psi + jix' ch\psi + ct' ch\psi + jict' sh\psi =$$

$$x'(sh\psi + jich\psi) + ct'(ch\psi + jish\psi) = (x' + jict')(sh\psi + jich\psi)$$

Произведем преобразования по правилам пространственной комплексной алгебры:

$$ct + jix = \sqrt{c^2 t^2 - x^2} e^{j \arctg \frac{x}{ct}};$$

$$x' + jict' = ji \sqrt{c^2 t'^2 - x'^2} e^{j \arctg \frac{x'}{ct'}};$$

$$sh\psi + jich\psi = j e^{\arctg(th\psi)}.$$

В результате получим

$$\sqrt{c^2 t^2 - x^2} e^{j \arctgi \frac{x}{ct}} = \sqrt{c^2 t'^2 - x'^2} e^{j \arctgi \frac{x'}{ct'} + j \arctgi(th \psi)}$$

Угол ψ определяется через движение, центра инерции одной из систем K' , $x' = 0$ относительно другой K .

Тогда

$$x = ct' sh \psi, \quad ct = ct' ch \psi.$$

$$\text{Откуда } \frac{x}{ct} = th \psi = \frac{v}{c},$$

и равенство приобретает вид

$$\sqrt{c^2 t^2 - x^2} e^{j \arctgi \frac{x}{ct}} = \sqrt{c^2 t'^2 - x'^2} e^{j \arctgi \frac{x'}{ct'}} e^{j \arctgi \frac{v}{c}} \quad (3.1.)$$

В комплексном пространстве числа равны, если равны их модули и аргументы. Равенство модулей дает равенство интервалов в теории относительности

$$\sqrt{c^2 t^2 - x^2} = \sqrt{c^2 t'^2 - x'^2}.$$

Равенство аргументов дает выражение, которое преобразуется к фундаментальному соотношению скоростей в теории относительности

$$j \arctgi \frac{x}{ct} = j \arctgi \frac{x'}{ct'} + j \arctgi \frac{v}{c},$$

$$\frac{x}{ct} = \frac{v}{c} \quad \text{но в системе } K,$$

$$\frac{x'}{ct'} = \frac{v'}{c} \quad \text{а в системе } K',$$

Сумма $\arctg$ может быть записана в виде

$$\arctgi \frac{x'}{ct'} + \arctgi \frac{v}{c} = \arctg \frac{i \frac{v'}{c} + i \frac{v}{c}}{1 + \frac{v' v}{c^2}}$$

Приравнявая аргументы, получаем

$$v = \frac{v' + v}{1 + \frac{v' v}{c^2}} \quad (3.2.)$$

Проведем дальнейшие исследования на базе аппарата пространственной комплексной алгебры. Координаты x , y , ξ , t в теории относительности преобразуются по формулам:

$$x = \frac{x' + ct'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, y = y', \xi = \xi',$$

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Теория относительности утверждает, что движение со скоростью света невозможно и пространство делится световым конусом (рис. 39) на две области и только там, где $v < c$ действуют принципы этой теории.

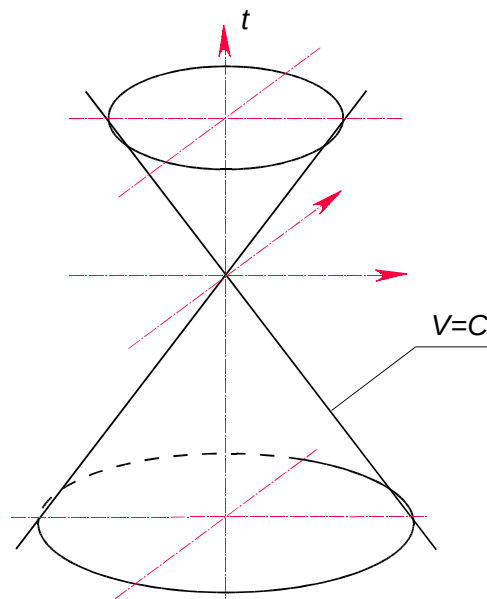


Рис. 39. Световой конус теории относительности, образованный множеством лучей, исходящих из нулевой точки начала координат. Световой конус делит физическое пространство на области, изолированные друг от друга

Если $V' = c$, то имеем из (3.2.) $v = c$. Если, $V' = c$, то

$$\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \sqrt{0} \neq 0$$

и координаты x , t в преобразованиях Лоренца превращаются в бесконечность. Поэтому движение со скоростью, равной скорости света, невозможно, утверждает теория относительности.

В комплексном пространстве $v = c$ возможно и необходимо для объяснения $\mathcal{E}$ -туннеля и конуса-фильтра дискретных точек. Световой конус теории относительности - это конус-фильтр делителей нуля, который собирается в $\mathcal{E}$ -туннель по временной координате (рис. 40).

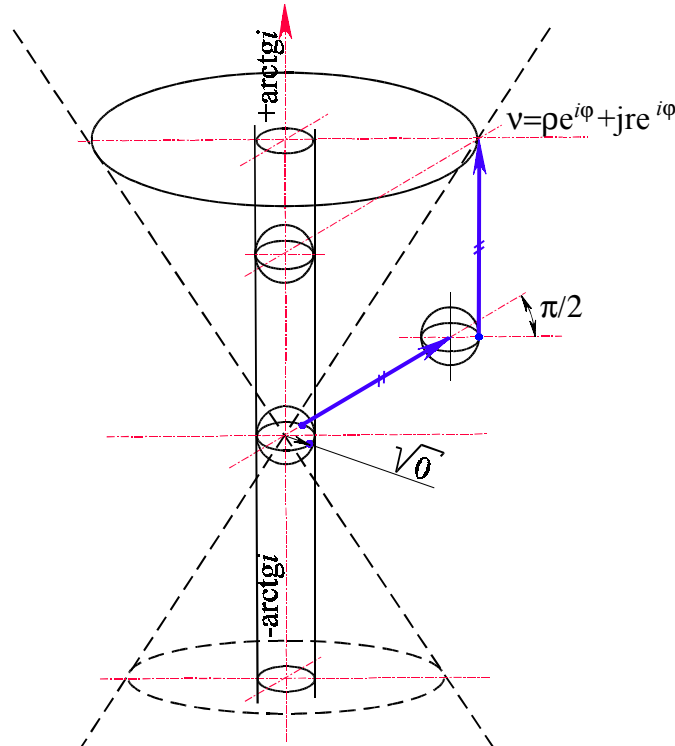


Рис. 40. Конус-фильтр делителей нуля эквивалентен световому конусу теории относительности. В сферических координатах конус-фильтр сворачивается в изолированную координатную ось

В этом случае (когда $v = c$ равенство (3.1.) перейдет в равенство делителей нуля

$$\sqrt{0}e^{j\arctgi} = \sqrt{0}e^{j\arctgi}.$$

Соотношение показывает: на световом конусе-фильтре интервалы обеих систем K, K' равны корню из нуля. Направление изолировано.

Выход из туннеля может произойти, когда v станет меньше $v < c$, а также когда $v > c$, либо необходим дополнительный поворот составляющих скоростей на угол ϕ , меньший $\pi/2$. Условие $v > c$ запрещено теорией относительности ввиду появления мнимых координат, комплексный пространственный анализ снимает это ограничение.

Если центр инерции системы k движется с бесконечно большой скоростью $v \rightarrow 0$, то преобразование координат происходит по формулам.

$$x \rightarrow -ict, t \rightarrow -ix'$$

Этот результат соответствует физическому смыслу времени как координате в четырехмерном пространстве. Если центр инерции системы k достигнет бесконечно большой скорости, то его координаты повернутся на угол $\pi/2$ относительно координат системы k' .

Таким образом, c - есть предельная скорость взаимодействия, но возможно не предельно достижимая скорость движения. Достигнув предельной скорости взаимодействия, системы образуют структуру более высокой размерности, в которой возможно имеется своя предельная скорость.

Соотношение (3.2.) дает вывод, что если $v = c$, то $v' = c$. Это вполне понятно, так как системы находятся одновременно на световом конусе.

3.2. Энергия в пространстве

Пространственно-временные координаты, введенные теорией относительности, позволяют записать основные уравнения движения в четырехвекторной форме. Рассмотрим, к каким последствиям приводит запись этих четырехвекторов в комплексном пространстве. Если взять вектор скорости

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt},$$

то, чтобы превратить эти векторы в систему четырех пространственно-временных координат, эти векторы делят на величину

$$\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

так, что четырехвектор скорости записывается в виде [9]

$$U_\mu = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right).$$

Видно, что один из компонентов чстырехвектора всегда больше скорости света. Это одно из противоречий, которое необходимо преодолеть математическому описанию теории относительности. В комплексном пространстве эта матрица запишется в виде

$$U_\mu = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} + ji \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

и преобразуется по законам комплексной алгебры

$$U_\mu = ce^{j \arctg i \frac{v}{c}} \quad (3.3.)$$

Таким образом, в сферической системе координат скорость U_μ системы К выражается как вектор с модулем, равным скорости передачи возмущения в среде, и аргументом, выраженным функцией $\arctg i \frac{v}{c}$, где v - скорость в

системе К. Это выражение показывает, что с какой бы скоростью v ни двигался объект в системе К, волна от него будет распространяться со скоростью возмущения. Даже если $v = c$, то имеем

$$U_\mu = ce^{j \arctg i} = \frac{c}{\sqrt{0}} i + \frac{c}{\sqrt{0}} j = \sqrt{\infty} (i + j).$$

Соотношение показывает, что даже при скоростях, равных по осям координат бесконечной величине, волна взаимодействия имеет конечную скорость, равную скорости взаимодействия.

В комплексное пространство (Y) четырехвектор энергии импульса запишется в виде

$$p_{\mu} = \frac{E}{c} \pm jip = \sqrt{\left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2} e^{j \arctg \frac{pc}{E}} = m_0 c e^{j \arctg \frac{v}{c}}.$$

Выражение показывает, что с какой бы скоростью v ни двигался объект-система K' в системе K ее модуль, модуль импульса, постоянен и равен величине $m_0 c$.

Из условия равенства комплексных чисел получаем известные соотношения теоретической физики между массой m_0 , энергией E и импульсом p частиц:

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m_0^2 c^2;$$

из равенства модулей

$$m_0 c = \sqrt{\left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2}$$

из равенства аргументов

$$\frac{pc}{E} = \frac{v}{c}, p = \frac{vE}{c^2}.$$

Импульс в комплексных координатах описывает сферу радиусом $m_0 c$. Если

энергия равна импульсу $\frac{E}{c} = p$, когда $v = c$, то

$$v = \sqrt{0} e^{j \arctg 1} = m_0 c e^{j \arctg 1} \neq 0 \quad (3.4.)$$

Соотношение (3.4) вводит размер $\mathcal{E}$ -туннеля в комплексном пространств для частиц квантовой механики.

Диаметр $\mathcal{E}$ -туннеля равен характеристической величине частицы в координатах импульса

$$\|v\| = \sqrt{0} = m_0 \quad (3.5.)$$

Энергия частицы, движущейся со скоростью света, разлагается на два взаимно перпендикулярных несуммируемых вектора, имеющих свое начало в двух разных точках окрестности $\mathcal{E}$ -туннеля. Туннель диаметра $\mathcal{E}$ заключает в себе изолированное направление $\arctg 1$, характеризует частицу исходной массы покоя m_0 . Все это говорит о том, что пространственно-временные координаты вскрывают наличие в природе мирового осциллятора, непрерывно посылающего в пространство волны энергии, как только скорость отдельных частей материи переходит через скорость света. Выбросить механизм такого перехода от $v < c$ до $v > c$ означает выбросить механизм движения материи.

Выразим энергию через комплексный импульс и комплексную скорость

$$p_{\mu}, U_{\mu}.$$

$$\begin{aligned}
 E = p_{\mu} U_{\mu} &= \left(\frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} + ji \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right) \times \\
 &\times \left(\frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} + ji \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right) = \\
 &= \frac{m_0 c^2 + m_0 c^2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} + 2ji \frac{m_0 c v + m_0 c^2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = m_0 c^2 e^{j \arctg \frac{2 \frac{v}{c}}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.
 \end{aligned}$$

Таким образом

$$E = m_0 c^2 e^{j \arctg \frac{2 \frac{v}{c}}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Энергия согласно этим преобразованиям представляет геометрически в пространстве сферу, ядро которой есть пересечение двух изолированных ϵ -туннелей радиуса $\sqrt{0}$ и которое в свою очередь окружено мнимой сферой комплексного радиуса.

Эйнштейновская формула энергии

$$E = m_0 c^2$$

есть модуль энергетической сферы $\|E\|$.

Энергия частицы определяется двумя энергетическими векторами:

$$E_1 = m_0 c^2 \frac{1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}; E_2 = m_0 c \frac{2 \frac{v}{c}}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}.$$

Если $\frac{v}{c} \rightarrow 0$, то имеем формулу Эйнштейна

$$E_1 = m_0 c^2, E_2 = 0.$$

Если $\frac{v}{c} \rightarrow \infty$, то опять возвращаемся к формуле

$$E_1 = m_0 c^2, E_2 = 0$$

Если $\frac{v}{c} \rightarrow 1$, то получаем выражение

$$E_1 = m_0 c^2 e^{j \arctg i}.$$

Таким образом, при превышении скорости света вектор энергии поворачивается в пространстве на угол π по энергии E_1 и на угол $\pi/2$ по энергии E_2 . Формула Эйнштейна есть частный критический случай в природе.

3.3. Самосоогласованность взаимодействующих пространств

Скорости v_x, v_y, v_z , системы К связаны со скоростями v'_x, v'_y, v'_z системы

К', которая движется относительно нее со скоростью v вдоль оси X, по формулам:

$$v_x = \frac{v'_x V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}; v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}; v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}.$$

В комплексном виде имеем

$$U_\mu = ce^{j \arcti \left(\frac{v'_x + v}{c \left(1 + \frac{v'_x v}{c^2} \right)} \right)} \quad (3.6.)$$

Из этой формулы для дальнейшего следует вывод: если в системе К' достигается скорость света c , так что происходит движение в ε -туннеле со скоростью

$v'_x = c$, то в соответствии с формулой (3.3.); имеем

$$U'_\mu = ce^{j \arcti}$$

и система К' выстраивается по отношению к системе К также по изолированному направлению

$$U_\mu = ce^{j \arcti}.$$

В этом состоит принцип самосоогласованности пространственных взаимодействий. В этом анализе замечен переход к исследованию формирования структуры пространств, к которому перейдем в следующей главе.

Таким образом, комплексное пространство включает в себя алгебру четырехвекторов теории относительности. Становится очевидным, что введенный в математический аппарат теории относительности временный коэффициент

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

фактически ввел в рассмотрение дискретные точки делителей нуля и ε -туннель в пространстве.

Комплексное преобразование скоростей, энергии, импульса по-новому трактует ограничение скорости v . Ограничение скорости связано со структурными изменениями в пространстве.

Диаметр ε -туннелей характеризуется импульсом частицы и тем местом, которое она занимает в структуре пространства.

3.4. Исследование интервала теории относительности

3.4.1. Общие сведения

Теория относительности основана на открытии, что пространство и время едино, а геометрия его псевдоевклидова. Четырехмерный мир пространства времени един. Бесконечно малый интервал между двумя событиями является инвариантом в этом мире. Псевдоевклидова геометрия характеризуется разными знаками у квадратов времени и пространства в интервале. В теории абсолютен интервал dS . Он может быть положительным $dS > 0$, отрицательным $dS < 0$, и равным нулю $dS = 0$. Первый называют временно подобным интервалом, второй пространственно подобным интервалом, третий световым (изотропным) интервалом. В теории относительности математические операции производятся с координатными системами отсчета через интервал и возврат к новым координатным системам. Лоренц открыл преобразования, которые оставляют интервал при переходе от одной системы координат (X, Y, Z, cT) к другой

Системе координат (X', Y', Z', cT') без изменения. Преобразования Лоренца между штрихованными и не штрихованными координатами имеют вид

$$T' = \frac{T - \frac{UX}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}; X' = \frac{X - UT}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}; Y' = Y; Z' = Z. \quad (3.4.1.)$$

Обратные преобразования имеют вид

$$T = \frac{T' + \frac{UX'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}; X = \frac{X' + UT'}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}; Y = Y'; Z = Z'$$

Рассмотрим доказательство об относительности времени и изменения длины, которое приводит А.А. Логунов (8). Имеются две инерциальные системы отсчета, движущиеся относительно друг друга со скоростью U . На системы накладываются три условия

1) Метрики не штрихованной системы отсчета и штрихованной систем равны соответственно

$$dS^2 = c^2 T^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2 \quad (3.4.2.)$$

$$dS^2 = c^2 T'^2 - dX'^2 - dY'^2 - dZ'^2 \quad (3.4.3.)$$

2) Координатные оси имеют одинаковое направление для двух систем.

3) Относительная скорость U направлена вдоль оси X . Тогда координаты и время будут связаны преобразованиями Лоренца. Для двух событий $(X_1, Y_1, Z_1, T_1), (X_2, Y_2, Z_2, T_2)$, где для определенности полагают $X_2 > X_1, T_2 > T_1$, из соотношений Лоренца можно получить

$$X_2' - X_1' = \frac{X_2 - X_1 - U(T_2 - T_1)}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}} \quad (3.4.4.)$$

$$T_2' - T_1' = \frac{T_2 - T_1 - \frac{U}{c^2}(X_2 - X_1)}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}} \quad (3.4.5.)$$

Далее вводится параметр

$$\omega = \frac{X_2 - X_1}{T_2 - T_1} \geq 0 \quad (3.4.6.)$$

И соотношения (3.4.4.) и (3.4.5.) запишутся в виде

$$X_2' - X_1' = (X_2 - X_1) \frac{1 - \frac{U}{c^2} \omega}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}} \quad (3.4.7.)$$

$$T_2' - T_1' = (T_2 - T_1) \frac{1 - \frac{U \omega}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}} \quad (3.4.8.)$$

Величина интервала между событиями будет равна

$$S_{12}^2 = c^2(T_2 - T_1)^2 - (X_2 - X_1)^2 \quad (3.4.9.)$$

3.4.2. Интервал в комплексном выражении

Преобразованную координатную матрицу запишем в выражениях комплексной пространственной алгебры. Левая часть соотношений (3.4.7) и (3.4.8) примет вид

$$dS_{12} = c(T_2' - T_1') + ji(X_2' - X_1') \quad (3.4.10.)$$

По законам комплексной алгебры модуль комплекса (3.4.10) равен

$$|dS_{12}| = \sqrt{c^2(T_2' - T_1')^2 - (X_2' - X_1')^2} \quad (3.4.11.)$$

Аргумент комплекса

$$\psi' = \arg dS_{12} = \arctg i \frac{X_2' - X_1'}{c(T_2' - T_1')} \quad (3.4.12.)$$

Из модуля комплекса (3.4.11.) видно, квадрат модуля комплекса (3.4.10.) равен интервалу

$$dS_{1,2}^2 = |dS_{12}|^2 \quad (3.4.13.)$$

Правая часть соотношений (3.4.7.) и (3.4.8.) даст комплекс

$$dS_{12} = c(T_2 - T_1) \frac{1 - \frac{U\omega}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}} + ji(X_2 - X_1) \frac{1 - \frac{U}{\omega}}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}} \quad (3.4.14.)$$

Модуль комплекса в этом случае равен

$$|dS_{12}| = \sqrt{c^2(T_2 - T_1)^2 \frac{\left(1 - \frac{U\omega}{c^2}\right)^2}{1 - \left(\frac{U}{c}\right)^2} - (X_2 - X_1)^2 \frac{\left(1 - \frac{U}{\omega}\right)^2}{1 - \left(\frac{U}{c}\right)^2}} \quad (3.4.15.)$$

Подкоренное выражение дает квадраты интервала $dS_{1,2}$, так что сам интервал есть квадрат модуля комплекса $dS_{1,2}^2 = \|dS_{12}\|^2$. Аргумент комплекса

$$\psi = \arctg i \frac{X_2 - X_1}{c(T_2 - T_1)} \frac{1 - \frac{U}{\omega}}{1 - \frac{U\omega}{c^2}} \quad (3.4.16.)$$

Таким образом, матрица координат теории относительности записывается как равенство комплексов в сферической системе координат.

$$dS'_{12} e^{j\psi'} = dS_{12} e^{j\psi} \quad (3.4.17.)$$

Где $dS', \psi', dS_{12}, \psi$ определены по формулам (3.4.11.), (3.4.12.), (3.4.15.), (3.4.16.). Алгебра комплексного пространства утверждает равенство комплексов при равенстве их модулей и равенстве аргументов

$$dS'_{12} = dS_{12}, \psi' = \psi. \quad (3.4.18.)$$

В теории относительности оперируют только первым равенством. Отсутствие второго равенства обуславливает исследовать интервал в зависимости от соотношения параметров U, ω, c , и вводить название интервалам. Равенство аргументов комплексов координатной матрицы снимает эти ограничения. Рассмотрим как происходят исследования в теории относительности и покажем преимущество комплексной пространственной алгебры и геометрии комплексного пространства. Наличие комплексного аргумента определяет наличие изолированного направления в четырехмерном пространстве. Координата времени повернута относительно пространственной координате на

угол $\varphi = \frac{\pi}{2}$, так что пространственная и временная координаты имеют разные

исходные точки в начале координат. В теории относительности этот факт отражается как разность знаков у квадратов временной и пространственной координате. Исследуем аргументы комплексов и условия теории относительности, которые были применены при выводе соотношений о сокращении времени и изменению длинны при переходе из одной

инерциальной системы координат к другой. В аргументах ψ', ψ выделим действительную и мнимую части. Представим $\psi' = \sigma' + i\tau'$, $\psi = \sigma + i\tau$. Применяя формулу 1.41, пункта 1.4 запишем

$$\sigma' = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2 \frac{X_2' - X_1'}{c(T_2' - T_1')} \cos \delta}{1 - \left(\frac{X_2' - X_1'}{c(T_2' - T_1')} \right)^2} \quad (3.4.19.)$$

В теории относительности исследуется простейший вариант, когда отсутствуют повороты в комплексной плоскости и $\delta = 0$. В этом случае

$$\sigma' = \operatorname{arctg} \frac{X_2' - X_1'}{c(T_2' - T_1')} \quad (3.4.20.)$$

Величина $\tau = 0$, в соответствии с формулой

$$1.41 \tau' = \frac{1}{2} \ln \sqrt{\frac{1 - 2 \frac{X_2' - X_1'}{c(T_2' - T_1')} \sin \delta + \left(\frac{X_2' - X_1'}{c(T_2' - T_1')} \right)^2}{1 + 2 \frac{X_2' - X_1'}{c(T_2' - T_1')} \sin \delta + \left(\frac{X_2' - X_1'}{c(T_2' - T_1')} \right)^2}} = 0, \text{ при}$$

$\delta = 0$. Аналогичные операции дают значение аргумента

$$\begin{aligned} \psi = \sigma &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2 \frac{\omega}{c} \frac{1 - \frac{U}{c}}{1 - \frac{U\omega}{c^2}}}{1 - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \left(\frac{1 - \frac{U}{c}}{1 - \frac{U\omega}{c^2}} \right)^2} = \\ &= \operatorname{arctg} \frac{\omega}{c} \frac{1 - \frac{U}{c}}{1 - \frac{U\omega}{c^2}} \end{aligned} \quad (3.4.21.)$$

Таким образом, обе системы имеют действительные аргументы. При равенстве интервалов должно соблюдаться равенство аргументов

$$\sigma' = \sigma \quad (3.4.22.)$$

В результате комплексы S_{12}' , S_{12} запишем в виде

$$\begin{aligned} dS_{12}' &= \sqrt{c^2 (T_2' - T_1')^2 - (X_2' - X_1')^2} e^{j\sigma'} = \\ &= \sqrt{c^2 (T_2 - T_1)^2 - (X_2 - X_1)^2} e^{j\sigma} \end{aligned} \quad (3.4.23.)$$

, где аргумент $\sigma' = \arctg \frac{X_2' - X_1'}{c(T_2' - T_1')}$,

а аргумент $\sigma = \arctg \frac{\omega}{c} \frac{1 - \frac{U}{\omega}}{1 - \frac{U\omega}{c^2}}$

Условия теории относительности $U = \frac{c^2}{\omega}$ обращают в ноль знаменатель дроби аргумента σ .

Числитель становится равным $1 - \frac{U}{\omega} = 1 - \frac{U^2}{c^2}$. При этом имеем $\sigma = \frac{\pi}{2}$. В

этом случае угол σ' также равен $\frac{\pi}{2}$. Это требование пространственной

комплексной алгебры. Следовательно $c(T_2' - T_1') = 0$. Это соответствует записи координат в матричной форме теории относительности (3.4.8.) Равенство комплексов в этом случае приобретает вид

$$\sqrt{-(X_2' - X_1')^2} j = \sqrt{c^2(T_2 - T_1)^2 - (X_2 - X_1)^2} j.$$

Преобразуем данное равенство.

$$ji(X_2' - X_1') = ji(X_2 - X_1) \sqrt{1 - \frac{c^2}{\omega^2}}$$

Равенство означает проекцию системы отсчета на изолированную ось. Приравнивая мнимые части и вводя под знак радикала условия теории

относительности $U = \frac{c^2}{\omega}$, окончательно получим соотношение теории относительности для измерения длин отрезков.

$$X_2' - X_1' = (X_2 - X_1) \sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}} \quad (3.4.24.)$$

Теория относительности утверждает, что сравнение длин отрезков происходит в системах отсчета для одновременных событий, при условии $U = \frac{c^2}{\omega}$. Интервал

в этом случае равен $S_{12}^2 = -l'^2$, где l' -длинна отрезка. Конечный результат при матричном выражении координат систем отсчета может быть получен непосредственной подстановкой условий в выражение (3.4.7.) Таким образом,

условия $U = \frac{c^2}{\omega}$ есть замена экспоненциальной функции

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} = j.$$

Если процесс локализован, когда события проходят в одной и той же точке, то существует система отсчета при $U = \omega$ одна из координат интервала (3.4.7.) становится равной нулю $X_2' - X_1' = 0$. Числитель дроби в правой части равенства (3.4.8.) становится равным

$$1 - \frac{U\omega}{c^2} = 1 - \frac{U^2}{c^2}. \text{ В результате из (3.4.8.) имеем}$$

$$T_2' - T_1' = (T_2 - T_1) \sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}} \quad (3.4.25.)$$

Формула определяет замедление времени утверждает теория относительности. Рассмотрим комплексную пространственную систему координат. При условии $U = \omega$ аргумент $\sigma = \arctg 0 = 0$. Равенство аргументов комплексов дает $X_2' - X_1' = 0$.

Из равенства комплексов получаем

$$\sqrt{c^2(T_2' - T_1')^2} e^{j0} = \sqrt{c^2(T_2 - T_1)^2 - (X_2 - X_1)^2} e^{j0}.$$

Преобразуем это равенство

$$c(T_2' - T_1') = c(T_2 - T_1) \sqrt{1 - \frac{(X_2 - X_1)^2}{c^2(T_2 - T_1)^2}}.$$

Вводя параметр $\omega = U$ окончательно получаем соотношение (3.4.25.)

Сопоставление математических операций, проведенных на базе алгебры комплексного пространственного переменного, с операциями координат, записанных в матричной форме, а также рассуждениями об интервале в теории относительности, показывает их тождественность.

3.4.3. Изолированное направление

В связи с этим необходимо исследовать вопрос о изолированном направлении в пространстве и соотношении введенного параметра ω со скоростью S и скоростью U . То, что пространство-время обладает особенностью в виде изолированной оси видно из записи интервала $dS_{1,2}$, который можно представить в виде

$$dS_{1,2}^2 = [c(T_2 - T_1) + ji(X_2 - X_1)][c(T_2 - T_1) - ji(X_2 - X_1)] =$$

$$= \|dS_{12}\| e^{j\psi} \|dS_{12}\| e^{-j\psi} = \|dS_{12}\|^2.$$

Если интервал равен нулю, то

$c(T_2 - T_1) = (X_2 - X_1)$ и формула интервала превращается в произведение делителей нуля

$dS_{1,2}^2 = c^2(T_2 - T_1)^2(1 + ji)(1 - ji) = 0$. Поэтому, если имеются две системы отсчета, допустим штриховая и не штриховая, то при равенстве временных и пространственных координат системы выстраиваются по изолированному направлению, где соблюдается равенство

$$\sigma' = \sigma = \pm \arctgi, \|dS_{1,2}\| = c(T_2 - T_1) \sqrt{0}.$$

В этом случае квадрат модуля равен нулю, однако комплекс

$$dS_{12} = c(T_2 - T_1)\sqrt{0}e^{\pm j \arctg i} = c(T_2 - T_1)(1 \pm ji) \neq 0 \quad (3.4.26.)$$

Временная координата в изолированном направлении равна по величине пространственной координате. Начало координат имеет окрестность нуля. Начало временной координаты повернуто относительно пространственной на угол $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Наличие этой особенности не учитывается в теории относительности.

Теория относительности использует вариант действительного аргумента в виде (3.4.20.) и (3.4.21.). В этих выражениях произошла потеря решения, связанная с наличием особенности

в пространстве. Поэтому рассмотрим аргументы в виде

$$\sigma' = \frac{1}{2} \arctg \frac{2(X_2' - X_1')c(T_2' - T_1')}{c^2(T_2' - T_1')^2 - (X_2' - X_1')^2},$$

$$\sigma = \frac{1}{2} \arctg \frac{2\frac{\omega}{c}\left(1 - \frac{U}{\omega}\right)\left(1 - \frac{U\omega}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{U\omega}{c^2}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\left(1 - \frac{U}{\omega}\right)^2}$$

Рассмотрим выше разобранные условия: при $U = \omega, \sigma = 0, (X_2' - X_1') = 0, \sigma' = 0$, в этом случае имеем проекцию на временную ось координат. При $U = \frac{c^2}{\omega}, \sigma = 0, (T_2' - T_1') = 0, \sigma' = 0$. Вновь получена проекция на временную ось координат. Предыдущий расчет давал в этом случае проекцию на пространственную ось. Поэтому рассматривается изолированное направление, когда $\sigma = \arctg i$ в комплексных координатах, или $\sigma = \frac{\pi}{2}$, когда аргумент взят в действительных числах. В первом случае имеем из выражения (3.4.16.)

$$\frac{\omega}{c} \frac{1 - \frac{U}{\omega}}{1 - \frac{U\omega}{c^2}} = 1, \text{ во втором случае знаменатель дроби функции } \arctg \text{ должен}$$

$$\text{быть равен нулю } \left(1 - \frac{U\omega}{c^2}\right)^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left(1 - \frac{U}{\omega}\right)^2. \text{ Последние выражения}$$

эквивалентны друг другу, поэтому в пространстве изолированное направление выражаемое функцией арктангенс в изолированной точке i равноценно по условию, когда функция арктангенс равна бесконечности. Проведем

$$\text{преобразования дроби } \frac{\omega}{c} - \frac{U}{c} = 1 - \frac{U\omega}{c^2} \Rightarrow \left(1 + \frac{U}{c}\right) = \frac{\omega}{c} \left(1 + \frac{U}{c}\right). \text{ Откуда}$$

$$\text{имеем } \frac{\omega}{c} = 1 \text{ при любом } \frac{U}{c}. \text{ Преобразования можно провести в другой}$$

последовательности и получить $\left(-1 + \frac{\omega}{c}\right) = \frac{U}{c} \left(1 - \frac{\omega}{c}\right)$. Откуда следует, что при любом $\frac{\omega}{c}$ имеем выполнение условий когда $\frac{U}{c} = -1$. Аргумент σ при выполнении двух условий дает проекцию комплекса dS_{12} на изолированную пространственную ось. В этом случае временная координата равна нулю. Таким образом, условие теории относительности $U = \frac{c^2}{\omega}$, при котором координата $T'_2 - T'_1 = 0$ равносильно условиям $\frac{U}{c} = -1, \frac{\omega}{c} = 1$. Условие $U = \omega$, при котором имеем проекцию комплекса dS_{12} на временную ось, когда $X'_2 - X'_1 = 0$, равносильно условию $\frac{U}{c} = 1$. Системы отсчета движутся относительно друг друга вдоль направления пространственной оси со скоростью $U = c$. Только при этих условиях соблюдается правильность математических операций. Если условие $U = \frac{c^2}{\omega}$ подставить в координату (3.4.7.), то получим

$$X'_2 - X'_1 = (X_2 - X_1) \frac{1 - \left(\frac{U}{c}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{U}{c}\right)^2}} = (X_2 - X_1) \sqrt{1 - \left(\frac{U}{c}\right)^2}.$$

В координатном представлении (3.4.7.) и (3.4.8.) оси имеют единственную скорость U и скоростной параметр ω , поэтому условия теории относительности

$U = \omega, U = \frac{c^2}{\omega}$ связаны между собой и определяют проекции координатных

осей, подменяя обычные тригонометрические функции $\cos \sigma, \sin \sigma$. В соответствии с формулой (3.4.26.), интервал теории относительности при движении со скоростью света одной системы отсчета относительно другой системы по оси X , определяется равенством

$$dS_{1,2}'^2 (1 + ji) = c^2 (T_2 - T_1)^2 (1 + ji) = (X_2 - X_1)^2 (1 + ji).$$

Если системы отсчета движутся относительно друг друга со скоростью света C , то интервалы по осям координат равны:

$$c^2 (T'_2 - T'_1)^2 = c^2 (T_2 - T_1)^2, (X'_2 - X'_1)^2 = (X_2 - X_1)^2.$$

В этом случае события имеют мнимую точку как в системе отсчета штриховой так и не штриховой при координатной записи интервала. Если координаты систем отсчета записываются в сферических координатах, то каждая система находится в световом ε -туннеле, который мы называем изолированным направлением, вследствие равенства аргументов $\psi' = \psi = \arctgi$. Интервал в

этом случае превращается в сферу радиуса $\sqrt{0}$. Координатная ось jix становится ε -туннелем, имеющим радиус $\sqrt{0}$, рис 40 размеры которого рассчитываются из энергетических соображений, см пункт 3.1 формулы (3.4.) и (3.5.)

3.4.4. Относительность времени

Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц в [14] приводят два доказательства относительности времени. Рассмотрим последовательно каждый. В течении бесконечно малого промежутка времени dt , движущиеся часы, помещенные в инерциальную систему отсчета, проходят расстояние

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \quad (3.4.27.)$$

Спрашивается, какой промежуток времени dt' покажут при этом движущиеся часы. Так как они покоятся в своей системе координат т.е. $dx' = dy' = dz' = 0$, то в силу инвариантности интервала, утверждают авторы, имеем равенство

$$dS^{12} = c^2 t^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt'^2 \quad (3.4.28.)$$

Откуда имеем

$$dt' = dt \sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2}} \quad (3.4.29.)$$

Но $\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = U^2$, где U есть скорость движущихся часов, поэтому

$$(3.4.29.) \text{ записывается в виде } dt' = \frac{ds}{c} = dt \sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}. \text{ Интегрируя это}$$

выражение, можно получить промежуток времени, показываемый движущимися часами, если по неподвижным часам пройдет время $t_2 - t_1$.

$$t'_2 - t'_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}} \quad (3.4.30.)$$

Рассмотрим вывод с позиций пространственной комплексной алгебры.

Инвариантность интервала предполагает постоянство скорости света C в обеих инерциальных системах отсчета. Поэтому в пространстве – времени модуль (3.4.27.) относительно скорости света и оси времени является пространственной осью, входя в интервал с отрицательным знаком. Постоянство скорости света превращает все координаты пространственные в одну координату относительно оси времени. Это выражено в преобразованиях Лоренца. Поэтому, А.Логунов ввел промежуточный параметр ω , чтобы пользоваться проекциями координатных осей. В этом доказательстве вообще проекции не берутся в рассмотрение. Интервал есть модуль комплексного пространства, возведенный в квадрат.

$dS_{1,2} = dS_{12} = \|cdt + jidX\| = \sqrt{c^2 dt^2 - dX^2}$, где под dX надо рассматривать любую комбинацию пространственного модуля типа (3.4.27.) В инерциальных системах отсчета комплексы dS_{12}, dS'_{12} записываются в виде

$$dS_{12} = \|dS_{12}\| e^{j \arctgi \frac{dX}{cdt}}, dS'_{12} = \|dS'_{12}\| e^{j \arctgi \frac{dX'}{dt'}}.$$

Равенство модулей комплексных чисел требует равенства аргументов. Если $dX' = 0$, как это принято в доказательстве, то $dX = 0$. Системы движутся по оси времени. Из равенства интервалов получаем

$dt = dt'$. Сокращение времени нет. Равенство аргументов дает равенство дробей $\frac{dX}{cdt} = \frac{dX'}{cdt'}$, которое возможно при любых вариантах входящих

параметров. Однако, если $dX' = 0$, то необходимо рассматривать два варианта $dX = 0$ и $dX \neq 0$. Для первого случая требуется еще дополнительное ограничение $U = 0$. Только в этом случае будем иметь $dX' = 0$. Однако в этом случае замедление времени не происходит $dT' = dT$. Равенство дробей аргументов возможно при одной скорости $\frac{dX}{cdt} = \frac{dX'}{cdt'} = \frac{U}{c}$. В этом случае

равенство интервалов дает $cdt \sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}} = cdt' \sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}$, аргумент

$\psi = \arctgi \frac{U}{c}$ одинаков для двух систем отсчета. Если $U = c$, то имеем $cdt \sqrt{0} = cdt' \sqrt{0} \neq 0$, так как $\psi = \arctgi$ для двух систем. В этом случае интервалы взяты от делителей нуля $cdt(1 + ji) = cdt'(1 + ji)$. Так, что снова имеем $dt = dt'$. Сокращения времени нет.

$$dX' = \frac{dx - Udt}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}, dt = \frac{dt - \frac{U}{c^2} dx}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}.$$

В числителе координаты dX' стоит преобразование Галилея. В записи комплексной алгебры $dX' = dx' + Udt'$. Если $dx' = 0, dX' = 0$, то $U = 0$

И дальнейшие операции в доказательстве проводятся при $U = 0$. Поэтому сокращение времени отсутствует. По условиям вывода формулы

$$dX_{dx'=0} = \frac{Udt'}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}, dt_{dx'=0} = \frac{dt'}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}.$$

Из левых частей последних равенств составим комплекс

$$cdt + jidX = \sqrt{c^2 dt^2 - dX^2} e^{j \arctgi \frac{dX}{cdt}} =$$

$$= cdt \sqrt{1 - \frac{dX^2}{c^2 dt^2}} e^{j \arctg \frac{dX}{cdt}} = cdt \sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}} e^{j \arctg \frac{U}{c}} \quad (3.4.31.)$$

Правая часть координатной матрицы дает

$$\begin{aligned} \frac{cdt'}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}} + ji \frac{Udt'}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}} &= \\ &= \frac{\sqrt{\frac{c^2 dt'^2}{1 - \frac{U^2}{c^2}} - \frac{U^2 dt'^2}{1 - \frac{U^2}{c^2}}}}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}} e^{j \arctg \frac{U}{c}} = cdt' e^{j \arctg \frac{U}{c}} \end{aligned} \quad (3.4.32.)$$

Приравняем равенства и проанализируем соотношения комплексов

$$cdt \sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}} e^{j \arctg \frac{U}{c}} = cdt' e^{j \arctg \frac{U}{c}} \quad (3.4.33.)$$

Приравняв модули комплексов, получим равенство $cdt' = cdt \sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}$, в

полном соответствии теории относительности. Однако это соотношение выведено при $U = 0$. Поэтому остается в силе $dt' = dt$. Замедление времени отсутствует. Выявленное противоречие требует рассмотреть вывод преобразований Лоренца и рассмотреть при этом условия вывода замедления времени и изменения длины. Повторяя А.А. Логунова [8], возьмем выражение интервала в галилеевой системе координат

$$ds^2 = c^2 dT^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2 \quad (3.4.34.)$$

И совершим преобразования Галилея

$$x = X - UT; t = T; y = Y; z = Z \quad (3.4.35.)$$

Обратные преобразования имеют вид

$$X = x + Ut; T = t; Y = y; Z = z \quad (3.4.36.)$$

X, Y, Z, T -галилеевы координаты. Взяв дифференциалы от обеих частей равенства 3.4.36, и подставив, в выражение для интервала (3.4.34.) получим

$$ds^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{U^2}{c^2} \right) - 2U dx dt - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (3.4.37.)$$

В выражении (3.4.37.) выделим полный квадрат

$$ds^2 = c^2 \left[dt \sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}} - \frac{U}{c^2} \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}} \right]^2 - \frac{dx^2}{1 - \frac{U^2}{c^2}} - dy^2 - dz^2 \quad (3.4.38.)$$

Введем новое время и новые координаты

$$T' = t \sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}} - \frac{U}{c^2} \frac{x}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}} \quad (3.4.39.)$$

$$X' = \frac{x}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}; Y' = y; Z' = z \quad (3.4.40.)$$

Тогда имеем интервал

$$ds^2 = c^2 dT'^2 - dX'^2 - dY'^2 - dZ'^2 \quad (3.4.41.)$$

Подставляя выражения (3.4.35.) в (3.4.39.) и (3.4.40.), получим хорошо известные преобразования Лоренца

$$T' = \frac{T - \frac{UX}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}; X' = \frac{X - UT}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}; Y' = y; Z' = z. \quad (3.4.42.)$$

В координате X' числитель дроби представляет преобразование Галилея (3.4.35.), которое по условию вывода соотношения по сокращению времени должно равняться нулю $x = X - UT = 0$, откуда $X = UT$. При этих условиях интервал (3.4.41.) переходит в выражение $ds^2 = c^2 dt^2 - U^2 t^2 - dy^2 - dz^2$, так

$$\text{как } T' = T \sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}} = t \sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}; X' = 0; Y' = y; Z' = z. \text{ Если } T' = T, \text{ то}$$

полученное выражение интервала равно (3.4.41.) и равно (3.4.34.). Это равенство возможно только при $U = 0$.

3.4.5. Эксперимент Майкельсона–Морли с позиции комплексного пространства.

Эксперимент Майкельсона–Морли был первой попыткой определить скорость движения Земли относительно эфира. Для эксперимента использовался прибор, называемый интерферометром. Схема эксперимента хорошо известна, также как известен отрицательный его результат. Главные части прибора: источник света А, посеребренная полупрозрачная стеклянная пластинка В, два зеркала С и Е. Расстояние зеркал С и Е от пластинки В равны L . Пластинка В расщепляет падающий пучок света на два, перпендикулярных друг другу. Пучки отражаются от зеркал на пластинку В. Если прибор покоится то время прохождения пучков света по двум направлениям одинаково. Если прибор движется со скоростью U , то появится разница во времени и как следствие – интерференция. Математический расчет эксперимента заключался в подсчете времени прохождения пучков света по двум направлениям до отражающих зеркал и времени возврата на пластину В. За время t_1 принималось время прохождения луча света до зеркал. За время t_2 возврат на пластинку В. Пока свет движется до зеркал прибор проходит расстояние Ut_1 , поэтому свету в одном случае придется пройти расстояние $L + Ut_1$, которое равно ct_1 . Так, что

имеем первое равенство $ct_1 = L + Ut_1$. Откуда $t_1 = \frac{L}{c - U}$, где c – скорость света. На обратном пути свет проходит расстояние $L - Ut_2$. Поэтому $ct_2 = L - Ut_2$ и $t_2 = \frac{L}{c + U}$.

Общее время для этого направления равно $t_1 + t_2 = \frac{2Lc}{c^2 - U^2} = \frac{2\frac{L}{c}}{1 - \frac{U^2}{c^2}}$.

Далее подсчитывалось время в перпендикулярном направлении расщепления пучка света.

При движении прибора свет пройдет по гипотенузе, так что будем иметь равенство $(ct_3)^2 = (L)^2 + (Ut_3)^2$, или $L^2 = c^2 t_3^2 - U^2 t_3^2$,

откуда $t_3 = \frac{\frac{L}{c}}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}$. В силу симметрии при возврате свет проходит тоже

расстояние и общее время по этому направлению равно $2t_3 = \frac{2\frac{L}{c}}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}$.

Однако не взирая на существенную разницу во времени интерференционная картина не возникала. Результат опыта оказался отрицательным. Это был тупик. В 1892 г. для объяснения опыта Майкельсона – Морли ирландский физик Д.Ф.Фиджеральд и нидерландский физик-теоретик Х.А. Лоренц выдвинули гипотезу о сокращении движущихся тел в направлении движения. Если длина покоящегося тела есть L_0 , то длина движущегося тела со скоростью

U становится равной $L = L_0 \sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}$. Применив это сокращение к

интерферометру Майкельсона – Морли получим

$$t_1 + t_2 = \frac{\left(2\frac{L}{c}\right)\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}{1 - \frac{U^2}{c^2}} = 2\frac{L}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}. \text{ В этом случае } t_1 + t_2 = 2t_3.$$

Стало очевидным, что если прибор сокращается именно так, то эффекта от опыта не следует ожидать.

Современные представления об интервале, совместно с комплексной пространственной алгеброй и геометрией позволяют по иному описать опыт Майкельсона-Морли. Свет, как неоднократно утверждалось идет со скоростью c по изолированному направлению в комплексном пространстве. Линейное

сложение скорости света с объектом, как это делали исследователи сто лет назад недопустимо. Нет скорости равной $U_c \neq C \pm U$. Есть скорость $U_c = c - jiU, U_c = c + jiU$.

Модуль этих скоростей равен $\|U_c\| = c\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}$.

Поэтому время прохождения луча света в первом продольном направлении

$$\text{равно } t_1 = \frac{\frac{L}{c}}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}.$$

Это время равно t_2 , так как модуль скорости не зависит от направления. Так, что общее время первого направления движения луча света равно

$$t_1 + t_2 = \frac{\frac{2L}{c}}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}.$$

Для второго направления рассматривается тот же прямоугольный треугольник.

$$(ct_3)^2 = L^2 + (jiU)^2. \text{ Или } 2t_3 = \frac{\frac{2L}{c}}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}.$$

Корректировка в описании опыта Майкельсона –Морли не сказывается на преобразованиях Лоренца.

Возьмем преобразования Лоренца в дифференциалах $\Delta x, \Delta t, \Delta x', \Delta t'$ и рассмотрим их с выработанных позиций комплексного пространства. Имеем

$$\text{координатную матрицу преобразований } \Delta x' = \frac{\Delta x - U\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}; c\Delta t' = \frac{c\Delta t - \frac{U}{c}\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}.$$

В комплексном пространстве запишем равенство комплексов

$$c\Delta t' + ji\Delta x' = \frac{c\Delta t - \frac{U}{c}\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}} + ji \frac{\Delta x - U\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}} \quad (3.4.43.)$$

Модули левой и правой части, возведенные в квадрат дают равенство интервалов $c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2$, из равенства комплексных аргументов левой и правой части комплекса имеем

$$\operatorname{arctgi} \frac{\Delta x'}{c\Delta t'} = \operatorname{arctgi} \frac{\Delta x - U\Delta t}{c\Delta t - \frac{U}{c}\Delta x}.$$

Рассмотрим варианты проекций на координатные оси. Если $\Delta x - U\Delta t = 0$, то $\Delta x' = 0$

Это выполнимо при двух условиях $\Delta x = 0, U = 0$.

Этот вариант приводит к $c\Delta t' = c\Delta t$.

Имеется вариант $c\Delta t \left(\frac{\Delta x}{c\Delta t} - \frac{U}{c} \right) = 0$, и при $\frac{U}{c} \neq \pm 1$, но $\Delta x = U\Delta t$.

$$\text{получаем } c\Delta t' = \frac{c\Delta t \left(1 - \frac{U^2}{c^2} \right)}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}} = c\Delta t \sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}.$$

В полном соответствии с выводами теории относительности.

Если знаменатель аргументов равен нулю, то рассматривается проекция на ось jix . При этом возможны следующие варианты:

$$c\Delta t - \frac{U}{c}\Delta x = c\Delta t \left(1 - \frac{U}{c} \frac{\Delta x}{c\Delta t} \right) = c\Delta t \left(1 - \frac{U^2}{c^2} \right),$$

если $\Delta x = U\Delta t$. Если $\Delta t = 0$, то $c\Delta t' = 0, \Delta x' = 0$.

Если $\Delta t \neq 0, \frac{U}{c} = \pm 1$, то $c\Delta t' = 0, \Delta x' = 0$.

Остается единственный вариант $\frac{\Delta x}{c\Delta t} \neq \frac{U}{c}, \Delta x \neq 0, \Delta t \neq 0, \frac{U}{c} \neq \pm 1$

при этих условиях $\Delta t' = 0$ при $c\Delta t = \frac{U}{c}\Delta x$. Тогда имеем

$$ji\Delta x' = ji \frac{\Delta x - U\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}} = ji\Delta x \frac{1 - \frac{U^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}} = ji\Delta x \sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}$$

и получаем соотношение теории относительности $\Delta x' = \Delta x \sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}$.

В комплексном представлении преобразований Лоренца выделим подпространство делителей нуля. На основании пространственной комплексной алгебры это достигается условиями: для левой части равенства $c\Delta t' = \Delta x'$ и комплекс записывается в виде

$$ct' (1 + ji) = \Delta x (1 + ji) = c\Delta t' \sqrt{0} e^{j\operatorname{arctgi}} = \Delta x \sqrt{0} e^{j\operatorname{arctgi}} \quad (3.4.44.)$$

Для правой части комплекса имеем условие $c\Delta t - \frac{U}{c}\Delta x = \Delta x - U\Delta t$ и комплекс записывается в двух равноправных выражениях

$$\begin{aligned} \frac{c\Delta t - \frac{U}{c}\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}(1 + ji) &= \frac{\Delta x - U\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}(1 + ji) = \\ &= \frac{c\Delta t - \frac{U}{c}\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}\sqrt{0}e^{j\arctgi} = \frac{\Delta x - U\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}\sqrt{0}e^{j\arctgi} \end{aligned} \quad (3.4.45.)$$

Сравнение левой и правой части подпространств делителей нуля дают выражения преобразований Лоренца. Таким образом преобразования Лоренца остаются справедливыми и для подпространства делителей нуля.

Подпространство было выделено для любых соотношений $\frac{U}{c}$. Чтобы раскрыть это соотношение, рассмотрим модуль комплекса правой части (3.4.43.) Если $\Delta x = c\Delta t$, то $\|S_{12}\| = \sqrt{c^2\Delta t^2 - \Delta x^2} = c\Delta t\sqrt{0}$, аргумент комплекса равен

$$\arctgi \frac{\Delta x - U\Delta t}{c\Delta t - \frac{U}{c}\Delta x} \Big|_{\Delta x=c\Delta t} = \arctgi \frac{c\Delta t \left(1 - \frac{U}{c}\right)}{c\Delta t \left(1 - \frac{U}{c}\right)} = \arctgi.$$

Таким образом доказано равенство в подпространстве делителей нуля $c\Delta t' \sqrt{0}e^{j\arctgi} = c\Delta t \sqrt{0}e^{j\arctgi}$, откуда имеем

$c\Delta t' = c\Delta t$. Аналогично получим $\Delta x' = \Delta x$. В подпространстве делителей нуля временная координата равна пространственной. Координаты имеют начало из разных точек окрестности нуля. Взаимно перпендикулярны и не имеют суммарного модуля при координатной записи преобразований Лоренца. Суммарная пространственно-временная точка в этом случае является мнимой.

Из соотношения $\Delta x = c\Delta t$ имеем $\frac{\Delta x}{c\Delta t} = \frac{U}{c} = 1$. Таким образом, доказано что

подпространство делителей нуля адекватно изолированному направлению движения систем относительно друг друга со световой скоростью.

Общие выводы. Эксперимент Майкельсона – Морли доказал, что пространство – время является комплексным. Комплексность пространства понимается не в смысле введения мнимых единиц в координатные матрицы, а в том смысле, что временная и пространственная координаты имеют разные точки в начале координат. Координатная запись преобразований Лоренца, исключила из физических исследований это может быть самое важное условие для изучения структуры пространства. Псевдоевклидова геометрия четырехмерного пространства предполагает в начале координат физическую окрестность нуля, из разных точек которой берут начало координатные оси. Координатные оси

нельзя рассматривать как линии. Координатные оси представляют цилиндрические трубочки ε - радиуса в сечении. Одна из таких осей образует общее изолированное направление для обеих систем отсчета. Изолированное направление обусловлено наличием в природе предельной скоростью движения одной системы относительно другой. Световой сигнал распространяется по мнимым точкам в пространстве и его интервал нельзя приравнять нулю, как это трактует теория относительности, вследствие наличия изолированного направления, выражаемого функцией арктангенс от i - мнимой единицы, так как четырехмерный пространственно временной комплекс при $U = c$ имеет вид

$$dS_{12} = c\Delta t(1 + ji) = c\Delta t\sqrt{0}e^{j\arctg i}, dS_{12} = \Delta x(1 + ji) = \Delta x\sqrt{0}e^{j\arctg i}$$

Откуда имеем

$$c\Delta t\sqrt{0} = \Delta x\sqrt{0} \neq 0.$$

Окрестность нуля, выражаемая величиной $\sqrt{0}$ есть чисто физическая величина, которая может быть определена из энергетических зависимостей систем отсчета.

При любой координатной записи, если использовать интервал Миньковского в галилеевой записи или тензорной в едином комплексном пространстве времени ситуация не меняется.

ГЛАВА 4. ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КОМПЛЕКСНОГО ПРОСТРАНСТВА

4.1. Физический смысл решения волнового уравнения аналитическими функциями комплексного пространственного переменного. Вихрь как причина образования заряда в пространстве.

Рассмотрим волновые уравнения, описывающие различные физические среды. Например, распространение звука в среде описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad (4.1.)$$

где функция f - описывающая поведение среды (воздуха) c_s - скорость звука

Далее, если плоская световая волна распространяется вдоль оси x и поляризована так, что электрическое поле E направлено по оси y , то имеем

$$\frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad (4.2.)$$

где c - скорость света.

Уравнение (4.2) является следствием уравнения Максвелла. Уравнения (4.1.), (4.2.) согласно современному представлению теоретической физики, являются уравнением одномерных волн. Для их вывода используется векторная интерпретация точечного вихря. Уравнения содержат временную координату. Эти два условия говорят о том, что в пространстве можно получить решение непосредственно из его физической сущности.

Так, решением одномерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

в действительных координатах является функция

$$\Psi = f(x - ct) + g(x + ct),$$

где $f(x - ct)$, $g(x + ct)$ представляют жесткое перемещение вдоль оси x (рис. 42, рис. 43).

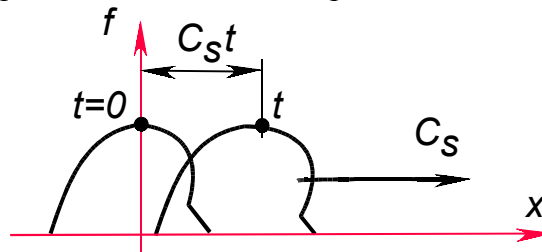


Рис. 42. Жесткое перемещение плоской волны по направлению действительной оси

В пространстве векторная операция точечного вихря определяет функцию $f(v)$ от комплекса

$$v = ix + jy, \text{ где } y = ct,$$

как функцию двух действительных функций от двух действительных переменных

$$f(v) = iU(x, ct) + jV(x, ct)$$

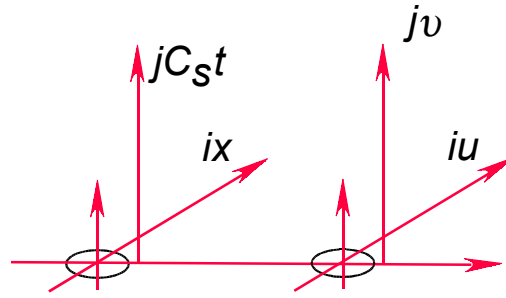


Рис. 43. Образование крутящего момента в пространстве при отображении пространства конуса-фильтра делителей нуля

В соответствии с определением производной f' от этой функции по формуле (1.26.) будем иметь

$$f'(v) = \frac{\partial U}{\partial x} - ji \frac{\partial v}{\partial x} = -ji \frac{1}{c} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial v}{\partial t}. \quad (4.3.)$$

Откуда, приравняв комплексные части получим пространственный ротор. В пространстве $ix + jy$ имеем два вектора, имеющих начало в окрестности ϵ -туннеля. Вектора лежат в двух взаимно перпендикулярных плоскостях так, что образуется крутящий момент (рис. 43).

Из формулы (4.3) имеем систему уравнений, дающих волновое уравнение.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0.$$

Такой подход вскрывает механизм распространения электромагнитной волны (рис. 44), образованной из двух волн электрической E и магнитной H) и существующей благодаря наличию светового ϵ -туннеля как одна волна.

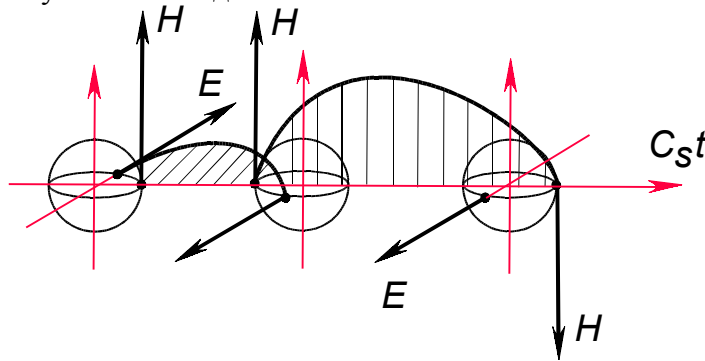


Рис.44. Пространственная электромагнитная волна в комплексной интерпретации

Таким образом, решением волнового уравнения является функция $f(ix + jy)$ и решение принадлежит четырехмерному пространству, а не плоскости, как считалось до настоящего времени.

Комплексные части аналитических функций, определенных в пространстве $(ix + jy)$, являются решением волнового уравнения.

В теоретической физике рассматривается волновое уравнение, определенное в четырехмерном пространстве. Например, вектор E электрической напряженности описывается пространственным уравнением.

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0. \quad (4.4.)$$

Решение этого уравнения представляется в виде суперпозиции решений одномерного уравнения. В решение входят волны, бегущие в направлении оси x , если поле не зависит от y , ξ , а также от y , если поле не зависит от x и ξ и так далее. В общем случае решение содержит суперпозицию волн, идущих в любых направлениях пространства.

Математического аппарата для получения общего уравнения в теоретической физике не существует, поэтому его сводят к решению уравнения (4.4), вводя вместо переменных x , y , ξ переменную r

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + \xi^2}.$$

После замены переменных в уравнении (4.4) и преобразований получим уравнение сферических волн, исходящих из центра точечного источника.

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\psi) = 0.$$

Решением в общем случае является Функция

$$\psi = \frac{f\left(t - \frac{r}{c}\right) + g\left(t + \frac{r}{c}\right)}{r}, \quad (4.5.)$$

описывающая первым своим членом сходящуюся волну (рис. 45).

В решении (4.5) функция ψ в начале координат бесконечна. Решение физически означает, что в начале координат располагается источник и поэтому решение не отвечает

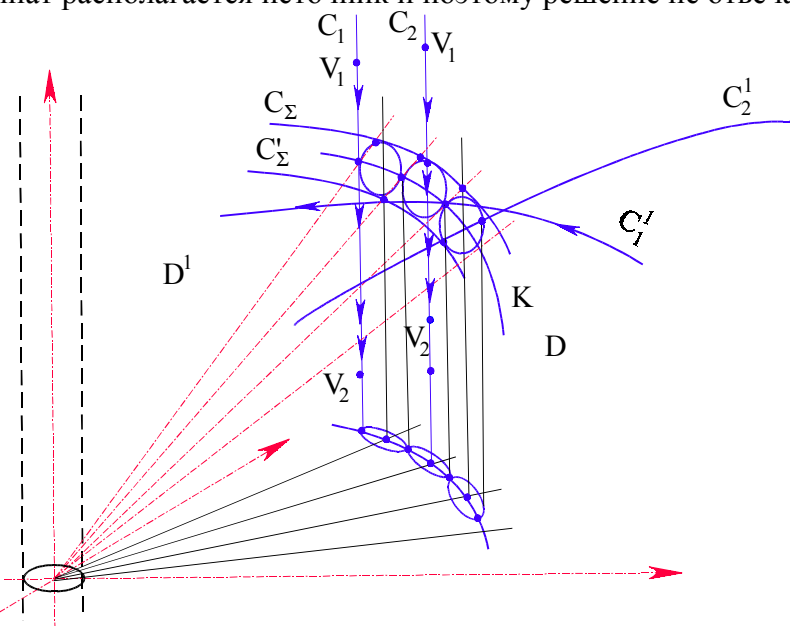


Рис. 45. Сходящаяся волна

свободному волновому уравнению, следовательно, и начало координат не отвечает свободному волновому уравнению. Начало координат исключается из рассмотрения. Теоретическая физика в настоящее время не может объяснить этот момент.

В комплексном пространстве ситуация меняется. По аналогии с решением одномерного волнового уравнения составим решение в пространстве, которым будет функция от комплекса

$$v = ir + jct,$$

деленная на g .

В этом решении параметр r уже ограничен градусом ε -туннеля, ибо при

$$\psi = \frac{1}{r} f(ir + jct)$$

функция определяется от делителей нуля. Это первая особенность решения, которая снимает вопрос об образовании волн в пространстве без наличия точечного источника - заряда.

Точечным зарядом в пространстве служит наличие в пространстве ε -туннеля. Если ε -туннель не закрыт структурой пространства более высокой размерности, то это пространство следует считать заряженным, в противном случае - нейтральным.

Отображение, осуществляемое функцией $f(v)$, позволяет определить в новых координатах, которыми будут комплексные части функции, туннель определенной уже физической природы. В окрестности этого нового туннеля комплексные части, выступающие как векторы, образуют крутящий момент (рис. 46)

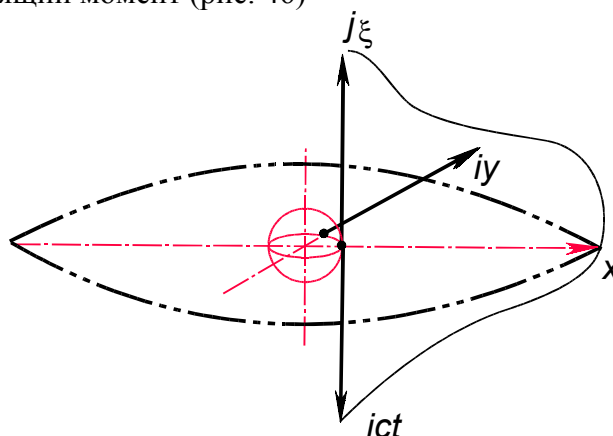


Рис. 46. Образование пространственной волны

Аналитические функции, определенные в комплексном пространстве, дают решение волнового уравнения в более общем виде. Условия дифференцирования функции дают жесткие ограничения, которые представляют в принципе физический принцип суперпозиции волн.

Если дана функция

$$f(v) = U + iV + jP + jiQ,$$

то действительные функции U, V, P, Q от действительных переменных x, y, ξ, η удовлетворяют системе из четырех эллиптических:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = 0$$

и системе из двух гиперболических уравнений:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = 0.$$

Совместно система дает волновое уравнение

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}.$$

Замена переменной η на временную переменную ct дает свободное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0.$$

Решением этого уравнения будет функция f , определенная в пространстве комплексных координат

$$v = x + iy + j(\xi - ct) = (j\xi - jct + x) + iy.$$

В этом комплексе V произведена замена переменной с базисным вектором $ij\eta$ на переменную с вектором ict , то есть вектор переменной повернут на угол $\pi/2$ относительно вектора j (см. рис. 46). Вследствие этого в пространстве образуется крутящий момент между плоскостью

$$i\xi - jct + x$$

и вектором iy , что и приводит к образованию сферических волн.

Пример 1.

$$U = e^{x+iy+j(\xi-ct)} = U + iV + jP + jiQ;$$

$$U = e^x \cos y \cos(\xi - ct);$$

$$V = e^x \sin y \cos(\xi - ct);$$

$$P = e^x \cos y \sin(\xi - ct);$$

$$Q = e^x \sin y \sin(\xi - ct);$$

Функции U, V, P, Q являются решением волнового уравнения.

Пример 2.

$$\ln v = W + jR = \ln \|x + iy + j(\xi - ct)\| + j \arctg \frac{\xi - ct}{x + iy}.$$

Комплексные функции W, R являются решением волнового уравнения.

Таким образом, пространство с ε -туннелем рассматриваем как заряженное пространство, В этом смысле вихрь, идущий по вихревой траектории типа C_3 , создает заряженное пространство. Заряд в виде вихревого образования включает в себя сходящуюся и расходящуюся волны.

4.2. Критические линии при обтекании.

Из решения волнового уравнения следует, что комплексная скорость при обтекании тела конечных размеров в пространстве выразится

$$U_\mu = c_s i + v j$$

где c_s скорость распространения возмущения в сплошной среде.

Скорость записана в простейшем виде без учета поворота в пространстве составляющих c_s, V .

Переходя к сферическим координатам, будем иметь

$$U_\mu = c_s \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c_s}\right)^2} e^{-j \arctg i \frac{v}{c_s}},$$

так что модуль скорости равен

$$\|U_\mu\| = \|c_s i + v j\| = c_s \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c_s}\right)^2},$$

а аргумент

$$\arg U_{\mu} = -j \arctg i \frac{v}{c_s}$$

Исследуем возможные случаи при обтекании:

$$a) \frac{v}{c_s} < 1; b) \frac{v}{c_s} = 1; c) \frac{v}{c_s} > 1;$$

В случае а) корень модуля будет действительной величиной, этот случай тривиален. В случае б) корень равен $\sqrt{0}$, а аргумент $\arctg i$. Движущееся тело либо частица имеет общий ε -туннель, со средой, в которой происходит движение. Суммарный вектор скорости указывает на точку, лежащую на конусе-фильтре делителей нуля. В случае с) корень становится мнимым числом, и поэтому фактически происходит поворот скорости по углу ϕ на величину $\pi/2$.

Этот случай показывает, что при увеличении скорости до величины, превосходящей скорость возмущения в среде, суммарный вектор скорости поворачивается на угол 90 град.

Вместе с этим происходит поворот части сплошной среды, так что в ней образуется двойная граница, воспринимаемая в аэродинамике, например как граница ударной волны.

С точки зрения (математики, этот эффект означает образование новой пространственной структуры и переход пространства в более высокую размерность и требуется переход в исследованиях к новому физическому аппарату и другим координатам).

Любая, дважды дифференцируемая функция, определенная в пространстве, удовлетворяет волновому уравнению. В то же время эта функция дает отображение не только потока, но и критических линий, поэтому конус может иметь любую конфигурацию в зависимости от формы тела и условий обтекания.

Если скорость переходит, условно говоря, через звуковой барьер, то критические точки растекаются на критические линии в пространстве.

При этом отображающая функция дает образы этих критических линий на поверхности летящего тела и эта поверхность списывается функцией $f(v)$.

Критические точки в классическом решении определялись из условия

$$|f'(v)| = 0,$$

которое реализуется и в пространстве. В принципе это условие с точки зрения предлагаемого аппарата не несет структурного исследования изучаемого процесса. Поэтому в пространстве V к нему добавляется еще условие

$$\|f'(v)\| = \sqrt{0}, \arg f'(v) = \arctg i,$$

которое несет структурную нагрузку.

С этих позиций световой конус теории относительности и конус "звукового барьера" являются явлениями одного класса. Они характеризуют критические переходы в структуре пространства. В этом смысл конуса-фильтра дискретных точек делителей нуля.

4.3. Модель вихревого энергетического взаимодействия в пространстве. Физическая трактовка интегралов Коши.

Формулы Коши, реализованные в пространстве (1.52, 1.56) устанавливают связь между границей области, заданной в виде замкнутой простой пространственной кривой C , либо в виде поверхности, натянутой на эту пространственную кривую без точек самопересечения, и значением функции в любой точке области, охватываемой этой границей.

Методы комплексного пространства распространяемы в любое число измерений. Естественно, что для любого числа измерений можно установить единственную связанность

наподобие той, которая приводит к интегральным равенствам Коши. В частности, интеграл Коши в n -мерном пространстве будет равен

$$f(v_0) = \frac{1}{(2\pi)^n} \iint_{\sigma_{n-1}} \dots \int \frac{f(\xi) dv_{n-1}}{(\xi - v_0)^{n-1}}$$

где σ_{n-1} - $n-1$ -мерная замкнутая поверхность; v_0 , C , σ_{n-1} - граница области;

Этот интеграл будет определять n -мерный вычет, как коэффициент C_n и разложении аналитической функции в ряд Лорана в n -мерном пространстве. Эта формула - аналог формулы (1.56)

В n -мерном пространстве можно указать единственную связность, заданную кривой C_3 , на которую без точек самопересечения можно натянуть поверхность так, чтобы она охватывала объемы, которые заключены в аналогичных кривых и натянутых на них поверхностях, меньших по величине размерности пространств. Пространство становится многосвязным. Аппарат позволяет исследовать структуру формирования вложенных друг в друга пространств. Каждая размерность имеет свое количество изолированных ϵ -туннелей, которые могут проникать друг в друга или формироваться в определенной последовательности.

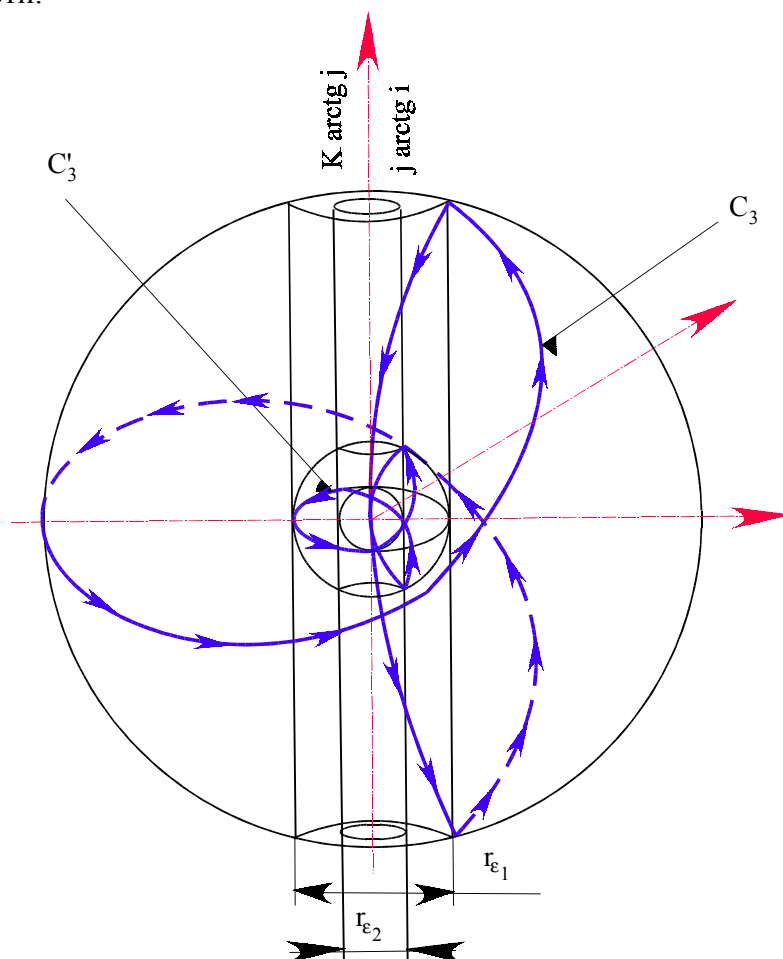


Рис. 47. Взаимодействие двух пространств. Одно пространство можно рассматривать как оболочку ядра другого пространства

Вскрытие причины определенного порядка расположения ϵ -туннелей есть путь к установлению самосогласованности полей взаимодействия, либо к установлению структуры формирования материи.

Основным условием для вывода интегральных теорем служит условие аналитичности функции в пространстве связной области. Это условие выделяет данную область с кривой C_3 и изолированным ε -туннелем как особую точку в пространстве большего числа измерений .
 $j \arctg i$

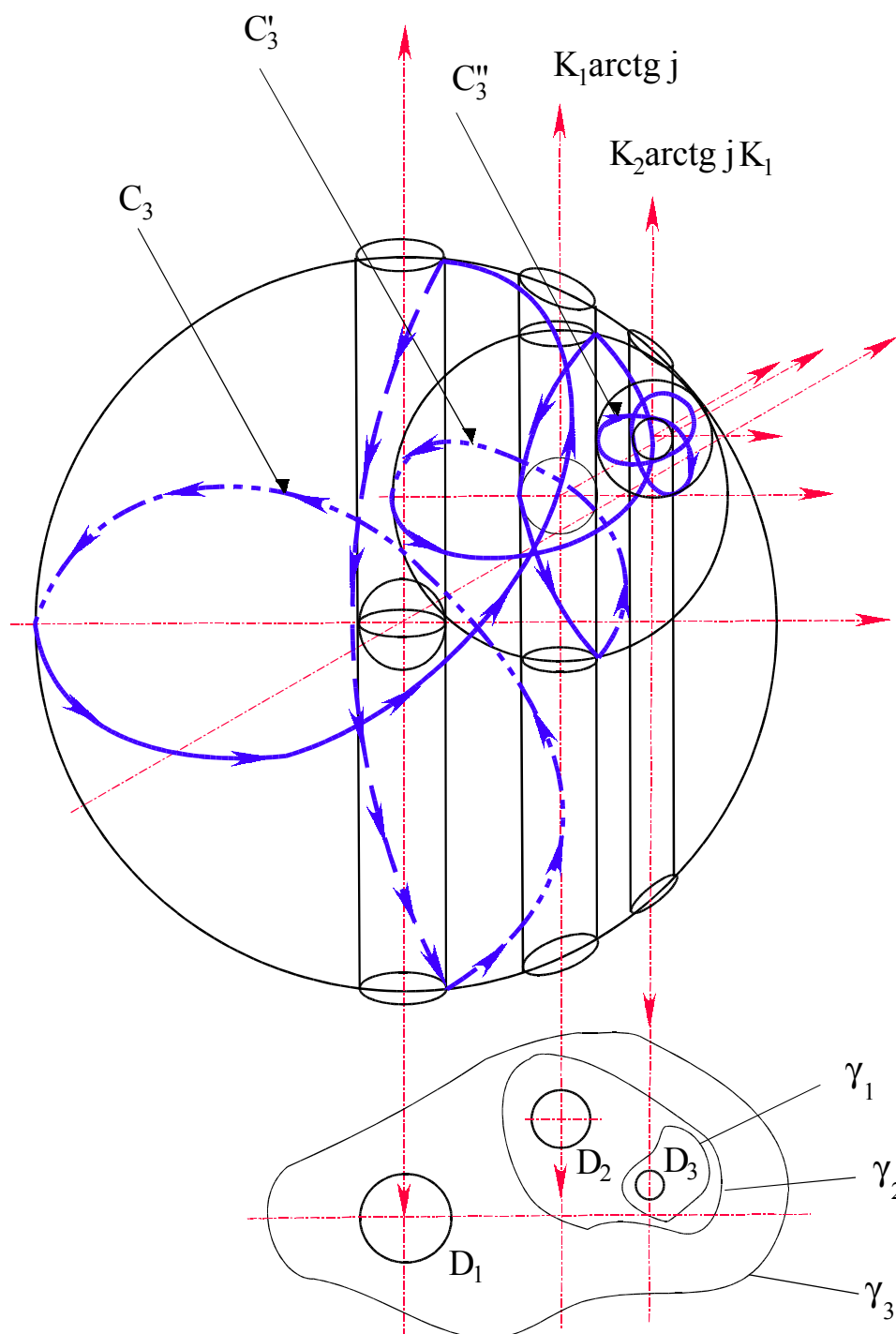


Рис. 48. Компактизация пространства с ростом его многосвязности

Внутри этой области существуют свои "геодезические" линии наподобие линиям C_3 , деформация которых определяется жесткими условиями дифференцируемости функций и интегральными соотношениями. Интегральные соотношения в свою очередь получены на основе тех связей между областью и границей, которые задаются формулами Стокса, Грина, Остроградского. Комплексный n -мерный анализ распространяет эти связи на любое число

измерений, открывая тем самым путь к исследованию формирования структуры пространства, заложенной в комплексной пространственной алгебре и ее координатном выражении. Необходимо доказать, что это формирование адекватно отражает реальное формирование материи.

На рис. 47 показана модель пространства, которая характеризует пространство как структуру вложенных друг в друга вихрей, связанных единой "геодезической" кривой C .

Изолированные направления этих структурных вихрей могут как замыкаться в пространстве, так и выходить из него в пространство, большего по размерности. В первом случае пространство будет нейтральным, во втором заряженным. В частности, не отступая от наглядности в изложении, на примере рис. 48, можно пояснить возможные варианты заполнения пространства вихрями. Возможно проследить следующие варианты.

Идет заполнение пространства C_3 (условно принят вихрь за кривую C_3) вихрями C'_3 и только после плотной упаковки, которая может быть определена, энергетическими критериями, идет заполнение пространства C'_3 вихрями C''_3 :

При этом также возможны варианты; заполнение одного из пространств C'_3 , до полной упаковки и после этого заполнение всех C'_3 идет параллельно. Физические условия определяют какой из вариантов реализуется в материи.

4.4. Модель сложного структурного образования

Исследуем простейшую модель частицы, состоящую из двух самостоятельно двигающихся частиц 1, 2 (рис. 49) в сложном структурном образовании. Предположим, что частица находится в состоянии покоя и имеет свое определенное внутреннее состояние.

Естественно, каждая из частиц имеет свой туннель. Сложная частица имеет также свой ε -туннель. При определенных скоростях, характерных для этой структуры, ε -туннели периодически вкладываются один в другой. Частицы рассматриваем как элементарные. Элементарность это признание элементарности блока четырехмерного пространства

$$v = (x + iy) + j(x_1 + iy_1) = z + i\sigma,$$

То есть четырехмерное пространство, которое для сокращения записи будем в дальнейшем обозначать системой векторов $(1, i, j)$, выступает как элементарное. Оно является элементарным блоком, заполняющим пространство любого числа измерений.

В элементарном блоке согласно исследованиям главы 1-й векторы i и j равноправны, так что пространство может иметь два изолированных направления. Каждому из них будет соответствовать своя циркуляционная кривая.

Функция f , которая описывает состояние частиц 1, 2, а также сложной частицы, подчиняется законам комплексной алгебры, поэтому будем рассматривать физическую интерпретацию пространства на примере исследования элементов пространства $(1, i, j)$.

В элементарном комплексе можно провести выделение ε -туннеля следующими алгебраическими операциями:

$$v = z + j\sigma \pm i\sigma = (z \pm i\sigma) + \sigma(i + j) = z + \sigma\sqrt{0}e^{\pm j \arctan i}.$$

Эту операцию можно провести и с энергиями в комплексном пространстве.

Таким образом, элементарный комплекс представляет ядро z , окруженное мнимой оболочкой $\sqrt{0}$, которое трактуется как поле определенной физической природы. Эта оболочка адекватна, например, электромагнитному полю (см. рис. 44)

Далее, сложный комплекс представим в виде

$$v_k = (z_1 + j\sigma_1) + k_1(z_2 + j\sigma_2).$$

символически запишем системой векторов $(1, i, j)k_1$.

Произведем выделение ядра комплекса и его мнимых оболочек

$$v_k = z + \sqrt{0}iz_1e^{\pm jarctgi} + \sqrt{0}e^{\pm karctgi} \sqrt{0}e^{\pm jarctgi} z_2,$$

где z, z_1, z_2 - комплексы в плоскости.

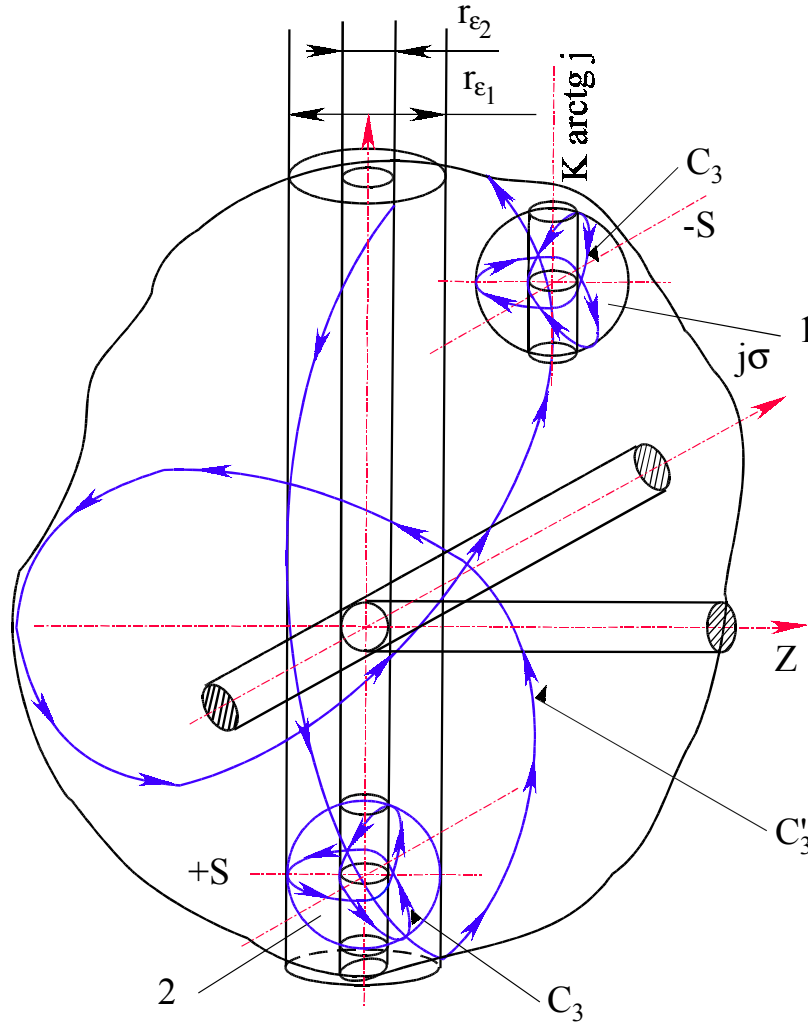


Рис. 49. Модель сложной частицы

Преобразования показывают, что сложная частица имеет два изолированных направления, которые создают сложное поле взаимодействия, так составляют единый ϵ -туннель сложной частицы, что следует из третьего члена в выражении v_k . Кроме того, элементарный блок также остается в силе со своим изолированным направлением $\pm jarctgi$ (второй член в выражении v_k). Однако система v_k может иметь и один ϵ -туннель, при выполнении условий $\|z_1 + j\sigma_1\| = \|z_2 + j\sigma_2\| \neq \sqrt{0}$.

В этом случае комплексное пространство представимо в виде:

$$v_k = z\sqrt{0}e^{\pm karctgj} e^{j\psi}.$$

Если выполняется условие вида

$$\|z_1 + j\sigma_1\| = \|z_2 + j\sigma_2\| = \sqrt{0}$$

то комплекс представим с одним сложным ϵ -туннелем

$$v_k = ze^{j\psi + ky} \sqrt{0} \cdot \sqrt{0}e^{\pm karctgj \pm jarctgi},$$

где ϕ, ψ, y - действительные числа

В сложной системе векторов $(1, i, j)k_l$ векторы (i, j) элементарного блока $(1, i, j)$ становятся неравноправными, вследствие этого можно предположить, что один участвует в создании одного заряда, а другой - другого.

Формирование ϵ -туннелей характеризует заряженность пространства. Заряд есть ϵ -туннель, это непосредственно вытекает из решения уравнений электродинамики. В этом смысле рассматриваемая модель обладает двумя зарядами: зарядом, связанным с изолированным направлением, и вторым, связанным с другим изолированным направлением.

Направление размерность пространства, в котором сформирован ϵ -туннель, определяет физическое содержание заряда (ядерный или электрический). Причем согласно комплексу заряд более высокой размерности пространства подавляет заряд, образованный в структуре с меньшей по величине размерности (рис. 50).

