

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В. А. СТЕКЛОВА  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

А. В. Домрин, А. Г. Сергеев

Лекции по комплексному анализу

Второе полугодие

Москва  
2004

УДК 517.5  
ББК (В)22.16  
Д66

**Домрин А. В., Сергеев А. Г.**

Д66 Лекции по комплексному анализу : В 2 частях. / А. В. Домрин,  
А. Г. Сергеев. — М.: МИАН, 2004.

ISBN 5-98419-006-0

Часть II : Второе полугодие. — 2004. — 136 с.

ISBN 5-98419-008-7

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04-01-14126).

ISBN 5-98419-008-7 (ч. II) © Домрин А. В., Сергеев А. Г., 2004

ISBN 5-98419-006-0 © Математический институт  
им. В. А. Стеклова РАН, 2004

*Памяти Анатолия Георгиевича Витушкина*

# Содержание

<b>Первое полугодие</b>	<b>1</b>
Лекция 1. Комплексная плоскость . . . . .	1
1.1. Определение . . . . .	1
1.2. Алгебраическая структура . . . . .	2
1.3. Полярное представление . . . . .	2
1.4. Топология комплексной плоскости . . . . .	4
1.5. Компактификация комплексной плоскости . . . . .	8
Лекция 2. Комплексная дифференцируемость. Геометрический смысл производной . . . . .	12
2.1. $\mathbb{R}$ -дифференцируемость . . . . .	12
2.2. $\mathbb{C}$ -дифференцируемость. Условия Коши–Римана . . . . .	13
2.3. Производная по направлению . . . . .	15
2.4. Голломорфные функции и конформные отображения . . . . .	17
2.5. Геометрический смысл комплексной производной . . . . .	18
2.6. Голломорфность и конформность отображений расширенной комплексной плоскости . . . . .	20
Лекция 3. Дробно-линейные функции . . . . .	21
3.1. Дробно-линейные отображения расширенной комплексной плоскости . . . . .	21
3.2. Конформность дробно-линейных отображений . . . . .	22
3.3. Группа дробно-линейных отображений . . . . .	23
3.4. Круговое свойство дробно-линейных отображений . . . . .	24
3.5. Сохранение симметрии при дробно-линейных отображениях . . . . .	26
3.6. Свойство трех точек . . . . .	30
3.7. Дробно-линейные изоморфизмы основных областей . . . . .	31
Лекция 4. Интеграл и первообразная . . . . .	35
4.1. Определение интеграла вдоль пути . . . . .	35
4.2. Свойства интеграла вдоль пути . . . . .	38
4.3. Лемма Гурса . . . . .	42
4.4. Первообразная . . . . .	45
4.5. Первообразная вдоль пути . . . . .	47
Лекция 5. Теорема Коши . . . . .	53
5.1. Теорема Коши о гомотопии . . . . .	53
5.2. Теорема Коши для многосвязной области . . . . .	59

5.3.	Интегральная формула Коши . . . . .	62
Лекция 6.	Ряды Тейлора . . . . .	65
6.1.	Напоминание . . . . .	65
6.2.	Разложение голоморфной функции в ряд Тейлора	66
6.3.	Неравенства Коши . . . . .	67
6.4.	Теорема Лиувилля . . . . .	67
6.5.	Множество точек сходимости степенного ряда .	68
6.6.	Голоморфность суммы степенного ряда . . . . .	72
6.7.	Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций . . . . .	74
6.8.	Коэффициенты ряда Тейлора . . . . .	74
6.9.	Интегральная формула Коши для производных	75
6.10.	Теорема Морера . . . . .	75
6.11.	Три эквивалентных определения голоморфной функции . . . . .	76
6.12.	Разложение голоморфной функции в окрестности нуля . . . . .	76
6.13.	Теорема единственности . . . . .	78
6.14.	Теорема Вейерштрасса о рядах голоморфных функций . . . . .	79
6.15.	Аппроксимация голоморфных функций полиномами . . . . .	81
Лекция 7.	Ряды Лорана и особые точки . . . . .	82
7.1.	Разложение голоморфной функции в ряд Лорана	82
7.2.	Сходимость рядов по целым степеням $z - a$ . . .	85
7.3.	Неравенства Коши для коэффициентов Лорана	86
7.4.	Замечание о рядах Лорана и Фурье . . . . .	87
7.5.	Изолированные особые точки. Определение . . .	88
7.6.	Описание устранимых особых точек . . . . .	89
7.7.	Описание полюсов . . . . .	90
7.8.	Теорема Сохоцкого . . . . .	93
7.9.	$a = \infty$ как изолированная особая точка . . . . .	94
7.10.	Целые функции с полюсом на бесконечности . .	95
7.11.	Мероморфные функции с полюсом на бесконечности . . . . .	95
Лекция 8.	Вычеты . . . . .	97
8.1.	Теорема Коши о вычетах . . . . .	97
8.2.	Вычет в терминах ряда Лорана . . . . .	98
8.3.	Формулы для вычисления вычетов . . . . .	99
8.4.	Вычет в точке $a = \infty$ . . . . .	100

8.5.	Теорема о полной сумме вычетов . . . . .	101
8.6.	Лемма Жордана . . . . .	101
8.7.	Пример на вычисление преобразования Фурье от рациональных функций . . . . .	103
Лекция 9.	Аналитическое продолжение. Постановка задачи	106
9.1.	Постановка задачи . . . . .	106
9.2.	Аналитическое продолжение $\Gamma$ -функции . . . . .	107
9.3.	Аналитическое продолжение логарифма . . . . .	110
Лекция 10.	Теория Вейерштрасса . . . . .	114
10.1.	Постановка задачи . . . . .	114
10.2.	Элементы и их аналитическое продолжение . . . . .	115
10.3.	Свойства непосредственного аналитического про- должения . . . . .	116
10.4.	Продолжение канонических элементов вдоль пути . . . . .	118
10.5.	Эквивалентность аналитического продолжения по цепочке и вдоль пути . . . . .	120
10.6.	Теорема о продолжении вдоль гомотопных путей . . . . .	122
Лекция 11.	Аналитические функции . . . . .	126
11.1.	Определения . . . . .	126
11.2.	Пример: аналитическая функция $\sqrt{z}$ . . . . .	128
11.3.	Пример: аналитическая функция $\ln z$ . . . . .	130
11.4.	Действия над аналитическими функциями . . . . .	131
11.5.	Изолированные особые точки аналитической функции . . . . .	134
11.6.	Классификация изолированных особых точек . . . . .	136
11.7.	Примеры аналитических функций и их особых точек . . . . .	138
11.8.	Ряды Пуансо . . . . .	140
Лекция 12.	Римановы поверхности . . . . .	144
12.1.	Риманова поверхность функции $w = \sqrt{z}$ . . . . .	144
12.2.	Риманова поверхность функции $w = \ln z$ . . . . .	147
12.3.	Риманова поверхность функции $w = \arcsin z$ . . . . .	147
12.4.	Риманова поверхность аналитической функции . . . . .	149
12.5.	Одномерные комплексные многообразия . . . . .	150
12.6.	Неразветвленные голоморфные накрытия . . . . .	152
12.7.	Риманова поверхность аналитической функции (продолжение) . . . . .	158
Список литературы . . . . .		163

<b>Второе полугодие</b>	<b>165</b>
Лекция 13. Принцип аргумента . . . . .	165
13.1. Логарифмический вычет . . . . .	165
13.2. Принцип аргумента . . . . .	167
13.3. Теорема Руше . . . . .	169
Лекция 14. Принцип сохранения области и обращение голоморфных функций . . . . .	174
14.1. Принцип сохранения области . . . . .	174
14.2. Локальное обращение голоморфных функций . . . . .	175
14.3. Теорема Гурвица . . . . .	179
Лекция 15. Принцип максимума модуля и его следствия . . . . .	181
15.1. Принцип максимума модуля . . . . .	181
15.2. Лемма Шварца . . . . .	183
Лекция 16. Принцип компактности. Последовательности голоморфных функций . . . . .	186
16.1. Принцип компактности . . . . .	186
16.2. Теорема Монтеля . . . . .	188
16.3. Непрерывные функционалы на семействах голоморфных функций . . . . .	190
Лекция 17. Теорема Римана . . . . .	192
17.1. Автоморфизмы основных областей . . . . .	192
17.2. Теорема Римана . . . . .	195
Лекция 18. Соответствие границ и принцип симметрии . . . . .	200
18.1. Принцип соответствия границ . . . . .	200
18.2. Принцип симметрии . . . . .	203
Лекция 19. Конформное отображение полуплоскости на многоугольник . . . . .	213
19.1. Конформное отображение полуплоскости на прямоугольник . . . . .	213
19.2. Интеграл Кристоффеля–Шварца . . . . .	219
Лекция 20. Эллиптические функции . . . . .	225
20.1. Эллиптический синус . . . . .	225
20.2. Периоды мероморфных функций . . . . .	228
20.3. Определение и свойства эллиптических функций . . . . .	230
Лекция 21. Функция Вейерштрасса . . . . .	234
21.1. Определение и основные свойства . . . . .	234
21.2. Описание эллиптических функций с заданной решеткой периодов . . . . .	239

---

21.3.	Дифференциальное уравнение для функции Вейерштрасса . . . . .	242
Лекция 22.	Реализация тора в виде кубической кривой в $\mathbb{C}^2$ . . . . .	246
22.1.	Определения тора и кубической кривой в $\mathbb{C}^2$ . . . . .	246
22.2.	Параметризация кубической кривой с помощью функции Вейерштрасса . . . . .	248
22.3.	Сложение точек на кубической кривой . . . . .	250
Лекция 23.	Модулярная функция и теорема Пикара . . . . .	254
23.1.	Построение модулярной функции . . . . .	254
23.2.	Теорема Пикара . . . . .	262
Лекция 24.	Гармонические функции . . . . .	265
24.1.	Определение и основные свойства гармонических функций . . . . .	265
24.2.	Задача Дирихле . . . . .	270
Дополнение.	Физическая интерпретация голоморфных функций и доказательство теоремы Римана . . . . .	276
Д.1.	Гидродинамическая интерпретация конформных отображений . . . . .	276
Д.2.	“Физическое” доказательство теоремы Римана . . . . .	283
Д.3.	Другие физические интерпретации голоморфных функций . . . . .	287
Список литературы	. . . . .	289





# Второе полугодие

## Лекция 13. Принцип аргумента

**13.1. Логарифмический вычет.** Пусть функция  $f$  голоморфна в проколотой окрестности  $V = \{0 < |z - a| < r\}$  точки  $a$  и не имеет нулей в  $V$ . Тем самым, точка  $a$  является изолированной особенностью как для функции  $f$ , так и для функции  $1/f$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** *Логарифмическим вычетом* функции  $f$  в точке  $a$  называется вычет ее логарифмической производной  $f'(z)/f(z)$  в этой точке. Иными словами, логарифмический вычет  $f$  в точке  $a$  равен

$$\operatorname{res}_a \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\rho} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad \text{для любого } 0 < \rho < r.$$

Вычислим логарифмический вычет мероморфной функции в ее нуле и полюсе.

**ПРИМЕР 13.1.** Пусть  $a$  — нуль порядка  $n$  функции  $f$ , голоморфной в окрестности  $a$ . Тогда в некоторой окрестности  $U$  точки  $a$  справедливо разложение

$$f(z) = (z - a)^n \varphi(z),$$

где  $\varphi$  голоморфна и не имеет нулей в  $U$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{n(z - a)^{n-1} \varphi(z) + (z - a)^n \varphi'(z)}{(z - a)^n \varphi(z)} \\ &= \frac{1}{z - a} \cdot \frac{n\varphi(z) + (z - a)\varphi'(z)}{\varphi(z)} =: \frac{\psi(z)}{z - a}, \end{aligned}$$

где функция  $\psi$  голоморфна в  $U$  и  $\psi(a) = n \neq 0$ . Поэтому *логарифмический вычет  $f$  в нуле порядка  $n$  равен  $n$ .*

**ПРИМЕР 13.2.** Пусть  $a$  — полюс порядка  $p$  функции  $f$ . Тогда функция  $g(z) := 1/f(z)$  имеет при  $z = a$  нуль порядка  $p$ . Поскольку  $f'/f = -g'/g$ , получаем, что *логарифмический вычет  $f$  в полюсе порядка  $p$  равен  $-p$ .*

Приведенные примеры подсказывают, что с помощью логарифмического вычета мероморфной функции можно подсчитать число ее нулей и полюсов с учетом их кратности. Это подтверждается нижеследующей теоремой.

**ТЕОРЕМА.** Пусть  $D \subset \mathbb{C}$  — область с простой границей и  $f(z)$  — функция, которая мероморфна в области  $G \supset \overline{D}$  и не имеет нулей и полюсов на  $\partial D$ . Обозначим через  $N(f, D)$  и  $P(f, D)$  соответственно число нулей и полюсов  $f$  в области  $D$  (с учетом их кратностей). Тогда

$$N(f, D) - P(f, D) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'}{f} dz. \quad (13.1)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Поскольку функция  $f$  мероморфна в окрестности замыкания  $\overline{D}$  области  $D$ , в этой области имеется лишь конечное число нулей  $a_1, \dots, a_k$  и полюсов  $b_1, \dots, b_l$  функции  $f$  (см. п. 7.11). Функция  $g := f'/f$  голоморфна всюду в окрестности замыкания  $\overline{D}$ , за исключением точек  $\{a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l\}$ . Поэтому к ней применима теорема Коши о вычетах:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'}{f} dz = \sum_{i=1}^k \operatorname{res}_{a_i} \frac{f'}{f} + \sum_{j=1}^l \operatorname{res}_{b_j} \frac{f'}{f}.$$

Согласно вычислениям, проведенным в примерах 13.1 и 13.2, правая часть равна  $N(f, D) - P(f, D)$ , что и требовалось доказать. ■

**ЗАДАЧА.** Примеры 13.1 и 13.2 показывают, что логарифмическая производная  $f'/f$  функции  $f$  имеет в точке  $a$  полюс 1-го порядка всякий раз, когда сама функция  $f$  имеет нуль или полюс в этой точке. Докажите обратное: если  $f$  голоморфна в проколотой окрестности точки  $a$  и  $f'/f$  имеет в точке  $a$  полюс 1-го порядка, то  $f$  имеет в этой точке нуль или полюс.

**13.2. Принцип аргумента.** Пусть  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{C}$  — непрерывный путь на комплексной плоскости, параметризованный единичным отрезком  $I = [0, 1]$ , и  $f: \gamma(I) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  — функция, непрерывная вдоль  $\gamma$ .

Тогда найдется непрерывная функция  $\theta: I \rightarrow \mathbb{R}$  такая, что

$$f(\gamma(t)) = |f(\gamma(t))|e^{i\theta(t)} \quad \text{для всех } t \in I. \quad (13.2)$$

Такая функция  $\theta$  определяется не единственным образом, но любые две подобные функции  $\theta_1, \theta_2$  отличаются на константу  $2\pi n$  для некоторого  $n \in \mathbb{Z}$ . (Доказательство этих утверждений повторяет рассуждения из п. 4.5 и оставляется читателю в качестве упражнения.)

Отсюда следует, в частности, что вещественное число

$$\theta(1) - \theta(0)$$

не зависит от выбора функции  $\theta$ . Оно называется *приращением аргумента функции  $f$  вдоль пути  $\gamma$*  и обозначается через

$$\Delta_\gamma \arg f.$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 13.1.** Приращение аргумента  $\Delta_\gamma \arg f$  не зависит от выбора параметризации пути  $\gamma$ . Точнее, если заменить путь  $\gamma$  на путь  $\gamma \circ \Phi$ , где  $\Phi: I \rightarrow I$  — любое биективное монотонно возрастающее непрерывное отображение, то

$$\Delta_{\gamma \circ \Phi} \arg f = \Delta_\gamma \arg f \quad (\text{почему?}).$$

Тем самым, приращение аргумента функции  $f$  корректно определено не только вдоль пути  $\gamma$ , но и вдоль задаваемой им *ориентированной кривой*.

Заметим, что для монотонно убывающего биективного отображения  $\Phi: I \rightarrow I$  правая и левая части этого равенства отличаются знаком:

$$\Delta_{\gamma \circ \Phi} \arg f = -\Delta_\gamma \arg f.$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 13.2.** Рассмотрим отображение  $w = f(z)$ , задаваемое функцией  $f$ , и обозначим через  $\Gamma$  путь  $\Gamma = f \circ \gamma$ . Заметим, что функция (см. формулу (13.2))

$$F(t) := \ln |f(\gamma(t))| + i\theta(t)$$

является первообразной функции  $g(w) := 1/w$  вдоль  $\Gamma$  (проверьте это!). Поэтому, применяя формулу Ньютона–Лейбница, получим:

$$\int_{\Gamma} g(w) dw = \int_{f \circ \gamma} \frac{dw}{w} = F(1) - F(0),$$

откуда

$$\int_{f \circ \gamma} \frac{dw}{w} = \ln \frac{|f(\gamma(1))|}{|f(\gamma(0))|} + i(\theta(1) - \theta(0)). \quad (13.3)$$

Из этой формулы можно вывести два полезных следствия. Во-первых, взяв от обеих частей последнего равенства мнимую часть, получим, что

$$\operatorname{Im} \int_{f \circ \gamma} \frac{dw}{w} = \Delta_{\gamma} \arg f$$

для произвольного пути  $\gamma$ . Во-вторых, для любого замкнутого непрерывного пути  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{C}$  и любой непрерывной функции  $f: \gamma(I) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  формулу (13.3) можно переписать в виде

$$\int_{f \circ \gamma} \frac{dw}{w} = i \Delta_{\gamma} \arg f. \quad (13.4)$$

**ПРИНЦИП АРГУМЕНТА.** Пусть  $D \subset \mathbb{C}$  — область с простой границей, причем  $\partial D$  связна и, следовательно, является кусочно гладкой жордановой кривой. (Напомним, что  $\partial D$  ориентирована так, что область  $D$  остается слева при обходе вдоль  $\partial D$ .) Пусть функция  $f(z)$  мероморфна в области  $G \supset \bar{D}$  и не имеет нулей и полюсов на  $\partial D$ . Тогда

$$N(f, D) - P(f, D) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial D} \arg f. \quad (13.5)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Параметризуем  $\partial D$  отображением

$$\gamma: I \rightarrow \mathbb{C}.$$

Пользуясь формулой (13.1) и определением интеграла, запишем левую часть формулы (13.5) в виде

$$\begin{aligned} N(f, D) - P(f, D) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))} \gamma'(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{f \circ \gamma} \frac{dw}{w}. \end{aligned}$$

Но

$$\int_{f \circ \gamma} \frac{dw}{w} = i \Delta_{\partial D} \arg f$$

согласно формуле (13.4), откуда и следует доказываемая формула (13.5).  $\blacksquare$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Геометрически, правая часть формулы (13.5), равная  $\frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial D} \arg f$ , совпадает с числом оборотов, совершаемых точкой  $f(z)$  вокруг начала координат, когда переменная  $z$  (однократно) обегает  $\partial D$  против часовой стрелки. Пользуясь этой интерпретацией, удается иногда вычислить приращение аргумента  $\Delta_{\partial D} \arg f$ , глядя на изображение  $f(\gamma)$ . К сожалению, такое случается редко, чаще прибегают к доказываемой в следующем параграфе теореме Руше.

**13.3. Теорема Руше.** Эта теорема позволяет подсчитывать число нулей голоморфной функции в области, отбрасывая “малые” слагаемые.