С туннелем связаны и спиновые характеристики частиц. Частицы, самостоятельно двигаясь по траектории типа СЗ поляризуются своими ϵ -туннелями относительно общего ϵ -туннеля сложной частицы. Этот вариант был рассмотрен при преобразовании скоростей теории относительности, преобразованных аппаратом комплексной пространственной алгебры. В этом случае один из векторов поляризуется по направлению ϵ -туннеля сложной частицы, а другой усиливает крутящий момент общего ϵ -туннеля (рис. 51).

Модель сложной частицы показывает, что через ϵ -туннель идет интенсивный энергетический обмен всех составляющих элементарных частиц. ϵ -туннели, вложенные друг в друга, при формировании пространств высокой размерности, заполняются энергетическими массами. Это заполнение ограничено размерностью пространства. Принцип насыщения энергетических ϵ -туннелей лежит в основе структурирования материи. Такое обобщение есть следствие характера пространственных кривых C_3, C'_3, C''_3 часть которых проходит через ϵ -туннель сложной частицы. Вследствие чего этот туннель интенсивно заполняется траекториями. Естественно, что траектории - это геометрическая интерпретация движения энергетических масс.

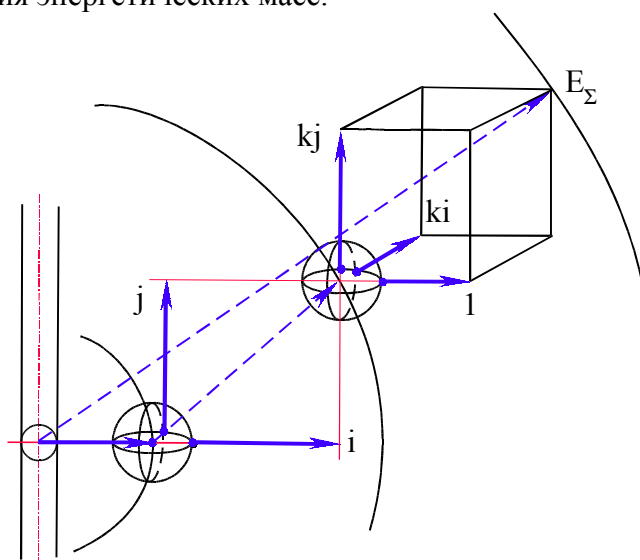


Рис. 50. Пространство более высокой размерности с зарядом, подавляющим заряд пространства меньшей размерности

Из формулы для энергии частицы в комплексном пространстве, выведенной в главе 3, следует, что, с какой бы скоростью ни двигался объект, модуль его энергии выражается формулой Эйнштейна

$$\|E_\Sigma\| = \|m_0 c_s^2 e^{j \arctg i \psi}\| = m_0 c_s^2,$$

$$\text{где } \psi = \frac{2 \frac{v}{c_s}}{1 + \left(\frac{v}{c_s} \right)^2};$$

$$\|E_\Sigma\| = m_0 c_s^2.$$

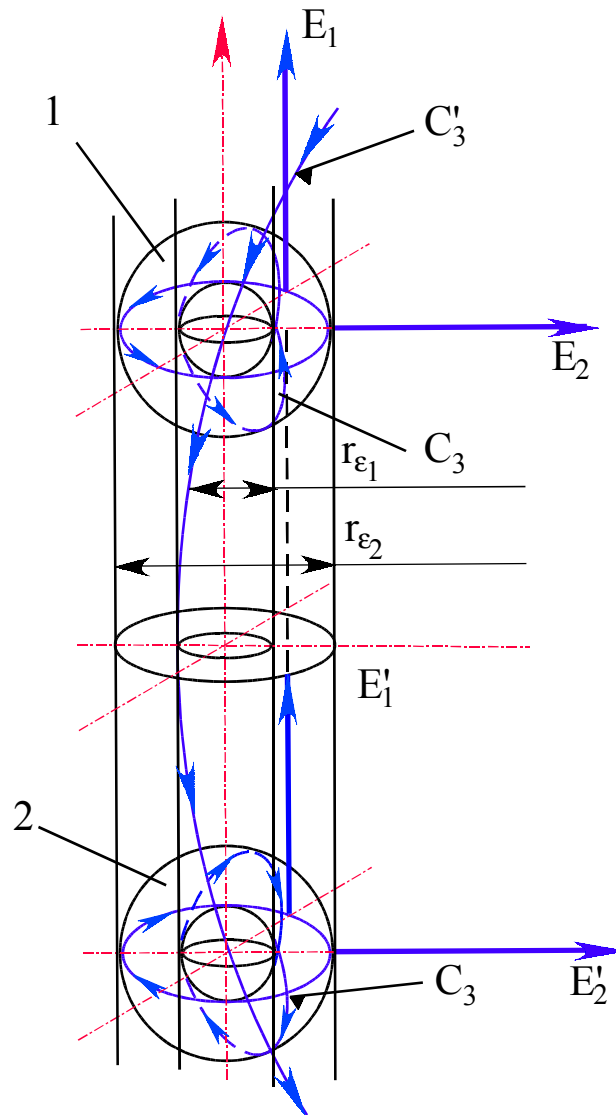


Рис. 51. Самосогласованность полей взаимодействия, вызывающая интегрирование спинов структурных образований, входящих как самостоятельные в более сложное структурное образование

Величина скорости сказывается только на повороте вектора E_Σ модуля энергии в пространстве.

Имеем несколько предельных случаев:

$$g_1 = \frac{v}{c_s} < 1; g_2 = \frac{v}{c_s} > 1;$$

А

$$\|E_{\Sigma}\|g_1 = \|E_{\Sigma}\|g_2;$$

Б

$$g = \frac{v}{c_s} = 1.$$

В этом случае вся энергия превращается в энергию поля частицы. Это выражение имеет смысл неопределенно короткое время

$$\Delta t \sim E_{\Sigma} / m_0 c_s^2.$$

ибо при $\Delta t_1 > \Delta t$ начинается переход частицы в пространство с другой характеристикой c_s туннеля по предельной скорости c_{s1} и по насыщению

$$\|m_0 c_s^2\| \rightarrow \|m_1 c_{s1}^2 \cdot e^{\pm j \arctg i}\|.$$

Необходимо отметить также, что для изолированного направления справедливо $e^{nj \arctg i + j \arctg i}$,

где n любое действительное число, так что частица может проходить через ряд ϵ -туннелей одновременно.

В. Если $v = \infty$, то имеем $\|E_{\Sigma}\| = m_0 c_s^2$.

Частица движется со скоростью $v = \infty$ в действительном координатном направлении, то есть строго ориентированно.

Разность между энергией E_{Σ} и энергией покоя даст величину кинетической энергии

$$E_{\text{кин}} = E_{\Sigma} - m_0 c_s^2$$

Раскрывая эту формулу, получим

$$E_{\text{кин}} = 2 \frac{v}{c_s} \frac{m_0 c_s^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c_s}\right)^2}} e^{\pm j \arctg \frac{v}{c_s}}.$$

При $v=0$ модуль кинетической энергии равен нулю, при $v = c_s$ модуль кинетической энергии равен

$$\|E_{\text{кин}}\| = m_0 c_s^2$$

Модуль кинетической энергии частицы всегда превосходит энергию покоя частицы, так как он характеризует насыщение энергией ϵ -туннелей того поля взаимодействия, в котором находится частица.

Поясним это утверждение выкладками. Из энергии частицы всегда можно выделить ее полевою энергию, то есть можно записать

$$E_{\Sigma} = E_0 + E_1 (1 \pm ji),$$

для этого достаточно из энергии частицы вычесть и прибавить одно и то же число

$$\pm m_0 c_s^2 \frac{2 \frac{v}{c_s}}{1 - \left(\frac{v}{c_s}\right)^2}$$

и провести преобразования

$$E_{\Sigma} = m_0 c_s^2 \frac{1 - \frac{v}{c_s}}{1 + \frac{v}{c_s}} + m_0 c_s^2 \frac{2 \frac{v}{c_s}}{1 - \left(\frac{v}{c_s}\right)^2} \sqrt{0} e^{\pm j \arctg i}.$$

Энергия частицы имеет теперь два слагаемых, одно из которых характеризует зарядовую энергию частицы, другое слагаемое есть энергия ее ядра. Зарядовая энергия сопоставима с кинетической энергией.

Можно провести следующие выкладки:

$$E = m_0 c_s^2 \frac{2 \frac{v}{c_s}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c_s}\right)^2}} \lim_{v \rightarrow c_s} \frac{\sqrt{0}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c_s}\right)^2}} e^{-j \arctg i \frac{v}{c_s}} = m_0 c_s^2 \frac{2 \frac{v}{c_s}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c_s}\right)^2}} e^{-j \arctg i}$$

Таким образом, полевая энергия превратилась в энергию идущую по изолированному направлению. При разгоне частицы часть энергии идет на создание дополнительного тока в туннелях. Этот дополнительный энергетический ток определяет инерциальность системы и идет по ϵ -туннелям полей взаимодействия, в котором находится частица.

Итак, комплексному пространству придаётся вполне определенный смысл: пространство (V) отражает структурное формирование материи.

Классификация сил, известных в настоящее время, должна быть связана со структурным уровнем материи, в котором они действуют. Законы Кулона, Ньютона есть отражение трехмерности пространства. В комплексном пространстве любого числа измерений модуль действителен и трехмерен.

Наличие ϵ определяет заряд структурного образования. Каждый структурный уровень характеризуется своим количеством ϵ -туннелей и в связи с этим своим зарядом и своими силами.

Согласно изложенной физической трактовке комплексного пространства под микрочастицей понимается часть пространства, изолированного от остального поверхностью, натянутой без точек самопересечения на циркуляционную пространственную кривую типа C_3 и имеющего контакт с пространством другой по величине размерности через изолированные ϵ -туннели.

В результате проведенных исследований в главах 1, 2, 3 и физической трактовки пространства выдвигается гипотеза о взаимодействии n -мерных пространств через ϵ -туннели изолированных направлений, когда пространства разной по величине размерности оказывают давление друг на друга через контакты по поверхностям изолированных направлений.

Эта рабочая гипотеза положена в основу обоснования циклонной модели атомного ядра и вывода формулы энергии связи атомных ядер

ГЛАВА № 5. ЦИКЛОННАЯ МОДЕЛЬ АТОМНОГО ЯДРА. ВЫВОД ФОРМУЛЫ ЭНЕРГИИ СВЯЗИ АТОМНЫХ ЯДЕР

5.1. Соответствие между периодическим законом элементов и формированием циклонных вихрей в ядерной материи

Формирование структуры пространства, заложенное в аппарате комплексной пространственной алгебры и развитого на ее основе пространственного комплексного анализа, сопоставим с формированием ядер периодической таблицы элементов.

В настоящее время ясно, что периодичность расположения элементов в таблице Д.И. Менделеева вызвана не только изменением структуры электронных оболочек, но и, в первую очередь, происходящими изменениями в ядрах элементов, связанными с ростом заряда z атомного ядра.

Вопрос следует ставить более остро: конфигурация электронных оболочек атома целиком зависит от структуры атомного ядра. Теоретическая физика отошла от такой постановки и рассматривает ядро как потенциал, обладающий определенным зарядом, и не более того.

Согласно проведенным исследованиям выдвигаем гипотезу циклонной модели атомного ядра. От ядер легких элементов до ядер тяжелых элементов идет периодическое формирование энергетических циклонных вихрей в ядре, которые и определяют структуру ядер. Согласно аппарату ТФПКП (теории функции пространственного комплексного переменного) количество циклонных вихрей в пространстве фиксируется количеством ε -туннелей в n -мерном пространстве. Таким образом, утверждается, что размерность пространства определяет его структуру и наоборот и что периодическая таблица Д.И. Менделеева реализуется в пространстве определенного количества измерений, которое будет установлено.

Следуя аппарату по выделению ε -туннелей в пространстве, продемонстрированному в главе 4-й, можно утверждать, что n -мерное комплексное пространство имеет количество туннелей, соответствующее числу сочетаний 2 из n -размерности пространства.

$$P_i = C_N^2 = \frac{N(N-1)}{2}.$$

Проведем сопоставление числа намерений N с числом сочетаний C_N^2 и зарядом z ядра:

$N=1$	$C=0$	$Z=0$	нейтрон
$N=2$	$C=1$	$Z=1$	протон
$N=3$	$C=3$	$Z=3$	литий
$N=4$	$C=6$	$Z=6$	углерод
$N=5$	$C=10$	$Z=10$	неон

Ядром элемента неона Ne_{10} заканчивается второй ряд периодической системы элементов. С позиции циклонной модели заканчивается формирование первого

циклонного вихря в ядерной материи. Величины 1,3,6 соответствуют формированию конфигурациям электронных оболочек основных состояний атома, которые также повторяются с незначительным отклонением при формировании циклонных вихрей многонуклонных ядер.

Для сопоставления в табл. 1 даны электронные конфигурации основных состояний атома до элемента ксенона.

Периодическая система элементов Д.И. Менделеева представлена на рис. 52.

Схема формирования циклонных ядерных вихрей на протяжении всей периодической таблицы элементов представлена на рис. 53.

Далее имеем:

N=6	C=15	Z=15	фосфор P ₁₅

Электронная оболочка заполняется предельно до 14 электронов ввиду того, что ядерный циклонный вихрь способен удержать 15 зарядов:

N=7	C=21	Z=21	скандий P ₂₁

Можно утверждать, что электронная оболочка сверхтяжелых элементов предельно будет заполнена до 20 - 21 электрона.

Между этими числами находится число 18, которое определяет заряд ядра аргона. В ядре аргона сформировано два циклонных вихря, удерживающих по 9 зарядов каждый.

Ядром аргона A₁₈ заканчивается третий период периодической системы, циклонные вихри ядра скандия удерживают 10 и 11 зарядов каждый:

N=8	C=28	Z=28	никель Ni ₂₃

Закончился первый ряд четвертого периода. Сформировался третий циклонный вихрь:

N=9	C=36	Z=36	криптон Kr ₃₆

Закончился второй ряд 4-го периода. Сформировался четвертый циклонный вихрь, удерживающий 36 протонов - по 9 протонов каждый:

N=10	C=45	Z=45	родий Rh ₄₅

Первый ряд 5-го периода замыкает ядро элемента палладия. Заряд ядра палладия на единицу выше. Естественно, что количество зарядов, удерживаемых в ядре циклонными вихрями, может отличаться от зарядов предельных ядер периодов системы элементов, но не более чем на единицу.

Ядрами элементов Rh₄₅ закончилось формирование пятого циклонного вихря в ядерной материи:

N=1	C=55	Z=55	цезий Cz ₅₅

Второй ряд 5-го периода заканчивается в системе ядром ксенона с зарядом Xe₅₄.

Поэтому считаем, что элементами ксенона и цезия сформирован в их ядрах шестой ствол и шесть циклонных вихрей:

N=12	C=66	Z=66	диспрозий Du ₆₆
N=13	C=78	Z=78	платина Pt ₇₈

Диспрозий принадлежит лантаноидам, которые располагаются в первом ряду шестого периода. Заканчивается период ядром платины, что и дает расчет.

Далее имеем:

N=14	C=91	Z=91	протактиний Pa ₉₁
N=15	C=105	Z=105	ЕКА-ТА

Периоды	Ряды		Группы элементов				
			I - R ₂ O	II - RO	III - R ₂ O ₃	IV RH ₄ RO ₂	V RH ₃ R ₂ O ₅
1	I	Q R O N Z M L K	H 1 1.00794 водород 1				
2	II	Q R O N Z M L K	Li 3 6.941 литий 1 2	Be 4 9.01218 бериллий 2 2	5 B 10.81 бор 3 2	6 C 12.011 углерод 4 2	7 N 14.0067 азот 5 2
3	III	Q R O N Z M L K	Na 11 22.98977 натрий 1 8 2	Mg 12 24.305 магний 2 8 2	13 Al 26.98154 алюминий 3 8 2	14 Si 28.0855 кремний 4 8 2	15 P 30.97376 фосфор 5 8 2
4	IV	Q R O N Z M L K	K 19 39.098 калий 1 8 8 2	Ca 20 40.08 кальций 2 8 8 2	21 Sc 44.9559 скандий 2 9 8 2	22 Ti 47.90 титан 2 10 8 2	23 V 50.9415 ванадий 2 11 8 2
	V	Q R O N Z M L K	29 Cu 63.546 медь 1 18 8 2	30 Zn 65.38 цинк 2 18 8 2	31 Ga 69.72 галлий 3 18 8 2	32 Ge 72.59 германий 4 18 8 2	33 As 74.9216 мышьяк 5 18 8 2
5	VI	Q R O N Z M L K	Rb 37 85.4678 рубидий 1 8 18 2	Sr 38 87.62 стронций 2 8 18 2	39 Y 88.9059 иттрий 2 9 18 2	40 Zr 91.22 цирконий 2 10 18 2	41 Nb 92.9064 ниобий 1 12 18 8 2
	VII	Q R O N Z M L K	47 Ag 107.8682 серебро 1 18 18 8 2	48 Cd 112.41 кадмий 2 18 18 8 2	49 In 114.82 индий 3 18 18 8 2	50 Sn 118.69 олово 4 18 18 8 2	51 Sb 121.75 сурьма 5 18 18 8 2
6	VIII	Q R O N Z M L K	Cs 55 132.9054 цезий 1 8 18 18 8 2	Ba 56 137.33 барий 2 8 18 18 8 2	57 La-Lu 71 •	72 Hf 178.49 гафний 2 10 32 18 8 2	73 Ta 180.9479 тантал 2 11 32 18 8 2
	IX	Q R O N Z M L K	79 Au 196.9665 золото 1 18 32 18 8 2	80 Hg 200.59 ртуть 2 18 32 18 8 2	81 Tl 204.37 таллий 3 18 32 18 8 2	82 Pb 207.2 свинец 4 18 32 18 8 2	83 Bi 208.9804 висмут 5 18 32 18 8 2
7	IX	Q R O N Z M L K	Fr 87 [223] франций 1 8 18 32 18 8 2	Ra 88 226.0254 радий 2 8 18 32 18 8 2	89 Ac-(Lr) 103 ••	104 Ku [261] курчатовий 2 10 32 32 18 8 2	105 Ns [261] нильсборий 2 11 32 32 18 8 2

Рис. 52. Периодическая система элементов Д.И.Менделеева с указанием мест образования новых циклонных вихрей в ядре атома.

Группы элементов

VI		VII		VIII			0
RH ₂ RO ₃		RH R ₂ O ₇		RO ₄			- -
							2 He 4.00260 гелий
8 O 15.9994 кислород		9 F 18.998403 фтор					10 Ne 20.179 неон
16 S 32.06 сера		17 Cl 35.453 хлор					18 Ar 39.948 аргон
Cr 24 51.996 хром		Mn 25 54.9380 марганец		Fe 26 55.847 железо		Co 27 58.9332 кобальт	Ni 28 58.70 никель
34 Se 78.96 селен		35 Br 79.904 бром					36 Kr 83.80 криптон
Mo 42 95.94 молибден		Tc 43 98.9062 технеций		Ru 44 101.07 рутений		Rh 45 102.9055 родий	Pd 46 106.4 палладий
52 Te 127.60 теллур		53 I 126.9045 йод					54 Rn 131.30 ксенон
W 74 183.85 вольфрам		Re 75 186.207 рений		Os 76 190.2 осмий		Ir 77 192.22 иридий	Pt 78 195.09 платина
84 Po [209] полоний		85 At [210] астат					86 Rn [222] радон

Q P O N M L K	La 57 138.9055 лантан	Ce 58 140.12 церий	Pr 59 140.9077 празеодим	Nd 60 144.24 неодим	Pm 61 [145] прометий	Sm 62 150.4 самарий	Eu 63 151.96 европий	
Q P O N M L K	Gd 64 157.25 гадолиний	Tb 65 158.9254 тербий	Dy 66 162.50 диспрозий	Ho 67 164.9304 гольмий	Er 68 167.26 эрбий	Tm 69 168.9342 тулий	Yb 70 173.04 иттербий	Lu 71 174.967 лютеций
Q P O N M L K	Ac 89 [227] актиний	Th 90 232.0381 торий	Pa 91 231.0359 протактиний	U 92 238.029 уран	Np 93 237.0482 нептуний	Pu 94 [244] плутоний	Am 95 [243] америций	
Q P O N M L K	Cm 96 [247] кюрий	Bk 97 [247] берклий	Cf 98 [251] калифорний	Es 99 [254] эйнштейний	Fm 100 [257] фермий	Md 101 [258] менделевий	(No) 102 [255] (нобелий)	(Lr) 103 [256] (лоуренсий)

Атомная масса

Mn

54.9380

марганец

Атомный номер

25

Распределение электронов по уровням

2

13

8

2

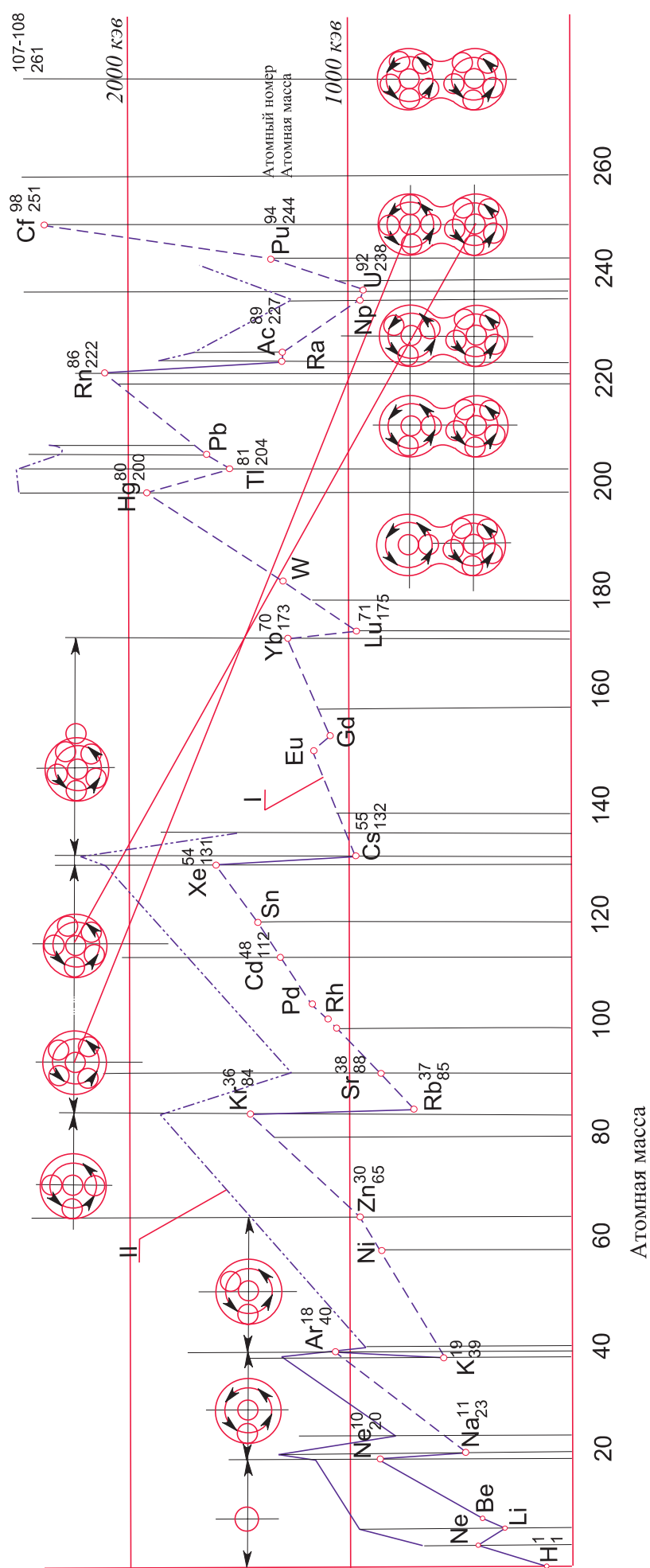


Рис. 53.. Схема формирования циклонных вихрей в ядрах атома периодической системы элементов. Ломаная кривая соответствует энергии связи электрона на последней орбите с ядром.

Заряд $Z=105$ закрывает таблицу элементов (см. рис. 52, рис. 53). Периодичность формирования ϵ -туннелей в ядрах элементов колебалась на протяжении всей таблицы от 9-10 единиц заряда.

К концу таблицы все энергетические ϵ -туннели насыщаются энергией, так что каждый из них удерживает по 9 протонов. Вся периодическая система имеет, следовательно,

$$\sim \frac{105}{9} \sim 11.666...$$

ϵ -туннелей.

Здесь необходимо отметить первое подтверждение выдвинутой гипотезы, что ϵ -туннель есть заряд пространства определенного уровня.

Известно, что если составить единицу заряда из скорости света $c = 3 \cdot 10^8 \text{ см/с}$, гравитационной постоянной $G = 6.67 \cdot 10 \text{ см}^3 / \text{с}^2$ и постоянной Планка

$h = 1.05 \cdot 10 \text{ см}^2 \text{ г/с}$, то получим $c_g = (he)^{1/2}$, которое не зависит от G и в $\sqrt{137} = 11.704698$ раз больше элементарного заряда.

Постоянная тонкой структуры

$$a = \frac{e^2}{hc} = \frac{r_e}{\lambda_{комп}^e} = \frac{1}{137},$$

где e - заряд электрона; r_e —классический радиус электрона; $\lambda_{комп}^e$ - комптоновская длина волны электрона.

Таким образом, величина заряда e , составленная из фундаментальных постоянных, соответствует количеству циклонных вихрей в полностью сформированной ядерной матери. В каждом ϵ -туннеле циклонного ядерного вихря содержится квадрат ϵ -туннелей циклонных вихрей электронных оболочек атома. Таким образом, доказано, что ядерные циклонные вихри диктуют формирование электронных оболочек.

Таблицу можно продолжить и получить следующий ряд:

N=16	C=120	Z=120
N= 17	C=136	Z=136
N=18	C=153	Z=153
N=19	C=171	Z=171

и так далее:

Элементы с зарядами 120, 136, 153, 171 могут претендовать на устойчивые ядерные образования ядер сверхтяжелых элементов. Значения их близки к предсказываемым в теории [10].

Количественное совпадение величины сочетаний из N -размерности комплекса с величинами зарядов элементов, закрывающих или открывающих периоды периодической таблицы Д. И. Менделеева, подтверждают выдвинутую гипотезу циклонной модели атомного ядра.

Периодичность, с которой формируются циклонные ядерные вихри, соответствует периодичности формирования рядов таблицы в 9-10 единиц заряда. Со всей определенностью можно сказать, что новый период или новая строчка в периоде отражает структурное изменение, происшедшее в ядре.

Элементы Ne_{10} , Ar_{18} , Ni_{28} , Kr_{36} , Xe_{54} формируют первый блок циклонных вихрей. Шесть циклонных вихрей (рис. 53) ядер Xe_{54} закрывают этот блок.

Далее идет формирование второго блока и седьмого, ϵ -туннеля; циклонного вихря до элемента диспрозия Dy_{66} . Ядра лантаноидов имеют до 8 туннелей. Два ϵ -туннеля второго блока при полном своем формировании становятся устойчивыми. В процессе формирования они неустойчивы и стремятся вернуться к устойчивому блоку из 6 туннелей.

Экспериментальные данные подтверждают этот вывод. Начиная с ядра Nd_{60} до ядра Dy_{66} имеем α -распадные процессы. α -радиактивность лантаноидов заканчивается на ядре элемента гафния Hf_{72} . Это говорит о том, что в ядре сформировано 8 циклонных вихрей по 9 зарядов в каждом: 6 в первом блоке и 2 во втором. Лантаноиды обладают одинаковыми химическими свойствами и занимают одну клетку в системе (рис. 52). Изложенные исследования говорят о том, что химические свойства лантаноидов определяют 7-8-неустойчивые ϵ -туннели циклонных вихрей второго блока.

Оба блока образуют между собой перемычку (рис. 53). Ядро урана U_{92} имеет 11 циклонных вихрей. При распаде ядро делится на блок из шести туннелей и блок из четырех туннелей. Один из туннелей распадается и вместе с ним распадается один циклонный вихрь, образуя осколки деления. Это соответствует схеме распада по массам как $4:6 = 2:3$ с образованием двух крупных осколков типа ядер ксенона и стронция Xe_{54} , Sr_{38} первый имеет шесть ϵ -туннелей, второй - четыре.

Вся периодическая таблица формирует два блока по шесть циклонных вихрей. В результате блоки становятся устойчивыми и независимыми друг от друга, что приводит к их спонтанному делению.

Схема из рис. 53 сопровождается кривой ионизационного потенциала последнего электрона атома. Кривая резко падает вниз при появлении нового циклонного ϵ -туннеля в ядре и растет вверх по мере заполнения его энергией до насыщения по мере увеличения заряда ядра. Это еще одно убедительное доказательство выдвинутой гипотезы. Так как в исследовании таблица элементов выступает как экспериментальное подтверждение выдвинутой гипотезы, основанной на циклонном вихревом характере формирования структуры пространства, как следствие ТФПКП, то следует заключение: законы периодического формирования циклонных вихрей присущи N-мерному пространству. Пространство в своем развитии непрерывно формирует циклонную структуру, которая при своем насыщении способна спонтанно делиться. В этом смысле нельзя пространство и материю стянуть в точку до образования черной дыры. Этот вывод получен и в РТГ А. А. Логуновым [8].

5.2. Энергетическая оценка выдвинутой гипотезы о циклонной структуре ядерной материи

Из вышеизложенного следует, если удастся установить энергию связи одного циклонного атомного ядра, то энергию связи ядер можно будет выразить формулой

$$E = \varepsilon \frac{Z}{P} \quad (5.1)$$

где Z - заряд ядра; ε - энергия связи одного циклонного вихря; P - величина периодичности формирования ε -туннелей в ядре.

Периодичность формирования циклонных вихрей в системе элементов соответствует 9-10 единицам заряда.

Образовавшийся циклонный вихрь в ядре в пределах своей размерности пространства обладает, свойством насыщения, энергией, после чего с ростом заряда Z и количества в нем нуклонов ядро вынуждено переходить к новой структуре с новым ε -туннелем циклонного вихря.

Первый циклонный вихрь сформирован в ядре изотопа Ne_{10}^{24}

Энергия связи этого ядра равна 191,1МэВ. Эту энергию следует считать предельной энергией насыщения одного ε -Туннеля циклонного вихря: $\varepsilon=191,1\text{МэВ}$. В табл. 2 сведены результаты расчета энергии связи ядер элементов и их изотопов и сопоставлены с результатами расчета по формуле (5.1) для всех ядер периодической системы. Расхождение между данными расчета и их экспериментальными данными не более 10МэВ на всем протяжении таблицы. Периодичность дана в пятой колонке. Она составляет обоснованную величину в пределах 9,5-10 единиц заряда.

Таким образом, энергетический расчет убедительно свидетельствует о циклонной структуре ядра и подтверждает выдвинутую гипотезу.

Следовательно, задача свелась к теоретическому определению энергии связи одного ядерного вихря.

5.3. Пространство ядерных сил

Сущность теории относительности состоит в следующем: физические процессы протекают в четырехмерном пространстве (ст и пространственные координаты), геометрия которого псевдоевклидова [7].

Пространственный комплексный анализ заменил матрицу теории относительности обычной числовой матрицей, что позволило выдвинуть гипотезу о циклонной структуре пространства.

Из постулата А. А. Логунова [8] непосредственно следует, что пространство ядерных взаимодействий также является псевдоевклидовым и поэтому может быть описано ТФПКП.

В современной ядерной физике считается установленным факт [11], что основную часть взаимодействия двух нуклонов можно отнести за счет процессов постоянного обмена пионами между нуклонами. Кроме того, имеются экспериментальные доказательства, что все взаимодействия двух нуклонов - результат обмена мезонами.

Пион это только один из мезонов, ответственный за нуклон-нуклонное взаимодействие, но он отвечает за самую существенную дальнodelствующую часть нуклон-нуклонных взаимодействий.

Теория говорит, что существуют скалярные, псевдоскалярные и векторные мезоны с массами, меньшими $1\text{ГэВ}/c^2$.

Фундаментальная идея Юкавы подтверждается вплоть до больших энергий нуклон-нуклонного взаимодействия: силы нуклон-нуклонного взаимодействия объясняются обменом тяжелыми адронными квантами.

В настоящее время имеется много вариантов мезонных теорий [10], однако ни одна из них не привела к количественным результатам.

Диаграммная техника Фейнмана при описании ядерного взаимодействия также не дала результата.

Безразмерная величина $f = g^2 N / hc$, построенная по аналогии с постоянной тонкой структуры

$$a = e^2 / hc = 1/137,$$

оказалась порядка единицы $gN=1$, Это приводит к расхождению рядов, описывающих диаграммы взаимодействия.

Сильные ядерные взаимодействия характеризуются очень высокой плотностью мезонного облака около нуклона, вследствие этого многомезонный обмен так же возможен, как и одномезонный.

Согласно постулату теории относительности А.А. Логунова [8] считаем, что обменные кванты по отношению к нуклонам создают псевдоевклидово пространство.

Циклонная модель атомного ядра позволяет перейти (как обобщение) к величине усредненного обменного кванта.

ТФПКП и постулат теории относительности позволяют записать энергию связи атомного ядра в виде

$$E = (Zm_p + Nm_N) - \left\| (Zm_p + Nm_N) \pm ji(Z + N)m_V \right\|, \quad (5.2.)$$

где Z - количество протонов в ядре; Z -количество нейтронов; m_V - усредненная величина обменного ядерного кванта на один нуклон в ядре, m_p, m_N -масса протона и масса нейтрона соответственно.

В формуле модуль комплекса взят от связанной массы ядра. Структура ядра описывается комплексом

$$m_{Z,N} = (Zm_p + Nm_N) \pm ji(Z + N)m_V, \quad (5.3.)$$

который для обобщения взят без аргументов (поворотов) в пространстве.

При таких допущениях проведем вторую энергетическую оценку выдвинутой гипотезы.

Модуль комплекса дает связанную массу нуклонов

$$m_{Z,N} = \sqrt{(Zm_p + Nm_N)^2 - (Am_V)^2} \quad (5.4.)$$

Энергия связи атомного ядра будет иметь выражение

$$E = (Zm_p + Nm_N) - \sqrt{(Zm_p + Nm_N)^2 - (Am_V)^2} \quad (5.5.)$$

За усредненный обменный квант была взята масса пиона $m_\pi = 134.9626$ МэВ.

Расчет показал, что результаты расхождения с экспериментальными данными колеблются в интервале от 20 до 200 МэВ, соответственно для легких и тяжелых элементов. Такое, расхождение объясняется сильным обобщением при выводе формулы, однако в пределах обоснования постулата теории относительности и ТФПКП оно достаточно высокое. Незначительное колебание величины обменного кванта от массы пиона даст совпадение более высокое.

Эти две энергетические оценки создали предпосылки и обосновали их для вывода формулы энергии связи атомных ядер.

5.4. Вывод формулы энергии связи атомных ядер

Структурную формулу связанной массы ядра преобразуем по законам комплексной алгебры, выделяя полевую массу и центральное ядро

$$\begin{aligned} m_{Z,N} &= (Zm_p + Nm_N) \pm jiAm_V = (Zm_p + Nm_N) \pm Am_V \mp Am_V \pm Am_V ji = \\ &= (Zm_p + Nm_N \pm Am_V) - Am_V \sqrt{0} e^{\pm j \arctg i} \end{aligned}$$

Таким образом, ядро имеет массу

$$m_R = Zm_p + Nm_N \pm Am_V,$$

окруженную мнимой оболочкой

$$m_{об} = Am_V (1 \pm ij).$$

В мнимой оболочке движение энергетической массы происходит по циклической кривой С. В ϵ -туннеле вихря происходит квантовый обмен между нуклонами. Согласно квантовой теории обменный квант движется со скоростью света, при этом согласно исследованиям главы 3, обменные частицы имеют общий ϵ -туннель. Таким образом, обменная масса мезонов квантов ядерного взаимодействия образует оболочку ядра, которая закручивается в циклонный вихрь C_3 вокруг нуклонов и сжимает их до радиуса ядра r_π

Согласно постулату теории относительности и аппарата комплексной алгебры обменные кванты взаимодействия находятся в пространстве ядра в большей по величине размерности, чем сами нуклоны в ядре.

Создается в результате квантового обмена поле большой по величине размерности, чем то, в котором находились частицы до взаимодействия. Взаимодействие увеличивает размерность структуры.

При слиянии нуклонов в ядерную систему каждый из них выделяет в пространство сложной структуры обменную массу, образуя ядерную оболочку (с ядерными энергетическими туннелями). Обменные кванты в оболочке двигаются по простейшим пространственным траекториям типа C_3 , охватывая тороидальную поверхность, и проходят ϵ -туннель со скоростью света. Пространство нуклонов, таким образом, согласно выдвинутой гипотезе находится под давлением, создаваемым оболочкой.

В силу независимости поверхностного интеграла от аналитических функций от формы замкнутой поверхности, поверхность туннеля может быть деформирована во внутреннюю поверхность сферы. В этом случае создается оболочка толщиной δ или s . Это было обосновано в главе 1.

При взаимодействии, как уже отмечалось, пространства создают сложное образование, которое имеет свой туннель. При этом туннели взаимодействующих пространств изменяют свои характеристики. При интенсивном взаимодействии туннель сложной частицы имеет меньший радиус.

На рис. 54 представлена модель взаимодействия двух нуклонных вихрей, которые образовали более сложное пространство со своей циклической кривой C_3 и ε -туннелем радиуса r_π .

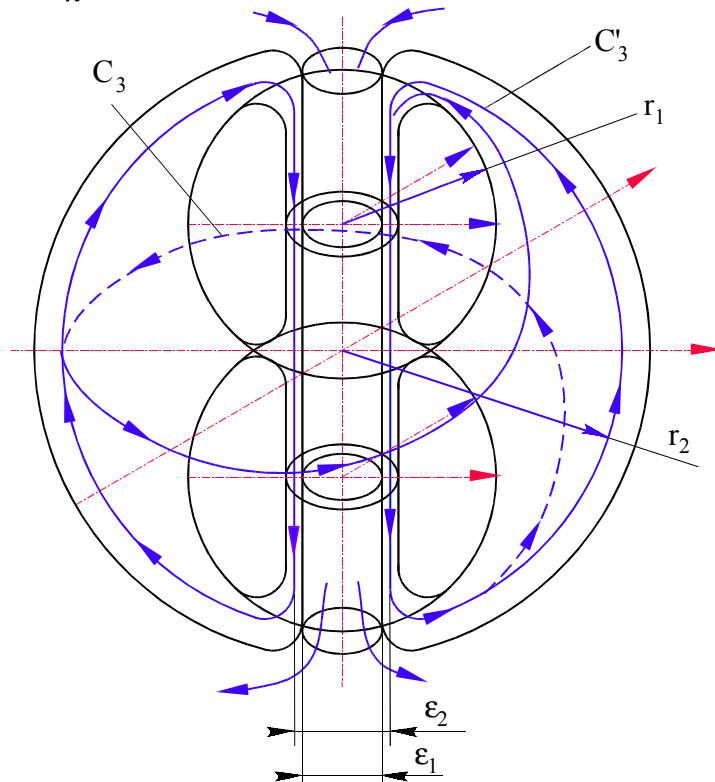


Рис. 54. К выводу формулы "Энергия связи атомных ядер"

В результате слияния образуется кольцо взаимодействия площадью

$$S_k = \pi(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2).$$

Согласно комплексному анализу ε -туннель сложной частицы с радиусом ε_2 выходит в пространство большей по величине размерности, чем размерность ε -туннелей взаимодействующих пространств с туннелями ε_1 , ε -туннель является проекцией в пространство, в которое он вложен, что и обуславливает связность всей системы.

Кольцо S_k находится под давлением массы обменных квантов, находящихся в оболочке сложной структуры.

Из соотношения Гейзенберга определяем максимальную толщину мнимой оболочки ядра

$$H = \frac{h}{m_V c}, \quad (5.6.)$$

где m_V - усредненный обменный квант взаимодействия на один нуклон в ядре.

Предварительный энергетический расчет (пункт 3 табл. 2) обосновал введение величины усредненного обменного кванта на нуклон.

Далее объем пространства по модулю, в котором находятся нуклоны, равен

$$V_{nn} = \frac{4}{3} \pi (R_{\text{я}} - H)^3, \quad (5.7.)$$

где $R_{\text{я}}$, - радиус ядра.

Объем ядра

$$V_{\text{я}} = \frac{4}{3} \pi R_{\text{я}}^3,$$

Объем мнимой оболочки

$$V_{\delta} = V_{\text{я}} - V_{nn} = \frac{4}{3} \pi H (3R_{\text{я}}^2 - 3R_{\text{я}}H + H^2). \quad (5.8.)$$

Плотность энергии в мнимой оболочке равна

$$P_{\varepsilon} = \frac{3}{4} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{m_V A}{H (3R_{\text{я}}^2 - 3R_{\text{я}}H + H^2)}. \quad (5.9.)$$

Площадь сечения S_k циклонного ε -туннеля ядра не может превышать площади сечения нуклона. Согласно модели (рис.54) площадь S_k , равная площади проекции нуклона, является предельной, обеспечивающей взаимодействие. В противном случае пространство разомкнется.

Таким образом, максимальная площадь кольца взаимодействия стремится к величине

$$S_k = \pi \cdot r_N^2,$$

где r_N - радиус протона.

Давление обменной массы через один ε -туннель на пространство нуклонов выражается как произведение плотности энергии в оболочке ρ_{ε} , площади кольца S_k , высоты оболочки H .

$$E_{\varepsilon} = P_{\varepsilon} S_k H = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{A m_V S_k H}{(3R_{\text{я}}^2 - 3R_{\text{я}}H + H^2) H}. \quad (5.10.)$$

В результате получена формула энергии связи одного циклонного вихря в ядре. За радиус нуклона r_N принимаем величину радиуса протона

$$r_p = (0.8 - 0.82) \cdot 10^{-13}.$$

В числителе и знаменателе формулы стоит квадрат длины, поэтому в дальнейшем коэффициент 10^{-13} опускаем.

В результате имеем

$$E_{\varepsilon} \cong \frac{0.5 \cdot m_V A}{3R_{\text{я}}^2 - 3R_{\text{я}}H + H^2}. \quad (5.11.)$$

Энергия связи ядра заряда Z будет равна $E = E_{\varepsilon} \frac{Z}{P}$

$$E = \frac{0.5m_V A}{3R_{\text{я}}^2 - 3R_{\text{я}}H + H^2} \frac{Z}{P} \quad (5.12.)$$

Высота мнимой оболочки H равна радиусу обменного кванта r_{π} $H = r_{\pi} = \frac{\hbar}{m_{\pi}c}$

Корректируем эту величину по радиусу протона r_p . Из ядерной физики известно

$$r_N \cong r_p \cong 0.8 \cdot 10^{-13} \text{ см}$$

Из соотношения Гейзенберга эта величина равна $r_p = 0.218 \cdot 10^{-13} \text{ см}$, радиус пиона $r_{\pi} = 1.46 \cdot 10^{-13} \text{ см}$, где за массу пиона на первом этапе приняли $m_{\pi} = 134.9626 \text{ МэВ}$

Усредненная масса протона и нейтрона равна $m_N = 939.7825 \text{ МэВ}$

Поэтому принимаем $r_{\pi} = r_p \frac{m_N}{m_{\pi}} = 5.36 \cdot 10^{-13} \text{ см}$.

Радиус ядра $R_{\text{я}} = r_{\text{я}} A^{\frac{1}{3}} \cdot 10^{-13} \text{ см}$, где $r_{\text{я}}$ -принимается равным 1.25

Подставляя эти данные в формулу (5.12) получим

$$E = \frac{67A}{4.68A^{\frac{2}{3}} - 20.2A^{\frac{1}{3}} + 28.8} \frac{Z}{P} \quad (5.13.)$$

Получили формулу энергии связи для атомных ядер элементов периодической системы как функцию массового числа A , заряда Z ядра и величины периодичности P . Результаты расчетов по этой формуле сведены в таблицу 1. Сходимость результатов расчета с экспериментальными данными позволяют продолжить исследования предложенной гипотезы.

Выведем формулу энергии связи атомных ядер как функцию большего количества Параметров.

Высоту мнимой оболочки обменных квантов корректируем по радиусу нуклона

$$H = 0.8 \frac{m_p}{m_V}.$$

Коррекция законна, так как и нуклоны, и усредненная масса обменного кванта находятся в единой структуре взаимодействия, а согласно экспериментальным исследованиям радиус протона остается без изменения при больших энергиях взаимодействия. Формула преобразуется к виду

$$E_{\varepsilon} = \frac{0.5 \cdot m_V A}{3R_{\text{я}}^2 - 3R_{\text{я}} \left(0.8 \frac{m_p}{m_V} \right) + 0.64 \left(\frac{m_p}{m_V} \right)^2}.$$

Формула, еще раз отметим, определяет энергию связи одного циклонного вихря. Энергия связи ядра будет иметь вид

$$E = \frac{0.5 \cdot m_V A}{3R_{\text{я}}^2 - 3R_{\text{я}} \left(0.8 \frac{m_p}{m_V} \right) + 0.64 \left(\frac{m_p}{m_V} \right)^2} \cdot \frac{Z}{P}. \quad (5.14.)$$

Исследуем выведенную формулу. Определим критическую величину усредненного обменного кванта на один нуклон из условия

$$\frac{\partial E}{\partial m_V} = 0.$$

которое после несложных преобразований дает уравнение

$$R_{\text{я}}^2 - R_{\text{я}} \frac{1.6m_p}{m_V} + 0.64 \left(\frac{m_p}{m_V} \right)^2 = 0,$$

которое имеет один корень

$$\frac{m_p}{m_V} = 1.25 R_{\text{я}}.$$

Отсюда

$$m_V = 0.8 \frac{m_p}{R_{\text{я}}}$$

и, следовательно, усредненная масса обменного кванта пропорциональна массе нуклона и обратно пропорциональна радиусу ядра.

$$\text{Вторая производная } \frac{\partial^2 E}{\partial m_V^2} = 0 \text{ тождественно равна нулю,}$$

поэтому величина m_V является стационарной.

Радиус атомного ядра выражается формулой

$$R_{\text{я}} = r_0 A^{1/3},$$

где $r_0 = (1.2 - 1.4) \cdot 10^{-13}$ см.

В расчете берем $r = 1.4 - 1.2$, без коэффициента 10^{-13} , как было оговорено выше. Коэффициент r_0 определен экспериментально. Радиус вихря в ядре равен

$$R_B = r_0 A^{1/3}.$$

Таким образом, стационарная величина обменного кванта равна

$$m_V = 0.8m_p \frac{1}{r_0 \left(\frac{A}{Z} P \right)^{1/3}} \quad (5.15.)$$

Подставим ее в формулу энергии связи

$$\begin{aligned} E &= \frac{0.5 \cdot 0.8m_p \frac{1}{r_0 \left(\frac{A}{Z} P \right)^{1/3}} A}{3r_0^2 \left(\frac{A}{Z} P \right)^{2/3} - 3r_0 \left(\frac{A}{Z} P \right)^{1/3} 0.8 \frac{m_p \left(\frac{A}{Z} P \right)^{1/3}}{0.8m_p} + \frac{0.64 \left(\frac{A}{Z} P \right)^{2/3}}{0.64} r_0^2} = \\ &= 0.4m_p \frac{1}{r_0^3 \frac{P}{Z}} = 0.4m_p \frac{1}{r_0^3} \frac{Z}{P}. \end{aligned}$$

Окончательно будем иметь

$$E = 0.4m_p \frac{1}{r_0^3} \frac{Z}{P}$$

Не ограничивая общности рассуждений за массу протона, примем усредненную массу протона и нейрона

$$m_N = \frac{m_p + m_N}{2} = 938.7825 \text{ МэВ}.$$

Тогда

$$E = \frac{375.5133}{r_0^3} \left(\frac{Z}{P} \right). \quad (5.16.)$$

Если принять $r_0 = 1.25$, как это рекомендует теоретическая физика, то

$$r_0^3 = 1.9531249 \text{ и тогда}$$

$$E = 192.2682 \frac{Z}{P} \quad (5.17.)$$

Откуда энергия связи одного вихря в ядре равна

$$E_{\varepsilon} = 192.2682 \text{ МэВ}$$

Эта величина отличается от экспериментальной на 0.36282 МэВ, то есть на величину, меньшую чем масса электрона; $m_e = 0.511 \text{ МэВ}$.

При обосновании циклонной модели атомного ядра было сделано заключение, что при распаде ядра урана происходит взрыв одного циклонного ε -туннеля. Экспериментально известна энергия, которая выделяется при одном акте деления. Эта энергия, по разным источникам, заключена в интервале от 180 - 200 МэВ. Энергия связи одного циклонного вихря соответствует этому интервалу энергий. Это есть прямое доказательство выдвинутых гипотез и проведенных исследований.

Формула энергии связи (5.17) совпала с формулой, которая была выведена при обосновании циклонной структуры ядер. Поэтому табл. 2 служит одновременно экспериментальным подтверждением выведенной формулы.

В табл. 2 сведены результаты расчета по формуле (5.17.) энергии связи атомных ядер для устойчивых элементов. Из анализа таблицы следует вывод: величина периодичности формирования циклонных вихрей соответствует ранее установленной при исследовании системы элементов и составляет 9.2 - 9.9 единиц заряда, коэффициент при радиусе ядра равен рекомендуемому в физике ядра $r_0 = 1,25$. С учетом влияния величины периодичности P на радиус атомного ядра произведен расчет энергии связи легких ядер периодической системы элементов и их изотопов и сведен в табл. 3. Усредненная величина обменного кванта устойчиво колеблется в пределах $203 \text{ МэВ} \leq m_Y \leq 214 \text{ МэВ}$. Если сопоставить эту величину с массой пиона $m_\pi \pm 139,5669 \text{ МэВ}$, $m_\pi = 134.9626 \text{ МэВ}$, то следует вывод, что три нуклона в ядре обмениваются двумя пионами.

Расчетные формулы дают достаточно стабильные результаты по энергии связи, радиусу ядра, величине обменного кванта. Ни одна из величин не выходит за пределы экспериментально установленных в ядерной физике.

Проведем исследования энергии связи ядер легких элементов от водорода H_1^2 до неона Ne_{10} , где циклонный вихрь не вышел на энергию своего насыщения. Из формулы (5.14) произведем оценку радиусов ядер. Энергию связи ядер возьмем из таблицы 2 [12], определим радиус водорода H_1^2 в зависимости от периодичности системы, в которой он может находиться, при энергии связи, равной 2,2 МэВ

P	10	15	21	28	36	45	54	66	78
r_0	2.57	2.25	2.0	1.83	1.7	1.6	1.5	1.4	1.3
m_Y	107.49					108.12		108.15	

Радиус ядра уменьшается с ростом величины периодичности. Величина обменного кванта остается постоянной. Произведем расчет для изотопа водорода

P	10	15	21
r_0	1.64	1.43	1.28
m_Y	147.37	147.39	147.5

Имеем уменьшение радиуса ядра с увеличением величины периодичности системы. Величина обменного кванта остается постоянной.

Изменение величины усредненного обменного кванта представлено ниже

H_1^2	H_1^3	He_2^6	Li_3^8	Be_4^{11}	B_5	C_6	N_7	O_8	F_9	Ne_{10}

108	147.5	176.6	180	189	194	198	201	206	207	193

Таким образом, величина усредненного обменного кванта выходит на продольную величину при окончательном формировании одного циклонного вихря в ядерной материи и составляет из расчета на три нуклона в ядре два пиона по энергетической массе.

Согласно проведенным исследованиям циклонный вихрь представляет результат разложения в пространстве энергии на два не суммируемых вектора, взаимно перпендикулярных и приложенных в разных окрестностях своего ϵ -туннеля. Это разложение создает поле различной физической природы. В данном случае поле ядерных сил.

Так как величина обменного кванта совпала в пределе с величиной энергии связи одного циклонного вихря, то вихрь с энергией

$$E = mc^2 e^{j \arctg i}$$

имеет модуль, равный по величине энергии обменного кванта

$$\|E\| = \|E_{\epsilon}\| = m_V \approx 200 \text{ МэВ}$$

Таблица 1 Электронные конфигурации основных состояний атомов

Элементы	K	L		M			N				O	
	1S	2S	2P	3S	3P	3d	4S	4P	4d	4f	5S	5P
1 H	1											
2 He	2											
3 Li	2	1										
4 Be	2	2										
5 B	2	2	1									
6 C	2	2	2									
7 N	2	2	3									
8 O	2	2	4									
9 F	2	2	5									
10 Ne	2	2	6									
11 Na	2	2	6	1								
12 Mg	2	2	6	2								
13 Al	2	2	6	2	1							
14 Si	2	2	6	2	2							
15 P	2	2	6	2	3							
16 S	2	2	6	2	4							
17 Cl	2	2	6	2	5							
18 Ar	2	2	6	2	6							
19 K	2	2	6	2	6		1					
20 Ca	2	2	6	2	6		2					
21 Sc	2	2	6	2	6	1	2					
22 Ti	2	2	6	2	6	2	2					
23 V	2	2	6	2	6	3	2					

24 Cr	2	2	6	2	6	5	1					
25 Mn	2	2	6	2	6	5	2					
26 Fe	2	2	6	2	6	6	2					
27 Co	2	2	6	2	6	7	2					
28 Ni	2	2	6	2	6	8	2					
29 Cu	2	2	6	2	6	10	1					
30 Zn	2	2	6	2	6	10	2					
31 Ga	2	2	6	2	6	10	2	1				
32 Ge	2	2	6	2	6	10	2	2				
33 As	2	2	6	2	6	10	2	3				
34 Se	2	2	6	2	6	10	2	4				
35 Br	2	2	6	2	6	10	2	5				
36 Kr	2	2	6	2	6	10	2	6				
37 Rb	2	2	6	2	6	10	2	6	-	-	1	
38 Sr	2	2	6	2	6	10	2	6	-	-	2	
39 Y	2	2	6	2	6	10	2	6	1	-	2	
40 Zr	2	2	6	2	6	10	2	6	2	-	2	
41 Nb	2	2	6	2	6	10	2	6	4	-	1	
42 Mo	2	2	6	2	6	10	2	6	5	-	1	
43 Te	2	2	6	2	6	10	2	6	5	-		
44 Ru	2	2	6	2	6	10	2	6	7	-	1	
45 Rh	2	2	6	2	6	10	2	6	8	-	1	
46 Pd	2	2	6	2	6	10	2	в	10	-	-	
47 Ag	2	2	6	2	6	10	2	6	10	-	1	
48 Cd	2	2	6	2	6	10	2	6	10	-	2	
49 In	2	2	6	2	6	10	2	0	10	-	2	1
50 Sn	2	2	6	2	6	10	2	6	10	-	2	2
51 Sb	2	2	6	2	6	10	2	6	10	-	2	3
52 Te	2	2	6	2	6	10	2	6	10	-	2	4
53 I	2	2	6	2	6	10	2	6	10	-	2	5
54 Xe	2	2	6	2	6	10	2	6	10	-	2	6
55 Cs	2	2	6	2	6	10	2	6	10	-	2	6

Повторяются оболочки до 4d, далее идет заполнение оболочек N(4f), O, P, Q

Элементы	N				O				P				Q
	4f	5S	5P	5d	5f	5g	6S	6P	6d	6f	6g	6h	7S
66 Dy	10	2	6	-	-	-	2						
78 Pt	14	2	6	9	-	-	1						
91 Pa	14	2	6	10	2	-	2	6	1	-	-	-	2
105													

Примечание. В таблице подчеркнуты электронные конфигурации элементов, величина зарядов которых определена при разработке

циклонной модели атомного ядра. С этого элемента в ядре атома формируется новый циклонный вихрь со своим туннелем. Пространство, в котором находится ядро, увеличивает размерность на единицу. Можно показать, что варианты заполнения пространства циклонными вихрями находятся в строгом соответствии с формированием электронных оболочек атома.

5.4. Таблица 2. Энергия связи атомных ядер.

Элемент	Заряд	Атомное число	Величина обменного кванта	Периодичность	Энергия связи
	Z	A	m, МэВ	P	E, МэВ
Ne	10	24	208.3	10	191.9
Na	11	23	209.14	11,34	186,6
Mg	12	24	210.7	11,6	198.3
		28		11,2	205,6
		26	211.24	10.62	216,7
Al	13	27	211,23	11,08	225
	14	28		11,35	236,5
		29		10,97	245
		30	212.6	1053	255
2a	30	64			
		67		9.84	585,1
		68		9,67	595,4
		70	214.8	9,42	611
Ca	31	69		9.88	601,9
		71	214.39	9,61	618,8
Ge	32	70		10,1	610.5
		72		9,76	329
		73		9.66	635,6
		74		9.51	345,7
		76	214.3	9.28	661.6
As	33	75	214,3	9.7	652.6
Se	34	74		10,15	642 9
		76		9.86	662
		77		9.75	669.5
Se	34	78		9.6	679,9
		80		9.4	696.9
		82	214.2	9.15	712.9
Br	35	79		9,78	686.3
		81	214,3	9,54	704,3
Kr	36	78		10,23	675,6
		80		9,93	695,4
		82		8,67	714,3
		83		9,57	721,7
		84		9,44	732.2
		86	214,3	9,22	749,2

Pb	37	85		9,6	739,4
		87	214,3	9,37	757,9
Sr	38	84		10,6	728,9
		86		9,74	748,9
		87		9,63	757,3
		88	214,5	9,48	768,4
Y	39	88	214,38	9,65	775,5
Zr	40	90		9,79	783,8
		91		8,7	791,1
		92		9,6	799,9
		94		9,42	814,7
		96	213,7	9,26	828,9
Nb	41	93	213,9	9,77	805,6
Mo	42	92		10,12	796,5
		94		9,9	814,2
		95		9,81	821,2
		96		9,7	830,8
		97		9,62	837,6
		98		9,63	846,1
		100		9,37	860,4
Tc	43	Устойчиво го нет			
		98	213,6	9,77	844,4
Ru	44	96		10,21	826,7
		98		9,99	845,3
		99		9,9	852,5
		100		9,79	862
		101		8,72	869,1
		102		9,61	878,4
		103	213,34	9,45	893,4
Rh	45	103	213,34	9,76	884,6
Pd	46	102		10,1	875,7
		104		9,88	893,1
		105		9,8	900,3
		106		9,7	909,7
		108		9,64	925,2
		1,10	213,04	9,38	940,8
Ag	47	107		9,85	915,4
		109	213	8,68	931,8
Cd	48	106		10,2	905,6
		108		9,97	923,6

		110		9,79	940,7
		111		9.72	947,8
		112		9,63	956,8
		113		9,56	963,3
		114		9.47	972.2
		116	212,7	9,33	987.2
In	48	113		9,76	962,9
		115	212.7	9.6	979.4
Sn	80	112		10,1	953.3
		114		9,88	971.4
		115		9.8	979,1
		116		8.71	938,6
		117		9,64	995.6
		118		8.54	1000
		119		8.49	1011,5
		120		9,4	1020,6
		122		9,26	1035,8
		124	212.3	9,14	1050,1
Sb	51	121		9,53	1026,5
		123	212,3	9.4	1042,3
Te	52	120		9,81	1016,8
		122		9,65	1034.5
		124		9,49	1050,7
		125		9,44	1057,3
		126		9,36	1066,4
		128		9,23	1081.2
		130		9,11	1095,5
In	63	127	211.96	9,48	1072,7
Xe	54	124		9.91	1046
		126		9,74	1064
		128		9.6	1080,7
		129		9,53	1087.6
		130		9,45	1096,9
		13		9,39	1103,5
		132		9,32	1112.4
		134		9,19	1127.4
		136	211.7	9,08	1141,8
Св	55	133	211,87	9.43	1118,8
Ba	56	130		9.83	1092,8
		132		9,68	1110
		134		9.54	1126,8
		135		9,48	1133.8

		136		9.4	1143
		137		9,35	1149.9
		138	211.52	9,3	1158.5
Za	57	139	211.58	6.39	1164,8
Ge	58	138		9,63	1156.3
		140		9.49	1172.9
		142	211.3	9.39	1185.5
Pr	59	141	211,44	9,6	1178.1
	60	142		9.71	1185.4
		143		9,66	1191,4
		144		9,6	1199,2
		145		9,55	1205,2
		146		9,49	1212,4
		148		9,4	1225,4
		150	210.5	9.3	1237.6
Pm	61	Устойчиво го нет			
		148	210,7	9,56	1223,9
Sm	62	144		9.95	1196
		147		9,77	1217,5
		148		9,71	1225.6
		149		0,66	1231,3
		150		9,6	1239,5
		152		9,49	1253,3.
		154	210,21	9,4	1267,1
Eu	63	151		9.72	1244.3
		153	210,3	9,6	1259.3
Cd	64	152		9,82	1251.7
		160	209,9	9.38	1309,2
Tb	65	189	209.9	9.58	1302,4
Du	66	156		9.91	1278,5
		164	209.7	9,46	1338.3
Ho	67	165	209,1	9,64	1334,3
Er	68	162		9.88	1320,7
		170	209.31	9.46	1379
Tm	69	169	209,3	9,66	1371.2
Yb	70	168		9,86	1362,8
		176	208,8	9,47	419.1
Zn	71	175	208.8	9,65	1412
Hf	72	174		9,84	1403,7
		180	208,7	9.55	1446
W	74	180		9,83	1444,3

		186	208.2	9,56	1485.9
Re	75	185		9,74	1478.3
		187	208,1	9,68	1491.7
	76	184		9,92	1469,8
Os		192	207,9	9,56	1526,2
Ir	77	191		9,74	1517.8
		193	207,86	9,65	1531,7
Pt	78	190		9,91	1509,8
		198	207,59	9.53	1567.3
Au	79	197	207.59	9.72	1559,4
Hg	80	196		9,89	1551,2
		204	207.38	9.54	1608.6
Tl	81	204		9.71	1600,9
		208	207.29	9.62	1615
Pb	82	204		9.79	1607,5
		206		9,7	1622.3
		207		9,66	1629
		208	207.1	9,62	1636.4
Bi	83	209	209	9,71	1640,2
	Далее устойчивых изотопов нет				
Po	84	214	206,4	9,68	1666
At	85	216	206,41	9,74	1674,6
Rn	86	216	206,41	9,85	1675,9
Fr	87	220	205,8	9,84	1696,6
Ra	88	223	205,6	9,85	1713.8
Ac	89	226	205,3	9»87	1730.1
Th	90	232	204,9	9.78	1766.5
Pa	91	232	204,9	9,89	1765.4
U	92	232	204,6	9,99	1765.9
		235		9,89	1783,8
		238		9,79	1810
Np	93	238	204,6	9.9	1800.8
Pu	94	238	204,6	10	1801,3
Am	95	244	204.4	9,93	1835,
Cm	96	244	204,4	10	1835,7
Bk	97	247	204,4	10	1852,3
Cf	98	250	204	10	1869,8
Ea	99	254	203.4	10	1890,6
fm	100	254	203,4	10	1890,8

Таблица 3. Энергия связи легких ядер

Элемент	Периодичность ь		Радиус ядра	Обменный квант	Энергия связи
	A	P	r_0	m_Y	E, МэВ
He2	3	21	1,32	176,6	7,7
	4	15	1,21		28.3
	5	15	1.22		27,3
	6	15	1,196		29,3
Li3	5	21	1,268	280	26.3
	6	15	1,33		32
	7	15	1,24		39.2
	8	15	1,22		41.3
Be4	6	21	1,39	189,1	26,9
	7	13	1,37		37.6
	8	15	1.21		56,5
	9	15	1,19		58,2
	10	15	1,16		65
	11	15	1.15		65.5
B5	8	21	1.33		37,7
	9	15	1.31		56.3
	10	15	1.25		64.7
	11	15	1,18		76.2
	12	15	1.16		79.6
	13	15	1.14		84,5
C6	10	21	1.21		60.3
	11	15	1,26		73.4
	12	15	1.17		92,2

	13	15	1,15		97.1
	14	15	1.26		105.3
	15	15	1.21		106,5
	16	15	1,06		110,8
N7	12	15	1.33		73.8
	13	15	1,23		94,4
	14	15	1,18		104.7
	15	15	1, 15		115.5
	16	15	1.14		118
	17	15	1.13		123
O8	14	15	1.266		98.7
	15	15	1,214		111.9
	16	18	1,16		127,6
	17	15	1,15		131,8
	18	15	1,13		139,8
	19	15	1,12		143,8
	20	15	1.09		151,4
F9	17	15	1.21		128.2
	18		1.18		137,4
	19		1 1.5		147.8
	20		1,13		154,4
	21		1.11		163,5
Ne10	18	18	1,36		98,7
	19		1,31		111,9
	20		1,25		127,6
	21		1.23		131.8
	22		1,21		139,8
	23		1,20		143,8
	24		1,18		151,4

5.5. Построение диаграммы состояния атомных ядер элементов периодической таблицы Д. И. Менделеева.

5.5.1. Вывод формулы состояния ядерной материи.

Ядерная материя есть один из уровней структурного образования материи, под уровнем следует понимать интервал изменения измерений пространства, в пределах которого формируется тот или иной вид материи.

Соответствие между числом измерений пространства - n , зарядом атомного ядра - Z , периодичностью расположения атомных ядер по рядам в таблице Д.И. Менделеева было обосновано и доказано с помощью алгебры комплексного n - мерного пространства в § 3, §4 главы 4.

Периодичность расположения атомных ядер в таблице элементов соответствует ряду сочетаний из n / понимается число измерений / по 2,

$$P_i = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} \quad (5.18.)$$

Комбинация сочетаний C_n^2 в комплексном пространстве соответствует числу ϵ - туннелей сформированных в пространстве.

Одновременно ϵ - туннель соответствует величине заряда в одном пространстве и периодичности формирования уровней в другом пространстве по величине размерности.

В этом смысле заряд не может быть дробным, но число измерений пространства, соответствующее подуровням материи может быть дробным

$$C_n^2 = Z_i, \quad n_i^2 - n_i = z_i$$

$$n_i = \frac{1 + \sqrt{1 + 4Z_i}}{2}$$

Для таблицы элементов периодичность соответствует 9-ти - 10-ти зарядам.

Эту периодичность P_i принимаем за нулевую исходную P_0 периодичность.

Следовательно каждое ядро имеет

$$n_0 = \frac{Z_i}{P_0} \quad (5.19.)$$

ϵ - туннелей и находится в пространстве с числом измерений n определяемым формулой (5.18) и периодичностью P_i возбужденных состояний по отношению к нулевой периодичности - P_0 по формуле (5.19).

Количественное соответствие между числом измерений, зарядом и количеством ϵ - туннелей в пространстве (Y) является отражением физической сущности формирования материи, выраженной принципом насыщения ϵ - туннелей обменной энергией.

Увеличение обменной энергией обменных стволов вызывает перестройку атомного ядра.

Периодическая таблица атомных ядер может быть растянута в одну строчку при $P_i=105$, либо сжата в столбец и вытянута по вертикали при $P_i=1$.

Ядерные ϵ - стволы пропускают строго определённую массу, соответствующую периодичности структурного уровня.

Следуя гипотезе взаимодействия пространств можно утверждать, что величина P_i в конечном счёте определяет величину давления между пространствами, которое и определяет как радиус ядра так и его положение в периодической таблице.

В теории ядерных сил утверждается, что ядерные силы обусловлены обменном между нуклонами мезонами и открыт целый ряд мезонов. Мезонный

характер ядерных сил, сложная структура нуклонов и то, что протон есть наименьший по массе барион - все это теоретические и экспериментально, установленные факты. К настоящему времени ясно также, что при росте величины обменного кванта - его массы возможно осуществление замены нуклонов на барионы большей массы при соответствующей перестройки ядра.

При слиянии нуклонов в ядерную систему, каждый из них выделяет в пространство более высокой размерности / чем то в котором они находятся сами/ обменную энергетическую массу mV_i которая двигаясь по вихревым траекториям типа C_3 , определенным при исследовании многосвязности комплексного пространства глава 1. Траектории включают в себя ядерные стволы как неотъемлемую часть.

Как было обосновано в предыдущей главе поле ядерных сил есть самосогласованное поле стволов взаимодействия.

Таким образом, количество взаимодействующих частиц - A , величина обменного кванта mV_i , приходящаяся на одну частицу A , периодичность - P_i , определяющая периодичность и положение ядра в атомной системе, в конечном счете определяют размер ядра R_j , энергию связи - $E_{св}$, энергию возбуждения, его свойства в ядерных реакциях.

По предлагаемой и разобранный выше подробно гипотезе взаимодействия пространств, пространство ядра с величиной обменной массы на один нуклон mV_i , через ϵ_i - туннели оказывает давление на пространство единичных блоков в котором находятся нуклоны.

По соотношению Гейзенберга радиус нуклона можно определить по формуле (5.6).

Размер ϵ - туннеля взаимодействующий частиц одной размерности не может равняться размеру ϵ - туннеля другой размерности, так как в этом случае произойдет вырождение одной размерности. Многонуклонная система имеет несколько ϵ - туннелей рис 53, поперечное сечение которых не может превышать поперечное сечение нуклона

Нуклоны как самостоятельно движущиеся частицы стремятся занять минимальный объем в пространстве при своём слиянии в ядерную систему с минимальным действительным радиусом R_j .

На рис 53 представлены схемы формирования ядер периодической таблицы от водорода H_1^1 до ксенона Xe^{54} . Заполнение ядерных оболочек / для каждой схемы дана матрица заполнения/ выполнено с соблюдением принципа минимального радиуса R_j для A - нуклонов о соблюдением расчётного количества ϵ - туннелей согласно рис. 53.

На рис. 53 дана модель ядра урана - U_{92}^{238} .

Модуль комплексных координат действительная величина, для любого числа измерений пространства, так как только три направления в пространстве имеют протяжённость. В связи с этим можно для любого ядра говорить, об его объёме и объёме его оболочек.

Из соотношения Гейзенберга определим максимальную толщину мнимой оболочки

$$H = r_m = \frac{\bar{h}}{mV_i c}, \quad (5.20.)$$

где mV_i - усреднённая максимальная величина обменного кванта на один нуклон в ядре.

Обменная масса, находящаяся в мнимой оболочке равна

$$E_m = A_i mV_i \quad (5.21.)$$

Объём мнимой оболочки рассчитывается по формуле (5.7)

Плотность энергии в мнимой оболочке

$$\Phi = \frac{E_m}{V} = \frac{3}{4\pi} \frac{1}{H} \frac{AmV_i}{(3R_y^2 - 3R_y H + H^2)} \quad (5.22.)$$

Давление обменной массы через один ϵ - туннель выразится как произведение плотности Φ , площади кольца - S_k толщины мнимой оболочки H_m

$$\begin{aligned} E &= \Phi S_k H_m = \frac{3}{4\pi} \frac{AmV_i H S_k}{(3R_y^2 - 3R_y H_m + H_m^2) H} = \\ &= \frac{3}{4\pi} \frac{AmV_i c^2}{3R_y^2 - 3R_y H_m + H_m^2} \pi \left(\frac{\bar{h}}{m_N c} \right)^2 0.8^2 \end{aligned}$$

Площадь сечения нуклона можно подсчитать, приняв за его радиус величину его электрического радиуса, надёжно установленного экспериментальными исследованиями

$$r_N = 0.8 \div 0.82 \cdot 10^{-13} \text{ см},$$

то есть

$$S_k = \pi (0.82)^2 \text{ см}^2 \quad (5.23.)$$

В формуле энергии связи стоит квадрат длинны, поэтому величину 10^{-26} опускаем.

В итоге имеем выражение

$$E = \frac{(0.48 \div 0.5043) mV_i A}{3R_y^2 - 3R_y H_m + H_m^2} \quad (5.24.)$$

Нуклоны и мезоны находятся в одной ядерной системе, поэтому высоту H_m корректируем по принятому радиусу протона

$$H_m = \frac{0.8m_p}{mV_i} \quad (5.25.)$$

Корректировка дает выражение

$$E = \frac{0.5 \cdot mV_i \cdot A}{3R_y^2 - 3R_y \frac{0.8m_p}{mV_i} + \left(\frac{0.8m_p}{mV_i} \right)^2} \quad (5.26.)$$

Это выражение дает энергию связи, приходящуюся на один ядерный ствол. Полная энергия связи ядра атома должна учитывать количество n_i - ядерных стволов конкретного ядра и его состояние в периодической таблице, то есть величину P_i [24], [25], [26].

Окончательная формула энергии связи атомного ядра выразится:

$$E_{св} = \frac{0.5 \cdot mV_i \cdot A \cdot Z_i}{3R_{я}^2 - 3R_{я} \frac{0.8m_p}{mV_i} + \left(\frac{0.8m_p}{mV_i} \right)^2} \frac{1}{P_i} \quad (5.27.)$$

формула (5.27) определяет связь основных параметров атомного ядра с учётом его состояния:

- $10^{+13} R_{я}$ — радиус ядра
- Z_i — заряд ядра
- A_i — число нуклонов в ядре,
- mV_i — величина обменного кванта на один нуклон,
- P_i — положение ядра в системе,

поэтому её можно назвать уравнением состояния ядерной материи.

5.5.2. Построение диаграммы состояния ядер элементов периодической таблицы Д.И. Менделеева.

Запишем формулу (5.27) в виде:

$$E_{св} = E_{vi} (mV_i R_i) \frac{Z_i A_i}{P_i} \quad (5.28.)$$

Выделенная величина E_{vi} есть функция радиуса ядра $R_{я}$, массы обменного кванта - на один нуклон в ядре атома, Величина E_{vi} не зависит от заряда ядра - Z_i массового числа A_i и периодичности P_i .

В координатах mV_i - R_i величина $E_{св}$ определяет точки, в которых каждое конкретное ядро имеет ϵ - туннели с одинаковой величиной насыщения обменной массой mV_i .

Решим формулу (5.27) относительно радиуса ядра - R_i .

$$R = \frac{375.304}{mV_i} + \sqrt{-\frac{46951.03}{mV_i^2} + 0.16666 \frac{mV_i Z_i A_i}{E_0 P_i}} \quad (5.29.)$$

Для ядер периодической таблицы при $E_i=E_0$, $P_i=P_0$ минимальный радиус ядер определяется условием, когда подкоренное выражение равно нулю:

$$-\frac{46951.03}{mV_i^2} + 0.16666 \frac{mV_i Z_i A_i}{E_0 P_0} = 0$$

Решим уравнение относительно массы обменного кванта

$$mV_i = 65.551268 \sqrt{\frac{E_0 P_0}{Z A}} \quad (5.30.)$$

В этом случае ядро будет иметь радиус

$$R_i = \frac{375.304}{mV_i} \cdot (R_i = r_0) \quad (5.31.)$$

Зависимости (5.30), (5.31) определяют точку на диаграмме, которую принимаем за нулевую точку состояния атомного ядра.

Состояние атомного ядра изменяется, если ядро переходит в систему с другим значением P_i . Ядро будет иметь исходную энергию связи – E_0 , однако другой обменный квант mV_i и следовательно другой радиус ядра – R_i .

Изменение величины периодичности P_i в формулах 5.28-5.31 при постоянных E_0 , Z , A на диаграмме $mV_i - R_i$ /рис. 55, 56, 57/ даёт кривую предельных размеров радиусов ядер в периодических системах с $P_i - V_{ar}$.

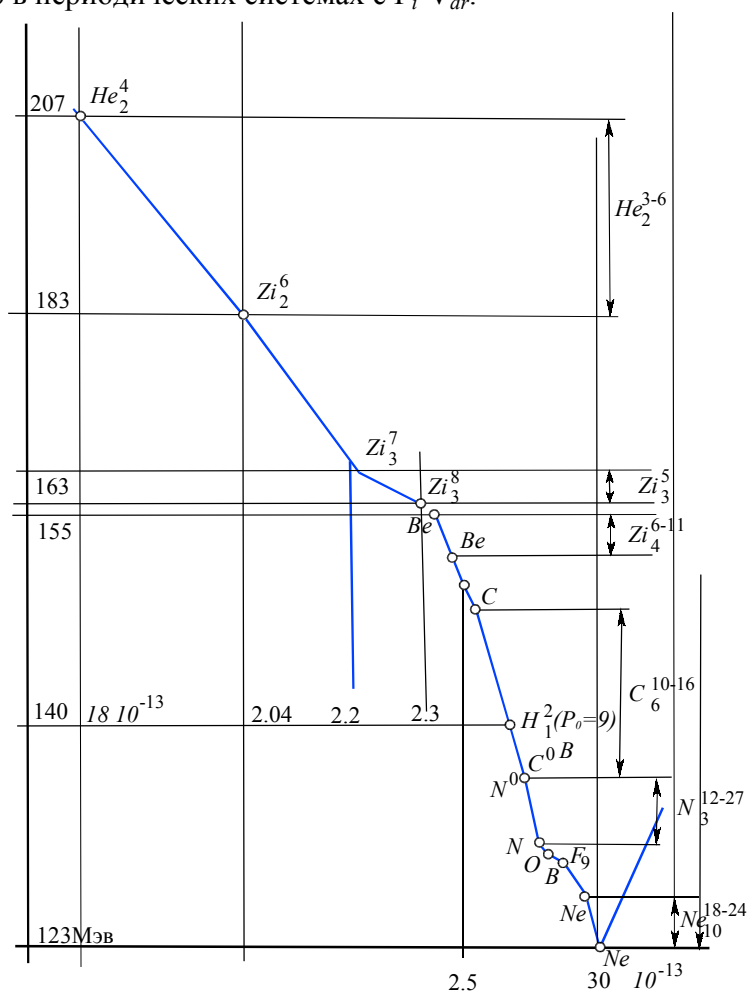


Рис 55. Диаграмма потенциальных ям ядер элементов от гелия до неона. Диаграмма характеризуется большим интервалом изменения значения обменного кванта и радиуса ядра.

Формулы (5.30), (5.31) определяют положение ядра атома при изменении P_i относительно P_0 :

а) если $P_i > P_0$ ядро имеет $mV_i > mV_0$, $R_i < R_0$,

б) если $P_{i+1} < P_0$ то $mV_{i+1} < mV_0$, $R_{i+1} > R_0$.

Состояния с $P_i \neq P_0$ являются возбуждёнными состояниями. Кривая возбуждённых состояний конкретных ядер совпадает с кривой предельных радиусов невозбуждённых состояний ядер с Z_i и A_i при $P_i \neq P_0$.

Таким образом, начальные состояния и возбуждённые располагаются на одной кривой.

На рис. 55,56,57 представлены исходные состояния ядер периодической таблицы Д.И. Менделеева, отвечающие $P_i \neq P_0$.

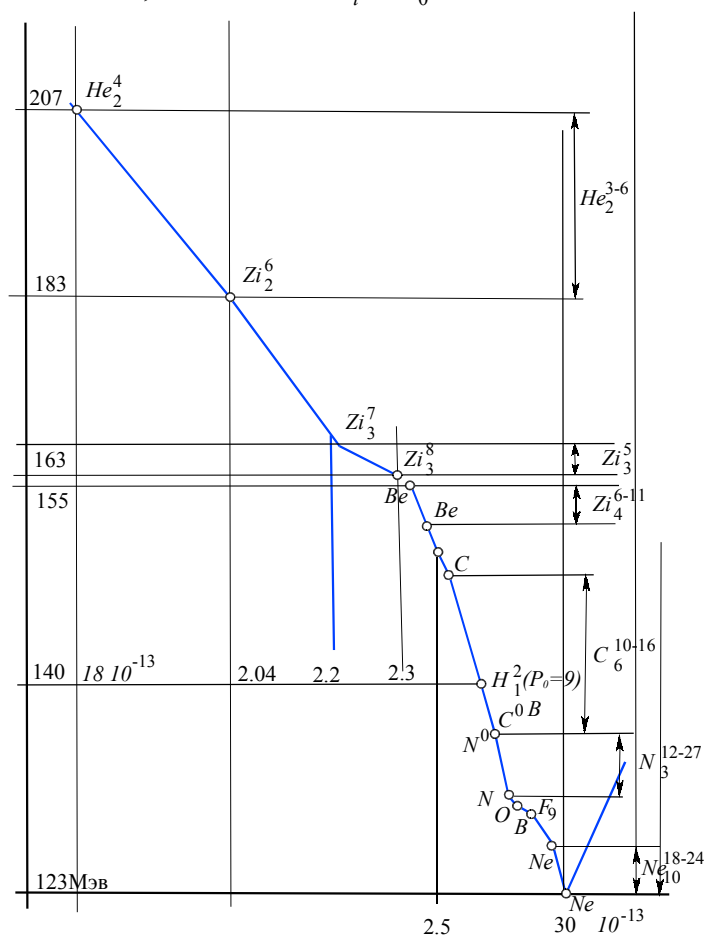


Рис 56. Диаграмма потенциальных ям ядер по периодам таблицы элементов Д.И. Менделеева. Даны интервалы изменения величины обменного кванта и радиуса атомного ядра.

Отметим основные особенности диаграммы:

а) Открывает диаграмму предельной кривой ядро атома гелия He_2^4 с максимальным по величине значением обменного кванта $mV_i = 207 \text{ мэв}$ и минимальным радиусом $R \approx 1.8 \cdot 10^{-13} \text{ см}$.

б) Расположение ядер изотопов гелия He_2^4 , лития - Li_3 , дейтерия - H_1^2 , трития - H_1^3 взаимно перекрывают друг друга.

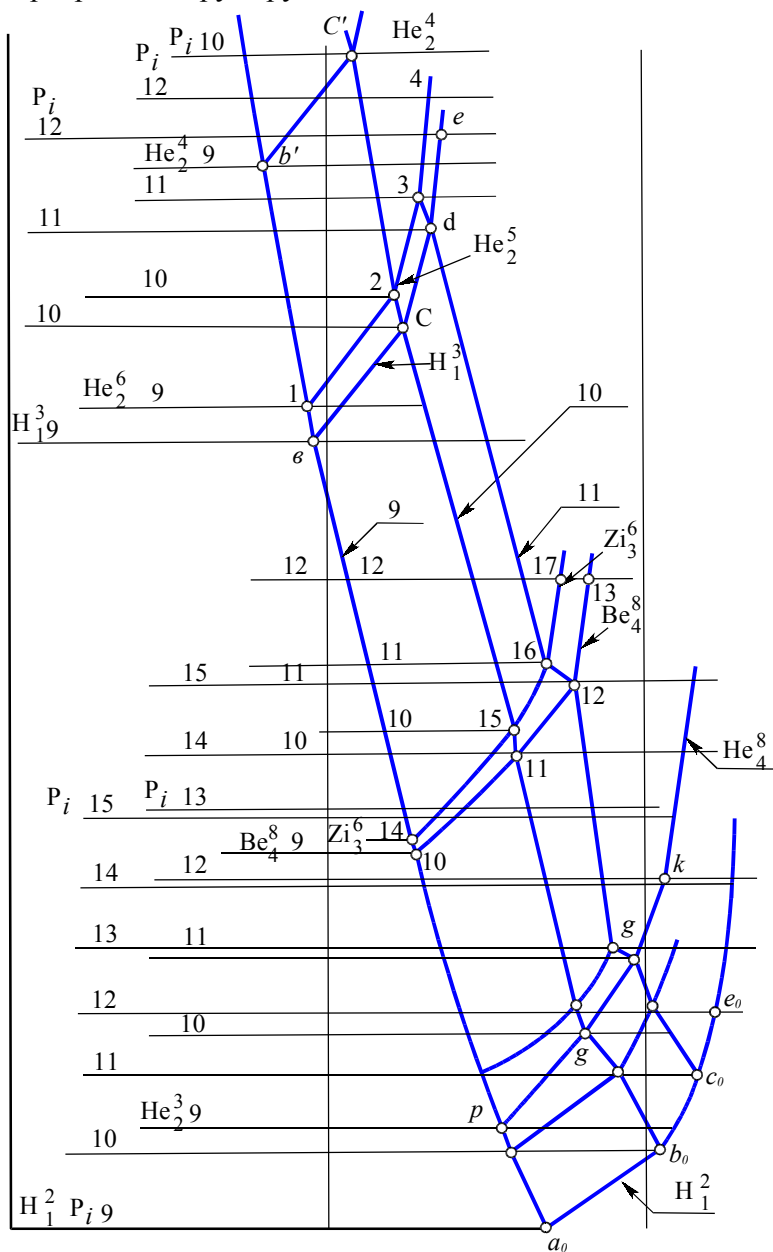


Рис. 57. Диаграмма возбуждённых состояний ядер элементов, участвующих в реакциях синтеза.