**ТЕОРЕМА РУШЕ.** Пусть, как и в принципе аргумента,  $D \subset \mathbb{C}$  есть область, ограниченная кусочно гладкой жордановой кривой. Предположим, что функции  $f$  и  $g$  голоморфны в области  $G \supset \bar{D}$ , причем

$$|f(z)| > |g(z)| \quad \text{при всех } z \in \partial D.$$

Тогда функции  $f$  и  $f + g$  имеют в области  $D$  одинаковое число нулей.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Заметим, что функции  $f$  и  $f + g$  не обращаются в нуль на  $\partial D$ , поскольку

$$|f(z)| > |g(z)| \quad \text{для всех } z \in \partial D.$$

Поэтому к функции  $f + g$  применим принцип аргумента, согласно которому

$$N(f + g, D) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial D} \arg(f + g). \quad (13.6)$$

Воспользуемся тем, что приращение аргумента произведения двух непрерывных функций вдоль пути равно сумме приращений их аргументов (это свойство вытекает непосредственно из

определения приращения аргумента). Тогда

$$\begin{aligned}\Delta_{\partial D} \arg(f + g) &= \Delta_{\partial D} \arg \left[ f \left( 1 + \frac{g}{f} \right) \right] \\ &= \Delta_{\partial D} \arg f + \Delta_{\partial D} \arg \left( 1 + \frac{g}{f} \right).\end{aligned}$$

Покажем, что

$$\Delta_{\partial D} \arg \left( 1 + \frac{g}{f} \right) = 0. \quad (13.7)$$

Неформально, это равенство вытекает из того, что образ  $\partial D$  при отображении  $w(z) = 1 + g(z)/f(z)$  целиком лежит в круге  $\{w : |w - 1| < 1\}$  (поскольку  $|g(z)/f(z)| < 1$  при  $z \in \partial D$ ) и потому точка  $w(z)$  не может сделать ни одного полного оборота вокруг начала координат при обходе  $z$  вдоль  $\partial D$ .

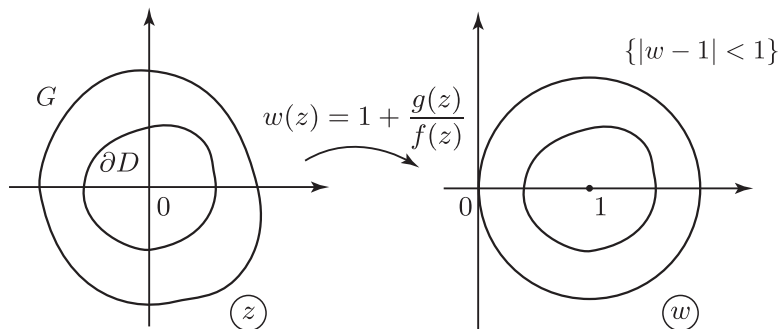


Рис. 57

Формальное доказательство можно провести так. По формуле (13.4)

$$\Delta_{\partial D} \arg w(z) = \frac{1}{i} \int_{f(\partial D)} \frac{dw}{w}. \quad (13.8)$$

Функция  $1/w$  имеет первообразную в круге  $\{|w - 1| < 1\}$  (ее можно указать явно:  $F(w) = \ln |w| + i \arg w$ , где  $-\pi/2 < \arg w < \pi/2$ , — или же просто сослаться на предложение 4.2 из п. 4.4). Поэтому правая часть формулы (13.8) равна нулю по формуле Ньютона–Лейбница.

С учетом равенства (13.7) получаем из формулы (13.6), снова пользуясь принципом аргумента:

$$N(f + g, D) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial D} \arg f = N(f, D),$$

что и требовалось доказать. ■

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Теорема Руше вытекает из следующего чисто топологического утверждения, которое доказывается так же, как и выше. Пусть  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{C}$  — замкнутый непрерывный путь и  $f, g: \gamma(I) \rightarrow \mathbb{C}$  — две непрерывные функции на образе  $\gamma(I)$ , удовлетворяющие оценке

$$|f(z)| > |g(z)| \quad \text{для всех } z \in \gamma(I).$$

Тогда приращение аргумента суммы  $f + g$  вдоль  $\gamma$  совпадает с приращением аргумента  $f$  вдоль  $\gamma$ , т.е.

$$\Delta_{\gamma} \arg(f + g) = \Delta_{\gamma} \arg f.$$

Приведем ряд примеров применения принципа аргумента и теоремы Руше. Первый из них (основную теорему алгебры) мы разберем полностью, а другие оставим в виде задач.

**УТВЕРЖДЕНИЕ** (основная теорема алгебры). *Любой многочлен  $P_n$  степени  $n$  с комплексными коэффициентами имеет ровно  $n$  комплексных корней (с учетом кратности).*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Так как  $P_n$  имеет полюс порядка  $n$  на бесконечности, то все корни  $P_n$  лежат внутри некоторого круга  $\{|z| < R\}$ . Запишем  $P_n$  в виде

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n =: f + g,$$

где

$$f(z) = a_0 z^n, \quad g(z) = a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \quad \text{и} \quad a_0 \neq 0.$$

Увеличивая, если необходимо,  $R$ , можно считать, что

$$|f(z)| > |g(z)| \quad \text{при} \quad |z| = R.$$

Применяя теорему Руше к функциям  $f, g$  в круге  $\{|z| < R\}$ , получим, что  $P_n = f + g$  имеет в этом круге столько же нулей, сколько и  $f(z) = a_0 z^n$ , т.е. ровно  $n$ . ■



**Задачи.** (1) Покажите, что для всякого  $\varepsilon > 0$  каждая из функций  $\operatorname{tg} z$ ,  $\operatorname{ctg} z$ ,  $1/\sin z$ ,  $1/\cos z$  ограничена вне  $\varepsilon$ -окрестности множества своих полюсов.

**Указание:** каждая из этих функций периодична и имеет конечные пределы при  $|\operatorname{Im} z| \rightarrow \infty$ .

(2) Докажите, что все решения  $z \in \mathbb{C}$  уравнения  $\operatorname{tg} z = z$  вещественны.

**Указание:** пользуясь теоремой Руше и первой задачей, найдите число нулей функции  $\operatorname{tg} z - z$  в круге  $\{|z| < \pi n\}$  при большом  $n \in \mathbb{N}$  и сравните его с числом вещественных нулей в этом круге.

(3) В условиях теоремы из п. 13.1 покажите, что для всякой функции  $g \in \mathcal{O}(\overline{D})$  справедливо равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} g(z) dz = \sum_{s=1}^k g(a_s) - \sum_{t=1}^l g(b_t),$$

где  $a_1, \dots, a_k$  — нули, а  $b_1, \dots, b_l$  — полюсы функции  $f$  в области  $D$ . Заметим, что сама теорема из п. 14.1 получается отсюда при  $g(z) \equiv 1$ .

(4) Обозначим через  $\lambda_n$  единственное решение уравнения  $\operatorname{tg} x = x$  на интервале  $(n - \frac{1}{2})\pi < x < (n + \frac{1}{2})\pi$ , где  $n = 1, 2, \dots$ . Вычислите сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2}.$$

**Указание:** примените задачу (3) к функциям  $f(z) = \sin z - z \cos z$  и  $g(z) = 1/z^2$  в области  $D = \{\varepsilon < |z| < \pi n\}$ , а затем устремите  $n \rightarrow \infty$  и  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Тогда интеграл по окружности  $\{|z| = \pi n\}$  будет стремиться к нулю в силу задачи (1).

(5) Применяя рассуждение из предыдущей задачи к функциям

$$f(z) = \sin(\pi z) \quad \text{и} \quad g(z) = \frac{1}{z^2 + a^2},$$

найдите сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$$

для всех  $a > 0$ .

Приведем еще две задачи, иллюстрирующие применение теоремы Руше в различных ситуациях. (Впоследствии они будут также решены другими методами, см. пп. 15.1 и 24.2.)

**Задачи.** (6) Пусть

$$P_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

для некоторых  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ . Докажите, что

$$\max_{|z| \leq 1} |P_n(z)| \geq 1,$$

причем равенство достигается только при  $P_n(z) = z^n$ .

(7) Докажите, что уравнение  $\sin z = z$  имеет в  $\mathbb{C}$  бесконечно много решений.

## Лекция 14. Принцип сохранения области и обращение голоморфных функций

### 14.1. Принцип сохранения области.

**ТЕОРЕМА.** *Если функция  $f$  голоморфна в области  $D \subset \mathbb{C}$  и не равна тождественно константе, то и образ  $D^* := f(D)$  является областью.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Покажем, что множество  $D^*$  (линейно) связно и открыто.

**Связность  $D^*$**  является чисто топологическим фактом и устанавливается следующим образом. Пусть  $w_1, w_2$  — произвольные точки  $D^*$  и  $z_1, z_2 \in D$  — их прообразы при отображении  $f$ , т.е.  $f(z_1) = w_1$ ,  $f(z_2) = w_2$ . В силу связности  $D$  существует непрерывный путь  $\gamma: I \rightarrow D$  с началом в точке  $z_1$  и концом в точке  $z_2$ . Тогда  $f \circ \gamma$  есть непрерывный путь в  $D^*$ , соединяющий  $w_1$  с  $w_2$ .

**Открытость  $D^*$**  является уже фактом комплексного анализа и, вообще говоря, не имеет места для произвольных гладких отображений комплексной плоскости. Пусть  $w_0$  — произвольная точка из  $D^*$ . Укажем круг  $U^*$  с центром в этой точке, целиком лежащий в  $D^*$ .

Пусть  $z_0 \in D$  — один из прообразов  $w_0$  при отображении  $f$ . Выберем  $r > 0$  так, чтобы круг

$$U := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

компактно принадлежал  $D$  и замкнутый круг  $\bar{U}$  не содержал других прообразов  $w_0$ , кроме  $z_0$  (это возможно, так как в силу условия  $f \not\equiv \text{const}$  нули голоморфной функции  $f(z) - w_0$  изолированы). Положим

$$r^* := \min_{z \in \partial U} |f(z) - w_0|.$$

Заметим, что  $r^* > 0$ , поскольку  $f(z) \neq w_0$  на  $\partial U$ . Покажем, что круг

$$U^* := \{w \in \mathbb{C} : |w - w_0| < r^*\}$$

содержится в  $D^*$ , т.е. каждая точка  $w \in U^*$  имеет прообраз из  $U$ . Для этого запишем функцию  $f(z) - w$ , рассматриваемую как функция от  $z$ , в виде

$$f(z) - w = (f(z) - w_0) + (w_0 - w).$$

Тогда при  $z \in \partial U$  будем иметь

$$|f(z) - w_0| \geq r^* > |w_0 - w|,$$

так что к функциям  $f(z) - w_0$  и  $w_0 - w$  в круге  $U$  применима теорема Руше. Согласно этой теореме  $f(z) - w$  имеет в  $U$  столько же нулей, сколько и  $f(z) - w_0$ , т.е. по крайней мере один. Следовательно,  $U^* \subset f(U)$  и, тем более,  $U^* \subset D^*$ . ■

**Задачи.** (1) Пусть  $U = \{|z| < 1\}$  — единичный круг. Покажите, что для любого (в том числе пустого) конечного множества  $X \subset \mathbb{C}$  существует функция  $f \in \mathcal{O}(U)$  такая, что  $f(U) = \mathbb{C} \setminus X$ . В частности, образ односвязной области при непостоянном голоморфном отображении не обязан быть односвязной областью.

(2) Пусть  $U$  — единичный круг,  $f \in \mathcal{O}(\bar{U})$  и  $|f(z)| \equiv \text{const}$  на  $\partial U$ . Покажите, что  $f$  либо постоянна в  $U$ , либо имеет там нули.

## 14.2. Локальное обращение голоморфных функций.

Задача о локальном обращении голоморфных функций формулируется следующим образом:

*пусть функция  $w = f(z)$  голоморфна в окрестности точки  $z_0$ . Требуется найти голоморфную в окрестности точки  $w_0 = f(z_0)$  функцию  $z = g(w)$  такую, что  $g(w_0) = z_0$  и*

$$f \circ g(w) \equiv w$$

*в окрестности  $w_0$ .*

**Случай I:**  $z_0$  не является критической точкой  $f$ , т.е.  $f'(z_0) \neq 0$ .

Так же как в доказательстве принципа сохранения области, выберем круг  $U = \{z : |z - z_0| < r\}$  так, что  $f \in \mathcal{O}(\bar{U})$  и  $\bar{U}$  не содержит других прообразов точки  $w_0$ , кроме  $z_0$ . Положим

$$r^* := \min_{z \in \partial U} |f(z) - w_0|.$$

Тогда круг  $U^* = \{w : |w - w_0| < r^*\}$  содержится в  $f(U)$  и каждая точка  $w \in U^*$  имеет в  $U$  столько же прообразов, сколько и  $w_0$ , т.е. ровно одну (с учетом кратности). С другой стороны, в силу непрерывности  $f$  существует  $r_1 \in (0, r)$  такое, что образ при  $f$  круга  $U_1 = \{z : |z - z_0| < r_1\}$  содержится в  $U^*$ .

Таким образом, функция  $f$  однолистка в круге  $U_1$  и в окрестности  $f(U_1)$  точки  $w_0$  определена обратная функция  $z = g(w)$  такая, что  $z_0 = g(w_0)$  и

$$f \circ g(w) \equiv w \quad \text{для всех } w \in f(U_1).$$

Покажем, что функция  $z = g(w)$  голоморфна в точке  $w_0$ , т.е.  $\mathbb{C}$ -дифференцируема в ее окрестности. Возьмем произвольную точку  $w_1 \in f(U_1)$  и положим  $z_1 = g(w_1)$ . Покажем, что функция  $g(w)$   $\mathbb{C}$ -дифференцируема в точке  $w_1$ , и найдем ее комплексную производную в этой точке. Заметим вначале, что  $g$  непрерывна на  $f(U_1)$ , поскольку из сходимости  $w \rightarrow w_1$  следует, что  $z := g(w) \rightarrow z_1$  (в противном случае последовательность значений  $z = g(w)$  имела бы в  $\bar{U}_1 \subset U$  предельную точку, отличную от  $z_1$ , т.е.  $w_1$  имела бы в  $U$  два различных прообраза при отображении  $f$ ). Далее, отношение

$$\frac{g(w) - g(w_1)}{w - w_1} = \frac{z - z_1}{f(z) - f(z_1)}$$

имеет при  $w \rightarrow w_1$  предел, равный  $\frac{1}{f'(z_1)}$ . (Заметим, что  $f'(z_1) \neq 0$ , поскольку

$$f'(z)|_{z=z_1} = \left. \frac{d}{dz}(f(z) - w_1) \right|_{z=z_1} \neq 0,$$

так как  $z = z_1$  — однократный нуль функции  $f(z) - w_1$ .) Отсюда следует, что функция  $g$   $\mathbb{C}$ -дифференцируема в точке  $w_1$  и  $g'(w_1) = \frac{1}{f'(z_1)}$ , что и требовалось доказать.

Тем самым, задача о локальном обращении голоморфной функции в окрестности некритической точки решена. Заметим, что в процессе доказательства нами была установлена также теорема об обратной функции для голоморфных функций.

Случай II:  $z_0$  — критическая точка  $f$  порядка  $p$ , т.е.  $f'(z_0) = \dots = f^{(p-1)}(z_0) = 0$ , но  $f^{(p)}(z_0) \neq 0$  при некотором целом  $p \geq 2$ .

Как и в случае I, выберем круг  $U = \{z : |z - z_0| < r\}$  так, что  $f \in \mathcal{O}(\bar{U})$  и  $\bar{U}$  не содержит других прообразов точки  $w_0$  и нулей  $f'(z)$ , кроме  $z_0$ . Тогда функция  $f$  будет принимать в круге  $U$  каждое значение  $w \in U^* = \{w : |w - w_0| < r^*\}$  столько же раз, сколько и  $w_0$ . По условию значение  $w_0$  принимается с кратностью  $p$ , так как  $f(z) - w_0$  имеет в точке  $z_0$  нуль порядка  $p$ . Следовательно, любое значение  $w \in U^* \setminus \{w_0\}$  принимается функцией  $f$  в круге  $U$  ровно  $p$  раз, причем в  $p$  различных точках (поскольку  $f'(z) \neq 0$  при  $z \in U \setminus \{z_0\}$ ). Заменяя  $U$  на меньший круг  $U_1$  такой, что  $f(U_1) \subset U^*$ , мы получаем, что отображение  $f: U_1 \rightarrow f(U_1)$  является  $p$ -листным накрытием, разветвленным в центре  $z_0$  круга  $U_1$ .

Покажем, что в рассматриваемом случае естественное “локальное обращение”  $z = f^{-1}(w)$  функции  $w = f(z)$  является аналитической функцией в области  $f(U_1) \setminus \{w_0\}$ . Эта аналитическая функция задается продолжением вдоль всевозможных путей в  $f(U_1) \setminus \{w_0\}$  начального элемента вида  $(V, g)$ , где  $V$  — круг в  $f(U_1) \setminus \{w_0\}$  с центром в некоторой точке  $w_1 \neq w_0$ , а  $g$  — голоморфная в  $V$  функция, удовлетворяющая соотношению

$$f \circ g(w) \equiv w \quad \text{на } V.$$

Перейдем к построению указанной аналитической функции. При  $z \in U_1$

$$f(z) - w_0 = (z - z_0)^p \varphi(z),$$

где функция  $\varphi$  голоморфна и не имеет нулей в  $U_1$ . Запишем это равенство в виде

$$w - w_0 = (z - z_0)^p \varphi(z)$$

и введем функцию

$$\zeta(z) = (w - w_0)^{1/p} := (z - z_0) \psi(z),$$

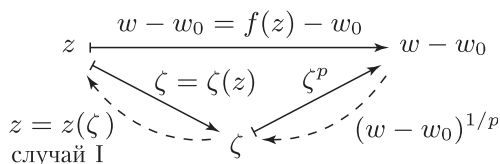
где  $\psi(z)$  — произвольная голоморфная ветвь аналитической функции  $\varphi(z)^{1/p}$  в круге  $U_1$  (существование ветви доказывается так же, как в предложении из п. 11.4). Функция  $\zeta(z)$  голоморфна в  $U_1$  и

$$\zeta'(z_0) = \psi(z_0) \neq 0.$$

Поэтому согласно случаю I у этой функции существует локальная обратная функция  $z = z(\zeta)$ , голоморфная в окрестности точки  $\zeta = 0$ . Следовательно, локальное обращение функции  $w = f(z)$  можно задать композицией функций  $z = z(\zeta)$  и  $\zeta = (w - w_0)^{1/p}$ :

$$z = g(w) := z((w - w_0)^{1/p}).$$

Таким образом, локальное обращение функции  $w = f(z)$  строится в рассматриваемом случае по следующей схеме:



Заметим, что если локальное обращение  $z = z(\zeta)$  голоморфной функции  $\zeta = \zeta(z)$  в окрестности точки  $\zeta = 0$  задается рядом Тейлора

$$z = z(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n,$$

то локальное обращение  $z = g(w)$  функции  $w = f(z)$  в окрестности точки  $z_0$  будет задаваться рядом Пуансо (см. замечание 11.2 из п. 11.8) следующего вида:

$$z = g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (w - w_0)^{n/p}.$$

Подводя итог, мы видим, что в рассматриваемом случае локальное обращение  $z = g(w)$  голоморфной функции  $w = f(z)$  вблизи точки  $z_0$  является аналитической функцией в проколотой окрестности точки  $w_0$ , причем  $w_0$  есть точка ветвления порядка  $p$  для этой аналитической функции.