/ так ядро атома дейтерия H_1^2 имеет радиус больше радиуса ядер изотопов лития Li_3 /.

с) Первый период таблицы элементов / от ядра гелия He_2^4 до ядер изотопов неона Ne_{10}' / занимает верхнюю часть диаграммы, так что для ядер этого периода характерны большая величина обменных квантов и малые радиусы ядер:

$$mV_i \approx 120 \div 207 \text{ Мэв}, R_i \approx (1.8 \div 3.0) 10^{-13} \text{ см}.$$

Для первого периода характерен большой интервал изменения значений обменного кванта и радиуса атомного ядра.

д) Интервалы изменения обменных квантов / их значений / к концу периодической таблицы падают, падают их абсолютные значения. Соответственно растут значения радиусов ядер и падают интервалы их изменения по периодам. Так начиная с ядер изотопов криптона Kr_{36} до конца периодической таблицы величина обменного кванта изменяется от значения

$$mV_i \approx 82 \text{ Мэв}$$

до $mV_i \approx 57 \text{ Мэв}$ / всего на 25 Мэв /, а радиус атомных ядер в интервале:

$R_i \approx (4.1 \div 6.3) 10^{-13} \text{ см}$. На рис 55, 56 в масштабе показаны интервалы изменения обменного кванта, отвечающие периодам таблицы.

е) Величина обменного кванта на диаграмме предельных состояний падает с 207 Мэв до 57 Мэв то есть примерно в 3.2 раза и соответственно обратно пропорционально увеличивается радиус атомного ядра.

Замечание. Вопрос о положении на диаграмме протона и нейтрона требует особого рассмотрения.

В соответствии с формулой (5.29), если увеличить величину обменного кванта mV_i на один нуклон, оставив постоянным E_0 в формуле (5.30), то радиус атомного ядра будет увеличиваться. На рис. 55, 56, 57 представлены линии максимального расширения радиуса атомного ядра для элементов

$$Ne_{10}, Kr_{36}, Rh_{45}, Xe_{54}, Dy_{66}, Pt_{78}, Pa_{91}, U_{92}.$$

закрывающих ряды периодической таблицы. Эти линии будем называть линиями предельного (по радиусу) возбуждения атомного ядра.

Обе линии: предельного сжатия и предельного расширения ядра атома элемента образуют потенциальную яму, определяющую на диаграмме $mV_i - R_i$ область существования конкретного атомного ядра.

Линии предельного сжатия и предельного расширения имеют особую точку при значениях: $E_i=E_0$, $P_i=P_0$ в которой величина обменного кванта mV_0 имеет для конкретного атомного ядра своё минимальное значение.

Характер линии предельного расширения показывает, что с начало при небольшом росте величины обменного кванта происходит резкое увеличение исходного радиуса R_j , а в дальнейшем увеличение происходит медленнее даже при значительном росте этой величины.

С увеличением заряда Z ядра область его существования растёт по площади на диаграмме / рис 55, 56, 57 /. Для ядер первого периода этот порядок нарушен, так что ядро с меньшим значением - Z_i может перекрывать область существования ядра с большим значением Z . Область существования изотопов первого периода в

значительной степени определяется массовым числом A , в то время как для ядер тяжёлых элементов массовое число играет роль только в пределах одного заряда.

5.5.3. Оценка возбужденного состояния атомных ядер периодической таблицы элементов Д.И. Менделеева.

Анализ диаграмм состояний ядер элементов, представленных на рис 55,56,57 показал:

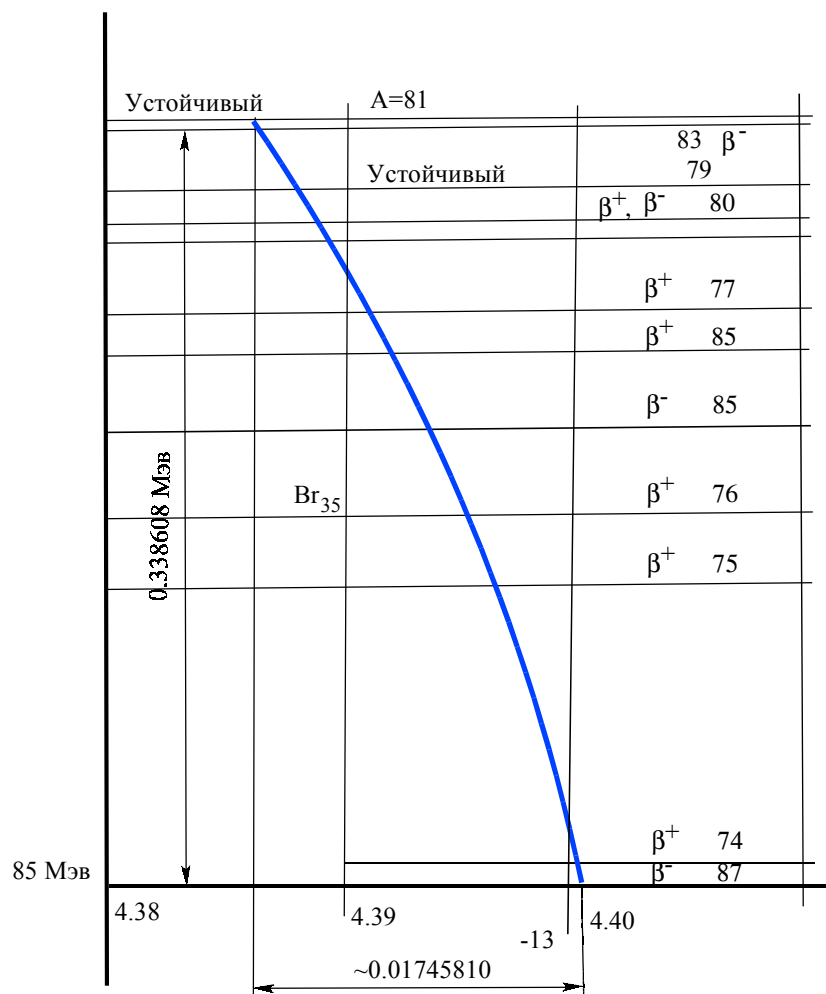


Рис 58. Кривая состояний ядер изотопов Брома. Устойчивое ядро брома обладает максимальным обменным квантом и минимальным радиусом.

Увеличение площади потенциальной ямы как области существования ядер на диаграмме $mV_i - R_i$ сокращается к концу периодической таблицы. Резкое сокращение площади происходит для ядер целых рядов периодической таблицы, как это показано на рис 55,56,57. К концу таблицы область существования фактически не изменяется от параметра A , характеризующего ядро как изотопное - A .

На рис 57, 58 дана часть кривой сжатия для ядер изотопов Арсения As_{33} и брома Br_{35} , которая и характеризует изменение области существования ядра в зависимости от массового числа A . Интервал этой кривой по обменному кванту mV_i и радиусу R_i заключён в узких пределах по сравнению с теми же интервалами для ядер элементов первого периода. Для α - радиоактивных ядер это сокращение выражено ещё более сильно и так далее к тяжелым ядрам таблицы элементов.

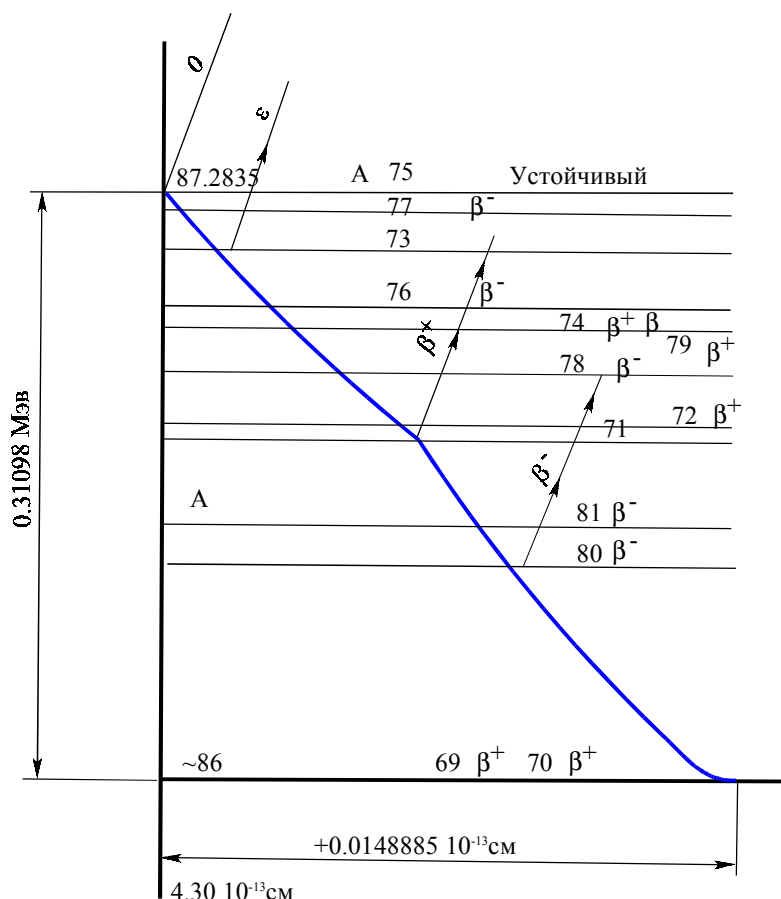


Рис. 59. Кривая состояния ядер изотопов Арсения. Устойчивое ядро изотопа имеет максимальный обменный квант и минимальный радиус.

На рис 57, 58 показано, что устойчивый изотоп имеет минимальный радиус и максимальный обменный квант. Из диаграммы следует, что неустойчивые состояния можно рассматривать как возбуждённые состояния относительно устойчивого состояния. Уровень неустойчивости тем выше, чем больше между ними расстояние по кривой предельного сжатия. Согласно формулам (5.27 - 5.31), определив построение диаграммы, уровень возбуждения ядер относительно друг друга выразится:

$$\Delta E = E_1 - \frac{E_2}{A_2} A_1 \quad (5.32.)$$

Любое ядро изотопа одного элемента / A_1, E_1 / можно рассматривать как возбуждённое состояние ядра изотопа другого элемента / A_2, E_2 /.

Расчёт показывает, что в пределах ядер изотопов одного элемента возбуждение достигает до $\Delta E \approx 13 \text{ Мэв}$.

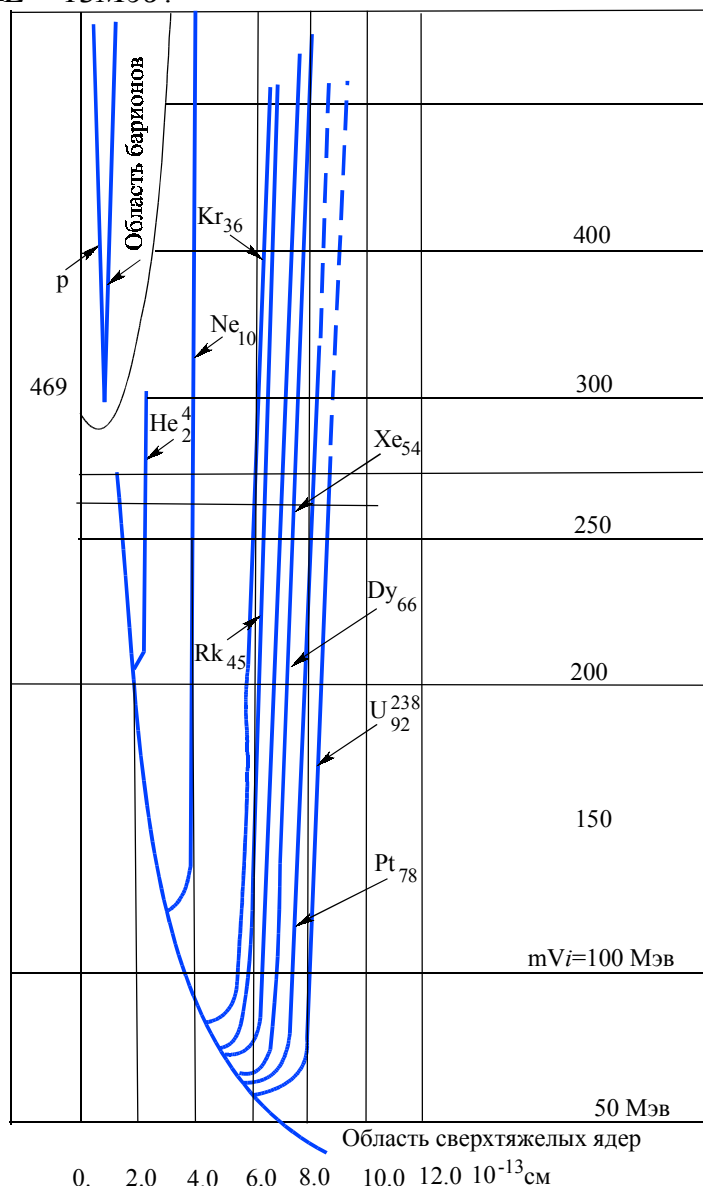


Рис. 60. Общий вид диаграммы состояния ядерной материи. Протон имеет минимальный радиус и максимальное значение обменного кванта и занимает верхнее положение на диаграмме. Потенциальная яма возбуждённых состояний протона определяет таблицу барионов.

5.5.4. Общий вид диаграммы состояния ядер элементов периодической таблицы Д.И. Менделеева.

Полная диаграмма состояния ядерной материи представлена на рис 50. Диаграмма синтезирует все свойства диаграмм рис 55- 59 и включает устойчивое положение на диаграмме протона.

Протон находится в вершине диаграммы. Его потенциальная яма самая узкая по площади. Возбуждённые состояния протона в потенциальной яме есть устойчивые состояния барионов. В устойчивом положении протон удерживается самым высоким по величине значением обменного кванта

$$mV_i \approx 469 \text{ Мэв}$$

и его потенциальная яма характеризуется самой высокой энергией связи на один нуклон

$$E_{св} \approx 41 \text{ Мэв}$$

Особое место на диаграмме занимает ядро дейтерия - H_1^2 , Ядро расположено ниже ядер гелия- He_2 , лития - Li_3 , бериллия - Be_4 , бора - B_5 , углерода - C_6 .

Обменный квант ядра дейтерия близок к энергии π - мезона и равен

$$mV_i \approx 140 \text{ Мэв}$$

Положение ядра изменится, если ядро перейдёт в другую- периодическую таблицу. На рис 56 дано положение ядра дейтерия при $P_i=3$, $P_i=1$.

В конечном счёте изменение положения любого ядра в зависимости от величины периодичности говорит о единстве пространства и материи.

Состояние конкретного ядра заряда Z и массового числа A определяется точкой на диаграмме $mV_i - R_i$, положение которой характеризует ядерную материю с позиций активных ядерных превращений в реакциях синтеза и деления. На рис 57 рассматривалась диаграмма возбужденных состояний ядер элементов, участвующих в реакциях синтеза.

Диаграммы рис. 55- 60 построены по результатам расчётов и графических построений на ЭВМ. Приведены графические построения потенциальных ям ядер элементов, участвующих в реакциях синтеза. Диаграмма позволяет определить область наиболее выгодную для той или иной реакции синтеза. Знание этих областей и поведение в них исходных компонентов может оказаться решающим в её осуществлении.

При выводе формулы энергии связи использованы допущения, важнейшими из которых является: введение сферически-симметричной формы ядра, введение структурного параметра, введение обменного кванта в расчет.

Конкретным значениям параметров, входящих в расчетную формулу, отвечает конкретная величина энергии связи ядра. Оценка формулы на сходимость с экспериментальными данными была произведена выше и дала хорошие результаты. Однако исследования по формуле необходимо продолжить, чтобы выявить, что дает формула при исследовании процессов распада и синтеза ядер. Для этого были рассчитаны диаграммы, которые дают графическое представление о взаимосвязи параметров. Ядро есть квантовая система, для которой такие

параметры как обменный квант, структурный параметр непрерывно меняются вызывая изменение формы ядра его энергии связи, вызывая радиоактивные распады.

Рассчитанные диаграммы выделяют области существования ядер. Области взаимно накладываются друг на друга, определяя возможность существования разных ядер элементов при одних и тех же конкретных параметрах. Это подтверждает возможность взаимного превращения ядер. Поэтому область на диаграмме $m_\nu - R_\nu$ превращается в узкую зону по изменению параметра m_ν . Однако механизм взаимного превращения ядер диаграмма не вскрывает.

Величина обменного кванта равная 469 мэв для протона чисто математическая, так как она рассчитана при $A=1, Z=1$ и представляет результат экстраполяции формулы энергии связи. Вывод формулы при таких параметрах невозможен.

Диаграмму можно рассматривать до ядра X_e , так как ядра второй половины периодической системы элементов являются составными. Поэтому величину радиуса атомного ядра в формулу энергии связи надо вводить в виде

$R_\nu \cong 1,25(A_i^{1/3} + A_j^{1/3})$, где A_i, A_j - количество изотопов для ядер с зарядами соответственно Z_i, Z_j . Естественно соблюдаются равенства $A = A_i + A_j, Z = Z_i + Z_j$.

При этом следует оставить для обоих изотопов A_i, A_j, Z_i, Z_j одинаковый обменный квант.

ГЛАВА 6. ОБОСНОВАНИЕ ЦИКЛОННОЙ МОДЕЛИ АТОМНЫХ ЯДЕР В СООТВЕТСТВИИ СО СТРУКТУРОЙ ПРОСТРАНСТВА НА МАЛЯХ ЛИНЕЙНЫХ РАССТОЯНИЯХ ДЕЙСТВИЯ ЯДЕРНЫХ СИЛ. РАСЧЕТ ВОЗБУЖДЕННОГО СОСТОЯНИЯ ЯДЕР. РАСЧЕТ РАДИОАКТИВНОГО ПРЕВРАЩЕНИЯ ЯДЕР.

6.1. Модели атомных ядер. Обоснование циклонной модели атомного ядра.

Обоснование циклонной модели атомных ядер и механизма ядерных взаимодействий предварительно было проведено в ГЛАВЕ 5.

Предлагаемую циклонную модель оценим с позиций существующих моделей атомного ядра, а также с позиций, которые легли в основу их обоснования. Все существующие модели основаны на данных эксперимента. Модели ядер к конечному счету призваны существенно упростить сложный характер нуклонных взаимодействий. Характер нуклонных взаимодействий, как правило, является основой для разработки ядерной модели. К настоящему времени разработаны два типа моделей: модель независимых нуклонов и модели с сильным взаимодействием. В первой модели нуклоны двигаются независимо друг от друга в некотором общем для всех нуклонов потенциальном поле ядра, во втором случае нуклоны участвуют в коллективном взаимодействии.

Простейшими моделями до настоящего времени являются модель жидкой капли и модель ферми-газа, а также оболочечная модель ядра. Каждую из этих моделей рассмотрим с позиций циклонной модели. Еще раз отметим, что все модели призваны решить задачу построения теории ядерных сил, которая из-за сложного характера нуклонного взаимодействия в законченном виде еще не существует. [10].

Основные свойства ядерных сил определены экспериментальной ядерной физикой.

Ядерные силы относятся к короткодействующим силам. Радиус их действия меньше 10^{-12} cm , оценивается как среднее расстояние между нуклонами,

$$\text{связанными в ядре } \delta \approx \left(\frac{V}{A} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{4\pi R^3}{3A} \right)^{\frac{1}{3}} = 2 * 10^{-13} \text{ cm} .$$

Ядерные силы значительно превосходят электромагнитные силы. Интенсивность ядерного взаимодействия превосходит интенсивность электромагнитного взаимодействия (при сравнении их на расстояниях 10^{-13} cm) в $10^2 - 10^3$ раз.

Из пропорциональности энергии связи ядер количеству нуклонов в ядре следует свойство насыщения.

Свойство насыщения дважды отражается в формировании энергетических циклонных ε – туннелей в ядрах периодической системы элементов. Это насыщение с периодичностью формирования рядов в таблице элементов, а также как ограничение изотопного состава в пределах минимального и максимального содержания нейтронов в конкретном ядре заряда Z .

Первые два свойства ядерных сил говорят о том, что они действуют в пространстве большего числа измерений, чем силы электромагнитные. В пространстве ядерных сил не работает соотношение декартовых координат, т. е. $r \neq \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$. Как показала комплексная Δ пространственная алгебра модуль в пространстве имеет более сложное подкоренное выражение и другую более высокую степень корня. Модуль всегда действителен.

Японский физик Юкава (1935г.) рассчитал ядерный обменный квант и определил потенциал взаимодействия нуклонов в ядре. Как известно, скалярный потенциал A_0 , созданный распределением зарядов $g\rho(x)$, удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta^2 A_0 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_0}{\partial t^2} = -\pi g \rho.$$

Если распределение зарядов не зависит от времени, то волновое уравнение сводится к уравнению Пуассона $\Delta^2 A_0 = -4\pi g \rho$.

Решением этого уравнения является потенциал вида $A_0 = \int d^3x' \frac{g\rho(x')}{|x - x'|}$.

Если единичный заряд помещен в начало координат, потенциал сводится к кулоновскому потенциалу

$$A_0(r) = \frac{g}{r}$$

Чтобы получить энергию взаимодействия двух зарядов, надо потенциал умножить на заряд

$$E = A_0(r) \approx \frac{g^2}{r}.$$

Из формулы следует радиус бесконечного взаимодействия. Это тривиальная трактовка потенциала и энергии взаимодействия. В пространстве радиус, как выше было отмечено, несет в себе структуру пространства. Взаимодействие происходит по изолированному направлению, а взаимодействующие объекты взаимно ориентируются по этому направлению.

$r \rightarrow r_0 * \sqrt{0} = r_0 * \varepsilon$, где ε характеризует радиус туннеля взаимодействия. Решающую роль во взаимодействиях играет в пространстве ε . Таким образом, даже не переписывая уравнения потенциала вскрываем новые свойства взаимодействия. Радиус ε является энергетической характеристикой и зависит от массы обменного кванта взаимодействия. Вывод формул был получен из условия, что квант магнитного взаимодействия-фотон не имеет массы. В комплексном пространстве фотон интерпретируется как объект принадлежащий по своим свойствам пространству делителей нуля. Иными словами это объект имеющий одинаковую массу по пространственной и временной осям, которые исходят из разных точек начала координат. В сферических пространственных координатах вся масса этого объекта распределяется по изолированному направлению бесконечной протяженности.

Если квант взаимодействия имеет массу, отличную от нуля ($m \neq 0$), то уравнение для отыскания потенциала мезонного поля приобретает вид $\Delta^2 \Phi_0 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial t^2} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \Phi_0 = 4\pi g_N$, где g_N трактуется как плотность мезонного заряда нуклона. Решением этого уравнения для стационарного случая $\frac{\partial \Phi_0}{\partial t} = 0$ и точечного источника, расположенного в точке $x' = 0$, является потенциал Юкавы $\Phi(r) = -g_N \frac{e^{-kr}}{r}$, где $r = \frac{mc}{\hbar}$. Потенциал определяет короткодействующий характер ядерных сил, радиус которых определяется массой полевого кванта. Энергия взаимодействия двух нуклонов определяется как произведение

$$E_{NN} = \Phi(r) * g_N = -g_N^2 \frac{e^{-kr}}{r}.$$

В силу комплексности пространства радиус $r \rightarrow r_0 * \sqrt{0} \rightarrow r_0 \varepsilon$, где ε есть радиус туннеля взаимодействия. Радиус $r \neq 0$ и в начале координат. В обоих случаях устраняется одна из трудностей теоретической физики.

Ядра есть системы множества нуклонов и механизм ядерного взаимодействия, который заключается в передаче виртуальных мезонов от одного нуклона к другому, столкнулся с непреодолимыми трудностями. Безразмерная величина $f = \frac{g_N^2}{\hbar c}$, построенная из g_N по аналогии с постоянной тонкой структуры

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$$

оказывается порядка единицы. Поэтому диаграмная техника Фейнмана встретила также с непреодолимыми трудностями. Величины α, f характеризуют интенсивность взаимодействия, и поэтому при $f = 1$ следует очень высокая плотность мезонного облака, окружающего нуклон, и многомезонный обмен столь же вероятен как одномезонный.

Пион-это только один из мезонов, ответственный за нуклон-нуклонное взаимодействие. Комптоновская длина волны мезона равна $\lambda = \frac{\hbar}{mc}$. Для

$$m_\pi = 273m_e \text{ имеем } \lambda_\pi^{komp} = 1.4 * 10^{-13} \text{ cm}.$$

Потенциал Юкавы дает размерность $[g_N] = r^{\frac{1}{2}} * cm^{\frac{3}{2}} * c^{-1}$, которая совпадает с размерностью электрического заряда. Перечисленные трудности не привели мезонные теории к количественным результатам. В конечном счете это является результатом того, что ни уравнение Шредингера, ни уравнения Гордона-Клейна-Фока не соответствуют пространству ядерного взаимодействия.

На примере ядерной физики наиболее отчетливо проявляется та ошибка, которая допущена в теории относительности, когда преобразования Лоренца фактически производят в Декартовых координатах. Теория вычетов комплексного пространства указывает на то, что потенциал ядерного поля, который в мезонных теориях фактически остался электромагнитным, должен иметь более высокие

порядки отрицательной степени r , чтобы характеризовать пространство более высокой размерности. Рост размерности пространства сопровождается структурными изменениями последнего вплоть до начала координат. Система А нуклонов и испускаемые для квантового обмена мезоны создают пространство более высокой размерности.

Логика структуры комплексного пространства предлагает воспользоваться теорией квантового обмена, принять для расчета интегральный обменный квант

$m_v = \sum_1^A m_{vi}$, где m_v есть сумма всех возможных, участвующих в обмене мезонов для

конкретной системе нуклонов А. В этом случае масса ядра запишется в виде $m_{\pi} = [N * m_N + Z * m_p] + j m_v$. Модуль этого комплекса будет отвечать массе

ядра $\|m_{\pi}\| = \sqrt{[N * m_N + Z * m_p]^2 - m_v^2}$. Эти формулы дают энергию связи атомных

ядер $\Delta W = [N * m_N + Z * m_p] - \sqrt{[N * m_n + Z * m_p]^2 - m_v^2}$

Интегральный обменный квант становится параметром исследования. В соответствии с геометрией комплексной алгебры обменный квант идет по изолированной оси. Изолированная ось характеризуется сечением и интенсивностью прохождения обменного кванта. Параметр m_v характеризует свойство насыщения ядерных сил. В пределах одного изолированного n_{ε} туннеля (фактически в пределах ряда периодической таблицы) этот параметр растет от своего строго определенного минимального значения до максимального. В пределах одного ядра заряда Z величина обменного кванта также меняется в зависимости от изменения числа нейтронов в ядре.

Формула энергии связи атомных ядер выражается произведением энергии связи одного ε -туннеля на количество туннелей n_{ε} .

$\Delta W = E_n * n_{\varepsilon}$, где $E_n = \frac{67A}{4.68A^{\frac{2}{3}} - 20.2A^{\frac{1}{3}} + 28.8}$. Формула выведена из тривиальных

экспериментальных данных. Масса обменного кванта соответствовала массе пиона

$m_{\pi} = 134.963 \text{ MeV}$, радиус ядра $R = 1.25A^{\frac{1}{3}}$. Формула рассматривается как первое приближение. Более точная формула записывается в виде

$E_n = \frac{0.5m_v A}{3R^2 - 3R \left(0.8 \frac{m_p}{m_v} \right) + 0.64 \left(\frac{m_p}{m_v} \right)^2}$. По этим формулам оценим качественную и

количественную характеристику энергетических туннелей. Энергия связи E_n выступает как энергетическая характеристика пространства как отражение структуры пространства. При достижении максимального значения для А нуклонов в пространстве открывается и начинает формироваться новый ε - туннель. Взаимодействующие частицы создают структуру более высокой размерности, ε - туннели которой характеризуются сокращением сечения и большей интенсивностью по обменному кванту. В связи с этим пространство одного

измерения находится под давлением пространства другого измерения, которое осуществляется через изменение площади изолированных туннелей. Происходит, если воспользоваться принятой в теоретической физике терминологией, зашнуровка пространства. Но эта зашнуровка в такой трактовке более наглядна и понятна.

В принципе, если две частицы притягиваются друг к другу, то это вызвано стремлением создать структуру с большей интенсивностью изолированных ε – туннелей. В этом смысле роль обменного кванта заключается в связи пространств разной размерности.

Теория потенциала отражает самую существенную сторону ядерного взаимодействия – его короткодействие. В потенциале Юкава это достигается экспоненциальным множителем, в показателе которого стоит масса обменного кванта. Так, что с увеличением массы обменного кванта радиус взаимодействия уменьшается. Интегральный обменный квант сокращает сечение изолированных направлений, через которые происходят взаимодействия. Этот вывод следует рассматривать как уточнение количественное и качественное свойство короткодействия. Кроме того теория потенциала нащупала в грубом приближении существование изолированных направлений в поле ядерных сил. Достаточно рассмотреть для этого утверждения потенциалы с непроникающей отталкивающей серединой, асимметричные потенциалы. Эти потенциалы с очевидностью говорят о изменении структуры пространства при переходе к размерам модуля пространства $2 \cdot 10^{-12} \text{ cm}$. Сокращение радиуса действия сил вызывает появление в пространстве вычетов в виде n_ε туннелей, через которые и происходит взаимодействие путем обмена мезонными квантами. Эти вычеты создают остов для формирования циклонных вихрей из обменных квантов, в пространстве которых движутся нуклоны. Насыщение этих туннелей вызывает образование новых, которые в свою очередь начинают формироваться в блоки, вызывая асимметрию пространства.

Далее необходимо отметить, что остов вычетов нельзя сжать. Это свойство определяет плотность массы ядерного вещества постоянной для различных ядер: объем ядра пропорционален числу A нуклонов в нем. Это говорит о несжимаемости ядерного вещества и делает похожим его на жидкую каплю. Все это дало возможность построить капельную модель ядра. Капельная модель была развита в трудах Н. Бора, Дж. Уиллера и Я. И. Френкеля.

На основе капельной модели Вейцеккер предложил полуэмпирическую формулу для энергии связи и массы ядер.

$$\Delta W = aA - \beta A^{\frac{2}{3}} - \gamma \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - \zeta \frac{\left(\frac{A}{2} - Z\right)^2}{A} + \delta A^{-\frac{2}{3}} \quad [10].$$

$M = Zm_p + (A - Z)m_n - \Delta W$, где коэффициенты a, β, γ, ζ определены экспериментально и делаются попытки их теоретического обоснования. Они равны $a = 15.75, \beta = 17.8, \gamma = 0.71, \zeta = 94.8$. Все коэффициенты в MeV. $\delta = \begin{cases} + & \text{для} \\ - & \text{для} \end{cases}$

четно –четных ядер, $\delta = 0$ для нечетных ядер, $\delta = -|\delta|$ для нечетно-нечетных ядер. $|\delta| = 34 \text{ MeV}$.

Капельная модель позволила рассчитать силовой параметр и на его основе исследовать свойства стабильных ядер, их устойчивости и вычислить такие важные параметры как энергию связи протона в ядре- ϵ_p , нейтрона- ϵ_n , ϵ_α -а частицы.

$$\epsilon_p = \Delta W(A, Z) - \Delta W(A-1, Z-1),$$

$$\epsilon_n = \Delta W(A, Z) - \Delta W(A-1, Z),$$

$$\epsilon_\alpha = \Delta W(A, Z) - \Delta W(A-4, Z-2) - \Delta W(A=4, Z=2)$$

Формулы позволили определить область нуклоностабильных ядер. Основным недостатком капельной модели следует считать ее неспособность описать возбужденные состояния ядер. Попытка согласовать частоту поверхностных колебаний жидкой капли из ядерной материи с положениями уровней ядра не привели к успеху. Асимметрия деления остается камнем предковения всех существующих моделей. Именно эти экспериментальные факты требуют от теоретиков разработки новых моделей ядра.

В основу оболочечной модели положены следующие предположения: сферическая симметрия потенциала, отсутствие взаимодействий между нуклонами, справедливость принципа Паули для нуклонов. Эти предположения и определили область эффективности модели, Это легкие сферические ядра в слабо возбужденном состоянии.

Ядра представляют систему из большого числа взаимодействующих нуклонов. В связи с этим ядерные силы необычайно сложны и для их исследования требуется введение обобщенных условий для упрощения. Такими обобщенными условиями выступают различные модели ядер. Циклонная модель в качестве обобщения вводит структуру пространства, выраженную через ϵ -туннели. Пространство ядерных сил сжато в размеры по модулю 10^{-13} cm . Преобразования Лоренца в этом сжатом пространстве требуют новой системы чисел и координат с объемной точкой в начале. Уравнение Шредингера и другие уравнения не работают в том виде, в котором они применяются до настоящего времени. Квантовые числа, описывающие структуру пространства, не связаны с его размерностью. Решение уравнения Шредингера с определенным феноменологическим потенциалом дает серию собственных значений для частицы, которая находится в потенциальной яме, определенной этим потенциалом, Эти собственные значения описывают состояние частицы в потенциальной яме. Эти состояния характеризуются квантовым числом n (определяющим число узлов волновой функции) и орбитальным квантовым числом L Главное квантовое число n и орбитальное квантовое число L связаны между собой структурой пространства. Связь эта выражена принципом Паули. Комплексная алгебра открыла код формирования n -мерных пространств их взаимный переход от меньшей размерности к более высокой. В этих пространствах реализуются законы обычных действительных чисел. Квантовые числа являются параметрами этого пространства. Связь между квантовыми числами соответствует взаимозависимости пространств разного уровня размерности. Решение уравнения Шредингера как и само уравнение должно

соответствовать размерности пространства, которое сформировано данной изучаемой структурой. Возведя ту или иную закономерность и зависимость в принцип теоретическая физика создает ограничение для исследователя.

Предпосылками к разработке оболочечной модели ядра явилась специфическая роль магических чисел нуклонов (2, 8, 20, 28, 50, 82, 126). Опыт показывает, что ядра с таким количеством протонов или нейтронов особенно устойчивы. Подобно магическим числам атомная структура имеет свои числа (2, 10, 18, 28, 36, 54, 86), характеризующие определенное число электронов, атомы которых также наиболее устойчивы (в основном это нейтральные газы). Ранее было показано, что эти числа отвечают определенному числу ε – туннелей в атоме. Электронные оболочки формируются как следствие открытия и закрытия туннелей в атомной системе, которые в свою очередь являются следствием наличия ядерных ε – туннелей ядра. В связи с этим и главное квантовое число есть прямая характеристика размерности пространства.

Магическое число 20 имеют следующие изотопы $O_8^{20}, F_9^{20}, Ne_{10}^{20}, Na_{11}^{20}, Mg_{12}^{20}$. В этом ряду наиболее устойчивым является Ne_{10}^{20} . Циклонная модель определяет для него один ε – туннель. Имеется полное соответствие между заполненными оболочками электронов и нуклонов. Величина заряда ядра естественно может сдвигать значение коэффициента туннеля. Однако следует признать, что число нуклонов 20 соответствует одному ε – туннелю ядра, заполненному до предельного насыщения обменным интегральным квантом.

Магическое число 50 имеют следующие изотопы $Ca_{20}^{50}, Se_{21}^{50}, Ti_{22}^{50}, V_{23}^{50}, Cr_{24}^{50}, Mg_{25}^{50}$. В этом ряду сразу три ядра имеют стабильность. $Ti_{22}^{50}, V_{23}^{50}, Cr_{24}^{50}$. Эти ядра имеют 2 ε – туннеля. Налицо зарядовая независимость заполнения туннелей обменным квантом от разного количества нейтронов или протонов, но для одинакового количества нуклонов 50.

Изотопы никеля Ni_{28}^{60-62} также содержат магическое число 28, имеют три туннеля в ядре и сформированные три электронных оболочки, закрывают третий ряд периодической таблицы элементов.

Магическое число 82 имеет следующий ряд изотопов. $As_{33}^{82}, Se_{34}^{82}, Br_{35}^{82}, Kr_{36}^{82}, Rb_{37}^{82}$. В этом ряду устойчивыми являются два ядра $Se_{34}^{82}, Kr_{36}^{82}$. Этот ряд ядер имеет 4-ре ε -туннеля.

Криптон имеет четыре заполненные электронные оболочки.

Далее следует ряд ядер с магическим числом 126. Это $Sn_{50}^{123}, Sb_{51}^{126}, Te_{52}^{126}, Jr_{53}^{126}, Xe_{54}^{126}, Cs_{55}^{126}, Ba_{56}^{126}$. Ядра и электронные оболочки атомов имеют для этих изотопов 6 –ть ε -туннелей. Элемент Xe_{54} закрывает первую половину периодической таблицы. Элемент Ba_{56} открывает ряд редкоземельных элементов, с которых идет формирование в ядрах 7-го и 8-го ядерных стволов. Ядра становятся несферическими.

Проведенный анализ магических чисел находится в строгом соответствии со структурными исследованиями проведенными в главе.

6.2. Возбужденное состояние ядер с позиции структуры пространства на малых линейных расстояниях. Расчет электронного и позитронного распада ядер. Условия электронного и позитронного распада ядер с позиции пространственной структуры.

Ядра- это квантовые системы и почти все они имеют возбужденные состояния. Квантовый характер этих систем определяется структурой пространства ядерного взаимодействия и вычетом из него пространств еще большего числа измерений, интерпретируемого как n_e -энергетические туннели. Возбужденные состояния ядер определяются разностью энергий проходящих через эти туннели относительно основного состояния. Энергия возбуждения мала по сравнению с энергией покоя основного состояния, так как для возбуждения требуется изменения коэффициента туннеля. Для этого требуется как минимум энергия соизмеримая с массой нуклона. Поэтому, оболочечная модель оказалась пригодной только для первой половины ядер периодической таблицы элементов. Экспериментально было установлено, что даже при большом числе нуклонов сверх заполненных оболочек несферическая форма ядра (иметь минимум энергии) оказывается стабильной.

Квадрупольные моменты ядер оказались значительно больше, чем предсказывала теория. Большие квадрупольные моменты ядер теория объясняет деформацией остова заполненных оболочек. Причем одновременно допускается коллективное колебание систем частиц, удерживаемых силами притяжения нуклонов. Как показали исследования квадрупольные моменты нельзя объяснить одним или двумя нуклонами сверх заполненных оболочек.

Эксперимент наглядно показывает, что квадрупольный момент проявляется вблизи ядер с $A \approx 25$, а также в области $150 \leq A \leq 190$ (Лантаноиды) и $A \geq 190$ (Актиноиды). Это в точности соответствует циклонной модели ядра. Лантаноиды это область начала формирования второго блока ϵ -туннелей. Ядро не сферично, что влечет появление новых свойств, таких как вращательных состояний, колебательных уровней, появление гигантских резонансов.

Энергия возбуждения открытых резонансов достаточно велика. Приведем экспериментальные данные открытых резонансов, так как на эти экспериментальные данные ориентировались в дальнейших расчетах.

Изовекторный гигантский дипольный резонанс имеет энергию возбуждения

$$W = 31.2 * A^{\frac{1}{3}} + 20.6 * A^{-\frac{1}{6}}$$

Гигантский квадрупольный резонанс имеет энергию возбуждения

$W = 63 * A^{-\frac{1}{3}}$ для ядер с $14 \leq A \leq 208$. Возбуждения даны в МэВ. Исследование гигантского квадрупольного резонанса проведено при помощи реакции неупругого рассеяния α - частиц с энергией 96МэВ на ядрах $14 \leq A \leq 208$.

Изовекторный гигантский резонанс (протоны и нейтроны движутся в противофазе) имеет энергию возбуждения

$$W = 130 A^{-\frac{1}{3}} \text{ МэВ.}$$

В ядрах с $66 \leq A \leq 200$ наблюдается изоскалярный низкоэнергетический октупольный резонанс с энергией возбуждения

$$W = 30 * A^{-\frac{1}{3}} \text{ МэВ.}, \text{ а в области высоких энергий возможно иметь}$$

$$W = 110 * A^{-\frac{1}{3}} \text{ МэВ.}$$

Эти данные взяты из [1].

Свойства ядер, которые легли в основу разработки той или иной модели, обобщаются в циклонной модели ядра введением в пространстве ядерных остова из энергетических ϵ -туннелей. Взаимодействие нуклонов осуществляется через эти изолированные туннели. Отклонение интегрального обменного от своего оптимального значения характеризует возбужденное или стабильное состояние ядра.

Циклонная модель ядра кардинально изменяет теорию радиоактивного распада ядер; β -распада, α -распада, деления ядер.

Численный расчет структуры ядерной материи.

Формул Вайцеккера позволяет вычислить энергию связи атомных ядер $\Delta W(A, Z)$ с погрешностью, не превышающей 10-20 МэВ. А комбинация капельной модели с оболочечной повышает точность формулы до 1-2 МэВ, что позволяет оценить значения ϵ_n, ϵ_p , каждое из которых является разностью больших чисел типа ΔW . В связи с этим формула Вайцеккера подтверждена экспериментально и может быть использована для оценки выдвинутой гипотезы о структурировании ядерной материи в соответствии со структурой пространства на расстояниях 10^{-13} см . В таблице приложения представлены результаты расчета следующих величин:

1. E - энергия связи атомных ядер по формуле Вайцеккера,
2. E_1 -энергия связи одного ϵ -туннеля,
3. $n_\epsilon = \frac{E}{E_1}$ коэффициент, характеризующий количество циклонных вихрей в пространстве ядерной материи,
4. $m_v = \sqrt{2mE - E^2}$ - интегральная величина обменного кванта, где $m = Zm_p + Nm_N$ - масса ядра.
5. $\frac{m_v}{A}$ - масса обменного кванта на один нуклон,
6. $\frac{E}{A}$ - энергия связи на один нуклон.

Все энергетические величины рассчитаны в МэВ. Из таблицы выделяем устойчивые ядра согласно таблице изотопов [1]. Проводим оценку параметров

$$n_\epsilon, \frac{E}{A}, \frac{m_v}{A}.$$

Изотоп	n_ϵ	$\frac{E}{A}$	$\frac{m_v}{A}$
α_2^4	0,9	7,09	115,2
Li_3^{6-7}	0,44-0,6	3,89-5,48	85,58-101,84

Be_4^{8-9-10}	0,66-0,75	6,29-7,03	108,53-114,71
B_5^{10-11}	0,63-0,72	6,06-6,82	106,5-113,0
C_6^{12-13}	0,77-0,79	7,20-7,48	116,08-118,31
N_7^{14-15}	0,76-0,83	7,00-7,49	116,81-114,42
$O_8^{16-17-18}$	0,89-0,95	7,71-7,92	120,05-120,96
$F_9^{19}(100\%)$	0,97	7,88	121,39
$Ne_{10}^{20-21-22}$	1,02-1,09	8,02-8,2	122,45-123,84

Сформировался первый циклонный вихрь с $n_\epsilon \approx 1.02$ на ядре элемента неона Ne_{10}^{20} , которое имеет дважды магическое число 10. Элемент неон есть нейтральный газ, закрывает второй ряд и второй период периодической таблицы элементов. Стабильные элементы этого ряда имеют максимальное значение исследуемых параметров. Эти параметры растут с ростом заряда ядра. В пределах конкретного заряда ядра Z изменение числа нейтронов от величины нейтронов в стабильном ядре приводит к снижению всех трех параметров $n_\epsilon, \frac{E}{A}, \frac{m_V}{A}$.

Отклонение числа нейтронов от величины в стабильном ядре приводит к электронным распадам и захватам. Изменение параметров $n_\epsilon, \frac{E}{A}, \frac{m_V}{A}$ при этих распадах выявило новую характеристику последних.

$$C_6^{15} \Rightarrow \beta^- \Rightarrow N_7^{15}$$

$$n_\epsilon(C_6^{15}) = 0.58 \leq n_\epsilon(N_7^{15}) = 0.83$$

$$\frac{m_V}{A}(C_6^{15}) = 91.87 \leq \frac{m_V}{A}(N_7^{15}) = 118.33$$

$$F_9^{18} \Rightarrow \beta^+ \Rightarrow O_8^{18}$$

$$n_\epsilon(F_9^{18}) = 0.9 \leq n_\epsilon(O_8^{18}) = 0.95$$

$$\frac{m_V}{A}(F_9^{18}) = 118.62 \triangleleft \frac{m_V}{A}(O_8^{18}) = 121.69$$

Распады сопровождаются увеличением массы обменного кванта на нуклон и увеличением коэффициента n_ϵ .

Установленные закономерности устойчивы на протяжении всей таблицы изотопов периодической системы. Устойчивые ядра имеют максимальные значения параметров $\frac{E}{A}, \frac{m_V}{A}$.

Рассматриваем третий ряд третьего периода таблицы изотопов.

$Na_{11}^{23}(100\%)$	$n_\epsilon = 1.12$	$\frac{E}{A} = 8.13$	$\frac{m_V}{A} = 123.31$
Na_{11}^{20}	0,91	7,19	115,99
Na_{11}^{37}	1,17	5,82	104,36

Ядро элемента натрия Na_{11}^{23} стабильно и имеет максимальные значения параметров $\frac{E}{A}, \frac{m_V}{A}$ по сравнению с ядрами изотопов $Na_{11}^{20}, Na_{11}^{37}$, приведенных для сравнения из таблицы приложения. В дальнейшем приводим только величины для стабильных изотопов или для областей стабильности ядер, так как в данном случае нас интересует сопоставление параметра n_ϵ со структурой периодической таблицы.

Mg_{12}^{24-26}	1,16-1,26	8,23-8,39	124,01-125,22
Al_{13}^{27}	1,28	8,3	124,59
Si_{14}^{28-30}	1,32-1,43	8,35-8,51	124,95-126,14
P_{15}^{31}	1,45	8,42	125,45
S_{16}^{32-36}	1,49-1,6	8,43-8,59	125,56-126,75
$Cl_{17}^{35,37}$	1,62-1,72	8,5-8,59	126,03-126,7
$Ar_{18}^{36,40}$	1,66-1,87	8,49-8,68	125,97-127,38

Электронные оболочки элемента аргона полностью сформированы. Однако ядерный ϵ – туннель формируется на следующих двух ядрах изотопов калия и кальция.

K_{19}^{39-41}	1,8-1,91	8,55-8,65	126,4-127,14

Изотоп K_{19}^{43} претендует на устойчивый, так как имеет $n_\epsilon = 2$.

K_{19}^{43}	2,00	8,65	127,14

Далее

Ca_{20}^{40-46}	1,84-2,00-2,14	8,52-8,73	127,37-127,74

Дважды магическое ядро попадает в ряд стабильных с максимальным значением параметров $\frac{E}{A}, \frac{m_V}{A}$, а параметр $n_\epsilon = 2.00$ показывает, что сформирован второй циклонный туннель. Структурный пространственный анализ по формуле $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ при $n = 7$ давал $Z = C_n^2 = 21$. То есть ядро с зарядом $Z = 21$ претендовало на устойчивое ядро с закрытым вторым ϵ -туннелем. Однако наличие нейтронов в ядре вносит свои коррективы и следует остановиться на ядре кальция.

Закономерности по изменению параметров $n_\epsilon, \frac{E}{A}, \frac{m_V}{A}$ остаются прежними.

$$Al_{13}^{30} \Rightarrow \beta^- \Rightarrow Si_{14}^{30}$$

$$\text{при этом } n_\epsilon(Al_{13}^{30}) = 1.38 < n_\epsilon(Si_{14}^{30}) = 1.43$$

$$\frac{m_V}{A}(Al_{13}^{30}) = 124.01 < \frac{m_V}{A}(Si_{14}^{30}) = 126.14$$

$$Al_{13}^{24} \Rightarrow \beta^+ \Rightarrow Mg_{12}^{24}$$

$$n_{\epsilon}(Al_{13}^{24}) = 1.07 < n_{\epsilon}(Mg_{12}^{24}) = 1.14$$

$$\frac{m_V}{A}(Al_{13}^{24}) = 118.83 < \frac{m_V}{A}(Mg_{12}^{24}) = 124.06$$

Процессы β^{-}, β^{+} происходят с возрастанием величины обменного кванта на нуклон и роста коэффициента n_{ϵ} .

Далее рассматриваем четвертый ряд четвертого периода.

$$Cs_{21}^{45} \quad n_{\epsilon} = 2.09 \quad \frac{E}{A} = 8.68 \quad \frac{m_V}{A} = 127.41$$

$$Ti_{22}^{46-50} \quad 2, 34 \quad 8, 75 \quad 127, 87$$

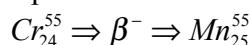
магическое число нуклонов 50 входит в интервал максимального значения

параметров $\frac{E}{A}, \frac{m_V}{A}$, так же как и в следующих ядрах ванадия и хрома.

V_{23}^{50-51}	2,38	8,74	127,79
$Cr_{24}^{50,52-54}$	2,37—2,56	8,71-8,73	127,56-128,08
Mn_{25}^{55}	2,57	8,75	127,9
Fe_{26}^{56-58}	2,62-2,72	8,77-8,79	127,92-128,16
Co_{27}^{59}	2,76	8,75-	127,92
$Ni_{28}^{58,60-62,64}$	2,68-3,00	8,67-8,78	127,32-128,10

Изотоп никеля закрывает четвертый ряд четвертого периода периодической Таблицы имея $n_{\epsilon} = 3.00$ и магическое число 28. Магическое число нуклонов 50 входит в наиболее устойчивые ядра изотопов, однако не может рассматриваться как число закрывающее оболочку по нуклонам. Оболочечная модель не достаточно корректно выбрала ориентировку на магические числа. Введение в рассмотрение количество ϵ - туннелей энергетических циклонных вихрей, более адекватно отражает структуру ядерной материи и соответствует структуре периодической таблице элементов.

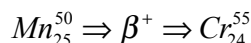
Выявленные условия β^{-}, β^{+} распадов работают и в этом ряду элементов. Например



$$n_{\epsilon}(Cr_{24}^{55}) = 2.56 < n_{\epsilon}(Mn_{25}^{55}) = 2.57$$

$$\frac{m_V}{A}(Cr_{24}^{55}) = 127.25 < \frac{m_V}{A}(Mn_{25}^{55}) = 127.9$$

Условия соблюдаются вплоть до второго знака чисел.



$$n_{\epsilon}(Mn_{25}^{50}) = 2.26 < n_{\epsilon}(Cr_{24}^{50}) = 2.32$$

$$\frac{m_V}{A}(Mn_{25}^{50}) = 8.47 < \frac{m_V}{A}(Cr_{24}^{50}) = 8.7 \quad \text{Условия выполняются.}$$

Этот ряд периодической таблицы изотопов заканчивается ядрами, у которых энергия связи на один нуклон максимальна и максимальна величина обменного

кванта на один нуклон. С этого момента эти величины начинают снижаться в пределах тех же закономерностей для стабильных изотопов.

Пятый ряд четвертого периода.

$Cu_{29}^{63,65}$	$n_{\varepsilon} = 2.94 - 3.04$	$\frac{E}{A} = 8.75 - 8.76$	$\frac{m_V}{A} = 127.78 - 127.99$
$Zn_{30}^{64,66-68}$	2,98-3,19	8,73-8,78	127,78-128,11
$Ca_{31}^{69,71}$	3,23-3,33	8,74-8,75	127,79-127,89
$Ge_{32}^{70,72-74,76}$	3,27-3,54	8,76-8,72	127,94-127,64
As_{33}^{75}	3,5	8,74	127,84
$Se_{34}^{74,76-77,80,82}$	3,45-3,8	8,73-8,67	127,75-127,33
$Br_{35}^{79,81}$	3,69-3,77	8,73-8,72	127,73-127,65
$Kr_{36}^{78,80,82,83,84,86}$	3,63-3,99	8,66-8,68	127,21-127,38

Пятый ряд четвертого периода заканчивается элементом криптона Kr_{36} , в котором сформировано 4-ре циклонных вихря $n_{\varepsilon} = 4.00$. Магическое число 82 содержится в трех последних изотопах. Это магическое число нуклонов 82 характеризует стабильные ядра конкретного заряда. Это число нуклонов содержится и в узловом изотопе, в котором наряду с полностью сформированными ε – туннеля сформированы и электронные оболочки атома.

Еще раз подчеркнем, что этот случай подтверждает, что введение ε -туннелей более корректно отражает структуру атомных ядер.

$$As_{33}^{70} \Rightarrow \beta^+ \Rightarrow Ge_{32}^{70}$$

$$n_{\varepsilon}(As_{33}^{70}) = 3.23 < n_{\varepsilon}(Ge_{32}^{70}) = 3.27$$

$$\frac{m_V}{A}(As_{33}^{70}) = 127.18 < \frac{m_V}{A}(Ge_{32}^{70}) = 127.94 \text{ Условия сохраняются.}$$

$$As_{33}^{79} \Rightarrow \beta^- \Rightarrow Se_{34}^{79} \Rightarrow \beta^- \Rightarrow Br_{35}^{79}$$

$$n_{\varepsilon}(As_{33}^{79}) = 3.66 < n_{\varepsilon}(Se_{34}^{79}) = 3.68 < n_{\varepsilon}(Br_{35}^{79}) = 3.69$$

$$\frac{m_V}{A}(As_{33}^{79}) = 127.37 < \frac{m_V}{A}(Se_{34}^{79}) = 127.68 < \frac{m_V}{A}(Br_{35}^{79}) = 127.73 \text{ Цепочка радиоактивного}$$

распада идет с соблюдением установленных ранее условий.

Рассмотрим изменение параметров для изотопов 6 –ого ряда 5-ого периода.

$Rb_{37}^{85,87}$	$n_{\varepsilon} = 3.96 - 4.04$	$\frac{E}{A} = 8.7 - 8.68$	$\frac{m_V}{A} = 127.55 - 127.4$
$Sr_{38}^{84,88}$	3,91-4,1	8,7-8,7	127,51-127,54
Y_{39}^{89}	4,13	8,68	127,4
$Zr_{40}^{90,92,94,98}$	4,18-4,5	8,6-8,68	127,39-127,79
Nb_{41}^{93}	4,31	8,66	127,21
Mo_{42}^{94-98}	4,35-4,53	8,65-8,64	127,15-127,12
$Te_{43}^{94,95}$	4,32-4,38	8,58-8,61	126,64-126,85

Ru_{44}^{96-102}	4,41-4,71	8,58-8,62	126,66-126,94
Rh_{45}^{103}	4,74	8,6	126,77
$Pd_{46}^{102-106}$	4,68-4,88	8,57-8,59	126,58-126,72

Шестой ряд пятого периода закрывается изотопом Pd_{46}^{109} , для которого $n_e = 5.00$.

В этом ряду в некоторых изотопах содержится магическое число 50. Однако это число характеризует устойчивость конкретного ядра. Для построения оболочечной модели в общем плане периодической таблице оно не корректно.

Структурный анализ N-мерного пространства для шестого ряда давал $Z=45$, при $n=10$.

Структурный анализ для 7-ого ряда 5-ого периода дает $Z=55$ при $n=11$.

$Ag_{47}^{107,109}$	$n_e = 4.91 - 5.00$	$\frac{E}{A} = 8.56 - 8.56$	$\frac{m_V}{A} = 126.52 - 126.52$
$Cd_{48}^{106,108-113}$	4,84-5,16	8,53-8,54	126,25-126,33
In_{49}^{115}	5,25	8,52	126,23
$Sn_{50}^{114-120}$	5,25-5,45	8,52-8,49	126,2-126

Магическое число протонов 50 нельзя обосновать как условие для обоснования модели ядра.

$Sb_{51}^{121,123}$	5,49-5,57	8,48-8,46	125,92-125,77
$Te_{52}^{120-128}$	5,45-5,76	8,48-8,42	125,94-125,44
In_{53}^{127}	5,73	8,44	125,59
In_{53}^{126}	5,69	8,44	125,6

Изотоп индия с магическим числом 126 попадает в стабильные, однако для обобщенной оболочечной модели он также не подходит.

$Xe_{54}^{124,126,128-129,130,131,134}$	5,6-5,99	8,45-8,37	125,65-125,07

Ряд периодической таблицы заканчивается ядром ксенона Xe_{54} с шестью циклонными туннелями. Структурный анализ давал сдвиг по заряду ядра до $Z=55$.

Cs_{55}^{133}	5,96	8,39	125,25

Максимум $\frac{m_V}{A}$ для этого изотопа сдвинут в сторону меньшего числа нейтронов в ядре.

Условия β^- , β^+ распадов соблюдаются и для этого ряда.

$$Te_{52}^{117} \Rightarrow \beta^+ \Rightarrow Sb_{51}^{117} \Rightarrow \beta^+ \Rightarrow Sn_{50}^{117}$$

$$n_e(Te_{52}^{117}) = 5.3 < n_e(Sb_{51}^{117}) = 5.32 < n_e(Sn_{50}^{117}) = 5.33$$

$$\frac{m_V}{A}(Te_{52}^{117}) = 125.78 < \frac{m_V}{A}(Sb_{51}^{117}) = 126.01 < \frac{m_V}{A}(Sn_{50}^{117}) = 126.12$$

$$Te_{52}^{132} \Rightarrow \beta^- \Rightarrow J_{53}^{132} \Rightarrow \beta^- \Rightarrow Xe_{54}^{132}$$

$$n_e(Te_{52}^{132}) = 5.88 < n_e(J_{53}^{132}) = 5.9 < n_e(Xe_{54}^{132}) = 5.92$$

$$\frac{m_V}{A}(Te_{52}^{132}) = 124.86 < \frac{m_V}{A}(J_{53}^{132}) = 125.03 < \frac{m_V}{A}(Xe_{54}^{132}) = 125.3$$

Восьмой ряд шестого периода заканчивается элементом платина Pt_{78} . По структурному анализу заряд ядра отвечает измерению пространства $n = 13$. Заряд этого элемента превышает заряд ядра ксенона, который закрывает предыдущий ряд периодической таблицы на 24 единицы. В связи с этим существует структура с числом измерений $n = 12$.

$$Z = C_{n=12}^2 = \frac{n(n-1)}{2} = 66. \text{ Это число отвечает заряду ядра элемента Диспрозия.}$$

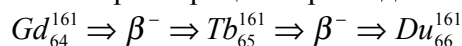
Таким образом,

седьмой и восьмой ε -туннели удерживают элементы восьмого ряда шестого периода.

$Ba_{56}^{132-138}$	$n_e = 5,93-6,15$	$\frac{E}{A} = 8,4-8,35$	$\frac{m_V}{A} = 125,35-124,93$
$La_{57}^{138,139}$	6,15-6,19	8,35-8,34	124,93-124,9
Ge_{58}^{140}	6,24	8,35	124,92
Pr_{59}^{141}	6,27	8,33	124,81
$Nd_{60}^{142-146}$	6,31-6,47	8,32-8,3	124,76-124,57
Pm_{61}^{145}	6,42	8,3	124,55
$Sm_{62}^{144-154}$	6,37-6,75	8,29-8,23	124,47-124,04
$Er_{63}^{151-153}$	6,64-6,72	8,25-8,24	124,22-124,13
$Gd_{64}^{154-160}$	6,76-6,97	8,24-8,18	124,09-123,67
Tb_{65}^{159}	6,94	8,19	123,79
$Du_{66}^{160-164}$	7,01-7,11	8,18-8,16	123,66-123,49

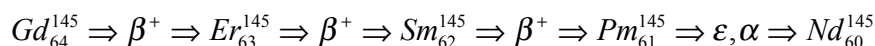
Седьмой ε - туннель ядра Диспрозия рассчитан в соответствии с ранее вычисленными величинами количества ε - туннелей на основе пространственных систем координат.

Рассмотрим процессы распада.



$$n_e(Gd_{64}^{161}) = 6.99 < n_e(Tb_{65}^{161}) = 7.00 < n_e(Du_{66}^{161}) = 7.01$$

$$\frac{m_V}{A}(Gd_{64}^{161}) = 123.54 < \frac{m_V}{A}(Tb_{65}^{161}) = 123.63 < \frac{M_V}{A}(Du_{66}^{161}) \text{ Условия распада соблюдены.}$$



$$n_e = 6.36 < 6.39 < 6.41 < 6.42 < 6.42$$

$$\frac{m_V}{A} = 123.96 < 124.24 < 124.44 < 124.55 < 124.59$$

Условия распада соблюдаются для всей цепочки распада.

Рассматриваем восьмой ε -туннель.

$Ho_{67}^{17,159}$	$n_e = 6,84-6,92$	$\frac{E}{A} = 8,18$	$\frac{m_V}{A} = 123,66$
$Er_{68}^{166-170}$	7,19-7,32	8,14-8,11	123,4-123,12
Tm_{69}^{169}	7,29	8,12	123,19
$Yb_{70}^{172-176}$	7,40-7,53	8,10-8,06	123,04-122,76
Lu_{71}^{175}	7,49	8,07	122,83
$Hf_{72}^{176,177,178,179,180}$	7,53-7,67	8,06-8,03	122,79-122,55
Ta_{73}^{181}	7,7	8,02	122,48
$W_{74}^{182,184,186}$	7,73	8,02	122,44
$Re_{75}^{185,187}$	7,83-7,89	7,99-7,97	122,23-122,12
$Os_{76}^{186-192}$	7,86-8,06	7,98-7,94	122,17-121,83
$Jr_{77}^{191,193}$	8,02-8,09	7,94-7,93	121,88-121,76
$Pt_{78}^{192-198}$	8,06-8,25	7,93-7,89	121,82-121,47

Для этого ряда ядер проверяем условие β^- , β^+ распада.

$$Jr_{77}^{198} \Rightarrow \beta^- \Rightarrow Pt_{78}^{198}$$

$$n_e = 8, 23 < 8, 25$$

$$\frac{m_V}{A} = 121,36 < 121,47 \text{ Условия распада выполняются.}$$

$$Jr_{77}^{187} \Rightarrow \beta^+ \Rightarrow Os_{76}^{187}$$

$$n_e = 7,88 < 7,89$$

$$\frac{m_V}{A} = 122,03 < 122,10 \text{ Условие распада выполняются.}$$

Рассмотрим девятый ряд шестого периода.

По структурному исследованию ряд должен закончиться ядром с зарядом $Z=91$.

$$C_{n=14}^2 = \frac{14 \cdot 13}{2} = 91.$$

Au_{79}^{197}	$n_e = 8,22$	$\frac{E}{A} = 7,9$	$\frac{m_V}{A} = 121,52$
$Hg_{80}^{196-204}$	8,18	7,9-7,84	121,54-121,11
$Tl_{81}^{203,205}$	8,4-8,7	7,85-7,83	121,17-121,05
$Pb_{82}^{206-208}$	8,47-8,56	7,83-7,81	121,01-120,89
Bi_{83}^{209}	8,59	7,8	120,81
Po_{84}^{209}	8,58	7,8	120,78

Рассмотрим более подробно и в большем объеме выполнение условий бета распада.

Произведем выборку из расчетной таблицы.

N	B_5	$\frac{m_V}{A}$	n_ϵ	C_6	$\frac{m_V}{A}$	n_ϵ	N_7	$\frac{m_V}{A}$	n_ϵ
9		105.5	0.62	>	77.37	0.34			
10		106.5	0.63	>	105.6	0.62		52.63	0.15
11		113	0.72	>	110.3	0.68		92.43	0.48
12		108	0.66	Const	118.3	0.79		102.5	0.59
13		108.9	0.68	Const	116.1	0.77		113.6	0.74
14		102.1	0.61	Const	118.1	0.81		114.4	0.76
15		100.7	0.6		113.6	0.77	<	118.3	0.83
16		93.3	0.53		113.1	0.78	<	115.9	0.82

Изотоп C_6^{14} имеет период полураспада 5730 лет. Таблица распада находится в полном соответствии с таблицей свойств изотопов 37, 1 [1].

N	Na_{11}	$\frac{m_V}{A}$	n_ϵ	Mg_{12}	$\frac{m_V}{A}$	n_ϵ	Al_{13}	$\frac{m_V}{A}$	n_ϵ
20		115.99	0.91	>	110.63	0.83		93.51	0.59
21		120.47	1.01	>	114.84	0.91		104.94	0.76
22		121.17	1.05	>	119.96	1.03		110.41	0.87
23		123.31	1.12	>	121.41	1.08		116.47	1.00
24		122.63	1.14	Const	124.06	1.16		118.83	1.07
25		123.42	1.19	Const	124.01	1.2		122.17	1.16
26		121.94	1.19	Const	125.22	1.26		122.84	1.21
27		121.88	1.22	<	124.29	1.27	<	124.59	1.28
28		119.93	1.22	<	124.59	1.32	>	124.24	1.31

Также в полном соответствии со свойствами изотопов. Изотоп Mg_{12}^{28} претендует на устойчивый по свойствам. Устойчивые изотопы обладают максимальным значением обменного кванта на нуклон и максимальным значением коэффициента n_ϵ .

N	Ca_{20}	$\frac{m_V}{A}$	n_ϵ	Sc_{21}	$\frac{m_V}{A}$	n_ϵ	Ti_{22}	$\frac{m_V}{A}$	n_ϵ
37		121.91	1.6	>	117.93	1.49		112.56	1.36
38		124.01	1.69	>	119.87	1.58		116.31	1.49
39		124.85	1.76	>	122.25	1.68		118.54	1.58
40		126.22	1.84	>	123.39	1.76		121.15	1.69
41		126.53	1.89	>	125.01	1.85		122.53	1.77
42		127.37	1.96	>	125.57	1.91		124.35	1.87
43		127.29	2.00	>	126.63	1.98		125.13	1.93
44		127.74	2.06	>	126.78	2.03		126.35	2.02
45		127.37	2.09	Const	127.41	2.09		126.69	2.07

ГЛАВА 6. ОБОСНОВАНИЕ ЦИКЛОННОЙ МОДЕЛИ АТОМНЫХ ЯДЕР В СООТВЕТСТВИИ СО СТРУКТУРОЙ ПРОСТРАНСТВА НА МАЛЫХ ЛИНЕЙНЫХ РАССТОЯНИЯХ ДЕЙСТВИЯ ЯДЕРНЫХ СИЛ. РАСЧЕТ ВОЗБУЖДЕННОГО СОСТОЯНИЯ ЯДЕР. РАСЧЕТ РАДИОАКТИВНОГО ПРЕВРАЩЕНИЯ ЯДЕР.

46		127.51	2.14	>	127.24	2.13		127.48	2.14
47		126.92	2.17		127.55	2.19	<	127.49	2.19
48		126.83	2.21		127.15	2.22	<	127.93	2.25
49		126.08	2.23		127.2	2.27	<	127.69	2.28
50		125.8	2.26		126.62	2.29	<	127.87	2.34
51		124.92	2.27		126.48	2.33	<	127.43	2.37

Скандий имеет один стабильный изотоп Cs_{21}^{45} . Расчет совпал с точностью до одного стабильного изотопа.

N	Cu_{29}	$\frac{m_Y}{A}$	n_ϵ	Zn_{30}	$\frac{m_Y}{A}$	n_ϵ	Ga_{31}	$\frac{m_Y}{A}$	n_ϵ
58		125.79	2.62	>	124.6	2.57	>	122.09	2.47
59		126.58	2.7	>	125.23	2.64	>	123.41	2.56
60		126.85	2.76	>	126.12	2.72	>	124.16	2.64
61		127.41	2.83	>	126.5	2.79	>	125.17	2.73
62		127.49	2.88	>	127.15	2.86	>	125.66	2.79
63		127.85	2.94	>	127.33	2.92	>	126.41	2.87
64		127.78	2.98	=const	127.78	2.98	>	126.7	2.93
65		127.99	3.04	$>\beta^+$	127.8	3.03	>	127.24	3.00
66		127.79	3.08	<const	128.8	3.09	>	127.36	3.06
67		127.86	3.13	<const	127.97	3.13	>	127.73	3.12
68		127.56	3.16	<const	128.11	3.19	>	127.71	3.17
69		127.51	3.2	<ip	127.88	3.22	>	127.93	3.23
70		127.12	3.23	<const	127.91	3.27	>	127.79	3.26
71		126.99	3.27	<	127.59	3.3	$<\beta^-$	127.89	3.32
72		126.52	3.29	<	127.52	3.34	<	127.65	3.35
73		126.31	3.33	<	127.12	3.37	<	127.65	3.4
74		125.78	3.34	<	126.97	3.41	<	127.33	3.43
75		125.5	3.38	<	126.51	3.43	<	127.23	3.47
76		124.92	3.39	<	126.28	3.46	<	126.84	3.49
77		124.58	3.42	<	125.77	3.48	<	126.68	3.53
78		123.96	3.43	<	125.48	3.51	<	126.23	3.55

Область устойчивых изотопов четко совпадает по количеству с экспериментальными данными.

N	Cd_{48}	$\frac{m_Y}{A}$	n_ϵ	In_{49}	$\frac{m_Y}{A}$	n_ϵ	Sn_{50}	$\frac{m_Y}{A}$	n_ϵ
103		125.72	4.66	$>\Leftarrow\beta^+$	125.06	4.61		124.24	4.55
104		125.98	4.73	>	125.24	4.67		124.65	4.63
105		126.06	4.78	>	125.54	4.74		124.87	4.69
106		126.25	4.84	>	125.66	4.79		125.2	4.76
107		126.28	4.89	>	125.89	4.86		125.35	4.81
108		126.41	4.94	>	125.95	4.91		125.61	4.88
109		126.39	4.99	>	126.12	4.96		125.71	4.93

ГЛАВА 6. ОБОСНОВАНИЕ ЦИКЛОННОЙ МОДЕЛИ АТОМНЫХ ЯДЕР В СООТВЕТСТВИИ СО СТРУКТУРОЙ ПРОСТРАНСТВА НА МАЛЫХ ЛИНЕЙНЫХ РАССТОЯНИЯХ ДЕЙСТВИЯ ЯДЕРНЫХ СИЛ. РАСЧЕТ ВОЗБУЖДЕННОГО СОСТОЯНИЯ ЯДЕР. РАСЧЕТ РАДИОАКТИВНОГО ПРЕВРАЩЕНИЯ ЯДЕР.

110		126.47	5.04	>	126.13	5.01		125.91	4.99
111		126.4	5.08	>	126.25	5.07	$\Leftarrow \beta$	125.95	5.04
112		126.44	5.13	$> \beta^+$	126.21	5.11		126.1	5.1
113		126.33	5.16	4.23%>	126.28	5.16	>	126.1	5.14
114		126.33	5.21	>	126.2	5.2		126.2	5.2
115		126.19	5.24	<const	126.23	5.25	>	126.15	5.24
116		126.15	5.29	>	126.12	5.28	<	126.21	5.29
117		125.97	5.32	<	126.11	5.33	<=	126.12	5.33
118		125.9	5.35	<	126.96	5.36	><	126.14	5.37
119		125.7	5.38	<	125.92	5.4	β^- <	126.02	5.41
120		125.6	5.42	<	125.74	5.43	<	126	5.45
121		125.37	5.44	<	125.66	5.47	<	125.85	5.48
122		125.24	5.48	<	125.46	5.5	$\Rightarrow \beta^-$	125.8	5.53
123		124.98	5.5	<	125.36	5.53	<	125.62	5.55
124		124.83	5.53	<	125.13	5.56	<	125.54	5.59
125		124.55	5.55	<	125.00	5.59	<	125.34	5.62
126		124.38	5.58	<	124.75	5.61	<	125.23	5.65
127		124.08	5.59	$< \beta^-$	124.6	5.64	<	125.00	5.68
128		123.89	5.62	<	124.33	5.66	<	124.87	5.71
129		123.58	5.63	<	124.15	5.69	<<	124.62	5.73
130		123.36	5.66	<	123.86	5.7	<	124.47	5.76

Из 27 изотопов устойчивым является изотоп In_{49}^{115} (95,77%). Установленные свойства распадов точно указывают на стабильность этого изотопа.

N	Xe_{54}	$\frac{m_V}{A}$	n_ϵ	Cs_{55}	$\frac{m_V}{A}$	n_ϵ	Ba_{56}	$\frac{m_V}{A}$	n_ϵ
123		125.57	5.55	>	125.28	5.52	>	124.88	5.49
124		125.65	5.6	>	125.3	5.57	>	125.06	5.55
125		125.61	5.64	>	125.41	5.62	>	125.10	5.6
126		125.65	5.69	>	125.39	5.67	>	125.24	5.65
127		125.58	5.73	>	125.46	5.72	>	125.24	5.7
128		125.59	5.78	>	125.41	5.76	>	125.34	5.75
129		125.49	5.81	>=	125.45	5.81	>	125.31	5.79
130		125.47	5.85	>	125.37	5.84	==	125.37	5.84
131		125.34	5.88	<	125.38	5.89	>	125.32	5.88
132		125.3	5.92	>=	125.27	5.92	<	125.35	5.93
133		125.14	5.95	<	125.25	5.96	<	125.26	5.97
134		125.07	5.99	<	125.12	6.00	<	125.26	6.01
135		124.89	6.02	<	125.07	6.04	<	125.15	6.04

136		124.8	6.05	<	124.91	6.06	<	125.12	6.08
137		124.6	6.08	<	124.84	6.10	<	124.99	6.12
138		124.49	6.11	<	124.67	6.13	<	124.93	6.15
139		124.27	6.13	<	124.57	6.16	<	124.78	6.18
140		124.14	6.16	<	124.38	6.19	<	124.7	6.22
141		123.91	6.18	<	124.26	6.22	<	124.53	6.24
142		123.76	6.21	<	124.05	6.24	<	124.43	6.28

Изотоп Cs_{55}^{130} по своему состоянию способен как β^+ , β^- распаду, так и к электронному захвату. Но наиболее ясно эти свойства проявляются на изотопе Cs_{55}^{132} , коэффициенты которого находятся в клещах коэффициентов изотопов Xe_{54}^{132} , Ba_{56}^{132} и поэтому его распад равновероятен в любую сторону. Однако единственным изотопом устойчивым оказался изотоп Cs_{55}^{131} . Экспериментальные данные дают изотоп Cs_{55}^{133} . Расхождение в два нуклона.

Рассмотрим радиоактивные распады лантаноидов.

N	Du_{66}^N	$\frac{m_Y}{A}$	n_ϵ	Ho_{67}^N	$\frac{m_Y}{A}$	n_ϵ	Er_{68}^N	$\frac{m_Y}{A}$	n_ϵ
162		123.63	7.05	>k.	123.55	7.04	>=	123.53	7.04
163		123.53	7.08	<=i.p	123.54	7.08	>	123.48	7.07
164		123.49	7.11	>=k	123.45	7.11	<= β^-	123.48	7.11
165		123.37	7.14	<const	123.42	7.15	>=	123.41	7.15
166		123.31	7.18	<=	123.32	7.18	< β^-	123.4	7.19
167		123.18	7.20	<	123.27	7.22	< β^- =	123.31	7.22
168		123.10	7.24	<=	123.15	7.24	<	123.28	7.26
169		122.96	7.26	<	123.09	7.28	<	123.17	7.29
170		122.87	7.29	<	122.96	7.3	<	123.12	7.32
171		122.71	7.31	<	122.89	7.34	<	123.01	7.35
172		122.61	7.34	<	122.74	7.36	<	122.94	7.38

Таблица показывает полное совпадение с экспериментальными данными. Единственный изотоп Ho_{67}^{165} оказался стабильным как в расчете, так и в эксперименте.

N	Pb_{82}^N	$\frac{m_Y}{A}$	n_ϵ	Bi_{83}^N	$\frac{m_Y}{A}$	n_ϵ	Po_{84}^N	$\frac{m_Y}{A}$	n_ϵ
203		121.13	8.4	>k	121.04	8.39	>	120.92	8.37
204		121.11	8.44	>k	121.00	8.42	>	120.93	8.41
205		121.04	8.47	>k	120.99	8.46	>	120.89	8.44
206		121.01	8.5	>k	120.93	8.49	>	120.9	8.48
207		120.93	8.53	>=k	120.91	8.53	>	120.85	8.52
208		120.89	8.56	>k	120.84	8.55	=>	120.84	8.53
209		120.8	8.59	<=const	120.81	8.59	>	120.78	8.58
210		120.75	8.62	>=	120.73	8.62	<= β^-	120.76	8.62
211		120.66	8.64	<	120.69	8.65	==	120.69	8.65

212		120.6	8.68	==	120.6	8.68	<=	120.66	8.68
213		120.49	8.7	<	120.55	8.71	<=	120.58	8.71
214		120.42	8.73	<=	120.46	8.73	<	120.54	8.74

Изотоп висмута Bi_{83}^{209} единственный стабильный изотоп зафиксирован как устойчивый в точном соответствии с экспериментальными данными. Таблица показывает, что с ростом количества нуклонов в ядре, происходит уравнивание коэффициентов и ядра становятся склонны к α – распаду. Изменение коэффициента n_ϵ характеризует изменение заряда ядра в зависимости от количества нейтронов в ядре при одном и том же заряде Z. В связи с этим устойчивым ядром будет ядро, у которого этот коэффициент n_ϵ будет иметь максимальное значение при равенстве количества нуклонов N. Итак, процессы распада ядер идут в сторону увеличения коэффициента n_ϵ и увеличения обменного кванта на нуклон в ядре.

N	Pt_{78}^N	$\frac{m_V}{A}$	n_ϵ	Au_{79}^N	$\frac{m_V}{A}$	n_ϵ	Hg_{80}^N	$\frac{m_V}{A}$	n_ϵ
193		121.75	8.09	>	121.68	8.08	>	121.57	8.06
194		121.73	8.12	>	121.63	8.11	>=	121.58	8.11
195		121.64	8.15	>=	121.61	8.15	>	121.54	8.14
196		121.61	8.19	>	121.55	8.18	>=	121.54	8.18
197		121.52	8.22	==	121.52	8.22	>	121.48	8.21
198		121.47	8.25	>	121.44	8.24	<	121.46	8.25
199		121.37	8.27	<	121.41	8.28	>=	121.39	8.28
200		121.31	8.31	==	121.31	8.31	<=	121.37	8.31
201		121.2	8.33	<	121.27	8.34	<=	121.29	8.34
202		121.14	8.36	<	121.17	8.37	<	121.25	8.38
203		121.02	8.38	<	121.11	8.4	<=	121.16	8.4

Устойчивым следует признать изотоп Au_{79}^{197} или изотоп Au_{79}^{199} , расхождение в ближайших изотопах в третьем знаке после запятой.

N	Yb_{70}^N	$\frac{m_V}{A}$	n_ϵ	Lu_{71}^N	$\frac{m_V}{A}$	n_ϵ	Hf_{72}^N	$\frac{m_V}{A}$	n_ϵ
171		123.06	7.36	>	123	7.35	>	122.88	7.33
172		123.04	7.4	>	122.94	7.38	>=	122.9	7.38
173		122.95	7.43	>	122.93	7.42	>	122.85	7.41
174		122.92	7.46	>=	122.86	7.46	==	122.86	7.46
175		122.81	7.49	<=const	122.83	7.49	>=	122.8	7.49
176		122.76	7.53	>	122.74	7.52	<	122.79	7.53
177		122.64	7.55	<	122.71	7.56	==	122.71	7.56
178		122.58	7.59	<=	122.6	7.59	<	122.69	7.6
179		122.45	7.61	<	122.55	7.62	<	122.59	7.63
180		122.37	7.64	<	122.43	7.65	<	122.55	7.67

На роль стабильного претендует изотоп Lu_{71}^{175} в точном соответствии с таблицей 37.1.

Изотоп Lu_{71}^{176} находится в состоянии когда может произойти как К- захват так и β^- распад.

Изотоп Lu_{71}^{174} находится в метастабильном состоянии в точном соответствии с таблицей 37.1

Границы β^+ , β^- отфиксированы изотопами Lu_{71}^{173} , Lu_{71}^{178} . Метастабильное состояние изотопов в расчетной таблице характеризуется двойными неравенствами или равенствами также в точном соответствии с экспериментальными данными.

Ядро изотопа Lu_{71}^{177} содержит 106 нейтронов, которые фактически создают ядерный заряд изотопа Hf_{72}^{177} , в ядре которого 105 нейтронов. Для этих изотопов имеем равенство коэффициента $n_e=7,56$. В этом случае ядро находится в двух состояниях.

N	Eu_{63}^N	$\frac{m_V}{A}$	n_e	Gd_{64}^N	$\frac{m_V}{A}$	n_e	Tb_{65}^N	$\frac{m_V}{A}$	n_e
145		124.24	6.39	$\gg K, \beta^+$	123.96	6.36	$\gg$	123.6	6.32
146		124.23	6.43	$\gg K$	124.06	6.41	$\gg$	123.65	6.37
147		124.28	6.48	$\gg K$	124.07	6.46	$\gg$	123.78	6.43
148		124.25	6.52	$\gg K$	124.14	6.51	$\gg$	123.8	6.47
149		124.28	6.56	$\gg K$	124.12	6.55	$\gg$	123.89	6.52
150		124.22	6.6	$\geq K$	124.17	6.6	$\gg$	123.89	6.57
151		124.22	6.64	$\gg K$	124.13	6.63	$\gg$	123.96	6.62
152		124.14	6.68	≤ 0.2	124.15	6.68	$\gg$	123.94	6.66
153		124.13	6.72	$\geq K$	124.09	6.72	$\gg$	123.98	6.7
154		124.03	6.75	≤ 2.15	124.09	6.76	$\gg$	123.93	6.74
155		123.99	6.79	≤ 14.7	124.01	6.79	$\geq$	123.95	6.79
156		123.87	6.82	≤ 20.47	123.99	6.83	$\gg$	123.89	6.82
157		123.82	6.86	≤ 15.68	123.89	6.86	$\geq$	123.88	6.86
158		123.69	6.88	≤ 24.9	123.85	6.9	$\geq$	123.8	6.9
159		123.62	6.92	$\ll$	123.73	6.93	$\ll \beta^-$	123.78	6.94
160		123.47	6.94	≤ 21.9	123.67	6.97	$=$	123.67	6.97
161		123.38	6.98	$\ll$	123.54	6.99	$\ll \beta^-$	123.63	7.00
162		123.22	7.00	$\ll$	123.47	7.03	$\leq \beta^-$	123.51	7.03

Насчитанная таблица точно соответствует экспериментальной 37.1. Устойчивые изотопы строго чередуются с неустойчивыми в соответствии с данной таблицей.

N	Ge_{58}^N	$\frac{m_V}{A}$	n_e	Pr_{59}^N	$\frac{m_V}{A}$	n_e	Nd_{60}^N	$\frac{m_V}{A}$	n_e
136		125.08	6.08	$\gg K, \beta^+$	124.82	6.06	$\gg$	124.66	6.04
137		125.01	6.12	$\gg K$	124.89	6.11	$\gg$	124.67	6.08
138		125.02	6.16	$\gg K$	124.84	6.15	$\gg$	124.75	6.14
139		124.93	6.2	$\gg K$	124.87	6.19	$\gg$	124.73	6.18

ГЛАВА 6. ОБОСНОВАНИЕ ЦИКЛОННОЙ МОДЕЛИ АТОМНЫХ ЯДЕР В СООТВЕТСТВИИ СО СТРУКТУРОЙ ПРОСТРАНСТВА НА МАЛЫХ ЛИНЕЙНЫХ РАССТОЯНИЯХ ДЕЙСТВИЯ ЯДЕРНЫХ СИЛ. РАСЧЕТ ВОЗБУЖДЕННОГО СОСТОЯНИЯ ЯДЕР. РАСЧЕТ РАДИОАКТИВНОГО ПРЕВРАЩЕНИЯ ЯДЕР.

140		124.92	6.24	$\gg K, \beta^+$	124.80	6.23	$\geq$	124.78	6.23
141		124.8	6.27	$\leq \text{const}$ 100%	124.81	6.27	$\geq$	124.73	6.27
142		124.76	6.31	$\geq$	124.72	6.31	$\leq$ β^-	124.76	6.31
143		124.63	6.34	$\ll$	124.70	6.35	$\geq$	124.69	6.35
144		124.57	6.38	$\leq$	124.58	6.38	$\ll \beta^-$	124.69	6.39
145		124.41	6.41	$\ll$	124.54	6.42	$\leq$	124.59	6.42
146		124.33	6.44	$\ll$	124.41	6.45	$\ll$	124.57	6.47
147		124.16	6.47	$\ll$	124.35	6.49	$\ll$	124.45	6.5
148		124.06	6.5	$\ll$	124.19	6.51	$\ll$	124.4	6.53
149		123.87	6.52	$\ll$	124.11	6.55	$\ll$	124.27	6.56

Четко совпадают границы распада и постоянный изотоп с таблицей 37.1
Изотоп Pr_{59}^{143} находится в метастабильном состоянии.

N	P_{15}^N	$\frac{m_V}{A}$	n_ϵ	S_{16}^N	$\frac{m_V}{A}$	n_ϵ	Cl_{17}^N	$\frac{m_V}{A}$	n_ϵ
28		120.68	1.23	$\gg p$	117.38	1.17	$\gg$	108.46	1.00
29		123.33	1.33	$\gg p$	119.71	1.25	$\gg$	114.01	1.13
30		123.96	1.38	$\gg \beta^+$	122.72	1.35	$\gg$	116.93	1.22
31		125.45	1.45	$\gg \beta^+$	123.76	1.41	$\gg$	120.42	1.33
32		125.31	1.48	$\ll \text{const}$ 95%	125.56	1.49	$\gg$	121.94	1.41
33		126.02	1.54	$\geq$	125.77	1.54	$\gg$	124.12	1.5
34		125.36	1.57	$\leq 4.2\%$	126.75	1.6	$\gg$	124.73	1.55
35		125.54	1.61	$\ll$	126.4	1.63	$\gg$	126.03	1.62
36		124.52	1.62	$\leq 0.14\%$	126.81	1.69	$\gg$	126.02	1.66
37		124.31	1.66	$\ll$	126.07	1.71	$\ll$ β^-	126.7	1.72
38		123.04	1.67	$\ll$	126.06	1.75	$\leq$ β^-	126.27	1.75

Четкое совпадение границ распада изотопов и области их стабильности.

	Mn_{25}^N			Fe_{26}^N			Co_{27}^N		
48		124,03	2,11		122,11	2,05		118,24	1,92
49		125,32	2,2		123,21	2,13		120,4	2,03
50		125,85	2,26		124,65	2,22		121,7	2,12
51		126,75	2,34		125,34	2,29		123,3	2,22
52		126,98	2,4	$\gg \beta^+$	126,36	2,37	$\gg$	124,16	2,29
53		127,57	2,46	$\gg \beta^+$	126,73	2,43	$\gg$	125,33	2,38
54		127,56	2,51	$\gg \beta^+$	127,44	2,5	$\gg$	125,85	2,44

ГЛАВА 6. ОБОСНОВАНИЕ ЦИКЛОННОЙ МОДЕЛИ АТОМНЫХ ЯДЕР В СООТВЕТСТВИИ СО СТРУКТУРОЙ ПРОСТРАНСТВА НА МАЛЫХ ЛИНЕЙНЫХ РАССТОЯНИЯХ ДЕЙСТВИЯ ЯДЕРНЫХ СИЛ. РАСЧЕТ ВОЗБУЖДЕННОГО СОСТОЯНИЯ ЯДЕР. РАСЧЕТ РАДИОАКТИВНОГО ПРЕВРАЩЕНИЯ ЯДЕР.

55		127,9	2,57	>>K	127,55	2,55	>>	126,69	2,52
56		127,7	2,61	<91.7%	128,00	2,62	>>	126,95	2,58
57		127,85	2,66	<2.17%	127,92	2,66	>>	127,52	2,65
58		127,5	2,69	<0.31%	128,16	2,72	>>	127,56	2,69
59		127.48	2.74	<<	127.92	2.76	β^-	127.92	2.76
60		127.01	2.76	<<Const	128.00	2.81	>>	127.79	2.8
61		126.87	2.8	<<	127.62	2.84	β^-	127.97	2.85

Соблюдаются границы распада и чередование в области устойчивых ядер изотопов неустойчивые ядра.

	Br_{35}^N			Kr_{36}^N			Rb_{37}^N		
74		126.96	3.41	>> β^+	126.4 2	3.38	>>	125.04	3.31
75		127.33	3.48	>>	126.6 6	3.44	>>	125.7	3.39
76		127.38	3.52	>>	127.0 9	3.51	>>	126.01	3.45
77		127.63	3.59	>>	127.2 1	3.56	>>	126.52	3.52
78		127.58	3.63	>=	127.5 2	3.63	>>	126.71	3.58
79		127.73	3.69	>K, β^+	127.5 3	3.67	>>	127.08	3.65
80		127.6	3.72	<c2.27%	127.7 3	3.73	>>	127.16	3.7
81		127.65	3.77	<<	127.6 6	3.78	>>	127.42	3.76
82		127.44	3.81	<11.56%	127.7 6	3.83	>>	127.4	3.81
83		127.42	3.85	<11.55%	127.6 1	3.87	>>	127.57	3.86
84		127.15	3.88	<56.9%	127.6 4	3.91	>>	127.47	3.9
85		127.06	3.93	<<	127.4 2	3.95	< β^-	127.55	3.96
86		126.74	3.95	<17.4%	127.3 8	3.99	<=	127.39	3.99
87		126.59	3.99	<<	127.1	4.02	< β^-	127.4	4.04
88		126.22	4.01	<<	127.0 0	4.06	<<	127.17	4.07
89		126.02	4.04	<<	126.6 7	4.09	<<	127.12	4.12

90		125.61	4.06	<<	126.5 1	4.12	<<	126.84	4.14
91		125.36	4.09	<<	126.1 5	4.14	<<	126.73	4.18

Расчетная таблица находится в полном соответствии с экспериментальными данными таблицы 37.1. Область стабильных ядер изотопов точно ограничена областью неустойчивых ядер и в соответствии с таблицей идет чередование неустойчивых ядер с устойчивыми.

N	Nb_{41}^N			Mo_{42}^N			Tc_{43}^N		
88		126.61	4.04	$> \beta^+$	126.15	4.01	$>>$	125.08	3.94
89		126.89	4.10	$>$	126.32	4.06	$>>$	125.55	4.02
90		126.93	4.15	$>>$	126.65	4.13	$>$	125.78	4.08
91		127.12	4.21	$>>$	126.74	4.18	$>>$	126.16	4.15
92		127.09	4.25	$\geq i.p.$	126.97	4.25	$>>$	126.3	4.2
93		127.21	4.31	$>>$	126.99	4.29	$>>$	126.58	4.27
94		127.12	4.35	≤ 9.12 %	127.15	4.35	$>>$	126.64	4.32
95		127.17	4.4	$>>$	127.10	4.39	$>>$	126.85	4.38
96		127.03	4.44	≤ 16.5 %	127.19	4.45	$>>$	126.85	4.42
97		127.02	4.48	$\leq 9.45\%$	127.09	4.49	$>>$	126.98	4.48
98		126.83	4.51	≤ 23.75 %	127.12	4.53	$>>$	126.92	4.52
99		126.78	4.56	$<<$	126.97	4.57	$\leq \beta^-$	126.99	4.57
100		126.54	4.59	$\leq 9.62\%$	126.95	4.62	$>>$	126.88	4.61
101		126.44	4.62	$<<$	126.75	4.65	$<< \beta^-$	126.9	4.66
102		126.17	4.65	$<<$	126.68	4.69	$\leq \beta^-$	126.74	4.69
103		126.03	4.68	$<<$	126.45	4.72	$<< \beta^-$	126.71	4.74
104		125.72	4.71	$<<$	126.34	4.75	$<< \beta^-$	126.51	4.77
105		125.55	4.74	$<<$	126.07	4.78	$<< \beta^-$	126.43	4.81

Чередование стабильных и нестабильных ядер изотопов молибдена в точном соответствии с экспериментальной таблицей 37.1.

N	Ru_{44}^N			Rh_{45}^N			Pd_{46}^N		
94		126.31	4.29	$>>K$	125.44	4.23	$>>$	124.73	4.19
95		126.42	4.35	$>>K$	125.81	4.3	$>>$	125.01	4.25
96		126.66	4.41	$>>K$	125.96	4.36	$>>$	125.43	4.32
97		126.70	4.46	$>> \beta^+$	126.25	4.43	$>>$	125.63	4.38
98		126.88	4.52	$>> \beta^+$	126.34	4.48	$>>$	125.95	4.45
99		126.85	4.56	$>>K,$	126.55	4.54	$>>$	126.08	4.51

ГЛАВА 6. ОБОСНОВАНИЕ ЦИКЛОННОЙ МОДЕЛИ АТОМНЫХ ЯДЕР В СООТВЕТСТВИИ СО СТРУКТУРОЙ ПРОСТРАНСТВА НА МАЛЫХ ЛИНЕЙНЫХ РАССТОЯНИЯХ ДЕЙСТВИЯ ЯДЕРНЫХ СИЛ. РАСЧЕТ ВОЗБУЖДЕННОГО СОСТОЯНИЯ ЯДЕР. РАСЧЕТ РАДИОАКТИВНОГО ПРЕВРАЩЕНИЯ ЯДЕР.

				β^+					
100		126.96	4.62	$\gg K, \beta^+$	126.57	4.59	$\gg$	126.33	4.57
101		126.89	4.66	$\gg K$	126.72	4.64	$\gg$	126.39	4.62
102		126.94	4.71	$\gg \beta^+$	126.68	4.69	$\gg$	126.58	4.68
103	β^-	126.82	4.74	$\geq 100\%, \text{i.p.}$	126.77	4.74	$\leftarrow K$	126.58	4.73
104		126.82	4.79	$\gg$	126.69	4.78	$\leftarrow \text{i.p.} \beta^-$	126.7	4.78
105	β^-	126.65	4.82	$\ll$	126.73	4.83	$\gg$	126.65	4.82
106		126.61	4.87	$\geq$	126.6	4.87	$\ll \beta^-$	126.72	4.88
107		126.41	4.9	$\ll$	126.59	4.91	$\leq$	126.63	4.91
108		126.33	4.94	$\leq$	126.42	4.94	$\ll$	126.65	4.96
109		126.09	4.96	$\ll$	126.37	4.98	$\ll$	126.51	5.00
110		125.97	5.00	$\ll$	126.17	5.01	$\ll$	126.49	5.04
111		125.71	5.02	$\ll$	126.08	5.05	$\ll$	126.32	5.07
112		125.56	5.06	$\ll$	125.85	5.08	$\ll$	126.26	5.11
113		125.26	5.08	$\ll$	125.73	5.11	$\ll$	126.06	5.14
114		125.08	5.11	$\ll$	124.46	5.14	$\ll$	125.96	5.18
115		124.77	5.12	$\ll$	125.31	5.17	$\ll \beta^-$	125.73	5.2

На устойчивый изотоп претендует изотоп с $N=105$, эта величина сдвинута на 2 нейтрона. Табличный устойчивый при $N=103$. Это второй случай несовпадения, который в дальнейшем будет исследован.

N	Te_{52}^N			I_{53}^N			Xe_{54}^N		
118		125.9	5.35	$\gg \beta^+ \leftarrow$	125.48	5.32	$\gg$	125.18	5.29
119		125.87	5.4	$\gg \beta^+$	125.62	5.38	$\gg$	125.25	5.34
120		125.94	5.45	$\gg$	125.62	5.42	$\gg$	125.42	5.4
121		125.88	5.49	$\gg$	125.72	5.47	$\gg$	125.45	5.45
122		125.91	5.54	$\gg$	125.69	5.52	$\gg$	125.58	5.51
123		125.81	5.57	$\geq K$	125.75	5.57	$\gg$	125.57	5.55
124		125.81	5.62	$\gg$	125.68	5.6	$\geq$	125.65	5.6
125		125.68	5.65	$\geq K$	125.7	5.65	$\gg$	125.61	5.64
126		125.65	5.69	$\geq \beta^+ \leftarrow$	125.6	5.69	$\leq \beta^- \Rightarrow$	125.65	5.69
127		125.5	5.72	$\ll 100\%$	125.59	5.73	$\geq$	125.58	5.73
128		125.44	5.76	$\leq K$	125.46	5.76	$\ll \beta^- \Rightarrow$	125.59	5.78

129		125.26	5.79	<<	125.42	5.8	<<	125.49	5.81
130		125.17	5.82	<<	125.27	5.83	<<	125.47	5.85
131		124.97	5.85	<<	125.2	5.87	<<	125.34	5.88
132		124.86	5.88	<<	125.03	5.9	<<	125.3	5.92

Таблица с точностью до постоянного изотопа соответствует выявленным закономерностям распада и устойчивости ядер а также таблице 37.1.

Выводы и дополнительное пояснение расчетных таблиц.

Для исследования радиоактивных превращений ядер использованы два расчетных параметра : n_ϵ -коэффициент , характеризующий количество ϵ - туннелей (изолированных направлений в другое измерение или количество циклонных вихрей) в ядре,

$\frac{m_V}{A}$ - масса интегрального обменного кванта системы взаимодействующих

нуклонов деленная на количество нуклонов в ядре.

При обосновании циклонной модели ядра было показано четкое взаимодействие коэффициента n_ϵ с рядами и периодами таблицы элементов . Коэффициент получен делением энергии связи ядра на энергию связи одного циклонного вихря. Масса обменного кванта характеризует энергетическое состояние ядра, коэффициент n_ϵ характеризует мезонный заряд ядра. Ядро устойчиво если эти коэффициенты имеют максимальное значение. Радиоактивные распады идут в направлении увеличения их значений. Интегральный обменный квант находится относительно системы взаимодействующих нуклонов в другом измерении , которое и определяется этим коэффициентом n_ϵ . Система взаимодействующих пространств устойчива при больших величинах этого параметра. Эти два коэффициента определяют потенциал мезонного поля ядерной материи , центр которого сосредоточен в начале координат создает поле , удерживающее взаимодействующие нуклоны.

Выявлена закономерность изменения этих коэффициентов для конкретных нуклидов заряда Z . Закономерность стабильна для всех ядер периодической системы. Стабильное ядро имеет максимум величин этих коэффициентов по сравнению с этими же коэффициентами , насчитанными для продуктов распада. Стабильная область ядер одного заряда может прерываться включением нестабильных ядер. Расчет находится в строгом соответствии с этими экспериментальными данными.

Граница β^+ - позитронного распада определяет переход изотопа от заряда Z к заряду $Z-1$ с увеличением коэффициентов $n_\epsilon, \frac{m_V}{A}$, при этом коэффициенты изотопа Z больше по значению коэффициентов ядра заряда $Z+1$. В таблицах это обозначено в виде

$$\frac{m_V}{A}(z-1), n_\epsilon(z-1) \gg \frac{m_V}{A}(z), n_\epsilon(z) \gg \frac{m_V}{A}(z+1), n_\epsilon(z+1)$$

это условие соответствует β^+ - позитронному распаду

Граница β^- электронного распада определяет переход от заряда Z к заряду $Z+1$ с увеличением коэффициентов, при этом коэффициенты должны быть больше чем у изотопа $Z-1$.

Это выражается в таблицах следующим неравенством

$$\frac{m_V}{A}(z-1), n_\epsilon(z-1) << \frac{m_V}{A}(z), n_\epsilon(z) << \frac{m_V}{A}(z+1), n_\epsilon(z+1)$$

это условие отвечает β^- -электронному распаду.

Стабильный изотоп определяется неравенством

$$\frac{m_V}{A}(z-1), n_\epsilon(z-1) << \frac{m_V}{A}(z), n_\epsilon(z) >> \frac{m_V}{A}(z+1), n_\epsilon(z+1)$$

К –захват или изомерный переход характеризуется появлением в левой части неравенства знака равенства в коэффициентах n_ϵ .

Равная вероятность β^+, k, β^+, ip -изомерного перехода определена равенством

$$\frac{m_V}{A}(z-1), n_\epsilon(z-1) >> \frac{m_V}{A}(z), n_\epsilon(z) << \frac{m_V}{A}(z+1), n_\epsilon(z+1)$$

Разнообразие неравенств, их чередование находится в четком соответствии с экспериментальными данными, представленными в таблице 37.1 [20] Таблица изотопов. Глава 37. Ядерные свойства нуклидов. Таблица физических величин. Справочник. Атомиздат 1976 год.

Из 600 случаев только 3 дали сдвиг стабильного изотопа на 2 единица по числу нейтронов в ядре. Совпадение результатов составляет свыше 99,5%.

Теория радиоактивных превращений ядер получила в результате надежные критерии в виде легко рассчитываемых коэффициентов $n_\epsilon, \frac{m_V}{A}$. Одновременно теоретические разработки о структуре пространств в малых линейных размерах получили дополнительное масштабное подтверждение.

N	Li_3^N			Be_4^N			B_5^N		
6		85.38	0.44		83.9	0.42			
7		101.34	0.6	$\beta^+ \Leftarrow$	97.85	0.56	$>>$	0.08	37.92
8		87.4	0.43	$<< \text{const}$	114.71	0.75	$>>$	0.36	79.42
9		88.91	0.44	$<< 100\%$	108.53	0.66	$>>$	0.62	105.55
10				10^9 let	111.28	0.69	$>>$	0.63	106.5
11					101.66	0.58	$<<$ $\beta^- \Rightarrow$	0.72	113.00
12					100.27	0.57	$<<$ $\beta^- \Rightarrow$	0.66	108.00
13					89.79	0.46	$<<$	0.68	108.91

ГЛАВА 6. ОБОСНОВАНИЕ ЦИКЛОННОЙ МОДЕЛИ АТОМНЫХ ЯДЕР В СООТВЕТСТВИИ СО СТРУКТУРОЙ ПРОСТРАНСТВА НА МАЛЫХ ЛИНЕЙНЫХ РАССТОЯНИЯХ ДЕЙСТВИЯ ЯДЕРНЫХ СИЛ. РАСЧЕТ ВОЗБУЖДЕННОГО СОСТОЯНИЯ ЯДЕР. РАСЧЕТ РАДИОАКТИВНОГО ПРЕВРАЩЕНИЯ ЯДЕР.

							$\beta^- \Rightarrow$		
	Be_4^N			B_5^N			C_6^N		
8		114.71	0.75	$\gg$ $\beta^+ \Leftarrow$	79.42	0.36	$\gg$	0.02	20.36
9		108.53	0.66	$\gg 2a$	105.55	0.62	$\gg$	0.34	77.37
10	$\beta^- \Rightarrow$	111.28	0.69	const	106.5	0.63	$\gg$	0.62	105.6
11		101.66	0.58	$\ll 80.4\%$	113.00	0.72	$\gg$	0.68	110.33
12	n	100.27	0.57	$\ll$	108.00	0.66	$\ll$ $\beta^- \Rightarrow$	0.79	118.31
13					108.91	0.68	$\ll$ $\beta^- \Rightarrow$	0.77	116.08
	C_6^N			N_7^N			o_8^N		
9		77.37	0.34						
10		105.6	0.62						
11		110.33	0.68						
12		118.31	0.79	$\gg \beta \Leftarrow^+$	102.49	0.59			
13		116.08	0.77	$\gg$ $\beta^+ \Leftarrow$	113.63	0.74	$\gg$	0.58	100.83
14	$\beta^- \Rightarrow$	118.12	0.81	const	114.42	0.76	$\gg$	0.75	113.36
15		113.57	0.77	$\ll$ Const	118.33	0.83	$\gg$	0.8	116.04
16		113.11	0.78	$\ll$	115.96	0.82	$\ll$ $\beta^- \Rightarrow$	0.89	120.96
17					116.81	0.85	$\ll$ $\beta^- \Rightarrow$	0.9	120.05
18					113.09	0.82	$\ll$ $\beta^- \Rightarrow$	0.95	121.69
19								0.93	119.17
20								0.96	119.13
	N_7^N			O_8^N			F_9^N		
13		113.63	0.74	$\gg P$	100.83	0.58	$\gg$	0.3	72.35
14		114.42	0.76	$\gg$ $\beta^+ \Leftarrow$	113.36	0.75	$\gg$	0.48	90.68

ГЛАВА 6. ОБОСНОВАНИЕ ЦИКЛОННОЙ МОДЕЛИ АТОМНЫХ ЯДЕР В СООТВЕТСТВИИ СО СТРУКТУРОЙ ПРОСТРАНСТВА НА МАЛЫХ ЛИНЕЙНЫХ РАССТОЯНИЯХ ДЕЙСТВИЯ ЯДЕРНЫХ СИЛ. РАСЧЕТ ВОЗБУЖДЕННОГО СОСТОЯНИЯ ЯДЕР. РАСЧЕТ РАДИОАКТИВНОГО ПРЕВРАЩЕНИЯ ЯДЕР.

15		118.33	0.83	>> $\beta^+ \Leftarrow$	116.04	0.8	>>	0.67	106.23
16		115.96	0.82	<<99.8%	120.96	0.89	>>	0.75	111.32
17		116.81	0.85	<<0.04%	120.05	0.9	>>	0.87	117.88
18		113.09	0.82	<<0.2%	121.69	0.95	>>	0.9	118.62
19					119.17	0.93	<< $\beta^- \Rightarrow$	0.97	121.39
20					119.13	0.96	<< $\beta^- \Rightarrow$	0.97	120.13
	F_9^N			Ne_{10}^N			Na_{11}^N		
17		117.88	0.87	>>p	109.99	0.75			
18		118.62	0.9	>> $\beta^+ \Leftarrow$	117.46	0.88			
19		121.39	0.97	>> $\beta^+ \Leftarrow$	119.32	0.93			
20		120.13	0.97	<<91%	122.79	1.02	>>	0.91	115.99
21		120.95	1.01	<<0.3%	122.45	1.04	>>	1.01	120.47
22		118.67	1.00	<<8.8%	123.84	1.09	>>	1.05	121.17
23		118.38	1.03	<<	122.33	1.1	<< $\beta^- \Rightarrow$	1.12	123.31
24		115.55	1.01	<<	122.51	1.13	<< $\beta^- \Rightarrow$	1.14	122.63
25								1.19	123.42
26								1.19	121.94
	Ne_{10}^N			Na_{11}^N			Mg_{12}^N		
20		122.79	1.02	>> $\beta^+ \Leftarrow$	115.99	0.91	>>	0.83	110.63
21		122.45	1.04	>> $\beta^+ \Leftarrow$	120.47	1.01	>>	0.91	114.84
22		123.84	1.09	>> $\beta^+ \Leftarrow$	121.17	1.05	>>	1.03	119.96
23		122.33	1.1	<<100%	123.31	1.12	>>	1.08	121.41
24		122.51	1.13	<<	122.63	1.14	<< $\beta^- \Rightarrow$	1.16	124.06
25					123.42	1.19	<<	1.2	124.01

ГЛАВА 6. ОБОСНОВАНИЕ ЦИКЛОННОЙ МОДЕЛИ АТОМНЫХ ЯДЕР В СООТВЕТСТВИИ СО СТРУКТУРОЙ ПРОСТРАНСТВА НА МАЛЫХ ЛИНЕЙНЫХ РАССТОЯНИЯХ ДЕЙСТВИЯ ЯДЕРНЫХ СИЛ. РАСЧЕТ ВОЗБУЖДЕННОГО СОСТОЯНИЯ ЯДЕР. РАСЧЕТ РАДИОАКТИВНОГО ПРЕВРАЩЕНИЯ ЯДЕР.

							$\beta^- \Rightarrow$		
26					121.94	1.19	$\ll$ $\beta^- \Rightarrow$	1.26	125.22
	Mg_{12}^N			Al_{13}^N			Si_{14}^N		
24		124.06	1.16	$\gg$ $\beta^+ \Leftarrow$	118.83	1.07	$\gg$	1.00	114.76
25		124.01	1.2	$\gg$ $\beta^+ \Leftarrow$	122.17	1.16	$\gg$	1.08	117.78
26		125.22	1.26	$\gg$ $\beta^+ \Leftarrow$	122.84	1.21	$\gg$	1.18	121.6
27		124.29	1.27	$\ll 100\%$	124.59	1.28	$\gg$	1.24	122.81
28		124.59	1.32	$\gg$ $\beta^+ \Leftarrow$	124.24	1.31	$\gg$ $\beta^- \Rightarrow$	1.32	124.95
29					124.99	1.36	$\Leftarrow$ $\beta^- \Rightarrow$	1.36	125.06
30					124.01	1.38	$\ll$ $\beta^- \Rightarrow$	1.43	126.14
	Al_{13}^N			Si_{14}^N			P_{15}^N		
25		122.17	1.16	$\gg P$	117.78	1.08	$\gg$	0.95	110.53
26		122.84	1.21	$\gg$ $\beta^+ \Leftarrow$	121.6	1.18	$\gg$	1.05	114.37
27		124.59	1.28	$\gg$ $\beta^+ \Leftarrow$	122.81	1.24	$\gg$	1.16	118.84
28		124.24	1.31	$\ll 92.2\%$	124.95	1.32	$\gg$	1.23	120.68
29		124.99	1.36	$\Leftarrow 4.7\%$	125.06	1.36	$\gg$	1.33	123.33
30		124.01	1.38	$\ll 3.12\%$	126.14	1.43	$\gg$	1.38	123.96
31					125.56	1.45	$\Rightarrow$ $\beta^- \Rightarrow$	1.45	125.45
32				650let	125.93	1.5	$\gg$	1.48	125.31
	Si_{14}^N			P_{15}^N			S_{16}^N		
28		124.95	1.32	$\gg$ $\beta^+ \Leftarrow$	120.68	1.23	$\gg$	1.17	117.38
29		125.06	1.36	$\gg$ $\beta^+ \Leftarrow$	123.33	1.33	$\gg$	1.25	119.71

ГЛАВА 6. ОБОСНОВАНИЕ ЦИКЛОННОЙ МОДЕЛИ АТОМНЫХ ЯДЕР В СООТВЕТСТВИИ СО СТРУКТУРОЙ ПРОСТРАНСТВА НА МАЛЫХ ЛИНЕЙНЫХ РАССТОЯНИЯХ ДЕЙСТВИЯ ЯДЕРНЫХ СИЛ. РАСЧЕТ ВОЗБУЖДЕННОГО СОСТОЯНИЯ ЯДЕР. РАСЧЕТ РАДИОАКТИВНОГО ПРЕВРАЩЕНИЯ ЯДЕР.

30		126.14	1.43	$\gg$ $\beta^+ \Leftarrow$	123.96	1.38	$\gg$	1.35	122.72
31	$\beta^- \Rightarrow$	125.56	1.45	100%	125.45	1.45	$\gg$	1.41	123.76
32		125.93	1.5	$\gg$	125.31	1.48	$\ll$ $\beta^- \Rightarrow$	1.49	125.56
33					126.02	1.54	$\geq$	1.54	125.77
34					125.36	1.57	$\ll$ $\beta^- \Rightarrow$	1.6	126.75
	S_{16}^N			Cl_{17}^N			Ar_{18}^N		
32		125.56	1.49	$\gg$ $\beta^+ \Leftarrow$	121.94	1.41	$\gg$	1.34	119.12
33		125.77	1.54	$\gg$ $\beta^+ \Leftarrow$	124.12	1.5	$\gg$	1.42	121.01
34		126.75	1.6	$\gg \beta_+ \Leftarrow$	124.73	1.55	$\gg$	1.52	123.48
35	Const	126.4	1.63	75.53%	126.03	1.62	$\gg$	1.58	124.41
36	const	126.81	1.69	$\gg k$, $\beta^+ \Rightarrow$	126.02	1.66	$\geq$	1.66	125.97
37		126.07	1.71	$\ll$ const	126.7	1.72	$\gg$	1.71	126.24
38		126.06	1.75	$\leq$ i.p.	126.27	1.75	$\ll$ $\beta^- \Rightarrow$	1.78	127.14
39					126.5	1.8	$\ll$ $\beta^- \Rightarrow$	1.82	126.95
40					125.75	1.82	$\ll$ $\beta^- \Rightarrow$	1.87	127.38
	Cl_{17}^N			Ar_{18}^N			K_{19}^N		
33		124.12	1.5	$\gg$ $\beta^+ \Leftarrow$	121.01	1.42	$\gg$	1.31	116.33
34		124.73	1.55	$\gg$ $\beta^+ \Leftarrow$	123.48	1.52	$\gg$	1.4	118.66
35		126.03	1.62	$\gg$ $\beta^+ \Leftarrow$	124.41	1.58	$\gg$	1.51	121.5
36	$\beta^- \Rightarrow$	126.02	1.66		125.97	1.66	$\gg$	1.58	122.8

37		126.7	1.72	>>K	126.24	1.71	>>	1.67	124.66
38		126.27	1.75	<<0.06%	127.14	1.78	>>	1.73	125.24
39		126.5	1.8	<<269let	126.95	1.82	>>	1.8	126.4
40		125.75	1.82	<<99.6%	127.38	1.87	>>	1.85	126.49
41		125.66	1.86	<<	126.85	1.9	<< $\beta^- \Leftarrow$	1.91	127.14
42		124.69	1.88	<<33god	126.93	1.95	>>	1.94	126.86
	H_1^N			He_2^N			Li_3^N		
1									
2									
3		33.86	0.09		14.91	0.02			
4				100%	115.2	0.9			
5				Net	87.23	0.48			
6					92.22	0.51	>>	0.44	85.38
7								0.6	101.34
8					55.5	0.17	>>	0.43	87.4
9								0.44	88.91

Ввиду граничного эффекта сопоставление изотопов водорода , гелия и лития по расчетным коэффициентам не представляется возможным. Отсутствуют изотопы экспериментальные для сравнения.

Границы распада бериллия и его стабильных изотопов четко ограничены расчетными условиями и совпадают с экспериментальными данными.

Для бора также имеем полное совпадение с экспериментальными данными.

Первые два ряда формируют устойчивый блок из 2- циклонных ε -туннелей.

В связи с этим необходимо рассмотреть величину $\frac{m_V}{A}$ как ограниченную минимальным значением . Условия оцениваются в большинстве случаев в сторону возрастания количества нуклонов. Для стабильных изотопов условия выполняются полностью.

6.3. Краткие сведения из теории альфа распада.

К числу радиоактивных процессов относится α -распад. α -Распадом называется самопроизвольный (спонтанный) процесс испускания ядром (A, Z) ядра He_2^4 (α -частицы). При этом освобождаяемая энергия E_α идет на изменение кинетической энергии α -частицы и дочернего ядра $(A-4, Z-2)$. Энергия α -частицы заключена в пределах $4 \leq T_\alpha \leq 9 \text{ МэВ}$.

Среднее значение энергии 6МэВ. Особенности α -Распада экспериментально установлены и могут быть рассмотрены под углом зрения циклонной модели. Расчет радиоактивных превращений ядер путем β^- - электронного , β^+ - позитронного, К- захвата показал, что с ростом заряда ядра Z и

числа нейтронов в ядре происходит выравнивание коэффициентов $n_\epsilon, \frac{m_\nu}{A}$ в неравенствах, характеризующих эти распады. Это выравнивание обусловлено ростом массы интегрального обменного кванта до предельного значения с последующим его снижением. С одновременным процессом роста коэффициента n_ϵ и величины обменной массы на нуклон ϵ - туннели ядра (как структуры другого измерения) максимально заполнены обменной энергией, поэтому α -радиоактивностью обладают ядра с зарядом $Z \geq 82$. Смотри таблицу. Энергия T_∞ тем выше, чем выше заряд Z . Среди редкоземельных элементов существуют α -радиоактивные, например $Sm_{62}^{146}, Pt_{78}^{190}$.

Все это говорит о том, что α -радиоактивность связана со структурой ядер второй половины периодической таблицы и изотопов тех ядер, для которых коэффициент $n_\epsilon \geq 6.00$.

Точные методы измерения энергии α -частицы открыли тонкую структуру спектров. Было отмечено, что спектр испускаемых α -частиц имеет наибольшее количество линий для тех ядер, дочерние ядра которых обладают ярко выраженной несферичностью.

Ядра $Bi_{83}^{212}, Po_{84}^{212}, Po_{84}^{214}$ наряду с обычной группой частиц испускают длиннопробежные α -частицы.

Группы α -частиц	T_α МэВ	Содержание %	Группы α -частиц	T_α МэВ	Содержание %
α_0	6,086	27,2	α_3	5,622	0,15
α_1	6,047	69,9	α_4	5,603	1,1
α_2	5,765	1,7	α_5	5,481	0,016
α_6	8,78	100	α_8	10,422	0,002
α_7	9,492	0,0035	α_9	10,543	0,018
α_{10}	7,680	100	α_{17}	9,779	$1.1 \cdot 10^{-4}$
α_{11}	8,277	$4 \cdot 10^{-5}$	α_{18}	9,905	$4 \cdot 10^{-5}$ $4 \cdot 10^{-5}$
α_{12}	8,938	$4 \cdot 10^{-5}$	α_{19}	10,074	$1.7 \cdot 10^{-4}$
$\alpha_{13} \alpha_{13}$	9,065	$2.2 \cdot 10^{-3}$	α_{20}	10,146	$4 \cdot 10^{-5}$
α_{14}	9,313	$4 \cdot 10^{-5}$	α_{21}	10,326	$1.1 \cdot 10^{-4}$
α_{15}	9,489	$1.4 \cdot 10^{-4}$	α_{22}	10,526	$2 \cdot 10^{-5}$
α_{16}	9,657	$4 \cdot 10^{-5}$	α_{23}		

Тонкая структура α -частиц встречается часто. Несферическое ядро обладает наибольшей энергией возбуждения. Связано это с вращением ядра. Возбужденные состояния ядер характеризуются значениями энергии связи E , моментом количества движения L , четности P , изоспином T . α -Распад с близкими по значениям энергиям T_α происходит на возбужденные уровни несферических ядер.

Процесс распада сопровождается испусканием γ -квантов при переходе конечного ядра из возбужденное состояние в основное или менее возбужденное. Процесс испускания γ -кванта конкурирует с процессом α -распада, что значительно затрудняет обнаружение α -частиц малой кинетической энергии, порядка 2 МэВ. Длиннопробежные частицы большой кинетической энергии обнаружены при распаде ядер $Po_{84}^{212}, Po_{84}^{214}$. Конечным продуктом распада в обоих случаях является ядро $Pb_{82}^{208}, Pb_{82}^{210}$. Для этих ядер имеем высокую разность в энергиях связи между исходными ядрами и продуктами распада.

Энергетические исследования на основе формулы Вейцеккера показывают, что энергия распада становится положительной, начиная с ядер $Z > 73$. Причем чем выше заряд ядра Z , тем выше кинетическая энергия T_α, E_α .

$$-E_\alpha = \varepsilon_\alpha = \Delta W(A, Z) - \Delta W(A-4, Z-2) - \Delta W(4, 2).$$

В соответствии с этой формулой капельная модель объясняет α -распад тяжелых ядер с большим количеством нейтронов. Однако это результат завышен, так как наблюдаются ядра с α -распадом у редкоземельных элементов. В [] приведена кривая энергии E_α распада от числа нуклонов. Кривая имеет два ярко выраженных максимума при $A \approx 145, A \approx 212$. Первый максимум соответствует дочерним ядрам, содержащим 82 нейтрона, второй дочерним ядрам, содержащим 82 протона. В обоих случаях кинетическая энергия T_α максимальна. Заряд $Z=82$ практически отвечает нижней границе α -распада тяжелых ядер.

Теория α -распада связывает между собой кинетическую энергию частицы T_α , радиус ядра R , его заряд Z , количество нуклонов в ядре A , а также постоянную распада λ . Энергия связи α -частицы в исходном ядре должна быть отрицательна.

Если энергия α -частицы строго фиксирована 4-9 МэВ, то периоды полураспада изменяются в очень широком пределе от 10^{-7} сек, до $5 \cdot 10^{15}$ лет. Эта экспериментальная особенность установлена в виде закона Гейгера-Нетолла и объяснена теоретически с помощью механизма квантомеханического процесса прохождения микрочастиц через потенциальный кулоновский барьер.

В преодолении кулоновского барьера α -частицей при распаде теоретическая физика видит механизм α -распада. Если энергия ядра больше суммы энергий ядра-продукта и α -частицы, то распад энергетически возможен. Однако опыты Резерфорда установили, что энергия системы на границе ядра α -частицы при рассеивании выше энергии как ядра так и кинетической энергии последней. α -Частица с энергией 4-9 МэВ должна преодолеть кулоновский барьер высотой с энергией, превышающей ее собственную в 2, 3 раза.

Высота кулоновского барьера B может быть рассчитана по ряду формул.

Простейшей формулой является $B = \frac{Z \cdot z}{A^{\frac{1}{3}}}$. Для ядра урана U_{92}^{238} дает величину в 30

МэВ. Величина кулоновского барьера плохо определенный параметр из за неопределенности формы ядра. Теория утверждает, что прозрачность кулоновского барьера несферического ядра в различных местах разная и особенно велика у его концов. Отношение большой и малой полуосей эллипсоида, форму которого имеют

несферические ядра , достигает до величины 1,3. В таком случае кулоновский барьер может быть занижен в 1,3 раза . Однако и эта величина достаточно высока.

Для решения этого вопроса и был разработан так называемый механизм туннельного перехода или прохождения α -частицы через потенциальный барьер. Механизм туннельного перехода применяется в теоретической физике не только при обосновании α -распада. Основан он на волновой механике Шредингера и на решении его уравнения .

Это краткий обзор необходимых сведений для дальнейшего по теории и экспериментальным данным α -распада. Теория α -распада далека от своего завершения. В теории определяющим фактором распада является просачивание частицы через потенциальный барьер. Время распада интерпретируется как последовательные попытки α -частицы проникнуть через барьер.

Теоретическая физика не предложила процесс , происходящий в ядре до распада , и структурных изменений в нем при возбуждении . Величина возбуждения от внешнего воздействия не увязана со структурной перестройкой ядра , кроме изменения его формы.

6.4. Альфа распад. Схема расчета распада. Ошибочность теории кулоновского барьера. Структура пространства в малых линейных размерах.

Пространственно –временные координаты служат ареной на которой происходят физические явления.

Линейные координаты и время входят в уравнения или систему уравнений , которые описывают поля взаимодействий различной физической природы. Вывод и обоснование таких уравнений является задачей квантовой механики с целью извлечения из них практических экспериментальных предсказаний. Решением этих уравнений являются волны. Волновая механика Шредингера основана на волновом уравнении. Решением уравнений Шредингера являются волны де Бройля. Все это известные теоретические факты .

Волновая механика Шредингера и теория Гейзенберга имеют общую основу, которым является абстрактное векторное пространство. Абстрактное векторное комплексное пространство это объект , в котором структурирование пространства интерпретируется суперпозиций волновых функций. Фактически матричная механика Гейзенберга главное внимание уделила векторному аспекту теории , а волновое уравнение играет второстепенную роль.

В данной работе абстрактное векторное пространство как арена физических явлений заменена n -мерным комплексным пространством. n -Мерное комплексное пространство и его геометрия построено на законах алгебры вещественных чисел. Законы классической математики перенесены в n -мерное пространство чисел. В этом пространстве повышение размерности влечет за собой приобретение новых свойств классическими функциями и т.д. , смотри предыдущие главы.

В волновой механике Шредингера размерность пространства фактически не связана со структурой пространства. Главные квантовые числа введенные для

описания структуры не согласованы с размерностью пространства. Повышение размерности в решении качественно не дает ничего нового.

Перенос классической алгебры в n -мерное пространство фактически открыл КОД формирования структуры пространства, которую можно рассчитать до любых малых линейных размеров, вплоть до 10^{-100} см.

В трех последующих рисунках даны наглядные примеры формирования структуры с ростом размерности пространственного комплекса.

В предыдущих главах было установлено соответствие структуры задаваемой n -мерным комплексом структуре установленной в атомной и ядерной физике и периодической таблицей элементов. В данном случае идет речь о электронных оболочках атома, о формировании ядерной материи.

Пространство Миньковского является частным случаем n -мерного комплексного пространства.

Преобразования Лоренца явились основным фактом, который потребовал введения n -мерного комплексного пространства на базе законов классической алгебры. Теоретическая физика выбросила самое главное следствие из преобразований Лоренца и вместе с этим выбросила возможность эффективно исследовать структуру физического пространства. Это грубейшая ошибка теоретической физики явилась следствием отказа математики развивать идеи комплексного анализа О.Коши в пространство. Создание векторного и скалярного пространств, которые не отвечают алгебре вещественных чисел являлось также грубейшей ошибкой.

Исследования на базе абстрактного векторного комплексного пространства не могут дать желаемых результатов по созданию единой теории поля взаимодействий и обречены на неуспех.

В результате исследований в предыдущих главах и обоснования циклонной модели ядер на базе структуризации пространства на малых линейных расстояниях, ядра тяжелых элементов формируются из двух блоков. Этот результат подтвержден различными исследованиями и неоднократно подчеркивался.

Один блок - это ядро изотопа с шестью энергетическими туннелями с коэффициентом равным $n_e \geq 6.00$. Это ядра изотопов $Sn_{50} - Xe_{54} - Ge_{58}$, которые имеют коэффициент $n_e \approx 5.33 - 6.74$. Второй блок ядро из первой половины таблицы элементов с $n_e < 6.00$.

Эту схему образования тяжелых ядер будем называть модой структуризации или коротко, просто модой.

Возбужденное состояние ядра (A, Z) определяется модой структуризации. Перебор мод фактически дает тот инструмент, который дает возможность оценить процессы, происходящие в ядре. Процессы происходят в поле ядерных сил и это фактически первая попытка проникнуть в процессы в столь малых линейных расстояниях.

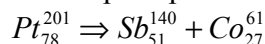
Для большей ясности схема расчета будет продемонстрирована на конкретном примере. Рассматриваем моду состояния

$$(Z, A) \Rightarrow (Z1, A1) + (Z2, A2)$$

Знак плюс здесь условный. Для моды имеем естественное равенство основных параметров:

$$Z = Z1 + Z2, A = A1 + A2.$$

Конкретный пример взят первой строчкой таблицы



Ядро изотопа платины Pt_{78}^{201} имеет $n_e = 8.33$. Первый блок в виде ядра Sb_{51}^{140} имеет $n_e = 6.00$, второй блок в виде ядра кобальта Co_{27}^{61} имеет $n_e = 2.85$. Сумма коэффициентов превышает коэффициент ядра платины, так как коэффициенты рассчитаны для основных состояний, а заданная для исследования мода дает возбужденное состояние ядра.

Исходное ядро (A, Z) характеризуется массой M , энергией связи E_0 , интегральным обменным квантом m_V . Обозначим $m_V(Pt_{78}^{201}), M(Pt_{78}^{201}), E_0(Pt_{78}^{201})$. Массы и энергии ядер блоков обозначим $M1(Sb_{51}^{140}), E_01(Sb_{51}^{140}), M2(Co_{27}^{61}), E_02(Co_{27}^{61})$. Мода может быть задана такой, что разность между энергией исходного ядра E_0 и суммой энергий блоков $E_01 + E_02$ может быть положительной, отрицательной и равной нулю.

Если энергия возбуждения $EB = E_01 + E_02 - E_0 < 0$ то фактически мода существовать не может.

Состояние ядер блоков в составе исходного ядра определяются параметрами $m_V1(Sb_{51}^{140}), E1(Sb_{51}^{140}), m_V2(Co_{27}^{61}), E2(Co_{27}^{61})$. Произведем вычисления этих параметров

$$m_V1 = \frac{m_V}{M} * M1, m_V2 = \frac{m_V}{M} * M2.$$

Обменный квант исходного ядра перераспределится пропорционально массам. Естественно, что

$$m_V = m_V1 + m_V2.$$

Обменные массы ядер блоков в исходном состоянии отличаются от вычисленных и могут быть равными им, меньше и больше. Это и есть мера возбуждения блоков. Вычислим энергию связи ядер блоков в ядре (A, Z) .

$$E1(Sb_{51}^{140}) = M1(Sb_{51}^{140}) - \sqrt{M1^2(Sb_{51}^{140}) - m_V1^2(Sb_{51}^{140})}$$

$$E2(Co_{27}^{61}) = M2(Co_{27}^{61}) - \sqrt{M2^2(Co_{27}^{61}) - m_V2^2(Co_{27}^{61})}$$

Сумма энергий $E1 + E2 = E$. Энергия исходного ядра равна сумме энергий ядер блоков. Каждый из блоков находится в возбужденном состоянии относительно основных ядер, соответственно с теми же параметрами $(Z1, A1), (Z2, A2)$. В связи с этим возбужденное состояние исходного ядра определяется суммой энергий возбуждения каждого из блоков, когда образовалась конкретная мода

$$EB = (E_01 - E1) + (E_02 - E2)$$

Или $EB = E_01 + E_02 - E$. Если $EB \geq 0$, то оценим β^- -электронный и α -распады.

Возбуждение блоков реализуется через радиоактивные распады.

Оценим возможность β^- -электронного распада ядра первого блока. В рассматриваемом примере это ядро Sb_{51}^{140} .

$$Sb_{51}^{140} \Rightarrow Te_{52}^{140} + \beta^-$$

Ядро Te_{52}^{140} и электрон β^- имеют массу и энергии связи в основном состоянии соответственно равными $M3(Te_{52}^{140})$, $E_03, M(\beta^-) = 0.511M_{\text{эв}}$, $E(\beta^-) = 0$. Внутренняя энергия связи электрона принимается равной нулю.

Обменный квант ядра Te_{52}^{140} в ядре ядра Sb_{51}^{140} корректируем по обменному кванту $m_{\nu}1(Sb_{51}^{140})$.

$$m_{\nu}3(Te_{52}^{140}) = \frac{m_{\nu}1}{M1} * M3,$$

$$m_{\nu}(\beta^-) = \frac{m_{\nu}1}{M1} * 0.511$$

Соответственно энергии связи вычисляются по формулам

$$E3(Te_{52}^{140}) = M3(Te_{52}^{140}) - \sqrt{M3^2(Te_{52}^{140}) - m_{\nu}3^2(Te_{52}^{140})}$$

$$E(\beta^-) = 0.511 - \sqrt{0.511^2 - m_{\nu}(\beta^-)^2}$$

Энергия возбуждения для β^- -распада ядра первого блока равна $E_{\beta}1 = E3 - E1 - E(\beta^-)$.

Оценим потенциальную энергию α -Распада ядра первого блока.

$$\text{Схема распада } Sb_{51}^{140} \Rightarrow In_{49}^{136} + \alpha_2^4$$

Обменный квант ядра индия In_{49}^{136} с массой $M4(In_{49}^{136})$ в ядре Sb_{51}^{140} вычисляем по предыдущей формуле

$$m_{\nu}4(In_{49}^{136}) = \frac{m_{\nu}1}{M1} * M4$$

Энергия связи ядра Индия в блоке ядра Sb_{51}^{140} равна

$$E4(In_{49}^{136}) = M4 - \sqrt{M4^2 - m_{\nu}4^2}.$$

Состояние α -частицы в блоке Sb_{51}^{140} оценивается внутренним обменным квантом

$$m_{\nu}(\alpha) = \frac{m_{\nu}1}{M1} * M(\alpha),$$

$$\text{энергией связи } E_{\alpha} = M(\alpha) - \sqrt{M(\alpha)^2 - m_{\nu}(\alpha)^2}$$

энергия сжатия или расширения α -частицы определится как разность энергии связи основного состояния и энергии связи внутри блока

$$gg\alpha = -E_{\alpha} + E_{\alpha(0)}, \text{ где } E_{\alpha(0)} - \text{энергия связи свободной } \alpha - \text{частицы}.$$

В результате потенциально необходимая энергия для реализации α -распада вычисляется по формуле $E_{\alpha}1 = E_04(In_{49}^{136}) + E_{\alpha(0)} + gg\alpha - E1(Sb_{51}^{140})$, где за $E_04(In_{49}^{136})$ обозначена энергия основного свободного состояния ядра индия.

Аналогичные вычисления проведем для второго блока, представленного ядром кобальта.

β^- – Электронный распад кобальта происходит по схеме $Co_{27}^{61} \Rightarrow Ni_{28}^{61} + \beta^-$

Последовательно вычисляем обменные кванты ядра никеля и его энергию связи в ядре кобальта, а также обменный квант электрона и его энергию .

$$m_{\nu} 5(Ni_{28}^{61}) = \frac{m_{\nu} 2}{M 2} * M 5(Ni_{28}^{61})$$

$$E 5(Ni_{28}^{61}) = M 5(Ni_{28}^{61}) - \sqrt{M 5^2 - m_{\nu} 5^2}, \text{ где } M 5, M 5(Ni_{28}^{61}) \text{ массы ядра никеля.}$$

Интегральный обменный квант в блоке 2 для всех исследуемых продуктов потенциального распада постоянен и равен этой же величине первого блока, поэтому вычисления обменного кванта электрона во втором блоке можно не производить , так же как величину $gg\beta^-$ -сжатия электрона во втором блоке. Величина $gg\beta^-$ определяет кинетическую энергию электрона , который образовался внутри блока перед его распадом. Энергия необходимая для реализации электронного распада вычисляется по формуле

$$Ee2 = E 5 + gg\beta^- - E 2.$$

α – Рспад блока должен происходить по схеме $Co_{27}^{61} \Rightarrow Mn_{25}^{57} + \alpha_2^4$.

Вычисляем обменный квант ядра Mn_{25}^{57} .и его энергию связи когда оно находится во втором блоке

$$m_{\nu} 6(Mn_{25}^{57}) = \frac{m_{\nu} 2}{M 2} * M 6(Mn_{25}^{57})$$

$$E 6(Mn_{25}^{57}) = M 6 - \sqrt{M 6^2 - m_{\nu} 6^2}, \text{ где } M 6, M 6(Mn_{25}^{57}) \text{ обозначение массы ядра марганца.}$$

Величина сжатия α -частицы или кинетическая энергия ее при образовании во втором блоке равна этой же величине первого блока , как следствия постоянной величины обменного кванта на массу фрагментов потенциального распада. Поэтому $gg\alpha 1 = gg\alpha 2$. Энергия необходимая для реализации альфа распада равна

$$E_{\alpha} 2 = E_0 6 + E_{\alpha(0)} + gg\alpha - E 2, \text{ где первый член определяет энергию}$$

основного состояния ядра марганца.

Электронный или альфа распады любого из блоков дают новую моду для конечного продукта распада исходного ядра. При электронном распаде ядро платины переходит в ядро золота. Схема распада: $Pt_{78}^{201} \Rightarrow Au_{79}^{201} + \beta^-$. Так как , мода исходного ядра состоит из двух блоков энергия ядра золота будет определяться суммой энергий , составляющих после распада блоков

$$E(Au_{79}^{201}) = E 3(Te_{52}^{140}) + E 2(Co_{27}^{61}). \text{ при электронном распаде через первый блок.}$$

$$E(Au_{79}^{201}) = E 1(Sb_{51}^{140}) + E 3(Ni_{28}^{61}). \text{ при электронном распаде второго блока.}$$

Проверкой проведенного расчета служит равенство , вычисленных величин по этим двум формулам. Сумма в правой части определяет моду структуризации для нового ядра ,которое также может находиться в возбужденном состоянии.

Альфа распад ядра платины происходит по схеме $Pt_{78}^{201} \Rightarrow Os_{76}^{197} + He_2^4$.

Детализация этой схемы , как и в предыдущем случае, дает два варианта образования ядра осмия в ядре платины перед моментом альфа распада.

$$E(Os_{76}^{197}) = E1(Sb_{51}^{140}) + E6(Mn_{25}^{57}). \text{ при альфа распаде второго блока.}$$

$$E(Os_{76}^{197}) = E4(In_{49}^{136}) + E2(Co_{27}^{61}). \text{ при альфа распаде первого блока.}$$

Энергия ядра золота определяется модой структуризации из двух новых блоков отличается от энергии основного состояния ,этого ядра , так , что разность между этими энергиями с учетом кинетической энергии электрона в одном из блоков определяет энергию электронного распада.

Энергия ядра осмия в основном состоянии за вычетом энергии ядра осмия , состоящего из двух блоков в ядре платины с учетом энергии альфа частицы в одном из блоков определит энергию альфа распада. Это конечный энергетический баланс соответствует реакциям электронного и альфа распадам ядра , который исследуется в теории радиоактивных распадов без учета мод структуризации . В кратком изложении теории радиоактивных распадов эти процессы были объяснены несферичностью формы ядер , которая вызывает нахождение их в возбужденном состоянии , а также механизмом туннельного проникновения альфа частицы через потенциальный кулоновский барьер.

Кулоновский барьер вычислим для каждого блока структуры по формулам:

$$B_q 1 = \frac{(z1 - 2) * z_{\alpha}}{A1^{\frac{1}{3}}}. \text{ -для первого блока,}$$

$$B_q 2 = \frac{(Z2 - 2) * Z_{\alpha}}{A2^{\frac{1}{3}}} \text{ -для второго блока,}$$

$$B_q 3 = \frac{(Z - 2) * Z_{\alpha}}{A^{\frac{1}{3}}} \text{ - для исходного ядра сферической формы.}$$

Если учитывать введенную структуру моды , то следует кулоновский барьер вычислять по формуле

$$B_q 4 = \frac{(Z - 2) * Z_{\alpha}}{k * (A1^{\frac{1}{3}} + A2^{\frac{1}{3}})}$$

Введение коэффициента $K > 1$ приводит к снижению рассчитываемой величины .В первых трех формулах $k = 1$. Формула $B_q 4$. более адекватно отвечает структуре ядра и проводимым расчетам. Мода ядра задает эллипсоидальную форму ядра . Как установлено в экспериментах отношение осей при этой форме может достигать 1,3 . Это величина достаточно большая для того , чтобы одна из величин кулоновского барьера (одного из блоков) стала меньше кулоновского барьера исходного ядра . Формула $B_q 4$. , в которой радиус принят равным

$R = (1.1 - 1.45) * (A1^{\frac{1}{3}} + A2^{\frac{1}{3}}) * 10^{-13} \text{ cm}$ дает значения ниже значений по формуле $B_q 3$. Поэтому, в исследованиях оценку проводим по этим двум формулам.

Мода и рассмотренные варианты распада дают несколько комбинаций для их оценок .

Альфа распад исходного ядра обусловлен возбуждение блоков моды за счет потенциального альфа распада каждого из них . В этом случае имеем энергию возбуждения для альфа распада и преодоления трех вариантов кулоновского барьера. Два первых из которых определяют альфа распад одного из блоков при $E_{\alpha\alpha} 1 < 0, E_{\alpha\alpha} 2 < 0$ и как следствие перестройки моды .Третий $E_{\alpha\alpha} < 0$ определяет распад исходного ядра. Имеем

$$E_{\alpha\alpha} 1 = E1(Te_{51}^{140}) + E2(Co_{27}^{61}) - E_0 4(In_{49}^{136}) - E_0 6(Mn_{25}^{57}) - 2 * E_{\alpha(0)} + B_q 1.$$

$$E_{\alpha\alpha} 2 = E1(Te_{51}^{140}) + E2(Co_{27}^{61}) - E_0 4(In_{49}^{136}) - E_0 6(Mn_{25}^{57}) - 2 * E_{\alpha(0)} + B_q 2$$

$$E_{\alpha\alpha} 3 = E1(Te_{51}^{140}) + E2(Co_{27}^{61}) - E_0 4(In_{49}^{136}) - E_0 6(Mn_{25}^{57}) - 2 * E_{\alpha(0)} + B_q 3$$

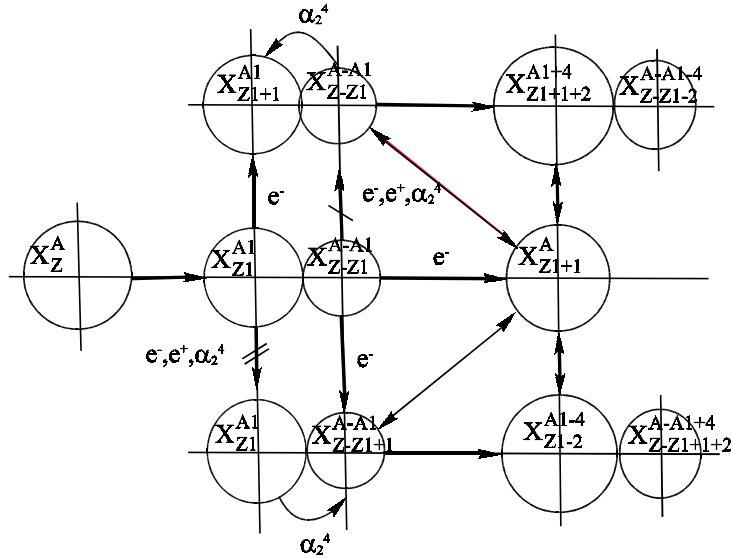


Рис 61. Схема электронного распада ядра.

Можно рассчитать величину $E_{\alpha\alpha} 4$ для кулоновского барьера в интервале

$B_q 1, B_q 2 < B_q 4 < B_q 3$. Правая часть неравенства определит вероятность распада исходного ядра, левая часть перестройку моды за счет перехода ядра гелия из одного блока в другой.

Далее рассмотрим комбинацию возбуждения первого блока за счет электронного распада , а второго за счет альфа распада. Здесь также возможно иметь четыре варианта:

$$E_{\beta-\alpha} 1 = E1(Sb_{51}^{140}) + E2(Co_{27}^{61}) - E_0 3(Te_{52}^{140}) - E_0 6(Mn_{25}^{57}) + gg\beta^- - E_{\alpha(0)} + B_q 1.$$

$$E_{\beta-\alpha} 2 = E1(Sb_{51}^{140}) + E2(Co_{27}^{61}) - E_0 3(Te_{52}^{140}) - E_0 6(Mn_{25}^{57}) + gg\beta^- - E_{\alpha(0)} + B_q 2.$$

$$E_{\beta-\alpha} 3 = E1(Sb_{51}^{140}) + E2(Co_{27}^{61}) - E_0 3(Te_{52}^{140}) - E_0 6(Mn_{25}^{57}) + gg\beta^- - E_{\alpha(0)} + B_q 3$$

$$E_{\beta-\alpha} 4 = E1(Sb_{51}^{140}) + E2(Co_{27}^{61}) - E_0 3(Te_{52}^{140}) - E_0 6(Mn_{25}^{57}) + gg\beta^- - E_{\alpha(0)} + B_q 4$$

Наибольшая вероятность выброса альфа частицы определяется условием $E_{\beta-\alpha} 3 < 0, E_{\beta-\alpha} 4 < 0$, для которых величина кулоновского барьера выше величин кулоновских барьеров ядер блоков. Условие $E_{\beta-\alpha} 1 < 0, E_{\beta-\alpha} 2 < 0$ определяет

возможность перестройки моды и переход в новое возбужденное состояние. Если первый блок находится в возбужденном состоянии от возможного процесса электронного распада, а второй альфа распада, то также возможно произвести оценку по четырем возможным каналам распада. Однако нас интересует распад исходного ядра, поэтому приводим для рассмотрения одну формулу

$$E_{\alpha\beta-3} = E1(Sb_{51}^{140}) + E2(Co_{27}^{61}) - E_0 5(Ni_{28}^{61}) - E_0 4(In_{49}^{136}) + gg\beta^- - E_{\alpha(0)} + B_q 3$$

Исследование распада по этой схеме не отличаются от рассмотренных предыдущих вариантов.

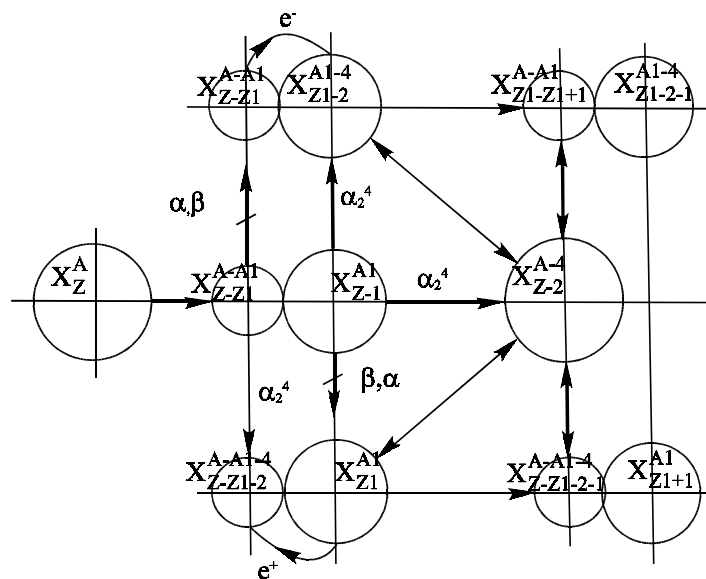


Рис 62. Схема α -распада

Рассмотрим последний возможный путь возбуждения моды. Оба блока склонны к электронному распаду.

$$E_{\beta-\beta^-} = E1(Sb_{51}^{140}) + E2(Co_{27}^{61}) - E_0 3(Te_{52}^{140}) - E_0 5(Ni_{28}^{61}) + 2 * gg\beta^-$$

Если величина $E_{\beta-\beta^-} < 0$ то происходит электронный распад исходного ядра. К этой оценке целесообразно подключить критерии электронного распада ядер, которые были получены в предыдущих исследованиях (критерии $n_e, \frac{m_V}{A}$).

Основным фактором радиоактивного распада является мода структуризации ядра, которая задает его возбужденное состояние. Оценка величины возбуждения производилась по экспериментальным формулам открытых резонансов (эти формулы приведены в расчетных таблицах). Выбор моды возбуждения выше заданных по этим формулам можно считать нецелесообразным. Таким образом, предлагается расчетный механизм радиоактивных распадов ядер, который детализирует процессы протекающие в ядре. Структура ядра из двух блоков позволяет рассмотреть различные каналы изменения энергии исходного ядра, связанные с его перестройкой внутренней структуры, а также возможностью осуществления радиоактивных распадов. Возможно исследовать процессы:

А) электронный распад одного блока и К-захват другого, как внутренний процесс перестройки

Исходного ядра,

Б) переход нейтрона из одного блока в другой, также внутренний процесс связанный со структурой,

С) переброска протона из блока в блок с преодолением кулоновского барьера,

Д) альфа распад одного блока с захватом альфа частицы другим блоком, также связано с исследованием влияния на процесс кулоновского барьера,

Е) электронный и альфа распадные процессы одного из блоков с распадом основного исходного ядра.

Все процессы могут приводить к новой моде структуризации и новому возбужденному состоянию исходного ядра или его продукта распада.

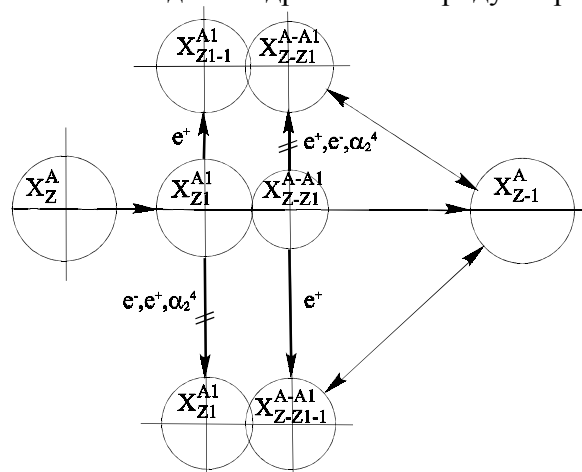


Рис. 63. Схема позитронного распада ядра.

6.5. Обобщение результатов альфа распада. Расчет радиоактивных рядов.

Мода характеризуется образованием в исходном материнском ядре двух блоков из ядер первой половины элементов и их изотопов периодической таблицы. Мода задает уровень возбуждения материнского ядра.

Материнское исходное ядро распределяет энергию обменного кванта по ядрам двух блоков, так что эти ядра переходят в возбужденное состояние относительно своих исходных состояний. Исходные состояния каждого ядра имеют свои уровни энергии обменных квантов. Сумма энергии обменных квантов равна энергии обменного кванта материнского ядра. Обменный квант это термин, под которым надо понимать полевую составляющую каждого ядра.

Энергия возбуждения материнского ядра для конкретной моды распада определяется разностью между суммой энергий ядер в составе материнского ядра и их суммой в исходном состоянии. Так что, каждая мода характеризуется своим уровнем возбуждения. Расчет показал, что каждое конкретное ядро имеет интервал энергий возбуждения от своего минимального состояния, при котором происходят внутренние процессы перестройки моды и ядро является устойчивым, до энергий, которые вызывают электронный или позитронный распад ядра или альфа распад. Далее может возбуждение достигнуть уровня, при котором происходят

одновременно все распады. Ядра блоки в материнском ядре имеют потенциальную возможность к тому или иному виду распада. Комбинация этих потенциальных возможностей определяет канал распада. Рассчитывались следующие возможные комбинации : Альфа –распад одного из блоков совместно с позитронным или электронным распадом другого блока, позитронный распад одного из блоков совместно с электронным распадом другого блока, позитронный или электронный распад обоих блоков, альфа –распад двух блоков. Всего 7-мь каналов распада. К-захват оценивался как позитронный распад. Распады контролировались энергетическими соотношениями (глава 6.1). Кроме того, учитывались три кулоновских барьера; первые два определялись для альфа частицы и каждого из блоков, третий определялся для всего материнского ядра. Альфа –распад для первых двух кулоновских барьеров рассматривался как внутренний, вызывающий перестройку моды. Этот канал считаем не вызывает выход альфа частицы из материнского ядра. Это специально принятые жесткие ограничения в расчете. Это жесткое ограничение можно естественно поставить под сомнение, ввиду того что экспериментально установлено изменение кулоновского барьера по поверхности несимметричного эллипсоидальной формы ядра и как следствие возможного альфа распада. Однако ввиду отсутствия конкретных формул для расчеты по распределению кулоновского барьера вдоль поверхности ядра и отсутствия экспериментальных данных оценка альфа распада проводилась по жесткому варианту, преодоления альфа частицей кулоновского барьера материнского ядра. Сформулируем выводы по результатам расчета :

1. Результаты расчетов согласуются с экспериментальными данными таблицы изотопов 37.1 [20].
2. α -распад ядра изотопа происходит в большинстве случаев по каналам из комбинации $\alpha + \beta^-$ -распады, или $\alpha + \beta^+$ -распады.
3. Канал $\alpha + \alpha$ реализуется очень редко.
4. Если один из каналов альфа распада не давал результата, проводился контрольный расчет по другому каналу распада.
5. При низких энергиях возбуждения проходят процессы электронного и позитронного распадов. При переходе оценки электронного распада к позитронному возможно открытие канала с альфа распадом.

Рассмотрим конкретные результаты расчетов.

Ядро платины Pt_{78}^{183} при энергии возбуждения моды 11,27Мэв реализуется β^+ -распад и возможен α -распад.

При энергии возбуждения моды 0,4Мэв для ядра платины Pt_{78}^{178} реализуется только β^+ -распад.

При энергии возбуждения 17,911Мэв для этого ядра реализуется как β^+ так и α -распады.

При энергии возбуждения 2,79Мэв для ядра Pt_{78}^{174} реализуется β^+ -распад. Канала β^- -электронного распада закрыты даже при энергии возбуждения в 23,53Мэв.

На этом примере видно, что мода существенным образом влияет на уровень возбуждения материнского ядра, а характер радиоактивного распада зависит от комбинаций потенциальных возможностей к возбуждению ядер блоков.

Для ядра Tl_{81}^{210} реализуется канал β^- -электронного распада, β^+ -распад закрыт. При увеличении возбуждения, вызванного перестройкой моды, с энергии 7,201Мэв до 21,314Мэв, возможен α -распад.

Для ядра Tl_{81}^{210} для мод распада, вызывающих возбуждение с уровнями энергии 3,928Мэв, 4,369 Мэв, 6,325Мэв, 11,674Мэв распад не происходит. При энергии 12,59Мэв происходит β^+ -распад или К-захват. При энергиях 15,297 Мэв, 17,8677Мэв происходит α -распад. Таким образом, минимальная величина возбуждения, при которой происходит β^+ -распад равна 12,59Мэв. Однако при энергиях меньших этой величины может произойти α -распад. Для энергии 11,674Мэв происходит α -распад, β^-, β^+ -распады закрыты. При энергии 20,267Мэв происходит как α -распад, так и β^+ -распад.

Ядро изотопа свинца Pb_{82}^{194} при энергии возбуждения 10,756Мэв реализует β^+ -распад. В ядре изотопа Pb_{82}^{201} при энергиях возбуждения 7,28 Мэв, 8,343Мэв происходит β^+ -распад. Если мода дает возбуждение 20,67Мэв и выше происходит α -распад. В ядре изотопа свинца Pb_{82}^{214} при энергии возбуждения 10,756Мэв происходит β^+ -распад.

В ядре изотопа висмута Bi_{83}^{198} при энергии возбуждения моды 1,496Мэв происходит β^+ -распад. Увеличение энергии возбуждения до 15,02Мэв происходит как β^+ -распад, так и α -распад.

Для ядра Bi_{83}^{201} расчет дает аналогичную картину: энергия 4,08Мэв обеспечивает β^+ -распад, при энергии 18,15 Мэв добавляется α -распад.

Ядра изотопов $Pt_{78}, Tl_{81}, Pb_{82}, Bi_{83}$ при энергии возбуждения 17-21 Мэв реализуют α -распад. В дальнейшем эта величина будет уточняться.

Ядра изотопов полония.

Для ядра изотопа полония Po_{84}^{214} расчет показывает отсутствие процессов радиоактивного позитронного β^+ , и электронного распада одновременно. Каналы распада для энергий возбуждения ядра за счет структуры моды в 7,071Мэв и 16,224Мэв открыты только для α -распада. Видно, что энергия при которой происходит альфа распад резко упала по сравнению с предыдущими величинами энергий для ядер изотопов свинца, таллия, платины, висмута.

Для ядра изотопа Po_{84}^{218} рассчитаны энергии возбуждения 3,329Мэв, 3,349Мэв, 14,697Мэв, 22,032Мэв при которых происходит β^- -электронный распад и возможен α -распад. α -Распад не фиксирован таблицей 37,1 видимо ввиду малости энергии альфа частицы $T_\alpha = 2.434$ Мэв.

Ядро изотопа At_{85}^{218} имеет величину возбуждения 18,731 Мэв при моде $At_{85}^{218} \Rightarrow \left[\frac{50}{149} + \frac{35}{69} \right]$ и реализуется как β^- -распад, так и α -распад. При энергии возбуждения в 10,99 Мэв для моды $At_{85}^{218} \Rightarrow \left[\frac{51}{152} + \frac{34}{66} \right]$ процессы распада не происходят. При энергии возбуждения в 4,316 Мэв для моды $At_{85}^{218} \Rightarrow \left[\frac{50}{150} + \frac{35}{68} \right]$ проходит β^- -распад. Возбуждения сильно зависят от моды: при изменении зарядов блоков или нейтронного состава на одну единицу приводит к резкому изменению величины энергии возбуждения.

Эти выводы согласуются с экспериментальными данными по дискретному характеру α -Распада.

Для ядра изотопа Rn_{86}^{218} рассчитаны три величины энергии возбуждения :6.567 Мэв имеем α -распад,
11,47 Мэв ядро устойчиво,
20,131 Мэв имеем α -распад.

Для ядра изотопа Rn_{86}^{216} с модой распада $Rn_{86}^{216} \Rightarrow \left[\frac{51}{150} + \frac{35}{66} \right]$, которая дает энергию возбуждения в 0,562 Мэв ядро устойчиво. При изменении нейтронного состава блоков всего на одну единицу $Rn_{86}^{216} \Rightarrow \left[\frac{51}{149} + \frac{35}{67} \right]$ энергия возбуждения резко меняется до 16,073 Мэв. В этом случае как показали расчеты срабатывают сразу три комбинации каналов распада, которые приводят к β^+ и α - распаду ядра.

Для ядра изотопа Pa_{91}^{237} определены моды со следующими энергиями возбуждения и результатами распада:

- 7.555 Мэв проходит β^- -распад,
- 7,555 Мэв ядро устойчиво относительно β^+ -распада,
- 9,827 Мэв проходит β^- -распад,
- 9,835 Мэв проходит β^- -распад,
- 16,507 Мэв проходит β^- -распад,
- 21,227 Мэв проходит β^- и α -распад.

Ядро урана U_{92}^{238} устойчиво относительно электронного и позитронного распада при энергиях возбуждения 10,367 Мэв, 10,439 Мэв. При энергиях 22,66 Мэв, 26,426 Мэв, происходит α -Распад. Чередование устойчивого состояния ядра с его α -Распадом соответствует экспериментальным данным таблицы 37,1[20].

Необходимо подчеркнуть еще раз, что расчеты радиоактивного распада представленные выше, а также те которые не вошли в обзор из расчетной таблицы за редким исключением не соответствовали экспериментальной таблице 37,1[20].

Сведем в таблицу условия, при которых происходит α -Распад.

Ядро изотопа	ЕВ в МэВ	ВкулЗ в МэВ	Т а-частицы в МэВ
Pt_{78}^{174}	23,53	27,23	5,71
Tl_{81}^{210}	13,35	26,586	5,53
	21,314	26,586	5,53
Tl_{81}^{201}	17,867		3.55
	11,674		3.55
	4.369		3.55
	20.267		3.55
	15.297		3.55
Bi_{83}^{201}	16.216	28.343	6.956
	18.15	27.66	4.99
Bi_{83}^{198}	15.02		5.52
Po_{84}^{214}	7.071	27.42	3.26
	16.224	27.42	3.26
At_{85}^{218}	18.731	27.587	3.215
Rn_{86}^{218}	6.567	27.919	3.955
Rn_{81}^{216}	16.073	28.005	4.331
Fr_{87}^{204}	8	28.88	7.093
Pa_{91}^{237}	21.227	28.77	4.003
	16.507		
Pu_{94}^{238}	21.054	29.696	5.938
U_{92}^{238}	22.66	29.05	5.8
	26.426		

Энергии кулоновских барьеров в 6-7 раз превышают кинетическую энергию α -частицы. Однако распад происходит ввиду превышения кулоновского барьера по одному из каналов распада как комбинации потенциальной энергии альфа распада одного из блоков моды совместно с потенциальной энергией электронного или позитронного распада другого блока моды.

Идея просачивания α -частицы через потенциальный кулоновский барьер не имеет места.

α -Распад обусловлен чисто силовым воздействием.

Основными положениями механизма α -Распада в ядерной физике являются следующие: α -распад становится возможным, когда энергия исходного ядра больше суммы энергий ядра продукта и α -частицы; мгновенному процессу распада препятствует кулоновский барьер ядра.

Преодоление альфа –частицей с кинетической энергией в 4 МэВ кулоновского барьера высотой $E > 8.8$ МэВ запрещено в классической физике.

Поэтому исследователи объяснили α -распад наличием туннельного перехода, который является чисто квантовым процессом. Решение уравнения Шредингера для определенного феноменологического потенциала дает вариант

просачивания α -частицы как волны де Бройля сквозь барьер. Из формул рассчитывается период полураспада ядер.

Необходимо отметить, что все ядерные модели ядра, разработанные теоретиками, при таком механизме распада логически остались в стороне. Нет связи между ядерной моделью и механизмом радиоактивного распада. Оценка распада происходит по энергии связи исходного ядра и продуктов распада.

Циклонная модель ядра отвергает просачивание α -частицы через кулоновский барьер.

Модель построена исходя из структурирования пространства в малых линейных размерах с образованием для тяжелых ядер блоков с определенным количеством циклонных ε -туннелей (или мезонных полевых зарядов). Такая модель позволяет рассчитать энергию возбуждения ядра в зависимости от его структуры-моды. Система из двух блоков как квантовая система непрерывно перестраивается изменяя количество протонов и нейтронов в каждом блоке. При этом непрерывно перераспределяется по блокам полевая характеристика исходного материнского ядра, называемая обменным квантом, и задает уровень возбуждения каждого ядра блока относительно его исходного состояния потенциально свободных от системы материнского ядра. Эта система для краткости изложения названа модой распада или модой возбуждения.

Расчет показал, что для каждого ядра периодической таблицы элементов и их изотопов возникают свои уровни возбуждения моды, которые могут реализоваться через каналы β^+ , β^- и α -распад. При этом установлено, что изменение структуры моды при переходе заряда или нейтрона из одного блока в другой вызывает резкое изменение уровня возбуждения ядра.

Доказано расчетом, что система из A –взаимодействующих частиц, конкретно Z -протонов и N -нейтронов подчиняется законам структурирования пространства.

Законы структурирования пространства отвечают алгебре с классическими законами операций.

В свою очередь пространство, построенное на базе алгебры с классическими законами операций соответствует преобразованиям Лоренца.

Преобразования Лоренца рассмотрены с иных позиций, чем это делает теоретическая физика. Интервал рассматривается как оператор для оценки энергетического состояния структуры материи. Пространственные дифференциалы заменены на массы частиц структуры, временной дифференциал заменен массой полевого кванта (обменного кванта). В результате имеем следующую формулу

$$m_{\Sigma_n} = \sqrt{\sum_1^A m_n^2 - (A * m_v)^2}$$

Энергия связи A -частиц тогда выражается в виде

$$\Delta E = \sum_1^A m_n - m_{\Sigma_n}$$

Расчет по этим формулам не на словах а результатами показали единство пространства и материи. Однако коэффициент перехода структуры пространства – времени в материю остается до настоящего времени неизвестным.

Энергия частиц, энергия взаимодействия частиц, квантованность энергий адекватно отражает структуру пространства. Расчет показал, что каждый уровень структуры имеет свой интервал изменения величины энергии. Перестройка структуры вызывается отклонением от этого интервала. Эти положения согласуются со структурой ядер и электронных оболочек ядер периодической системы элементов. Образование элементов –лантаноидов вызвано формированием новой структуры. Мезонные заряды первой половины периодической таблицы сформировали предельно насыщенный мезонным полем блок. Поэтому тяжелые ядра состоят из двух блоков. Тяжелые ядра представляют систему из двух блоков, с непрерывно изменяющимся соотношением нейтронов и протонов. Причем изменение на единицу в заряде или в количестве нейтронов вызывает резко изменение возбужденного состояния ядер. Радиоактивные распады могут происходить как внутри моды так и вызывать распад ядра. Причем энергия возбужденного состояния дочернего ядра может в начальный момент оказаться выше энергии возбуждения материнского ядра. Возбуждение снимается как внутренним так и внешним радиоактивным распадом. Непрерывные процессы внутреннего и внешних распадов характеризует радиоактивные ряды.

Приводим результаты расчета радиоактивного ряда Уран-радиевой серии, начиная с распада ядра U_{92}^{234} .

$U_{92}^{234} \Rightarrow [Xe_{54}^{162} + Sr_{38}^{72}]$ энергия возбуждения моды равна 10,754 Мэв, при

↓

этой энергии происходит перестройка моды.

Каналы α , β -распадов закрыты.

$U_{92}^{234} \Rightarrow [Xe_{54}^{161} + Sr_{38}^{73}]$ энергия возбуждения моды равна 25,764 Мэв.

↓ α

Переход одного нейтрона из блока с избытков

↓ α

нейтронов в блок с их недостатком резко изменяет

↓ α

энергию возбуждения моды, что приводит к альфа-

↓ α

распаду. Канал β^+ , β^- распадов закрыты.

↓

α –Распад идет через ядро стронция

с образованием ядра криптона. При этом дефицит в нейтронах ядра этого блока сокращается.

$Sr_{38}^{73} \Rightarrow Kr_{36}^{69} + \alpha_2^4$. В свободном состоянии реакция запрещена и не происходит.

$Th_{90}^{230} \Rightarrow [Xe_{54}^{161} + Kr_{36}^{69}]$ энергия возбуждения моды равна 18,085 Мэв, при

которой происходит α -распад также через ядро

второго блока по реакции $Kr_{36}^{69} \Rightarrow Se_{34}^{65} + \alpha_2^4$, которая в свободном состоянии также запрещена. Альфа

↓ α

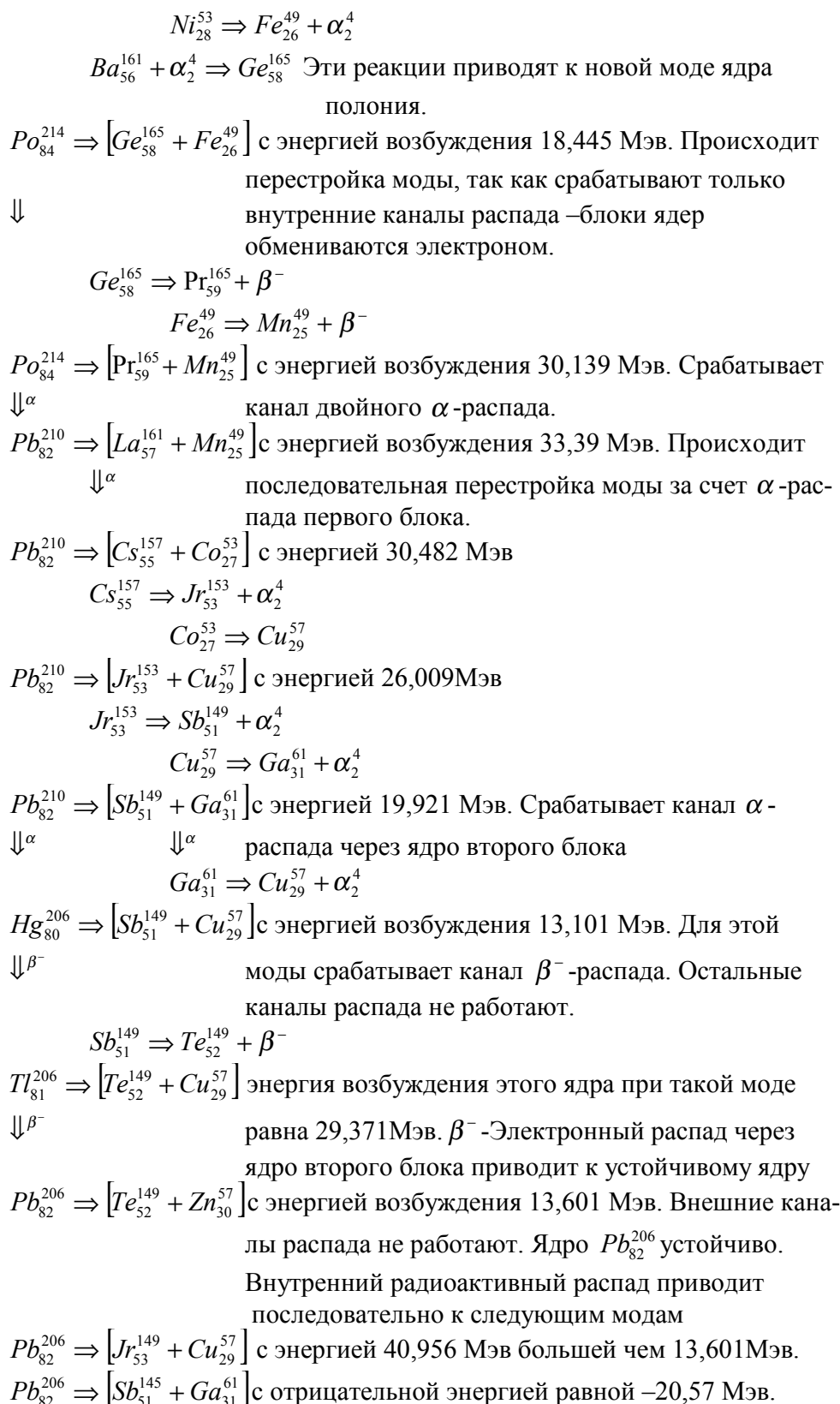
распад через ядро первого блока Xe_{54}^{161} не

происходит, так как приводит к отрицательной энергии мод в обоих случаях.