**ТЕОРЕМА.** Условие  $f'(z_0) \neq 0$  необходимо и достаточно для локальной однолиственности голоморфной функции  $f$  в окрестности точки  $z_0$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Если  $f'(z_0) \neq 0$ , то мы имеем случай I, в котором функция  $f$  локально обратима. Если же  $f'(z_0) = 0$ , то либо  $f \equiv \text{const}$ , либо мы имеем случай II. В обеих ситуациях функция  $f$  не однолистна в окрестности  $z_0$ . ■

**ЗАМЕЧАНИЕ 14.1.** Достаточность является фактом вещественного анализа: любое непрерывно дифференцируемое отображение  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  с ненулевым якобианом локально обратимо по теореме об обратной функции. Напротив, необходимость — это чисто комплексный факт, не имеющий места для неголоморфных функций: например, якобиан  $\mathbb{C}$ -значной функции  $f(x + iy) = x^3 + iy$  равен нулю в начале координат, но функция  $f$  все-таки однолистна.

**ЗАМЕЧАНИЕ 14.2.** Выполнения неравенства  $f'(z) \neq 0$  для всех  $z \in D$  достаточно для локальной, но не глобальной однолиственности функции  $f \in \mathcal{O}(D)$ . Например, целая функция  $f(z) = e^z$  имеет ненулевую производную всюду в  $\mathbb{C}$ , но не однолистна ( $f(z) = f(z + 2\pi i n)$  для любого  $z \in \mathbb{C}$  и любого  $n \in \mathbb{Z}$ ).

**ЗАМЕЧАНИЕ 14.3.** Отметим еще такое следствие из доказанной теоремы: *всякое голоморфное взаимно однозначное отображение  $f: D_1 \rightarrow D_2$  области  $D_1$  на область  $D_2$  есть биголоморфизм* (т.е. обратное отображение автоматически голоморфно). Напомним, что определение биголоморфизма между областями было дано в п. 12.5 и там же было указано, что биголоморфизм  $D_1$  на  $D_2$  — это то же самое, что взаимно однозначное и конформное в каждой точке отображение  $D_1$  на  $D_2$ .

### 14.3. Теорема Гурвица.

**ТЕОРЕМА ГУРВИЦА.** *Пусть последовательность функций  $f_n$ , голоморфных в области  $D$ , сходится в топологии  $\mathcal{O}(D)$  (т.е. равномерно на компактах в  $D$ ) к функции  $f \neq \text{const}$ . Если точка  $z_0 \in D$  является нулем функции  $f$ , т.е.  $f(z_0) = 0$ , то в любом круге  $\{|z - z_0| < r\} \subset D$  все функции  $f_n$ , начиная с некоторой, также имеют нуль.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** По теореме Вейерштрасса предельная функция  $f$  голоморфна в  $D$ . Поскольку достаточно доказать теорему лишь для достаточно малых кругов с центром  $z_0$ , мы можем считать, что круг  $U := \{|z - z_0| < r\}$  компактно принадлежит  $D$  и в  $\bar{U}$  нет других нулей  $f$ , кроме  $z_0$ . Положим

$$r^* := \min_{z \in \partial U} |f(z)|.$$

Из равномерной сходимости последовательности  $\{f_n\}$  на  $\partial U$  вытекает, что найдется  $N$  такое, что для всех  $n \geq N$  выполняется оценка

$$|f_n(z) - f(z)| < r^* \quad \text{для всех } z \in \partial U.$$

Тогда по теореме Руше функция

$$f_n(z) = f(z) + [f_n(z) - f(z)]$$

имеет в  $U$  столько же нулей, сколько и  $f$ , т.е. по крайней мере один. ■

**СЛЕДСТВИЕ.** *Если последовательность функций  $f_n$ , голоморфных и однолистных в области  $D$ , сходится в топологии  $\mathcal{O}(D)$  к функции  $f \neq \text{const}$ , то  $f$  однолистка в  $D$ .*



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, напротив, что  $f$  не однолистка в  $D$ , т.е. существуют точки  $z_1, z_2 \in D$  такие, что

$$f(z_1) = f(z_2), \quad \text{но} \quad z_1 \neq z_2.$$

Рассмотрим последовательность функций

$$g_n(z) := f_n(z) - f_n(z_2),$$

которая сходится в топологии  $\mathcal{O}(D)$  к функции  $g(z) := f(z) - f(z_2)$ . Предельная функция  $g \not\equiv \text{const}$  и имеет нуль в точке  $z_1$ . Обозначим через  $U \subset D$  произвольный круг с центром  $z_1$ , не содержащий  $z_2$ . Тогда по теореме Гурвица все функции  $g_n$ , начиная с некоторой, имеют нуль в  $U$ , что противоречит однолистности функций  $f_n$ . ■

Задача. Постройте пример последовательности  $f_n \in \mathcal{O}(D)$  неоднолистных в  $D$  функций, которая сходится в топологии  $\mathcal{O}(D)$  к однолистной функции  $f \in \mathcal{O}(D)$ .

## Лекция 15. Принцип максимума модуля и его следствия

### 15.1. Принцип максимума модуля.

**ТЕОРЕМА 15.1.** *Если функция  $f$  голоморфна в области  $D$  и ее модуль  $|f|$  имеет в точке  $z_0 \in D$  локальный максимум, то  $f \equiv \text{const}$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Допустим, напротив, что  $f \not\equiv \text{const}$ , и рассмотрим круг  $U = \{z : |z - z_0| < r\} \Subset D$ , в котором  $|f|$  достигает максимума, т.е.

$$|f(z_0)| \geq |f(z)| \quad \text{при } |z - z_0| < r.$$

Тогда по принципу сохранения области множество  $f(U)$  содержит целый круг  $U^*$  с центром в точке  $w_0 := f(z_0)$ . Выберем в этом круге произвольную точку  $w_1$  с  $|w_1| > |w_0|$ . Тогда ее прообраз  $z_1 \in U$  удовлетворяет неравенству

$$|f(z_1)| > |f(z_0)|,$$

откуда следует, что  $|f|$  не может иметь локального максимума в точке  $z_0$ . Противоречие. ■

**ТЕОРЕМА 15.2.** *Функция  $f$ , голоморфная в ограниченной области  $D$  и непрерывная в ее замыкании  $\overline{D}$ , достигает максимума модуля на границе  $\partial D$  области  $D$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Если  $f \equiv \text{const}$ , то утверждение очевидно. Если же  $f \not\equiv \text{const}$ , то максимум  $|f(z)|$  по всем  $z \in \overline{D}$ , во-первых, достигается (поскольку функция  $|f(z)|$  непрерывна на компакте  $\overline{D}$ ), а во-вторых, не может достигаться во внутренней точке  $\overline{D}$  по теореме 15.1. Следовательно, он достигается на  $\partial D$ . ■

**ЗАМЕЧАНИЕ 15.1.** Теорема 15.2 становится неверной, если опустить условие ограниченности области  $D$ . Например, если  $D = \{\text{Im } z > 0\}$  и  $f(z) = \sin z$ , то  $|f(z)| \leq 1$  при  $z \in \partial D = \mathbb{R}$ , но  $|f(iy)| \rightarrow \infty$  при  $y \rightarrow +\infty$ . Тем более интересна следующая задача.

**Задача.** (1) Пусть  $D = \{\text{Im } z > 0\}$  и функция  $f \in \mathcal{O}(D)$  ограничена в  $D$  (т.е.  $|f(z)| \leq M$  при всех  $z \in D$ ) и непрерывна в  $\overline{D}$ . Покажите, что если

$$|f(z)| \leq 1 \quad \text{при } z \in \partial D = \mathbb{R},$$

то  $|f(z)| \leq 1$  и при всех  $z \in \overline{D}$ .

Указание: выберите  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$ , примените теорему 15.2 к функции

$$f_\varepsilon(z) = f(z)(z - z_0)^{-\varepsilon}$$

на области  $D_R = D \cap \{|z - z_0| < R\}$  для достаточно большого  $R$  и устремите  $\varepsilon \rightarrow 0+$ . Можно избежать многозначных функций, если использовать функции  $f_n(z) = f(z)^n / (z - z_0)$  вместо  $f_\varepsilon(z)$  и устремить затем  $n \rightarrow \infty$ . Это тот же прием, что и в задаче (2) из п. 5.3, дающей другое доказательство принципа максимума.

**ЗАМЕЧАНИЕ 15.2.** Теоремы 15.1 и 15.2 неверны для минимума модуля голоморфной функции. Пример: функция  $f(z) = z$  в единичном круге  $\{|z| < 1\}$ . Однако если потребовать дополнительно от функции  $f \in \mathcal{O}(D) \cap C(\overline{D})$ , чтобы она не имела нулей в ограниченной области  $D$ , то  $|f|$  будет достигать минимума на  $\partial D$ . Для доказательства достаточно применить теорему 15.2 к функции  $g = 1/f$ .

**Задачи.** (2) Пусть функции  $f_1, \dots, f_n$  голоморфны в ограниченной области  $D$  и непрерывны в  $\overline{D}$ . Докажите, что максимум функции  $|f_1| + \dots + |f_n|$  в  $\overline{D}$  достигается на границе  $\partial D$ .

(3) Докажите, что если  $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}(D)$  и  $|f_1| + \dots + |f_n| \equiv \text{const}$  в  $D$ , то все функции  $f_1, \dots, f_n$  постоянны.

Указание: если в окрестности некоторой точки из  $D$  можно записать  $f_j(z) = g_j^2(z)$  для некоторых голоморфных функций  $g_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ), то, складывая тождества типа тех, которые указаны в задачах (1), (2) из п. 7.3 для разложений  $g_j$  в ряды Тейлора, получим требуемый результат.

(4) Решите задачу (6) из п. 13.3, применив принцип максимума к функции  $f(\zeta) = \zeta^n P(1/\zeta)$  на круге  $|\zeta| < 1$ .

(5) Покажите, что не существует функции  $f(z)$ , голоморфной в окрестности точки  $z = 0$  и удовлетворяющей там уравнению

$$|f(z)|^2 = 1 + |z|^2.$$

(6) Покажите, что в окрестности любой другой точки  $z_0 \in \mathbb{C}$  также не существует голоморфных функций  $f(z)$  с

$$|f(z)|^2 = 1 + |z|^2.$$

Указание: далеко не всякая положительная функция  $\varphi(z)$  без локальных максимумов и минимумов есть модуль некоторой голоморфной функции. Для этого необходимо, чтобы функция  $\log \varphi(z)$  была вещественной частью голоморфной функции, т.е. являлась гармонической функцией, см. ниже п. 24.1.

### 15.2. Лемма Шварца.

ЛЕММА ШВАРЦА. Пусть функция  $f$  голоморфна в единичном круге  $U = \{|z| < 1\}$ , причем  $f(0) = 0$  и

$$|f(z)| \leq 1 \quad \text{для всех } z \in U.$$

Тогда для всех  $z \in U$  выполняется неравенство

$$|f(z)| \leq |z|,$$

причем если в некоторой точке  $z_0 \in U \setminus \{0\}$  достигается равенство, то  $f(z) = e^{i\theta} z$  для некоторой константы  $\theta \in \mathbb{R}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$g(z) := \frac{f(z)}{z} \quad \text{для } z \in U \setminus \{0\}$$

и  $g(0) := f'(0)$ . Функция  $g$  голоморфна в  $U$ . Действительно, сомнение вызывает только точка  $z = 0$ , но по условию  $f(0) = 0$ , так что ряд Тейлора функции  $f(z)$  в начале координат имеет вид

$$f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \dots,$$

и, следовательно, функция  $g$  в окрестности начала координат задается рядом

$$g(z) = c_1 + c_2 z + \dots$$

с тем же радиусом сходимости, что и для  $f$ .

Если бы было дополнительно известно, что  $f$  непрерывна в  $\bar{U}$ , то из теоремы 15.2 немедленно вытекало бы, что

$$|g(z)| \leq \max_{|\zeta|=1} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta|} = \max_{|\zeta|=1} |f(\zeta)| \leq 1 \quad \text{при всех } z \in U,$$

т.е. утверждение леммы. Без условия непрерывности  $f$  в  $\bar{U}$  можно действовать почти таким же образом. А именно любая заданная точка  $z \in U$  принадлежит всем кругам вида

$$U_r := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < r\}$$

с  $r_0(z) \leq r < 1$  (см. рис. 58). Применим теорему 15.2 к функции  $g$  в круге  $U_r$  при  $r < 1$ . Получим, что

$$|g(z)| \leq \max_{|\zeta|=r} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta|} \leq \frac{1}{r}.$$

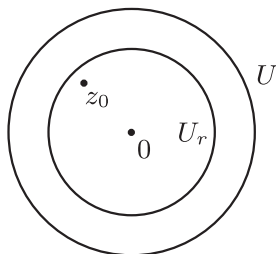


Рис. 58

Поскольку это неравенство выполняется при любом  $r$ ,  $r_0(z) \leq r < 1$ , можно перейти в нем к пределу при  $r \rightarrow 1 - 0$ , что дает  $|g(z)| \leq 1$ , т.е.  $|f(z)| \leq |z|$ .

Если  $|f(z_0)| = |z_0|$  (и тем самым  $|g(z_0)| = 1$ ) для некоторого  $z_0 \in U \setminus \{0\}$ , то функция  $|g|$  достигает локального максимума во внутренней точке  $z_0 \in U$ . Тогда по теореме 15.1  $g$  тождественно равна константе, по модулю равной 1. ■

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Хотя доказанное утверждение и называется леммой Шварца, оно было впервые сформулировано и доказано в указанном виде Каратеодори в 1912 г. Сам Шварц в 1869 г. доказал следующее утверждение: если  $f \in \mathcal{O}(|z| \leq 1)$  и

$$|f(z)| \leq \delta \quad \text{при } |z| \leq 1$$

(при этом не предполагается, что  $f(0) = 0$ ), то  $|f'(0)| \leq \delta$ .

**Задачи.** (1) Выведите результат Шварца из неравенств Коши.

(2) Докажите следующее обобщение леммы Шварца. Положим  $U = \{|z| < 1\}$  и

$$\rho(z_1, z_2) := \frac{|z_1 - z_2|}{|1 - z_1 \bar{z}_2|}.$$

Предположим, что функция  $f \in \mathcal{O}(U)$  удовлетворяет неравенству

$$|f(z)| \leq 1 \quad \text{при } z \in U.$$

Тогда для любых  $z_1, z_2 \in U$  справедлива оценка

$$\rho(f(z_1), f(z_2)) \leq \rho(z_1, z_2).$$

При этом если для каких-то  $z_1 \neq z_2$  в этой оценке достигается равенство, то функция  $f$  дробно-линейна. (Обычная лемма Шварца получается отсюда при  $z_2 = 0$ ,  $f(z_2) = 0$ .)

(3) Пусть  $U = \{|z| < 1\}$  и функция  $f \in \mathcal{O}(U)$  удовлетворяет оценке

$$|f(z)| \leq 1 \quad \text{при } z \in U.$$

Предположим, что уравнение  $f(z) = z$  имеет два различных решения  $z_1 \neq z_2$  в круге  $U$ . Покажите, что  $f(z) \equiv z$ .

## Лекция 16. Принцип компактности. Последовательности голоморфных функций

### 16.1. Принцип компактности.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Семейство функций  $\mathcal{F} = \{f\}$ , заданных в области  $D$ , называется *локально равномерно ограниченным*, если для любого компакта  $K \Subset D$  найдется константа  $A = A(K)$  такая, что

$$|f(z)| \leq A \quad \text{для всех } z \in K \quad \text{и всех } f \in \mathcal{F}.$$

Семейство  $\mathcal{F} = \{f\}$  называется *локально равномерно непрерывным*, если для любого компакта  $K \Subset D$  и любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta = \delta(K, \varepsilon)$  такое, что

$$|f(z') - f(z'')| < \varepsilon \quad \text{для всех } z', z'' \in K \quad \text{с } |z' - z''| < \delta \\ \text{и всех } f \in \mathcal{F}.$$

**ТЕОРЕМА 16.1.** *Если семейство функций  $\mathcal{F} = \{f\}$ , голоморфных в области  $D$ , локально равномерно ограничено, то оно и локально равномерно непрерывно.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $K \Subset D$ . Положим

$$\rho := \frac{1}{2} \operatorname{dist}(K, \partial D) = \frac{1}{2} \inf\{|z - \zeta| : z \in K, \zeta \in \partial D\}$$

(если  $D = \mathbb{C}$ , то за  $\rho$  можно взять любое положительное число). Рассмотрим  $\rho$ -раздутье компакта  $K$ , определяемое как

$$K_\rho := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{dist}(z, K) \leq \rho\}.$$

Очевидно,  $K_\rho$  есть снова компакт в  $D$  (см. рис. 59). Поэтому по условию теоремы найдется константа  $A = A(K_\rho)$  такая, что

$$|f(z)| \leq A \quad \text{для всех } z \in K_\rho \quad \text{и всех } f \in \mathcal{F}.$$

Пусть  $z_0$  — произвольная точка из  $K$ . Тогда круг

$$B_\rho(z_0) := \{|z - z_0| < \rho\}$$

компактно содержится в  $K_\rho$  и для всех  $z \in B_\rho(z_0)$  и всех  $f \in \mathcal{F}$  справедливо неравенство

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |f(z)| + |f(z_0)| \leq 2A.$$

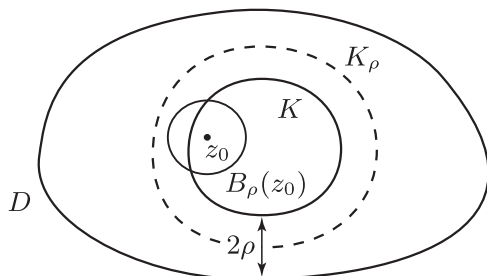


Рис. 59

Рассмотрим отображение круга  $B_\rho(z_0)$  на единичный круг  $U = \{|\zeta| < 1\}$ , задаваемое формулой

$$\zeta: z \mapsto \zeta(z) = \frac{z - z_0}{\rho},$$

и введем функцию

$$g(\zeta) := \frac{f(z_0 + \rho\zeta) - f(z_0)}{2A}.$$

Она голоморфна в круге  $U$  и удовлетворяет условию леммы Шварца:

$$g(0) = 0 \quad \text{и} \quad |g(\zeta)| \leq 1.$$

Поэтому по этой лемме

$$|g(\zeta)| \leq |\zeta| \quad \text{при всех} \quad \zeta \in U,$$

откуда

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \frac{2A}{\rho} |z - z_0| \quad \text{для всех} \quad z \in B_\rho(z_0). \quad (16.1)$$

Положим теперь для любых  $\varepsilon > 0$  и  $K \Subset D$

$$\delta = \delta(\varepsilon, K) = \min \left\{ \frac{\varepsilon \rho}{2A}, \rho \right\}.$$

Тогда ввиду произвольности  $z_0 \in K$  из неравенства (16.1) вытекает, что

$$\begin{aligned} |f(z') - f(z'')| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad f \in \mathcal{F} \\ \text{и всех} \quad z', z'' \in K \quad \text{с} \quad |z' - z''| < \delta, \end{aligned}$$

т.е. семейство  $\mathcal{F}$  локально равномерно непрерывно. ■



## 16.2. Теорема Монтеля.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Семейство функций  $\mathcal{F} = \{f\}$ , голоморфных в области  $D$ , называется *компактным в  $D$* , если из любой последовательности  $\{f_n\}$  функций этого семейства можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся в топологии  $\mathcal{O}(D)$ . Семейство  $\mathcal{F}$  называется *компактным в себе*, если предел любой такой последовательности снова принадлежит  $\mathcal{F}$ .

**ТЕОРЕМА МОНТЕЛЯ.** Если семейство функций  $\mathcal{F} = \{f\}$ , голоморфных в области  $D$ , локально равномерно ограничено, то оно компактно в  $D$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Шаг 1. Если последовательность  $\{f_n\}$  функций из семейства  $\mathcal{F}$  сходится в каждой точке всюду плотного подмножества  $E \subset D$ , то она сходится и в топологии  $\mathcal{O}(D)$ .