$Ra_{88}^{226} \Rightarrow [Xe_{54}^{161} + Se_{34}^{65}]$ Энергия возбуждения моды равна 10,637 Мэв

При этой энергии срабатывают только

	внутренние каналы распада в объеме моды.
↓	Происходит две реакции излучения и захвата Электрона по схемам:
	$Xe_{54}^{161} \Rightarrow Cs_{55}^{161} + \beta^{-}, Se_{34}^{65} + \beta^{-} \Rightarrow As_{33}^{65}.$
	ОБРАЗУЕТСЯ НОВАЯ МОДА ДЛЯ ЯДРА
$Rn_{88}^{226} \Rightarrow [Cs_{55}^{161} + As_{33}^{65}]$	с энергией возбуждения 39,026 Мэв. Проявляется квантовый характер энергии ядер –изменение зарядов блоков ядер всего на одну единицу приводит к резкому изменению величины энергии возбуждения моды. α –Распад происходит через ядро второго блока, так как распад через ядро первого блока приводит к отрицательной энергии возбуждения ядра. $As_{33}^{65} \Rightarrow Ga_{31}^{61} + \alpha_2^4.$
↓ α	
$Rn_{86}^{222} \Rightarrow [Cs_{55}^{161} + Ga_{31}^{61}]$	с энергией возбуждения 31,379 Мэв. Для этой энергии моды открыты два канала распада альфа и ветта. Рассмотрим канал распада через ядро
↓ α	$Ga_{31}^{61} \Rightarrow Cu_{29}^{57} + \alpha_2^4$ получим новое ядро с новой модой
$Po_{84}^{218} \Rightarrow [Cs_{55}^{161} + Cu_{29}^{57}]$	с энергией возбуждения 23,917 Мэв., которая вызывает α -распад ядра полония через ядро второго блока. Все другие варианты распада при- водят к отрицательным энергиям системы блоков.
↓ α	
$Pb_{82}^{214} \Rightarrow [Cs_{55}^{161} + Co_{27}^{53}]$	с энергией возбуждения 16,633 Мэв. Каналы альфа распада закрыты, открыт канал β^{-} -электронного распада через ядро второго блока
↓ β^{-}	$Co_{27}^{53} \Rightarrow Ni_{28}^{53} + \beta^{-}$
$Bi_{83}^{214} \Rightarrow [Cs_{55}^{161} + Ni_{28}^{53}]$	с энергией возбуждения 1,749 Мэв. Для этой моды и ядра висмута все каналы распада в том числе и внутренней перестройки моды закрыты. Расчет дает только возможность β^{-} -распада через ядро первого блока
↓ β^{-}	
$Po_{84}^{214} \Rightarrow [Ba_{56}^{161} + Ni_{28}^{53}]$	с энергией возбуждения 15,246 Мэв, для которой может происходить только внутренний альфа распад ядра второго блока с захватом альфа части- ядром первого блока. Происходит перестройка моды через две реакции, которые в свободном состоянии для этих ядер запрещены и не про- исходят.
↓	



$$Pb_{82}^{206} \Rightarrow [Xe_{54}^{153} + Ni_{28}^{53}] \text{ с энергией моды } 18,2 \text{ МэВ} > 13,6 \text{ МэВ}$$

$$Pb_{82}^{206} \Rightarrow [Sn_{50}^{145} + Ge_{32}^{61}] \text{ с энергией моды равной } 7,379 \text{ МэВ} < 13,6 \text{ МэВ. При}$$

этой энергии закрыты каналы внутренней перестройки блоков и внешних распадов. Таким образом радиоактивный ряд закончился на устойчивом ядре свинца Pb_{82}^{206}

Экспериментальная цепочка распада отличается от расчетной с момента распада ядра свинца Pb_{82}^{210} , которое имеет возможность α -распада и β^- -распада. Если переход ядра Pb_{82}^{210} идет с меньшей вероятностью в ядро Hg_{80}^{206} , чем в ядро Bi_{83}^{210} , то в дальнейшем цепочка

$$Hg_{80}^{206} \Rightarrow \beta^- \Rightarrow Tl_{81}^{206} \Rightarrow \beta^- \Rightarrow Pb_{82}^{206} \text{ более вероятна, чем экспериментальная}$$

$$Bi_{83}^{210} \Rightarrow \beta^- \Rightarrow Po_{84}^{210} \Rightarrow \alpha \Rightarrow Pb_{82}^{206}.$$

Таким образом, рассчитанная корректировка уранорадиевой цепочки имеет вид.

$$U_{92}^{234}$$

$$\Downarrow \alpha$$

$$Th_{90}^{230}$$

$$\Downarrow \alpha$$

$$Ra_{88}^{226}$$

$$\Downarrow \alpha$$

$$Rn_{86}^{222}$$

$$\Downarrow \alpha$$

$$Po_{84}^{218}$$

$$\Downarrow \alpha$$

$$Pb_{82}^{214} \Rightarrow \beta^- \Rightarrow Bi_{83}^{214} \Rightarrow \beta^- \Rightarrow Po_{84}^{214} \Rightarrow \alpha \Rightarrow Pb_{82}^{210} \Rightarrow \beta^- \Rightarrow Bi_{83}^{210} \Rightarrow \beta^- \Rightarrow z$$

ГЛАВА 7. КРИВИЗНА ФИЗИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА С ПОЗИЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ АЛГЕБРЫ. МИКРОЧАСТИЦЫ КАК РЕЗУЛЬТАТ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ МАСС.

7.1. Физические константы, фундаментальная масса и длина.

Из всех физических констант три имеют первостепенное значение: С-скорость света $C=3 \cdot 10^{10}$ см/сек, $\hbar$ -постоянная Планка $\hbar=6.626 \cdot 10^{-27}$ эрг*сек, G-гравитационная постоянная $G=6.67 \cdot 10^{-8}$ $cm^3 \cdot sec^{-2} \cdot g^{-1}$. [18, 20].

Скорость света - это верхний предел для скорости материальной частицы и для скорости распространения энергии или информации в физическом пространстве. Скорость света делит физические процессы на релятивистские и не релятивистские. С позиций структуры пространства скорость света отделяет пространство одного измерения от пространства другого измерения. Наличие предельной величины передачи взаимодействий t приводит к структуризации пространства-времени и материи.

Постоянная Планка выступает как критерий между явлениями, которые описываются квантовой механикой или классической. Наиболее существенно этот критерий выражен в соотношениях Гейзенберга. В классической физике динамическими переменными являются координаты, составляющие импульса, момент количества движения и т.д., а также такие составляющие как вектора электрического и магнитного полей в данной точке пространства в определенный момент времени.

Если имеется пара переменных; q -координата положения частицы, p -импульс, то количественное соотношение между ними дается выражением, называемым соотношением неопределенности

$$\Delta q \cdot \Delta p \geq \hbar / 4\pi, \text{ где } \Delta q, \Delta p \text{ - есть средние квадратичные ошибки измерения.}$$

Соотношение показывает пределы измерения этих величин и устанавливает пределы, за которыми принципы классической механики становятся неприемлемыми.

Постоянная Планка чрезвычайно мала. Появление этой постоянной в уравнениях несовместимо с применением декартовых координат и их модулем в виде

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, так как особенность в начале координат становится определяемой через эту постоянную.

Уравнение Шредингера в виде

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(x, t) + V(x, t) \cdot \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t)$$

содержит постоянную Планка перед оператором Лапласа и перед производной по времени.

$\psi(x, t), V(x, t)$ -соответственно волна де Бройля и феноменологический потенциал.

Амплитуда волны де Бройля $\psi(x, t)$ в теории Шредингера определяет вероятность нахождения частицы в данной точке пространства и времени. Положение частицы в данной точке с координатой x и данной момент времени t пропорционально

$|\psi(x, t)|^2 d^3(x)$, где $d^3(x)$ - объем содержащий точку x . Волна де Бройля и объем содержат комплексную особенность, определяемую через постоянную Планка. [17].

Теория де Бройля утверждает, что материальная частица, имея в своем движении волновой характер, одновременно имеет свою полевую волну взаимодействия. Если координаты не имеют комплексной особенности в начале координат (как в декартовых координатах) то они непригодны для уравнения Шредингера. Уравнение должно описывать систему взаимодействия волны де Бройля, феноменологического потенциала, которые находятся в разных пространственных измерениях.

С этих позиций соотношение Гейзенберга определяет пригодность координатных систем для описания физических процессов макро и микромира.

Для отношения гравитационных и электромагнитных сил, действующих между двумя протонами, имеем выражение

$$\frac{m_p^2 * G / r^2}{e^2 / r^2} = \frac{m_p^2 * G}{e^2} = 8.1 * 10^{-37}$$

Это отношение чрезвычайно мало и при наличии электромагнитного взаимодействия силами гравитации можно полностью пренебречь.

Общая теория относительности Эйнштейна является геометрической теорией гравитации. До настоящего времени этой теорией не удалось описать другие силы природы. Явление гравитации занимает особое положение и отделено от взаимодействий, определяющих строение вещества на микроскопическом уровне. Создалось впечатление, что гравитация не имеет отношения к микрофизике. [18].

До настоящего времени не удастся ликвидировать брешь между гравитационными и другими взаимодействиями. В конечном счете это результат отсутствия в теории аппарата, отвечающего за описание структуры пространства.

Составленная из констант $\hbar, G, C$ единица заряда $\varepsilon_g = (\hbar * c)^{\frac{1}{2}}$ не зависит от G и в

$\sqrt{137} \approx 11.6$ раз больше элементарного заряда.

Составленная из этих постоянных фундаментальная масса $m_g = (\frac{\hbar * c}{G})^{\frac{1}{2}} = 2 * 10^{-5} g$ (грамм) гигантски превышает массу элементарных частиц. Например, протон имеет массу $m_p = 1.6 * 10^{-24} g$, электрон $m_e = 0.9 * 10^{-27} g$.

Фундаментальная размерность длины $L_g = (\frac{\hbar * G}{c^3})^{\frac{1}{2}} = 1.6 * 10^{-33} cm$.

Фундаментальная единица времени $t_g = \left(\frac{\hbar * G}{c^5}\right)^{\frac{1}{2}} = 5 * 10^{-44} \text{сек}$

Известные микрочастицы и их параметры отличаются от фундаментальных, вычисленных через известные константы почти в 10^{-20} раз.

Покажем, что это несоответствие обусловлено тем, что в основе всех взаимодействий лежит гравитационное взаимодействие.

7.2. ОТО А. Эйнштейна и РТГ А. Логунова как доказательство неизбежности перехода в исследованиях физического мира к методам теории функций комплексного переменного.

В главах 3,4 было показано, что СТО А. Эйнштейна в скрытой форме содержит методы теории функций комплексного переменного.

Аналогично исследуя логику и последовательность решений покажем, что ОТО и РТГ содержат в скрытой форме исследования гравитации на основе также методов теории функций комплексного переменного.

Преобразования Лоренца координат и времени динамических величин как энергия, импульс и т.д. являются фундаментом теории относительности. Основные предпосылки СТО: постоянство скорости света, зависимость массы от скорости, дефект массы и ее связь с энергией системы подтверждены опытом.

Закон тяготения Ньютона $F = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}$ по форме похож на закон Кулона

$F = \frac{e_1e_2}{r^2}$. Однако теория электромагнитного взаимодействия рассматривается в евклидовом пространстве, а теория тяготения рассматривается в ОТО и РТГ в псевдоевклидовом пространстве и всю теорию увязывают с кривизной пространства. Теория комплексного пространства доказывает, что пространство любых взаимодействий в том числе и электромагнитных является псевдоевклидовым пространством.

В СТО в инерциальной системе отсчета квадрат расстояния (интервал) в четырехмерном пространстве-времени между двумя бесконечно близкими точками записывается в виде

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

c- скорость света, t-время, x,y,z- декартовы координаты. В этом выражении координата времени занимает особое положение относительно остальных координат, поэтому даже при увеличении их числа пространство будет оставаться плоским. Это пространство носит название пространства- времени Минковского.

А. Эйнштейн выдвинул идею, что в этом пространстве все тела движутся по экстремальным геодезическим линиям, а само пространство не плоское, а искривленное. Массы, создающие поле тяжести, искривляют пространство-время. Искривление пространства- времени достигается введением в интервал метрических тензоров.

При этом квадрат интервала является некоторой общей квадратичной формой[8,15]

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k, \text{ где латинские индексы пробегает значения } 0,1,2,3.$$

x^1, x^2, x^3 - обозначают пространственные координаты, $x^0 = ct$ - координата времени, g_{ik} - функции координат и времени. Считается $g_{ik} = g_{ki}$.

В этом виде квадрат интервала содержит 6 метрических тензоров, которые в конечном счете определяют все свойства геометрии в каждой данной системе криволинейных координат. Величины g_{ik} устанавливают метрику пространства-времени. Если $g_{00} = 1, g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, g_{ik} = 0 (i \neq k)$, получим предыдущий интервал и систему координат, которая называется галилеевой.

Это выражение интервала в инерциальной системе отсчета в декартовой системе координат, которое нельзя получить из криволинейной системы координат и ее интервала.

С позиции развиваемых в данной работе методов комплексного пространственного анализа в выражении интервала допущено две ошибки. Первая ошибка есть результат применения алгебры со скалярным и векторным умножением и отказом от алгебры с коммутативным умножением. Интервал в четырехмерном пространстве должен выражаться как корень 4-ой степени из многочлена, представляющего сумму слагаемых из произведений координат, дающих в сумме степень в четвертой степени. Если рассматривать произвольное линейное преобразование от галилеевых координат (X, Y, Z, T) к некоторым координатам (x, y, z, t)

$$T = a_0 t + a_1 x + a_2 y + a_3 z$$

$$X = a_4 t + a_5 x + a_6 y + a_7 z$$

$$Y = a_8 t + a_9 x + a_{10} y + a_{11} z$$

$$Z = a_{12} t + a_{13} x + a_{14} y + a_{15} z$$

Определитель этой системы представляет сумму произведений четырех коэффициентов a_i . Определитель системы отвечает модулю четырехмерной системы, в которой находятся и коэффициенты a_i . Если использовать тензорную запись для понимания предыдущего утверждения то надо записать интервал в виде [8]

$$ds^4 = g_{ijkn} dx^i dx^j dx^k dx^n$$

Выражение содержит 11 слагаемых и 11 метрических тензоров g_{ijkn} . Сумма степеней $i + j + k + n = 4$, где i, j, k, n пробегает значения 1, 2, 3, 4.

Соответствие определителя системы модулю той системы чисел, в которой они находятся, это закон всех известных комплексных и гиперкомплексных систем. Этот закон нельзя заменять дедуктивным переносом закона расстояния из трехмерного пространства декартовой системы координат в N -мерное пространство системы чисел. Таким образом, в ОТО А. Эйнштейна и РТГ А. Логунова допущена глобальная ошибка.

Для рассмотрения второй ошибки вернемся вновь к интервалу РТГ А. Логунова.

Выделив из интервала нулевые индексы А. Логунов получил [8]

$$ds^2 = c^2 g_{00} dt^2 + 2g_{0a} c dt dx^a + g_{ab} dx^a dx^b = c^2 \left[\sqrt{g_{00}} dt + \frac{g_{0a} dx^a}{c \sqrt{g_{00}}} \right]^2 - \chi_{ab} dx^a dx^b$$

где $\chi_{ab} = -g_{ab} + g_{0a} g_{0b} / g_{00}$.

Величина $d\tau = \sqrt{g_{00}} dt + \frac{g_{0a} dx^a}{c \sqrt{g_{00}}}$ имеет времени подобный характер.

Величина $dR^2 = \chi_{ab} dx^a dx^b$ -пространственно-подобный характер.

Эти величины являются физическими (утверждается в РТГ), первая физическим временем, вторая есть квадрат физического расстояния. Чтобы было понятно это утверждение в галилеевых инерциальных системах отсчета для них имеем

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - dR^2$$

Но такая форма записи подробно рассматривалась при исследовании интервала методами теории комплексного пространства. Интервал в такой записи отвечает квадрату модуля пространственного комплекса вида $dv = cdt + jidR$

$$ds^2 = \|dv\|^2$$

При равенстве $cdt = dR$ получаем $dv = dR * \sqrt{0} * e^{jarkti} = dR(1 + ji)$. В свою очередь комплекс может быть записан в форме $dv = (cdt + dR) + dR(-1 + ji)$. Первое слагаемое определяет собственно материю, вторая ее полевую часть. Вторая часть определяет наличие в начале координатной системы сферической окрестности с радиусом равным $\varepsilon = dR$.

Кривизна четырехмерного пространства-времени обусловлена наличием в начале координат этой комплексной особенности в виде окрестности начала координат в форме сферы проколотой изолированным направлением более высокого по порядку числа измерений пространства. Метрические тензоры, вводимые в ОТО и РТГ только уточняют размер этой сферы. Игнорирование этого момента приводит к сингулярности в решении, бесконечности энергии материальных объектов, появлению черных дыр, сжатию всей ВСЕЛЕННОЙ в точку и другим подобным нелепостям.

Пространственные геодезические кривые задают условия для определения метрических тензоров. В комплексном пространстве геодезические это кривые типа C_3 (геометрия этих кривых уточняется метрическим тензорами). Если натянуть на эти кривые поверхность без точек самопересечения, то сжимая внешний радиус этой поверхности (устремляя его к нулю) получим в начале координат сферу радиуса ε , внутри которой всегда будет содержаться объем пространства. Это решение ПРОБЛЕМЫ ПУАНКАРЕ.

7.3. Поле тяготения Шварцшильда в комплексном пространстве.

Выражение 4-х мерного интервала в поле тяготения Шварцшильда имеет вид [18]

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\Theta^2 + \sin^2 \Theta d\varphi^2) + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2$$

Первые три члена это квадрат расстояния между двумя бесконечно близкими точками в сферической системе координат. Для неподвижного наблюдателя в

декартовой системе координат, где $dz = r d\Theta$, $dy = r \sin \Theta d\varphi$, вне поля тяготения в евклидовом пространстве $dx = dr$, или исходя из поля Шварцшильда (ds^2)

$$dx = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{\frac{1}{2}} dr$$

Перед dr стоит множитель, характеризующий изменение пространства от присутствия массивного тела массой M .

Последнее слагаемое в интервале дает изменение времени τ в текущий момент

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}} dt$$

Вдали от тела при $r \rightarrow \infty$, $\Delta\tau = \Delta t$. Чем ближе точка наблюдения к телу, создающему поле, тем медленнее течет время. При $r \rightarrow 2GM/c^2$, $\Delta\tau = 0$. Все это известные результаты решения Шварцшильда.

Критический радиус $r_g = 2GM/c^2$ носит название гравитационного, а сфера радиуса r_g называют сферой Шварцшильда. При $r > r_g$ поле Шварцшильда есть поле тяготения ньютоновской теории с гравитационным потенциалом $\varphi = -GM/r$, а выражения для ускорения соответственно равно $a = -GM/r^2$. Естественно, что при этом радиусе интервал имеет сингулярность.

Черные дыры, полученные в ОТО не имеют материальной поверхности. Тело, падающее в черную дыру при пересечении ее границы не встретит ничего, кроме пустого пространства. Исследование коллапса и возникновение черных дыр это ничто иное как исследование начала координат четырехмерного пространства-времени. И возникновение сингулярности есть закономерный результат исключения из начала координат комплексной особенности. Это результат нерешенной проблемы Пуанкаре.

7.4. Комплексное пространство тяготения.

Рассмотрим следующий пространственный комплекс

$$v = \rho e^i \quad v = \rho e^{i\varphi} + jze^{i\varphi} + kjcte^{i\varphi+j\gamma}$$

Преобразуем комплекс $v = \sqrt{\rho^2 + z^2} e^{i\varphi+j\gamma} + kjcte^{i\varphi+j\gamma} = \sqrt{\rho^2 + z^2 - c^2 t^2} e^{i\varphi+j\gamma+k\vartheta}$, где обозначено $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$\varphi = \text{arctg} y / x, \quad \gamma = \text{arctg} z / \rho, \quad \vartheta = \text{arctg} jct / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Таким образом, пространственный комплекс v имеет модуль $\|v\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$ и соответствует форме интервалу Минковского.

Комплексное пространство имеет две цилиндрические оси $\rho e^{i\varphi}, ze^{i\varphi}$ и третью сферическую ось $cte^{i\varphi+j\gamma}$. При равенстве $ct^2 = x^2 + y^2 + z^2$ из пространства выделяется изолированное направление $\vartheta = \text{arctg} j$. В пространстве выделяется пространство делителей нуля, которое в физических исследованиях несет функцию полевой материи $v = ct(1 + kj)e^{i\varphi+j\gamma} = ct\sqrt{0}e^{k\text{arctg} j + i\varphi + j\gamma}$.

Корень из нуля определяет окрестность нуля в начале координат и определяется из физических условий.

Для метрики Шварцшильда имеем:

$$\varphi = \arctg r \sin \theta d\varphi_1 \alpha / dr,$$

$$\gamma = \arctg r d\theta / \sqrt{dr^2 / \alpha + r^2 \sin^2 \theta d\varphi_1^2}$$

$$\vartheta = \arctg j \frac{\alpha c dt}{\sqrt{dr^2 / \alpha + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi_1^2)}}$$

$$\|v\| = ds, \quad \alpha = \sqrt{1 - 2GM / c^2 r}$$

При этих обозначениях, комплекс в пространственных сферических координатах представим в виде

$$dv = ds e^{i\psi + j\gamma + k\vartheta}$$

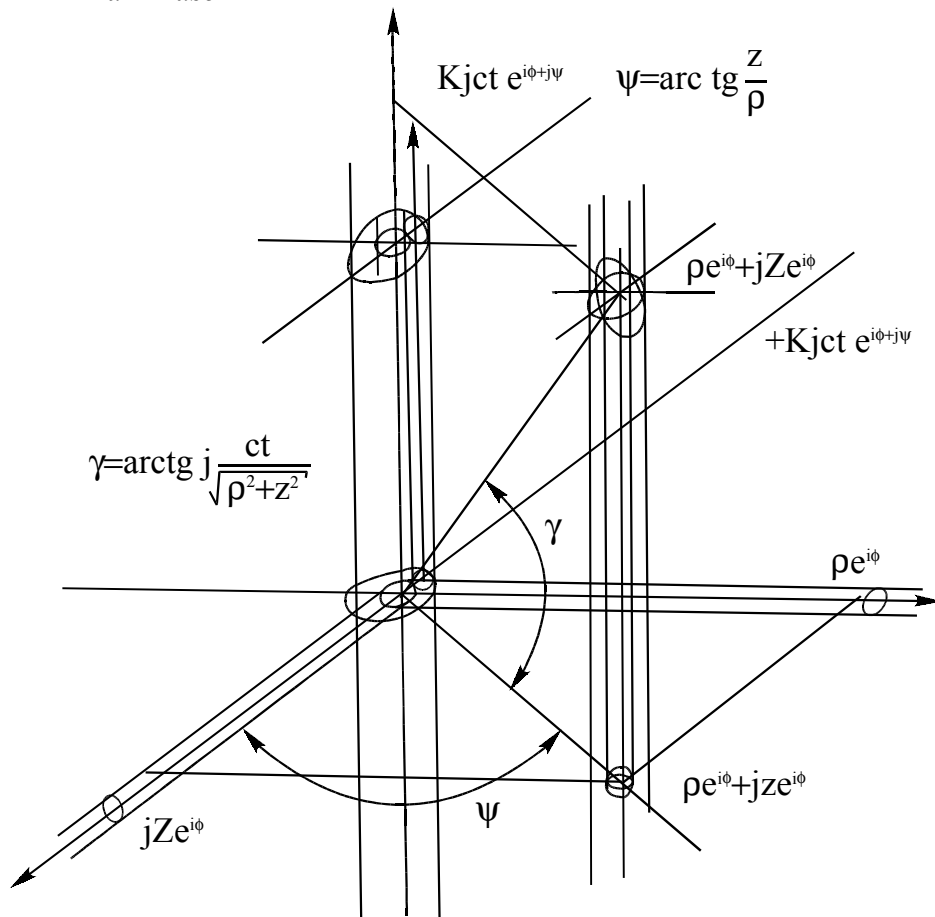


Рис.64. Модуль комплексного пространства равен интервалу Минковского.

В этом комплексе два угла действительны (φ, γ) , один угол комплексный (ϑ) , который в конечном счете и определяет четырехмерное псевдоевклидовое пространство. Метрика ds в этом пространстве является интервалом поля тяготения Шварцшильда. Исследуем этот комплекс. Введем условия для определения изолированного направления и ε_g -окрестности начала координат. Для этого необходимо выполнения равенства $\vartheta = \arctg j$. По законам алгебры

пространственных комплексов это условие равносильно равенству нулю модуля комплекса, которым в данном случае равен квадрату интервала $ds^2 = 0$.

$ds^2 = \alpha c^2 dt^2 (-dr^2 / c^2 dt^2 \alpha^2 - \beta^2 / c^2 dt^2 \alpha^2 + 1)$, где

$\beta^2 = r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi_1^2)$, при условии $\vartheta = \arctg j$ множитель,

стоящий в скобках должен быть равен нулю, поэтому пространственный комплекс записывается в виде

$$dv = \sqrt{\alpha} c dt \sqrt{0} e^{k \arctg j} = \sqrt{\alpha} c dt (1 + kj) = \sqrt{\alpha} c dt + kj \sqrt{\alpha} c dt$$

Из условия для определения изолированного направления и равенства нулю интервала поля Шварцшильда получили разложение комплекса на две равных по величине составляющих, которые развернуты относительно друг друга на 90 град. и приложены к разным точкам окрестности начала координат. Физически это разложение отвечает полевой структуре той гравитационной массе, которая заключена в окрестности координат. Эта масса определяет кривизну пространства. Величина $\sqrt{\alpha}$ представляет корень квадратный из метрического тензора g_{00} риманова пространства – времени. $\sqrt{\alpha} = \sqrt{1 - 2GM / c^2 r}$.

Равенство нулю интервала Шварцшильда определяет наличие в начале координат тяжелой массы M , которая сосредоточена в изолированном пространстве гравитационного радиуса r_g . Гравитационный радиус определяется по формуле $r_g = 2GM / c^2$, поэтому имеем $\sqrt{\alpha} = \sqrt{1 - r_g / r}$. Гравитационная масса M по структуре содержит в себе изолированное направление $\arctg j$, которое можно рассматривать как цилиндрическую ось гравитационного радиуса в сечении равного r_g . В тоже время можно рассматривать гравитационную массу M сосредоточенную в сферической окрестности начала координат как гравитационный заряд, принадлежащий пространству более высокой размерности. Если отношение $r_g / r > 1$ то составляющие гравитационного поля переходят в пространство более сильного заряда. Равенство $r_g / r = 1$ определяет размерность пространства для конкретной массы M . Тривиальное соотношение между массами и их гравитационными радиусами $M_1 / M_2 = r_{2g} / r_{1g}$ разделяет один гравитационный радиус от другого.

7.5. Оператор взаимодействия в структурном образовании.

В трехмерных декартовых координатах интервал равен $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Интервал Минковского в псевдоевклидовом пространстве-времени равен $s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2}$.

Таким образом, введя в рассмотрение пространство время Минковский получил оценку дефекта пространственных координат $\Delta s = R - s$. Заменяя в последнем выражении координаты массами взаимодействующих частиц получим

$$\Delta \Gamma = \left(\sum_1^N m_i \right) - \sqrt{\left(\sum_1^N m_i \right)^2 - m_v^2}$$

где $(\sum_1^N m_i)$ - есть масса N взаимодействующих частиц (взамен интервала R),

m_v - полевая масса взаимодействия (энергия поля взаимодействия, интегральный обменный квант) вместо временной координаты,
 $\Delta\Gamma$ - энергия взаимодействия (дефект массы).

Оператор $\Delta\Gamma$ неоднократно использовался при расчетах.

Энергия связи ΔE атомных ядер и ядер изотопов вычислялась по формуле (как первое приближение) в виде

$$\Delta E = (zm_p + nm_N) - \sqrt{(zm_p + nm_N)^2 - m_v^2}$$

где m_v - полевая энергия взаимодействия, которая в первом однопионном обмене между нуклонами принимается равной $m_v = (z + n)m_\pi$.

Энергия связи электрона в атоме водорода (энергия ионизации) выразится по формуле

$$\Delta J = (m_p + m_e) - \sqrt{(m_p + m_e)^2 - m_v^2}$$

Ядерная физика накопила огромный справочный материал по энергии связи атомных ядер, по процессам радиоактивного распада, альфа распада, деления ядра и т. д., которые были исследованы с применением этой формулы и показали высокую сходимость с экспериментальными данными (смотри главу).

В физической химии имеем также огромный справочный материал в виде рентгеноспектральных справочников, справочников по энергии разрыва химических связей, потенциалов ионизации и сродства к электрону. Этот огромный материал может быть задействован. Формула энергии связи атомных ядер совместно с энергией ионизации позволяет оценить ту энергию m_v , которая удерживает электроны и электронные оболочки в атоме и приступить к расчету химических соединений.

7.6. Формула расчета масс элементарных частиц.

Закон тяготения Ньютона

$$F = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \text{ определяет силу, с которой взаимодействуют две массы}$$

m_1, m_2 на расстоянии от их центров (на расстоянии сферических окрестностей их гравитационных радиусов) r .

Потенциал взаимодействия равен $\varphi = -\frac{Gm_1m_2}{r}$ и по логике представляет энергию взаимодействия (дефект массы). Таким образом, можно записать

$$-\frac{Gm_1m_2}{r} = (m_1 + m_2) - \sqrt{(m_1 + m_2)^2 - m_{v12}^2}$$

Полевая гравитационная энергия вычисляется по формуле

$$m_{v12} = \sqrt{2(m_1 + m_2)Gm_1m_2 / r - (Gm_1m_2 / r)^2}$$

Закон электромагнитного взаимодействия двух элементарных зарядов выражается в виде $F = \frac{e^* e}{r^2}$.

Потенциал взаимодействия определяется по формуле $\varphi_e = \frac{e^* e}{r}$ и представляет дефект энергии взаимодействия и может быть выражен через энергию поля

$$\frac{e^* e}{r} = (m_1 + m_2) - \sqrt{(m_1 + m_2)^2 - m_{ve}^2}$$

Откуда полевая энергия взаимодействия масс m_1, m_2 с зарядами e, e будет выражаться формулой

$$m_{ve} = \sqrt{2(m_1 + m_2) \frac{e^* e}{r} - \left(\frac{e^* e}{r}\right)^2}$$

Полученные соотношения по новому определяют физическую характеристику потенциала при взаимодействии частиц. Энергия взаимодействия частиц есть дефект масс взаимодействующих частиц. Разность потенциалов определяет изменение дефекта массы при изменении расстояния между взаимодействующими частицами. Полевая энергия учитывается в формулах величинами m_{vg}, m_{ve} . Определим при каких условиях полевая энергия дает эквивалентность электромагнитного и гравитационного дефекта при взаимодействии.

Если $m_{ve} = m_{vg}$ то получаем зависимость $\frac{e^2}{r_e} = \frac{Gm_1^2}{r_g}$ где r_e, r_g - есть соответственно расстояния электромагнитного и гравитационного взаимодействия. Преобразования дают

$$m_1 = e \sqrt{\frac{r_g}{r_e}} \sqrt{\frac{1}{G}}$$

$$e = 4.80298 * 10^{-10} \text{ cgc}, G = 6.67 * 10^{-8} \text{ din cm}^2 \text{ g}^{-2}$$

Если $\frac{r_g}{r_e} = 137$, то получим

$$m_1 = 4.80298 * 10^{-10} * \sqrt{137} * \sqrt{\frac{1}{6.67 * 10^{-8}}} = 2.1767 * 10^{-5} \text{ g}$$

Таким образом, эквивалентность гравитационного и электромагнитного полей определено фундаментальной гравитационной массой

$$m_1 = m_g$$

Если $\frac{r_g}{r_e} = 1$ имеем электромагнитную массу частицы $m_1 = m_g / \sqrt{137}$

В исследованиях начала координат и гравитационного радиуса поля тяготения Шварцшильда было получено соотношение, которое в комплексном пространстве

отделяет пространство одной частицы от пространства другой. Другими словами при переходе через поверхность гравитационного радиуса частицы попадаем в пространство другой частицы.

$$r_i m_i = r_g m_g$$

Рассмотрим взаимодействие двух частиц с позиций этого соотношения. Проведем последовательно преобразования

$$G \frac{m_g m_g}{\lambda_i^{komp}} = m_i c^2, \quad (2G \frac{m_g}{c^2}) \frac{m_g}{2\lambda_i^{komp}} = m_i, \quad r_g m_g = 2\lambda_i^{komp} m_i,$$

Для соблюдения предыдущего равенства необходимо, чтобы гравитационный радиус был равен удвоенной комптоновской длине волны частицы $r_g = 2\lambda_i^{komp}$.

Комптоновская длина волны протона равна $\lambda_p^{komp} \approx 0.2 * 10^{-13} \text{ cm}$

Определим массу протона

$$m_p = G m_g m_g / c^2 \lambda_p^{komp} = 6.67 * 10^{-8} * 2.1767^2 * 10^{-10} / 9 * 10^{20} * 0.2 * 10^{-13} =$$

$$m_p = 1.67 * 10^{-24} \text{ gr}.$$

Таким образом, протон есть результат взаимодействия двух фундаментальных масс

$m_g = 2.1767 * 10^{-5} \text{ gr}$ на расстоянии комптоновской длины волны протона. Это взаимодействие дает массу протона.

Комптоновская длина волны электрона равна $\lambda_e^{komp} = 3.86144 * 10^{-11} \text{ cm}$

Классический радиус электрона $r_e = 2.81777 * 10^{-13} \text{ cm}$.

$$\text{Рассчитаем массы электрона } m_e^g = G m_g^2 / c^2 \lambda_e^{komp} = 9.09 * 10^{-28} \text{ gr}$$

$$= 6.67 * 10^{-8} * 2.1767^2 * 10^{-10} / 9 * 10^{20} * 3.86144 * 10^{-11} =$$

$$= 9.09 * 10^{-28} \text{ gr}.$$

Электромагнитная масса электрона равна

$$m_e^e = m_e^g * \alpha$$

Таким образом, элементарные частицы протон и электрон есть результат гравитационного взаимодействия двух фундаментальных масс m_g на расстоянии равном комптоновской длине волны этих частиц λ^{komp} . Элементарные частицы есть результат дефекта масс при взаимодействии. Полевая энергия взаимодействия для протона равна

$$m_{vp} \approx \sqrt{2 * 2.17 * 10^{-5} * 1.67 * 10^{-24}} = \approx 8.3 * 10^{-15} \text{ gr}$$

Кривизна пространства, которую задают фундаментальные массы, определяют огромную полевую энергию их взаимодействия между собой. Протон организован силами, которые в 10^9 раз превышают его собственную энергетическую массу.

Преобразование интервала поля тяготения ШВАРЦШИЛЬДА по законам пространственной комплексной алгебры показывает, что гравитационная фундаментальная масса m_g создает в пространстве комплексную особенность в виде сферической ε_g -окрестности радиуса, равному фундаментальной длине l_g .

В микромире нет евклидова пространства. ВСЕ ПРОСТРАНСТВО ПСЕВДОВЕКЛИДОВО, поэтому не должно существовать различия в описании электромагнитных и гравитационных взаимодействий. РАСЧЕТ ПОКАЗАЛ, ЧТО НА ФУНДАМЕНТАЛЬНОМ РАССТОЯНИИ ДЛЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ МАСС ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ АДЕКВАТНО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМУ.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ МАСС НА РАССТОЯНИЯХ РАВНЫХ КОМПТОНОВСКИМ ДЛИНАМ ВОЛН МИКРОЧАСТИЦ ДАЮТ МАССУ ЭТИХ ЧАСТИЦ.

$$G \frac{m_g^2}{\lambda_i^{komp}} = m_i c^2$$

7.7 Гравитационно-электромагнитный потенциал в комплексном пространственном выражении. Модель частицы и микрочастицы. Определение электрического заряда, спина частиц.

Предельное граничное условие равенства потенциалов Кулоновского и Ньютоновского взаимодействия $G \frac{m_g^2}{r_g} = \frac{e^2}{r_e}$ определяет гравитационно-электромагнитный конус полевой материи. С позиций комплексного пространства потенциал может быть записан в виде:

$$U = G \frac{m_g^2}{r_g} \pm ji \frac{e^2}{r_e} \text{ и преобразован по законам комплексной алгебры}$$

$$U = \sqrt{\left[G \frac{m_g^2}{r_g} \right]^2 - \left[\frac{e^2}{r_e} \right]^2} e^{\pm j \arctg \frac{e^2}{G m_g^2} \frac{r_g}{r_e}}$$

Далее

$$U = G \frac{m_g^2}{r_g} \sqrt{1 - \frac{e^4}{m_g^4} \frac{1}{G^2} \frac{r_g^2}{r_e^2}} e^{\pm j \arctg \frac{e^2}{G m_g^2} \frac{r_g}{r_e}}$$

При выполнении условия $e^2 = G m_g^2$, а также одновременно $r_g = r_e$ потенциал описывает взаимодействие в пространстве полевой материи и принадлежит конусу делителям нуля или изолированному направлению, аналогичному световому конусу в преобразованиях Лоренца

$$U = G \frac{m_g^2}{r_g} \sqrt{0} e^{\pm j \arctg 1} = G \frac{m_g^2}{r_g} (1 \pm ji)$$

Таким образом, потенциал гравитационно- электромагнитного взаимодействия описывается потенциальным конусом, образованным двумя равными по величине и взаимно перпендикулярными потенциалами, исходящими из разных точек пространства.

Формула дает значение энергии для двух изолированных направлений $e^{\pm jarktgi}$. В связи с этим положительный заряд связан с изолированным направлением $e^{jarktgi}$, отрицательный заряд с $e^{-jarktgi}$. Расположение двух фундаментальных частиц в пространстве определяет знак изолированного направления и заряд частицы. Расположение частиц фундаментальной массы является внутренней структурой частицы. Внешние повороты частицы как единого целого не меняют заряда частицы $(m_e c^2)_{e^{\pm}} = \left(G \frac{m_g^2}{\lambda_e^{komp}} \right) \sqrt{0} e^{\pm jarktgi \pm i\varphi \pm j\psi}$

Внутренняя перестройка ответственна за спин частицы $\pm S$.
Позитрон как античастица определяется расположением фундаментальных масс по осям $(1, ji)$ и представляет комплекс частицу –волну положительного заряда рис 65.

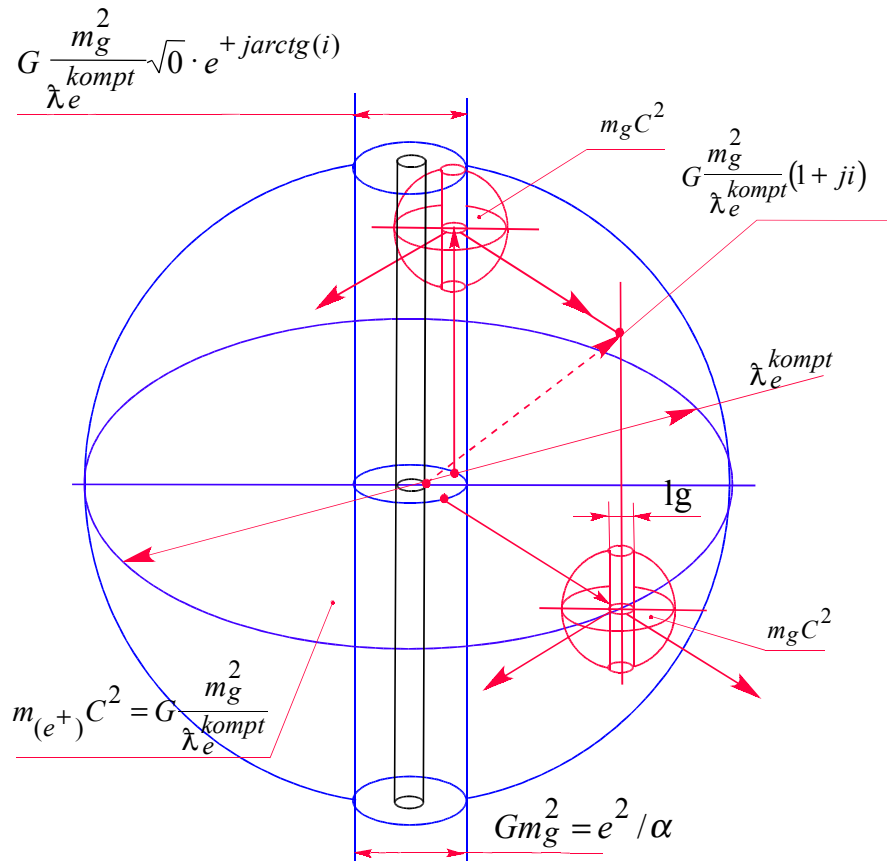


Рис.65. Модель позитрон.

$$(m_e c^2)_{e^+} = G \frac{m_g^2}{\lambda_e^{komp}} (1 + ji) e^{i\varphi + j\psi} = G \frac{m_g^2}{\lambda_e^{komp}} \sqrt{0} e^{jarktgi \pm i\varphi \pm j\psi}.$$

Электрон имеет внутреннее расположение фундаментальных частиц соответственно по осям $(1, -ji)$ на равных расстояниях от центра, которое представляет сферу радиуса фундаментальной длины l_g . В результате электрон представляет сферу с поверхностью мнимого радиуса. Рис 66.

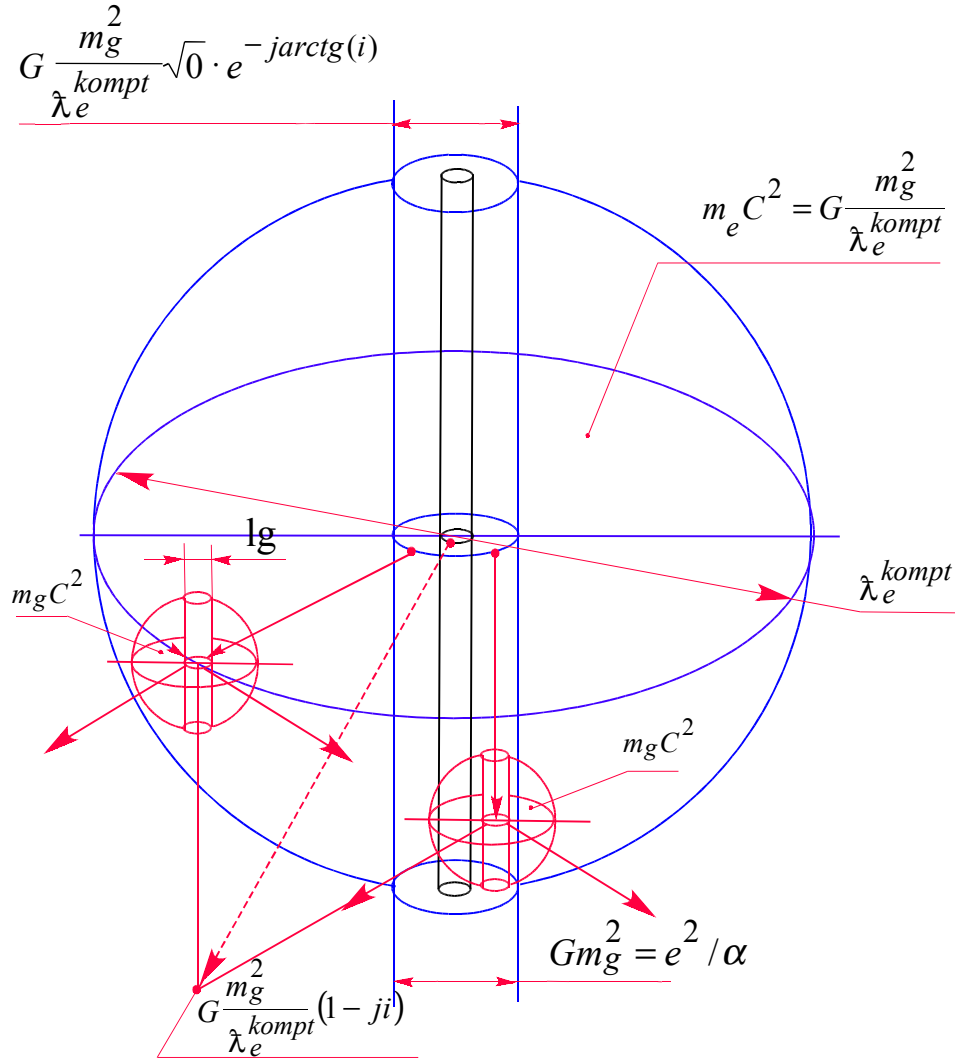


Рис. 66. Модель электрона.

$$(m_e c^2)_{e^-} = G \frac{m_g^2}{\lambda_e^{kompt}} (1 - ji) e^{i\varphi + j\psi} = G \frac{m_g^2}{\lambda_e^{kompt}} \sqrt{0} e^{-j \arctg(i) \pm i\varphi \pm j\psi}.$$

Внутренняя перестройка в расположении фундаментальных масс для электрона по осям (i, j) для позитрона по осям $(-i, j)$ не изменяет внутренней сущности заряда. Этот внутренний поворот в перестройки частицы и ответственен за спин частицы. Спин не есть вращение частицы, а есть ее внутренняя перестройка. Структура протона и антипротона может моделироваться аналогично.

Стабильная частица положительного или отрицательного заряда имеет одно изолированное направление в структуре. Нейтрон имеет четыре фундаментальные массы в пределах своей комптоновской длины волны, две из которых создают положительный заряд $e^{+j \arctg i}$, располагаясь по осям $(1, ji)$, две другие располагаются по осям $(-i, -j)$ создавая отрицательный заряд $e^{-j \arctg i}$. Рис 67.

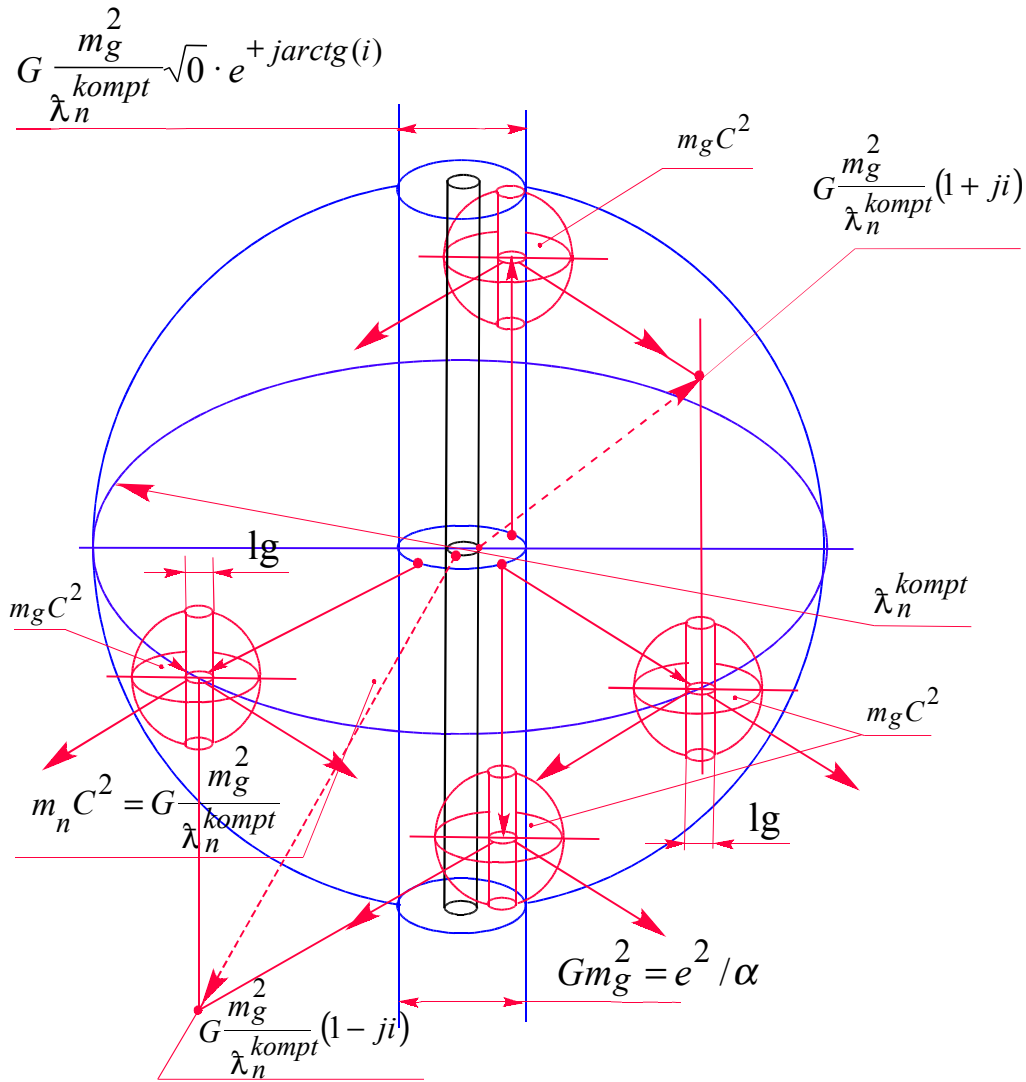


Рис. 67. Модель нейтрона.

Создание нейтральной частицы в пределах заданной комптоновской длины волны и заданной массы определяется возможностью в изменении обменного кванта внутри частицы, а также ее спина, который распределяет фундаментальные массы по разным осям в пространстве.

При такой динамике моделирования частиц и античастиц, любая из частиц представляет целую структурную систему (сравнимую с периодической таблицей элементов Д.И. Менделеева).

Потенциал образует спектр микрочастиц, так что

$$U = m_i c^2 = G \frac{m_g^2}{\lambda_i^{kompt}}, \text{ где } m_i - \text{масса микрочастицы в граммах, } \lambda_i^{kompt} -$$

комптоновская длина волны микрочастицы.

Таким образом, взаимодействие двух фундаментальных масс $m_g \approx 2.17 \cdot 10^{-5}$ гр. на расстоянии равным комптоновской длине протона λ_p^{kompt} , дает микрочастицу протон.

Изолированное направление определяется равенством

$$\operatorname{arctgi} \frac{e^2}{G m_g^2} \frac{\lambda_i^{kompt}}{r_e} = \operatorname{arctgi} \frac{G m_g^2}{\lambda_i^{kompt} c^2} = m_i, \text{ то}$$

$$\frac{e^2}{m_i c^2 r_e} = 1, \text{ так что для микрочастиц имеем электромагнитный радиус}$$

$$r_e = \frac{e^2}{m_i c^2}. \text{ Следовательно также имеем } \frac{r_e}{r_i^{kompt}} = \frac{e^2}{m_i c^2} \frac{m_i c^2}{G m_g^2} = \alpha$$

Для всех микрочастиц электромагнитный радиус равен

$$r_e = \alpha \lambda_i^{kompt}.$$

Приведем расчеты для наиболее стабильных частиц.

Электрон имеет массу 0,511006 мэв, что соответствует $9,10908 \cdot 10^{-28}$ гр. Определим значение фундаментальной массы по формуле $m_g = (G h c)^{1/2} = 2.17705 \cdot 10^{-1/2}$ гр.

$$G = 6.67 \cdot 10^{-8} \text{дин} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{г}^{-2}, h = 1.05449 \cdot 10^{-27} \text{эрг} \cdot \text{сек},$$

$$c = 2.997925 \cdot 10^{10} \text{см} \cdot \text{сек}^{-1}.$$

$$m_g = ((6.67 \cdot 1.05449 \cdot 2.997925)^{1/2}) \cdot (10^{-8} \cdot 10^{-27} \cdot 10^{10})^{1/2}$$

По выведенной формуле комптоновская длина волны электрона выразится в виде

$$\begin{aligned} \lambda_e^{kompt} &= G \frac{m_g^2}{m_e c^2} = (6.67 \cdot 10^{-8}) \cdot \frac{(2.17705)^2 \cdot 10^{-10}}{9.10908 \cdot 10^{-28}} \frac{1}{2.997925^2 \cdot 10^{20}} = \\ &= (6.67 \cdot 2.17705^2 / 9.10908 \cdot 2.997925^2) \cdot (10^{-8-10+28-20}) = \\ &= 0.386144996 \cdot 10^{-10} = 3.86144996 \cdot 10^{-11} \text{см} \end{aligned}$$

В теоретической физике эта величина вычисляется по формуле $\lambda_e^{kompt} = \frac{\hbar}{m_e c}$

Для всех остальных микрочастиц комптоновская длина волны будет зависеть от массы и подробный расчет можно опустить

$\mu^\pm$ – мюон, масса 105,659 мэВ $0,188346 * 10^{-24} gr, 1,867517 * 10^{-13} cm$

p – протон масса 938,256 мэВ

$1.67252 * 10^{-24} gr, 0.2103050947 * 10^{-13} cm$

n – нейтрон масса 939,55 мэВ

$1.674827 * 10^{-24} gr, 0.210015 * 10^{-13} cm$

λ – гиперон масса 1115,58 мэВ

$1.9886515 * 10^{-24} gr, 0.176877 * 10^{-13} cm$

Σ – гтрерон масса 1189,47 мэВ

$2.12033 * 10^{-24} gr, 0.165889 * 10^{-13} cm$

Ξ – каскадные частицы масса 1314,7 мэВ

$2.343563 * 10^{-24} gr, 0.150087 * 10^{-13} cm$

Ω^- – омега минус масса 1674 мэВ

$2.984045 * 10^{-24} gr, 0.117873 * 10^{-13} cm$

$\pi^\pm$ – мезон масса 139,58 мэВ

$0.248813 * 10^{-24} gr, 1.41367 * 10^{-13} cm$

π^0 – мезон масса 134,98 мэВ

$0.240613 * 10^{-24} gr, 1.46184 * 10^{-13} cm$

$K^\pm$ – каоны заряженные масса 493,8 мэВ

$0.88024 * 10^{-24} gr, 0.39959 * 10^{-13} cm$

K^0 – нейтральный каон масса 497,9 мэВ

$0.887549 * 10^{-24} gr, 0.3963 * 10^{-13} cm$

η – мезон масса 548,6 мэВ

$0.977926 * 10^{-24} gr, 0.359679 * 10^{-13} cm$

Оценим величину полевой энергии (или полевого обменного кванта), которая обеспечивает удержание двух фундаментальных масс на расстояниях комптоновских длин волн микрочастиц

$$G \frac{m_g^2}{\lambda_i^{kompt} c^2} = 2m_g - \sqrt{4m_g^2 - m_{vg}^2}$$

В первом приближении можно корень заменить приближенным значением

$$G \frac{m_g^2}{\lambda_i^{komp} c^2} = \frac{m_{vg}^2}{4m_g}, \text{ откуда имеем } m_{vg} = \sqrt{G \frac{m_g^2}{\lambda_i^{komp} c^2} 4m_g}$$

Для протона имеем $m_{vg} = \sqrt{(1.67252 * 10^{-24}) * 4 * 2.17705 * 10^{-0.5}}$

Это дает $m_{vgp} = 1.20684 * 10^{-14} gr$, что составляет $m_{vgp} = 6.77 * 10^{12} M$ эв

Для электрона имеем $m_{vge} = 2.8164 * 10^{-16} gr$, что составляет $m_{vge} = 1.579 * 10^{11} M$ эв

Для электронного нейтрино имеем $m_{vgv} = 0.0557 * 10^{-16} gr$, что составляет $m_{vgv} = 3.125 * 10^9 M$ эв.

Таким образом, полевая энергия взаимодействия при образовании микрочастиц гигантски превышает энергию всех известных и предсказываемых частиц. В связи с этим столкновения микрочастиц может привести к возникновению спектра частиц гигантской энергий. Внутренняя полевая энергия позволяет формировать частицы как системы из фундаментальных частиц.

Модель сложного структурного образования предварительно была рассмотрена в главе 4 (рис 48). Частица с массой $m_i c^2$ формируется в пространстве с комптоновской длиной волны λ_i^{komp} при взаимодействии двух фундаментальных масс $m_g c^2$. Фундаментальные частицы представлены на рис 49 в виде двух сфер с циклонными траекториями вихрей C_3 . Траектории C_3 представляют единое целое с траекторией циклонного вихря C_3^l , который описывает движение фундаментальных масс при взаимодействии. Взаимодействие происходит через общий изолированный ε_2 -туннель, радиус которого соответствует фундаментальной длине l_g . Энергия полевого взаимодействия оценивается величиной $m_{vi} c^2$. Изолированный туннель взаимодействия определен как гравитационно-электромагнитный луч, удовлетворяющий предельному равенству.

В несколько ином виде предельная формула взаимодействия между фундаментальными массами приводится без вывода Я.Б.Зельдовичем и И.Д.Новиковым

$$m_g^2 c^2 / \hbar = c^3 / G$$

Преобразуем к виду $m_g^2 = \frac{\hbar c}{G} = \frac{e^2}{G\alpha}$. Формула не могла дать ничего нового, так как она является модификацией формулы для расчета фундаментальной массы как нечто первичного, составленной из постоянных $\hbar, c, G$

$m_g = \hbar^{1/2} c^{1/2} G^{-1/2}$. Формула не позволяет определить откуда появляется постоянная тонкой структуры α .

Предельный переход, выраженный формулой $e^2 \frac{r_g}{r_e} = Gm_g^2$, показывает что взаимодействие фундаментальных масс и электрических зарядов в предельном первичном случае происходит при соотношении $\frac{r_g}{r_e} = \frac{1}{\alpha}$.

Фундаментальным свойством электрического заряда является его существование в виде положительного и отрицательного. Знак заряда и сам заряд определяется внутренней структурой частицы. Если две фундаментальные массы расположены так, что образуют волну взаимодействия с положительным изолированным направлением, то и заряд положителен. Для отрицательного заряда имеем расположение в пространстве частицы фундаментальных масс, которое создает отрицательное изолированное направление. Это утверждение согласуется с принципами теории относительности в комплексном пространственном изложении, которое проведено в предыдущих главах. Заряд сохраняется и квантуется и это связано с взаимодействием фундаментальных масс, которые образуют структуру с положительным и отрицательным изолированным направлением. В пределах одной размерности пространства, комптоновской длине волны частицы, в пределах одной массы частица не может иметь одновременно два одинаковых изолированных направления. Протон не может иметь заряд отличный от единицы по величине (так же как электрон), ибо в противном случае пространство имело бы несколько изолированных направлений одного знака, что невозможно в границах одной частицы. Речь конечно идет об элементарных частицах. В изолированных системах, которыми являются элементарные частицы электрический заряд равен по величине единице. Эта величина соответствует количеству изолированных направлений. Сложная частица состоит из комбинации положительного и отрицательного заряда (из положительного и отрицательного изолированных направлений). Точную величину заряда определяют гравитационные силы взаимодействия фундаментальных масс. Классическая модель электрона с равномерным распределением заряда по объему или поверхности не соответствует разработанной модели. Закон Кулона и закон Ньютона определил границу справедливости разработанной модели, которая

соответствует фундаментальной длине $l_g = \left(\frac{\hbar G}{c^3} \right)^{\frac{1}{2}} \cong 1.6 * 10^{-33} cm$.

7.8 Расчет модели атома водорода.

В теоретической физике имеем ряд формул, вытекающих одна из другой и составленных из фундаментальных постоянных

Комптоновская длина волны электрона $\lambda_e = \frac{\hbar}{mc} = 3.86144 * 10^{-11} \text{ см}$

Первый боровский радиус $a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} = \alpha^{-1} \lambda_e = 5.29167 * 10^{-9} \text{ см}$

Классический радиус электрона $a_e = \frac{e^2}{mc^2} = \alpha \lambda_e = 2.81777 * 10^{-13} \text{ см}$

Ионизационный потенциал водорода при бесконечной большой массе протона

$$R_\infty = \frac{1}{2} \alpha^2 mc^2 = 13.060535 \text{ эВ}$$

Постоянная тонкой структуры $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = 7.29720 * 10^{-3}$

$$\frac{1}{\alpha} = 137.0388$$

Естественно все формулы связаны между собой, однако что лежит в основе этих формул до сих пор остается невыясненным. Покажем, что все эти формулы есть результат предельного соотношения. Имеем

$$Gm_g^2 = \frac{e^2}{\alpha} \Rightarrow Gm_g^2 = \frac{\hbar c \alpha}{\alpha} \Rightarrow \frac{Gm_g^2}{\hbar c} = 1 \quad \text{и только поэтому одновременно}$$

соблюдается выражение для постоянной тонкой структуры $\frac{e^2}{\hbar c} = \alpha$.

Это выражение означает, что отношение гравитационного заряда фундаментальной массы к ее электрическому заряду равно обратной величине постоянной тонкой структуры

$$\frac{Gm_g^2}{e^2} = \frac{r_g}{r_e} = \frac{1}{\alpha}.$$

Это предельное выражение реализуется на изолированном гравитационно-электромагнитном луче взаимодействующих полей.

Далее. Поделим правую и левую часть предельного соотношения на

комптоновскую длину волны электрона $\frac{Gm_g^2}{\lambda_e^{kompt}} = \frac{e^2}{\alpha \lambda_e^{kompt}}$ получим

$$mc^2 = \frac{e^2}{\alpha \lambda_e^{kompt}}, \text{ откуда имеем}$$

$$\alpha \tilde{\lambda}_e^{kompt} = \frac{e^2}{mc^2} \text{ т.е. получили классический радиус электрона}$$

$$a_e = \alpha \tilde{\lambda}_e^{kompt}.$$

Гравитационный заряд фундаментальных масс m_g на расстоянии комптоновской волны электрона $\tilde{\lambda}_e^{kompt}$ превосходит электромагнитный заряд в α^{-1} . Этот вывод будет справедлив для всех микрочастиц заряженных и не заряженных (протона, нейтрона и т.д.).

Рассмотрим с этих позиций, что было предложено в 1913 году Нильсом Бором.

Теория Нильса Бора считает, что движение электрона в атоме водорода происходит по круговой орбите радиуса a_0 вокруг протона. Эта орбита определяется уравнением движения

$$m \frac{V^2}{a_0} = \frac{e^2}{a_0^2} \text{ и квантовым условием Бора } J = mVa_0 = \frac{h}{2\pi}, \text{ где } V\text{-скорость}$$

электрона, J-его момент количества движения, который предполагается равным $\frac{h}{2\pi}$.

Проведем последовательно преобразования уравнения движения, используя полученное предельное соотношение $mV^2 = \frac{e^2}{a_0}$. Заменим массу электрона на ее

выражение через фундаментальную массу $G \frac{m_g^2}{\tilde{\lambda}_e} \frac{V^2}{c^2} = \frac{e^2}{a_0}$, проведем сокращение

при условии равенства $\frac{V^2}{c^2} = \alpha^2$. Имеем

$$G \frac{m_g^2}{\tilde{\lambda}_e} \alpha^2 = \frac{e^2}{a_0} \Rightarrow G \frac{m_g^2}{\tilde{\lambda}_e} \alpha = \frac{e^2}{a_0 \alpha} \Rightarrow \frac{\alpha}{\tilde{\lambda}_e} = \frac{1}{a_0}.$$

Откуда имеем выражение для первого боровского радиуса

$$a_0 = \tilde{\lambda}_e \alpha^{-1}.$$

Вывод. Взаимодействие двух фундаментальных масс m_g на расстоянии комптоновской волны электрона $\tilde{\lambda}_e^{kompt}$ создает заряд e , определяет энергию электрона, который находится на первом боровском радиусе. Гравитационное взаимодействие фундаментальных масс на расстоянии боровского радиуса равно

энергии взаимодействия двух зарядов на расстоянии комптоновской длины волны электрона.

Можно провести выкладки и в другой последовательности

$$mV^2 = \frac{e^2}{a_0} \Rightarrow mc^2 \frac{V^2}{c^2} = \frac{\alpha e^2}{\lambda_e^{komp}} \Rightarrow mc^2 \alpha^2 = \alpha \frac{e^2}{\lambda_e^{komp}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Gm_g^2 / \lambda_e^{komp} = \frac{e^2}{\lambda_e^{komp} \alpha} \Rightarrow \frac{1}{\lambda_e^{komp}} = \frac{1}{\lambda_e^{komp}}.$$

Если провести преобразования в обратном порядке при соблюдении соотношений

$$\frac{V}{c} = \alpha, \frac{\lambda_e^{komp}}{\alpha} = a_0, \text{ то предельное соотношение гравитационного луча даст}$$

уравнение динамического равновесия.

Если третье преобразование в этой цепочке поделить на $1/2$, то получим

$$\frac{1}{2} mc^2 \alpha^2 = \frac{1}{2} \frac{e^2}{a_0} \Rightarrow \frac{1}{2} mc^2 \alpha^2 = R_\infty$$

То есть получили энергию ионизации электрона в атоме водорода. Энергия основного состояния атома водорода равна $-R_\infty$.

Эту энергию можно выразить через фундаментальные постоянные $m_g, G, \alpha, \lambda_e^{komp}$.

$$-R_\infty = -\frac{1}{2} \alpha^2 mc^2 = -\frac{1}{2} \alpha^2 G \frac{m_g^2}{\lambda_e^{komp}}$$

Предельное соотношение определяет гравитационно-электромагнитный луч. Из этого соотношения (как было показано) выводятся основные формулы структуры атома водорода и энергетические соотношения. Динамическое условие равновесия электрона на орбите является модификацией этого соотношения. Следствием этого является принадлежность орбит электрона пространству делителей нуля. В комплексном пространстве, в котором реализуются принципы интервала теории относительности орбита будет представлять комплекс вида

$$v = a_0 e^{i\phi + j\psi + k\phi} (1 + kj)$$

В этом случае орбита состоит из двух сферических оболочек, одна из которых повернута относительно друг друга на угол $\psi = \frac{\pi}{2}$. Но комплекс $e^{i\phi + j\psi}$ также содержит изолированное направление и поэтому необходимо рассматривать вариант

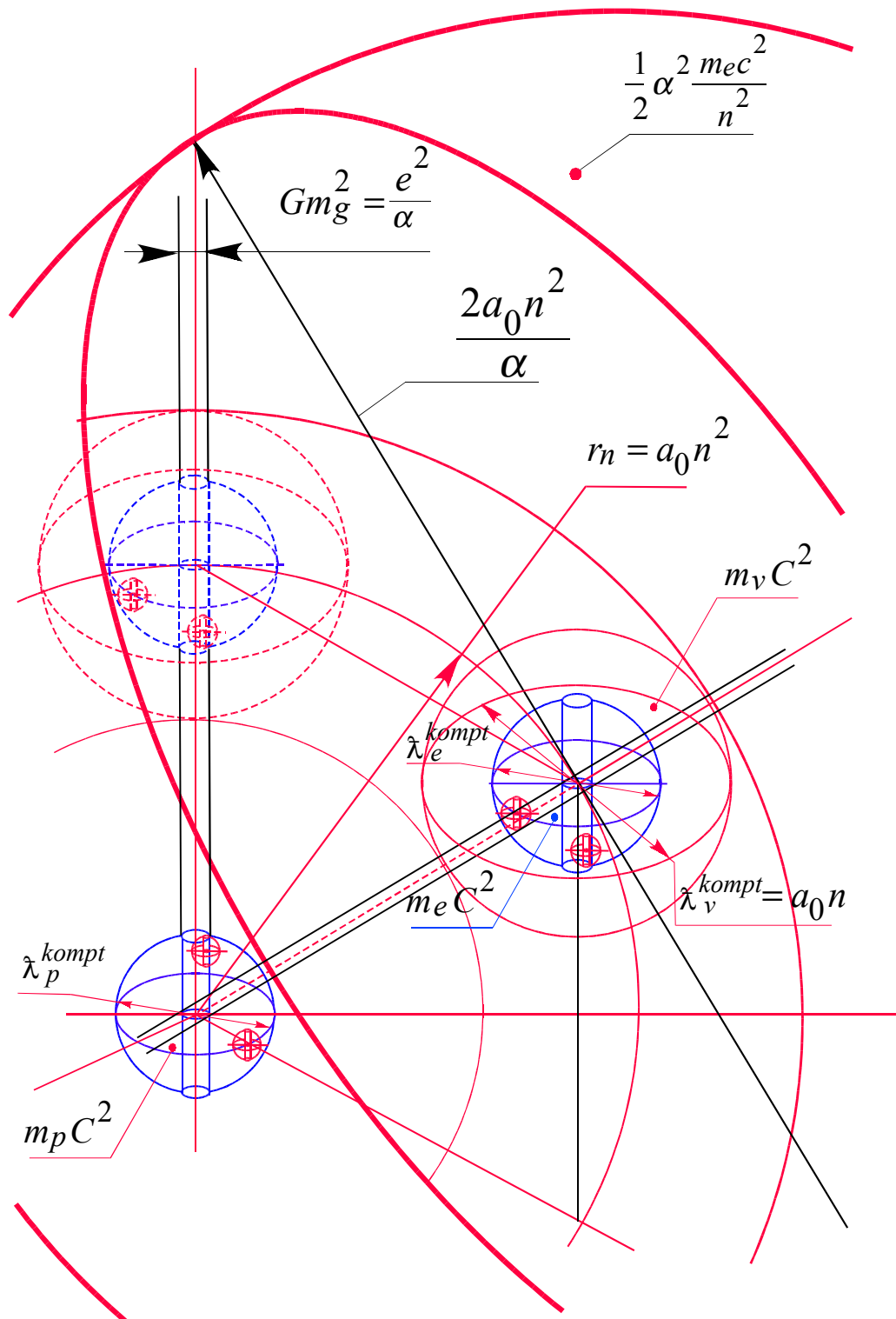


Рис. 68. Модель атома водорода.

$v = a_0 e^{i\varphi + j\psi + k\phi} (1 \pm ji)(1 \pm kj)$, который показывает, что орбита электрона состоит из двух сфер, поверхности которых образуют между собой

пространство заполненное пространственными сферами предыдущего измерения (можно выразиться для наглядности спинорами, напоминающими вращающийся электрон). Это сферическое пространство имеет толщину $\delta = \alpha \lambda_e^{komp}$.

Геометрически наглядное представление об оболочках дают рис 9,10,11 главы 1.

Итак, в комплексном пространстве, в котором соблюдается интервал Миньковского, орбита электрона представляет сферическую оболочку, принадлежащую пространству делителей нуля или гравитационно-электромагнитному лучу рис 68.

Протон, находясь в центре, создает искривление пространства. Это искривление как было обосновано является следствием особенности в начале координат, которую можно оценивать комптоновской длиной волны протона λ_p^{komp} . Масса и энергия протона определяется этим искривлением пространства

$$G \frac{m_g^2}{\lambda_p^{komp}} = m_p c^2.$$

Полевая энергия протона создает искривление пространства, которое в бесконечности исчезает (комплексные координаты переходят в декартовые без особенности в начале).

Орбиты электрона находятся на расстояниях, в которых искривление пространства соответствует энергии взаимодействия протона с электроном.

Комплексное пространство взаимодействия в соответствии с комплексной алгеброй и

Геометрией обладает структурой. Структура отвечает интервалу теории относительности. Пример формирования структуры приведен в главе 4 (рис 48) Компактизация пространства с ростом его много связности). Этот пример показывает, что не одна частица не может быть рассмотрена как точечная. Нельзя не один элемент структуры стянуть в точку, чтобы она не содержала объем. Поэтому нельзя ни электрон ни протон нельзя принимать как точечные объекты.

В соответствии с правилом квантования орбит Бора в стационарном состоянии атома электрон, двигаясь по круговой орбите, должен иметь квантовые значения момента импульса, удовлетворяющие условию

$$J_n = m_e V r = n \hbar, (n = 1, 2, 3, \dots), \text{ где } r - \text{радиус орбиты.}$$

При $n = 1$, имеем первую боровскую орбиту $r = a_0$. Элементарные преобразования по известным формулам дают

$$m_e a_0 V c / \hbar = 1 \Rightarrow \frac{V}{c} a_0 = \frac{\hbar}{m_e c} \Rightarrow \alpha a_0 = \lambda_e^{komp}.$$

Откуда имеем $a_0 = \alpha^{-1} \lambda_e^{komp}$.

Рассмотрим квантование момента импульса с позиции предельного соотношения гравитационного луча. Заменяем значение массы электрона через его значение

$$m_e = \frac{Gm_g^2}{\lambda_e^{kompt} c^2} \quad \text{получим} \quad \frac{Gm_g^2}{\lambda_e^{kompt}} \left(\frac{V}{c} \right) a_0 = \hbar c, \quad \text{далее применим формулу}$$

$$e^2 = \hbar c \alpha \quad \text{получим} \quad \frac{Gm_g^2}{\lambda_e^{kompt}} \alpha a_0 = \frac{e^2}{\alpha}. \quad \text{Проведем сокращение на предельное}$$

$$\text{равенство } Gm_g^2 = \frac{e^2}{\alpha} \quad \text{получим} \quad a_0 = \alpha^{-1} \lambda_e^{kompt}.$$

Таким образом, на первой боровской орбите выполняется предельное соотношение гравитационного-электромагнитного луча. Это говорит о том, что первая боровская орбита принадлежит пространству делителей нуля, которое эквивалентно полювому пространству взаимодействий.

Далее рассмотрим орбиты при $n \neq 1$. Первый вариант

$$m_e V r = n \hbar \Rightarrow m_e c \frac{V}{c} r = n \hbar \Rightarrow \frac{V}{c} r = n \lambda_e^{kompt}$$

$$\text{Преобразуем также динамическое соотношение } m_e V^2 = \frac{e^2}{r} \Rightarrow m_e c^2 \left(\frac{V}{c} \right)^2 = \frac{e^2}{r}$$

Воспользуемся предыдущим выводом, получим

$$m_e c^2 \frac{n^2 (\lambda_e^{kompt})^2}{r^2} = \frac{e^2}{r} \quad \text{откуда} \quad \text{имеем} \quad \text{радиус} \quad \text{орбиты}$$

$$r = \frac{m_e c^2 n^2 (\lambda_e^{kompt})^2}{e^2} = G \frac{m_g^2}{\lambda_e^{kompt}} n^2 (\lambda_e^{kompt})^2 \frac{1}{e^2}.$$

Сокращая последнее равенство на предельное соотношение получим

$$r = \frac{1}{\alpha} n^2 \lambda_e^{kompt} = n^2 a_0$$

Таким образом, видно, что радиусы орбит растут пропорционально квадрату целых чисел.

В атомной физике радиусы орбит определяются по формуле

$$r_n = n^2 \hbar^2 / (m_e e^2) \quad \text{при } Z=1. \quad \text{Покажем, что это выражение отвечает предельному соотношению гравитационного луча. Проведем последовательно преобразования}$$

$$r_n = n^2 \hbar^2 c^2 / (m_e c^2 e^2) = n^2 \frac{e^2}{m_e c^2} \frac{1}{\alpha^2} = n^2 \lambda_e^{kompt} \frac{1}{\alpha} = n^2 a_0.$$

Следовательно стационарные орбиты принадлежат пространству делителей нуля (изолированному направлению, световому конусу, гравитационно-электромагнитному лучу...).

Стационарные орбиты (рассматривая их как траектории электрона) в цилиндрических координатах представляют траектории описываемые мнимым

радиусом. В сферических координатах радиус становится равным $\sqrt{0}$. Полевая энергия, удерживающая электрон на стационарной орбите, также разлагается в этих точках на две составляющие, равные по величине и повернутые относительно друг друга на 90 град.. В результате электрон на стационарной орбите не имеет суммарной энергии.

Предельное уравнение гравитационно – электромагнитного луча было выведено при условии равенства гравитационной силы (закон Ньютона) силе электрического взаимодействия двух зарядов (закон Кулона). При этом взаимодействие рассматривалось для точечных частиц. При рассмотрении взаимодействия неточечных частиц была получена формула связи массы частицы через массу фундаментальной постоянной и комптоновскую длину волны этой частицы. Расчеты совпали с экспериментальными данными. Исходя из этой формулы кинетическая потенциальная и другая форма энергии может быть выражена через эти величины. Если имеем $E = \frac{m_x V^2}{2}$, то можно записать

$$\frac{m_x V^2}{2} = \frac{G m_g^2}{\lambda_x^{komp}} \alpha^2, \text{ откуда имеем}$$

$$\lambda_x^{komp} = \frac{G m_g^2}{m_x V^2} 2 \alpha^2.$$

Полная энергия точечного электрона на орбите может быть выражена в виде $E = \frac{1}{2} m_e V^2 - \frac{e^2}{r}$, условие динамического равновесия для точечного электрона на круговой орбите радиуса $r = a_0$ имеет вид $\frac{m_e V^2}{a_0} = \frac{e^2}{a_0^2}$. Из этих уравнений следует

$$E = -\frac{1}{2} \alpha^2 m_e c^2.$$

Кинетическая энергия составляет половину потенциальной энергии.

В комплексных пространственных координатах электрон рассматривается не как точечный объект. Уравнение для полной энергии запишем в виде

$$E = \frac{1}{2} m_e V^2 \pm j i \frac{e^2}{a_0} = \frac{1}{2} \frac{G m_g^2}{\lambda_e^{komp}} \alpha^2 \pm j i \frac{e^2}{a_0} = \frac{1}{2} \frac{G m_g^2}{\lambda_e^{komp}} \alpha^2 \left(1 \pm j i 2 \lambda_e^{komp} \frac{e^2}{G m_g^2 \alpha a_0} \right).$$

Далее имея условия в виде $\lambda_e^{komp} = \alpha a_0$, $\frac{e^2}{\alpha} = G m_g^2$, а также, что кинетическая энергия составляет половину потенциальной энергии будем иметь

$$E = \frac{1}{2} \frac{G m_g^2}{\lambda_e^{komp}} \alpha^2 (1 \pm j i) = \frac{1}{2} \alpha^2 m_e c^2 (1 \pm j i) = R_\infty \sqrt{0} e^{\pm j \arg tgi}$$

Из этой формулы следует, что взаимодействие электрона с протоном происходит по изолированному направлению радиуса $\sqrt{0}$. Энергия системы состоит из двух

равных составляющих, повернутых относительно друг друга на 90 град.. Энергия не имеет суммарной составляющей на орбите. Электрон не может излучать энергию при движении по стационарной орбите, так как его энергия по модулю на точках орбиты равна нулю.

Для перехода с орбиты на орбиту необходима энергия той же структуры, т.е. фотон.

Только в этом случае составляющие энергии одновременно изменятся на одну и ту же величину.

$$E_n - E_{n=1} = \hbar \varpi (1 \pm ji), \text{ где } \varpi - \text{частота фотона.}$$

Далее, используя оператор взаимодействия, оценим энергию обменного кванта или ту полевою энергию, которая создавая искривление пространства, заполняет его гравитационной волной, которая и удерживает электрон на орбите (или систему электрон- протон).

$$\left\| \frac{m_e V^2}{2} - \frac{e^2}{r} \right\| = (m_e + m_p) c^2 - \sqrt{((m_e + m_p) c^2)^2 - (m_v c^2)^2}$$

Учитывая большую разницу в массах протона и электрона, а также что сумма энергии протона и электрона превышает величину обменной полевой массы $m_v c^2$,

последовательно оценим выражение $\left\| \frac{m_e V^2}{2} - \frac{e^2}{r} \right\| = \frac{1}{2} \frac{m_v^2 c^2}{(m_e + m_p)}$. На первой

боровской орбите кинетическая энергия электрона меньше потенциальной в два раза и по модулю равна постоянной Ридберга, поэтому величина полевой энергии равна

$$m_v c^2 = \sqrt{(m_e + m_p) c^2 m_e \alpha^2} \text{ или в граммах имеем } m_v = \alpha \sqrt{m_e m_p}$$

Энергия обменного кванта есть полевая энергия и поэтому она в комплексном пространстве представима в виде $E = m_v c^2 (1 \pm ji) = m_v c^2 \sqrt{0} e^{\pm j \arctg i}$.

Энергия обменного кванта реализуется через изолированное направление. Реализация идет без потерь (без излучения), так как ее модуль равен нулю. Используя формулу связи комптоновской волны с фундаментальной массой и массой частиц, получим комптоновскую длину волны полевой энергии

$$\lambda_v^{komp} = \sqrt{\lambda_p^{komp} \lambda_e^{komp}}.$$

Фотон как носитель полевой энергии взаимодействует в изолированном ε -туннели с полевою обменной массой, изменяя ее энергию $E = m_v c^2 (1 \pm ji) + \hbar \varpi (1 \pm ji) = (m_v c^2 + \hbar \varpi) (1 \pm ji)$ (ясно, что могут быть и другие комбинации со знаками плюс и минус, но на этом пока не задерживаем внимание)

Изменение энергии электрона при переходе с орбиты на орбиту можно рассчитать через оператор взаимодействия выведенный на основе пространственной комплексной алгебры, которая учитывает принципы теории относительности. Кинетическая и потенциальная энергия электрона на орбите есть проявление энергии дефекта массы при взаимодействии электрона с протоном.

Оператор как было показано выше позволяет рассчитать полевую энергию взаимодействия электрона с протоном, идущую через изолированное направление системы.

Экспериментально установлено, что масса протона, которая значительно превышает массу электрона, может быть введена в формулы только как уточнение результатов. Поэтому энергию электрона на $n-1$ орбите через оператор следует записать в виде

$$W_{n-1} = m_e c^2 - \sqrt{(m_e c^2)^2 - (m_{v(n-1)} c^2)^2}, \quad \text{где обозначено } m_{v(n-1)} c^2 \text{ - за}$$

полевою энергию изолированного направления.

Для n будем иметь

$$W_n = m_e c^2 - \sqrt{(m_e c^2)^2 - (m_{v(n)} c^2)^2}. \quad \text{Изменение энергии при переходе с}$$

орбиты на орбиту равно

$$\Delta W = W_{n-1} - W_n = \sqrt{(m_e c^2)^2 - (m_{v(n-1)} c^2)^2} - \sqrt{(m_e c^2)^2 - (m_{v(n)} c^2)^2}$$

Полевая масса естественно меньше массы электрона. При превышении полевой массы массы электрона происходят изменения в самой системе. Поэтому рассматривается случай когда электрон не теряет в атоме своей индивидуальности. Ограничиваясь формулами приближения квадратных корней будем иметь

$$\Delta W = \frac{1}{2} \frac{(m_{v(n-1)} c^2)^2 - (m_{v(n)} c^2)^2}{m_e c^2}$$

Таким образом, изменение энергии электрона при переходе с орбиты на орбиту происходит вследствие изменения полевой энергии взаимодействия. При переходе происходит изменение частоты $\nu = R \left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} \right) \cong \frac{2R}{n^3}$. Соответственно энергия

перехода равна $\Delta W = \frac{2Rh}{n^3}$, где $R = \frac{m_e e^4}{(8h^3 \epsilon_0^2)}$ - постоянная Ридберга была определена

из принципа соответствия результатов квантомеханического и классического решения. Здесь постоянная приведена с характеристикой среды (ϵ_0 - диэлектрическая проницаемость среды). Без ее учета постоянную Ридберга будем

применять в классическом выражении $R = \frac{m_e e^4}{2\hbar^2} = \frac{1}{2} \alpha^2 m_e c^2$.

Через оператор взаимодействия определим полевою обменную массу для n - орбиты.

$$\frac{1}{2} \alpha^2 m_e c^2 \frac{1}{n^2} = m_e c^2 - \sqrt{(m_e c^2)^2 - (m_{v(n)} c^2)^2}.$$

Можно использовать два варианта расчета. Первый

$$\left(\frac{1}{2} \alpha^2 m_e c^2 \frac{1}{n^2} - m_e c^2 \right)^2 = (m_e c^2)^2 - (m_{v(n)} c^2)^2. \quad \text{Откуда имеем}$$

$$m_{v(n)}c^2 = \frac{\alpha}{n} m_e c^2 \sqrt{1 - \frac{1}{4} \frac{\alpha^2}{n^2}} = \frac{\alpha m_e c^2}{n} \left(1 - \frac{1}{8} \frac{\alpha^2}{n^2}\right) \quad \text{Второй вариант, если сразу}$$

разложить квадратный корень

$$m_{v(n)}c^2 = \frac{\alpha}{n} m_e c^2. \quad \text{Проанализируем результат. На первой боровской орбите}$$

отношение скорости электрона к световой скорости равно α . При переходе на n -орбиту скорость падает в n -раз. Энергия обратно пропорциональна квадрату главного квантового числа n . Поэтому при $n=1$ имеем энергию полевого кванта на

первой боровской орбите равной $m_{v(1)}c^2 = \alpha m_e c^2$. Так, что постоянная тонкой

структуры определяет часть энергии электрона, которая служит обменным квантом или полевой энергией, которая удерживает электрон на первой боровской орбите. Используя предельное выражение гравитационно-электромагнитного луча

$$\text{рассчитаем комптоновскую длину обменного кванта} \quad G \frac{m_g^2}{\lambda_{v(n)}^{komp}} = \alpha G \frac{m_g^2}{\lambda_e^{komp}} \frac{1}{n}.$$

Откуда получаем

$$\lambda_{v(n)}^{komp} = \lambda_e^{komp} \alpha^{-1} n = a_0 n.$$

Таким образом, комптоновская длина волны обменного кванта равна радиусу орбиты на которой находится электрон. При $n = 1$ имеем

$$\lambda_{v(1)}^{komp} = a_0.$$

$$\text{Для уточненной формулы имеем } \lambda_{v(n)}^{komp} = a_0 n \left(1 - \frac{1}{8} \frac{\alpha^2}{n^2}\right). \text{ Частота обменного}$$

кванта, определяющая переход электрона с орбиты на орбиту будет равна

$$\Delta \varpi \cong \frac{c}{a_0 n^2}$$

. Подставляя полученные данные в равенство, которое было выведено с использованием оператора взаимодействия и проведя преобразования получим

$$\frac{\alpha^2 m_e c^2}{n^3} = \frac{\alpha}{n} \Delta \varpi h. \text{ Скорость на орбите } \frac{V_n}{c} = \frac{\alpha}{n} \text{ (это вытекает из динамического}$$

$$\text{уравнения равновесия) Поэтому имеем } \frac{V_n}{c} \frac{m_e c}{n^2} \frac{c}{c} a_0 n^2 = h$$

В квантовом условии Нильса Бора скорость на n -орбите меньше скорости на первой боровской орбите в n раз, орбита радиуса $r_n = n^2 a_0$. Подставляя эти данные

$$\text{в полученное уравнение будем иметь } \frac{V_0}{n^2} m_e a_0 n^2 = h. \text{ или соблюдая соотношения}$$

между скоростью и радиусом орбиты получим $V_n r_n m_e = n h$. Таким образом, выведено квантовое условие Нильса Бора, которое утверждает, что

В стационарном состоянии атома электрон, двигаясь по круговой орбите, должен иметь квантовые значения момента импульса, удовлетворяющие условию

$$Vrm = nh, (n = 1, 2, 3, \dots)$$

В пространстве Минковского интервал ds есть величина выражаемая как корень квадратный из разности суммы квадратов пространственных координат R и квадрата временной координаты $ds = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2}$. В комплексном

пространстве это выражается в виде $ds = R \pm jict = \sqrt{R^2 - (ct)^2} e^{\pm jarktgi \frac{ct}{R}}$.

Временная координата отвечает за сокращение модуля пространства при переходе от одной размерности к другой. В сферических координатах при равенстве $ct = R$ запись показывает, что в начале координат есть комплексная особенность в виде сферы радиуса $\sqrt{0} \neq 0$ ввиду наличия изолированного направления

$e^{\pm jarktgi}$. Дефект этого сокращения выражается в виде $\Delta ds = R - \sqrt{R^2 - (ct)^2}$. При замене пространственных и временных координат на энергетические массы частиц определяет дефект массы взаимодействия. Для системы водород-электрон имеем

$R = m_e c^2, ct = m_v c^2, \Delta ds = W_R$, где W_R – энергия ионизации. При образовании

систем полевая энергия $m_v c^2$ характеризует энергию, идущую на искривление пространства. В системе водород – электрон полевая энергия обменного кванта характеризует искривление пространства орбиты электрона. Искривление

определяется комптоновской длиной обменного кванта $m_v c^2 = \frac{Gm_g^2}{\lambda_v^{kompt}}$. Протон

бесконечной массы в центре системы вызывает искривление равное λ_p^{kompt} ,

которое убывает с ростом радиуса орбиты λ_v^{kompt} . Кинетическая и потенциальная энергия электрона на орбите соответствуют по энергии искривлению пространства на орбите. Согласно оператора взаимодействия имеем

$W_R = m_e c^2 - \sqrt{(m_e c^2)^2 - (m_v c^2)^2}$. Переходя к комптоновским длинам волн будем

иметь $\frac{1}{\lambda_W^{kompt}} = \frac{1}{\lambda_e^{kompt}} - \sqrt{\left(\frac{1}{\lambda_e^{kompt}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\lambda_v^{kompt}}\right)^2}$. Вычислим в первом

приближении корень квадратный $\Delta \lambda = \frac{1}{\lambda_e^{kompt}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_e^{kompt}}{\lambda_v^{kompt}}\right)^2}$. Подставим величину

комптоновской длине волны обменного кванта, определенную выше

$\lambda_v^{kompt} = \lambda_e^{kompt} \alpha^{-1} n$ получим $\Delta \lambda = \frac{1}{\lambda_e^{kompt}} - \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{n^2} \frac{1}{\lambda_e^{kompt}} - \frac{1}{4} \frac{\alpha^4}{n^4} \frac{1}{\lambda_e^{kompt}}$.

Переходя к энергии связи электрона на орбите получим

$$G \frac{m_g^2}{\lambda_{w}^{kompt}} = \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{n^2} G \frac{m_g^2}{\lambda_e^{kompt}} + \frac{1}{4} \frac{\alpha^4}{n^4} G \frac{m_g^2}{\lambda_e^{kompt}} \cong \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{n^2} G \frac{m_g^2}{\lambda_e^{kompt}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{n^2}\right).$$

Ограничиваясь рассмотрением первого члена разложения получим

$W = \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{n^2} m_e c^2$, „ получим в точном соответствии с расчетами теоретической физики. Второй член дает поправку, совпадающую с поправкой Дирака по степени α^2 .

$$W_n = - \frac{m_e c^2}{2} \frac{\alpha^2 Z^2}{n^2} \left[1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{n^2} \left(\frac{n}{l + 1/2} - \frac{3}{4} \right) \right]$$

На рис 68 представлена модель атома водорода. Наклонный гравитационно-электромагнитный луч представлен в цилиндрических координатах. Электрон находится на орбите, которая представляет из себя сферическое кольцо, образованное полевой материей обменного кванта с длиной волны λ_v^{kompt} и создающий вокруг электрона прогиб пространства, который отвечает длине волны энергии связи электрона на орбите W_n . Система водород-электрон имеет в центре координат (где находится водород) комплексную особенность равную длине волны протона λ_p^{kompt} . На расстоянии равном орбите электрона комплексная особенность сокращается до длины волны энергии связи электрона с водородом $2a_0 n^2 / \alpha$. Все эти особенности принадлежат пространству делителей нуля, то есть пространству двух взаимно перпендикулярных векторов, имеющих мнимый радиус в цилиндрических координатах. Каждая точка этой сферической орбиты имеет свой мнимый радиус. Масса обменного кванта находится в другом измерении по отношению к измерению пространства, в котором находится электрон. На рис 68 это представлено сферой обменного кванта, который заполняет сферическое пространство орбиты. Для стационарных орбит прогиб пространства постоянен. Энергия электрона и обменного кванта в сферических координатах на стационарных орбитах равна по модулю нулю и имеет бесконечное изолированное направление гравитационного луча, на котором она фиксируется радиусами орбит. Итак орбиты электронов представляют пространство между сферическими оболочками, раздвинутыми на расстояние равное комптоновской длине обменного кванта λ_v^{kompt} равному $\alpha^{-1} n \lambda_e^{kompt}$.

7.9 Доказательство гипотезы М. Планка о квантах энергии.

При выводе формулы излучения черного тела М. Планк около 1900 года выдвинул гипотезу, которая в современной формулировке, такова: осцилляторы могут находиться только в некоторых избранных состояниях, в которых их энергия является целым кратным наименьшего количества энергии ε_0 :

$$\varepsilon_0, 2\varepsilon_0, 3\varepsilon_0, \dots, n\varepsilon_0$$

при излучении или поглощении осциллятора переходят из одного из этих состояний в другое скачком, минуя промежуточные состояния. [21].

При выводе формулы гипотеза позволила рассчитать среднюю энергию осциллятора как частное от деления суммы квантованных энергий на общее количество осцилляторов. Частное от деления двух рядов дало математически изящную формулу, что явилось ключевым моментом при выводе формулы. Члены ряда были представлены как квантованные энергии каждого из осцилляторов.

Э. Вихман [17] обращает внимание не только на квантование энергии в микромире, а на зависимость, которая определяет это квантование, что является также существенным моментом в квантовой механике. По существу Планк предложил формулу для расчета энергии в микромире $E = \hbar \nu$. Формула вытекает из странного равенства, как говорит Э. Вихман.

$\frac{E}{\nu} = X$, где E – энергия, ν – частота, X – постоянная, имеющая размерность действия.

Размерность можно образовать из констант e и C , а именно: $\left(\frac{e^2}{c}\right)$. К настоящему

времени известны из экспериментов все фундаментальные величины, поэтому $\left(\frac{e^2}{c}\right) = \left(\frac{h}{860}\right)$. Следовательно величина $\frac{e^2}{c}$ отличается от постоянной $X = h$

почти на три порядка. Таким образом, соображения размерности не дают обнадеживающего результата. Далее отмечается, что невозможно придумать классический механизм, который приводил бы к этой формуле энергии. Это не удалось сделать до настоящего времени никому.

Формула выражает фундаментальный принцип квантовой физики. В ней заложен универсальный характер связи между энергией и частотой. Эта связь полностью чужда классической физике и мистическая константа $X = h$ есть проявление не постигнутых тайн природы [17]. Таким образом, не взирая на фундаментальные экспериментальные открытия в течении 100 лет гипотеза Планка остается не доказанной теоретически.

В 7,7 и 7.8 при расчете модели атома водорода был выведен и обоснован постулат Н. Бора о квантовании момента импульса электрона на орбите. Фактически была доказана гениальная догадка Бора. В этом параграфе докажем гипотезу М. Планка.

Докажем, что предельное соотношение гравитационно-электромагнитного луча содержит формулу Планка. Имеем $Gm_g^2 = \frac{q^2}{\alpha}$. Левую часть поделим на длину волны λ_i^{komp} , а правую на ее выражение через частоту ν

$$\frac{Gm_g^2}{\lambda_i^{komp}} = \frac{q^2 v}{c\alpha}, \text{ где } q = e = 4.8 \cdot 10^{-10} CGCE_q, \alpha = \frac{1}{137}.$$

Элементарная величина заряда e известна, коэффициент α был определен как соотношение между гравитационным и электромагнитным радиусом при выводе

исходной формулы, поэтому имеем $E_i = \left(\frac{e^2}{c\alpha} \right) \nu$. Элементарный заряд выражается

через фундаментальные постоянные как $e^2 = \hbar c$ и превосходит заряд e в α^{-1} ,

поэтому $E_i = \left(\frac{\hbar c \alpha}{c\alpha} \right) \nu = \hbar \nu$.

Формула Планка доказана. Снимается вопрос о размерности, так как очевидно $\left(\frac{e^2}{c} \right) = \left(\frac{h}{137 \cdot 2\pi} \right) = \frac{h}{860}$. Следовательно, при выделении произведения постоянных

$2\pi \cdot \alpha^{-1} \cong 860$ постоянная Планка будет равна $\frac{E_i}{\nu} = h$.

Повторим вывод с современных позиций.

Гравитационно-электромагнитное соотношение выведено на основе равенства в пределе между гравитационным и электрическим потенциалом

$$Gm_g^2 = \frac{e^2}{\alpha}, \text{ где } \alpha = \frac{1}{137} = \frac{r_g}{r_e} \text{ - есть отношение расстояний гравитационного}$$

r_g и электрического r_e эквивалентного взаимодействия фундаментальных масс m_g .

Соблюдая размерность и численную величину элементарного заряда будем иметь $e^2 = \hbar c \alpha$. Если подставить это выражение в предыдущее, то получим

выражение для фундаментальной массы $m_g = \hbar^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} G^{-\frac{1}{2}}$. Все выражения

согласуются с формулами теоретической физики. Далее, делим левую часть исходного равенства на комптоновскую длину волны частицы или энергии λ_i^{komp} ,

а правую на ее выражение через частоту этой длины волны $\lambda_i^{komp} = \frac{c}{\nu}$. В

результате будем иметь

$$\frac{Gm_g^2}{\lambda_i^{komp}} = \frac{\hbar c \alpha}{c\alpha} \nu. \text{ Было доказано, что левая часть это энергия } E_i, \text{ поэтому}$$

имеем

$$E_i = \hbar \nu \text{ или } \frac{E}{\nu} = \hbar. \text{ Гипотеза М. Планка доказана.}$$

Соотношение размерностей в численном виде выражается также через известные постоянные

$\left(\frac{e^2}{c}\right) = \left(\frac{\hbar c \alpha}{c}\right) = \left(\frac{h}{2\pi \cdot 137}\right) = \left(\frac{h}{860}\right)$. И не вызывает противоречий, о которых говорит автор Берклеевского курса физики. том 4. Квантовая физика. Э. Вихман [17].

Правило квантования орбит Бора утверждает, что в стационарном состоянии атома электрон, двигаясь по круговой орбите, должен иметь квантовые значения момента импульса, удовлетворяющие условию $L_n = m_e V r = n \hbar$, ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Второй постулат Бора утверждает, что при переходе атома из одного стационарного состояния в другое испускается или поглощается один фотон. Если W_n, W_m энергии атома в двух стационарных состояниях, то $W_n - W_m = h \nu_{nm}$. Таким образом, Бор реализовал гипотезу Планка.

Правило квантования орбит совместно с динамическими уравнениями электрона на орбите дают энергетические и геометрические характеристики системы водород-электрон.

Уравнение гравитационно-электромагнитного луча является исходным для вывода классических соотношений классической и квантовой физики.

Имеем динамическое уравнение $m_e V^2 = \frac{e^2}{a_0}$, заменим массу электрона на ее значение $m_e c^2 = \frac{G m_g^2}{\lambda_e^{kompt} c^2}$ получим $\frac{G m_g^2}{\lambda_e^{kompt}} \frac{V^2}{c^2} = \frac{e^2}{a_0}$ или $\frac{G m_g^2}{\lambda_e^{kompt}} \alpha = \frac{e^2}{a_0 \alpha}$.

Сокращая на соотношение гравитационно-электромагнитного луча получим

$\frac{\alpha}{\lambda_e^{kompt}} = \frac{1}{a_0}$. Таким образом, получили выражение для первого Боровского радиуса.

$$a_0 = \alpha^{-1} \lambda_e^{kompt}.$$

ГЛАВА 8. КЛАССИФИКАЦИЯ МИКРОЧАСТИЦ. СТРУКТУРА ФИЗИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА МИКРОЧАСТИЦ СООТВЕТСТВУЕТ СТРУКТУРЕ МНОГО СВЯЗНОГО КОМПЛЕКСНОГО ПРОСТРАНСТВА.

8.1 Модели микрочастиц в гравитационном электрическом и лептонном комплексном пространстве. Соответствие между изолированными направлениями в комплексном пространстве и зарядовыми сопряжениями микрочастиц. Квантовые числа микрочастиц отражение много связности комплексного пространства.

Всеобщая взаимосвязанность и взаимопревращаемость элементарных частиц свидетельствует о том, что каждая частица состоит из комбинации таких же элементарных частиц или в сущности существует единая первооснова или единая общая первоматерия (как принято говорить).

В этой главе классификация микрочастиц проведена совершенно на новой основе, чем это осуществлено (неуспешно) в настоящее время. С этих позиций критика существующих классификаций становится ненужной.

За первооснову – первоматерию принято комплексное пространство, в котором локальная концентрация энергии происходит в соответствии с его структуризацией. В свою очередь будет показано, что свойства микрочастиц, закодированные современными экспериментаторами (спин, изоспин, заряды и т.д.) есть отражение свойств комплексного пространства.

Экспериментальная и теоретическая физика установила, что микрочастица это частица вещества и полевой материи. Полевая материя является переносчиком взаимодействия. Теоретическая физика стремится к созданию единой теории поля, к объединению всех полей взаимодействия: гравитационного, слабого, сильного и т.д. Поля описываются матрицами, уравнениями, всевозможными комбинациями матриц числовых с векторными полями. Например, классическая физика имеет дело с двумя типами объектов- частицами и волнами, осуществляющими взаимодействие между частицами. Квантовая физика устранила эту двойственность, рассматривая частицы и волны как проявление свойств одного и того же объекта. Квантовые поля вводятся для описания частиц и взаимодействия между ними. Поля зависят от координат и времени и описывают так называемое, локальное состояние вакуума. Поля представляют математические объекты, определяемые операторами и не являются больше обычными комплексными функциями.

Предсказательная сила полевых теорий к настоящему времени не дает основания утверждать, что описано то полевое пространство, в котором существуют объективно все формы материи. Не выяснен код структуризации пространства с ростом ее размерности. Экспериментаторы открывают все новые микрочастицы и резонансы, наделяя их новыми зарядовыми сопряжениями. Открыто пять кварков и предсказывается открытие шестого. Таким образом, количество единиц, претендующих на фундаментальные увеличивается. Не указана та симметрия, которая отвечает за электрический или лептонные заряды и т.д. Многие характеристики микрочастиц закодированы и не имеют связи с характеристиками того пространства, в котором определены эти микрочастицы. Все это говорит о том, что к настоящему времени нет того математического про-

пространства, которое претендует по своим характеристикам на описание пространства объективно существующей материи. Экспериментаторы в связи, с этим открывая все новые частицы вскрывают все новые характеристики пространства, в котором реализован объективный мир. Преобразования Лоренца и открытие интервала Минковским остается самым существенным вкладом в изучение пространства.

Физика микрочастиц открывая новые микрочастицы одновременно открывает закономерности математического аппарата, который описывает поля и предсказывает в них то или иное физическое явление (каналы распада микрочастиц или их образование). В настоящее время нет описания пространства, обладающего той связностью, которая рас кодировала бы тот огромный материал, который накоплен в экспериментах. Фундаментальное понятие связности, которое дало особенно сильные результаты в теории Коши, вообще не отражено при классификации микрочастиц.

Таким аппаратом являются методы теории функций пространственного комплексного переменного (ТФКПП). Структура много связного пространства, описываемая этим аппаратом, соответствует структуре физического пространства микрочастиц.

Всеобщая взаимосвязность и взаимопревращаемость элементарных частиц говорит о наличии единого энергетического поля и единого математического аппарата. Локальная структуризация поля, вызванная концентрацией энергии в замкнутом объеме, воспринимается как микрочастица, которая может сохранять свои структурные параметры определенное время без изменения. Варианты локальной концентрации энергии, приводящие к образованию микрочастицы находятся в прямой зависимости от свойств поля. Эти свойства в экспериментальных исследованиях характеризуются квантовыми числами микрочастиц: фундаментальное свойство заряда быть положительным и отрицательным; заряды: электрический, лептонный, барионный; спины частиц: спин и изотопический спин; заряды: странность, шарм, и так далее, цветовой заряд.

Это многообразие экспериментальных данных необходимо поставить в однозначное соответствие алгебре и геометрии комплексного пространства.

4-х мерное комплексное пространство в общем координатном виде представляется в виде

$$\Psi_{n=4} = \rho e^{i\varphi} + jre^{j\alpha} + kte^{i\gamma+j\beta} \quad (8.1.1.)$$

МИКРОЧАСТИЦА ЕСТЬ ЛОКАЛЬНАЯ СТРУКТУРИЗАЦИЯ ЭНЕРГИИ В ПРОСТРАНСТВЕННО ВРЕМЕННОМ КОМПЛЕКСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

Введенное и исследованное в главах 1, 3, 5, 7 пространство обладает преимуществом перед другими тем, что имеет подпространства делителей нуля, которое может интерпретироваться как полевое пространство. На рис 8 показано образование мнимой точки этого подпространства. Две составляющие координаты имеют мнимый суммарный модуль. Таким образом, наряду с действительным модулем, который отвечает за частицу вещества, в пространстве каждая точка имеет мнимый модуль, который отвечает за полевую часть материи-микрочастицы. Геометрическая интерпретация комплексного пространства и подпространства делителей нуля подробно изложены в 1-1-3, 1-1-4, 1-1-5. В плоскости сингулярность, ответственная за много связность, определяется делением на ноль. В пространстве наряду с этим сингулярность определяется наличием делителей нуля, которые образуют в начале сферических координат сфе-

рическую $\mathcal{E}$ -окрестность радиуса корня из нуля с изолированным направлением $e^{\pm jarktgi}$. С этой особенностью комплексного пространства связана его много связность. С увеличением размерности пространства появляются новые изолированные направления, например $e^{\pm karktgj}$. Пространства разной по величине размерности взаимодействуют между собой через вложенные друг в друга изолированные направления (смотри глава 4.3, 4.4, рис 47,48,49, 50,51). Много связность пространства характеризуется как комбинацией различных изолированных направлений $(e^{\pm jarktgi}, e^{\pm karktgj})$ так и их количеством на каждом уровне. Условно это можно обозначить выражением $\lambda e^{\pm karktgj} (\beta e^{\pm jarktgi})$, где скобки означают, что β изолированных туннелей $e^{\pm jarktgi}$ вложено в изолированные туннели $\lambda e^{\pm karktgj}$. Энергия, протекающая через эти комбинации изолированных туннелей, является энергией поля этой структуры. Принцип насыщения энергией туннелей лежит в основе полевого взаимодействия пространств. Этот принцип позволил вывести формулу энергии связи атомных ядер, см глава 5.

В главе 3 преобразования Лоренца (которые являются основными в математическом аппарате теории относительности) реализованы в комплексном пространстве чисел. Координатная запись преобразований Лоренца и пространство Минковского исключили из рассмотрения математический аппарат, который отвечает за полевую материю. Комплексное пространство является наиболее полным и более адекватно отражает процессы физического мира.

Определена симметрия пространства, которая отвечает за фундаментальные свойства заряда. В пространстве Минковского такую симметрию не удалось найти до настоящего времени, так как она (симметрия положительного и отрицательного заряда) была выброшена алгеброй, применяемой при определении интервала. Гравитационно-электрический потенциал в комплексном выражении установил, (рассмотренный в главе 7.7), что за положительный заряд любого структурного уровня отвечает положительное изолированное направление типа $e^{+karktgj}, e^{+jarktgi}$, за отрицательный заряд $e^{-karktgj}, e^{-jarktgi}$. Оба заряда могут быть образованы как в верхней так и нижней полусфере $\pm e^{\pm karktgj}, \pm e^{\pm jarktgi}$.

Свойство пространства образовывать положительный и отрицательный заряды в верхней и нижней полусфере закодировано в теоретической физике как наличие спина у частицы. Спиновой момент поворачивает заряд на угол $e^{i\pi}$ без изменения знака частицы. Электрон в атоме водорода может повернуться на 180 градусов не меняя своего зарядового сопряжения.

Пространство (8.1.1) имеет кроме этих двух зарядовых направлений третье $e^{karktgj}$, связанное с комплексом $(1 \pm ki)$. Это направление отличается от двух предыдущих. Мнимый суммарный вектор имеет начало из центра цилиндрической оси $\rho e^{i\varphi}$. Энергетический расчет должен ответить на вопрос с каким известным зарядовым сопряжением связан этот комплекс: с фотоном или магнитным зарядом.

Комплекс (8.1.1) путем выделения изолированных направлений может быть последовательно преобразован

$$\Psi_{n=4} = (\rho e^{i\varphi} \pm i r e^{i\alpha}) + r e^{i\alpha} (j \mp i) + k c t e^{i\gamma+j\beta}$$

$$\Psi_{n=4} = (\rho e^{i\varphi} \pm i r e^{i\alpha} \pm j c t e^{i\gamma+j\beta}) + r e^{i\alpha} (j \mp i) + c t e^{i\gamma+j\beta} (k \mp j)$$

Из первого члена выделим направление $(j + i)$

$$(\rho e^{i\varphi} \pm i r e^{i\alpha} \mp c t e^{i\gamma} \sin \beta) \pm j c t e^{i\gamma} \cos \beta$$

Подставляя это выражение в предыдущее получим

$$\Psi_{n=4} = (\rho e^{i\varphi} \pm i r e^{i\alpha} \mp c t e^{i\gamma} \sin \beta)$$

$$+ r e^{i\alpha} (j \mp i) + k c t e^{i\gamma+j\beta} (k \mp j) \pm c t e^{i\gamma} (j + i)$$

Таким образом, комплекс представлен как сумма изолированных направлений с весовыми коэффициентами, которые для каждого члена обозначим через a, b, c, d , так что будем иметь

$$\Psi_{n=4} = a + b(j \pm i) + c(k \pm j) + d(j + i) \quad (8.1.2)$$

Современная классификация микрочастиц позволяет представить микрочастицу как сумму изолированных направлений со своим набором весовых коэффициентов.

Структура микрочастиц формируется в комплексном пространстве, определенном на базе алгебры с операциями обычных действительных чисел. Делители нуля также подчиняются обычным операциям с действительными числами. Комплекс объединяет пространство чисел действительного модуля с подпространством чисел, не имеющих модуля. Делители нуля не имеют суммарного модуля. Подпространство делителей нуля адекватно световому конусу в цилиндрических координатах и сворачивается в изолированные направления в сферических координатах. Изолированные направления создают пространственную сингулярность и разные уровни связности.

Микрочастица является многосвязным пространственным образованием, вложенных друг в друга изолированных туннелей.

Таблица стабильных и квазистабильных частиц включает: фотон, лептоны, мезоны, барионы, кварки. Мезоны, барионы, кварки кроме электрического заряда имеют странный заряд, очарованный, прелестный. В настоящее время ищут частицу с зарядом правдивости. Лептонный уровень включает нейтрино электронное, мюонное, тау-нейтрино и соответственно электрон, мюон, тау-лептон. Кодировка физических свойств микрочастиц говорит о том, что физика элементарных частиц не имеет математического аппарата для описания многообразия свойств микромира.

Алгебра комплексного пространства и его геометрия доказывают, что все известные уровни микрочастиц подчиняются одной схеме структуризации в пределах комбинаций всего двух зарядовых сопряжений $(\lambda e^{\pm k a r k t g j} (\beta e^{\pm j a r k t g i}))$. Такое пространство представлено как гравитационно-электрическое пространство на рис. 64. В этом пространстве две оси представляют цилиндры $\mathcal{E}$ – радиуса, третья ось есть два соосных цилиндра $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ – радиусов, в пространство между которыми вписываются цилиндры $\mathcal{E}$ – радиуса. Эти цилиндры есть изолированные направления – туннели. Цилиндры (–оси-

туннели) $\mathcal{E}$ -радиуса заполнены нейтральными $\mathcal{E}$ -сферами действительного радиуса. Эти сферы можно идентифицировать как γ – кванты.

Как не фантастично это воспринимается, однако подтверждается экспериментально по выявленным каналам распада частиц, законами сохранения и так далее ...

8.2. Квантовые числа кварков есть следствие многосвязности пространства.

Структура нейтрино электронного, мюонного, тау-нейтрино (частицы соответственно обозначаются $\nu_e, \tilde{\nu}_e, \nu_\mu, \tilde{\nu}_\mu, \nu_\tau, \tilde{\nu}_\tau$) определена в пространстве $\sigma = (\alpha + i\beta) + j(\gamma + ic)$. Исследования этого комплекса проведены в главе 1. Комплекс в сферических координатах имеет в пространстве делителей нуля изолированное направление в виде $\pm e^{\pm jarktgi}$, которое принимаем за лептонный заряд $L_\nu = \pm e^{\pm jarktgi}$. Лептонных изолированных направлений может быть четыре: два имеют направление в верхнее пространство – полусферу $L_\nu = +e^{\pm jarktgi}$, два в нижнее полупространство -полусферу $L_\nu = -e^{\pm jarktgi}$. Электронное нейтрино ν_e представляет замкнутое комплексное пространство мнимого радиуса. В координатном виде это можно написать в виде $\nu_e = \lambda(1 \pm ji) = \lambda\sqrt{0}e^{\pm jarktgi}$, где λ - коэффициент пространственной или энергетической характеристики частицы (в общем случае это комптоновская длина волны $\lambda = \lambda_{\nu}^{komp}$). На рис. 69, 70 даны модели электронного нейтрино с положительной +1 спиральностью, и отрицательной спиральностью-1 соответственно. Спиральность определяется тривиальным методом: поворот составляющей мнимого радиуса против или по часовой стрелки (относительно направления вертикальной оси) до совмещения ее начальной исходной точки до начальной точки вертикальной составляющей этого радиуса на минимальный угол $\varphi = \pm\pi/2$. На рис 69, 70 повороты обозначены стрелочками.

Модели электронного нейтрино и антинейтрино отражают самое существенное в структуре этих частиц. Энергия, которая создает эти устойчивые структуры, распределяется в пространстве, создавая соответствующие изолированные направления лептонного заряда и спиральность.

Электронное антинейтрино $\tilde{\nu}_e$ представлено на рис 71, 72. Антинейтрино может иметь два варианта отрицательного изолированного направления также в верхнее и нижнее полупространство и два значения спиральности ± 1 . Соответственно электронное антинейтрино может быть выражено в координатном виде $\tilde{\nu}_e = \lambda(1 - ji) = \lambda\sqrt{0}e^{-jarktgi}$.

Аннигиляция нейтрино и антинейтрино приводит к образованию двух гамма квантов. Согласно алгебре комплексных чисел имеем $\nu + \tilde{\nu} = \lambda(1 + ji) + \lambda(1 - ji) = 2\lambda$. Возможны и другие варианты $\nu + \tilde{\nu} = \lambda(1 - ji) - \lambda(1 - ji) = 2ji$. Гамма-квант имеет действительный модуль. Направление гамма кванта определяется его коэффициентами $\pm ji, \pm 1$ и зависит от спиральности нейтрино и антинейтрино.

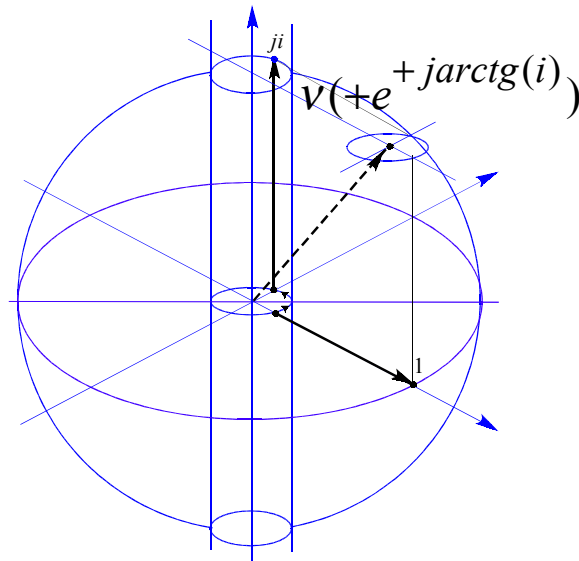


Рис 69 Модель электронного нейтрино с положительной спиральностью. Глюонное поле создает изолированное направление положительного лептонного заряда.

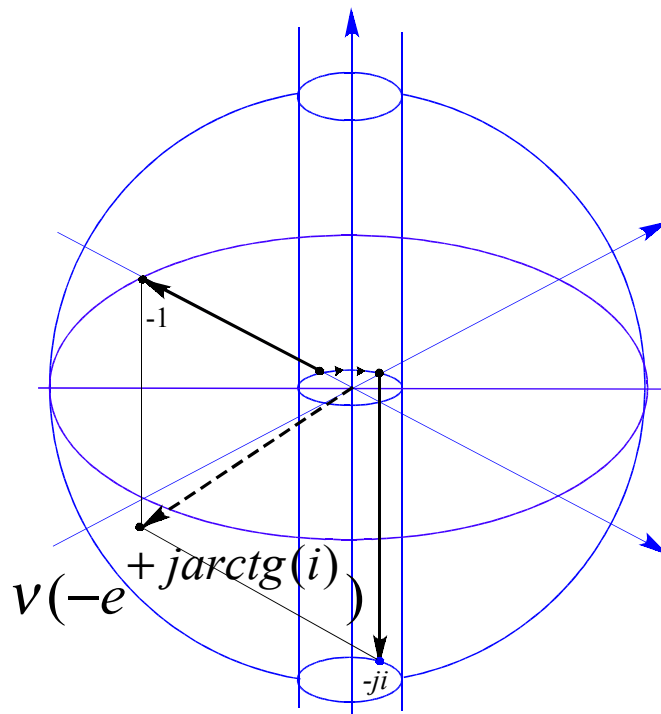


Рис70. Модель электронного нейтрино с отрицательной спиральностью.. Структура глюонного поля имеет изолированное положительного направления лептонного заряда.

Аннигиляция есть образование в нейтринном пространстве скомпенсированных лептонных $\mathcal{E}_{L_e}$ - туннелей, которое приводит к росту многосвязности

замкнутого пространства и увеличению его массы. Известные к настоящему времени массы таковы:

$$46\text{эв} > \nu_e, \tilde{\nu}_e > 14\text{эв},$$

$$0.52\text{Мэв} > \nu_\mu, \tilde{\nu}_\mu,$$

$$250\text{Мэв} > \nu_\tau, \tilde{\nu}_\tau.$$

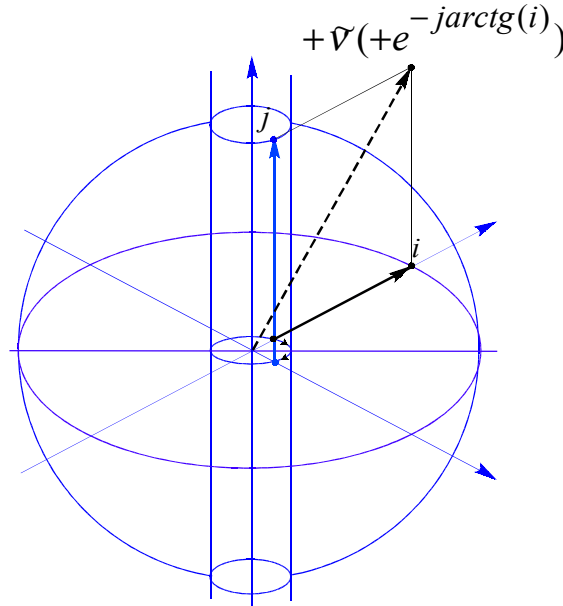


Рис 71 Модель электронного антинейтрино с положительной спиральностью. Лептонный заряд отрицателен.

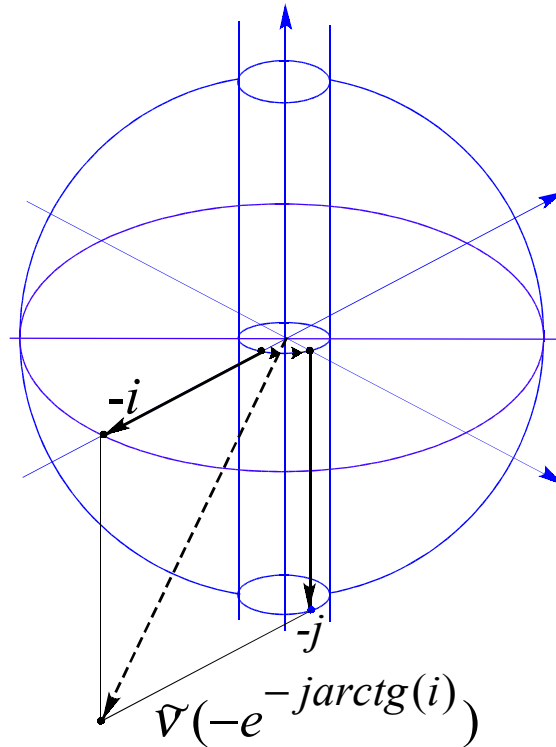


Рис72 Модель электронного антинейтрино с отрицательной спиральностью. Лептонный заряд отрицателен.

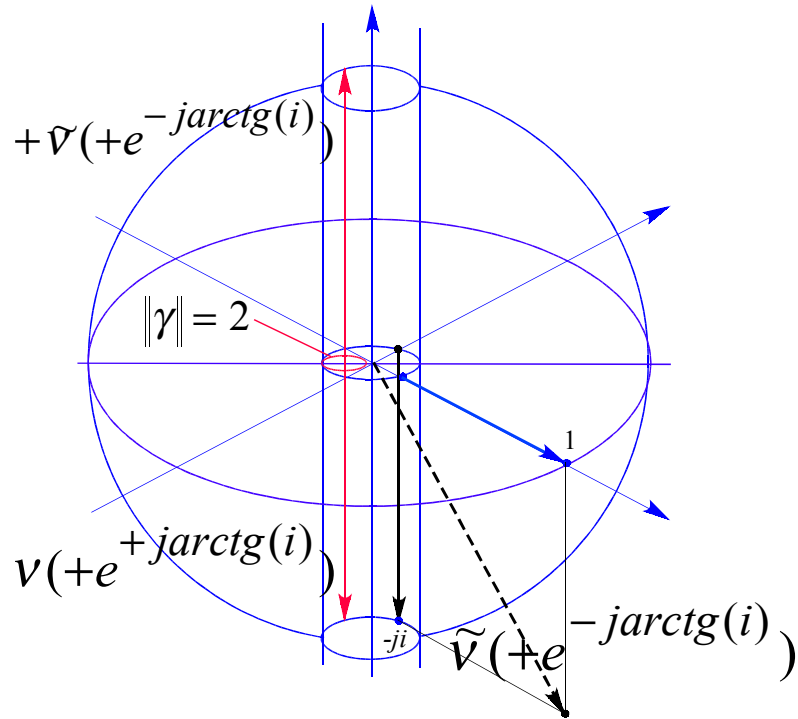


Рис. 74 Модель мюонного антинейтрино. Скомпенсированный лептонный туннель дает гамма квант с весовым коэффициентом $\|\gamma\| = 2$.

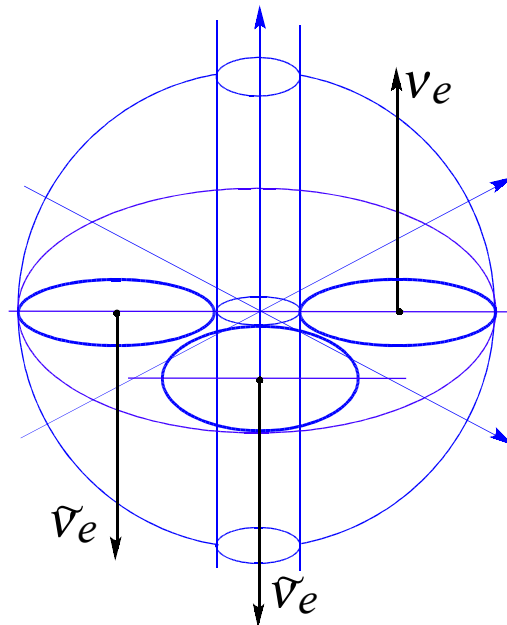


Рис 75. Связность пространства, характеризующее структуру мюонного антинейтрино.

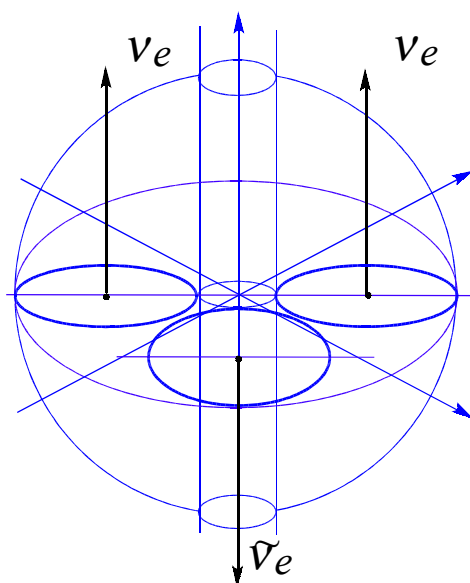


Рис. 76 Связность пространства, характеризующего мюонное нейтрино.

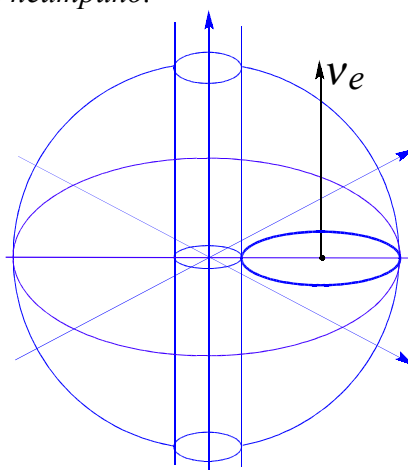


Рис 77. Связность пространства, характеризующая структуру нейтрино.

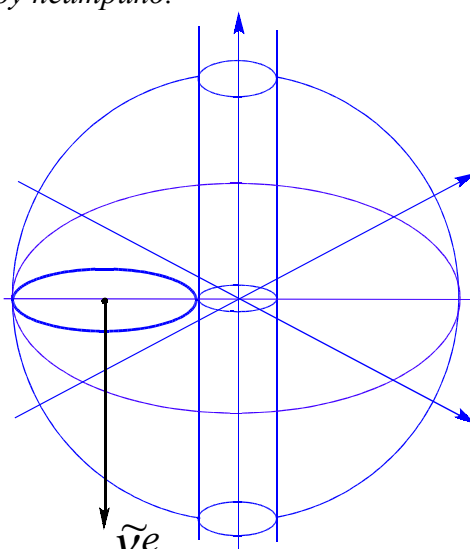


Рис 78. Связность пространства, характеризующее структуру антинейтрино.

Дальнейшее увеличение связности лептонного пространства может идти за счет роста количества скомпенсированных туннелей. Тау-нейтрино $\tilde{\nu}_\tau$ и тау-антинейтрино $\tilde{\nu}_\tau$ отличаются от мюонного нейтрино дополнительным скомпенсированным L_{ν_e} -туннелем. Появление дополнительного скомпенсированного туннеля закодировано как заряд С и так далее В, t.

Модели этих частиц в представлении многосвязности имеют вид, представленный на рис 79, 80.

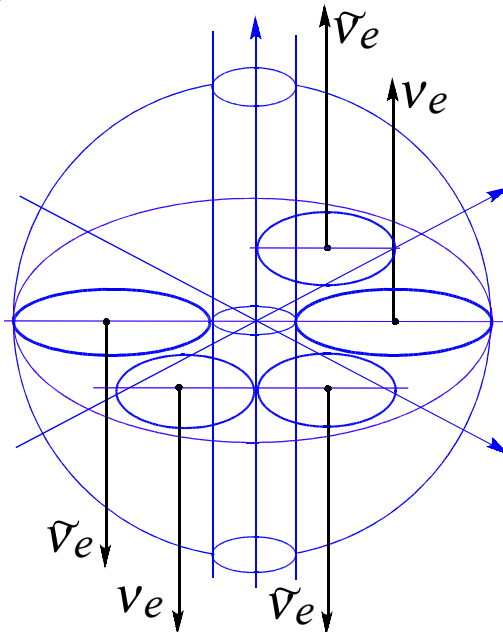


Рис79 Модель тау-нейтрино имеет два скомпенсированных лептонных туннеля с весовыми коэффициентами $\|\gamma\| = 2$

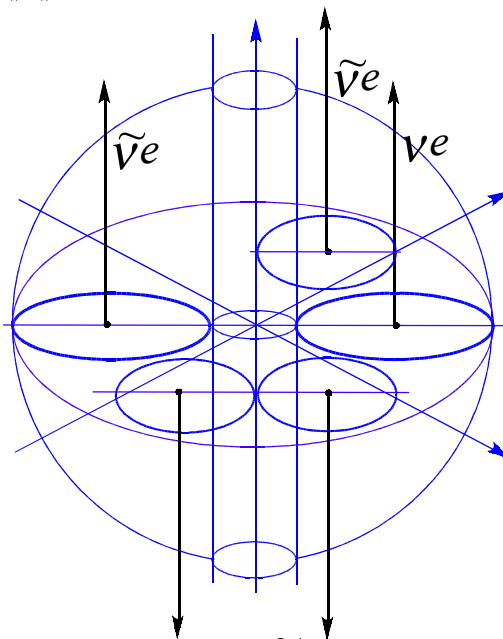


Рис80. Модель тау-нейтрино имеет два скомпенсированных лептонных туннеля с весовым коэффициентом $\|\gamma\| = 2$

Электронно-лептонный уровень.

Разработанные модели открывают возможность для расчета вариантов дальнейшего роста многосвязности. В этих вариантах могут учитываться скомпенсированные тау-лептонные туннели (двойные лептонные туннели) и так далее. Математически нейтринный уровень бесконечен по образованию все более тяжелых нейтринных частиц. Нейтринный уровень заполняет пространство изолированного электрического туннеля $\pm e^{\pm karktgj}$, образованного в комплексном пространстве более высокой размерности. Эксперименты установили три вида нейтрино: электронное, мюонное, тау-нейтрино. При определенных энергетических условиях возможно заполнения нейтринного пространства различными комбинациями, например

$\nu_e \nu_\mu \nu_\tau, \nu_e \nu_\mu, \nu_e \nu_\tau, \nu_\mu \nu_\tau$, а также одновременно комбинациями из этих комбинаций, например $\nu_e + \nu_e \nu_\mu + \nu_e \nu_\mu \nu_\tau$, скомпенсированных антинейтринными комбинациями. При такой комбинации микрочастица будет иметь одновременно комбинацию из зарядов $\pm L_{\nu_e}, \pm L_{\mu_e}, \pm L_{\tau_e}$. Частицы с такими комбинациями зарядов, возможно, будут в дальнейшем обнаружены.

Электрический уровень структурируется, образуя лептонные частицы. Структуризация идет по тем же схемам, что и на нейтринном уровне. Комбинация электрического и лептонного зарядов дают электрический – лептонный заряд. Модель электронно-лептонного заряда представлена на рис 81. На рис 81 электрический заряд может иметь лептонный заряд электронного нейтрино и антинейтрино $L_{\nu_e} = \pm 1$, а также все виды лептонных образований.

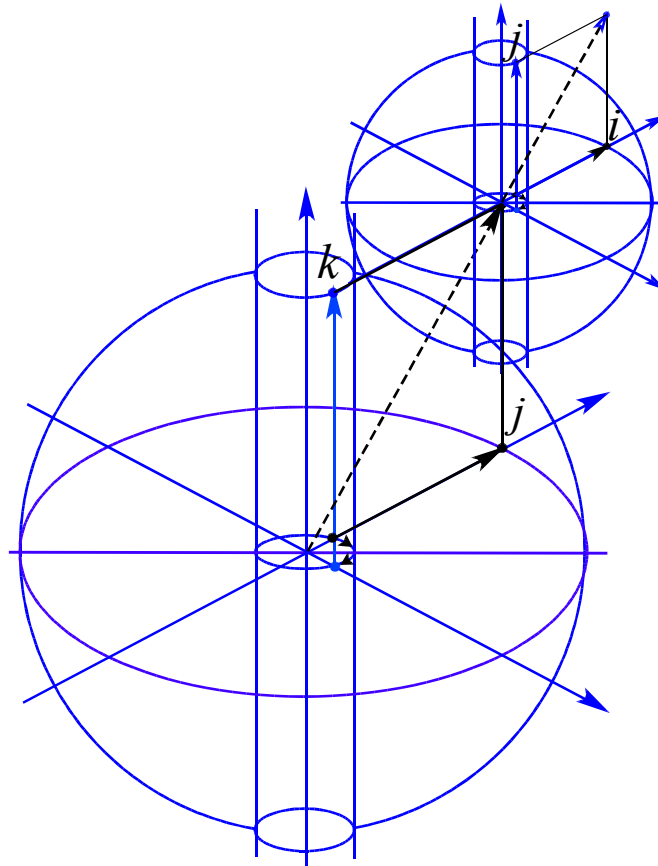


Рис 81. Простейшая структура электрически лептонного уровня.. Электрическому заряду соответ-

ствует изолированное зарядовое образованное в более высокой пространственной размерности по сравнению с тем пространством, к которому принадлежит лептонный туннель.

Вопрос о нахождении зарядовых сопряжений, приводящих к их самокомпенсации, необходимо решать с применением кварковой систематизации, так как неизвестны те условия, при которых электронный заряд переходит в лептонный и наоборот. Из предыдущей схемы построения моделей можно установить две комбинации, приводящие к образованию нейтральной частицы. В соответствии с каналами распада такой нейтральной частицей следует считать нейтральный π^0 -мезон. Нейтральный мезон распадается по схеме $\pi^0 \Rightarrow 2\gamma$. Поэтому принимаем следующую схему скомпенсированных лептонно - электрических туннелей. $\pi^0 \Rightarrow e_{\tilde{\nu}_e}^+ + e_{\tilde{\nu}_\mu}^- + e_{\tilde{\nu}_e}^- + e_{\tilde{\nu}_\mu}^+$.

Один электрический туннель скомпенсирован как по электрическому заряду, так и лептонному электронным нейтрино, второй мюонным нейтрино. Равновероятная комбинация кварковой структуры нейтрального пи-мезона позволяет выразить электрический заряд кварков и антикварков u, u^q, d, d^q через комбинации электронно-лептонного заряда.

$$\begin{aligned} Q(u) &= \alpha + \beta = e_{\tilde{\nu}_e}^+ + e_{\tilde{\nu}_\mu}^- \\ Q(u^q) &= \gamma + c = e_{\tilde{\nu}_e}^- + e_{\tilde{\nu}_\mu}^+ \\ Q(d) &= \gamma + \beta = e_{\tilde{\nu}_e}^- + e_{\tilde{\nu}_\mu}^- \\ Q(d^q) &= \alpha + c = e_{\tilde{\nu}_e}^+ + e_{\tilde{\nu}_\mu}^+ \end{aligned}$$

Нейтральный пион составлен из суммы четырех простейших зарядовых сопряжений. В пределах этой суммы составлены комбинации зарядовых сопряжений кварков и антикварков, так что зарядовое сопряжение нейтрального пиона соблюдается в комбинациях uu^q, dd^q . Это условие соответствует кварковой комбинации в современной классификации микрочастиц.

Нейтральный пион можно составить и из зарядовых сопряжений с участием тау-нейтрино типа $e_{\tilde{\nu}_\tau}^-, e_{\tilde{\nu}_\tau}^+$ и так далее. На логику расчета это не повлияет.

Зарядовые сопряжения для нейтрино, антинейтрино, электрического туннеля в соответствии с моделями, разобранными выше эквивалентны следующим выражениям

$$v = 1 + ji \quad (8.2.1.)$$

$$\tilde{v} = 1 - ji$$

$$v_\mu = 1 + ji + 1 - ji + 1 + ji = 3 + ji$$

$$\tilde{v}_\mu = 1 + ji + 1 - ji + 1 - ji = 3 - ji$$

$$e^- = 1 - kj$$

$$e^+ = 1 + kj$$

Зарядовые сопряжения равны

$$e_{\tilde{v}_e}^+ = (1 + kj)(1 - ji) = 1 + kj - ji + ki \quad (8.2.2.)$$

$$e_{v_e}^- = (1 - kj)(1 + ji) = 1 - kj + ji + ki$$

$$e_{\tilde{v}_\mu}^+ = (1 + kj)(3 - ji) = 3 + 3kj - ji + ki$$

$$e_{v_\mu}^- = (1 - kj)(3 + ji) = 3 - 3kj + ji + ki$$

Так что, суммируя все строчки (8,2,2) получим в итоге зарядовое сопряжение нейтрального пиона в виде

$$\pi^0 = uu^q = dd^q = 8 + 4ki$$

С изолированным направлением $e^{\pm karktgi} \approx 1 \pm ki$ связываем гравитационный заряд. Нейтральный пион составленный из суммы электрических и лептонных зарядовых сопряжений нейтрален. Структура нейтрального пиона имеет гравитационный туннель $\pi^0 = 4 + 4e^{karktgi}$.

Из четырех зарядовых сопряжений нейтрального пиона можно составить еще две комбинации

$$\chi = e_{v_\mu}^- + e_{\tilde{v}_\mu}^+ \quad (8.2.3.)$$

$$\phi = e_{\tilde{v}_e}^+ + e_{v_e}^-$$

Первое зарядовое сопряжение есть гамма квант. При переходе к пространственным направлениям получим комплекс

$$\chi = 6 + 2ki = 4 + 2(1 + ki) = 4 + 2e^{karktgi}$$

Второе обозначим как фотон

$$\phi = 2 + 2ki = 2e^{karktgi}$$

Сумма гамма кванта и фотона дает зарядовое сопряжение нейтрального пиона $\pi^0 = 6 + 2ki + 2 + 2ki = 8 + 4ki = 4 + 4(1 + ki) = 2\chi_1$

Гравитационно изолированное направление алгебраически обладает всеми свойствами изолированного электрического и лептонного направления. Это направление может быть скомпенсировано (например до весового коэффициента равного 4 как в пионе), а также сопрягаться с другими направлениями.

Современная теория микрочастиц дает следующий кварковый состав известных стабильных частиц. Протон состоит из двух u и одного d-кварка

(u+u+d), нейтрон – из одного u и двух d-кварков (u+d+d), π^+ -мезон описывается комбинацией u-кварка и d^q -антикварка ($u + d^q$), π^0 -мезон предлагают рассматривать как равновероятную суперпозицию комбинаций ($u + u^q, d + d^q$). Этих комбинаций достаточно для определения численного значения электронно-лептонного заряда кварка. Введенные обозначения и предлагаемая структура кварков дает систему уравнений

$$\alpha + \beta + \gamma + c = 0$$

$$\alpha + \beta + \alpha + c = +1$$

$$2\alpha + 3\beta + \gamma = +1$$

$$\alpha + 3\beta + 2\gamma = 0$$

Определитель системы равен 0. Это означает, что возможно бесконечное множество комбинаций соотношений между неизвестными, которые попарно дадут один и тот же результат. Решение имеет вид

$$\alpha + c = -1/3$$

$$\gamma + c = -2/3$$

$$\gamma + \beta = +1/3$$

$$\alpha + \beta = +2/3$$

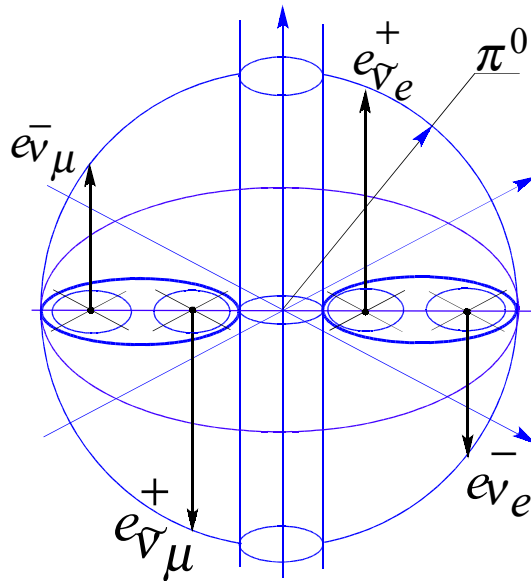


Рис 82 Структура нейтрального пи-мезона.

Таким образом, получены значения электрического заряда каждого кварка в точном соответствии с теорией.

$$Q(u) = Q(e_{\tilde{\nu}e}^+ + e_{\tilde{\nu}\mu}^-) = 2/3$$

$$Q(u^q) = Q(e_{\nu e}^- + e_{\tilde{\nu}\mu}^+) = -2/3$$

$$Q(d) = Q(e_{\nu e}^- + e_{\nu\mu}^-) = -1/3$$

$$Q(d^q) = Q(e_{\tilde{\nu}e}^+ + e_{\tilde{\nu}\mu}^+) = 1/3$$

Модель π^0 - мезона представлена на рис 82. Двойная комбинация кварков uu^q, dd^q отвечает одной модели.

Если обозначить $\alpha = k\beta$, то будем иметь систему

$$\alpha = \frac{2}{3} \frac{k}{k+1}, \beta = \frac{2}{3} \frac{1}{k+1}, \gamma = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \frac{1}{k+1}, c = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \frac{1}{k+1}$$

Коэффициент К может принимать любые значения, оставляя без изменения численную величину электрического заряда кварка.

K=2	K=0	k=1/3
$\alpha = 4/9$	0	1/3
$\beta = 2/9$	2/3	1/3
$\gamma = -5/9$	-1	-2/3
$c = -1/9$	1/3	0

Таким образом, в пределах одного электрического заряда кварка возможно бесконечное множество вариантов сопряжения электронно–лептонных зарядов. Таблица вариантов может быть продолжена до бесконечности. Внутри кварковой структуры возможно бесконечное распределения зарядов по численной величине, которые оставляют без изменения его дробный электрический заряд. В результате приходим ко второму признаку классификации кварков – цвету. Считается, что кварки имеют три различных цвета: r (red), y (yellow), v (violet).

Каждый кварк одного “аромата” т.е. с одинаковой массой и квантовыми числами имеют различные квантовые числа - “цвета”. Мезоны имеют симметричную комбинацию цветов

$$\pi^+ = u_r d_r^q + u_y d_y^q + u_v d_v^q$$

так. Чтобы не нарушался принцип Паули (принцип Паули в конечном счете отвечает за рост много связности пространства и возник из – за непонимания этого момента).

Таким образом, коэффициент К отвечает за второй признак кварка – “цвет”. Из множества коэффициентов α, β, γ, c , определенных через К можно выбрать три варианта и закодировать их под цвета.

Барионный заряд кварка рассчитывается аналогично электрическому заряду. Составим аналогичную систему для барионного заряда.

$$B(\pi^0) = \alpha + \beta + \gamma + c = 0$$

$$B(\pi^+) = 2\alpha + \beta + c = 0$$

$$B(p^+) = 2\alpha + 3\beta + \gamma = 1$$

$$B(n^0) = \alpha + 3\beta + 2\gamma = 1$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим $\gamma = \alpha$. Подставляя это равенство в третье уравнение имеем $\alpha + \beta = \frac{1}{3}$. Четвертое уравнение дает

$\beta + \gamma = \frac{1}{3}$. Подставляя эти суммы в первое и второе уравнение будем иметь

$$\gamma + c = -\frac{1}{3}, \quad \alpha + c = -\frac{1}{3}.$$

Переходя к электронно - лептонному составу кварков, будем иметь следующую таблицу.

$$\alpha + \beta = B(u) = e_{\tilde{\nu}_e}^+ + e_{\nu_\mu}^- = +\frac{1}{3}$$

$$\beta + \gamma = B(u^q) = e_{\nu_e}^- + e_{\tilde{\nu}_\mu}^+ = -\frac{1}{3}$$

$$\gamma + \beta = B(d) = e_{\nu_e}^- + e_{\nu_\mu}^- = +\frac{1}{3}$$

$$\alpha + c = B(d^q) = e_{\tilde{\nu}_e}^+ + e_{\tilde{\nu}_\mu}^+ = -\frac{1}{3}$$

Таким образом, барионный заряд кварков также дробный. Коэффициенты α, β, γ, c , входящие в систему барионного заряда кварка также варьируются в зависимости от коэффициента К, определяющего “цвет” кварка

8.3. Рост многосвязности пространства определяет заряды S, C, B, t кварков. Модели кварков.

На современном уровне развития представления о структуре материи кварки вышли на предельную позицию как новые элементарные частицы. Квантовые числа кварков приведены в таблице. Кроме кварков u, u^q, d, d^q имеется еще четыре кварка s, c, b, t и соответствующие им антикварки. Введены новые заряды: s-странность, c - шарм, b - bottomness, t - topness. Квантовые числа кварков связаны между собой соотношением $Q = T_\xi + \frac{B + s + c - b + t}{2}$, где T_ξ - изотопический спин. Теоретическая физика микрочастиц установила зависимость между числом кварков и числом нейтрино. Это связано с тем, что структура кварков соответствует связности пространства (естественно на кварковом уровне), которая была установлена при исследовании нейтринного уровня связности. Вновь введенные заряды есть отражение связности пространства и его роста на кварковом уровне. Скомпенсированный электрический кварковый туннель есть сумма кварка и антикварка в комбинации $u + u^q, d + d^q$. Это простейшая комбинация, на которой остановимся. Можно предложить и другие возможные комбинации, например $u + 2d, u^q + 2d^q$.

Заряд странность есть один скомпенсированный кварковый туннель плюс d кварк.

$$s = (u + u^q) + d$$

Заряд шарм два скомпенсированных кварковых туннеля плюс кварк u

$$c = (u + u^q) + (d + d^q) + u$$

Заряд b три скомпенсированных туннеля плюс кварк d

$$b = 2(u + u^q) + (d + d^q) + d$$

Заряд t четыре скомпенсированных кварковых туннеля плюс кварк u

$$t = 2(u + u^q) + 2(d + d^q) + u, \text{ так как по электрическому заряду}$$

$$u + u^q = d + d^q, \text{ то } c = 2(u + u^q) + u$$

$$b = 3(u + u^q) + d$$

$$t = 4(u + u^q) + u$$

Таким образом, появление нового заряда отражает рост на единицу связности пространства. Знак заряда определяется зарядом свободного кварка.

На нейтринном уровне эта схема приводила к появлению зарядов

$$\pm L_{\nu_e}, \pm L_{\nu_\mu}, \pm L_{\nu_\tau}.$$

Кварки не являются структурными предельными единицами. Предельной структурной единицей является фундаментальная масса $m_g = 2.17 \cdot 10^{-5} \text{ gr}$.

Поэтому после заполнения кваркового уровня последует в самих кварках. Так как кварки определены через комбинацию электрических - лептонных частиц, то рост связности кваркового пространства связан с определением кварка через новые лептонные образования.

8.4. Лептоны, Мезоны, Барионы как линейная комбинация кварков u, d .

В таблице представлены частицы, их кварковый состав, основные моды распада.

Так как кварки были увязаны с моделью лептонов, то модель любого АНДРОНА и БАРИОНА получается автоматически.

Например, Λ барион имеет кварковый состав uds . Раскроем кварковый состав по разработанной схеме $\Lambda = u + d + s = u + d + u + u^q + d$. Возможно несколько вариантов комбинаций нейтрального лямбда бариона; $\Lambda = (u + u + d) + (u^q + d)$, где комбинации, стоящие в скобках были ранее определены $\Lambda = (d + d + u) + (u + u^q)$

$$u + u + d = p^+$$

$$d + d + u = n^0$$

$$u^q + d = \pi^-$$

$$u + u^q = \pi^0$$

поэтому возможна реализация двух схем распада

$$\Lambda = p^+ + \pi^-$$

$$\Lambda = n^0 + \pi^0$$

Странные мезоны

$$K^+ = u + s^q = u + u + u^q + d^q = (u + d^q) + (u + u^q) = \pi^+ + \pi^0.$$

В точном соответствии с модой распада.

$$K^0 = d + s = d + u + u^q + d^q = (u + d^q) + (d + u^q) = \pi^+ + \pi^-.$$

В точном соответствии с модой распада.

Рассмотрим схему распада очарованного D –мезона.

$$D^+ = c + d^q = u + u^q + d + d^q + u + d^q = \\ \left[(u + u^q) + d^q \right] + u + (d + d^q) = K^+ + \pi^0.$$

Возможна реализация и другой моды распада

$$D^+ = \left[(u + u^q + d^q) + d \right] + u + d^q = K^0 + \pi^+.$$

В таблице распад D^+ -мезона зафиксирован как K плюс другие частицы.

Схемы распада барионов.

$$\Sigma^+ = p^+ + \pi^0 = u + u + d + u + u^q = \left[(u + u^q) + d \right] + u + u = suu.$$

В точном соответствии с кварковым составом.

$$\Sigma^- = n^0 + \pi^- = u + d + d + u^q + d = \left[(u + u^q) + d \right] + d + d = sdd.$$

В точном соответствии с кварковым составом таблицы.

$$\Xi^- = \Lambda^0 + \pi^- = s + u + d + u^q + d =$$

$$s + (u + d + u^q) + d = s + s + d = dss$$

$$\Omega^- = \Lambda^0 + K^- = s + u + d + s + u^q = s + s + (u + d + u^q) = sss$$

Таким образом, доказано, что заряды кварков s, c, b, t последовательно увеличивают связность пространства на единицу. Вероятностные моды распада андронов и барионов вызваны образованием в микрочастице устойчивых кварковых комбинаций внутри частицы, приводящих к образованию кварковых $\mathcal{E}_k$ - туннелей, скомпенсированных по электрическому дробному заряду. Конструкция кварковых комбинаций согласована со структурой кваркового уровня и структурой андронов и барионов и модами их распада. Это четко зафиксировано модами распада, в которых нет ЛЕПТОНОВ. Образование лептонов свидетельствует о процессах преобразования в самих кварковых структурах. В этих распадах проявляется двух уровневая структура микрочастицы: кварковая и лептонная. Моды распада доказывают правильность выдвинутой структуры кваркового уровня, как последовательного увеличения связности пространства за счет скомпенсированных кварковых туннелей. Кварки S, C, b, t и так далее состоят из двух кварков U,d и их антикварков.

Моды распада и заряды частиц позволяют раскрыть структуру пространства. λ^0 - Гиперон и антигиперон имеют заряд странность $S = \pm 1$, также как Σ^+ Гипероны. Моды распада для этих частиц показывают, что барионный заряд протона или нейтрона удерживает одно изолированное направление, создаваемое нейтральным или заряженным пионом, например

$$\lambda^0 \Rightarrow p^+ + \pi^-$$

Ξ^- Гиперон и Ξ^- антигиперон имеют заряд странности $S = \pm 2$, что соответствует моде последовательных распадов

$$\Xi^- \Rightarrow \lambda^0 + \pi^- \Rightarrow p^+ + \pi^- + \pi^-$$

Ω^- - Гиперон и Ω^- - антигиперон имеют заряд $S = \pm 3$, что находится в соответствии с последовательными модами распада

$$\Omega^- \Rightarrow \Xi^0 + \pi^- \Rightarrow \lambda^0 + \pi^- + \pi^0 \Rightarrow p^+ + \pi^- + \pi^0 + \pi^-$$

Таким образом, изолированное направление бариона может заполняться последовательно различными комбинациями заряда странности.

F^+, F^- - мезоны имеют одновременно заряд странности S и очарования C . Это свидетельствует на возможность возникновения структуры сформированной одновременно из одного изолированного туннеля совместно со структурой с двумя изолированными туннелями.

Моды распада и квантовые числа частиц подтверждают рассмотренные схемы компактизации пространства, рассмотренные в главе 4 и представленные на рис 47, 48, 49, 50, 51, а также при исследовании таблицы элементов и их изотопов Д.И. Менделеева.

Модель электрона.

Согласно дробным электрическим зарядом кварков электрон в простейшем виде с зарядом равным -1 представим в двух комбинациях

$$E^- = u^q - d^q = e_{\tilde{\nu}_e}^- - e_{\tilde{\nu}_e \rightarrow \tilde{\nu}_e}^+ = e_{\tilde{\nu}_e}^- - e^+$$

$$E^- = d - u = e_{\tilde{\nu}_e}^- - e_{\tilde{\nu}_e \rightarrow \tilde{\nu}_e}^+ = e_{\tilde{\nu}_e}^- - e^+$$

Положительный электрический туннель в структуре электрона освобождается от лептонного заряда, который несет антинейтрино. Электрон имеет лептонный заряд за счет заряда электронного нейтрино.

Позитрон определяется также двумя вариантами

$$E^+ = d^q - u^q = e_{\tilde{\nu}_e}^+ - e_{\tilde{\nu}_e \rightarrow \nu_e}^- = e_{\tilde{\nu}_e}^+ - e^-$$

$$E^+ = u - d = e_{\tilde{\nu}_e}^+ - e_{\tilde{\nu}_e \rightarrow \nu_e}^- = e_{\tilde{\nu}_e}^+ - e^-$$

Отрицательный электрический туннель в структуре позитрона свободен от лептонного заряда. Позитрон заряжен антинейтрино.

Аннигиляция электрона и позитрона приводит к образованию гамма квантов

$$E^- + E^+ = e_{\tilde{\nu}_e}^- - e^+ + e_{\tilde{\nu}_e}^+ - e^- =$$

$$= (1 - kj)(1 + ji) - 1 - kj + (1 + kj)(1 - ji) - 1 + kj =$$

$$= 1 - kj + ji + ki - 1 - kj + 1 + kj - ji + ki - 1 + kj = 2ki$$

Модель электрона представлена на рис 83

При распаде нейтрального пиона образуются две пары электрон-позитронных пар

$$\pi^0 \Rightarrow 2\gamma \rightarrow 2(E^+ + E^-)$$

Структура изолированных направлений позитрона и электрона дает в сумме гамма квант равный $2ki$. При распаде пиона выделяются 2 гамма кванта как аннигиляция нейтрино и антинейтрино $\nu_e + \tilde{\nu}_e = 1 + ji + 1 - ji = 2$. Таким образом, реакция распада нейтрального пиона на два гамма кванта дает в ре-

зультате сумму $4 + 4ki$, которая в принципе является фотонным образованием (по нашему определению). Пион был выше определен как комбинация

$\pi^0 \Rightarrow 8 + 4ki$, которая отличается от результатов распада на 4 единицы уходят на энергию распада.

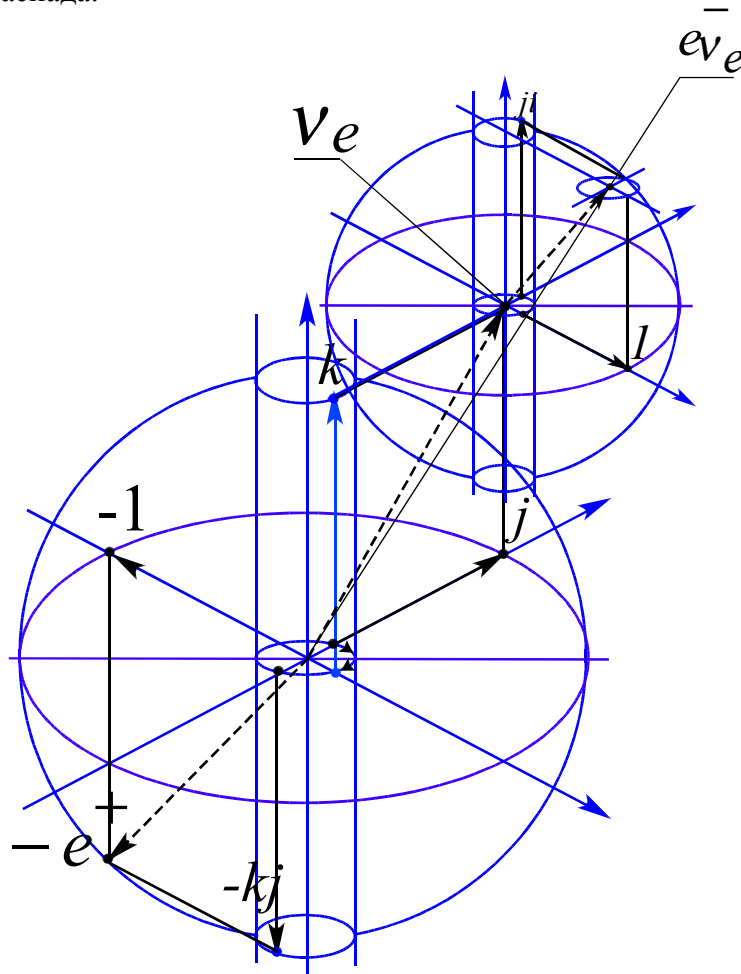


Рис. 83 Модель электрона.

Модель мюона.

Кварковая модель отрицательного мюона μ^- может быть установлена из процесса распада отрицательного пиона π^- .

$$\pi^- = d + u^q = \tilde{\nu}_e + \mu^-$$

Известно также, что мюон распадается в дальнейшем на электрон, электронное нейтрино и антинейтрино

$$\mu^- = e^- + \nu_e + \tilde{\nu}_e$$

Модель электрона установлена из распада нейтрона, поэтому

$$\mu^- = u^q - d^q - \tilde{\nu}_e + \nu_e + \tilde{\nu}_e = u^q - d^q + \nu_e$$

Мюон представим также через пион.

$$\mu^- = d + u^q - \tilde{\nu}_e$$

Оба варианта эквивалентны друг другу. Заменяя кварки их выражением через электрические - лептонные комбинации получим

$$\mu^- = e_{\nu_e}^- + e_{\tilde{\nu}_\mu}^+ - e_{\tilde{\nu}_e}^+ - e_{\tilde{\nu}_\mu}^+ + \nu_e =$$

$$= (e_{\nu_e}^- - e_{\tilde{\nu}_e}^+) + (e_{\tilde{\nu}_\mu}^+ - e_{\tilde{\nu}_\mu}^+) + \nu_e$$

$$\mu^- = e_{\nu_e}^- + e_{\nu_\mu}^- + e_{\nu_e}^- + e_{\tilde{\nu}_\mu}^+ - \tilde{\nu}_e$$

Модель мюонного нейтрино имеет вид

$$\tilde{\nu}_\mu = (\nu_e + \tilde{\nu}_e) + \tilde{\nu}_e$$

$$\nu_\mu = (\nu_e + \tilde{\nu}_e) + \nu_e$$

поэтому один электрический мюонный заряд в модели мюона теряет электронное нейтрино, а другой антинейтрино. Оба выражения эквивалентны $u^q - d^q + \nu_e = d + u^q - \tilde{\nu}_e$ откуда $-d^q + \nu_e = d - \tilde{\nu}_e$. Один из электрических мюонных туннелей имеет скомпенсированный нейтринный туннель.

В процессах распада

$$\mu^- = e^- + \nu_e + \tilde{\nu}_e$$

$$\pi^- = \mu^- + \tilde{\nu}_e$$

$$K^- = \mu^- + \tilde{\nu}_e$$

$$n^0 = p^+ + e_{\nu_e}^- + \tilde{\nu}_e$$

происходит изменение нейтринного уровня. Происходит распад мюонного нейтрино или антинейтрино, в результате остается скомпенсированный по лептонному заряду туннель.

Аппарат комплексной алгебры позволяет оценить структуру этого туннеля как гамма кванта, удерживаемого в структуре электрона или мюона, а также направление возможного вылета.

$\gamma = \nu_e - \tilde{\nu}_e = 1 + ji - i - j = (1 - i)(1 - j)$, так что гамма квант будет иметь действительный модуль $\|\gamma\| = 2$, и два действительных пространственных угловых направления $\varphi = \pi / 4, \theta = \pi / 4$.

8.5. Структура глюонного поля. Расчет масс микрочастиц.

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ.

В предыдущих главах разработаны, обоснованы и нашли экспериментальное подтверждение следующие основные положения, которые позволяют исследовать структуру глюонного поля микрочастиц.

Кварки s, c, b, t представляют линейную комбинацию первых двух кварков и поэтому не могут претендовать на роль фундаментальных частиц. Эта линейная комбинация может быть продолжена без математических ограничений с предсказанием новых кварков. Через кварки u, d, s, t определены кварковые комбинации всех мезонов и барионов. Лептоны также определяются через кварковую комбинацию первых двух кварков. В основе всех комбинаций находится один принцип роста много связности комплексного пространства. Этот принцип частично отражен в принципе Паули. Исследование мод распада микрочастиц

показало, что сумма кварковых комбинаций продуктов распада в точности равна исходной кварковой комбинации микрочастицы (без учета энергии распада).

Кварки определены через электрически лептонные сопряжения зарядов

$$\begin{aligned} U &= e_{\tilde{\nu}_e}^+ + e_{\nu_\mu}^- \\ U^q &= e_{\nu_e}^- + e_{\tilde{\nu}_\mu}^+ \\ d &= e_{\nu_e}^- + e_{\nu_\mu}^- \\ d^q &= e_{\tilde{\nu}_e}^+ + e_{\tilde{\nu}_\mu}^+ \end{aligned} \quad (8.1)$$

Эти сопряжения получены после установления фундаментального свойства заряда быть положительным и отрицательным. Электрический, лептонный, гравитационный заряд есть изолированные направления в комплексном пространстве.

Предельное равенство

$$Gm_g^2 = e^2 \alpha \quad (8.2)$$

дает абсолютную величину заряда e через взаимодействие двух фундаментальных масс m_g

Взаимодействие двух и более фундаментальных масс есть дефект этих масс, который соответствует массе частицы

$$m_x c^2 = km_g c^2 \pm \sqrt{(km_g c^2)^2 - (ggXc^2)^2} \quad (8.3)$$

где K – количество пар взаимодействующих фундаментальных масс,

$ggXc^2$ – энергия глюонного поля микрочастицы.

Зная массу микрочастицы можно рассчитать ее глюонное поле

$$ggXc^2 = \sqrt{2Km_g c^2 m_x c^2} \quad (8.4)$$

Расчет величины глюонного поля проверен неоднократно при выводе энергии связи атомных ядер, при расчете радиоактивных распадов. Формула выведена из структуры преобразований Лоренца.

Масса микрочастицы может быть рассчитана из формулы

$$m_x c^2 = \frac{(\pm ggXc^2)^2}{2Km_g c^2} \quad (8.5)$$

Формула определяет массу частицы и античастицы.

Масса микрочастицы $m_x c^2$ есть потенциал взаимодействия фундаментальных масс $m_g c^2$ на расстоянии комплексной комптоновской длины волны

λ_x^{komp} микрочастицы. Потенциал есть в свою очередь дефект масс взаимодействующих фундаментальных масс, который есть следствие наличия глюонного поля в пространстве взаимодействия. Энергия глюонного поля обуславливает уменьшение суммарной исходной массы взаимодействующих частиц (схема аналогична ядерной материи). Пространственно временная метрика также дает

пространственно- временной дефект, обусловленный наличием временной координаты

$$dds = dl - \sqrt{dl^2 - (ct)^2}.$$

При переходе к энергетической массово-полевой метрике пространственная составляющая заменяется суммарной исходной массой фундаментальных частиц, временная составляющая массой глюонного поля, дефект пространственно – временной метрики есть масса микрочастицы.

Таким образом, потенциал взаимодействия фундаментальных масс на расстоянии комптоновской длины волны микрочастицы одновременно является дефектом пространственной энергетической решетки, обусловленном наличием глюонного поля и является массой микрочастицы. Глюонное поле в этом смысле присутствует в любом замкнутом пространстве. Свободного пространства нет, как нет пространства без материи. Изменение величины глюонного поля вызывает изменение массы микрочастицы или ее пространственной структуры. Глюонное поле требует определенного зарядового сопряжения комплексного пространства, фиксированного расположения взаимодействующих масс. Фундаментальное свойство заряда быть отрицательным, положительным и нейтральным есть свойство структуры пространства взаимодействия.

Таким образом, пространственно-временной континуум адекватен энергетическому массово – полювому континууму.

8.6 Система уравнений для расчета глюонного поля.

Кварки определены комбинациями изолированных направлений в комплексном пространстве, которые являются составляющими глюонного поля.

Раскрывая систему изолированных направлений получим

$$e_{\tilde{\nu}_e}^+ = (1 + kj)(1 - ji) = 1 + kj - ji + ki \quad (8.6)$$

$$e_{\nu_\mu}^- = (1 - kj)(3 + ji) = 3 - 3kj + ji + ki$$

$$e_{\nu_e}^- = (1 - kj)(1 + ji) = 1 - kj + ji + ki$$

$$e_{\tilde{\nu}_\mu}^+ = (1 + kj)(3 - ji) = 3 + 3kj - ji + ki$$

Таким образом, любое зарядовое сопряжение представляет сумму из произведений единичных направлений в комплексном пространстве на весовые коэффициенты. Согласно этой системе зарядовых сопряжений каждая микрочастица характеризуется своей пространственной решеткой из направлений с весовыми коэффициентами. Энергия частицы распределяется по этим направлениям решетки, создавая искривления пространства.

Для исходных кварков u, d имеем согласно этой системе комбинацию глюонных направлений

$$u = 4 - 2kj + 2ki \quad (8.7)$$

$$u^q = 4 + 2kj + 2ki$$

$$d = 4 - 4kj + 2ji + 2ki$$

$$d^q = 4 + 4kj - 2ji + 2ki$$

Равнозначные кварковые комбинации заряженного пиона $\pi^\pm$ и нейтрального пиона π^0 служат проверкой системы

$$\pi^+ = ud^q = 8 + 2kj - 2ji + 4ki \quad (8.8)$$

$$\pi^- = du^q = 8 - 2kj + 2ji + 4ki$$

$$\pi^0 = uu^q = 8 + 4ki$$

$$\pi^0 = dd^q = 8 + 4ki$$

Из (8.8) следует, что нейтральный заряд $\pi^0 = Z^0 = (8 + 4ki)$ входит в зарядовые комбинации, которые имеют заряд в зависимости от наличия направлений $Z^\pm = \pm 2kj \mp 2ji$.

Причем модуль комплекса $\|Z^0\| = \sqrt{48}$ действителен и поэтому это направление фактически является гравитационным. Модуль комплекса $\|Z^\pm\| = \sqrt{0}$, поэтому комплекс связан с полевой составляющей. Добавление заряженного комплекса к нейтральному изменяет модуль нейтрального комплекса. Действительный модуль, как это неоднократно было показано, адекватен массе частице или энергии глюонного поля.

Все нейтральные мезоны представляют нейтральную комбинацию от Z^0 .

$$K^0 = sd = 2(8 + 4ki) = 2Z^0, \quad (8.9)$$

$$\eta = ss^q = 3(8 + 4ki) = 3Z^0,$$

$$D^0 = cu^q = 3(8 + 4ki) = 3Z^0,$$

$$J/\psi = cc^q = 5(8 + 4ki) = 5Z^0,$$

$$Y = bb^q = 8(8 + 4ki) = 8Z^0$$

Система (8.9) может быть продолжена с предсказанием нейтральных мезонов больших масс.

Заряженные мезоны представляют сумму комбинаций нейтральных мезонов плюс заряженное направление, например

$$\begin{aligned} D^+ &= dc^q = 3Z^0 + Z^+, \\ D_s^- &= sc^q = 3Z^0 + Z^-, \end{aligned} \quad (8.10)$$

$$B^- = bu^q = 3Z^0 + Z^-$$

Система (8,10) также имеет предсказательную силу.

Распад мезонов фактически есть распад по направлениям $Z^0, Z^\pm$.

Нейтральные барионы представляют линейную комбинацию из нейтрального мезона плюс нейтрон

$$\lambda^0 = uds = (u + u^q) + d + u + d = \pi^0 + n^0, \text{ а также}$$

$$\lambda^0 = uds = u + u + d + d + u^q = p^+ + \pi^-.$$

В точном соответствии с модами распада, установленными экспериментальным путем. Таким образом, введение линейной комбинации S кварка подтверждено модой распада λ^0 - гиперона.

Аналогично имеем дело с сигма гипероном и другими частицами.

$$\Sigma^+ = u + u + s = u + u + u + u^q + d = \pi^0 + p^+,$$

$$\Sigma^+ = d + d^q + d + u + u = (d + d + u) + u + d^q = n^0 + \pi^+$$

Во второй моде распада кварк S представлен равнозначной комбинацией $S = d + d^q + d$.

Также в точном соответствии с модами распада приведем еще ряд примеров

$$\Sigma^- = d + d + s = d + d + u + u^q + d = n^0 + \pi^-,$$

$$\Xi^- = d + s + s = d + s + u + u^q + d = uds + du^q = \lambda^0 + \pi^-,$$

$$\Omega^- = sss = u + u^q + d + s + u + u^q + d =$$

$$= uds + uu^q + du^q = \lambda^0 + \pi^0 + \pi^-$$

Также в точном соответствии с экспериментальными модами распада. Из этого следует вывод: кварки S, C, b, t не могут претендовать на фундаментальные предельные фундаментальные частицы, так как доказана что их кварковая комбинация является линейной комбинацией первых двух кварков u, d.

Протон p^+ представляет комбинацию из u и d кварка.

$$p^+ = u + u + d = 12 - 8kj + 2ji + 6ki,$$

нейтрон

$$n^0 = d + d + u = 12 - 10kj + 2ji + 6ki.$$

Комбинация направлений нейтрона состоит из комбинаций протона и заряженного направления Z^- .

$$n^0 = (12 + 6ki - 8kj + 2ji) - 2kj + 2ji = p^+ + Z^-.$$

Таким образом, линейно независимой кварковой комбинацией можно считать протон.