Действительно, пусть заданы  $\varepsilon > 0$  и компакт  $K \Subset D$ . Определим  $\rho$  как в доказательстве теоремы 16.1 и рассмотрим  $\rho$ -раздутие  $K_\rho$  компакта  $K$ . По теореме 16.1 последовательность  $\{f_n\}$  локально равномерно непрерывна в  $D$ . Поэтому найдется  $\delta = \delta(\frac{\varepsilon}{3}, K_\rho)$  такое, что

$$|f_n(z') - f_n(z'')| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{для всех } z', z'' \in K_\rho \text{ с } |z' - z''| < \delta$$

и всех  $n \in \mathbb{N}$ .

Рассмотрим покрытие компакта  $K$  кругами радиуса

$$r = \min \left\{ \frac{\delta}{2}, \rho \right\}$$

с центрами в точках из  $K$  и выберем из него конечное подпокрытие

$$\{U_j : j = 1, \dots, M\}.$$

Все круги  $U_j$  содержатся в  $K_\rho$ , и при каждом  $j$  справедливо неравенство

$$|f_n(z') - f_n(z'')| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{для всех } z', z'' \in U_j \quad \text{и всех } n \in \mathbb{N}. \tag{16.2}$$

Выберем в каждом круге  $U_j$  ( $j = 1, \dots, M$ ) точку  $z_j \in E$ , пользуясь всюду плотностью множества  $E$  в  $D$ . Так как последовательность  $f_n$  сходится в каждой точке  $E$ , то найдется  $N$  такое, что

$$|f_n(z_j) - f_m(z_j)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{при всех } n, m \geq N \quad \text{и всех } j = 1, \dots, M. \quad (16.3)$$

Пусть теперь  $z$  — произвольная точка компакта  $K$ . Тогда найдется круг  $U_j$ , содержащий эту точку, поэтому при всех  $n, m \geq N$  в силу неравенств (16.2), (16.3) будет выполняться оценка

$$\begin{aligned} |f_n(z) - f_m(z)| &\leq |f_n(z) - f_n(z_j)| + |f_n(z_j) - f_m(z_j)| \\ &\quad + |f_m(z_j) - f_m(z)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, по критерию Коши последовательность  $\{f_n\}$  сходится равномерно на  $K$ , а значит, ввиду произвольности  $K$ , и в топологии  $\mathcal{O}(D)$ .

*Шаг 2. Найдется счетное всюду плотное подмножество  $E \subset D$  такое, что из любой локально равномерно ограниченной последовательности  $\{f_n\}$  функций из семейства  $\mathcal{F}$  можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся в каждой точке  $E$ .*

Действительно, выберем в качестве  $E$  множество

$$E := \{z = x + iy \in D : x, y \text{ рациональны}\}.$$

Это счетное всюду плотное подмножество в  $D$ , точки которого можно занумеровать:

$$E = \{z_1, z_2, \dots, z_k, \dots\}.$$

Выбор подпоследовательности, сходящейся в каждой точке  $z_j \in E$ , производится с помощью канторовского диагонального процесса.

Сначала ввиду ограниченности числовой последовательности  $\{f_n(z_1)\}$  выберем подпоследовательность функций

$$f_{k1} := f_{n_k}, \quad \text{которая сходится в точке } z_1.$$

Затем, пользуясь ограниченностью числовой последовательности  $\{f_{n_1}(z_2)\}$ , выберем подпоследовательность

$$f_{k2} := f_{n_{k1}}, \quad \text{которая сходится в точке } z_2$$

(а также, по построению, в точке  $z_1$ ). Продолжим процесс построения функций  $f_{kl}$ ,  $l = 1, 2, \dots$ , по индукции и выберем диагональную подпоследовательность

$$f_{11}, f_{22}, \dots, f_{kk}, \dots$$

Она сходится в точке  $z_k$  для любого фиксированного  $k \in \mathbb{N}$ , поскольку все ее члены, начиная с  $k$ -го, выбраны из последовательности  $\{f_{nk}\}$ , сходящейся в точках  $z_1, \dots, z_k$ . ■

Задачи. (1) Пусть функция  $f(z)$  голоморфна и ограничена в полосе  $\{a < \operatorname{Im} z < b\}$ , причем для некоторого  $y_0 \in (a, b)$  существует предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x + iy_0) =: A.$$

Докажите, что тогда для всех  $y \in (a, b)$  существует предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x + iy), \quad \text{равный } A.$$

Указание: теорема Монтеля применима к любой последовательности  $f_n(z) = f(z + x_n)$  с  $x_n \rightarrow +\infty$ .

(2) Покажите на примере функции  $f(z) = \exp(e^{-z})$ , что утверждение предыдущей задачи теряет силу для неограниченных функций  $f$ .

### 16.3. Непрерывные функционалы на семействах голоморфных функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть  $\mathcal{F} = \{f\}$  — семейство функций, голоморфных в области  $D$ . Функционал

$$J: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f \mapsto J(f) \in \mathbb{C},$$

называется *непрерывным на семействе  $\mathcal{F}$* , если для любой последовательности  $\{f_n\}$  функций из  $\mathcal{F}$ , сходящейся в топологии  $\mathcal{O}(D)$  к функции  $f \in \mathcal{F}$ , справедливо соотношение

$$J(f_n) \rightarrow J(f).$$

ПРИМЕР. Пусть  $\mathcal{F} = \mathcal{O}(D)$ . Фиксируем точку  $a \in D$  и натуральное число  $p \in \mathbb{N}$  и рассмотрим функционал

$$J(f) = f^{(p)}(a),$$

сопоставляющий каждой функции  $f \in \mathcal{F}$  ее  $p$ -ю производную в точке  $a$ . Этот функционал непрерывен на  $\mathcal{O}(D)$ , так как для

всякой последовательности  $f_n \in \mathcal{O}(D)$ , сходящейся к  $f$  в топологии  $\mathcal{O}(D)$ ,

$$f_n^{(p)}(a) \rightarrow f^{(p)}(a)$$

по теореме Вейерштрасса (п. 6.14).

**ЛЕММА.** *Если функционал  $J$  непрерывен на компактном в себе семействе функций  $\mathcal{F}$ , голоморфных в области  $D$ , то  $|J|$  ограничен на  $\mathcal{F}$  и достигает своей верхней грани, т.е. найдется функция  $f_0 \in \mathcal{F}$  такая, что*

$$|J(f)| \leq |J(f_0)| \quad \text{для всех } f \in \mathcal{F}.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Положим

$$A := \sup_{f \in \mathcal{F}} |J(f)|$$

(при этом не предполагается, что  $A < \infty$ ). По определению верхней грани найдется последовательность  $f_n \in \mathcal{F}$  такая, что

$$|J(f_n)| \rightarrow A \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Так как семейство  $\mathcal{F}$  компактно в себе, то найдется подпоследовательность  $f_{n_k}$ , сходящаяся в топологии  $\mathcal{O}(D)$  к некоторой функции  $f_0 \in \mathcal{F}$ . Тогда в силу непрерывности  $J$

$$|J(f_{n_k})| \rightarrow |J(f_0)| \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Из двух полученных предельных соотношений следует, что  $A = |J(f_0)|$ . В частности,  $A < \infty$  и функционал  $|J|$  достигает своей верхней грани  $A$  на элементе  $f_0$ . ■

## Лекция 17. Теорема Римана

**17.1. Автоморфизмы основных областей.** Напомним, что конформное и взаимно однозначное отображение  $f: D_1 \rightarrow D_2$  области  $D_1$  на область  $D_2$  называется *биголоморфизмом*. Биголоморфизм  $\varphi: D \rightarrow D$  области  $D$  на себя называется ее *автоморфизмом*.

Отметим два простых общих факта, относящихся к этим понятиям.

1°. Совокупность  $\text{Aut } D$  всех автоморфизмов области  $D$  образует группу относительно композиции  $\varphi_1 \circ \varphi_2$ , в которой роль единицы играет тождественное отображение, а обратным элементом к автоморфизму  $\varphi$  является обратное отображение  $\varphi^{-1}$  (оно автоматически голоморфно, см. замечание 14.3 из п. 14.2).

2°. Если  $f_0: D_1 \rightarrow D_2$  — произвольный биголоморфизм, то любой биголоморфизм  $f: D_1 \rightarrow D_2$  записывается в виде

$$f = \varphi_2 \circ f_0 = f_0 \circ \varphi_1,$$

где  $\varphi_1 \in \text{Aut } D_1$ ,  $\varphi_2 \in \text{Aut } D_2$  — некоторые автоморфизмы.

Обратимся теперь к описанию групп автоморфизмов и начнем с областей, которые будут называться *основными*. К таковым мы будем относить расширенную комплексную плоскость  $\overline{\mathbb{C}}$ , комплексную плоскость  $\mathbb{C}$  и единичный круг  $U = \{|z| < 1\}$ . Группы дробно-линейных автоморфизмов этих областей были описаны в лекции 3. Следующая теорема показывает, что, на самом деле, все их автоморфизмы дробно-линейны, т.е. результаты лекции 3 дают описание групп всех автоморфизмов основных областей.

**ТЕОРЕМА 17.1.** *Любой автоморфизм основной области дробно-линейен.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО** разбивается на три случая.

**Случай I:** *расширенная комплексная плоскость  $\overline{\mathbb{C}}$ .* Пусть автоморфизм  $\varphi: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  переводит некоторую точку  $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$  в  $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$  (в частности,  $z_0$  может совпадать с  $\infty$ ). Тогда функция  $\varphi: \overline{\mathbb{C}} \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  голоморфна и имеет полюс в точке  $z_0$  (по определению из п. 7.5). Покажем, что это полюс 1-го порядка. Действительно, функция  $1/\varphi$  голоморфна в окрестности  $z_0$  и имеет в этой точке нуль. Порядок этого нуля должен быть равен 1, поскольку иначе (по критерию локальной однолиственности из п. 14.2) функция  $1/\varphi$ , а вместе с ней и  $\varphi$ , была бы неоднолистной в проколотой

окрестности  $z_0$ . Тем самым,  $1/\varphi$  имеет в точке  $z_0$  нуль 1-го порядка, а функция  $\varphi$  имеет  $z_0$  своим полюсом 1-го порядка. Согласно описанию функций, мероморфных на  $\overline{\mathbb{C}}$  (п. 7.11), это означает, что функция  $\varphi$  имеет вид

$$\varphi(z) = \begin{cases} \frac{a}{z - z_0} + b, & \text{если } z_0 \neq \infty, \\ az + b, & \text{если } z_0 = \infty, \end{cases}$$

для некоторых констант  $a, b \in \mathbb{C}$ .

*Случай II: комплексная плоскость  $\mathbb{C}$ .* Чтобы свести этот случай к предыдущему, достаточно показать, что любой автоморфизм  $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  можно продолжить до автоморфизма  $\overline{\varphi}: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ , полагая  $\overline{\varphi}(\infty) = \infty$ .

Проверим сначала непрерывность такого продолжения в точке  $\infty$ , т.е. покажем, что  $\varphi(z_n) \rightarrow \infty$  для всякой последовательности  $z_n \rightarrow \infty$ .

Действительно, если бы последовательность  $\{\varphi(z_n)\}$  не сходилась к  $\infty$ , то она содержала бы ограниченную подпоследовательность, из которой, в свою очередь, можно было бы выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке  $w_0 \in \mathbb{C}$ . Но в этом случае обратное отображение  $\varphi^{-1}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  было бы разрывно в точке  $w_0$ .

Итак, отображение  $\overline{\varphi}$  непрерывно в точке  $\infty$ . Отсюда вытекает, что функция  $1/\varphi$ , голоморфная в проколотой окрестности бесконечности, имеет в  $\infty$  устранимую особенность (для того чтобы убедиться в этом, достаточно применить критерий из п. 7.6 к функции  $\psi(\zeta) = 1/\varphi(1/\zeta)$  в точке  $\zeta = 0$ ). По определению голоморфности отображений расширенной комплексной плоскости (см. п. 2.6) это означает, что функция  $\overline{\varphi}$  голоморфна в точке  $\infty$ . Применяя те же рассуждения к обратному отображению  $\varphi^{-1}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , продолжим его также до голоморфного отображения  $\overline{\varphi^{-1}}: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ . Так как это отображение является обратным к  $\overline{\varphi}$  на  $\mathbb{C}$ , это означает, что  $\overline{\varphi}$  есть биголоморфизм  $\overline{\mathbb{C}}$ , переводящий  $\infty$  в  $\infty$ . Как доказано в случае I, такой автоморфизм линеен, т.е.  $\varphi(z) = az + b$  для некоторых  $a, b \in \mathbb{C}$ .

*Случай III: единичный круг  $U$ .* Пусть  $\varphi: U \rightarrow U$  — произвольный автоморфизм единичного круга, который переводит начало  $0 \in U$  в некоторую точку  $w_0$ . Рассмотрим дробно-линейный авто-

морфизм круга  $U$

$$\zeta = \lambda(w) = \frac{w - w_0}{1 - \overline{w_0}w},$$

который переводит точку  $w_0$  в 0 (см. п. 3.7). Тогда композиция

$$f := \lambda \circ \varphi: U \rightarrow U$$

будет автоморфизмом  $U$ , оставляющим точку 0 на месте. Поскольку  $|f(z)| < 1$  при  $z \in U$ , то, применяя к  $f$  лемму Шварца, получим, что

$$|f(z)| \leq |z| \quad \text{при всех } z \in U.$$

Снова применяя лемму Шварца, на этот раз к автоморфизму  $z = f^{-1}(\zeta)$ , будем иметь

$$|f^{-1}(\zeta)| \leq |\zeta| \quad \text{при всех } \zeta \in U.$$

Подставляя в это неравенство  $\zeta = f(z)$ , получим, что

$$|z| \leq |f(z)| \quad \text{при всех } z \in U.$$

Из двух полученных неравенств вытекает, что

$$|f(z)| \equiv |z|.$$

Следовательно, опять по лемме Шварца (случай равенства)

$$f(z) = e^{i\theta} z \quad \text{для некоторой константы } \theta \in \mathbb{R}.$$

Окончательно,

$$\varphi(z) = \lambda^{-1} \circ f(z) = \lambda^{-1}(e^{i\theta} z),$$

т.е. отображение  $\varphi$  дробно-линейно.

Вспоминая описание групп дробно-линейных автоморфизмов основных областей из п. 3.7, получаем следующее описание групп их автоморфизмов:

$$\text{Aut } \overline{\mathbb{C}} = \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \text{ где } a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0 \right\},$$

$$\text{Aut } \mathbb{C} = \left\{ z \mapsto az + b, \text{ где } a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0 \right\},$$

$$\text{Aut } U = \left\{ z \mapsto e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \overline{a}z}, \text{ где } a \in \mathbb{C}, \theta \in \mathbb{R}, |a| < 1 \right\}.$$

Заметим, что группа  $\text{Aut } \overline{\mathbb{C}}$  зависит от трех комплексных параметров (числитель и знаменатель можно поделить на комплексное число), т.е. имеет вещественную размерность 6; группа  $\text{Aut } \mathbb{C}$  зависит от двух комплексных параметров и имеет вещественную размерность 4; группа  $\text{Aut } U$  зависит от одного комплексного и одного вещественного параметра и имеет вещественную размерность 3. Это указывает на то, что группы автоморфизмов основных областей не изоморфны, а сами основные области не биголоморфны друг другу. Докажем последнее утверждение непосредственно.

**ТЕОРЕМА 17.2.** *Основные области не биголоморфны между собой.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Расширенная комплексная плоскость  $\overline{\mathbb{C}}$  даже не гомеоморфна  $\mathbb{C}$  и  $U$ , поскольку она компактна, в отличие от  $\mathbb{C}$  и  $U$ . Комплексная плоскость  $\mathbb{C}$  не биголоморфна единичному кругу  $U$ , поскольку биголоморфное отображение  $f: \mathbb{C} \rightarrow U$  должно было бы задаваться ограниченной целой функцией, а все такие функции по теореме Лиувилля являются константами. ■

Стоит отметить, что основные области, рассматриваемые как подмножества расширенной комплексной плоскости  $\overline{\mathbb{C}}$ , и топологически различны — граница  $\overline{\mathbb{C}}$  пуста, граница  $\mathbb{C}$  состоит из одной точки, а граница  $U$  совпадает с окружностью (т.е. одномерным континуумом). Все эти области односвязны.

В следующем пункте мы докажем одну из основных теорем курса — теорему Римана, утверждающую, что всякая односвязная область в  $\overline{\mathbb{C}}$  биголоморфна одной из основных областей. Отсюда будет следовать, с учетом теоремы 17.2, что в  $\overline{\mathbb{C}}$  имеется всего *три* класса биголоморфной эквивалентности односвязных областей — по числу основных областей.

### 17.2. Теорема Римана.

**ТЕОРЕМА РИМАНА.** *Любая односвязная область  $D \subset \mathbb{C}$ , граница которой содержит более одной точки, биголоморфна единичному кругу  $U$ .*

Доказательство теоремы проводится в три шага.

**Шаг 1.** *В  $D$  найдется голоморфная однолистная функция, по модулю ограниченная единицей.* Действительно, по условию гра-



ница  $\partial D$  содержит две различные точки  $\alpha, \beta$ . Рассмотрим аналитическую функцию

$$\sqrt{\frac{z - \alpha}{z - \beta}}$$

в  $D$ , которая задается, как обычно, выбором канонического элемента в какой-либо точке  $z_0 \in D$  и его аналитическим продолжением вдоль всевозможных путей в  $D$ . Так как область  $D$  односвязна, то по теореме о монодромии в ней выделяются две голоморфные однозначные ветви указанной аналитической функции, отличающиеся друг от друга знаком. Обозначим эти ветви через  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ .

Заметим, что функции  $\varphi_1, \varphi_2$  однолиственны в  $D$ . Действительно, из равенства

$$\varphi_j(z_1) = \varphi_j(z_2), \quad j = 1, 2,$$

возведением в квадрат получаем

$$\frac{z_1 - \alpha}{z_1 - \beta} = \frac{z_2 - \alpha}{z_2 - \beta},$$

откуда  $z_1 = z_2$  в силу однолиственности дробно-линейных отображений.

Введем обозначение

$$D_1^* := \varphi_1(D), \quad D_2^* := \varphi_2(D).$$

Множества  $D_1^*$  и  $D_2^*$  не пересекаются. Действительно, если бы

$$\varphi_1(z_1) = \varphi_2(z_2) \quad \text{для некоторых } z_1, z_2 \in D,$$

то возведение в квадрат давало бы, как и выше, что

$$z_1 = z_2 =: z \in D.$$

Поскольку  $\varphi_2(z) = -\varphi_1(z)$  по построению, отсюда следовало бы, что

$$\varphi_1(z) = \varphi_2(z) = 0.$$

Последнее невозможно, ибо  $\varphi_1, \varphi_2$  не имеют нулей в  $D$ .

По принципу сохранения области,  $D_2^*$  содержит некоторый круг

$$U^* = \{w \in \mathbb{C} : |w - w_0| < r^*\}.$$

Тогда по доказанному  $\varphi_1$  не принимает значений из  $U^*$ . Введем функцию

$$\varphi_0(z) := \frac{r^*}{\varphi_1(z) - w_0}, \quad z \in D.$$

Она голоморфна и однолистка в  $D$  и ограничена по модулю единицей. Тем самым, эта функция является решением задачи, поставленной в шаге 1.