Структуры микрочастиц представляют линейные комбинации из суммы произведений весовых коэффициентов на единичные зарядовые направления. Если выбрать систему из четырех независимых выражений глюонного поля микрочастиц, то можно определить энергетический вклад каждого из единичных направлений, иными словами определить пространственную энергетическую единичную решетку (взамен пространственно временной). Весовые коэффициенты вызывают искривление этой пространственной энергетической решетки, которые и определяют микрочастицу. Классификация микрочастиц как результат экспериментальных каналов распада дает возможность составить систему из четырех линейных независимых уравнений. В этом случае решение системы четырех независимых линейных уравнений (каждое из которых характеризует фундаментальную частицу) дает единичную глюонную решетку, а глю-

онное поле любой микрочастицы определяется суммой деформаций этой решетки, вызванной весовыми коэффициентами.

Поэтому в дальнейшем введем обозначения направлений комплексного пространства

$$1 \Rightarrow \zeta \quad (8.11)$$

$$ji \Rightarrow \alpha$$

$$kj \Rightarrow \beta$$

$$ki \Rightarrow \gamma$$

которые отвечают за энергетический вклад в глюонное поле микрочастицы. Глюонное поле протона определено в виде

$$ggp^+ = 12\zeta - 8\beta + 2\alpha + 6\gamma$$

где ggp^+ рассчитывается по формуле (8.4).

Для определения четырех коэффициентов необходимо составить систему из четырех линейно независимых уравнений, каждое из которых должно определять глюонное поле частицы. Определитель системы не должен быть равным нулю. Составим систему из весовых коэффициентов стабильных частиц, которыми являются протон, электрон.

$$ggE^- = -2\beta + 1\alpha + 1\gamma$$

Возьмем также за основу расчета структуру лямбда-гиперона и положительного пиона.

Глюонное поле λ^0 -гиперона дает уравнение (как связь между барионами и мезонами).

$$gg\lambda^0 = gg(uds) = 20\zeta - 10\beta + 4\alpha + 10\gamma$$

$$gg\pi^+ = gg(ud^q) = 8\zeta + 2\beta - 2\alpha + 4\gamma$$

Глюонное поле положительного пиона рассчитываем исходя из массы пиона $m(\pi^-) = 139.27 \text{ МэВ}$.

$$gg\pi^- = \sqrt{2 * 2 * 1.22112 * 10^{22} * 139.27} = 26.12 * 10^{11} \text{ МэВ}.$$

Глюонное поле p^+, λ^0, e^- соответственно равны

$$ggp^+ = 67.69757, gg\lambda^0 = 104.41, gge^- = 1.5798$$

Таким образом, составлена система для определения составляющих глюонных полей по направлениям в комплексном пространстве.

$$12\zeta - 8\beta + 2\alpha + 6\gamma = 67.69757 \quad (8.12)$$

$$20\zeta - 10\beta + 4\alpha + 10\gamma = 104.41$$

$$8\zeta + 2\beta - 2\alpha + 4\gamma = 26.12$$

$$-2\beta + \alpha + \gamma = 1.5798$$

Коэффициент 10^{11} опущен, так как он легко учитывается в дальнейших расчетах. Все расчеты сведены и проведены в таблице N.

Решение дает энергетический вклад направлений в общее глюонное поле. Это единичные коэффициенты глюонного поля - энергетическая решетка.

Таблица 8.1. Расчет масс микрочастиц.

Матрица для расчета глюонных коэффициентов составленная из весовых коэффициентов протона, лямбда, пиона, электрона.
 Определитель 4*4 из весовых коэффициентов по направлениям

Частица	1 kj	ji	ki	ggm			1 kj	ji	ki	ggm			
Протон p^+	12	-8	2	6	67,697		-1101,146	-192	5,74	-2,546	0,1	-3,617	67,696
Лямбда ноль λ^0	20	-10	4	10	104,410		488,907	-192	5,735	-2,546	0,1	-3,617	104,406
Пион положит π^+	8	2	-2	4	26,110		-20,056	-192	5,735	-2,546	0,1	-3,617	26,112
Электрон e^-	0	-2	1	1	1,580	-192	694,540	-192	5,735	-2,546	0,1	-3,617	1,579

Расчет энергии глюонных полей: нейтрона, лямбда - гиперона, положительного пиона, электрона, протона. Формулы (8,4),(8,5)

	mg	K	m	ggm									
Нейтрон n^0	1,221	4	939,570	67,744									
Лямбда ноль λ^0	1,221	8	1116,000	104,413									
Пион положит π^+	1,221	4	139,567	26,110									
Электрон e^-	1,221	4	0,511	1,580									
Протон p^+	1,221	4	938,270	67,698									

Расчет энергии глюонного поля и массы нейтрона. Первая строчка согласно кварковой структуре весовых коэффициентов Вторая строчка расчет глюонного поля нейтрона и его массы с варьированием весовых коэффициентов.

	1	kj	ji	ki	ggm	mg	K	mх	мх экспе- римент	% расхо- ждения	
ddu	5,74	12	-10	4	6	72,99	1,221	4	1090,827	939,57	1,161
Нейтрон n^0	5,74	12	-9	13	7	67,77	1,221	4	940,196	939,57	1,001

Расчет энергии глюонного поля и массы электрона

Электрон e^-	5,74	0	-2,546	-2	0,104	1	-3,617	1	1,579	1,221	4	0,510	0,511	0,999

Расчет энергии глюонного поля и массы пионов . Кварковая комбинация ud,du,uu,dd

Отрицательный. пион π^-	5,74	8	-2,546	2	0,104	-2	-3,617	4	26,11	1,221	4	139,592	139,567	1,000
Положительный	5,74	8	-2,546	2	0,104	-2	-3,617	4	26,11	1,221	4	139,592	139,567	

Расчет глюонного поля и масс частиц кварковых комбинаций udc,usc,ddc,ddb.

	1	1	kj		ji		ki										
Udc λ_c	5,74	28	-2,546		-8	0,104	2	-3,617	14	130,5	1,221	4	3487,566		2285		
	5,74	24	-2,546		-7	0,104	2	-3,617	14	105	1,221	4	2258,525		2285		0,988
Uuc Σ_c	5,74	28	-2,546		-6	0,104	0	-3,617	-14	226,5	1,221	4	10502,557		2453		
	5,74	24	-2,546		-6	0,104	0	-3,617	12	109,5	1,221	4	2455,303		2453		
Ddc Σ_c^0	5,74	28	-2,546		-10	0,104	4	-3,617	14	135,8	1,221	4	3776,559		2452		
	5,74	28	-2,546		-5	0,104	4	-3,617	17	112,2	1,221	4	2579,014		2452		1,052
Udb λ_b	5,74	28	-2,546		18	0,104	4	-3,617	-12	158,6	1,221	4	5147,954		5425		0,949
Udb λ_b	5,74	28	-2,546		19	0,104	4	-3,617	-14	163,3	1,221	4	5456,840		5425		1,006

Расчет глюонного поля и масс мезонов

us,su 0-(1/2) K^+, K^-	5,74	16	-2,546		2	0,104	-2	-3,617	6	64,76	1,221	8	429,278		494		0,869
ds,sd K^0	5,74	16	-2,546		0	0,104	0	-3,617	8	62,82	1,221	8	404,020		498		0,811
uu+dd 0-(0) η	5,74	16	-2,546		-12	0,104	4	-3,617	8	93,79	1,221	12	600,333		547		1,098
uu+dd 0-(0) η'	5,74	16	-2,546		-12	0,104	4	-3,617	8	93,79	1,221	8	900,499		958		0,940
ud,du $\rho^\pm$	5,74	8	-2,546		-6	0,104	2	-3,617	4	46,9	1,221	4	450,250		770		0,585
uu+dd 0-(0) η	5,74	16	-2,546		-12	0,104	4	-3,617	14	72,09	1,221	8	531,988		547		0,973
uu+dd 0-(0) η'	5,74	16	-2,546		-12	0,104	0	-3,617	7	96,99	1,221	8	963,014		958		1,005
uu+dd1-(0) ω	5,74	16	-2,546		-12	0,104	4	-3,617	10	86,56	1,221	8	766,948		782		0,981
Cd, dc-0 ⁻¹ (1/2) $D^\pm$	5,74	24	-2,546		12	0,104	0	-3,617	0	107,1	1,221	4	2347,812		1865		1,259
Cc J/ψ	5,74	40	-2,546		20	0,104	0	-3,617	0	178,5	1,221	8	3260,850		3097		1,053
Bb Y	5,74	64	-2,546		32	0,104	0	-3,617	0	285,6	1,221	8	8347,775		9460		0,882
Ub $B^\pm$	5,74	24	-2,546		-2	0,104	2	-3,617	0	142,9	1,221	4	4183,013		5279		0,792

$$\zeta = 5.735$$

$$\beta = -2.546$$

$$\alpha = 0.104$$

$$\gamma = -3.617$$

Значение коэффициентов является приближением к коэффициентам для всего глюонного поля микрочастиц. Эти коэффициенты рассчитаны для системы, в которой две структуры являются нестабильными и поэтому не учитывается энергия реакции образования и распада. Система кварковых комбинаций микрочастиц дает коэффициенты перед каждым значением $\alpha, \beta, \gamma, \zeta$, которые в конечном счете определяют искривление пространственных направлений и тем самым определяется прогиб пространства для каждой микрочастицы. Если полученные из решения коэффициенты принять как единичные меры (если можно так выразиться для ясности) прогиба по каждому пространственному направлению, то результаты расчета масс микрочастиц нестабильных необходимо корректировать по энергии распада и образования, путем варьирования весовых коэффициентов, рассчитанных по кварковому классификатору. Разница в структуре весовых коэффициентов даст энергию моды распада. Микрочастицы одной и той же кварковой комбинации имеют в большинстве случаев разные энергетические массы и разные характеристики: спин, четность, изоспин и так далее, поэтому разница величин весовых коэффициентов определяет не только неучтенную энергию распада но также энергию глюонного поля которая определяет внутреннюю структуру микрочастицы для разных квантовых характеристик.

8.7. Оценка результатов расчетов глюонных полей и масс микрочастиц.

Результаты расчета масс микрочастиц сведены в таблицу. Рассмотрим последовательно результаты.

Расчет показал, что в пределах одной кварковой комбинации возможна внутренняя перестройка структуры частицы, которая приводит к изменению массы частицы и ее квантовых характеристик. Например:

Кварковая система uud образует четыре микрочастицы: протон $p^+(938.27), \Delta^+(1234), N^+(1430), N^+(1530)$. При одной кварковой структуре частицы отличаются спином, четностью, изоспином, временем жизни или шириной резонанса. Протон входит в систему расчета глюонного поля, поэтому его расхождение с экспериментом нулевое. Отличие остальных частиц от протона заключается в весовых коэффициентах. Варьируя весовые коэффициенты протона получим остальные частицы, При этом разница в весовых коэффициентах позволяет сопоставить изменение глюонного поля изменению в весовых коэффициентах.

Кварковая комбинация uds образует три частицы $\lambda^0(1116), \Sigma^0(1193), \Sigma^0(1384)$. Лямбда гиперон входит в расчетную систему, поэтому отклонение его массового параметра нулевое. Резонансы отличаются захватом глюонного поля

Кварковая комбинация uss дает три частицы: $\Xi^0(1315) = 28\zeta - 10\beta + 4\alpha + 14\gamma$, это глюонное поле определяет массу час-

тицы в пределах 2 процентов от экспериментального значения. Изменение глюонного поля определяет $\Xi^0(1383) \Rightarrow \delta gg = 2\alpha + 2\beta$,

$$\Xi^0(1532) \Rightarrow \delta gg = -2\alpha + 2\beta - 4\gamma + 4\zeta.$$

Резонансы $\lambda_c^+(2285) \Rightarrow udc = 28\zeta - 8\beta + 2\alpha + 14\gamma$ (расхождение по массе меньше 3%).

$$\text{Резонанс } \Sigma_c^+(2452) \Rightarrow \delta gg = -10\gamma + 10\zeta.$$

Глюонное поле кварка обозначено в таблице индексом *kwark*. Корректировка глюонного поля в пределах изменения коэффициентов перед направлениями путем их взаимной переброски определяет массу микрочастицы в пределах 3% от экспериментально установленной.

$$\text{Пример, } \Sigma_c^{++}(uus) \Rightarrow 28\zeta - 6\beta - 14\gamma.$$

$$\delta gg \Sigma_c^{++} = -4\gamma - 4\zeta \text{ дает расхождение меньше 3\%.}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_c^0(ddc) &= 28\zeta - 10\beta + 4\alpha + 14\gamma, \delta gg = \\ &= -7\gamma + 7\zeta, \Sigma_c^0(2452) \Rightarrow < 0.006\%. \end{aligned}$$

Разработанная система расчета масс частиц дает высокую сходимость с экспериментальными данными – см. таблицу N. 8.1.

Кварковая комбинация

$$\begin{aligned} \lambda_b(5425_{-75}^{+175}) &= udb = u + d + (u + u^q + d + d^q + u + u^q + d) = \\ &= 28\zeta + 18\gamma + 4\alpha - 12\beta \end{aligned}$$

Глюонное поле в такой комбинации дает массу микрочастицы 5148, что без учета экспериментального интервала дает расхождение 4%.

Это доказывает справедливость выбранной системы построения кварка *b* и одновременно опровергает гипотезу о кварках как о предельных микрочастицах.

Микрочастица есть локальная концентрация энергии, вызывающее изменение структуры пространства в замкнутом объеме. Структура и связность пространства обусловлена комбинацией изолированных направлений на любом уровне измерения. Физика микрочастиц фиксирует структуру микрочастицы квантовыми числами. Установленная связь квантовых чисел со связностью пространства, обусловленной комбинациями изолированных направлений, повторяется на любом уровне измерения.

При выводе формулы энергии связи атомных ядер было введено понятие энергетического циклонного вихря с $\mathcal{E}$ -туннелями. Количество циклонных вихрей в структуре атомных ядер находится в строгом соответствии с периодическим законом элементов. Расчет энергии связи ядер совместно с расчетом радиоактивных распадов подтвердили это соответствие.

В пространстве микрочастиц аналогия повторяется. Масса, спин, энергия связи и т.д. частицы находятся в зависимости или определяются количеством энергетических туннелей в структуре микрочастицы. Скомпенсированные изолированные направления определяют нейтральную массу, которая является со-

ставляющей массы частицы. Эта масса в расчетах задается коэффициентом К в

$$\text{формуле } m_{\chi}c^2 = \frac{(ggXc^2)^2}{km_gc^2}.$$

Наиболее четко связь между коэффициентом К и количеством изолированных туннелей в структуре микрочастицы, образованных взаимодействием фундаментальных масс m_gc^2 , прослеживается при расчете масс

Это не противоречит разработанной схеме структуризации и моделей частиц. Об этом неоднократно отмечалось при разработке нейтринного уровня и далее.

Разные кварковые комбинации могут иметь различное число туннелей ϵ глюонного поля, от которого зависят квантовые характеристики микрочастицы и количество фундаментальных частиц, создающих эту микрочастицу. Например, в соответствии с модами распада можно положить следующую таблицу.

$$dss, uss, \epsilon = 3, k = 12$$

$$sss, \epsilon = 4, k = 16$$

$$uds, \epsilon = 2, k = 8$$

$$uuc, \epsilon = 2, k = 8$$

$$ddc, \epsilon = 2, k = 8$$

Таблицы частиц
Лептоны (J=1/2)

Частица	Масса МэВ	Время жизни	Лептонный заряд			Основные Моды распада
			L_e	L_{μ}	L_{τ}	
ν_e	$<7 \cdot 10^{-6}$	Стабильно	+1	0	0	
ν_{μ}	<0.17	Стабильно	0	+1	0	
ν_{τ}	<18	Стабильно	0	0	+1	
e^{-}	0,511	$>4.3 \cdot 10^{23}$ лет	+1	0	0	
μ^{-}	105,66	$2,2 \cdot 10^{-6}$ с	0	+1	0	$e\nu\bar{\nu}$
τ^{-}	1777	$2,9 \cdot 10^{-13}$ с	0	0	+1	Андроны + ν , $\mu\nu\bar{\nu}, \nu$ $e\nu\bar{\nu}$

Андроны: Мезоны (B=0, L=0)

Частица	Кварковый состав	Масса МэВ	Время жизни в (сек) или ширина	Спин-четность, изоспин $J^P(I)$	Основные моды распада
π^{+}, π^{-}	$u\bar{d}, d\bar{u}$	139,7	$2,6 \cdot 10^{-8}$	$0^{-}(1)$	$\nu\mu^{+}, \bar{\nu}\mu^{-}$

π^0	$u\bar{u}, d\bar{d}$	134.98	$8.4 \cdot 10^{-17}$	$0^-(1)$	2γ
K^+, K^-	$u\bar{s}, s\bar{u}$	494	$1.2 \cdot 10^{-8}$	$0^-(1/2)$	$\nu\mu^+, \bar{\nu}\mu^-,$ $\pi^0\pi^\pm$
$K^0, \bar{K}^0$	$d\bar{s}, s\bar{d}$	498	$0.8 \cdot 10^{-10} K_S^0$ $5.2 \cdot 10^{-8} K_L^0$	$0^-(1/2)$ $0^-(1/2)$	$\pi^+\pi^-, \pi^0\pi^0$ $\pi e\nu, \pi\mu\nu, 3\pi^0$ $3\pi^0, \pi^0\pi^+\pi^-$
η	$u\bar{u} + d\bar{d}$	547	1,2 кэВ	$0^-(0)$	$2\gamma, 3\pi^0,$ $\pi^0\pi^-\pi^+$
η'	$u\bar{u} + d\bar{d}, s\bar{s}$	958	0,20 МэВ	$0^-(0)$	$\rho^0\gamma, \pi^0\pi^0\eta$ $\eta\pi^+\pi^+,$
$\rho^\pm$ ρ^0	$u\bar{d}, d\bar{u}$ $u\bar{u} - d\bar{d}$	770	151 МэВ	$1^-(1)$	$\pi\pi$
ω	$u\bar{u} + d\bar{d}$	782	8,4 МэВ	$1^-(0)$	$\pi^+\pi^-\pi^0$
ϕ	$s\bar{s}$	1020	4,4 МэВ	$1^-(0)$	K^+K^- $\pi^+\pi^-\pi^0$
$D^\pm$	$c\bar{d}, d\bar{c}$	1869	$1.1 \cdot 10^{-12}$	$0^-(1/2)$	K+другие
$D^0, \bar{D}^0$	$c\bar{u}, u\bar{c}$	1865	$4.2 \cdot 10^{-13}$	$0^-(1/2)$	$e + \text{другие},$ $\mu + \text{другие}$
$D_s^\pm$	$c\bar{s}, s\bar{c}$	1969	$4.7 \cdot 10^{-13}$	$0^-(0)$	$K + \text{другие}$
$B^\pm$ $B^0, \bar{B}^0$	$u\bar{b}, b\bar{u}$ $d\bar{b}, b\bar{d}$	5279	$1.6 \cdot 10^{-12}$	$0^-(1/2)$	$D^0 + \partial p, \nu + \partial p$
J/ψ	$c\bar{c}$	3097	87КэВ	$1^-(0)$	Андроны, $e^+e^-, \mu^+\mu^-$
Υ	$b\bar{b}$	9460	53КэВ	$1^-(0)$	$\tau^+\tau^-, e^+e^-,$ $\mu^+\mu^-$

Андроны: Барионы (B=1, L=0)

Частица	Кварковый состав	Масса МэВ	Время жизни в сек или Ширина МэВ	Спин, четность, изоспин $J^P(I)$	Основные моды распада
p	uud	938.27	>1031 лет	$1/2^+(1/2)$	

n	ddu	939.57	887 ± 2	$1/2^+(1/2)$	$pe\bar{\nu}$
Λ^0	uds	1116	$2.6 \cdot 10^{-10}$	$1/2^+(0)$	$p\pi^-, n\pi^0$
Σ^+	uus	1189	$0.80 \cdot 10^{-10}$	$1/2^+(1)$	$p\pi^0, n\pi^+$
Σ^0	uds	1193	$7.4 \cdot 10^{-20}$	$1/2^+(1)$	$\Lambda\gamma$
Σ^-	dds	1197	$1.5 \cdot 10^{-10}$	$1/2^+(1)$	$n\pi^-$
Ξ^0	uss	1315	$2.9 \cdot 10^{-10}$	$1/2^+(1/2)$	$\Lambda\pi^0$
Ξ^-	dss	1321	$1.6 \cdot 10^{-10}$	$1/2^+(1/2)$	$\Lambda\pi^-$
Ω^-	SSS	1672	$0.82 \cdot 10^{-10}$	$3/2^+(0)$	$\Lambda K^-, \Xi^0\pi^-$
Δ^{++}	uuu	1230-1234	115-125	$3/2^+(3/2)$	$(n, p) + \pi$
Δ^+	uud				
Δ^0	udd				
Δ^-	ddd				
$\Sigma^+(1385)$	uus	1384	36	$3/2^+(1)$	$\Lambda\pi, \Sigma\pi$
$\Sigma^0(1385)$	uds	1384			
$\Sigma^-(1385)$	dds	1387	39		
$\Xi^0(1530)$	uss	1532	9.1	$3/2^+(1/2)$	$\Xi\pi$
$\Xi^-(1530)$	dss	1535			
$N(1440)$	N^+uud	1430-1470	250-450	$1/2^+(1/2)$	$n(p) + \pi(2\pi)$ $\Delta\pi$
	N^0udd				
$N(1520)$	N^+uud N^0udd	1515-1530	110-135	$3/2^-(1/2)$	
Λ_c^+	udc	2285	$2.0 \cdot 10^{-13}$	$1/2^+(0)$	$(n, p) +$ $\partial\rho\gamma\pi$
Σ_c^{++}	uuc	2453		$1/2^+(1)$	$\Lambda_c^+\pi$
Σ_c^+	udc	2454			
Σ_c^0	ddc	2452			
Λ_b	udb	5425^{+17}_{-75}			

Характеристики кварков

Характеристика	Тип кварка					
	d	u	s	c	b	T
Электрический заряд Q	-1/3	+2/3	-1/3	+2/3	-1/3	+2/3
Барионное число B	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3
Спин J	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
Четность P	+1	+1	+1	+1	+1	+1
Изоспин I	1/2	1/2	0	0	0	0
Проекция изоспина I_z	-1/2	+1/2	0	0	0	0
Странность S	0	0	-1	0	0	0
Chfrm c	0	0	0	+1	0	0
Bjnnjmnes b	0	0	0	0	-1	0
Topnes t	0	0	0	0	0	+1
Масса в составе андрона, ГэВ	0,33	0,33	0,51	1,8	5	180
Масса свободного кварка ГэВ	0,007	0,005	0,15	1,3	4,1-4,4	174

Взаимосвязь и взаимопревращаемость элементарных частиц может быть выражена с предсказанием новых кварковых образований и микрочастиц.

Зарядовая сопряженность кварков, введенная в работе и доказанная при исследовании мод распада микрочастиц может быть формализована и дальше

$$S = (u + u^q) + d$$

$$c = (u + u^q) + (d + d^q) + u$$

$$b = (u + u^q) + (d + d^q) + (u + u^q) + d$$

$$t = (u + u^q) + (d + d^q) + (u + u^q) + (d + d^q) + u$$

По электрическому заряду комбинация $(u + u^q) = (d + d^q)$, поэтому

$$s = (u + u^q) + d$$

$$c = 2(u + u^q) + u$$

$$b = 3(u + u^q) + d$$

$$t = 4(u + u^q) + u$$

Кварковая система может быть продолжена

$$b_n = (2n + 1)(u + u^q) + d$$

$$t_n = 2n(u + u^q) + u$$

где $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Нейтральный пион равен $\pi^0 = u + u^q = 8 + 4ki$

Поэтому общая формула для кварков представима в виде

$$b_n = (2n + 1)\pi^0 + d$$

$$t_n = 2n\pi^0 + u$$

Микрочастица положительного заряда имеет структуру

$$P^+ = 2t_n + b_n = (6n + 1)\pi^0 + p^+$$

$$N^0 = b_n + 2t_n = (6n + 2)\pi^0 + n^0$$

при $n=0$ имеем

$P_{n=0}^+ = \pi^0 + p^+ = \sum^+$ в соответствии с модой распада положительно-го сигма гиперона.

$N_{n=0}^0 = 2\pi^0 + n^0 = \Xi^0 = \lambda^0 + \pi^0$ в соответствии с модами распада входящих в эту формулу частиц.

При $n=1$ имеем

$N_{n=1}^0 = 8\pi^0 + n^0 = bb^q + n^0 = Y + n^0$ также в соответствии с кварковым составом входящих в формулу частиц.

8.8 Сумма единичных глюонных вихрей с весовыми коэффициентами определяет структуру поля микрочастицы.

Комплексное пространство описывает структуризацию пространств различных по величине размерности. В главе 4 исследованы варианты такой структуризации как с ростом размерности пространства, так и в пределах одного измерения (рис 48). Каждый уровень (под уровнем понимаем число измерений конкретного пространства) имеет подпространство делителей нуля, которое, как было показано в главе 3, адекватно пространству светового конуса и которое отвечает за много связность пространства. Математически предельным элементом компактизации служит $\mathcal{E}$ -сфера, как область пространства, заключенная в объеме поверхности, натянутой без точек самопересечения (глава 1) на циклическую кривую типа C_3 (рис 3). В результате создается геометрическая аналогия с физическим циклонным вихрем. В сферических координатах подпространство делителей нуля сворачивается в $\mathcal{E}$ – туннель изолированного направления типа $\sqrt{0}e^{\pm jarktgi}$. В теоретической физике этого не удалось сделать со световым конусом, так как интервал теории относительности исследуется как результат преобразований Лоренца, данных в покоординатной матричной записи (подробно глава 3). Циклонную кривую нельзя сжать в точку так, чтобы она не содержала объема. Точки, линии в пространстве это элементы для построения $\mathcal{E}$ -сфер, $\mathcal{E}$ -туннелей не несут физической нагрузки. Электромагнитное лептонное и гравитационное пространство рассмотрено в главе 7 (рис64) с описанием его основных геометрических характеристик. В этом пространстве (глава 8) суммарное глюонное поле микрочастицы записывается в виде суммы изолированных направлений с весовыми коэффициентами a, b, c, d

$$gg\Psi_{n=4} = a + b(k \pm j) + c(j \pm i) + d(k + i) \quad 8.8.1$$

Переходя к сферическим координатам делители нуля переведем в изолированные направления и дадим им физическую трактовку

$b(k \pm j) = b\sqrt{0}e^{\pm karktgi}$ - глюонная масса вихря электрического заряда,

$c(j \pm i) = c\sqrt{0}e^{\pm jarktgi}$ - глюонная масса вихря лептонного заряда,

$d(k + i) = d\sqrt{0}e^{+karktgi}$ - глюонная масса гравитационного вихря.

Условная замена выражений глюонных вихрей для сокращения записи дает выражение

$$gg\Psi_{n=4} = a + be^{\pm kj} + ce^{\pm ji} + de^{\pm ki} \quad 8.8.2$$

Таким образом, все многообразие частиц имеет глюонное поле в виде (8.8.2) как сумму глюонных полей известных в настоящее время взаимодействий: электромагнитного, лептонного, гравитационного, отличающиеся весовыми коэффициентами.

Весовые коэффициенты каждой микрочастицы вычисляются из кварковых композиций

В связи с этим необходимо вычислить весовые коэффициенты кварков и определить систему кварков. Это было сделано на основе разработанных моделей микрочастиц в главе 8. В основу выбора структуры кварков была взята модель нейтрального пиона π^0 . Модель нейтрального пиона была рассмотрена при двух скомпенсированных глюонных вихрей: электрического и лептонного. Поэтому и вихревой состав кварков был двухкомпонентным.

Однако опираясь на исследования ядерной материи, проведенной в главе 5, необходимо перейти к шестикомпонентной схеме вихревого состава кварков, оставляя без изменения логику двухкомпонентной системы. Исследования показали, что электромагнитные поля могут образовывать устойчивые ядерные образования с одним $\mathcal{E}$ -туннелем, удерживающим 9-10 туннелей единичного заряда. Кроме того, эти образования формируются в блоки $6^*(9-10)$, так что наиболее устойчивым блоком оказался блок ядра ксенона Xe_{54} . Ядерная блоковая циклонная модель позволила вывести энергию связи атомных ядер, выдвинуть новую схему радиоактивных распадов, обосновать деление ядер в пропорции $3/2$ по массам продуктов деления. Совпадение результатов вычислений с экспериментальными данными позволяет принять блок из шести $\mathcal{E}$ -туннелей как наиболее устойчивый структурный блок.

Логика разработанных моделей микрочастиц позволяет нейтральный пион π^0 представить как структуру из 2,3, ..., скомпенсированных электронно-лептонных вихрей. В главе 7 остановились на двух. В настоящей главе следуя исследованиям ядерной материи и вышесказанным рассмотрим вариант устойчивой структуры нейтрального пиона из шести скомпенсированных зарядовых вихревых туннелей. В этом случае четыре исходных кварка u, u^q, d, d^q выразим в следующем виде (опираясь естественно на модели микрочастиц главы 8)

$$\begin{aligned} u &= e_{\tilde{v}_1}^+ + \sum_1^5 e_{v_{2n+1}}^- \\ u^q &= e_{v_1}^- + \sum_1^5 e_{\tilde{v}_{2n+1}}^+ \\ d &= \sum_0^5 e_{\tilde{v}_{2n+1}}^- \\ d^q &= \sum_0^5 e_{\tilde{v}_{2n+1}}^+ \end{aligned} \quad 8.8.3$$

где $V_1, V_3, \dots, V_{2n+1}$ нейтрино, $\tilde{V}_1, \tilde{V}_3, \dots, \tilde{V}_{2n+1}$ антинейтрино.

В соответствии с моделями нейтрино и антинейтрино $V_1 = V_e$ обозначено электронное нейтрино, $V_3 = V_\mu$ мюонное нейтрино и соответственно $\tilde{V}_1, \tilde{V}_3$ электронное и мюонное антинейтрино. Структуризация нейтринного уровня предполагает различные схемы и модели образования нейтрино и антинейтрино (глава 8).

Согласно этим моделям

$$V_e = 1 + ji = e^{jarktgi}. \text{ Условно } V_e = e^{ji}.$$

$$\tilde{V}_e = 1 - ji = e^{-jarktgi}. \text{ Условно } \tilde{V}_e = e^{-ji}$$

Приведем систему 8.8.3 к виду 8.8.2. Для примера раскроем выражение кварка u .

$$e_{V_1}^+ = (1 + kj)(1 + ji) = 1 + kj - ji + ki$$

$$e_{V_3}^- = (1 - kj)(3 + ji) = 3 - 3kj + ji + ki$$

$$e_{V_5}^- = (1 - kj)(5 + ji) = 5 - 5kj + ji + ki$$

$$e_{V_7}^- = (1 - kj)(7 + ji) = 7 - 7kj + ji + ki$$

$$e_{V_9}^- = (1 - kj)(9 + ji) = 9 - 9kj + ji + ki$$

$$e_{V_{11}}^- = (1 - kj)(11 + ji) = 11 - 9kj + ji + ki$$

Суммируя развернутые выражения электрически лептонного вихрей получим в соответствии с 8.8.3 кварк u . Аналогичные операции проведем для остальных кварков. В результате получим:

$$u = 36 - 34kj + 4ji + 6ki$$

$$u^q = 36 + 34kj - 4ji + 6ki \quad 8.8.4.$$

$$d = 36 - 37kj + 6ji + 6ki$$

$$d^q = 36 + 37kj - 6ji + 6ki$$

Перейдем в системе кварков к выражению их через вихревые глюонные поля, в соответствии с формулой 8.8.2. Операции выделения электрического, лептонного и гравитационного вихря продемонстрируем на примере кварка u .

$$u = 36 - 34kj + 4ji + 6ki =$$

$$= 36 + 34 - 34 - 34kj + 4 - 4 + 4ji + 6 - 6 + 6ki =$$

$$= 36 - 34 - 4 - 6 + 34e^{-kj} + 4e^{+ji} + 6e^{ki} =$$

$$= -8 + 34e^{-kj} + 4e^{+ji} + 6e^{ki}$$

Обозначение вихрей записано в условном виде. Аналогичные операции дают для остальных кварков:

$$u = -8 + 34e^{-kj} + 4e^{+ji} + 6e^{ki}$$

$$u^q = 68 - 34e^{-kj} - 4e^{+ji} + 6e^{ki} \quad 8.8.5$$

$$d = -13 + 37e^{-kj} + 6e^{+ji} + 6e^{ki}$$

$$d^q = 73 - 37e^{-kj} - 6e^{+ji} + 6e^{ki}$$

В данной системе электрические и лептонные поля для всех кварков и антикварков одинаковы, так как они входят в дальнейшем в систему линейных уравнений как неизвестные. Если записать кварки и антикварки через противоположные заряды, то кварки и антикварки будут иметь одинаковые весовые коэффициенты. Линейная система даст в расчете одинаковый результат. То есть энергия единичного заряда не зависит от его знака.

В соответствии с кварковой композицией нейтрального пиона $\pi^0 \cong uu^q \cong dd^q$

$$\begin{aligned} \pi^0 &= uu^q = 60 + 12e^{ki} \\ \text{Будем иметь} \quad \pi^0 &= dd^q = 60 + 12e^{ki} \end{aligned}$$

Таким образом, глюонные вихри лептонного и электрического заряда аннигилировали. Глюонное поле нейтрального пиона имеет только гравитационный зарядовый вихрь. Исследуем на примере кварков u, u^q их пространственную симметрию. Выразим глюонное поле кварков через положительный электрический зарядовый вихрь и отрицательный лептонный вихрь, получим:

$$u = 68 - 34e^{+kj} - 4e^{-ji} + 6e^{ki} \quad 8.8.6$$

$$u^q = -8 + 34e^{+kj} + 4e^{-ji} + 6e^{ki}$$

Кварковая композиция глюонного поля нейтрального пиона определяется прежними весовыми коэффициентами $\pi^0 = uu^q = 60 + 12e^{ki}$.

Из сравнения выражений 8.8.4 и 8.8.5, 8.8.6 делаем вывод: при изменении знака заряда глюонных вихрей на противоположные весовые коэффициенты u кварка становятся равными весовым коэффициентам u^q кварка и симметрично наоборот. Таким образом, соблюдается СРТ теорема квантовой механики микрочастиц.

Согласно определению микрочастицы и античастицы заряды глюонных полей u, u^q кварков должны быть сопряженными. Поэтому для кварка

$$u = -8 + 34e^{-kj} + 4e^{ji} + 6e^{ki}$$

антикварком является

$$u^q = -8 + 34e^{+kj} + 4e^{-ji} + 6e^{ki}$$

Нейтральный пион выразится в виде

$$\begin{aligned} \pi^0 = uu^q &= -8 + 34 - 34kj + 4 + 4ji + 6e^{ki} - 8 + 34 - 34kj + 4 - 4ji + 6e^{ki} = \\ &= 60 + 12e^{ki} \end{aligned}$$

Таким образом, весовые коэффициенты кварка и антикварка равны. Кварки в данном случае отличаются только зарядами глюонных полей. Все операции симметрично повторяются и для кварков d, d^q . Зарядовые глюонные поля разных знаков аннигилируют, при этом энергия аннигиляции глюонных полей пе-

переходит в энергию вещества. Энергию вещества в глюонном поле рассматривает как энергию скомпенсированных глюонных полей. Это вытекает из модельного построения микрочастиц (глава 8).

Кварковая композиция положительного пиона $\pi^+ = ud^q$. Подставляя в эту композицию значения кварков получим выражение положительного пиона через весовые коэффициенты глюонных единичных вихрей.

$$\pi^+ = ud^q = -8 + 34e^{-kj} + 4e^{ji} + 6e^{ki} + 73 - 37e^{-kj} - 6e^{ji} + 6e^{ki} = \\ = 65 - 3e^{-ki} - 2e^{ji} + 12e^{ki}$$

Отрицательный весовой коэффициент и отрицательный заряд единичного электрического вихря дает изоспин равный +1, $T_{\xi}^{\pi^+} = +1$

$$\pi^+ = 55 + 3e^{kj} + 2e^{-ji} + 12e^{ki},$$

Зарядовое сопряжение C меняет как знак электрического вихря, так и знак весового коэффициента, оставляя знак изоспина без изменения.

Отрицательный пион имеет кварковую композицию $\pi^- = du^q$ и поэтому расчет весовых коэффициентов дает

$$\pi^- = du^q = -13 + 37e^{-kj} + 6e^{ji} + 6e^{ki} + 68 - 34e^{-kj} - 4e^{ji} + 6e^{ki} = \\ = 55 + 3e^{-kj} + 2e^{ji} + 12e^{ki}$$

Положительный весовой коэффициент и отрицательный заряд электрического вихря дает изоспин - 1

$$\pi^- = 65 - 3e^{kj} - 2e^{-ji} + 12e^{ki},$$

Изменение знака электрического вихря влечет за собой изменение знака весового коэффициента, оставляя знак изоспина без изменения.

Отрицательный и положительный пионы отличаются величиной вещественной части глюонного поля и знаками проекций зарядовых глюонных вихрей. При изменении знака глюонных полей в любом из пионов получим другой зарядовый пион как античастицу.

$$C(\pi^-) = 55 + 3 - 3 + 3 - 3kj + 2 - 2 + 2 + 2ji + 12e^{ki} = \\ = 55 + 6 + 4 - 3e^{kj} - 2e^{-ji} + 12e^{ki} = 65 - 3e^{kj} - 2e^{-ji} + 12e^{ki}$$

В результате имеем выполнение теоремы CP (сопряжения и зеркального отображения).

$$C(\pi^+) = \pi^- \quad CP(\pi^+) = \pi^+$$

$$C(\pi^-) = \pi^+ \quad CP(\pi^-) = \pi^-$$

π -мезоны образуют изотопический триплет частиц с изоспином $T = 1$ и проекциями изоспина $T_{\xi}^{\pi^+} = 1, T_{\xi}^{\pi^-} = -1, T_{\xi}^{\pi^0} = 0$

Нейтральный пион не имеет зарядовых глюонных полей и его изоспин равен нулю, положительный пион имеет положительные весовые коэффициенты перед положительно заряженным электрическим глюонным полем и отрицательным лептонным. Изоспин равен +1.

Отрицательный пион имеет отрицательные значения весовых коэффициентов перед положительно заряженным глюонным электрическим полем и отрицательным лептонным. Изоспин равен -1.

Одновременно положительный пион может иметь отрицательные весовые коэффициенты перед отрицательно заряженным электрическим глюонным полем и положительно заряженным лептонным. Однако изоспин равен +1. Для отрицательного пиона будем иметь положительные весовые коэффициенты при отрицательном электрическом глюонным полем и положительным лептонным. Изоспин равен -1.

Современная теоретическая физика микрочастиц не выявила ту пространственную симметрию, которая отвечает знаку заряда, то есть до настоящего времени не определено фундаментальное свойство заряда быть положительным и отрицательным. В связи с этим знак изоспина увязывается со знаком заряда.

Комплексное пространство определило симметрию, которая отвечает за это фундаментальное свойство заряда быть положительным и отрицательным. Знак заряда не зависит от положения заряда в пространстве, находится заряд в верхнем полупространстве или в нижнем полупространстве. В связи с этим понятие изоспина можно уточнить. Изоспин введен в формальном вспомогательном пространстве с условными осями ξ, η, ζ , которое называется изотопическим. Комплексное пространство не является формальным пространством и не имеет трех линейных осей. Комплексное пространство обладает и свойством формального изотопического пространства. Понятие изотопического спина увязано с зарядом, который определяется зарядом глюонного поля и знаками весовых коэффициентов, с которыми глюонные поля входят в суммарное глюонное поле микрочастицы. Исследование изоспина пионного триплета уточняет знак изоспина: для обозначения изоспина используем принятые обозначения в квантовой механике микрочастиц $T_{\xi}^{\text{частица}}$.

Изоспин положителен для частиц, у которых глюонное поля электрического заряда определено в верхнем полупространстве (или изолированное направление глюонного поля электрического заряда совпадает с положительным направлением комплексной оси $ke^{j\varphi+i\phi}$). Изоспин отрицателен, если его изолированное направление образовано в нижнем полупространстве и совпадает с отрицательным направлением комплексной оси $-ke^{j\varphi+i\phi}$.

Знак изоспина не обязательно совпадает со знаком заряда. Изолированное направление глюонного поля может быть положительным но образовано в нижнем полупространстве и поэтому изоспин будет отрицательным. И также возможен вариант, когда отрицательный заряд образован в верхней полусфере пространства и его изоспин положителен. Эта симметрия вытекает из моделей главы 8.

Рассмотрим другой вариант стабильной частицы. Протон имеет кварковую композицию $p^+ = uud$. В весовых коэффициентах и единичных глюонных полей эта композиция дает два варианта:

$$p^+ = -29 + 105e^{-kj} + 14e^{ji} + 18e^{ki} \quad 8.8.7$$

$$\tilde{p}^+ = 209 - 105e^{kj} - 14e^{-ji} + 18e^{ki}$$

Из этих двух вариантов один дает протон другой антипротон. Это предстоит выбрать.

Антипротон можно образовать кварковой композицией $\tilde{p}^+ = u^q u^q d^q$. В весовых коэффициентах глюонных вихрей будем иметь выражения.

$$\tilde{p}^+ = 209 - 105e^{-kj} - 14e^{ji} + 18e^{ki}$$

$$C(\tilde{p}^+) = p^+ = -29 + 105e^{kj} + 14e^{-ji} + 18$$

В связи с этим принимаем первое выражение из 8.8.7 за протон, а второе из 8.8.7 за антипротон.

Считается, что протон имеет спин равный +1. Следовательно глюонный электрический вихрь протона даже если он отрицателен, но направлен (или имеет проекцию положительную с комплексной третьей осью в пространстве) и сформирован в верхнем полупространстве то есть имеет положительную величину своего весового коэффициента, то частица имеет изоспин +1 и соответственно положительный заряд.

Протон, определенный через кварковую композицию $p^+ = uud = -29 + 105e^{-kj} + 14e^{ji} + 18e^{ki}$ по определению квантовые числа протона спин, четность, изоспин $1/2^+(1/2)$

Антипротон, определенный через кварковую композицию $\tilde{p}^+ = u^q u^q d^q = 209 - 105e^{-kj} - 14e^{ji} + 18e^{ki}$ переходит через операцию зарядовой симметрии (которая неоднократно демонстрируется) в протон

$$C(\tilde{p}^+) = -29 + 105e^{kj} + 14e^{-ji} + 18e^{ki}, \text{ изоспин которого равен } 1/2$$

Таким образом, протон обладает способностью менять знак изоспина, сохраняя свою массу.

Нейтрон обладает аналогичной симметрией

$$n^0 = ddu = -34 + 108e^{-kj} + 16e^{ji} + 18e^{ki},$$

квантовые числа $1/2^+(1/2)$

$$C(\tilde{n}^0) = C(d^q d^q u^q) = -34 + 108e^{+kj} + 16e^{-ji} + 18e^{ki},$$

Установлено, что в ядерных взаимодействиях протон и нейтрон обладают противоположными изоспинами.

Нейтрон имеет кварковую композицию $n^0 = ddu$. Запишем композицию в весовых коэффициентах $n^0 = -34 + 108e^{-kj} + 16e^{ji} + 18e^{ki}$. По комбинации знаков весовых коэффициентов и вихревых зарядов нейтрон не отличается от протона. Однако он нейтрален и поэтому необходимо рассмотреть разницу в величинах коэффициентах

$$n^0 - p^+ = -5 + 3e^{-kj} + 2e^{ji}$$

Вычитая из этой разницы электронное антинейтрино в соответствии со схемой распада нейтрона получим

$$\begin{aligned} E^- &= -5 + 3e^{-kj} + 2 + 2ji - 1 + ji = \\ &= -4 + 3e^{-kj} - 3 + 3 + 3ji = \\ &= -7 + 3e^{-kj} + 3e^{ji} \end{aligned}$$

Эта разница определяет весовые коэффициенты распада нейтрального нейтрона на электрон и электронное антинейтрино по схеме, установленной в экспериментах

$$n^0 = p^+ + E^- + \tilde{\nu}_e$$

Согласно этой схеме один из кварков d в композиции нейтрона переходит в кварк u выделяя электрон и электронное антинейтрино, так что электрон равен

$$\begin{aligned} E^- &= d - u - (1 - ji) = e_{\nu_e}^- - e_{\tilde{\nu}_e \Rightarrow \tilde{\nu}_e}^+ = (1 - kj)(1 + ji) - (1 + kj) = \\ &= 1 - kj + ji + ki - 1 - kj = -2kj + ji + ki = -4 + 2e^{-kj} + e^{ji} + e^{ki} \end{aligned}$$

Итак электрон выражается в виде

$$E^- = -4 + 2e^{-kj} + e^{ji} + e^{ki}$$

В первом варианте нет учета кинетической энергии распада, которая составляет разницу в глюонных полях электрона вычисленных этими двумя способами

$$Q = -3 + e^{-kj} + 2e^{ji} - e^{ki}$$

После определения энергии глюонных полей эта величина была вычислена. $Q = 0.959 M_{\text{эв}}$

Экспериментальная величина равна 0,762 Мэв. Расхождение составляет 23%.

Таким образом, рассмотрены четыре стабильных микрочастицы p^+, n^0, π^+, E^-

Определены выражения суммарного глюонного поля каждой из частиц через весовые коэффициенты и вихревые единичные зарядовые поля.

$$\Psi_g(p^+) = -29 + 105e^{-kj} + 14e^{ji} + 18e^{ki}$$

$$\Psi_g(n^0) = -34 + 108e^{-kj} + 16e^{ji} + 18e^{ki} \quad 8.8.8$$

$$\Psi_g(\pi^-) = 65 - 3e^{-kj} - 2e^{ji} + 12e^{ki}$$

$$\Psi_g(E^-) = -4 + 2e^{-kj} + e^{ji} + e^{ki}$$

Для каждой частицы значения весовых коэффициентов не меняется, если изменить знаки электрического и лептонного вихря.

$$\begin{aligned}
 \Psi_g(p^+) &= -29 + 105e^{kj} + 14e^{-ji} + 18e^{ki} \\
 \Psi_g(n^0) &= -34 + 108e^{kj} + 16e^{-ji} + 18e^{ki} \\
 \Psi_g(\pi^-) &= 65 - 3e^{kj} - 2e^{-ji} + 12e^{ki} \\
 \Psi_g(E^-) &= -4 + 2e^{kj} + e^{-ji} + e^{ki}
 \end{aligned}
 \tag{8.8.9}$$

Установленная симметрия есть следствие равенства масс единичных глюонных полей разных знаков.

$$\Psi_g(e^{+kj}) = \Psi_g(e^{-kj}), \Psi_g(e^{+ji}) = \Psi_g(e^{-ji})
 \tag{8.8.10}$$

Система глюонных полей составлена из наиболее стабильных частиц, для которых исследовано соответствие квантовых чисел физики микрочастиц со структурой этих глюонных полей. Система составлена для четырех частиц и содержит четыре неизвестных в виде единичных глюонных полей и четыре величины суммарного глюонного поля каждой микрочастицы.

Для определения масс зарядовых единичных глюонных полей в системе 8.8.9 необходимо вычислить суммарное глюонное поле микрочастиц. Энергетически микрочастица рассматривается как дефект массы в результате взаимодействия фундаментальных масс m_g . Дефект масс есть в свою очередь следствие образования глюонного поля между взаимодействующими массами.

$$m_x c^2 = k m_g c^2 \pm \sqrt{(k m_g c^2)^2 - (m(\Psi_g^x) c^2)^2}
 \tag{8.8.11}$$

где k - количество взаимодействующих фундаментальных масс,

$m(\Psi_g^x) c^2$ - суммарная масса глюонного поля микрочастицы,

$m_x c^2$ - масса частицы.

Формула представляет операционную замену интервала теории относительности на энергетические массы. (глава 7). Формула использовалась при вычислении энергии связи атомных ядер (глава 5), а также при исследовании радиоактивных распадов ядер (глава 6). Сходимость результатов с экспериментальными данными дает основание в применении этой формулы и в дальнейших расчетах.

Если известно суммарное поле микрочастицы, то масса частицы определяется из 8.8.11, если известны массы частицы, то глюонное поле определяется по формуле

$$m(\Psi_g^x) c^2 = \sqrt{2 k m_g c^2 m_x c^2}
 \tag{8.8.12}$$

Для определения единичных глюонных зарядовых полей, которые через весовые коэффициенты составляют суммарное глюонное поле, используем систему 8.8.9, в которой суммарные глюонные поля определены для стабильных частиц с известными массами.

Если известны единичные глюонные зарядовые массы, то по известным весовым коэффициентам будет определено суммарное глюонное поле микрочастицы и ее масса по формуле

$$m_x c^2 = \frac{(m(\Psi_g^x) c^2)^2}{2k m_g c^2} \quad 8.8.13$$

Таким образом, если определить вклад каждого зарядового вихря в глюонное поле микрочастицы с соответствующими весовыми коэффициентами, вычисленными из кварковых композиций классификации микрочастиц и модами распада, то по формуле 8.8.13 вычисляются массы микрочастиц.

Согласно формулы 8.8.12 для наиболее стабильных частиц имеем:

$$m(\Psi_g^{p^+}) c^2 = 67.527 * 10^{11} \text{ МэВ}, m(\Psi_g^{n^0}) c^2 = 67.713 * 10^{11} \text{ МэВ},$$

$$m(\Psi_g^{\pi^-}) c^2 = 26.11 * 10^{11} \text{ МэВ}, m(\Psi_g^{E^-}) c^2 = 1.58 * 10^{11} \text{ МэВ}$$

В результате из 8.8.9 имеем систему

$$67.527 * 10^{11} = -29 + 105e^{-kj} + 14e^{ji} + 18e^{ki} \quad 8.8.14$$

$$67.713 * 10^{11} = -34 + 108e^{-kj} + 16e^{ji} + 18e^{ki}$$

$$26.11 * 10^{11} = 65 - 3e^{-kj} - 2e^{ji} + 12e^{ki}$$

$$1.58 * 10^{11} = -4 + 2e^{-kj} + e^{ji} + e^{ki}$$

Решение системы 8.8.14 дает следующие значения величин единичных зарядовых вихрей.

$$m_g(e^{-kj}) c^2 = 0.4667 * 10^{11} \text{ МэВ} \quad 8.8.15$$

$$m_g(e^{ji}) c^2 = -0.3471 * 10^{11} \text{ МэВ}$$

$$m_g(e^{ki}) c^2 = 1.520807 * 10^{11} \text{ МэВ}$$

$$m_g(1) = 0.13171 * 10^{11} \text{ МэВ}$$

Рассмотрим энергетическую структуру кварков на примере u, u^q

$$u = -8 + 34e^{-kj} + 4e^{ji} + 6e^{ki}$$

$$u^q = 68 - 34e^{-kj} - 4e^{ji} + 6e^{ki}$$

Определим радиусы изолированных $\mathcal{E}$ -туннелей заряженных глюонных вихрей по формуле квантовой механики $\lambda_x = \frac{h}{m_x c}$. Для каждого вихря входя-

щего в состав u кварка будем иметь:

$$\lambda(e^{kj}) = \frac{h}{(34 * 0.4667 * 10^{11}) c} = 0.47605 * 10^{-21} \text{ см}$$

$$\lambda(e^{ji}) = 5.44 * 10^{-21} \text{ см} \quad 8.8.16$$

$$\lambda(e^{ki}) = 0.8278 * 10^{-21} \text{ см}$$

$$\lambda(1) = 7.198 * 10^{-21} \text{ см}$$

Теоретическая физика дает величину сечения слабого взаимодействия $\approx 10^{-43}$ см. Вычисленная величина радиуса изолированных туннелей зарядовых вихрей находится в полном соответствии с этой величиной. Таким образом, до $r \approx 10^{-21}$ см. Следовательно кварк может рассматриваться как точечная частица до величины этого радиуса. Вещество кварка сосредоточено в объеме радиуса $7.198 \cdot 10^{-21}$ см.

Структура глюонного поля задает квантовые числа и массу микрочастиц.

Исследуем влияние квантовых чисел на структуру и массу микрочастиц на трехкомпонентной кварковой композиции барионов.

Резонанс $\Delta^{++}(1232)$ имеет кварковую структуру uuu , которая задает глюонное поле в виде $g\Delta^{++}(1232) \Rightarrow 0 + 102e^{-kj} - 12e^{ji} + 18e^{ki}$, которое представляет сумму глюонных составляющих исходного кварка $u = -8 + 34e^{-kj} + 4e^{ji} + 6e^{ki}$, в котором к лептонной составляющей применена операция сопряжения и отражения. Иными словами тройной поворот лептонного поля дает спин микрочастицы равным $s = 3/2$, так как исходный спин кварка принят $1/2$ в системе расчета. Спин микрочастицы представляет количество поворотов лептонного поля в композиции частицы. Вычисление массы дает величину $m_{\Delta^{++}(1232)} c^2 = 1282$ Мэв. Расхождение составляет 4,1%. Изоспин равен $3/2$,

Изоспин определяется электрической составляющей глюонного поля частицы и в этой композиции он равен $J = 3/2$, так как оно представляет утроенное поле глюонного поля исходного кварка u . Кроме того согласно изоспиновой диаграмме рис глюонные (электрическое и лептонное) складываются.

Кварковый состав uud представлен двумя микрочастицами $p^+(938), \Delta^+(1232)$

Протон входит в систему уравнений, т. е., поэтому имеет квантовые числа $1/2^+(1/2)$.

Поворот глюонного поля в кварках u, d определяет суммарное поле композиции

$$g\Delta^+(1232) = -9 + 105e^{-kj} - 6e^{ji} + 18e^{ki}.$$

Вычисления дают массу резонанса $m_{\Delta^+(1232)} c^2 = 1227.7$ Мэв. Расхождение составляет 076%. Спин частицы, следуя предыдущим рассуждениям, равен $1/2$ изоспин равен $3/2$. Однако масса меньше экспериментальной и поэтому необходимо рассмотреть вариант с третьим поворотом глюонного поля в третьем кварке композиции. Тогда будем иметь

$$g\Delta^+(1236) = -1 + 105e^{-kj} - 14e^{ji} + 18e^{ki}.$$

Вычисления дают $m_{\Delta^+(1236)} c^2 = 1346.8$ Мэв. Расхождение составляет 9,3%. Спин равен $3/2$, изоспин равен $3/2$.

Кварковая композиция udd представлена двумя частицами $n^0(940), \Delta^0(1232)$.

Нейтрон является как и протон исходной частицей для вычислений полей. Поэтому рассматриваем более подробно резонанс.

Если в кварках d повернуть (СР) лептонное поле, то получим суммарное глюонное поле композиции в виде $g\Delta^0(1232) = -10 + 108e^{-kj} - 8e^{ji} + 18e^{ki}$

Вычисление массы дает величину $m_{\Delta^0(1236)}c^2 = 1285.6 \text{ МэВ}$. Спин равен $1/2$, изоспин равен $3/2$. Четность положительная. $1/2^+(3/2)$.

Если повернуть лептонное поле и в кварке u , то получим

$$g\Delta^0(1236) = -2 + 108e^{-kj} - 14e^{ji} + 18e^{ki}.$$

Вычисление массы дает $m_{\Delta^0(1236)}c^2 = 1389.24 \text{ МэВ}$. Расхождение составляет 13%.

Спин резонанса равен $3/2$, так как повернуто лептонных составляющих в композиции из трех кварков. Изоспин равен также $3/2$, так как имеем электрическую составляющую глюонного поля равную сумме трех электрических глюонных полей. $3/2^+(3/2)$ -квантовые числа микрочастицы находятся в соответствии с экспериментальными.

Обобщая вычисления, сформулируем правило 1 для определения спина и изоспина не странных микрочастицы. 1. Изоспин микрочастицы определяется тем количеством весовых коэффициентов электрического глюонного поля исходных кварков (по абсолютной величине), которое составляет суммарный весовой коэффициент электрического поля микрочастицы (также рассматривается абсолютная величина). Спин микрочастицы равен количеству весовых коэффициентов лептонного поля, которое укладывается в абсолютное значение суммарного весового лептонного коэффициента микрочастицы. В принципе правила сводятся к делению весовых коэффициентов электрического и лептонного поля на весовые (соответствующие) коэффициенты исходных кварков, участвующих в композиции микрочастицы.

Кварковая композиция ddd дает резонанс $\Delta^-(1241)$. Квантовые числа $3/2^+(3/2)$. Глюонное поле для этой композиции определим с поворотом лептонной составляющей в двух и трех кварках и соответственно получим.

$$g\Delta^-(1241) = -15 + 111e^{-kj} - 6e^{ji} + 18e^{ki}.$$

$$\Rightarrow m_{\Delta^-(1241)}c^2 = 1287.23 \text{ МэВ}.$$

$$g\Delta^-(1241) = -3 + 111e^{-kj} - 18e^{ji} + 18e^{ki}.$$

$$\Rightarrow m_{\Delta^-(1241)}c^2 = 1480.32 \text{ МэВ}$$

Расхождение с экспериментальными значениями составляет для первого случая 3,7 %, для второго 19 %. Квантовые числа вычисляются по введенному правилу и равны для первого случая $1/2^+(3/2)$, для второго $3/2^+(3/2)$.

Таким образом, рассмотрены квантовые числа частиц и резонансов, имеющих заряд странности $S = 0$. Вычисления дают зависимость массы частицы от весовых коэффициентов лептонного поля. Резонансы $\Delta^{++}(1232), \Delta^+(1236), \Delta^0(1236), \Delta^-(1241)$ представляют мультиплет с одинаковыми квантовыми числами $3/2^+(3/2)$. В вычислениях масс резонансов проявилась также зависимость массы от разности в весовых коэффициентах электрического и лептонного поля в исходных кварках u, d . Где больше доля кварка d в композиции, тем больше масса. Расхождение в мультиплетах физика микрочастиц допускает до 15 %. Для мультиплета со спином $1/2$ расхождение составляет между массами 10 %, для спина $3/2$ расхождение составляет 15 %.

Далее проведем вычисления для барионов с зарядом странности $S = -1$. Это микрочастицы, которые содержат в своей композиции кварк $S = (u + u^q) + d$. Заряд странности (по введенной нами классификации) определяется скомпенсированными электрическим и лептонным полем в кварковой композиции $(u + u^q)$. Суммарное поле этой композиции равно $u + u^q = d + d^q = 60 + 6e^{ki}$.

Кварковая композиция uus представлена двумя частицами $\Sigma^+(1383), \Sigma^+(1189)$.

Глюонное поле этой композиции состоит из трех кварков u , одного кварка u^q и одного кварка d . Поворот одного электрического и трех лептонных полей определит глюонное поле микрочастицы $g\Sigma^+(1383) = 127 + 37e^{-kj} - 14e^{ji} + 30e^{ki}$ (произведено два поворота в кварках u и один поворот в кварке d). Спин равен $3/2$. Изоспин равен 1, так как происходит сложение электрического и лептонного поля согласно диаграмме.

$g\Sigma^+(1189) = 107 + 37e^{-kj} + 6e^{ji} + 30e^{ki}$ (произведено два поворота лептонного поля в кварках u). Спин равен $1/2$. Изоспин равен $1/2$. (происходит вычитание глюонных полей согласно диаграмме) Массы соответственно равны

$m_{\Sigma^+(1383)} c^2 = 1458$ Мэв. Расхождение составляет 5,3 %. Спин равен $3/2$. Изоспин $1/2$.

$$m_{\Sigma^+(1189)} c^2 = 1146.83 \text{ Мэв. Расхождение составляет } 3,6 \text{ \%}.$$

Можно рассмотреть другие варианты глюонного поля. Поворот лептонного поля в кварке d и поворот электрического поля в кварке u дает

$$g\Sigma^+(1189) = 111 + 37e^{-kj} + 2e^{ji} + 30e^{ki}$$

Квантовые числа равны $1/2^+(1/2)$. Вычисление массы дает величину $m_{\Sigma^+(1189)}c^2 = 1206 \text{ МэВ}$. Расхождение составляет 1,4 %. Таким образом, к правилу 1 добавляется уточнение для странных частиц. К значению изоспина, определенному по правилу 1, необходимо прибавить $J = \frac{1}{2}\|S\|$, где S - величина странного заряда.

Далее рассмотрим кварковую композицию uds , представленную тремя микрочастицами $\Sigma^0(1386), \Sigma^0(1192), \lambda^0(1116)$. Построение глюонных полей микрочастиц остается в силе. Один поворот электрического поля дополняется одним, двумя и тремя поворотами лептонного поля в кварках. Последовательно будем иметь

$$g\Sigma^0(1192) = 120 + 34e^{-kj} - 4e^{ji} + 30e^{ki}$$

$$\Rightarrow m_{\Sigma^0(1192)}c^2 = 1265.5 \text{ МэВ}$$

$$g\Sigma^0(1385) = 132 + 34e^{-kj} - 16e^{ji} + 30e^{ki}$$

$$\Rightarrow m_{\Sigma^0(1385)}c^2 = 1456.13 \text{ МэВ}$$

$$g\lambda^0(1116) = 112 + 34e^{-kj} + 4e^{ji} + 30e^{ki}$$

$$\Rightarrow m_{\lambda^0(1116)}c^2 = 1145.31 \text{ МэВ}$$

В соответствии с правилом 1 имеем квантовые числа $S = 1/2, s = 3/2, s = 1/2$. Изоспин для всех частиц по правилу один равен $1/2$. Однако учитывая дополнение к правилу один получаем для всех микрочастиц изоспин равный 1.

С кварковой композицией dds для квантовых чисел имеем аналогию предыдущему рассмотрению. Имеем две частицы $\Sigma^-(1197), \Sigma^-(1385)$.

Глюонные поля имеют аналогичное построение

$$g\Sigma^-(1197) = 92 + 37e^{-kj} + 6e^{ji} + 30e^{ki}$$

$$\Rightarrow m_{\Sigma^-(1197)}c^2 = 1087.33 \text{ МэВ}$$

$$g\Sigma^-(1385) = 95 + 37e^{-kj} - 18e^{ji} + 30e^{ki}$$

$$\Rightarrow m_{\Sigma^-(1385)}c^2 = 1363.26 \text{ МэВ}$$

Расхождение по массам составляет 2,6 % и 1,6 %.

Квантовые числа равны соответственно с учетом введенных правил $1/2^+(1), 3/2^+(1)$.

Кваревых композиций с двумя зарядами странности (то есть они содержат два кварка S) две uss, dss . Соответственно имеем по две частицы в каждой композиции. $\Xi^0(1529), \Xi^0(1315), \Xi^-(1321), \Xi^-(1530)$

Глюонные поля этих микрочастиц образованы поворотом электрического лептонного поля в двух кварках и дополнительно поворотами лептонных полей в двух или трех кварках.

Глюонные поля соответственно равны

$$g\Xi^0(1315) = 258 - 34e^{-kj} - 4e^{ji} + 42e^{ki}$$

$$\Rightarrow m_{\Xi^0(1315)} c^2 = 1234 \text{ Мэв}$$

$$g\Xi^0(1529) = 240 - 34e^{-kj} - 16e^{ji} + 42e^{ki}$$

$$\Rightarrow m_{\Xi^0(1529)} c^2 = 1480.6 \text{ Мэв}$$

$$g\Xi^-(1321) = 253 - 34e^{-kj} - 6e^{ji} + 42e^{ki}$$

$$\Rightarrow m_{\Xi^-(1321)} c^2 = 1372 \text{ Мэв}$$

$$g\Xi^-(1535) = 265 - 37e^{-kj} - 18e^{ji} + 42e^{ki}$$

$$\Rightarrow m_{\Xi^-(1535)} c^2 = 1571.56 \text{ Мэв}$$

Расходимость по массе составляет для каждой частицы, 3,2 %, 3,9 %, 2,45 %. Все микрочастицы имеют отрицательные электрические составляющие глюонного поля, поэтому изоспин по правилу 1 имеет отрицательное значение $-1/2$ плюс составляющая изоспина по дополнению к правилу равная $\frac{1}{2} * 2 = 1$. Таким образом, изоспин равен $1/2$. Спин определяется по первому правилу. Для первой и третьей частицы он равен $s = 1/2$, для третьей и четвертой частицы он равен $3/2$.

Кварковая композиция с тремя зарядами странности sss имеет частица $\Omega^-(1672)$.

Композиция состоит из 3-х кварков d и трех композиций $(u + u^q)$, так как кварк

$$s = (u + u^q) + d.$$

Имеем глюонное поле как сумму кварковых глюонных полей

$$3d = -39 + 111e^{-kj} + 18e^{ji} + 18e^{ki} +$$

$$(u + u^q) = 180 + 36e^{ki} = 141 + 111e^{-kj} + 18e^{ji} + 18e^{ki}$$

Однако глюонное поле микрочастицы образовано в результате поворота электрического и лептонных полей и будет иметь вид

$$g\Omega^-(1672) = 399 - 111e^{-kj} - 18e^{ji} + 18e^{ki}$$

Это поле дает массу $m_{\Omega^-(1672)} c^2 = 1618 \text{ Мэв}$. Расхождение составляет 3,3 %.

Спин равен $s = 3/2$, изоспин равен 0, так как имеем три отрицательных поворота электрического глюонного поля $J = -3/2$ плюс $j = \frac{1}{2}(S = 3) = 3/2$.

Таким образом квантовые числа соответствуют экспериментальным $3/2^+(0)$.

Рассмотрим резонансы с зарядом очарование. Заряд обусловлен наличием в кварковой композиции очарованного кварка C . По модельной системе кварк $c = 3(u + u^q) + u$.

Микрочастица $\lambda_c^+(2285)$ имеет кварковую композицию udc , которая дает глюонное поле

$g\lambda_c^+(2285) = 179 + 37e^{-kj} - 6e^{ji} + 42e^{ki}$. Вычисление массы дает величину

$m_{\lambda_c^+(2285)}c^2 = 2330 \text{ МэВ}$. Расхождение составляет 2 %. Спин частицы равен $1/2$. Изоспин равен $1/2$ плюс $\frac{1}{2} * (c = 1) = 1/2$. Изоспин равен $J = 1$. Отличается от экспериментального равного 0.

$$\Sigma^{++} \Rightarrow uuc \Rightarrow 188 + 34e^{-kj} - 12e^{ji} + 42e^{ki}$$

$$\text{Далее} \Rightarrow m_{\Sigma_c^{++}(2453)}c^2 = 2413 \text{ МэВ}$$

Расхождение составляет 1,7 %.

Квантовые числа соответствуют экспериментальным $1/2^+(1)$. Вычисления проведены по отработанным правилам.

$$\Sigma_c^0 \Rightarrow ddc \Rightarrow 192 + 34e^{-kj} - 4e^{ji} + 42e^{ki}$$

$$\Rightarrow m_{\Sigma_c^0(2452)}c^2 = 2341 \text{ МэВ}$$

Расхождение составляет 1,3 %.

Квантовые числа микрочастицы соответствуют экспериментальным $1/2^+(1)$.

Далее рассмотрим по разработанной методике частицу с зарядом прелесть b . Микрочастица в своей кварковой композиции содержит кварк b .

$$\lambda_b \Rightarrow udb \Rightarrow 178 + 108e^{-kj} - 14e^{ji} + 54e^{ki}$$

$$\Rightarrow m_{\lambda_b(5425)}c^2 = 5289 \text{ МэВ}$$

Расхождение 1,3 %.

Спин и изоспин вычисляются по ранее обнаруженным закономерностям $3/2^+(3/2)$. Масса и квантовые числа имеют предсказательную силу, так как для этой частицы нет конкретных данных.

8.9 Вычисление масс микрочастиц по кварковым композициям и модам распада. Вычисление квантовых чисел микрочастиц, исследование связи спина, изоспина, четности с величиной массы микрочастицы. Реализация квантовой CPT-теоремы. Исследование закона не сохранения четности.

В общем виде микрочастица имеет суммарное глюонное поле в виде четырех составляющих из произведений единичных зарядовых глюонных полей на весовые коэффициенты.

$\Psi_g = a + be^{-kj} + ce^{ji} + de^{ki}$, где весовые коэффициенты a, b, c, d вычисляются из кварковых композиций микрочастиц, принятых в классификации микрочастиц.

В основу классификации положена теория кварков, претендующих в настоящее время на предельные фундаментальные частицы. Глюонное поле кварков описывается также этой формулой. Для микрочастиц весовые коэффициенты вычисляются по известным кварковым композициям или по модам распада микрочастиц. Для примера, разберем в общем виде кварковую композицию из двух кварков (соответствует мезонам). Даны

$$\Psi_g(1) = a_1 + b_1e^{-kj} + c_1e^{ji} + d_1e^{ki}$$

$$\Psi_g(2) = a_2 + b_2e^{-kj} + c_2e^{ji} + d_2e^{ki}$$

Суммарное глюонное поле этих двух условных кварков запишется в виде:

$$\Psi_g(1,2) = \Psi_g(1) + \Psi_g(2) =$$

$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)e^{-kj} + (c_1 + c_2)e^{ji} + (d_1 + d_2)e^{ki}.$$

Структура глюонного поля будет зависеть от сумм весовых коэффициентов:

При $(b_1 + b_2) = 0$ отсутствует в структуре электрическая составляющая глюонного поля в явном виде и как показали дальнейшие вычисления изоспин в этом случае зависит от наличия в комбинации глюонного поля коэффициентов $(a_1 + a_2) \neq 0, (d_1 + d_2) \neq 0$, которые содержат скомпенсированные электрические и лептонные поля. Количество скомпенсированных полей выражается весовыми коэффициентами нейтрального пиона. В свою очередь количество этих коэффициентов определяет заряды s, c, b, t . Согласно разобранным моделям структуризации пространства возможны бесконечные варианты композиций типа

sc, scb, sb, cbt , а также $ns + n_1c$, и так далее (где n_i - количество одноименного заряда) в одной кварковой композиции микрочастицы.

При $(c_1 + c_2) = 0$ отсутствует лептонная составляющая глюонного поля тоже в явном виде и спин $s = 0$.

Возможны реализации одновременно этих двух вариантов. Отрицательная четность соответствует когда реализовано любое из этих условий.

Эти рассуждения относятся к любому числу кварков в композиции микрочастицы.

Если не одно из этих условий не выполняется, то имеем положительную четность микрочастицы спин $s \neq 0$, изоспин $J \neq 0$. При этом взаимное распо-

ложение глюонных полей электрической и лептонной составляющей влияет на величину изоспина, на величину спина влияет величина весового коэффициента. Это будет конкретно фиксировано при вычислении масс микрочастиц и их квантовых чисел. Спин микрочастицы определяется по формуле $s = \frac{1}{2} * \frac{c_x}{c_{u,d}}$,

Где c_x - весовой коэффициент лептонного поля частицы,

$c_{u,d}$ - весовой коэффициент лептонного поля кварка u , или кварка d .

$$J = \frac{1}{2} * \frac{b_x}{b_{u,d}} + \frac{1}{2} * \sum_1^n Q_x, \text{ где } \sum_0^n ks + k_1c + k_2b + \dots \text{ сумма всех отрица-}$$

тельных и положительных зарядов, имеющих разное количество скомпенсированных электрических и лептонных поле в составе микрочастицы, b_x - весовой коэффициент электрической составляющей глюонного поля, $b_{u,d}$ - весовой коэффициент электрического поля кварка u или кварка d .

Вычисления показали жесткую связь между квантовыми числами микрочастицы и ее массой. Так как весовой коэффициент спина исходного кварка u, d составляет небольшой удельный вес по сравнению с другими весовыми коэффициентами, то массы частиц при изменении спина незначительно отличаются друг от друга и современная классификация объединила их как дуплеты, триплеты и так далее.

Квантовые числа, вычисленные по формулам, для кварковых композиций, заданных современной классификацией микрочастиц, определяют структуру глюонного поля и массу микрочастицы в пределах 8 % относительно экспериментальной в большинстве случаев.

Исследовано 26 барионов и 19 мезонов.

На рис 84, 85, 86, 87 представлены изоспиновые диаграммы различных вариантов глюонного поля микрочастицы без учета изоспина задаваемого скомпенсированными полями.

Кварк $u = -8 + 34e^{-kj} + 4e^{ji} + 6e^{ki}$ в композициях микрочастиц может преобразовываться в антикварк $u^q = 68 - 34e^{+kj} - 4e^{-ji} + 6e^{ki}$, а также в два кварка, у одного из которых лептонное поле имеет отрицательный заряд с отрицательным весовым коэффициентом $u1 = 0 + 34e^{-kj} - 4e^{-ji} + 6e^{ki}$, у другого развернута также лептонная составляющая глюонного поля $u^q1 = 60 - 34e^{+kj} + 4e^{ji} + 6e^{ki}$. Если в кварке $u1$ дополнительно перейти к положительному электрическому глюонному полю, то получим кварк u^q . Переход в кварке u^q1 отрицательному электрическому глюонному полю получим кварк u .

Кварки были получены при исследовании моделей микрочастиц. В нейтральном пионе имеем скомпенсированные электрические и лептонные поля. Поэтому при замене зарядов глюонных полей на противоположные происходит замена знака весовых коэффициентов получаем из кварка антикварк но с проти-

воположными зарядами (и наоборот). Поясним это системой

$$u(kj, ji) \Rightarrow \left[u^q(e^{+kj}, e^{-ji}), u(e^{-kj}, e^{ji}) \right]_{\text{CP}}$$

$$u^q(kj, ji) \Rightarrow \left[u^q(e^{-kj}, e^{ji}), u(e^{kj}, e^{-ji}) \right]$$

Так как единичные глюонные поля являются неизвестными для двух одинаковых систем линейных уравнений, то в результате имеем равенство

$$m(e^{-kj})c^2 = m(e^{kj})c^2$$

$$m(e^{ji})c^2 = m(e^{-ji})c^2$$

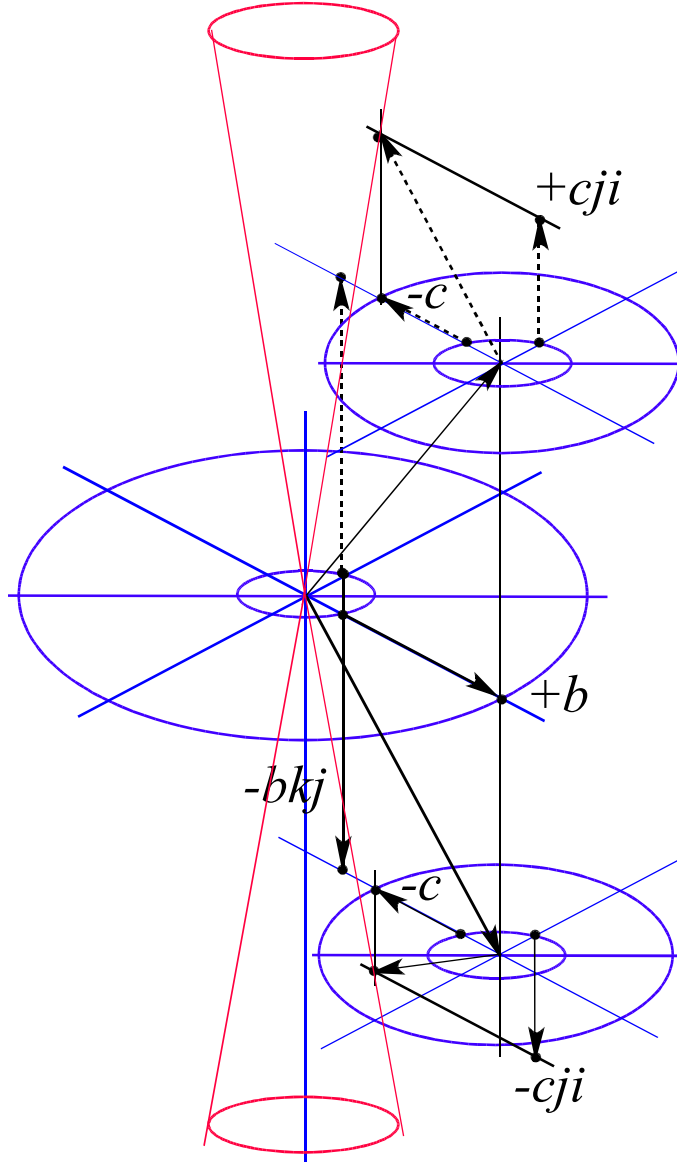


Рис84. Изоспиновые диаграммы сложения электрических и лептонных составляющих глюонного поля

микрочастицы $g\Psi = a + be^{-kj} - ce^{ji} + de^{ki}$ при $b > 0, C > 0$.

Диаграмма для античастицы будет для этого случая соответствовать рис 87. На диаграмме представлено два варианта сложения составляющих глюон-

ных полей сопряженных по знаку, без изменения знака весовых коэффициентов (С-вариант). Рис 87 представляет СР вариант.

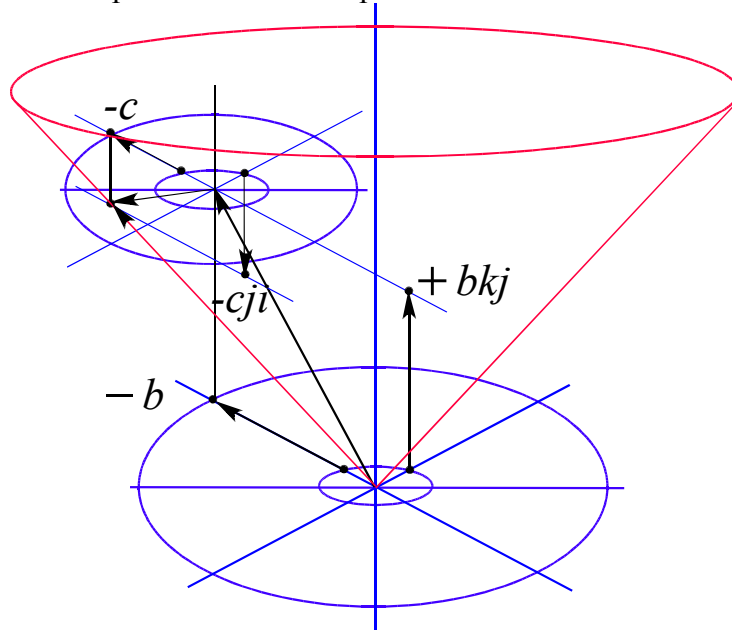


Рис 85. Изоспиновые диаграммы сложения электрических и лептонных полей для глюонного поля $g\Psi = a - be^{-kj} - ce^{ji} + de^{ki}$ при $b>0, C>0$ Диаграммой для античастицы для этого варианта будет рис 86 (СР-вариант).

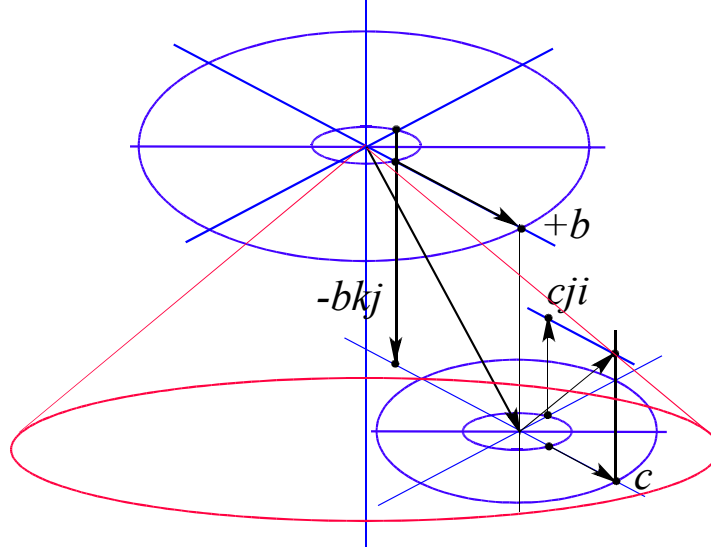


Рис 86. Изоспиновая диаграмма сожжения электрических и лептонных полей глюонного поля $g\Psi = a + be^{-kj} + ce^{ji} + de^{ki}$ (при $b>0, C>0$).

Обозначим выявленную симметрию за W . Таким образом, в вычисления масс частиц и их глюонных полей заложены три симметрии. Симметрия С (операция зарядового сопряжения), симметрия Р (зеркальное отражение), симметрия W (независимость энергии единичного вихря от его заряда). Вычисления показали, что эти симметрии согласуются с СРТ -теоремой Людерса-Паули. Следствием теоремы СРТ является равенство масс, спина и времени жизни для частиц и античастиц. Так как, вычисление масс частиц идет через глюонные поля, выра-

женные через единичные вихри и коэффициенты, то симметрия W является необходимым условием для выполнения равенства масс частиц и античастиц.

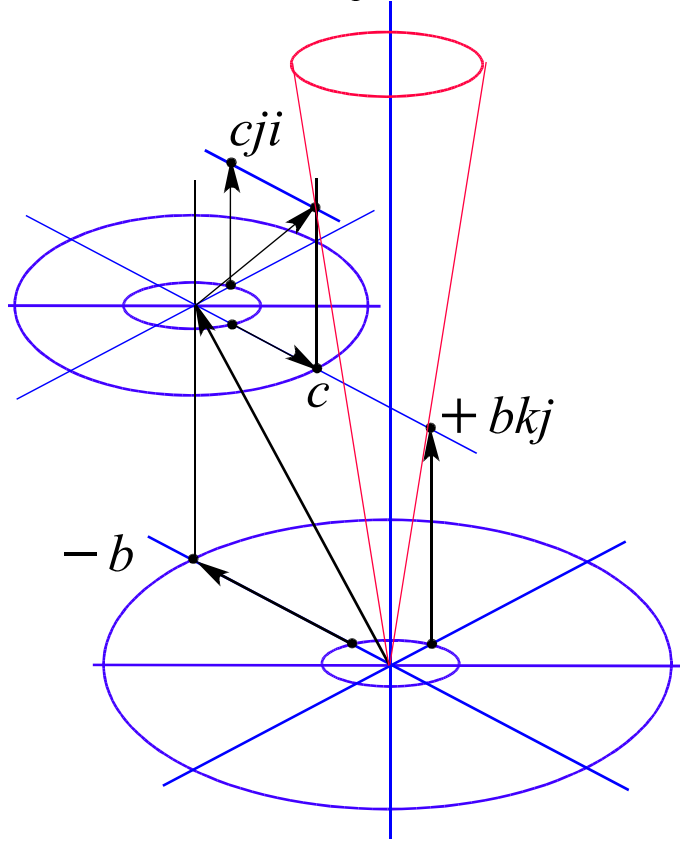


Рис 87. Изостиповая диаграмма сложения электрического и лептонного поля микрочастицы

$$g\Psi = a - be^{-kj} + ce^{ji} + de^{ki} \text{ (при } b>0, c>0).$$

В силу предложенной структуры кварков, антикварков частиц и античастиц как кварковых композиций теорема CPW является реализацией CPT теоремы на более детальном уровне. Изменение заряда (операция C-сопряжения) единичного вихря в глюонном поле вызывает изменение знака весового коэффициента (P-инверсию) и величину первого (как мы его называем вещественного) коэффициента. Применив дополнительно W -симметрию переводим частицу в античастицу с соблюдением квантовых чисел и величин масс.

$$\text{Например } CPW(\pi^+) = \pi^-, CPW(\pi^-) = \pi^+$$

Нейтральный пион π^0 согласно классификации имеет кварковую композицию

$\pi^0 = uu^q \approx dd^q$. В весовых коэффициентах глюонное поле нейтрального пиона имеет вид

$$g\pi^0(134.96) = 60 + 0 + 0 + 12e^{ki}. \quad \text{Вычисления дают массу}$$

$m_{\pi^0(134.96)} c^2 = 139.677 \text{ МэВ}$. Расхождение составляет 3,496 %. Расхождение довольно низкое, однако его можно откорректировать за счет первого члена глюонного поля

$$g\pi^0(134.96) = 57 + 0 + 0 + 12e^{ki}. \quad \text{Вычисления дают массу}$$

$m_{\pi^0(134.96)}c^2 = 135.499$ Мэв. Расхождение составляет 0,4 %. Однако, если учесть значение изоспина нейтрального пиона, то его коррекцию необходимо произвести по второму члену глюонного поля

$g\pi^0(134.96) = 60 - 1 * e^{-kj} + 0 + 12e^{ki}$. Вычисления дают массу частицы

$m_{\pi^0(134.96)}c^2 = 134.7299$ Мэв. Расхождение составляет 0,17 %. Глюонное поле нейтрона принимаем в последней корректировке, ибо оно дает спин $s = 0$, ввиду отсутствия лептонного глюонного поля, и изоспин $J_{\pi^0} = 1$, ввиду наличия электрической составляющей глюонного поля.