*Шаг 2.* Обозначим через  $\mathcal{F}$  семейство всех голоморфных и однолистных в  $D$  функций, ограниченных по модулю единицей. Оно непусто и компактно (по теореме Монтеля из п. 16.2), однако предел последовательности функций из  $\mathcal{F}$  может оказаться константой. Чтобы избежать этого, введем подсемейство  $\mathcal{F}_a \subset \mathcal{F}$ , состоящее из всех функций  $f \in \mathcal{F}$  таких, что

$$|f'(a)| \geq |\varphi_0'(a)| \quad \text{в некоторой фиксированной точке } a \in D.$$

Заметим, что  $|\varphi_0'(a)| > 0$  в силу однолиственности  $\varphi_0$ . Семейство  $\mathcal{F}_a$  по-прежнему компактно в силу теоремы Монтеля. Более того, оно компактно в себе, поскольку предел  $f_0$  любой последовательности  $f_n \in \mathcal{F}_a$ , сходящейся в топологии  $\mathcal{O}(D)$ , есть функция, голоморфная в  $D$  и удовлетворяющая неравенству

$$|f'(a)| \geq |\varphi_0'(a)| > 0,$$

откуда  $f_0 \not\equiv \text{const}$  и, значит, по следствию из теоремы Гурвица (п. 14.3) функция  $f_0$  однолистка в  $D$  и потому  $f_0 \in \mathcal{F}_a$ .

Рассмотрим функционал  $J: \mathcal{F}_a \rightarrow \mathbb{C}$ , задаваемый формулой

$$J(f) := f'(a).$$

Согласно п. 16.3 он непрерывен на  $\mathcal{F}_a$  и (по лемме из п. 16.3) достигает на  $\mathcal{F}_a$  своей верхней грани, т.е. найдется функция  $f_0 \in \mathcal{F}_a$  такая, что

$$|f'(a)| \leq |f_0'(a)| \quad \text{для всех } f \in \mathcal{F}_a.$$

*Шаг 3.* По определению семейства  $\mathcal{F}_a$  функция  $f_0$  конформно отображает область  $D$  внутрь единичного круга  $U$ . Для завершения доказательства остается установить, что образ  $D$  при этом отображении совпадает со всем кругом  $U$ .

Будем пользоваться следующим легко проверяемым свойством автоморфизмов круга:

$$\text{если } \psi_c(z) := \frac{z-c}{1-\bar{c}z}, \quad \text{то } \psi'_c(0) = 1 - |c|^2 \quad \text{и} \quad \psi'_c(c) = \frac{1}{1-|c|^2}. \quad (17.1)$$

*Покажем сначала, что  $f_0(a) = 0$ .* Действительно, допустим, напротив, что  $f_0(a) =: c$  отлично от нуля. Тогда функция

$$g(z) := (\psi_c \circ f_0)(z) = \frac{f_0(z) - c}{1 - \bar{c}f_0(z)}$$

принадлежит  $\mathcal{F}_a$ , но из формулы (17.1) следует, что

$$|g'(a)| = |\psi'_c(c)| |f'_0(a)| = \frac{|f'_0(a)|}{1 - |c|^2}$$

строго больше  $|f'_0(a)|$ , вопреки определению  $f_0$ .

*Покажем теперь, что  $f_0$  отображает область  $D$  на единственный круг  $U$ , т.е. все значения  $b \in U \setminus \{0\}$  принадлежат  $f_0(D)$ .*

Действительно, допустим, напротив, что значение  $b \in U \setminus \{0\}$  не принимается  $f_0$ . Рассмотрим тогда функцию

$$h(z) := \sqrt{\psi_b \circ f_0(z)} = \sqrt{\frac{f_0(z) - b}{1 - \bar{b}f_0(z)}}, \quad z \in D,$$

задаваемую однозначной голоморфной ветвью указанного корня в  $D$  (которую можно выделить по теореме о монодромии из п. 10.6). Так же как в шаге 1, проверяется, что функция  $h$  однолистка в  $D$ , т.е.  $h \in \mathcal{F}$ . В силу формулы (17.1) производная функции  $h(z)^2$  в точке  $a$  равна  $f'_0(a)(1 - |b|^2)$ . Поэтому

$$|h'(a)| = \frac{|f'_0(a)|(1 - |b|^2)}{2|h(a)|} = \frac{1 - |b|^2}{2\sqrt{|b|}} |f'_0(a)|.$$

Как мы видели выше, это значение можно увеличить, рассмотрев вместо  $h$  функцию

$$h_0 := \psi_c \circ h, \quad \text{где } c = h(a).$$

А именно  $h_0 \in \mathcal{F}$  и

$$|h'_0(a)| = \frac{|h'(a)|}{1 - |h(a)|^2} = \frac{(1 - |b|^2)|f'_0(a)|}{2\sqrt{|b|}(1 - |b|)} = \frac{1 + |b|}{2\sqrt{|b|}} |f'_0(a)| > |f'_0(a)|,$$

поскольку  $|b| < 1$ . Но это противоречит экстремальности  $f_0$  в  $\mathcal{F}_a$ . Таким образом,  $f_0$  осуществляет биголоморфизм  $D \rightarrow U$  и теорема Римана доказана.

**СЛЕДСТВИЕ.** Любые две односвязные области  $D \subset \mathbb{C}$ , границы которых содержат более одной точки, биголоморфны друг другу.

**Задачи.** (1) Использованный в доказательстве теоремы Римана класс  $\mathcal{F}$  состоял, по определению, из голоморфных функций, ограниченных по модулю единицей. При этом не уточнялось, имеется ли в виду неравенство  $|f(z)| < 1$  или  $|f(z)| \leq 1$ . Покажите в связи с этим, что если  $f \in \mathcal{O}(D)$  и  $|f(z)| \leq 1$  для всех  $z \in D$ , то либо  $f \equiv \text{const}$ , либо  $|f(z)| < 1$  для всех  $z \in D$ .

(2) Пусть область  $D$  биголоморфна единичному кругу  $U$ . Докажите, что для заданной точки  $z_0 \in D$  и вещественного числа  $\theta_0$  найдется единственный биголоморфизм  $f: D \rightarrow U$  такой, что

$$f(z_0) = 0 \quad \text{и} \quad \arg f'(z_0) = \theta_0.$$

Заметим, что в силу замечаний в начале п. 17.1 совокупность всех биголоморфизмов  $D \rightarrow U$  зависит от трех вещественных параметров. Сформулированная задача дает, тем самым, один из способов фиксирования этих параметров.

(3) Поскольку группа  $\text{Aut } U$  зависит от трех вещественных параметров, то для любых двух точек  $z_1, w_1 \in U$  найдется автоморфизм  $U$ , переводящий  $z_1$  в  $w_1$  (докажите это!). По той же причине мы не можем ожидать, что для любых двух пар несовпадающих точек  $(z_1, z_2)$  и  $(w_1, w_2)$  круга  $U$  найдется автоморфизм  $\varphi: U \rightarrow U$ , переводящий  $z_1$  в  $w_1$  и  $z_2$  в  $w_2$ . Приведите пример пар точек, биголоморфно не эквивалентных друг другу, и найдите условие на пары  $(z_1, z_2)$  и  $(w_1, w_2)$ , при котором требуемый автоморфизм  $\varphi: U \rightarrow U$  все же существует.

**Указание:** См. задачу (1) п. 3.6.

(4) Докажите, что в условиях теоремы Римана максимальное значение  $|f'(a)|$  по всем функциям  $f \in \mathcal{O}(D)$ , удовлетворяющим условию

$$|f(z)| \leq 1 \quad \text{для всех } z \in D$$

(но не обязательно однолиственным), совпадает с аналогичным значением, вычисленным по всем функциям класса  $\mathcal{F}_a$ . Покажите, что оно достигается только на скалярных кратных конформного отображения  $f_0$  области  $D$  на  $U$ , удовлетворяющего условию

$$f_0(a) = 0, \quad \arg f_0'(a) = 0$$

(эти условия однозначно определяют отображение  $f_0$  согласно задаче (2)).

## Лекция 18. Соответствие границ и принцип симметрии

### 18.1. Принцип соответствия границ.

**ТЕОРЕМА.** Пусть  $D_1, D_2 \in \mathbb{C}$  — области с простыми границами, причем граница  $\partial D_1$  связна. Предположим, что функция  $f: D_1 \rightarrow D_2$ , голоморфная в области  $D_1$  и непрерывная в ее замыкании  $\bar{D}_1$ , гомеоморфно отображает  $\partial D_1$  на  $\partial D_2$ . Тогда  $f$  биголоморфно отображает  $D_1$  на  $D_2$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** 1) Фиксируем произвольную точку  $w_0$  в области  $D_2$ . Так как функция  $f$  по условию не принимает значения  $w_0$  на  $\partial D_1$ , то

$$f^{-1}(w_0) := \{z \in D_1 : f(z) = w_0\}$$

есть компактное подмножество области  $D_1$  в силу непрерывности  $f$  на  $\bar{D}_1$ .

Примем следующий топологический факт как наглядно очевидный: если  $D \subset \mathbb{C}$  — область с простой связной границей, то для всякого компакта  $K \subset D$  найдется область  $\tilde{D}$  с простой связной границей такая, что  $K \subset \tilde{D} \Subset D$  и кривые  $\partial \tilde{D}$ ,  $\partial D$  гомотопны как замкнутые кривые на множестве  $\bar{D} \setminus K$ .

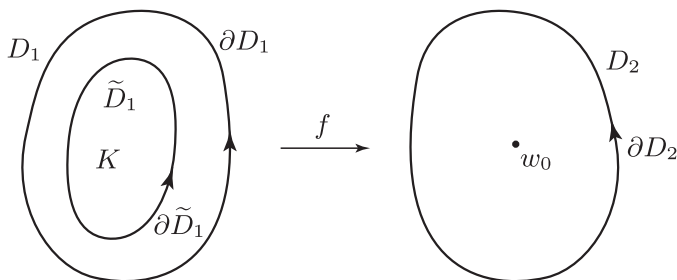


Рис. 60

Применяя это утверждение к компакту  $K := f^{-1}(w_0)$  и области  $D := D_1$ , найдем область  $\tilde{D}_1$  с простой связной границей такую, что  $K \subset \tilde{D}_1 \Subset D_1$  (см. рис. 60). Пусть  $N$  есть число нулей функции  $f(z) - w_0$  в области  $D_1$  (а значит, и в  $\tilde{D}_1$ ). По принципу

аргумента (см. п. 13.2) для области  $\tilde{D}_1$  получаем, что

$$N = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial\tilde{D}_1} \arg(f(z) - w_0).$$

В силу гомотопности границ областей  $\partial\tilde{D}_1$ ,  $\partial D_1$  и непрерывности функции  $f$  на  $\overline{D}_1$  правая часть этого равенства совпадает с  $\frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial D_1} \arg(f(z) - w_0)$ , откуда следует, что

$$N = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial D_1} \arg(f(z) - w_0). \quad (18.1)$$

(Заметим, что это равенство могло быть получено сразу из принципа аргумента для области  $D_1$ , если бы мы дополнительно предположили, что  $f$  голоморфна в окрестности замыкания  $\overline{D}_1$ .)

Поскольку  $f$  биективно отображает  $\partial D_1$  на  $\partial D_2$ , правая часть (18.1) равна

$$\pm \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial D_2} \arg(w - w_0)$$

(знак “минус” перед этим выражением возникает в случае, когда гомеоморфизм  $f: \partial D_1 \rightarrow \partial D_2$  обращает ориентацию границы; если  $f$  сохраняет ориентацию — нужно ставить знак “плюс”). Снова по принципу аргумента указанное число есть

$$\pm \text{число нулей функции } F(w) = w - w_0 \text{ в } D_2.$$

Последнее число равно  $\pm 1$ . Поскольку левая часть (18.1) неотрицательна, в последнем выражении нужно выбрать знак “плюс”, и формула (18.1) принимает вид

$$N = 1.$$

Таким образом, функция  $f$  принимает в  $D_1$  каждое значение  $w_0 \in D_2$  ровно один раз с учетом кратности.

2) Выбирая точку  $w_0 \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}_2$  и повторяя для нее предыдущие рассуждения, покажем, что в этом случае  $N = 0$ , т.е. функция  $f$  не принимает в  $D_1$  значений  $w_0$  из дополнения  $\mathbb{C} \setminus \overline{D}_2$ . Она не может принимать в  $D_1$  и значений  $w_0 \in \partial D_2$ , поскольку  $f$  гомеоморфно отображает  $\partial D_1$  на  $\partial D_2$ .

Таким образом,  $f$  осуществляет взаимно однозначное голоморфное отображение  $D_1$  на  $D_2$ , т.е. биголоморфизм  $D_1$  на  $D_2$  (см. замечание 14.3 из п. 14.2). ■

Справедливо следующее “обращение” принципа соответствия границ, не налагающее никаких условий на поведение отображения на границе.

**ТЕОРЕМА КАРАТЕОДОРИ.** Пусть каждая из областей  $D_1, D_2 \in \mathbb{C}$  ограничена конечным числом непересекающихся замкнутых жордановых кривых. Тогда всякий биголоморфизм  $f: D_1 \rightarrow D_2$  продолжается до гомеоморфизма замыканий  $\overline{D_1} \rightarrow \overline{D_2}$ .

Мы приводим эту теорему без доказательства (которое можно найти в [4]). Заметим, что в формулировке теоремы не требуется, чтобы границы областей были кусочно гладкими.

Принцип соответствия границ, вообще говоря, не выполняется для неограниченных областей, даже с очень хорошими границами (напомним, что все области с простыми границами по определению ограничены). Чтобы продемонстрировать, какие эффекты могут при этом возникать, рассмотрим область  $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$  и заданную в ней функцию  $f(z) = z^3$ . Тогда  $f$  голоморфна в  $D_1$  и непрерывна (даже голоморфна) в  $\overline{D_1}$  (понимая непрерывность и голоморфность в  $\infty$  в смысле, указанном в лекции 2). Кроме того,  $f$  гомеоморфно отображает  $\mathbb{R} = \partial D_1$  на  $\mathbb{R}$ . Однако образ  $f(D_1)$  в этом случае не является областью с границей  $\mathbb{R}$ , напротив,  $f(D_1) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Тем не менее, принцип соответствия границ для отображений  $f: D_1 \rightarrow D_2$  неограниченных областей  $D_1$  удается сохранить, если дополнительно потребовать, чтобы область  $D_2 \in \mathbb{C}$  имела простую границу, а область  $D_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$  была ограничена конечным числом непересекающихся замкнутых жордановых кусочно гладких кривых на расширенной плоскости  $\overline{\mathbb{C}}$ .

Докажем частный случай этого утверждения, который понадобится нам в следующей лекции. (Применение этого же приема позволяет доказать принцип соответствия и в указанном общем случае.)

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ.** Пусть  $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$  есть верхняя полуплоскость, а  $D_2 \in \mathbb{C}$  — область с простой границей. Предположим, что функция  $f$  голоморфна в области  $D_1$  и непрерывна в ее замыкании  $\overline{D_1}$  на расширенной комплексной плоскости  $\overline{\mathbb{C}}$ . Если  $f$  гомеоморфно отображает  $\partial D_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$  на  $\partial D_2$ , то  $f$  является биголоморфизмом  $D_1$  на  $D_2$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Заметим, что  $D_1 = \{\text{Im } z > 0\}$  является биголоморфным образом единичного круга  $U = \{|\zeta| < 1\}$  (являющегося областью с простой границей) при дробно-линейном

преобразовании

$$\varphi: U \rightarrow D_1, \quad \zeta \mapsto i \frac{1-\zeta}{1+\zeta}.$$

Сквозное отображение  $g := f \circ \varphi$ , голоморфное в круге  $U$  и непрерывное в его замыкании, удовлетворяет всем условиям принципа соответствия границ. Поэтому оно является биголоморфизмом  $U$  на  $D_2$ . Отсюда следует, что и отображение

$$f = g \circ \varphi^{-1}: D_1 = \varphi(U) \rightarrow D_2$$

является биголоморфизмом  $D_1$  на  $D_2$ . ■

Вопрос. Почему нельзя повторить то же самое рассуждение для случая  $D_1 = D_2 = \{\operatorname{Im} z > 0\}$ , применяя обычный принцип соответствия границ к отображению  $g = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$ ?

**18.2. Принцип симметрии.** Прежде, чем переходить к формулировке принципа симметрии, приведем лемму о голоморфном продолжении функций через отрезок, которая является частным случаем одной теоремы Привалова и будет использована нами при доказательстве принципа симметрии.

**ЛЕММА О ГОЛОМОРФНОМ ПРОДОЛЖЕНИИ.** *Предположим, что прямая  $l$  пересекает область  $D \subset \mathbb{C}$ , а функция  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  голоморфна в  $D \setminus l$  и непрерывна в  $D$ . Тогда  $f$  голоморфна во всей области  $D$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Для доказательства голоморфности  $f$  в области  $D$  достаточно, по теореме Морера, показать, что

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$$

для любого треугольника  $\Delta \Subset D$ . Пересечение замкнутого треугольника  $\overline{\Delta}$  с прямой  $l$  может быть:

- (a) пустым множеством,
- (b) вершиной треугольника,
- (c) стороной треугольника или
- (d) отрезком, соединяющим внутренние точки двух сторон треугольника или одну из его вершин с внутренней точкой противоположной стороны.



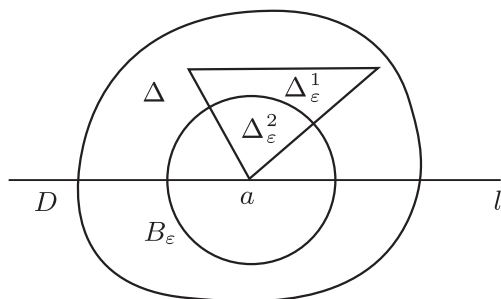


Рис. 61

В случае (а) имеем  $\Delta \in D \setminus l$ , и равенство нулю требуемого интеграла следует из теоремы Коши.

В случае (б) обозначим вершину  $\Delta$ , лежащую на  $l$ , через  $a$ , а через  $B_\varepsilon$  — малый круг  $\{|z - a| < \varepsilon\}$  с центром в этой точке (см. рис. 61). Положим

$$\Delta_\varepsilon^1 := \Delta \setminus \overline{B_\varepsilon}, \quad \Delta_\varepsilon^2 := \Delta \cap B_\varepsilon.$$

Тогда интеграл от  $f$  по  $\partial\Delta$  есть сумма интегралов от  $f$  по  $\partial\Delta_\varepsilon^1$  и  $\partial\Delta_\varepsilon^2$ . Первый из них равен нулю, так как  $\Delta_\varepsilon^1 \in D \setminus l$ , а второй стремится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0+$  по стандартной оценке интеграла 5° из п. 4.2:

$$\left| \int_{\partial\Delta_\varepsilon^2} f(z) dz \right| \leq \max_{z \in \overline{\Delta}} |f(z)| \cdot |\partial\Delta_\varepsilon^2| \rightarrow 0$$

при  $\varepsilon \rightarrow 0+$ . Так как интеграл от  $f$  по  $\partial\Delta$  не зависит от  $\varepsilon$ , он должен быть равен нулю.

В случае (с) пусть  $ab$  есть сторона  $\Delta$ , лежащая на  $l$ , а  $P_\varepsilon$  — прямоугольник с основанием  $ab$  высоты  $\varepsilon$ , лежащий в той же полуплоскости с границей  $l$ , что и  $\Delta$  (см. рис. 62). Тогда  $\Delta \setminus P_\varepsilon$  можно разложить в объединение (одного или двух) треугольников двух типов — треугольников, компактно содержащихся в  $D \setminus l$ , и треугольников типа (б), опирающихся одной из вершин на прямую  $l$ . С другой стороны,  $P_\varepsilon \setminus \Delta$  также состоит из (одного или двух) треугольников указанных типов. Заметим, что интегралы по границам треугольников обоих указанных типов равны нулю по доказанному в случаях (а) и (б), поэтому такие интегралы можно добавлять или убирать из интеграла по  $\partial\Delta$ . Это рассуж-

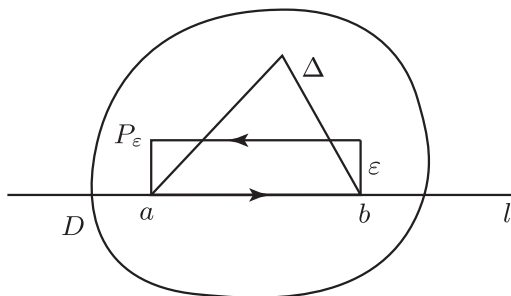


Рис. 62

дение показывает, что

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = \int_{\partial P_\varepsilon} f(z) dz \quad (18.2)$$

при всех достаточно малых  $\varepsilon > 0$ . Оценим теперь интеграл от  $f$  по  $\partial P_\varepsilon$ . Интегралы по сторонам  $P_\varepsilon$ , перпендикулярным  $ab$ , стремятся к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$  по упомянутой выше стандартной оценке. С другой стороны, чтобы оценить суммы интегралов по двум остальным сторонам прямоугольника, предположим, что прямая  $l$  совпадает с осью  $x$ , а треугольник  $\Delta$  лежит в верхней полуплоскости (этого всегда можно добиться движением плоскости). Тогда указанная сумма будет равна

$$\int_a^b \{f(x) - f(x + i\varepsilon)\} dx,$$

что не превосходит по модулю

$$|b - a| \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - f(x + i\varepsilon)|.$$

Последняя величина стремится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в силу равномерной непрерывности  $f$ . (Действительно, рассмотрим любую область  $G \in D$ , содержащую отрезок  $[a, b]$ . Тогда все прямоугольники  $P_\varepsilon$ , начиная с некоторого  $\varepsilon_0 > 0$ , содержатся в  $G$  и функция  $f$  равномерно непрерывна на  $\overline{G}$ ). Так как левая часть (18.2) не зависит от  $\varepsilon$ , то она должна быть равна нулю.

Наконец, в случае (d) треугольник  $\Delta$  разрезается на два или три треугольника типов (b) и (c), откуда снова следует, что интеграл от  $f$  по  $\partial\Delta$  равен нулю. ■

**ПРИНЦИП СИММЕТРИИ.** Пусть  $D_1, D_2$  — области в  $\overline{\mathbb{C}}$ . Допустим, что граница  $\partial D_1$  содержит дугу (т.е. непустое открытое связное подмножество)  $\gamma_1$  обобщенной окружности  $l_1$ , а граница  $\partial D_2$  — дугу  $\gamma_2$  обобщенной окружности  $l_2$ . Обозначим через  $D_j^*$ ,  $j = 1, 2$ , область, симметричную области  $D_j$  относительно  $l_j$ . Мы будем предполагать, что

$$D_1 \cap D_1^* = \emptyset = D_2 \cap D_2^*,$$

а множества

$$G_1 := D_1 \cup \gamma_1 \cup D_1^* \quad \text{и} \quad G_2 := D_2 \cup \gamma_2 \cup D_2^*$$

являются областями в  $\overline{\mathbb{C}}$ . Пусть, далее, функция  $f$ , голоморфная в области  $D_1$  и непрерывная вплоть до  $\gamma_1$ , биголоморфно отображает  $D_1$  на  $D_2$  и задает гомеоморфизм  $\gamma_1$  на  $\gamma_2$ . Тогда она голоморфно продолжается через  $\gamma_1$  в область  $G_1$ . Иными словами, существует функция  $F \in \mathcal{O}(G_1)$ , совпадающая с  $f$  на  $D_1 \cup \gamma_1$ , которая биголоморфно отображает область  $G_1$  на область  $G_2$ . При этом

$$F(z) = f(z^*)^* \quad \text{для} \quad z \in D_1^* \quad (18.3)$$

(в этом равенстве  $z^*$  — точка, симметричная  $z \in D_1^*$  относительно  $l_1$ , а  $f(z^*)^*$  — точка, симметричная  $f(z^*) \in D_2$  относительно  $l_2$ ), см. рис. 63.

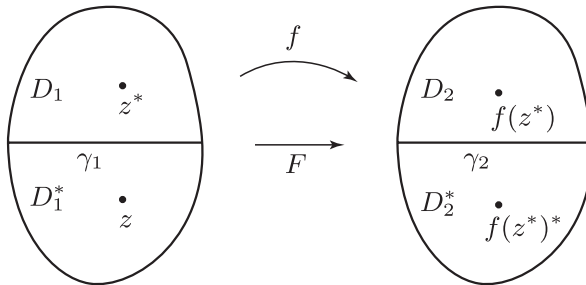


Рис. 63

Формула (18.3) объясняет название “принцип симметрии”: отображение  $F$ , задаваемое этой формулой, переводит точки, симметричные относительно  $l_1$  в точки, симметричные относительно  $l_2$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1°. Пусть сначала  $D_1, D_2 \subset \mathbb{C}$ , а дуги  $\gamma_1, \gamma_2$  являются отрезками вещественной оси (т.е.  $l_1 = l_2 = \mathbb{R}$ ). Положим

$$F(z) := \begin{cases} f(z), & z \in D_1 \cup \gamma_1, \\ \overline{f(\bar{z})}, & z \in D_1^*. \end{cases}$$

Функция  $F(z)$  непрерывна на  $G_1$ , так как в любой точке  $a \in \gamma_1$  пределы  $F(z)$  при  $z \rightarrow a$  сверху и снизу совпадают в силу условия  $f(\gamma_1) \subset \gamma_2 \subset \mathbb{R}$ . Кроме того, она голоморфна на  $G_1 \setminus \mathbb{R} = D_1 \cup D_1^*$ . Действительно, нужно проверять это только в точках  $a \in D_1^*$ . Разлагая функцию  $f$  в ряд Тейлора с центром в симметричной точке  $\bar{a} \in D_1$ , получим разложение в ряд Тейлора функции

$$F(z) = \overline{f(\bar{z})} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (\bar{z} - \bar{a})^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{c}_n (z - a)^n$$

в соответствующей окрестности точки  $a$ .

Следовательно, функция  $F$  удовлетворяет условиям леммы о голоморфном продолжении в области  $G_1$ , из которой вытекает, что  $F$  голоморфна во всей области  $G_1$ . Далее, из определения  $F$  следует, что  $F$  биективно отображает  $D_1^*$  на  $D_2^*$ . Так как отображение  $f: \gamma_1 \rightarrow \gamma_2$  является гомеоморфизмом и  $D_1 \cap D_1^* = \emptyset = D_2 \cap D_2^*$ , отсюда следует, что  $F$  биективно отображает  $G_1$  на  $G_2$ . Согласно замечанию 14.3 из п. 14.2 это означает, что  $F$  есть биголоморфизм  $G_1$  на  $G_2$ .

2°. В общем случае рассмотрим дробно-линейные преобразования  $\lambda_j: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ , переводящие дуги  $\gamma_j \subset l_j$  в отрезки  $\lambda_j(\gamma_j)$  вещественной оси  $\mathbb{R}$  ( $j = 1, 2$ ), см. рис. 64. По свойству сохранения симметрии при дробно-линейных преобразованиях (п. 3.5) пары симметричных областей  $D_1, D_1^*$  и  $D_2, D_2^*$  переходят в пары областей  $\lambda_1(D_1), \lambda_1(D_1^*)$  и  $\lambda_2(D_2), \lambda_2(D_2^*)$ , симметричных относительно вещественной оси и не содержащих точку  $\infty$  (иначе пересечение  $D_1 \cap D_1^*$  или  $D_2 \cap D_2^*$  было бы непусто). Функция

$$\tilde{f} := \lambda_2 \circ f \circ \lambda_1^{-1}$$

биголоморфно отображает область  $\lambda_1(D_1) \subset \mathbb{C}$  на область  $\lambda_2(D_2) \subset \mathbb{C}$  и непрерывно продолжается до гомоморфизма отрезка  $\lambda_1(\gamma_1) \subset \mathbb{R}$  на отрезок  $\lambda_2(\gamma_2) \subset \mathbb{R}$ . Согласно случаю 1° функция  $\tilde{f}$  аналитически продолжается до биголоморфизма  $\tilde{F}$

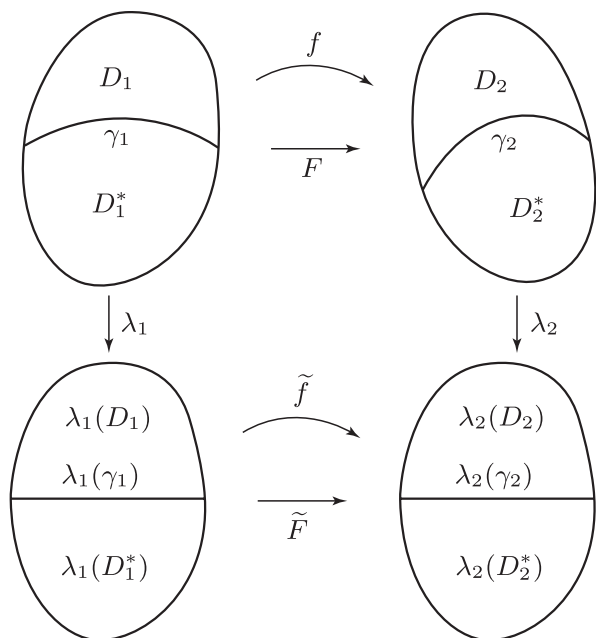


Рис. 64

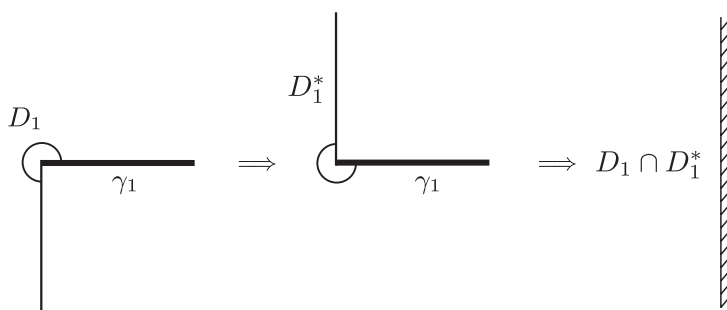


Рис. 65

области  $\lambda_1(G_1)$  на  $\lambda_2(G_2)$ . При этом, поскольку  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  сохраняют симметрию, отображение

$$F := \lambda_2^{-1} \circ \tilde{F} \circ \lambda_1$$

есть биголоморфизм  $G_1$  на  $G_2$ , обладающий указанными в теореме свойствами.  $\blacksquare$

**ЗАМЕЧАНИЕ 18.1.** Значительная часть доказательства использует только голоморфность, но не биективность  $f$ . Пользуясь этим, можно получить следующий вариант принципа симметрии, дающий еще один метод аналитического продолжения голоморфных функций.

**УТВЕРЖДЕНИЕ.** Пусть  $D_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$  — область, граница которой содержит дугу  $\gamma_1$  обобщенной окружности  $l_1$ . Обозначим через  $D_1^*$  область, симметричную  $D_1$  относительно  $l_1$ . Предположим, что

$$D_1 \cap D_1^* = \emptyset,$$

а множество  $G_1 := D_1 \cup \gamma_1 \cup D_1^*$  является областью в  $\overline{\mathbb{C}}$ . Пусть  $\overline{\mathbb{C}}$ -значная функция  $f$ , голоморфная в  $D_1$  и непрерывная в  $D_1 \cup \gamma_1$ , отображает дугу  $\gamma_1$  на подмножество некоторой обобщенной окружности  $l_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$ . Тогда существует  $\overline{\mathbb{C}}$ -значная функция  $F$ , голоморфная в области  $G_1$ , которая совпадает с  $f$  на  $D_1 \cup \gamma_1$ . При этом

$$F(z) = f(z^*)^* \quad \text{для } z \in D_1^*$$

(в этом равенстве первая  $*$  означает симметрию относительно  $l_1$ , а вторая — относительно  $l_2$ ).

**ЗАМЕЧАНИЕ 18.2.** Если множество  $D_1 \cap D_1^*$  непусто, то функции  $f(z)$  и  $f(z^*)^*$  не обязаны на нем совпадать. Возьмем, например,

$$D_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \frac{3\pi}{2} \right\} \quad \text{с } \gamma_1 = [0, +\infty)$$

и  $f(z) = \sqrt{z}$  (мы выбираем ветвь, удовлетворяющую условию  $\sqrt{1} = 1$ ), см. рис. 65. Тогда  $f(z^*)^*$  есть вторая ветвь  $\sqrt{z}$  на области

$$D_1 \cap D_1^* = \{\operatorname{Re} z < 0\}$$

и  $f(z) \neq f(z^*)^*$  на  $D_1 \cap D_1^*$ . Если мы все же попытаемся применить конструкцию принципа симметрии в ситуации, когда имеются непустые пересечения областей и их симметричных образов, то она приведет к аналитической функции, поднимающейся до конформного отображения областей на соответствующих римановых поверхностях. Это еще одна конструкция в комплексном анализе, которая, наряду с локальным обращением голоморфных функций, неизбежно приводит к многозначным аналитическим функциям.

**ЗАМЕЧАНИЕ 18.3.** В формулировке принципа симметрии мы потребовали, чтобы множества

$$D_1 \cup \gamma_1 \cup D_1^* \quad \text{и} \quad D_2 \cup \gamma_2 \cup D_2^*$$

были областями. Это условие эквивалентно тому, что каждая точка  $z_0 \in \gamma_j$  ( $j = 1, 2$ ) включается в  $D_j \cup \gamma_j \cup D_j^*$  вместе с некоторой окрестностью. Данное требование необходимо для применимости леммы о голоморфном продолжении, и оно не вытекает из остальных условий. Убедиться в этом можно, рассмотрев следующий пример (см. рис. 66):

$$D_1 = \{\operatorname{Im} z > 0\} \setminus \{z = iy : 0 < y \leq 1\}, \quad \gamma_1 = \mathbb{R}, \quad z_0 = 0.$$

Впрочем, можно избежать подобных ситуаций, если потребовать дополнительно, чтобы  $D_1$  и  $D_2$  были областями с простой границей.

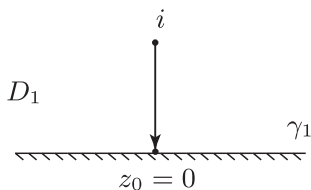


Рис. 66

**Задачи.** (1) Модулем концентрического кольца  $\{r < |z - a| < R\}$  называется отношение  $R/r$ . Пользуясь теоремой Каратеодори (см. п. 18.1) и принципом симметрии, покажите, что два концентрических кольца биголоморфны  $\iff$  их модули равны. Покажите, что группа автоморфизмов такого кольца зависит от одного вещественного

параметра (а именно порождается поворотами  $z \mapsto a + e^{i\theta}(z - a)$  и отображением  $z \mapsto rR/z$ ). Сравните это с описанием групп автоморфизмов односвязных областей в п. 17.1.

(2) Покажите, что прямоугольник, отличный от квадрата, нельзя конформно отобразить на квадрат так, чтобы вершины перешли в вершины.

(3) Пусть  $U = \{|z| < 1\}$  и  $\gamma \subset \partial U$  — дуга единичной окружности. Предположим, что функция  $f \in \mathcal{O}(U) \cap C(U \cup \gamma)$  равна нулю всюду на  $\gamma$ . Докажите, что  $f \equiv 0$ .

(4) *Принцип Шварца*. Пусть граница области  $D_1 \subset \mathbb{C}$  есть жорданова кривая, содержащая аналитическую дугу  $\gamma_1$  (т.е. образ открытого единичного отрезка  $(0, 1) \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  при конформном отображении некоторой окрестности этого отрезка в  $\mathbb{C}$ ), а граница области  $D_2 \subset \mathbb{C}$  также жорданова и содержит аналитическую дугу  $\gamma_2$ . Покажите, что всякое биголоморфное отображение  $f: D_1 \rightarrow D_2$ , непрерывно продолжающееся до гомеоморфизма  $\gamma_1$  на  $\gamma_2$ , допускает продолжение до биголоморфизма некоторой области  $G_1 \supset D_1 \cup \gamma_1$  на некоторую область  $G_2 \supset D_2 \cup \gamma_2$ . Пользуясь замечаниями 18.1 и 18.3 выше, сформулируйте и докажите вариант этого утверждения, не требующий биективности  $f$  и жордановости границ  $D_1, D_2$ , но и утверждающий всего лишь голоморфную продолжимость  $f$  в некоторую область  $G \supset D_1 \cup \gamma_1$ . Кроме того, пользуясь примерами из замечания 18.2, покажите, что принцип Шварца и принцип симметрии становятся неверными, если в определении аналитической дуги заменить открытый отрезок  $(0, 1)$  на замкнутый отрезок  $[0, 1]$ .

Следующая серия задач относится к теореме единственности для функций, голоморфных в области  $D$ , которые принимают чисто мнимые значения на  $\partial D$ . Эту теорему можно вывести из принципа симметрии, принципа аргумента или принципа максимума, причем каждый из этих подходов работает при своих ограничениях на область  $D$ . Задача (9) продолжает этот результат в другом направлении.

Задачи. (5) Пусть  $D = \{|z| < 1\}$ ,  $f \in \mathcal{O}(D) \cap C(\overline{D})$  и  $\operatorname{Re} f \equiv 0$  на  $\partial D$ . Пользуясь принципом симметрии и теоремой Лиувилля, докажите, что  $f \equiv \text{const}$ .

(6) Покажите на примере, что утверждение задачи (5) перестает быть верным для функций, вещественная часть которых равна нулю лишь на некоторой непустой открытой дуге  $\gamma \subset \partial D$ .

(7) Повторяя доказательство равенства (18.1) из п. 18.1, покажите, что принцип аргумента (п. 14.3) остается верен для функций  $f$ , голо-



морфных в области  $D$  и непрерывных в ее замыкании  $\overline{D}$  (иначе говоря, требование голоморфности  $f$  в окрестности  $\overline{D}$ , наложенное в формулировке принципа, является излишним). Пользуясь этим, дайте другое доказательство утверждения задачи (5), считая  $D$  произвольной односвязной областью с простой границей.

(8) Применяя принцип максимума к функциям  $e^{\pm f(z)}$ , дайте еще одно доказательство утверждения задачи (5), считая на этот раз  $D$  произвольной ограниченной областью.

(9) Пусть  $D = \{|z| < 1\}$ , а  $P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  — произвольный полином с вещественными коэффициентами от двух переменных  $u, v \in \mathbb{R}$ . Покажите, что непостоянная функция  $f \in \mathcal{O}(D) \cap C(\overline{D})$ , удовлетворяющая  $P(\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f) \equiv 0$  на  $\partial D$ , существует тогда и только тогда, когда открытое множество  $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : P(u, v) \neq 0\}$  имеет хотя бы одну ограниченную связную компоненту. Приведите примеры квадратичных полиномов  $P(u, v)$ , обладающих и не обладающих указанным свойством. (В задачах (5)–(8) рассматривался частный случай  $P(u, v) = u$  данной задачи.)

## Лекция 19. Конформное отображение полуплоскости на многоугольник

**19.1. Конформное отображение полуплоскости на прямоугольник.** Обозначим через

$$D_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$$

верхнюю полуплоскость и фиксируем число  $0 < k < 1$ . *Эллиптический интеграл 1-го рода* задается при  $z \in \overline{D}_+ \subset \overline{\mathbb{C}}$  выражением вида

$$F(z) = F(z, k) := \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} = \int_0^z \frac{d\zeta}{\varphi(\zeta)}. \quad (19.1)$$

Для того чтобы формула (19.1) стала корректной, необходимо уточнить смысл входящего в нее корня

$$\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}.$$

Мы рассматриваем его голоморфную ветвь  $\varphi(\zeta)$  в односвязной области  $D$ , которая получается выбрасыванием из комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  четырех лучей вида (см. рис. 67)

$$\left\{ z : z = \pm 1 - iy, z = \pm \frac{1}{k} - iy, y \geq 0 \right\}.$$

Указанная ветвь выделяется в  $D$  по теореме о монодромии (см. п. 10.6) и однозначно определяется условием  $\varphi(0) = 1$ .