Глюонное поле положительного пиона входило в систему расчета единичных зарядовых глюонных полей, поэтому необходимо принять и зависимость квантовых чисел от величин весовых коэффициентов.

$$g\pi^+(139.5673) = 65 - 3e^{-kj} - 2e^{ji} + 12e^{ki}.$$

$g\pi^-(139.5673) = 55 + 3e^{-kj} + 2e^{ji} + 12e^{ki}$. Вычисления дают массу пиона

$m_{\pi^-(139.5673)}c^2 = 140.22$ Мэв. Расхождение составляет 0,462 %. Расхождение с массой положительного пиона составляет 0,492 %. Величина глюонного поля $\pm 2e^{\pm ji}$ дает изменение массы микрочастицы

0,099 Мэв, $\pm e^{\pm kj}$ дает изменение массы частицы 0,045 Мэв. Эти величины соизмеримы с технической точностью измерения масс микрочастиц. Для вывода о величине спина или изоспина также могут не учитываться. Поэтому спин пионов принят равным нулю, изоспин единице. Продемонстрируем выполнение CPW -теоремы.

$$\begin{aligned} C(\pi^-) &= C(55 + 3e^{-kj} + 2e^{ji} + 12e^{ki}) = 55 + 3 - 3kj + 3 - 3 + 2 + 2ji + 12e^{ki} = \\ &= 65 - 3e^{kj} - 2e^{-ji} + 12e^{ki} \end{aligned}$$

Применим W симметрию.

$$\begin{aligned} CPW(\pi^-) &= W(65 - 3e^{kj} - 2e^{-ji} + 12e^{ki}) = \\ &= 65 - 3e^{-kj} - 2e^{ji} + 12e^{ki} = \pi^+ \end{aligned}$$

Далее рассмотрим мезоны.

Микрочастица $\eta(547)$ имеет глюонное поле, которое отвечает кварковой композиции

$$\eta = uu^q + dd^q, \quad g\eta(547) = 114 + 24e^{ki}, \quad \text{это дает массу}$$

$$m_{\eta(547)}c^2 = 543.3 \text{ Мэв}$$

Расхождение составляет 0,05 %. (для вычисления глюонного поля принято глюонное поле нейтрального пиона с корректировкой первого члена, для оп-

ределенности формулировки спина и изоспина микрочастиц). Спин и изоспин частицы η равны 0, частица имеет отрицательную четность. $0^-(0)$.

Микрочастица $\eta'(958)$ имеет кварковую композицию $ss^q = (u + u^q) + d + (u + u^q) + d^q = 3\pi^0$. Глюонное поле выразится в виде $g\eta' = 171 + 36e^{ki}$. Вычисления дают массу микрочастицы $m_{\eta'(958)} = 1222.5$ Мэв.

Расхождение составляет 27 %. Однако спин и изоспин соответствуют экспериментальным

$0^-(0)$. В дальнейшем массу можно откорректировать по моде распада.

Глюонное поле микрочастицы $\rho^+(770)$ определяется кварковой композицией ud^q , однако кварк u должен быть заменен на кварк $u1 = 0 + 34e^{-kj} - 4e^{ji} + 6e^{ki}$, где осуществлен поворот лептонного поля, а кварк d заменить на кварк

$d1 = -1 + 37e^{-kj} - 6e^{ji} + 6e^{ki}$. Таким образом, будем иметь

$g\rho^+(770) = -1 + 71e^{-kj} - 10e^{ji} + 12e^{ki}$, Вычисление массы дает

$m_{\rho^+(770)}c^2 = 613.14$ Мэв. Расхождение составляет 26 %.

Изотопическая диаграмма соответствует рис 9,3 при положительной четности, квантовые числа равны $1^+(1)$.

Микрочастица $\omega(782)$ имеет кварковую композицию $uu^q + dd^q$, которая дает моду распада $\omega = \pi^+ + \pi^- + \pi^0$. В весовых коэффициентах глюонное поле имеет вид

$g\omega(782) = 140 + 0 - 20e^{ji} + 24e^{ki}$. Вычисления дают массу частицы

$m_{\omega(782)}c^2 = 778.35$ Мэв. Расхождение составляет 0,5 %.

Глюонное поле включает поворот лептонного поля в кварке u и лептонного поля в кварке d .

Квантовые числа равны $1^-(0)$.

Микрочастица $\phi(1020)$ имеет кварковую композицию ss^q , которая дает моду распада

$$\begin{aligned}\phi(1020) &= (u + u^q) + d + (u + u^q) + d^q = u^q d + d^q u + uu^q = \\ &= \pi^+ + \pi^- + \pi^0\end{aligned}$$

В точном соответствии с модой распада. Кварковая композиция дает возможность вычисления весовых коэффициентов глюонного поля частицы, ко-

которые должны учитывать квантовые числа микрочастицы $1^-(0)$. Таким образом, необходимо кварк d^q заменить на кварк

$d^q 1 = 61 - 37e^{-kj} + 6e^{ji} + 6e^{ki}$, в котором лептонная составляющая глюонного поля повернута на 180гр. и поэтому в кварковой композиции микрочастицы аннигилирует. Так, что глюонное поле микрочастицы равно

$g\varphi(1020) = 168 + 0 + 12e^{ji} + 36e^{ki}$. Это дает массу микрочастицы

$m_{\varphi(1020)}c^2 = 1079$ Мэв. Расхождение составляет 5.8 %. Квантовые

числа соответствуют экспериментальным. Спин равен $s = \frac{1}{2} \frac{12}{6} = 1$. Изоспин

равен $J = \frac{0+1-1}{2} = 0$.

Далее по разработанной схеме вычислим массу микрочастиц

$$D^{\pm}(1869), D^0, \bar{D}^0(1865), D_s^{\pm}(1969)$$

Моды распада точно не зафиксированы. Рассмотрим для примера распад

$$\begin{aligned} D_s^+ &= cs^q = 2(u + u^q) + u + (u + u^q) + d^q = \\ &= 2\pi^0 + \pi^0 + \pi^+ = 2\pi^0 + K^+ \end{aligned}$$

в точном соответствии с модой распада. Глюонное поле вычисляется по выражению

$gD_s^+(1969) = 247 - 3e^{-kj} - 2e^{ji} + 48e^{ki}$. Вычисленная масса микро-
частицы равна

$m_{D_s^+(1969)}c^2 = 2190$ Мэв. Расхождение составляет 11,1 %. Спин равен

нулю вследствие малости весового коэффициента перед лептонной составляющей. Изоспин равен нулю вследствие малости удельного веса в массе электрической составляющей глюонного поля, а также противоположных знаков зарядов c, s^q . В точном соответствии с экспериментальными данными.

Аналогично

имеем

$$\begin{aligned} \bar{D}^0(1865) &= uc^q = u + 2(u + u^q) + u^q = 3(u + u^q) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 171 + 0 + 0 + 36e^{ki} \end{aligned}$$

Такая комбинация глюонного поля дает массу частицы

$$m_{\bar{D}^0(1865)}c^2 = 1219.5 \text{ Мэв.}$$

Расхождение составляет 35 %, так как имеем несоответствие с квантовыми числами частицы.

Глюонное поле частицы определим при замене кварка u^q на кварк $u^q 1 = 0 + 34e^{-kj} - 4e^{ji} + 36e^{ki}$ в одном из нейтральных пионов. Тогда суммарное глюонное поле будет отвечать квантовым числам частицы

$$g\bar{D}^0 = 120 + 68e^{-kj} + 0 + 36e^{ki}$$

Вычисление массы дает величину

$m_{\bar{D}^0(1965)}c^2 = 2139.42$ Мэв. Расхождение равно 9 %. Спин равен нулю, так как весовой коэффициент глюонного поля равен нулю. Изоспин равен $J = \frac{68/34}{2} - \frac{1}{2} = 1/2$. Формула расчета дает точное соответствие экспериментальным данным.

$$D^+(1869) \Rightarrow cd^q = 2(u + u^q) + u + d^q \Rightarrow 120 + 24e^{ki} + (u = -8 + 34e^{-kj} + 4e^{ji} + 6e^{ki}) + (d^q 1 = -1 + 37e^{-kj} - 6e^{ji} + 6e^{ki}) =$$

$$= 111 + 71e^{-kj} - 2e^{ji} + 36e^{ki}$$

Это глюонное поле соответствует квантовым числам и дает массу микрочастицы

$m_{D^+(1869)}c^2 = 2144.73$ Мэв. Расхождение составляет 14,7 %. Глюонное поле имеет спиновую составляющую, удельный вес которой равен 0,099 Мэв, и значительно ниже точности измерения массы самой частицы $m_{D^+}c^2 = 1869 \pm 0.6$ Мэв. Это дает основание не учитывать влияние этой величины. Изоспин равен $J = \frac{1}{2} \frac{71}{34} - \frac{1}{2} = 1/2$.

Если кварк $d^q 1$ заменить на кварк $d^q 2 = -13 + 37e^{-kj} + 6e^{ji} + 6e^{ki}$, получим $gD^+ = 93 + 71e^{-kj} + 10e^{ji} + 36e^{ki}$. Вычисление массы микрочастицы дает величину $m_{D^+}c^2 = 1910.04$ Мэв. Расхождение составляет 2,2 %. Однако это барион по своим квантовым числам $1/2^+(1/2)$. Это резонанс $\Xi(1820), \Xi(2030)$. Расхождение для которых по массе составит соответственно $\pm 0.5\%$.

Таким образом, вычисления показывают зависимость квантовых чисел микрочастиц и их масс от структуры глюонного поля и принадлежности этих частиц по классификации на мезоны, барионы и так далее.

Каоны.

Кварковые

композиции

каонов

$K^+(493.667) = us^q, K^-(493.667) = su^q$ при замене кварка S на кварк $s = (u + u^q) + d$, дают следующие моды распада

$$K^+ \Rightarrow us^q = u + (u + u^q) + d^q = ud^q + uu^q = \pi^+ + \pi^0$$

$$K^- \Rightarrow su^q = (u + u^q) + d + u^q = uu^q + du^q = \pi^0 + \pi^-$$

в полном соответствии с экспериментальными модами распада.

Кварковые композиции дают выражения для суммарных глюонных полей. Для

$$u = -8 + 34e^{-kj} + 4e^{ji} + 6e^{ki} +$$

$$d^q = 73 - 37e^{-kj} - 6e^{ji} + 6e^{ki} +$$

$$\pi^0 = 60 - e^{-kj} + 0 + 12e^{ki} =$$

$$= gK^+ = 125 - 4e^{-kj} - 2e^{ji} + 24e^{ki}$$

Этому глюонному полю соответствует масса частицы

$$m_{K^+(494)} c^2 = 547.709 \text{ Мэв. Расхождение составляет } 10,9 \text{ \%}.$$

Для K^- имеем

$$u^q = 68 - 34e^{-kj} - 4e^{ji} + 6e^{ki} +$$

$$d = -13 + 37e^{-kj} + 6e^{ji} + 6e^{ki} +$$

$$\pi^0 = 60 - e^{-kj} + 0 + 12e^{ki} =$$

$$= gK^- = 115 + 2e^{-kj} + 2e^{ji} + 24e^{ki}$$

$$\text{Это глюонное поле соответствует массе } m_{K^-(494)} c^2 = 549.83 \text{ Мэв.}$$

Расхождение составляет 11,4 %. Расхождение между вычислениями масс отрицательного и положительного каона составляет 0,38 %.

Вычисления глюонных полей показывают, что если в кварках u^q, d произвести замену знаков электрического и лептонного глюонного поля то есть применить теорему

$CPW(u^q d) = d^q u$. Эта операция произойдет внутри микрочастицы. В этом случае массы микрочастиц совпадут, так как глюонное поле будет выражаться для них одинаково.

Глюонное поле лептонного и электрического заряда малы. Поэтому величина изоспина зависит только от заряда кварка S, так что микрочастицы имеют квантовые числа $0^-(\pm 1/2)$.

Кварковая композиция нейтрального каона $K^0(497.67) = ds^q$. Эта композиция дает 2-х пионную моду распада и трех пионную. Исследуем этот экспериментальный факт.

$ds^q = d + (u + u^q) + d^q = \pi^0 + \pi^0 \approx \pi^+ + \pi^-$. Эта мода распада закреплена за

$$K_s^0$$

Глюонное поле равно $gK_s^0 = 120 - 2e^{-kj} + 0 + 24e^{ki}$. Вычисление массы дает величину $m_{K_s^0(498)} c^2 = 538.92 \text{ Мэв}$. Расхождение с экспериментальной массой составляет 8,3 %.

При образовании нейтрального пиона глюонные поля лептонного и электрического заряда аннигилируют на величину глюонного поля равную

$gQ = 69e^{-kj} + 8e^{ji}$, что по массе составляет 177,65 Мэв. Величина превышающая массу нейтрального пиона. В связи с этим поворот одновременно электрического и лептонного полей в нейтральном пионе вызовет изменение массы частицы и ее квантовых чисел до величин

$$1/2^+(1/2). \quad \text{Глюонное поле будет равно}$$

$$gXZ = 60 + 69e^{-kj} + 8e^{ji} + 12e^{ki}$$

Это дает массу частицы равную 764,29 Мэв. Этой массе и квантовым числам отвечает

$\rho^\pm(770)$ -мезон. При кварковой комбинации dd^q глюонное поле аннигилирует на величину

$gQ = 75e^{-kj} + 12e^{ji}$. Эта величина в микрочастице дает увеличение массы и превращение нейтрального пиона в другую частицу с глюонным полем

$$gXZ = 60 + 75e^{-kj} - 12e^{ji} + 12e^{ki}, \text{ которое дает массу } 872,66 \text{ Мэв.}$$

Эта величина и квантовые числа соответствуют частице $K^*(892)$.

Так как каон может иметь две такие коррекции, то его глюонное поле можно представить в виде $gK_l^0 = 120 - 6e^{-kj} - 4e^{ji} + 24e^{ki}$, которая определяет массу

$$m_{K_l^0(498)} c^2 = 528.91 \text{ Мэв. Расхождение составляет } 6,2 \text{ \%}.$$

Так как, величина энергии аннигиляции соизмерима с энергией нейтрального пиона, то при образовании нейтрального каона возможен вариант глюонного поля в виде

$$gK_l^0(498) = 180 - 69e^{-kj} - 8e^{ji} + 36e^{ki}, \text{ что дает массу частицы}$$

$$m_{K_l^0(498)} c^2 = 490.24 \text{ Мэв. Расхождение составляет } 1,5 \text{ \%}.$$

Квантовые числа этой частицы равны $1/2^+(1/2)$. В физике микрочастиц распад каона на два пиона и на три пиона вырос в проблему нарушения четности. Вычисления показывают, что это обычный процесс происходящий при взаимодействии полей при образовании микрочастиц.

Кварковая композиция положительного каона K^+ дает следующее выражение для вычисления глюонного поля микрочастицы $K^+ = us^q$, но по введенной системе $s^q = (u + u^q) + d^q$, поэтому используя выражения для кварков из 9,5 будем иметь.

$$m(\Psi_g^{K^+}) = 135 - 3e^{-kj} - 2e^{ji} + 24e^{ki}. \text{ Расчет массы для этого глюонного поля дает величину } 586 \text{ Мэв, которая отличается от экспериментальной } 494 \text{ Мэв на } 18 \text{ \%}.$$

Глюонное поле положительного каона можно откорректировать за счет спина кварка $d^q = 73 - 37e^{-kj} - 6e^{ji} + 6e^{ki}$ заменив его на кварк

$$d^q = 73 - 37e^{-kj} - 6 - 6ji - 6 + 6 + 6e^{ki} =$$

$$= 61 - 37e^{-kj} + 6e^{-ji} + 6e^{ki} = d_2^q$$

Тогда глюонное поле кварка выразится в виде

$$m(\Psi_g^{K^+}) = 113 - 3e^{-kj} + 4e^{ji} + 6e^{ki}. \text{ Вычисление массы для этого}$$

глюонного поля дает величину 482,23 МэВ. Расхождение с экспериментальной массой составляет 2,4 %.

Изменение величины весового коэффициента возможно в следствии равенства масс единичного лептонного глюонного вихря разных зарядов.

Отрицательный каон имеет кварковую композицию

$$K^- = su^q = (u + u^q) + d + u^q$$

Глюонное поле через весовые коэффициенты выразится в виде

$$m(\Psi_g^{K^-}) = 115 + 3e^{-kj} + 2e^{ji} + 24e^{ki}. \text{ Для этой композиции глю-}$$

онного поля масса микрочастицы равна 559,78 МэВ и отличается от экспериментальной массы на 13 %.

Здесь также возможна корректировка глюонного поля за счет спина

кварка $u^q = 68 - 34e^{-kj} - 4e^{ji} + 6e^{ki}$, заменив его кварком

$$u_2^q = 68 - 34e^{-kj} - 4 - 4ji + 4 - 4 + 6e^{ki} =$$

$$= 60 - 34e^{-kj} + 4e^{-ji} + 6e^{ki}$$

При такой замене будем иметь глюонное поле

$$m(\Psi_g^{K^-}) = 107 + 3e^{-kj} + 10e^{ji} + 24e^{ki}, \text{ которое даст массу частицы 480,85}$$

МэВ и расхождение с экспериментальной величиной 2,7 %.

Нейтральный каон имеет кварковую комбинацию

$K^0 = ds^q = d + (u + u^q) + d^q$ Эта комбинация соответствует комбинации весовых коэффициентов двух нейтральных пионов (что соответствует и моде распада нейтрального каона $K^0 \Rightarrow \pi^0 + \pi^0$)

Таким образом, глюонное поле имеет вид

$$m(\Psi_g^{K^0}) = 120 + 24e^{ki}, \text{ вычисления по которому дают массу микрочастицы}$$

558,71 МэВ, которая отличается от экспериментальной массы равной 498 МэВ на 12 %.

Возможен вариант рассмотрения глюонного поля нейтрального каона как полу суммы глюонных масс положительного и отрицательного каонов

$$m(\Psi_g^{K^0}) = m(\Psi_g^{(k^+ + k^-)/2}) = 110 + 7e^{ji} + 24e^{ki}, \text{ что соответствует}$$

массе 481,54 МэВ и расхождение составляет 4,3 %.

Из кварковой композиции микрочастицы $\eta = uu^q + dd^q$ имеем весовые

коэффициенты глюонного поля и самого поля в виде $m(\Psi_g^\eta) = 120 + 24e^{ki}$

Имеем массу микрочастицы $m_{\eta}c^2 = 560.08$ Мэв. Экспериментальная масса равна 547 Мэв.

Расхождение составляет 2,4 %.

Далее рассмотрим частицу D^0, D^+, D^- кварковые композиции соответственно имеют вид $D^0 = cc^q, D^+ = cd^q, D^- = dc^q$ На этой композиции проверяется введенная систематизация кварков, по которой $c = 2(u + u^q) + u$, тогда подтверждаются экспериментальные моды распада частиц

$$D^+ \Rightarrow cd^q \Rightarrow 2(u + u^q) + u + d^q \Rightarrow 2\pi^0 + \pi^+,$$

а также второй вариант

$$D^+ \Rightarrow (u + u^q) + u + d^q + (u + u^q) \Rightarrow K^+ + \pi^0$$

Конкретные моды распада для этих частиц не установлены. Энергетический расчет дает вариант $D^+ \Rightarrow K^+ + \pi^0 + \pi^0$ Масса глюонного поля такого распада будет соответствовать $m(\Psi_g^{D^+}) = 227 - 3e^{-kj} + 4e^{ji} + 48e^{ki}$ Вычисление массы дает величину $m_{D^+}c^2 = 2137.96$ Мэв.

Аналогично обстоят дела и с другими видами микрочастиц этой серии. Расхождение расчетов составляет от 8 до 14 %.

Система $cc^q = 2(u + u^q) + u + 2(u + u^q) + u^q = 5(u + u^q)$ отвечает кварковой композиции микрочастицы J/Ψ с массой 3097 Мэв. Откорректированное глюонное поле по нейтральному пиону дает $m(\Psi_g^{J/\Psi}) = 285 + 60e^{ki}$.

Вычисления дают массу частицы $m_{J/\Psi}c^2 = 3387.51$ Мэв против экспериментальной величины 3097 Мэв. Расхождение составляет 9,4 %.

Мезон с массой 9460 Мэв имеет кварковую композицию $\gamma = bb^q$. Замена кварка $b = 4(u + u^q) + u$ (введено в классификацию кварков), дает глюонное поле в виде

$$m(\Psi_g^\gamma) = 9(u + u^q). \text{ Вычисление массы кварка дает значение } m_{\gamma}c^2 = 10975 \text{ Мэв.}$$

Моды распада частицы В не приводятся конкретно. Кварковая композиция показывает, что аннигиляция внутри системы $(u + u^q)$ создает поле частицы как $7\pi^0$. Так, что глюонное поле микрочастицы $m(\Psi_g^{B^+}) = 399 + 72e^{ki}$. Вычисление массы дает величину

$$m_{B^+}c^2 = 5376 \text{ Мэв. Экспериментальная масса равна 5279 Мэв. Расхождение составляет 2 \%.}$$

λ_0 -Гиперон имеет кварковую композицию $\lambda_0 \Rightarrow uds$. Замена кварка s его композицией $s = (u + u^q) + d$ дает кварковую композицию Гиперона, которая объясняет моду распада $\lambda_0 = u + d + (u + u^q) + d = udd + uu^q = n^0 + \pi^0$. Замена кварков на их комбинации из единичных глюонных полей и весовых коэффициентов дает выражение для суммарного глюонного поля гиперона

$$\begin{aligned} g\lambda_0 = u &= -8 + 34e^{-kj} + 4e^{ji} + 6e^{ki} + \\ + d &= -13 + 37e^{-kj} + 6e^{ji} + 6e^{ki} + \\ + d &= -13 + 37e^{-kj} + 6e^{ji} + 6e^{ki} + \\ + (u + u^q) &= 60 + 0 + 0 + 12e^{ki} = \\ &= 26 + 108e^{-kj} + 16e^{ji} + 30e^{ki} \end{aligned}$$

Это глюонное поле гиперона соответствует массе $m_{\lambda_0}c^2 = 1804.54$ Мэв. Эта величина отличается от экспериментальной равной 1115,6 Мэв на 52 %. В связи с этим произведем две коррекции кварка u на кварк $u1 = 0 + 34e^{-kj} - 4e^{-ji} + 6e^{ki}$ повернув лептонную составляющую и кварка d на кварк $d1 = 73 - 37e^{kj} - 6e^{-ji} + 6e^{ki}$. В кварке были проведены повороты глюонных полей электрического и лептонного. В результате получаем выражение $g\lambda_0 = 120 + 34e^{-kj} - 4e^{ji} + 30e^{ki}$.

Это выражение дает массу гиперона равную $m_{\lambda_0}c^2 = 1265.49$ Мэв. Расхождение с экспериментальной массой составляет 13,4 %.

Если оставить только корректировку кварка d , то получим $g\lambda_0 = 112 + 34e^{-kj} + 4e^{ji} + 30e^{ki}$ и массу микрочастицы $m_{\lambda_0}c^2 = 1177.7$ Мэв.

Расхождение составляет 5,5 %.

Откорректируем дополнительно глюонное поле по весовому коэффициенту электрической составляющей $g\lambda_0 = 112 + 33e^{-kj} + 4e^{ji} + 30e^{ki}$. Это дает массу гиперона $m_{\lambda_0}c^2 = 1131.058$ Мэв. Экспериментальная масса равна 1115,6 Мэв. Расхождение составляет 1,34 %.

Кварковая композиция uds имеет еще две микрочастицы $\Sigma^0(1193), \Sigma^0(1384)$

Для первой микрочастицы подходит глюонное поле с кварками $u1, d1$, которое дает суммарное глюонное поле $g\Sigma^0(1193) = 120 + 33e^{-kj} - 4e^{ji} + 30e^{ki}$, это дает массу

$$m_{\Sigma^0}c^2 = 1250.507 \text{ Мэв. Расхождение составляет } 4,82 \text{ \%}.$$

Для вычисления массы второй микрочастицы проведем дополнительно поворот глюонного поля во втором кварке d и получим $d2 = -1 + 37e^{-kj} - 6e^{ji} + 6e^{ki}$, суммарное глюонное поле будеи иметь вид

$$g\Sigma^0(1384) = 132 + 33e^{-kj} - 16e^{ji} + 30e^{ki}. \text{ Это дает массу}$$

$$m_{\Sigma^0(1384)} = 1440.9 \text{ Мэв. Расхождение составляет } 4 \%. \text{}$$

На рис 86, 84, 84 представлены диаграммы составляющих суммарное глюонное поле электрического и лептонного поля соответственно $\lambda_0(1116), \Sigma^0(1193), \Sigma^0(1383)$. Эти диаграммы назовем спин-изотопическими, та как они раскрывают зависимость квантовых чисел микро-частиц от электрического и лептонного поля частицы. Спин частицы определяется наличием лептонной составляющей глюонного поля, причем величина спина для кварковой композиции барионов из трех кварков определяется поворотом этой составляющей в каждом кварке: при одном и двух поворотах $s = 1/2$. Если поворот происходит в каждом из трех кварков, спин равен $s = 3/2$. Таким образом,

$\lambda_0(1116)$ имеет $s = 1/2$, $\Sigma^0(1193)$ имеет спин $s = 1/2$, $\Sigma^0(1383)$ имеет $s = 3/2$. Становится очевидным отсутствие $s = 1$.

Изоспин микрочастиц определяется взаимным расположением электрического и глюонного поля. Согласно диаграмме для $\lambda_0(1116)$ изоспин равен $J = 0$, для этой диаграммы проекции электрического и лептонного глюонного поля вычитаются. Для микрочастиц

$\Sigma^0(1193), \Sigma^0(1383)$ диаграммы дают $J = 1$. Положительная четность для барионов определяется наличием в суммарном глюонном поле обоих составляющих.

Кварковая композиция uus отвечает двум микрочастицам с разными массами и квантовыми числами: $\Sigma^+(1189), \Sigma^+(1385)$, для первой имеем спин четность и изоспин

$$1/2^+(1) \text{ и второй } 3/2^+(1).$$

Согласно кварковой композиции и введенному значению кварка

$$s = (u + u^q) + d, \text{ композиция дает}$$

$$\Sigma^+(1189) = u + u + (u + u^q) + d = p^+ + \pi^0$$

В соответствии с модой распада. Квантовые числа определяют поворот лептонного и глюонного поля в кварке u и заменой его на кварк $u1 = 68 - 34e^{-kj} - 4e^{ji} + 6e^{ki}$ а также поворот глюонного лептонного поля во втором кварке u с заменой его на кварк $u2 = 0 + 34e^{-kj} - 4e^{ji} + 6e^{ki}$. Подставляя кварки в композицию получим суммарное глюонное поле $g\Sigma^+(1189) = 115 + 36e^{-kj} - 2e^{ji} + 30e^{ki}$, которое дает массу

$$m_{\Sigma^+(1189)} c^2 = 1252.1 \text{ Мэв. Расхождение составляет } 5,3 \%. \text{}$$

Замена кварка d на кварк $d1 = -1 + 37e^{-kj} - 6e^{ji} + 6e^{ki}$ дает сумму глюонного поля для

$$\begin{aligned} u1 &= 68 - e^{-kj} - 4e^{ji} + 6e^{ki} + \\ u2 &= 0 + 34e^{-kj} - 4e^{ji} + 6e^{ki} + \\ \pi^0 &= 60 - e^{-kj} + e^{ji} + 12e^{ki} + \\ d1 &= -1 + 37e^{-kj} - 6e^{ji} + 6e^{ki} = \\ &= 127 - 36e^{-kj} - 14e^{ji} + 30e^{ki} \end{aligned}$$

Это глюонное поле отвечает массе микрочастицы $m_{\Sigma^+(1385)} c^2 = 1442.64 \text{ МэВ}$. Расхождение составляет 4,2 %.

Изоспиновые диаграммы соответствуют квантовым числам и рис 84 и 87
Далее рассмотрим композицию dds , которая представлена двумя микро-
рочастицами

$$\Sigma^-(1197), \Sigma^-(1387) \text{ с квантовыми числами } 1/2^+(1), 3/2^+(1)$$

Рассмотрим соответствие моде распада

$$dds = d + d + (u + u^q) + d = ddu + u^q d = n^0 + \pi^-$$

Квантовые числа требуют одного поворота лептонного поля и одного по-
ворота электрического поля в кварке d для микрочастицы $\Sigma^-(1197)$. Для
микрочастицы $\Sigma^-(1387)$ имеем один поворот электрического поля и три пово-
рота глюонного поля.

Глюонные поля для частиц соответствен но выразятся

$$g\Sigma^-(1197) = 107 + 36e^{-kj} + 6e^{ji} + 30e^{ki}, \text{ которое определяет массу}$$

$$m_{\Sigma^-(1197)} c^2 = 1130.22 \text{ МэВ, расхождение составляет } 5,4 \%$$

$g\Sigma^-(1383) = 134 + 36e^{-kj} - 18e^{ji} + 30e^{ki}$, которое в свою очередь
определяет массу микрочастицы

$$m_{\Sigma^-(1383)} c^2 = 1506.6 \text{ МэВ. Расхождение составляет } 8.6 \%$$

Изоспиновые диаграммы совпадают с предыдущими и соответствуют
квантовым числам микрочастиц.

Кварковая композиция uss представлена двумя микрочастицами

$$\Xi^0(1315), \Xi^0(1530) \text{ с квантовыми числами } 1/2^+(1/2), 3/2^+(1/2)$$

Моды распада совпадают с экспериментальными модами

$$\begin{aligned} uss &= u + 2(u + u^q) + 2d = udd + 2(u + u^q) = \\ &= n^0 + 2\pi^0 \approx \pi^0 + \lambda^0(p^+\pi^-) \end{aligned}$$

Замена кварка u на кварк $u1 = 68 - 34e^{-kj} - 4e^{ji} + 6e^{ki}$, а также кварка

d на кварк $d2 = 73 - 37e^{-kj} - 6e^{ji} + 6e^{ki}$ дает суммарное поле
 $g\Xi^0(1315) = 248 - 36e^{-kj} - 4e^{ji} + 42e^{ki}$ и массу микрочастицы
 $m_{\Xi^0(1315)}c^2 = 1342.95$ Мэв. Расхождение составляет 2,1 %.

Глюонное поле второй микрочастицы имеет поворот лептонного поля и в третьем кварке.

$g\Xi^0(1532) = 262 - 36e^{-kj} - 16e^{ji} + 42e^{ki}$, которое определяет массу частицы

$m_{\Xi^0(1532)}c^2 = 1549.36$ Мэв. Расхождение составляет 1,13 %.

Изоспиновая диаграмма для этих частиц представлена на рис 85. Глюонное лептонное поле вычитается из электрического глюонного поля, что приводит к уменьшению величины изоспина. Аналогичная диаграмма и для второй микрочастицы, с увеличенными проекциями лептонного поля. В соответствии с диаграммой имеем полное совпадение в квантовых числах с экспериментальными. Для микрочастиц $\Xi^-(1321), \Xi^-(1530)$ с квантовыми числами

$$1/2^+(1/2), 3/2^+(1/2)$$

имеем

$$\begin{aligned} dss &= d + 2(u + u^q) + 2d = ddu + (u + u^q) + du^q = \\ &= n^0 + \pi^0 + \pi^- = \Xi^- + \pi^0 \approx \lambda^0 + \pi^- \end{aligned}$$

Таким образом имеем четкое соответствие между последовательными модами распада.

$$g\Xi^-(1321) = 247 - 39e^{-kj} - 6e^{ji} + 42e^{ki},$$

$$m_{\Xi^-(1321)}c^2 = 1341.28 \text{ Мэв.}$$

$$g\Xi^-(1530) = 265 - 39e^{-kj} - 18e^{ji} + 42e^{ki},$$

$$m_{\Xi^-(1530)}c^2 = 1538.24 \text{ Мэв.}$$

В первом случае расхождение составляет 1,5 %, во втором 0,2 %.

Изоспиновая диаграмма соответствует предыдущему случаю. Квантовые числа совпадают.

Глава 8 представляет конкретные вычисления масс микрочастиц. Достоверность оценивается расхождением результатов вычислений с экспериментальными данными во всем диапазоне масс микрочастиц в пределах 0,2-8 %. Вычисления основаны на современной кварковой классификации моделей микрочастиц и их глюонных полей. Считается, что в природе существует шесть сортов кварков т.е. субэлементарных частиц u, d, s, c, b, t , комбинируя которые в разных сочетаниях можно построить любой андрон. Вычисления показали, что кварковый уровень материи повторяет ее структуризацию в общем виде любого другого уровня. Кварки s, c, b, t не являются субэлементарными и представляют каждый композицию из кварков u, d, u^q, d^q . В этом случае кварковые ком-

позиции элементарных частиц дают моды распада соответствующие экспериментальным. Таким образом, современная кварковая классификация сведена к двум кваркам u, d и антикваркам u^q, d^q . Экзотические кварковые заряды есть ничто иное как количество скомпенсированных электронно-лептонных полей в суммарном глюонном поле кварка. Сопоставление квантовых чисел со структурой глюонного поля микроастицы, вычисленного на основе ее кварковой композиции, и массой частицы обосновали существование синглетов, дуплетов, триплетов и унитарных симметрий. (Последовательный ввод этих понятий в физику элементарных частиц есть вскрытие структуризации материи в гравитационно электромагнитном комплексном пространстве. Это было отслежено при построении моделей в главах 7 и 8.).

Вычисления дают достоверный результат и следовательно подтверждают достоверность принятых симметрий, которые отвечают за фундаментальные свойства заряда быть положительным и отрицательным, за понятие спина, изоспина, четности и т.д.

Основные экспериментальные факты физики микроастиц подтверждают связность гравитационно -комплексного пространства, установленную ТФКПП.

Моды распада микроастиц, в кварковую композицию которых входят кварки s, c, b, t , подтверждают введенную структуру их кваркового состава.

$$s = (u + u^q) + d = \pi^0 + d$$

$$c = (u + u^q) + (d + d^q) + u = 2\pi^0 + u$$

$$b = (u + u^q) + (d + d^q) + (u + u^q) + d = 3\pi^0 + d$$

$$t = (u + u^q) + (d + d^q) + (u + u^q) + (d + d^q) + u = 4\pi^0 + u$$

Система может быть продолжена до бесконечности.

Кодировка зарядов по наименованию: странность, очарование, прелесть и т.д. соответствуют наличию в структуре микроастицы количеству скомпенсированных электрических и лептонных полей: 1-заряд странности, 2-шарм, 3-прелесть и т.д.

Результаты вычислений масс микроастиц, в кварковую композицию которых входят кварки

s, c, b, t дали высокую сходимость с экспериментальными данными.

Глюонное поле микроастицы имеет коэффициенты электрического и лептонного поля, представляющие комбинации весовых коэффициентов электрической и лептонной составляющей исходных кварков u, d . Для трех кварковых композиций барионов весовые коэффициенты микроастицы при делении на соответствующие весовые коэффициенты исходных кварков u, d дают целые кратные числа. (Отступление может корректироваться до целых кратных в обе стороны, ориентируясь на сходимость вычисления по массе).

$$\text{В связи с этим спин вычисляется по формуле } s = \pm \frac{1}{2} \frac{c_1}{c}$$

Изоспин по формуле $J = \frac{1}{2} \frac{b_1}{b} + \frac{1}{2} \sum_1^n Q_n$, где b_1 - весовой коэффициент

электрической составляющей поля микрочастицы, c_1 - весовой коэффициент лептонной составляющей поля микрочастицы, b, c - весовые коэффициенты

электрической и лептонной составляющей исходных кварков u, d , $\sum_1^n Q_n$ -

сумма численных значений зарядов s, c, b, t .

Результаты вычислений масс микрочастиц дали высокую сходимость с экспериментальными данными при совпадении квантовых чисел, рассчитываемых по этим формулам с экспериментальными значениями.

Таким образом, кварки s, c, b, t не являются субъэлементарными частицами, а являются композициями из двух кварков u, d .

Вычисления показали жесткую зависимость квантовых чисел частиц с ее массой. Таким образом, если заданы квантовые числа то можно вычислить массу частицы, если задана масса микрочастицы, то можно вычислить варианты квантовых чисел.

8.10 Расчет энергии связи атомных ядер периодической таблицы элементов и их изотопов, исходя из структуры глюонных полей протона и нейтрона.

Вывод формулы энергии связи атомных ядер ранее в главе 6 был проведен на основе модели ядер с циклонными барионными вихрями. Возникновение циклонных вихрей соответствует увеличению связности пространства ядерной материи. Связность пространства соответствует периодичности заложенной в таблице элементов Д.И. Менделеева. Количество изолированных вихрей в атомном ядре определяется соотношением $Z/(9-10) = P$, где Z - заряд атомного ядра, 9-10 - соответствуют периодичности возникновения рядов в таблице элементов.

Масса протона, нейтрона, размеры атомного ядра соответствовали экспериментальным данным. Структура протона, нейтрона не рассматривалась.

Основным условием для вывода формулы послужило замыкание $\mathcal{E}$ - туннелей циклонных вихрей энергией обменного кванта или иначе полевой энергией взаимодействия протонов и нейтронов через эти циклонные туннели. Формула дала высокую сходимость результатов расчета с экспериментальными данными. Исследования устойчивости ядер и расчет мод распада и их высокая сходимость с экспериментальными данными подтвердили принятую модель ядерной материи как многосвязного пространства.

В главах 6,7,8 произведено обоснование и расчет структуры глюонного поля микрочастиц, произведен расчет масс микрочастиц и их квантовых чисел. Результаты расчета хорошо согласуются с экспериментальными данными.

В связи с этим, открывается возможность вывода формулы энергии связи атомных ядер через известную структуру их составляющих – протона и нейтрона.

Полевая энергия протона (которую называем также обменным квантом, глюонным полем) количественно связана с энергией протона нейтрона и энергией фундаментальной массы по формуле

$$m_p c^2 = 2m_g c^2 - \sqrt{4(m_g c^2)^2 - (m_v^p c^2)^2}$$

$$m_n c^2 = 2m_n c^2 - \sqrt{4(m_n c^2)^2 - (m_v^n c^2)^2}$$

Фундаментальные масс $m_g c^2$ взаимодействия на расстоянии радиуса

протона и соответственно нейтрона создают глюонные поля $m_v^p c^2, m_v^n c^2$, которые создают дефект масс, реализуемый в пространстве как протон и нейтрон.

Расчет ведется по приближенным формулам

$$m_p c^2 = \frac{1}{4} \frac{(m_v^p c^2)^2}{m_g c^2} \quad 10.1.$$

$$m_n c^2 = \frac{1}{4} \frac{(m_v^n c^2)^2}{m_g c^2} \quad 10.2.$$

Глюонные поля в главе 8 были разложены на сумму произведений единичных вихрей на весовые коэффициенты. Весовые коэффициенты были определены из кварковых композиций микрочастиц. Энергии единичных вихрей определены из системы уравнений. Подробно глава 7,8, Так что, имеем соответственно

$$m_v^p c^2 = g\Psi_{m_p} = -29 + 105e^{kj} + 14e^{ji} + 18e^{ki} \quad 10.3.$$

$$m_v^n c^2 = g\Psi_{m_n} = -34 + 108e^{kj} + 16e^{ji} + 18e^{ki} \quad 10.4.$$

При образовании атомного ядра как ядерной материи глюонные поля протона и нейтрона усредняются. Поэтому ядерный глюонный квант равен

$$m_v^\Sigma c^2 = g\Psi_{m_\Sigma} = -31.5 + 106.5e^{kj} + 15e^{ji} + 18e^{ki} \quad 10.5.$$

Суммарная масса Z протонов и N нейтронов равна

$$\Sigma m c^2 = Z m_p c^2 + N m_n c^2$$

В связанном состоянии в ядерной материи нуклон имеет массу

$$m_N c^2 = \frac{1}{4} \frac{(m_v^\Sigma c^2)^2}{m_g c^2} \quad 10.6.$$

Таким образом, масса ядра состоящая из Z протонов и N нейтронов то есть из A нуклонов будет равна

$$M c^2 = \frac{1}{4} A \frac{(m_v^\Sigma c^2)^2}{m_g c^2}, \quad 10.7.$$

где $A = Z + N$

Энергия связи атомных ядер выразится следующей формулой

$$E = (Z m_p c^2 + N m_n c^2) - \frac{1}{4} A \frac{(m_v^\Sigma c^2)^2}{m_g c^2} \quad 10.8.$$

Величина глюонного поля ядерной материи определяется по формуле 9,5. Весовые коэффициенты определены по среднему значению весовых коэффициентов глюонного поля протона и нейтрона. В силу того, что единичные

глюонные поля составляющих глюонных вихрей имеют разную энергию имеем неравенство, которое является физически принципиальным

$$m_{\Sigma}^2 \neq \frac{1}{2}(m_p^2 + m_n^2)$$

В таблице представлен расчет энергий связей для ядер элементов периодической таблицы элементов и их изотопов. Расчет корректировался по изменению первого весового коэффициента в пределах $-31.5_{+0.35}^{-0.75}$. Колебания значений этого коэффициента нигде не вышли за пределы значений весового коэффициента протона и нейтрона

$-29 > (-31.13 \dots -32.25) > -34$. То есть колебание шло около среднего значения. При этом обменный квант колебался в пределах $67.48_{-0.07}^{+0.07} * 10^{11}$ Мэв. Это значение меньше обменного кванта протона и нейтрона и меньше их среднего значения

$$\frac{1}{2}(m_p^2 + m_n^2) = \frac{67.527 * 10^{11} + 67.713 * 10^{11}}{2} = 67.67 * 10^{11} > 67.48_{-0.07}^{+0.07} * 10^{11}$$

Максимальное расхождение результатов расчета по формуле с экспериментальными данными составляет меньше 0,2 процентов. В численном выражении это не превосходит 1 Мэв для легких ядер и 2-3 Мэв для тяжелых ядер.

Необходимо в заключении отметить следующее. Весовые коэффициенты протона и нейтрона насчитывались исходя из кварковых комбинаций. Весовые коэффициенты кварков рассчитывались из моделей микрочастиц, отражающих связность пространства микромира. В главе 8 рассмотрены два варианта связности пространства: двусвязное и шести связное пространство. Можно провести расчет для любой связности пространства 3,4,5,7,8,9,10,11,12 по числу рядов периодической таблицы элементов Д.И. Менделеева, причем каждое значение будет рассмотрено для элементов ряда и их изотопов.

Таблица №8.2. Определитель из весовых коэффициентов протона, нейтрона, электрона, положительного пиона.

Коэффициенты определены из кварковых композиций микрочастиц.
a,b,c,d-весовые коэффициенты gm-обменный квант,
m(1), m(kj), m(ji), m(ki) - энергия единичных глюонных вихрей.

a	b	c	D	Gm		m(1)	m(kj)	m(ji)	m(ki)	gm	mg		m		
-29	105	14	18	67,6970		1593,1200	12096	0,1317	0,4667	-0,3471	1,5208	67,6989	1,2211	4	938,3223
-34	108	16	18	67,7440		5645,2080	12096	0,1317	0,4667	-0,3471	1,5208	67,7462	1,2211	4	939,6347
65	-3	-2	12	26,1090		-4198,7800	12096	0,1317	0,4667	-0,3471	1,5208	26,1047	1,2211	4	139,5172
-4	2	1	1	1,5800	12096	18395,6900	12096	0,1317	0,4667	-0,3471	1,5208	1,5803	1,2211	4	0,5113

m(1)	a	m(kj)	b	m(ji)	c	m(ki)	d	gm	mg	m	Микро- частица	M (экспер)	%	%
0,1317	650,4667	-3	-0,3471	-2	1,5208	12	26,10	1,22	4	139,5174	pion+	139,5673	0,9996	
0,1312	550,4667	3	-0,3471	2	1,5208	12	26,17	1,22	4	140,2127	pijn -	139,5673	1,0046	
0,1312	600,4667	-1	-0,3471	0	1,5208	12	25,65	1,22	4	134,7300	pion00	134,96	0,9983	
0,1312	1250,4667	-4	-0,3471	-2	1,5208	24	51,72	1,22	4	547,7093	k+usq	493,667	1,1095	
0,1312	1150,4667	2	-0,3471	2	1,5208	24	51,82	1,22	4	549,8295	k-suq	493,667	1,1138	
0,1312	1200,4667	-2	-0,3471	0	1,5208	24	51,31	1,22	4	538,9199	kodsq	497,67	1,0829	
0,1317	1200,4667	-2	-0,3471	0	1,5208	24	51,37	1,22	4	540,2727	itta(uuq + dddq)	547	0,9877	
0,1317	1800,4667	-3	-0,3471	0	1,5208	36	77,06	1,22	4	1215,6346	itta(uuq + dddq)	958	1,2689	
0,1312	-10,4667	71	-0,3471	-10	1,5208	12	54,73	1,22	4	613,1404	ro(uuq-dddq)	770	0,7963	
0,1312	1460,4667	-2	-0,3471	-20	1,5208	24	61,66	1,22	4	778,3547	omega(uuq + ddq)	782	0,9953	
0,1312	1680,4667	0	-0,3471	12	1,5208	36	72,62	1,22	4	1079,6825	fi(ssq)	1020	1,0585	
0,1312	1110,4667	69	-0,3471	-2	1,5208	36	102,21	1,22	4	2138,6016	d+(cdq)	1869	1,1442	
0,1312	1200,4667	68	-0,3471	0	1,5208	36	102,23	1,22	4	2139,4214	d0(cuq)	1865	1,1471	

0,1317	2470,4667	-3	-0,3471	2	1,5208	48	103,44	1,22	4	2190,4021ds(csq)	1969	1,1124
0,1317	1250,4667	136	-0,3471	-24	1,5208	48	161,26	1,22	4	5324,2654B(ub)	5279	1,0086
0,1312	2920,4667	0	-0,3471	8	1,5208	60	126,77	1,22	4	3290,3177j/rci(ccq)	3097	1,0624
0,1312	5040,4667	0	-0,3471	-84	1,5208	84	223,02	1,22	4	10182,4497Y(bb)	10020	1,0162
0,1312	1120,4667	33	-0,3471	4	1,5208	30	74,33	1,22	4	1131,0583lambda (uds)	1116	1,0135
0,1312	1200,4667	33	-0,3471	-4	1,5208	30	78,15	1,22	4	1250,5073cigma (uds)	1193	1,0482
0,1312	1320,4667	33	-0,3471	-16	1,5208	30	83,89	1,22	4	1440,9212cigma (uds)	1385	1,0404
0,1312	2860,4667	74	-0,3471	60	1,5208	72	160,72	1,22	4	5288,4493b(ub)	5279	1,0018
0,1312	1150,4667	36	-0,3471	-2	1,5208	30	78,20	1,22	4	1252,1081sigma (uus)	1189	1,0531
0,1312	1270,4667	36	-0,3471	-14	1,5208	30	83,94	1,22	4	1442,6395(uus) cigma	1384	1,0424
0,1312	1070,4646	36	-0,3471	6	1,5208	30	74,30	1,22	4	1130,2248sigma (dds)	1197	0,9442
0,1312	1310,4646	36	-0,3471	-18	1,5208	30	85,78	1,22	4	1506,4276sigma (dds)	1387	1,0861
0,1312	-30,4667	3	-0,3471	3	1,5208	0	-0,03	1,22	4	0,0002mijon		
0,1312	2480,4667	-36	-0,3471	-4	1,5208	42	80,99	1,22	4	1342,9468uss	1315	1,0213
0,1312	2620,4667	-36	-0,3471	-16	1,5208	42	86,99	1,22	4	1549,3587uss	1532	1,0113
0,1312	2530,4667	-39	-0,3471	-6	1,5208	42	80,94	1,22	4	1341,2847dss	1321	1,0154
0,1312	2650,4667	-39	-0,3471	-18	1,5208	42	86,68	1,22	4	1538,2394dss	1535	1,0021
0,1312	2210,4667	43	-0,3471	6	1,5208	54	129,10	1,22	8	1706,0365sss	1672	1,0204
0,1312	-340,4667	108	-0,3471	16	1,5208	18	67,76	1,22	4	940,1330ddu	939,5731	1,0006
0,1312	-290,4667	105	-0,3471	14	1,5208	18	67,71	1,22	4	938,7448uud	938,2796	1,0005
0,1312	2060,4667	108	-0,3471	16	1,5208	66	172,24	1,22	4	6073,9511udb	5425	1,1196
0,1312	1790,4667	37	-0,3471	-6	1,5208	42	106,70	1,22	4	2330,9966udc	2285	1,0201
0,1312	1880,4667	34	-0,3471	-12	1,5208	42	108,57	1,22	4	2413,1047uuc	2454	0,9833
0,1312	1920,4667	34	-0,3471	-4	1,5208	42	106,31	1,22	4	2314,0278ddc	2285	1,0127

0,1312	1780,4667	108	-0,3471	-14	1,5208	54	160,73	1,22	4	5289,3426	udb	5350	0,9887	
0,1312	600,4667	37	-0,3471	6	1,5208	24	59,55	1,22	4	726,1300	omega	782	0,9286	
0,1312	00,4667	68	-0,3471	8	1,5208	0	28,96	1,22	4	171,6871	GG1	219	0,7840	
0,1312	1360,4667	68	-0,3471	-8	1,5208	12	70,60	1,22	4	1020,4881	GG2			
0,1312	600,4667	0	-0,3471	0	1,5208	12	26,12	1,22	4	139,6768	pio			
0,1312	210,4667	68	-0,3471	8	1,5208	0	31,71	1,22	4	205,9026		219	0,9402	
0,1312	1200,4667	74	-0,3471	12	1,5208	24	82,61	1,22	4	1397,1664				
0,1312	1200,4667	-6	-0,3471	-4	1,5208	24	50,83	1,22	4	528,9183	itta	547	0,9669	
0,1312	1200,4667	142	-0,3471	20	1,5208	24	111,57	1,22	4	2548,3952				
0,1312	1200,4667	34	-0,3471	4	1,5208	24	66,72	1,22	4	911,3429	itta/	958	0,9513	
0,1312	2280,4667	0	-0,3471	0	1,5208	48	102,91	1,22	4	2167,9976	Fi(csq)	2021	1,0727	
0,1312	600,4667	34	-0,3471	4	1,5208	24	58,85	1,22	4	709,0194	ro	770	0,9208	
0,1312	60,4667	0	-0,3471	2	1,5208	0	0,09	1,22	4	0,0018	v+w			
0,1312	600,4667	37	-0,3471	6	1,5208	0	23,06	1,22	4	108,8243	mjon	105,66	1,0299	
0,1312	-50,4667	-34	-0,3471	-4	1,5208	12	3,11	1,22	4	1,9859	yyy			
0,1312	1560,4667	34	-0,3471	20	1,5208	42	93,26	1,22	4	1780,6936	tau	1784+-3	1,0000	
0,1312	-80,4667	34	-0,3471	4	1,5208	6	22,55	1,22	4	104,1501	u			
0,1312	-130,4667	37	-0,3471	6	1,5208	6	22,60	1,22	4	104,6124	d			
0,1312	680,4667	-34	-0,3471	-4	1,5208	6	3,57	1,22	4	2,6021	uq			
0,1312	730,4667	-37	-0,3471	-6	1,5208	6	3,52	1,22	4	2,5296	ddq			
0,1312	00,4667	34	-0,3471	-4	1,5208	6	26,38	1,22	4	142,4847	u1	139,7	pi+	1,0199
0,1312	-10,4667	37	-0,3471	-6	1,5208	6	28,34	1,22	4	164,4800	d1	139,6	pi	1,1782
0,1312	600,4667	-34	-0,3471	4	1,5208	6	-0,26	1,22	4	0,0140	uq1			
0,1312	610,4667	-37	-0,3471	6	1,5208	6	-2,22	1,22	4	1,0130	dq1			
0,1312	470,4667	37	-0,3471	6	1,5208	18	48,72	1,22	4	486,0488	s	493,7	K	0,9845
0,1312	1070,4667	34	-0,3471	4	1,5208	30	74,14	1,22	4	1125,3090	c	1115,6	lambda	1,0087
0,1312	1670,4667	37	-0,3471	6	1,5208	42	100,96	1,22	4	2086,9820	b	2021	fi	1,0326

0,1312	2650,4667	-37	-0,3471	-18	1,5208	42	87,61	1,22	4	1571,5597dss	1534	1,0245
0,1312	2530,4667	-37	-0,3471	-6	1,5208	42	81,87	1,22	4	1372,4023dss	1321	1,0389
0,1312	2730,4667	-37	-0,3471	34	1,5208	54	88,86	1,22	4	1616,6773sss	1672	0,9669
0,1312	2810,4667	-37	-0,3471	24	1,5208	54	93,38	1,22	4	1785,3459sss	1672	1,0678
0,1312	3990,4667	-108	-0,3471	-18	1,5208	54	90,30	1,22	4	1669,5719sss	1672	0,9985
0,1312	3990,4667	-111	-0,3471	-18	1,5208	54	88,90	1,22	4	1618,2027sss	1672	0,9678
0,1312	-10,4667	1	-0,3471	1	1,5208	-1	-1,53	1,22	4	0,4808sss	1672	0,0003
0,1312	50,4667	-3	-0,3471	-2	1,5208	0	-0,05	1,22	4	0,0005sss		

Таблица №8.3. Расчет массы атомных ядер периодической таблицы элементов и их изотопов.

a, b, c, d - весовые коэффициенты

l, kj, ji, ki - значение масс единичных глюонных вихрей,

Zmp + Nmp = M

gm - величина глюонного поля нуклона в ядре,

mg - фундаментальная масса,

M (нуклона) - масса нуклона в ядре,

A - количество нуклонов,

gM - масса ядра,

M - масса нуклонов в свободном состоянии,

E - энергия связи ядра.

1,0000	a	kj	b	ji	c	ki	d	gm	mg	м(нуклон а)	A	gM	M	E(рас- четное)	E(эк- пер)	X(Z-A)	% расхож- дения
0,1312	-30,15	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,68	1,22	4	937,8699	2	1875,739825	1877,8527	-2,1129	H(1-1)	
0,1312	-30,62	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,62	1,22	4	936,1622	3	2808,48646	2816,1323	-7,6458	H(1-2)	
0,1312	-30,38	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,65	1,22	4	937,0340	3	2811,102019	2817,4258	-6,3238	He(2-1)	
0,1312	-31,8	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,47	1,22	4	931,8814	4	3727,525783	3755,705	-28,1792	He(2-2)	

0,1312	-31,35	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,53	1,22	4	933,5128	5	4667,563809	4695,2785	-27,7147	27,3	He(2-3)
0,1312	-31,15	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,55	1,22	4	934,2382	6	5605,429495	5634,8516	-29,4221	29,3	He(2-4)
0,1312	-31,35	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,53	1,22	4	933,5128	5	4667,563809	4693,985	-26,4212	26,3	Li(3-2)
0,1312	-31,35	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,53	1,22	4	933,5128	6	5601,076571	5633,5581	-32,4815	32	Li(3-3)
0,1312	-31,35	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,53	1,22	4	933,5128	7	6534,589332	6573,1312	-38,5419	39,2	Li(3-4)
0,1312	-31,25	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,54	1,22	4	933,8755	8	7471,003762	7512,7043	-41,7005	41,3	Li(3-5)
0,1312	-31,15	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,55	1,22	4	934,2382	6	5605,429495	5632,2646	-26,8351	26,9	Be(4-2)
0,1312	-31,35	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,53	1,22	4	933,5128	7	6534,589332	6571,8377	-37,2484	37,6	Be(4-3)
0,1312	-31,8	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,47	1,22	4	931,8814	8	7455,051565	7511,4108	-56,3592	56,5	Be(4-4)
0,1312	-31,62	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,49	1,22	4	932,5338	9	8392,804208	8450,9839	-58,1797	58,2	Be(4-5)
0,1312	-31,62	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,49	1,22	4	932,5338	10	9325,338009	9390,557	-65,2190	65	Be(4-6)
0,1312	-31,45	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,51	1,22	4	933,1501	11	10264,65136	10330,1301	-65,4787	65,5	Be(4-7)
0,1312	-31,2	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,55	1,22	4	934,0569	8	7472,454807	7510,1173	-37,6625	37,7	B(5-3)
0,1312	-31,62	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,49	1,22	4	932,5338	9	8392,804208	8449,6904	-56,8862	56,3	B(5-4)
0,1312	-31,65	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,49	1,22	4	932,4251	10	9324,250592	9389,2635	-65,0129	64,7	B(5-5)
0,1312	-31,75	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,47	1,22	4	932,0626	11	10252,68896	10328,8366	-76,1476	76,2	B(5-6)
0,1312	-31,65	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,49	1,22	4	932,4251	12	11189,10071	11268,4097	-79,3090	79,6	B(5-7)
0,1312	-31,6	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,49	1,22	4	932,6063	13	12123,88189	12207,9828	-84,1009	84,5	B(5-8)
0,1312	-31,55	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,50	1,22	4	932,7876	10	9327,875563	9387,97	-60,0944	60,3	C(6-4)
0,1312	-31,7	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,48	1,22	4	932,2438	11	10254,68221	10327,5431	-72,8609	73,4	C(6-5)
0,1312	-32	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,44	1,22	4	931,1569	12	11173,88249	11267,1162	-93,2337	92,2	C(6-6)
0,1312	-31,9	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,45	1,22	4	931,5191	13	12109,74862	12206,6893	-96,9407	97,1	C(6-7)
0,1312	-31,9	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,45	1,22	4	931,5191	14	13041,26775	13146,2624	-104,9947	105,3	C(6-8)
0,1312	-31,78	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,47	1,22	4	931,9539	15	13979,30877	14085,8355	-106,5267	106,5	C(6-9)
0,1312	-31,73	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,48	1,22	4	932,1351	16	14914,1618	15025,4086	-111,2468	110,8	C(6-10)
0,1312	-31,57	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,50	1,22	4	932,7151	12	11192,58061	11265,8227	-73,2421	73,8	N(7-5)
0,1312	-31,87	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,46	1,22	4	931,6278	13	12111,16158	12205,3958	-94,2342	94,4	N(7-6)

0,1312	-31,92	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,45	1,22	4	931,4467	14	13040,25337	13144,9689	-104,7155	104,7	N(7-7)	-1,0001
0,1312	-31,97	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,44	1,22	4	931,2655	15	13968,98313	14084,542	-115,5589	115,5	N(7-8)	-1,0005
0,1312	-31,87	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,46	1,22	4	931,6278	16	14906,04502	15024,1151	-118,0701	118	N(7-9)	-1,0006
0,1312	-31,82	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,46	1,22	4	931,8090	17	15840,75259	15963,6882	-122,9356	123	N(7-10)	-0,9995
0,1312	-31,82	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,46	1,22	4	931,8090	14	13045,32566	13143,6754	-98,3497	98,7	O(8-6)	-0,9965
0,1312	-31,92	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,45	1,22	4	931,4467	15	13971,70003	14083,2485	-111,5485	111,9	O(8-7)	-0,9969
0,1312	-32,05	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,43	1,22	4	930,9758	16	14895,61241	15022,8216	-127,2092	127,6	O(8-8)	-0,9969
0,1312	-31,98	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,44	1,22	4	931,2293	17	15830,89842	15962,3947	-131,4963	131,8	O(8-9)	-0,9977
0,1312	-31,98	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,44	1,22	4	931,2293	18	16762,12774	16901,9678	-139,8401	139,8	O(8-10)	-1,0003
0,1312	-31,92	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,45	1,22	4	931,4467	19	17697,48671	17841,5409	-144,0542	143,8	O(8-11)	-1,0018
0,1312	-31,91	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,45	1,22	4	931,4829	20	18629,65793	18781,114	-151,4561	151,4	O(8-12)	-1,0004
0,1312	-31,94	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,45	1,22	4	931,3742	17	15833,36167	15961,1012	-127,7395	128,2	F(9-8)	-0,9964
0,1312	-31,96	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,45	1,22	4	931,3018	18	16763,43179	16900,6743	-137,2425	137,4	F(9-9)	-0,9989
0,1312	-31,99	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,44	1,22	4	931,1931	19	17692,66882	17840,2474	-147,5786	147,8	F(9-10)	-0,9985
0,1312	-31,97	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,44	1,22	4	931,2655	20	18625,31084	18779,8205	-154,5097	154,4	F(9-11)	-1,0007
0,1312	-31,98	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,44	1,22	4	931,2293	21	19555,81569	19719,3936	-163,5779	163,5	F(9-12)	-1,0005
0,1312	-31,39	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,52	1,22	4	933,3677	18	16800,61857	16899,3808	-98,7622	98,7	Ne(10-8)	-1,0006
0,1312	-31,49	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,51	1,22	4	933,0051	19	17727,09668	17838,9539	-111,8572	111,9	Ne(10-9)	-0,9996
0,1312	-31,62	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,49	1,22	4	932,5338	20	18650,67602	18778,527	-127,8510	127,6	Ne(10-10)	-1,0020
0,1312	-31,58	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,50	1,22	4	932,6788	21	19586,25479	19718,1001	-131,8453	131,8	Ne(10-11)	-1,0003
0,1312	-31,6	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,49	1,22	4	932,6063	22	20517,33858	20657,6732	-140,3346	139,8	Ne(10-12)	-1,0038
0,1312	-31,56	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,50	1,22	4	932,7513	23	21453,27998	21597,2463	-143,9663	143,8	Ne(10-13)	-1,0012
0,1312	-32,03	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,44	1,22	4	931,0482	24	22345,15711	22536,8194	-191,6623	191,4	Ne(10-14)	-1,0014
0,1312	-32,09	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,43	1,22	4	930,8309	23	21409,11091	21595,9528	-186,8419	186,6	Na(11-12)	-1,0013
0,1312	-32,14	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,42	1,22	4	930,6498	24	22335,5962	22534,2324	-198,6362	198,3	Mg(12-12)	-1,0017
0,1312	-32,12	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,42	1,22	4	930,7223	25	23268,05666	23473,8055	-205,7488	205,6	Mg(12-13)	-1,0007
0,1312	-32,14	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,42	1,22	4	930,6498	26	24196,89589	24413,3786	-216,4827	216,7	Mg(12-14)	-0,9990

0,1312	-32,13	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,42	1,22	4	930,6861	27	25128,52345	25351,6582	-223,1347	225	Al(13-14)	-0,9917
0,1312	-32,17	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,42	1,22	4	930,5412	28	26055,15388	26291,2313	-236,0774	236,5	Al(13-15)	-0,9982
0,1312	-32,17	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,42	1,22	4	930,5412	30	27916,2363	28170,3775	-254,1412	255	Al(13-17)	-0,9966
0,1312	-32,25	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,41	1,22	4	930,2516	67	62326,85426	62912,5927	-585,7384	585,1	Zn(30-37)	-1,0011
0,1312	-32,25	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,41	1,22	4	930,2516	68	63257,10582	63852,1658	-595,0600	-595,4	Zn(30-38)	0,9994
0,1312	-32,24	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,41	1,22	4	930,2878	70	65120,14323	65731,312	-611,1688	611	Zn(30-40)	-1,0003
0,1312	-32,24	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,41	1,22	4	930,2878	69	64189,85547	64790,4454	-600,5899	601,9	Ca(31-38)	-0,9978
0,1312	-32,24	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,41	1,22	4	930,2878	71	66050,43099	66669,5916	-619,1606	618,8	Ca(31-40)	-1,0006
0,1312	-32,245	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,41	1,22	4	930,2697	70	65118,87607	65728,725	-609,8489	610,5	Ge(32-38)	-0,9989
0,1312	-32,24	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,41	1,22	4	930,2878	72	66980,71875	67607,8712	-627,1525	629	Ge(32-40)	-0,9971
0,1312	-32,24	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,41	1,22	4	930,2878	73	67911,00651	68547,4443	-636,4378	635,6	Ge(32-41)	-1,0013
0,1312	-32,24	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,41	1,22	4	930,2878	74	68841,29427	69487,0174	-645,7231	645,7	Ge(32-42)	-1,0000
0,1312	-32,23	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,41	1,22	4	930,3240	76	70704,62137	71366,1636	-661,5422	661,6	Ge(32-44)	-0,9999
0,1312	-32,235	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,41	1,22	4	930,3059	75	69772,93971	70425,297	-652,3573	652,6	As(33-42)	-0,9996
0,1312	-32,235	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,41	1,22	4	930,3059	74	68842,63385	69485,7239	-643,0901	642,9	Se(34-40)	-1,0003
0,1312	-32,235	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,41	1,22	4	930,3059	76	70703,24557	71363,5766	-660,3310	662	Se(34-42)	-0,9975
0,1312	-32,235	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,41	1,22	4	930,3059	77	71633,55143	72303,1497	-669,5983	669,5	Se(34-43)	-1,0001
0,1312	-32,235	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,41	1,22	4	930,3059	78	72563,8573	73242,7228	-678,8655	679,9	Se(34-44)	-0,9985
0,1312	-32,235	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,41	1,22	4	930,3059	80	74424,46902	75121,869	-697,4000	696,9	Se(34-46)	-1,0007
0,1312	-32,23	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,41	1,22	4	930,3240	82	76286,56516	77001,0152	-714,4500	712,9	Se(34-48)	-1,0022
0,1312	-32,23	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,41	1,22	4	930,3240	79	73495,59326	74181,0024	-685,4091	686,3	Br(35-44)	-0,9987
0,1312	-32,23	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,41	1,22	4	930,3240	81	75356,24119	76060,1486	-703,9074	704,3	Br(35-46)	-0,9994
0,1312	-32,23	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,41	1,22	4	930,3240	78	72565,2693	73240,1358	-674,8665	675,6	Kr(36-42)	-0,9989
0,1312	-32,235	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,41	1,22	4	930,3059	80	74424,46902	75119,282	-694,8130	695,4	Kr(36-44)	-0,9992

0,1312	-32,22	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,41	1,22	4	930,3602	96	89314,57642	90142,1036	-827,5272	826,7	Ru(44-52)	-1,0010
0,1312	-32,22	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,41	1,22	4	930,3602	98	91175,29676	92021,2498	-845,9530	845,3	Ru(44-54)	-1,0008
0,1312	-32,215	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,41	1,22	4	930,3783	99	92107,44914	92960,8229	-853,3738	852,5	Ru(44-55)	-1,0010
0,1312	-32,215	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,41	1,22	4	930,3783	100	93037,82741	93900,396	-862,5686	862	Ru(44-56)	-1,0007
0,1312	-32,21	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,41	1,22	4	930,3964	101	93970,03412	94839,9691	-869,9350	869,1	Ru(44-57)	-1,0010
0,1312	-32,21	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,41	1,22	4	930,3964	102	94900,4305	95779,5422	-879,1117	878,4	Ru(44-58)	-1,0008
0,1312	-32,225	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,41	1,22	4	930,3421	103	95825,23301	96719,1153	-893,8823	893,4	Ru(44-59)	-1,0005
0,1312	-32,21	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,41	1,22	4	930,3964	102	94900,4305	95776,9552	-876,5247	875,7	Pd(46-56)	-1,0009
0,1312	-32,205	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,41	1,22	4	930,4145	104	96763,10601	97656,1014	-892,9954	893,1	Pd(46-58)	-0,9999
0,1312	-32,2	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,41	1,22	4	930,4326	105	97695,42137	98595,6745	-900,2531	900,3	Pd(46-59)	-0,9999
0,1312	-32,2	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,41	1,22	4	930,4326	106	98625,85396	99535,2476	-909,3936	909,7	Pd(46-60)	-0,9997
0,1312	-32,195	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,41	1,22	4	930,4507	108	100488,6743	101414,3938	-925,7195	925,2	Pd(46-62)	-1,0006
0,1312	-32,195	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,41	1,22	4	930,4507	107	99558,22365	100473,5272	-915,3036	915,4	Ag(47-60)	-0,9999
0,1312	-32,19	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,42	1,22	4	930,4688	109	101421,0984	102352,6734	-931,5750	931,8	Ag(47-62)	-0,9998
0,1312	-32,21	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,41	1,22	4	930,3964	106	98622,016	99532,6606	-910,6446	905,6	Cd(48-58)	-1,0056
0,1312	-32,195	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,41	1,22	4	930,4507	108	100488,6743	101411,8068	-923,1325	923,6	cd(48-60)	-0,9995
0,1312	-32,195	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,41	1,22	4	930,4507	110	102349,5757	103290,953	-941,3773	940,7	Cd(48-62)	-1,0007
0,1312	-32,19	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,42	1,22	4	930,4688	111	103282,0359	104230,5261	-948,4902	947,8	Cd(48-63)	-1,0007
0,1312	-32,19	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,42	1,22	4	930,4688	112	104212,5047	105170,0992	-957,5945	956,8	Cd(48-64)	-1,0008
0,1312	-32,185	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,42	1,22	4	930,4869	112	104214,5324	105167,5122	-952,9798	953,3	Sn(50-62)	-0,9997
0,1312	-32,185	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,42	1,22	4	930,4869	114	106075,5062	107046,6584	-971,1522	971,4	Sn(50-64)	-0,9997
0,1312	-32,185	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,42	1,22	4	930,4869	115	107005,9931	107986,2315	-980,2384	979,1	Sn(50-65)	-1,0012
0,1312	-32,15	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,42	1,22	4	930,6136	116	107951,1811	108925,8046	-974,6235	956,8	Sn(50-66)	-1,0186
0,1312	-32,18	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,42	1,22	4	930,5050	117	108869,0851	109865,3777	-996,2926	995,6	Sn(50-67)	-1,0007
0,1312	-32,17	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,42	1,22	4	930,5412	118	109803,8628	110804,9508	-1001,0880	1000	Sn(50-68)	-1,0011
0,1312	-32,175	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,42	1,22	4	930,5231	119	110732,2495	111744,5239	-1012,2744	1011,5	Sn(50-69)	-1,0008
0,1312	-32,175	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,42	1,22	4	930,5231	120	111662,7726	112684,097	-1021,3244	1020,6	Sn(50-70)	-1,0007

0,1312	-32,135	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,42	1,22	4	930,6679	139	129362,8447	130526,9314	-1164,0867	1164,8	Za(57-82)	-0,9994
0,1312	-32,14	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,42	1,22	4	930,6498	138	128429,6782	129586,0648	-1156,3866	1156,3	Ge(58-80)	-1,0001
0,1312	-32,135	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,42	1,22	4	930,6679	140	130293,5127	131465,211	-1171,6983	1172,9	Ge(58-82)	-0,9990
0,1312	-32,125	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,42	1,22	4	930,7042	142	132159,9907	133344,3572	-1184,3665	1185,5	Ge(58-84)	-0,9990
0,1312	-32,13	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,42	1,22	4	930,6861	142	132157,4196	133341,7702	-1184,3506	1185,4	Pr(60-82)	-0,9991
0,1312	-32,125	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,42	1,22	4	930,7042	143	133090,6949	134281,3433	-1190,6484	1191,4	Pr(60-83)	-0,9994
0,1312	-32,125	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,42	1,22	4	930,7042	144	134021,3991	135220,9164	-1199,5173	1199,2	Pr(60-84)	-1,0003
0,1312	-32,12	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,42	1,22	4	930,7223	145	134954,7286	136160,4895	-1205,7609	1205,2	Pr(60-85)	-1,0005
0,1312	-32,115	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,43	1,22	4	930,7404	146	135888,0945	137100,0626	-1211,9681	1212,4	Pr(60-86)	-0,9996
0,1312	-32,107	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,43	1,22	4	930,7693	148	137753,8629	138979,2088	-1225,3459	1225,4	Pr(60-88)	-1,0000
0,1312	-32,08	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,43	1,22	4	930,8671	150	139630,0687	140858,355	-1228,2863	1237,6	Pr(60-70)	-0,9925
0,1312	-32,12	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,42	1,22	4	930,7223	144	134024,0064	135218,3294	-1194,3230	1196	Sm(62-82)	-0,9986
0,1312	-32,11	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,43	1,22	4	930,7585	147	136821,4966	138037,0487	-1215,5521	1217,5	Sm(62-85)	-0,9984
0,1312	-32,11	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,43	1,22	4	930,7585	148	137752,255	138976,62	-1224,3650	1225,6	Sm(62-86)	-0,9990
0,1312	-32,107	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,43	1,22	4	930,7693	149	138684,6323	139916,19	-1231,5577	1231,3	Sm(62-87)	-1,0002
0,1312	-32,107	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,43	1,22	4	930,7693	150	139615,4016	140855,768	-1240,3664	1239,5	Sm(62-88)	-1,0007
0,1312	-32,1	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,43	1,22	4	930,7947	152	141480,7935	142734,91	-1254,1165	1253,3	Sm(62-90)	-1,0007
0,1312	-32,09	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,43	1,22	4	930,8309	154	143347,96	144614,0604	-1266,1004	1267,1	Sm(62-92)	-0,9992
0,1312	-32,1	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,43	1,22	4	930,7947	151	140549,9988	141794,0476	-1244,0488	1244,3	Eu(63-88)	-0,9998
0,1312	-32,1	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,43	1,22	4	930,7947	153	142411,5882	143673,1938	-1261,6056	1259,3	Eu(63-90)	-1,0018
0,1312	-32,1	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,43	1,22	4	930,7947	152	141480,7935	142732,3272	-1251,5337	1251,7	Gd(64-88)	-0,9999
0,1312	-32,08	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,43	1,22	4	930,8671	160	148938,7399	150248,912	-1310,1721	1309,2	Gd(64-96)	-1,0007
0,1312	-32,07	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,43	1,22	4	930,9033	159	148013,6312	149308,0454	-1294,4142	1302,4	Tb(65-93)	-0,9939
0,1312	-32,09	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,43	1,22	4	930,8309	156	145209,6218	146488,0326	-1278,4108	1278,5	Du(66-90)	-0,9999

0,1312	-32,07	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,43	1,22	4	930,9033	164	152668,1479	154004,6174	-1336,4695	1338,3	Du(6698)	-0,9986
0,1312	-32,09	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,43	1,22	4	930,8309	165	153587,1	154942,897	-1355,7970	1334,3	Ho(67-98)	-1,0161
0,1312	-32,08	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,43	1,22	4	930,8671	162	150800,4742	152122,8842	-1322,4100	1320,7	Er(68-94)	-1,0013
0,1312	-32,06	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,43	1,22	4	930,9396	170	158259,7248	159639,469	-1379,7442	1379	Er(68-102)	-1,0005
0,1312	-32,06	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,43	1,22	4	930,9396	169	157328,7852	158698,6024	-1369,8172	1371,2	Tm(69-100)	-0,9990
0,1312	-32,06	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,43	1,22	4	930,9396	168	156397,8457	157757,7358	-1359,8901	1362,8	Yb(70-98)	-0,9979
0,1312	-32,04	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,44	1,22	4	931,0120	176	163858,1109	165274,3206	-1416,2097	1419	Yb(70-106)	-0,9980
0,1312	-32,05	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,43	1,22	4	930,9758	175	162920,7607	164333,454	-1412,6933	1412	Zn(71-104)	-1,0005
0,1312	-32,05	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,43	1,22	4	930,9758	174	161989,7849	163392,5874	-1402,8025	1403,7	Hf(72-102)	-0,9994
0,1312	-32,04	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,44	1,22	4	931,0120	180	167582,1589	169030,026	-1447,8671	1446	Hf(72-108)	-1,0013
0,1312	-32,03	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,44	1,22	4	931,0482	180	167588,6783	169027,439	-1438,7607	1444,3	W(74-106)	-0,9962
0,1312	-32,02	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,44	1,22	4	931,0844	186	173181,7044	174664,8776	-1483,1732	1485,9	W(74-112)	-0,9982
0,1312	-32,03	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,44	1,22	4	931,0482	185	172243,9194	173724,011	-1480,0916	1478,3	Re(75-110)	-1,0012
0,1312	-32,02	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,44	1,22	4	931,0844	187	174112,7889	175603,1572	-1490,3683	1491,7	Re(75-112)	
0,1312	-32,03	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,44	1,22	4	931,0482	184	171312,8711	172783,1444	-1470,2733	1469,8	Os(76-118)	-1,0003
0,1312	-32,01	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,44	1,22	4	931,1207	192	178775,1654	180299,7292	-1524,5638	1526,2	Os(76-126)	-0,9989
0,1312	-32,01	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,44	1,22	4	931,1207	191	177844,0447	179358,8626	-1514,8179	1517,8	Ir(77-114)	-0,9980
0,1312	-32,01	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,44	1,22	4	931,1207	193	179706,286	181238,0088	-1531,7228	1531,7	Ir(77-116)	-1,0000
0,1312	-32,01	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,44	1,22	4	931,1207	190	176912,9241	178417,996	-1505,0719	1509,8	Pt(78-112)	-0,9969
0,1312	-32	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,44	1,22	4	931,1569	198	184369,0611	185934,58	-1565,5189	1567,3	Pt(78-120)	-0,9989

0,1312	-32,01	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,44	1,22	4	931,1207	197	183430,7686	184993,71	-1562,9414	1559,4	Au(79-118)	-1,0023
0,1312	-32,01	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,44	1,22	4	931,1207	196	182499,648	184052,85	-1553,2020	1551,2	Hg(80-116)	-1,0013
0,1312	-32	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,44	1,22	4	931,1569	204	189956,0023	191569,43	-1613,4277	1608,6	Hg(80-124)	-1,0030
0,1312	-31,98	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,44	1,22	4	931,2293	204	189970,781	191568,14	-1597,3590	1600	Tl(81-123)	-0,9983
0,1312	-31,96	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,45	1,22	4	931,3018	208	193710,7673	195326,43	-1615,6627	1615	Tl(81-127)	
0,1312	-32	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,44	1,22	4	931,1569	204	189956,0023	191566,8454	-1610,8431	1607,5	Pb(82-122)	-1,0021
0,1312	-31,99	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,44	1,22	4	931,1931	206	191825,7778	193445,99	-1620,2122	1622,3	Pb(82-124)	-0,9987
0,1312	-31,99	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,44	1,22	4	931,1931	207	192756,9709	194385,5647	-1628,5938	1629	Pb(82-125)	-0,9998
0,1312	-31,99	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,44	1,22	4	931,1931	208	193688,164	195325,14	-1636,9760	1636,4	Pb(82-126)	-1,0004
0,1312	-31,985	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,44	1,22	4	931,2112	209	194623,1423	196263,42	-1640,2777	1640,2	Bi(83-126)	-1,0000
0,1312	-31,95	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,45	1,22	4	931,3380	214	199306,33	200959,99	-1653,6600	1666	Po(84-130)	-0,9926
0,1312	-31,96	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,45	1,22	4	931,3018	216	201161,1814	202837,8421	-1676,6607	1674,6	At(85-131)	-1,0012
0,1312	-31,96	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,45	1,22	4	931,3018	216	201161,1814	202836,55	-1675,3686	1675,9	Rn(86-130)	-0,9997
0,1312	-31,95	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,45	1,22	4	931,3380	220	204894,3579	206593,55	-1699,1921	1696,6	Fr(87-133)	-1,0015
0,1312	-31,935	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,45	1,22	4	931,3923	223	207700,4894	209410,97	-1710,4806	1713,8	Ra(88-135)	-0,9981
0,1312	-31,92	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,45	1,22	4	931,4467	232	216095,6272	217864,54	-1768,9128	1766,5	Ac(89-143)	-1,0014
0,1312	-31,92	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,45	1,22	4	931,4467	232	216095,6272	217861,96	-1766,3328	1765,9	U(92-140)	-1,0002
0,1312	-31,92	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,45	1,22	4	931,4467	235	218889,9672	220680,68	-1790,7128	1783,8	U(92-143)	-1,0039
0,1312	-31,915	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,45	1,22	4	931,4648	238	221688,6183	223499,4	-1810,7817	1810	U(92-146)	-1,0004
0,1312	-31,9	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,45	1,22	4	931,5191	238	221701,5517	223498,1	-1796,5483	1800,8	Np(93-145)	-0,9976
0,1312	-31,92	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,45	1,22	4	931,4467	238	221684,3072	223496,8	-1812,4928	1801,3	Pu(94-144)	-1,0062
0,1312	-31,89	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,45	1,22	4	931,5554	244	227299,5063	229132,95	-1833,4437	1835	Am(95-149)	-0,9992
0,1312	-31,89	0,4667	106	-0,3471	15	1,5208	18	67,45	1,22	4	931,5554	244	227299,5063	229131,66	-1832,1537	1835,7	Cm(96-148)	-0,9981

ЛИТЕРАТУРА

1	В.И. Елисеев, А.С.Фохт. Математическая модель энергии связи атома. - Киев, 1983, - 60с. (Препринт/АН УССР, Ин-т математики, 83,25).
2	В.И. Елисеев, А.С.Фохт. Математическая теория энергии связи атома. - Киев, 1983, 60с. (Препринт/АН УССР, Ин-т математики: 83.24).
3	В.И. Елисеев, А.С.Фохт. Методы теории функций пространственного комплексного переменного: - Киев, 1984, 57с. (Препринт/АН УССР, Ин-т математики: 84.61).
4	В.И. Елисеев, А.С.Фохт. Математический расчет модели сложного структурного образования. - Киев, 1984, 61с. (Препринт/АН УССР. Ин-т математики: 84.62).
5	Понтрягин Л.С. Обобщение чисел, - М.: Наука, 1986.-120с (Б-ка "Квант". Вып. 54).
6	Б. Л. ван дер Варден. Алгебра - М.: Наука, 1979, 624с.
7	М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат. Методы теорий функций комплексного переменного. - М.: Наука, 1965, 716с.
8	Л. А. Логунов. Лекции по теории относительности и гравитации. Современный анализ проблемы. - М.: Наука, 1987, 272с.
9	Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. Краткий курс теоретической физики. Книга 1. Механика. Электродинамика, - М.: Наука,. 1969, 272с.
10	К.Н. Мухин. Экспериментальная ядерная физика Том 1. Физика атомного ядра. - М.: Энергоатомиздат, 1983, в16с.
11	Г. Фрауэнфельдер, Э. Хенли. Субатомная физика. - М.: Мир, 1979, 736с.
12	Ю. М. Широков, Н. П. Юдин. Ядерная физика. - М.: Наука, 1980, 728с.
13	М. А. Блохин, И.Г. Швейцер. Рентгеноспектральный справочник. - М.: Наука, 1982, 376с.
14	В.И. Елисеев. Введение в Методы теории функций пространственного комплексного переменного. Издательство НИИТ, МОСКВА , 1990 год. 189 стр.
15	Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. ТЕОРИЯ ПОЛЯ. Теоретическая физика. Том 2.Москва. Из-во НАУКА. 1983 год. 510 стр.
16	В.Б. Берестецкий. Е.М. Лифшиц, Л.П.Питаевский. Квантовая электродинамика. Теоретическая физика. Том 4. Москва Из-во НАУКА.1989 год. 725 стр.
17	Э.Фихман. Квантовая физика. Берклеевский курс Физики. Том 4. Москва. Изд-во НАУКА. 1977 год. 415 стр.
18	Я.Б. Зельдович, И.Д.Новиков. Теория тяготения и эволюция звезд. Москва. Изд-во НАУКА. 1971 год. 485 стр.
19	Энергия разрыва химических связей. Потенциалы ионизации и сродство к электрону. Академия наук СССР .Москва. Изд-во НАУКА .1974 год. 351 стр.
20	Таблицы физических величин. Справочник под редакцией академика И.К. Кикоина. Москва. АТОМИЗДАТ .1976год. 1005 стр.