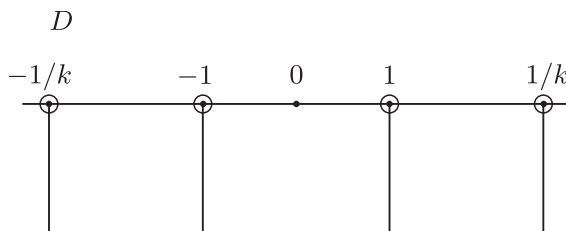


Рис. 67

Интеграл в формуле (19.1) берется по любому кусочно гладкому пути  $\gamma$  в множестве

$$\overline{D}_+ \cap D = \overline{D}_+ \setminus \left\{ \pm 1, \pm \frac{1}{k} \right\},$$

соединяющему начало координат 0 с точкой  $z$  (независимость  $F(z)$  от выбора пути интегрирования гарантируется теоремой Коши для односвязной области  $D$ ). В пяти исключительных точках  $z = \pm 1, \pm 1/k, \infty$  из замыкания  $\overline{D}_+ \subset \overline{\mathbb{C}}$  функция  $F(z)$  может быть доопределена как абсолютно сходящийся несобственный интеграл. Например, при  $z = 1$

$$F(1) = \int_0^1 \frac{d\xi}{\varphi(\xi)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \int_0^x \frac{d\xi}{\varphi(\xi)},$$

где сходимость указанного несобственного интеграла вытекает из оценки

$$|\varphi(\zeta)| \geq C \sqrt{|1 - \zeta|} \quad \text{при } |1 - \zeta| \leq \delta. \quad (19.2)$$

Аналогично определяются значения  $F(z)$  при  $z = -1, \pm 1/k$ . Для определения  $F(z)$  при  $z = \infty$  нужно воспользоваться оценкой

$$|\varphi(\zeta)| \geq C|\zeta|^2 \quad \text{при } |\zeta| \geq R.$$

**УТВЕРЖДЕНИЕ 19.1.** *Функция  $F(z)$  голоморфна в  $D_+$  и непрерывна на  $\overline{D}_+$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Поскольку  $F$  есть первообразная функции, голоморфной в области  $D$ , она голоморфна не только на  $D_+$ , но и во всех точках множества

$$\overline{D}_+ \cap D = \overline{D}_+ \setminus \left\{ \pm 1, \pm \frac{1}{k} \right\}.$$

Непрерывность  $F$  в оставшихся точках  $\pm 1, \pm 1/k, \infty \in \overline{D}_+$  вытекает из приведенных выше оценок. Предположим, например, что  $|z - 1| \leq \delta$ . Тогда  $F(z) - F(1)$  совпадает с интегралом от  $1/\varphi(\zeta)$  по прямолинейному отрезку  $[1, z]$ , который можно параметризовать как

$$z = 1 + \rho e^{i\theta}, \quad 0 \leq \rho \leq |z - 1|.$$

Отсюда и из (19.2) следует, что

$$|F(z) - F(1)| \leq \int_0^{|z-1|} \frac{d\rho}{C\sqrt{\rho}} = \frac{2}{C} \sqrt{|z - 1|}, \quad (19.3)$$

т.е. функция  $F(z)$  непрерывна в точке  $z = 1$ . Аналогичные оценки справедливы для  $F(z)$  при  $z = -1, \pm 1/k$ . Если же  $|z| \geq R$ , то

вместо неравенства (19.3) получается оценка

$$|F(z) - F(\infty)| \leq \frac{1}{C|z|}.$$

■

**УТВЕРЖДЕНИЕ 19.2.** *Функция  $F(z)$  биголоморфно отображает верхнюю полуплоскость  $D_+$  на открытый прямоугольник  $\square$  с вершинами в точках  $\pm K$ ,  $\pm K + iK'$ , где положительные константы  $K$ ,  $K'$  задаются формулами*

$$K := \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad K' := \int_1^{1/k} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}$$

с обычными положительными значениями корней.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В силу принципа соответствия границ (см. п. 18.1) и утверждения 19.1 достаточно проверить, что  $F$  биективно отображает границу  $\partial D_+ = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  на  $\partial \square$ .

Из определения  $F$  ясно, что  $F(0) = 0$  и функция  $w = F(z)$  биективно отображает отрезок  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$  плоскости  $z$  на отрезок  $[0, K] \subset \mathbb{R}$  плоскости  $w$  (поскольку подинтегральное выражение положительно, то  $F(x)$  монотонно возрастает от 0 до  $K$ , когда  $x$  пробегает отрезок  $[0, 1]$ ).

Посмотрим теперь, что происходит с функцией  $F(x)$ , когда  $x$  пробегает отрезок вещественной оси от 1 до  $1/k$ . При  $x \in (1, 1/k)$  функцию  $F(x)$  можно представить в виде

$$F(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{\varphi(\xi)} = \int_0^1 \frac{d\xi}{\varphi(\xi)} + \int_1^x \frac{d\xi}{\varphi(\xi)},$$

где интегралы в правой части понимаются как несобственные. Заменим в этой формуле интегрирование по отрезку  $[0, x]$  интегралом по контуру  $\Gamma_\delta$ , обходящему точку  $x = 1$  по малой полукругности

$$\gamma = \gamma_\delta = \{|z - 1| = \delta, \operatorname{Im} z \geq 0\}$$

с центром в точке  $z = 1$  радиуса  $\delta$ , лежащую в верхней полуплоскости  $\overline{D}_+$  (см. рис. 68). Мы рассматриваем ее как путь  $\gamma$  в  $\overline{D}_+$  с началом в точке  $z = 1 - \delta$  и концом в точке  $z = 1 + \delta$ , параметризуемый посредством  $z = 1 + \delta e^{i\theta}$ , где  $\theta$  изменяется от  $\pi$  до 0.

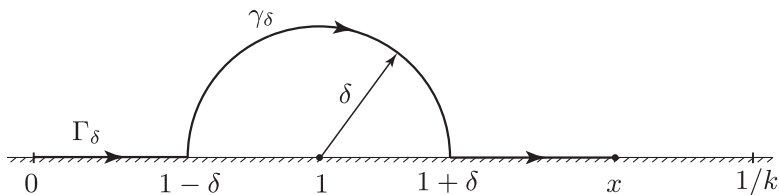


Рис. 68

Интеграл по  $\Gamma_\delta$ , равный

$$\int_{\Gamma_\delta} \frac{d\zeta}{\varphi(\zeta)} = \int_0^{1-\delta} \frac{d\xi}{\varphi(\xi)} + \int_{\gamma_\delta} \frac{d\zeta}{\varphi(\zeta)} + \int_{1+\delta}^x \frac{d\xi}{\varphi(\xi)},$$

с одной стороны, не зависит от  $\delta > 0$  по теореме Коши. С другой стороны, он имеет предел при  $\delta \rightarrow 0$  (интеграл по  $\gamma_\delta$  оценивается через  $C\sqrt{\delta}$  ввиду неравенства (19.2)), равный

$$\int_0^1 \frac{d\xi}{\varphi(\xi)} + \int_1^x \frac{d\xi}{\varphi(\xi)} = F(x).$$

Следовательно,

$$F(x) = \int_{\Gamma_\delta} \frac{d\zeta}{\varphi(\zeta)}$$

при любом достаточно малом  $\delta$ .

Подсчитаем приращение аргумента подкоренного выражения вдоль полуокружности  $\gamma_\delta$ . Аргумент

$$1 - z = -\delta e^{i\theta} = \delta e^{i(\theta-\pi)}$$

при обходе вдоль  $\gamma_\delta$  изменяется от 0 до  $-\pi$ , а аргументы трех других сомножителей  $1 + z$ ,  $1 \pm kz$  в выражении для  $\varphi(z)$  при обходе вдоль  $\gamma_\delta$  не меняются. Поэтому

$$\Delta_\gamma \arg(1 - z^2)(1 - k^2 z^2) = \Delta_\gamma \arg(1 - z) = -\pi,$$

где мы воспользовались равенством

$$\begin{aligned} \Delta_\gamma \arg[(1 - z)(1 + z)(1 - kz)(1 + kz)] &= \Delta_\gamma \arg(1 - z) \\ &+ \Delta_\gamma \arg(1 + z) + \Delta_\gamma \arg(1 - kz) + \Delta_\gamma \arg(1 + kz), \end{aligned}$$

вытекающим из определения  $\Delta_\gamma \arg$  в п. 13.2. Поэтому приращение подынтегрального корня равно

$$\Delta_\gamma \arg \varphi(z) = -\frac{\pi}{2}$$

(при извлечении корня аргумент делится на 2), т.е.  $\arg \varphi(x) = -\pi/2$  при  $x \in (1, 1/k]$ . Следовательно, для всех  $x \in (1, 1/k)$  будем иметь

$$\varphi(x) = -i\sqrt{(x^2 - 1)(1 - k^2x^2)}$$

с обычным положительным значением корня. Тем самым, при  $x \in (1, 1/k)$

$$F(x) = \int_0^{1-\delta} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} + \int_{\gamma_\delta} \frac{d\zeta}{\varphi(\zeta)} \\ + i \int_{1+\delta}^x \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi^2-1)(1-k^2\xi^2)}},$$

что (при  $\delta \rightarrow 0$ ) совпадает с

$$F(x) = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} + i \int_1^x \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi^2-1)(1-k^2\xi^2)}} \\ = K + i \int_1^x \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi^2-1)(1-k^2\xi^2)}}.$$

Из этой формулы вытекает, что  $w = F(z)$  биективно отображает отрезок  $[1, 1/k]$  плоскости  $z$  на отрезок  $[K, K + iK']$  плоскости  $w$ . Действительно,  $F(1) = K$  и подынтегральное выражение в

$$\int_1^x \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi^2-1)(1-k^2\xi^2)}}$$

положительно. Поэтому указанный интеграл монотонно возрастает от 0 до  $K'$ , когда  $x$  пробегает отрезок  $[1, 1/k]$ .

Для  $x \in (1/k, +\infty)$  аналогично получаем, что  $\arg \varphi(x) = -\pi$ , т.е.

$$\varphi(x) = -\sqrt{(x^2 - 1)(k^2x^2 - 1)}$$

и, следовательно,  $w = F(z)$  биективно отображает луч  $[1/k, +\infty]$  плоскости  $z$  на отрезок  $[K + iK', K + iK' - K'']$  плоскости  $w$ , где положительная константа

$$K'' := \int_{1/k}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 1)(k^2x^2 - 1)}} \underset{\substack{\text{замена} \\ y=1/kx}}{=} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2y^2)}}$$

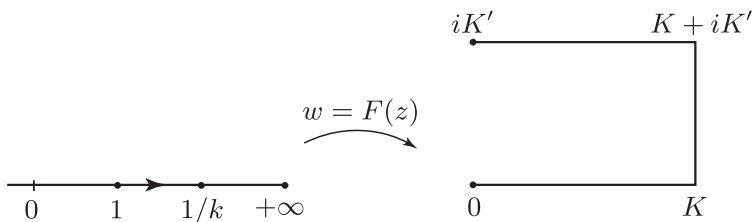


Рис. 69

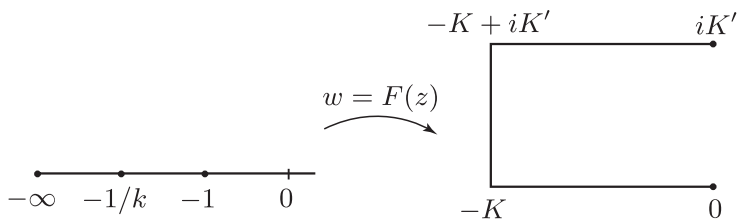


Рис. 70

на самом деле совпадает с  $K$ . Таким образом,  $w = F(z)$  биективно отображает отрезок  $[1/k, +\infty]$  плоскости  $z$  на отрезок  $[K + iK', iK']$  плоскости  $w$ . В итоге получаем, что функция  $w = F(z)$  биективно отображает положительную полуось  $[0, +\infty]$  плоскости  $z$  на ломаную с последовательными вершинами  $0, K, K + iK', iK'$  (см. рис. 69). Аналогично находится образ отрицательной полуоси  $[0, -\infty]$  — это ломаная с вершинами  $0, -K, -K + iK', iK'$  (см. рис. 70). Тем самым проверено, что  $F$  биективно отображает  $\partial D_+$  на  $\partial \square$ . ■

**Задача.** Пусть  $0 < k < 1$ . Докажите, что эллиптический интеграл 2-го рода

$$F(z) = \int_0^z \sqrt{\frac{1 - k^2 \zeta^2}{1 - \zeta^2}} d\zeta$$

конформно отображает верхнюю полуплоскость  $D_+ = \{\operatorname{Im} z > 0\}$  на некоторую область  $D$  и найдите эту область.

**Указание:** в данном случае  $F(\infty) = \infty$ , из-за чего область  $D$  будет неограничена и нельзя будет применить утверждения из п. 18.1. Однако, пользуясь тем, что приращение аргумента  $\Delta_{\gamma_R} \arg F(z)$  вдоль большой полуокружности  $\gamma_R = \{z \in D_+ : |z| = R\}$  (пробегаемой в направлении от  $R$  к  $-R$ ) равно  $\pi + o(1)$  при  $R \rightarrow +\infty$ , можно установить требуемый результат, повторяя доказательство принципа соответствия границ.

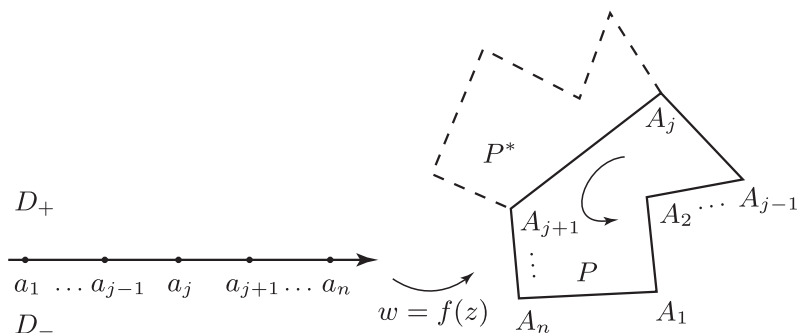


Рис. 71

**19.2. Интеграл Кристоффеля–Шварца.** Эллиптический интеграл из п. 19.1 выглядит довольно сложной функцией, а его появление в задаче о конформных отображениях производит впечатление хитрого трюка. Спрашивается, можно ли было предвидеть заранее, что конформное отображение полуплоскости на прямоугольник следует искать именно в таком виде? Оказывается, да. Более того, подобное рассуждение можно провести для любого ограниченного многоугольника, как показывает формулируемый ниже результат.

Обозначим через  $P$  многоугольник в  $\mathbb{C}$ , т.е. ограниченную односвязную область в  $\mathbb{C}$ , граница которой является ломаной с последовательными вершинами  $A_1, A_2, \dots, A_n$  (направление обхода положительное), см. рис. 71. Предположим, что внутренний угол при вершине  $A_j$  равен  $\pi\alpha_j$ , где  $0 < \alpha_j < 2$ . Допустим, что функция  $f$  биголоморфно отображает верхнюю полуплоскость  $D_+$  на многоугольник  $P$  и непрерывно продолжается до гомеоморфизма  $\overline{D}_+$  на  $\overline{P}$  (существование такой функции вытекает из теорем Римана и Каратеодори). Обозначим через  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  прообразы точек  $A_1, A_2, \dots, A_n$  при отображении  $f$  (мы предполагаем, в частности, что  $f(\infty)$  не является вершиной  $P$ ; если это не так, то нужно заменить  $f$  на ее композицию с подходящим дробно-линейным автоморфизмом  $D_+$ ). Тогда указанная функция  $f$  задается следующим *интегралом Кристоффеля–Шварца*:

$$f(z) = C_1 \int_{z_0}^z (\zeta - a_1)^{\alpha_1 - 1} (\zeta - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (\zeta - a_n)^{\alpha_n - 1} d\zeta + C_2,$$

$$z \in D_+, \quad (19.4)$$



где  $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$  — некоторые константы (выбор начальной точки  $z_0 \in D_+$  и ветви подынтегрального выражения в  $\overline{D}_+$  не имеет принципиального значения — другой выбор приведет лишь к изменению констант  $C_1, C_2$ ).

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Для случая прямоугольника  $P = \square$ , когда в роли точек  $a_j$  выступают  $\pm 1, \pm 1/k$ , а  $\alpha_j = 1/2$  для всех  $j = 1, \dots, 4$ , формула Кристоффеля–Шварца сводится к эллиптическому интегралу из п. 19.1.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ФОРМУЛЫ КРИСТОФФЕЛЯ–ШВАРЦА.**

**Шаг 1.** Покажем, что функция

$$g(z) := \frac{f''(z)}{f'(z)}, \quad z \in D_+,$$

допускает аналитическое продолжение в область  $\mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ .

Действительно, в силу гомеоморфности  $f: \partial D_+ \rightarrow \partial P$  образ произвольного отрезка  $[a_j, a_{j+1}] \subset \mathbb{R}$  (а также “отрезка”  $[a_n, a_1] \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , содержащего  $\infty$ ) при отображении  $f$  содержится в отрезке  $[A_j, A_{j+1}]$  (соответственно  $[A_n, A_1]$ ) на плоскости переменного  $w$ . Поэтому, применяя конструкцию принципа симметрии (изложенную в первом шаге доказательства этого принципа), мы можем продолжить  $f$  до функции, голоморфной в области  $D_+ \cup (a_j, a_{j+1}) \cup D_-$ , сужение которой на нижнюю полуплоскость  $D_- := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z < 0\}$  задает биголоморфизм  $D_-$  на многоугольник  $P^*$ , симметричный  $P$  относительно прямой  $A_j A_{j+1}$ . (Отметим, что в этом месте нельзя сослаться на сам принцип симметрии, поскольку не обязательно выполнено условие  $P \cap P^* = \emptyset$ .)

Полученное отображение нижней полуплоскости  $D_-$  на многоугольник  $P^*$  можно снова аналитически продолжить в верхнюю полуплоскость  $D_+$  через другой отрезок  $[a_k, a_{k+1}]$  до биголоморфного отображения  $D_+$  на многоугольник  $P^{**}$ , симметричный  $P^*$  относительно прямой  $A_k A_{k+1}$  и т.д. Таким образом, исходный элемент  $(D_+, f)$  можно продолжить по любому пути

$$\gamma: I \rightarrow \overline{C} \setminus \{a_1, \dots, a_n\},$$

последовательно применяя симметрию относительно тех отрезков вещественной оси, которые пересекает путь  $\gamma$ .

В результате мы получаем некоторую аналитическую функцию  $\mathcal{F}$  в области  $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ . Любые две однозначные ветви  $f_1, f_2$  функции  $\mathcal{F}$  в верхней полуплоскости  $D_+$  конформно отображают  $D_+$  на многоугольники  $P_1, P_2$ , получаемые друг из друга конечным (и притом четным) числом симметрий относительно сторон. Но любое преобразование указанного вида является движением плоскости, т.е. сводится к сдвигу с поворотом. Поэтому  $f_2$  получается из  $f_1$  заменой переменных, задаваемой сдвигом с поворотом, т.е.

$$f_2(z) = e^{i\theta} f_1(z) + C$$

для некоторых констант  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $C \in \mathbb{C}$ . Отсюда, в частности, следует, что

$$\frac{f_1''}{f_1'} = \frac{f_2''}{f_2'} \quad \text{в } D_+$$

(заметим, что производные  $f_1'$  и  $f_2'$  не обращаются в нуль в  $D_+$  в силу конформности  $f_1$  и  $f_2$ ). Поэтому при аналитическом продолжении исходной функции  $f$  функция  $g := f''/f'$  продолжается до *однозначной* голоморфной функции на области  $\mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ , что и утверждалось.

*Шаг 2.* Покажем, что функция  $g$  имеет в каждой точке  $z = a_j$  полюс 1-го порядка с вычетом  $\alpha_j - 1$  и голоморфна в окрестности точки  $\infty$ .

Исследуем сначала поведение функции  $g$  в окрестности точки  $z = a_j$ . Для этого рассмотрим отображение

$$\zeta = \varphi(w) = (w - A_j)^{1/\alpha_j}.$$

Здесь имеется в виду любая ветвь этой функции на надлежащей связанной компоненте пересечения  $P$  с достаточно малым кругом  $\{|w - A_j| < \varepsilon\}$ . (Эта компонента представляет собой круговой сектор раствора  $\pi\alpha_j$  с вершиной  $A_j$ , т.е. всегда односвязна.) Отображение  $\varphi$  переводит угол раствора  $\pi\alpha_j$  с вершиной  $A_j$  в угол раствора  $\pi$  (см. рис. 72). Поэтому для достаточно малых  $\delta > 0$  композиция

$$\tilde{f} := \varphi \circ f$$

(которая априори определена в  $\overline{D}_+ \cap \{|z - a_j| < \delta\}$ ) переводит интервал  $[a_j - \delta, a_j + \delta] \subset \mathbb{R}$  в интервал на прямой в плоскости  $\zeta$  и, значит, аналитически продолжается по принципу симметрии до

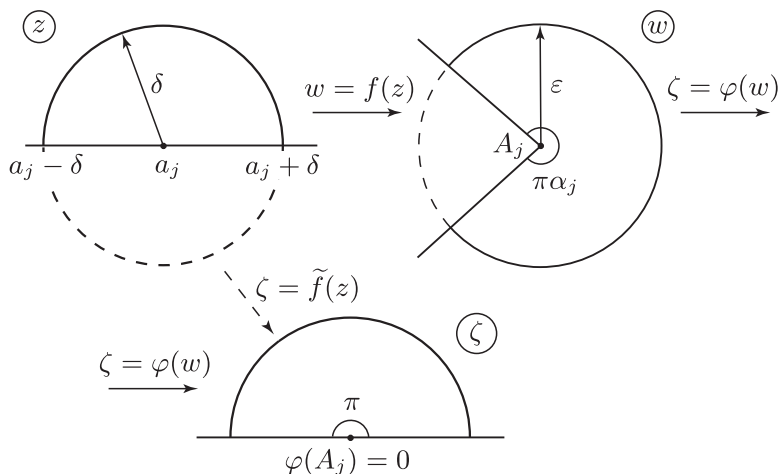


Рис. 72

функции, которая голоморфна в круге  $\{|z - a_j| < \delta\}$  и имеет в точке  $z = a_j$  ненулевую производную (согласно критерию локальной обратимости из п. 14.2). Поскольку  $\tilde{f}(a_j) = 0$ , то в окрестности точки  $z = a_j$  ее можно записать в виде

$$\tilde{f}(z) = (z - a_j)h(z),$$

где  $h$  — некоторая функция, голоморфная и не обращающаяся в нуль в окрестности  $a_j$ . Логарифм этой функции  $\ln h(z)$  является аналитической функцией в указанной окрестности и допускает в ней выделение голоморфной ветви  $\Phi(z)$  согласно п. 11.4. Тем самым,

$$\tilde{f}(z) = (z - a_j)e^{\Phi(z)} = (f(z) - A_j)^{1/\alpha_j}.$$

Возводя обе части второго равенства в степень  $\alpha_j$ , получаем

$$f(z) = A_j + (z - a_j)^{\alpha_j} e^{\alpha_j \Phi(z)}.$$

Дифференцируя полученное соотношение, приходим к

$$\begin{aligned} f'(z) &= \alpha_j (z - a_j)^{\alpha_j - 1} e^{\alpha_j \Phi(z)} + (z - a_j)^{\alpha_j} \alpha_j \Phi'(z) e^{\alpha_j \Phi(z)} \\ &= (z - a_j)^{\alpha_j - 1} e^{\Psi(z)}, \end{aligned}$$

где  $\Psi(z)$  — функция, голоморфная в окрестности точки  $z = a_j$ . Продолжая действовать формально, прологарифмируем последнее равенство

$$\ln f'(z) = (\alpha_j - 1) \ln(z - a_j) + \Psi(z)$$

и продифференцируем полученное соотношение. Получим

$$g(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{\alpha_j - 1}{z - a_j} + \Psi'(z).$$

Формальные выкладки, с помощью которых получено это равенство, обоснованы в окрестности любой точки из  $D_+ \cap \{|z - a_j| < \delta\}$  (где  $z - a_j$  и  $f'(z)$  не обращаются в нуль, так что все степени и логарифмы определены и голоморфны). Но, в силу теоремы единственности, полученное равенство справедливо и при  $0 < |z - a_j| < \delta$ . Поскольку функция  $\Psi'(z)$  голоморфна при  $|z - a_j| < \delta$ , получаем отсюда требуемое утверждение о поведении функции  $g$  в окрестности точки  $z = a_j$ .

Перейдем к доказательству голоморфности функции  $g$  в окрестности точки  $\infty$ . Согласно шагу 1 исходная функция  $f$  продолжается из  $D_+$  до функции, голоморфной в целой окрестности точки  $\infty$ , т.е.

$$f(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots \quad \text{при } |z| > R,$$

где  $c_1 \neq 0$  в силу локальной обратимости  $f$  в точке  $\infty$ . Отсюда

$$f'(z) = -\frac{c_1}{z^2} + \dots \quad \text{и} \quad f''(z) = 2\frac{c_1}{z^3} + \dots,$$

т.е. функция

$$g(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)} = -\frac{2}{z} + \dots$$

голоморфна в точке  $\infty$ .

**Шаг 3.** Итак, мы показали, что функция  $g(z)$  голоморфна в области  $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$  и имеет в точках  $z = a_j$  простые полюсы с вычетами  $\alpha_j - 1$ . По теореме о функциях, мероморфных на  $\overline{\mathbb{C}}$  (п. 7.11), это означает, что

$$g(z) = \frac{\alpha_1 - 1}{z - a_1} + \dots + \frac{\alpha_n - 1}{z - a_n} \quad \text{для всех } z \in \overline{\mathbb{C}}.$$

Считая, что  $z \in D_+$ , можно в левой части этого равенства заменить  $g(z)$  на  $f''/f' = (\ln f)'$  (логарифм корректно определен в силу п. 11.4). Интегрируя эту функцию по любому пути в  $D_+$ , связывающему  $z_0 \in D_+$  с  $z$ , и затем потенцируя, получим:

$$f'(z) = C_1(z - a_1)^{\alpha_1 - 1} \dots (z - a_n)^{\alpha_n - 1} \quad \text{для всех } z \in D_+,$$

где  $C_1 \in \mathbb{C}$  — ненулевая константа. Снова интегрируя это выражение по любому пути в  $D_+$ , связывающему  $z_0$  с  $z$ , придем к формуле Кристоффеля–Шварца (19.4). ■

Задачи. (1) Записав теорему о полной сумме вычетов для функции  $g(z)$ , участвующей в доказательстве формулы Кристоффеля–Шварца, покажите, что сумма внутренних углов любого односвязного  $n$ -угольника на плоскости равна  $\pi(n - 2)$ .

(2) Пусть  $f \not\equiv \text{const}$  — произвольная функция, голоморфная в окрестности  $\infty$ . Покажите, что то же самое верно и для функции  $f''/f'$ .

## Лекция 20. Эллиптические функции

**20.1. Эллиптический синус.** Определим функцию

$$z = \operatorname{sn}(w) = \operatorname{sn}(w, k),$$

называемую *эллиптическим синусом*, как биголоморфное отображение прямоугольника

$$\square := \{w \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} w| < K, 0 < \operatorname{Im} w < K'\}$$

с вершинами в точках  $\pm K, \pm K + iK'$  на верхнюю полуплоскость  $D_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ , обратное к эллиптическому интегралу

$$w = F(z, k) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}$$

из п. 19.1.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ.** *Функция  $z = \operatorname{sn}(w)$  аналитически продолжается до мероморфной функции во всей комплексной плоскости (обозначаемой снова через  $\operatorname{sn}(w)$ ). Полюсы функции  $\operatorname{sn}(w)$  располагаются на решетке*

$$\Lambda := \{iK' + 2Kn + 2iK'm : n, m \in \mathbb{Z}\}$$

*и имеют порядок 1. Продолженная функция  $z = \operatorname{sn}(w)$  двоякопериодична, т.е.*

$$\operatorname{sn}(w + 4K) = \operatorname{sn}(w), \quad \operatorname{sn}(w + 2iK') = \operatorname{sn}(w) \quad (20.1)$$

*для всех  $w \in \mathbb{C}$ , за исключением точек решетки  $\Lambda$ , и удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$[\operatorname{sn}'(w)]^2 = (1 - \operatorname{sn}(w)^2)(1 - k^2 \operatorname{sn}(w)^2) \quad (20.2)$$

*во всех точках  $w \in \mathbb{C}$ , где она голоморфна.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Обозначим временно прямоугольник  $\square$  через  $\square_{0,0}$ . По определению функция  $z = \operatorname{sn}(w)$  биголоморфно отображает прямоугольник  $\square_{0,0}$  на верхнюю полуплоскость  $D_+$ . Обозначим через

$$\square_{1,0}, \quad \square_{-1,0}, \quad \square_{0,1}, \quad \square_{0,-1}$$

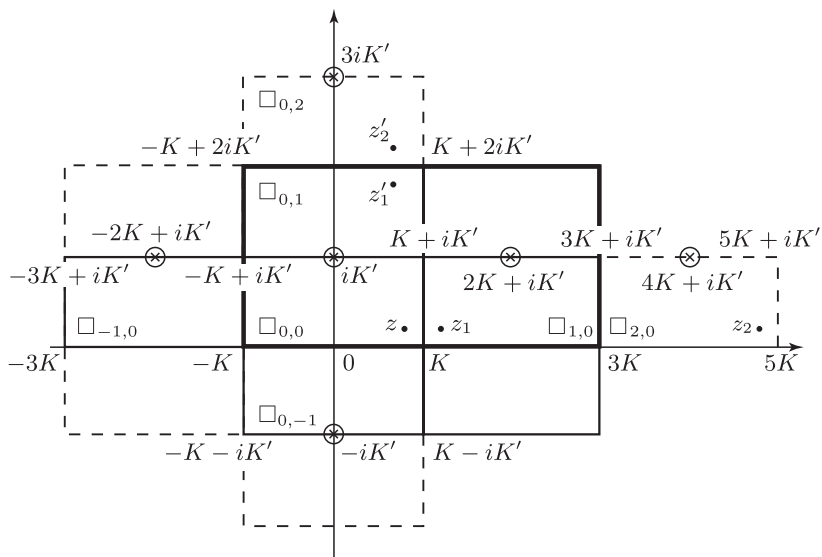


Рис. 73

четыре прямоугольника, симметричных  $\square_{0,0}$  относительно его сторон (см. рис. 73). Тогда по принципу симметрии функция  $z = \operatorname{sn}(w)$  допускает аналитическое продолжение в каждый из четырех прямоугольников  $\square_{\pm 1,0}$ ,  $\square_{0,\pm 1}$ . При этом продолжение  $z = \operatorname{sn}(w)$  в любой из этих прямоугольников биголоморфно отображает его на нижнюю полуплоскость  $D_-$  и потому удовлетворяет условиям принципа симметрии относительно каждой из его четырех сторон. Следовательно, мы можем снова применить принцип симметрии относительно сторон прямоугольников  $\square_{\pm 1,0}$ ,  $\square_{0,\pm 1}$  и в результате получим продолжение  $z = \operatorname{sn}(w)$  в прямоугольники  $\square_{m,n}$ , симметричные  $\square_{\pm 1,0}$ ,  $\square_{0,\pm 1}$  относительно их сторон. Это продолжение будет давать биголоморфное отображение прямоугольников  $\square_{m,n}$  снова на верхнюю полуплоскость  $D_+$ . Если при этом какие-то два из полученных 16 продолжений имеют одну и ту же область определения (ею может быть либо исходный прямоугольник  $\square_{0,0}$ , либо один из 9 новых прямоугольников, возникших на втором шаге), то они на этой области определения совпадают. (Это вытекает из формулы  $F(z) = f(z^*)^*$  и того, что симметрии относительно любых двух перпендикуляр-

ных прямых коммутируют.) Более того, рассмотрим, например, прямоугольник  $\square_{2,0}$ , полученный на втором шаге, который симметричен прямоугольнику  $\square_{1,0}$  относительно его боковой стороны  $[3K, 3K + iK']$ . Так как, в свою очередь, прямоугольник  $\square_{1,0}$  получается из исходного прямоугольника  $\square_{0,0}$  отражением относительно боковой стороны  $[K, K + iK']$ , то  $\square_{2,0}$  получается из  $\square_{0,0}$  композицией двух отражений, т.е. сдвигом  $w \mapsto w + 4K$ . В плоскости переменного  $z$  каждому из этих отражений отвечает симметрия относительно вещественной оси, а их композиции — тождественное отображение  $z \mapsto z$  верхней полуплоскости  $D_+$ . Отсюда вытекает соотношение

$$\operatorname{sn}(w + 4K) = \operatorname{sn}(w), \quad (20.1')$$

выполненное для всех точек  $w \in \square_{0,0}$ . С другой стороны, мы можем рассмотреть прямоугольник  $\square_{0,2}$ , который получается также на втором шаге из исходного прямоугольника  $\square_{0,0}$  композицией отражений относительно стороны  $[-K + iK', K + iK']$  прямоугольника  $\square_{0,0}$  и стороны  $[-K + 2iK', K + 2iK']$  прямоугольника  $\square_{0,1}$ . По тем же соображениям, что и выше, получим соотношение

$$\operatorname{sn}(w + 2iK') = \operatorname{sn}(w), \quad (20.1'')$$

выполненное для всех точек  $w \in \square_{0,0}$ .

Продолжая указанный процесс бесконечное число раз, мы получим продолжение функции  $\operatorname{sn}(w)$  на всю плоскость до *однозначной* функции, которая голоморфна во всех точках плоскости, за исключением точки  $iK'$  и всех точек, полученных из нее симметриями относительно сторон прямоугольников, т.е. точек решетки

$$\Lambda := \{iK' + 2Kn + 2iK'm : n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Действительно, все эти точки по принципу симметрии переходят в  $\infty$  плоскости  $z$ , т.е. функция  $\operatorname{sn}(w)$  имеет в них полюсы. Также из принципа симметрии вытекает локальная обратимость функции  $1/\operatorname{sn}(w)$  в окрестности любой точки множества  $\Lambda$ , откуда в силу п. 14.2 следует, что все указанные полюсы имеют 1-й порядок.

Из теоремы единственности вытекает, что соотношения (20.1') и (20.1'') для функции  $\operatorname{sn}(w)$ , проверенные в точках  $w \in \square_{0,0}$ , выполняются, на самом деле, во всех точках голоморфности функции  $\operatorname{sn}(w)$ , т.е. при всех  $w \in \mathbb{C}$ , за исключением точек решетки  $\Lambda$ . Тем самым, функция  $\operatorname{sn}(w)$  двоякопериодична.



Дифференциальное уравнение (20.2) из формулировки теоремы, очевидно, выполняется при  $w \in \square_{0,0}$  (это вытекает прямо из определения  $\operatorname{sn}(w)$  через эллиптический интеграл). По теореме единственности оно верно и для всех  $w \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ . ■

В силу свойства двоякопериодичности естественной областью определения эллиптического синуса является *комплексный тор*  $X$ , полученный из комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  отождествлением всех точек вида  $z + 4Kn + 2iK'm$ ,  $n, m \in \mathbb{Z}$ . В следующих лекциях мы изучим эту ситуацию в более общем виде.

**Задача.** Покажите, что

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} \operatorname{sn}(w, k) = \sin w \quad \text{для всех } w \in \mathbb{C}$$

(этим и объясняется название “эллиптического синуса”). Во что переходит в пределе  $k \rightarrow 0$  прямоугольник  $\square = \{|\operatorname{Re} w| < K, 0 < \operatorname{Im} w < K'\}$ ?

**20.2. Периоды мероморфных функций.** Число  $\tau \in \mathbb{C}$  называется *периодом* функции  $f$ , определенной на  $\mathbb{C}$ , если

$$f(z + \tau) = f(z) \quad \text{для всех } z \in \mathbb{C}.$$

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 20.1.** *Множество  $T = \{\tau\}$  всех периодов непостоянной мероморфной функции  $f: \mathbb{C} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  есть замкнутая дискретная (т.е. не имеющая предельных точек в  $\mathbb{C}$ ) подгруппа аддитивной группы  $\mathbb{C}$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** То, что  $T$  есть замкнутая подгруппа  $\mathbb{C}$ , сразу вытекает из определения периода и непрерывности  $f$ . Проверим, что множество  $T$  дискретно. Допустим, напротив, что найдется последовательность  $\tau_n$  (попарно различных) периодов из  $T$ , которая сходится к  $\tau_0 \in \mathbb{C}$  (как отмечено выше,  $\tau_0$  тоже принадлежит  $T$ ). Поскольку  $\tau_n - \tau_0$  являются периодами из  $T$ , то

$$f(z + \tau_n - \tau_0) = f(z) \quad \text{для всех } z \in \mathbb{C}.$$

Пусть  $z_0 \in \mathbb{C}$  — произвольная точка голоморфности функции  $f$ . Тогда из предыдущего равенства следует, что

$$f(z_n) = f(z_0) = \operatorname{const} \quad \text{для } z_n := z_0 + \tau_n - \tau_0 \rightarrow z_0, \quad z_n \neq z_0,$$

что невозможно по теореме единственности ( $f \not\equiv \operatorname{const}$  по условию). ■

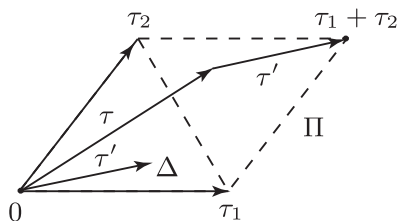


Рис. 74

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 20.2.** *Непостоянная мероморфная функция не может иметь более двух линейно независимых (над  $\mathbb{R}$ ) периодов.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** 1) Допустим сначала, что все периоды функции  $f$  лежат на некоторой прямой, проходящей через 0.

Поскольку множество  $T$  всех периодов функции  $f$  дискретно, оно состоит либо из одной точки 0 (в этом случае утверждение становится тривиальным), либо содержит элемент  $\tau_0 \in T \setminus \{0\}$  с наименьшим модулем. Покажем, что в последнем случае все остальные элементы  $\tau \in T$  кратны  $\tau_0$ . Действительно, иначе нашелся бы период  $\tau$  вида

$$\tau = n\tau_0 + \alpha\tau_0, \quad \text{где } n \in \mathbb{Z}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Но тогда период  $\alpha\tau_0 = \tau - n\tau_0$  имел бы модуль, строго меньший  $|\tau_0|$ , что противоречит определению  $\tau_0$ . Итак, в этом случае функция  $f$  имеет период  $\tau_0$  такой, что все остальные периоды  $f$  являются его целыми кратными.

2) Пусть теперь не все периоды  $f$  лежат на одной прямой.

Из дискретности множества  $T$  вытекает, что найдется замкнутый треугольник  $\Delta$  с вершинами в точках  $0, \tau_1, \tau_2 \in T$ , не содержащий других точек  $T$ , кроме своих вершин. Тогда замкнутый параллелограмм  $\Pi$  с вершинами  $0, \tau_1, \tau_2, \tau_1 + \tau_2$  также не содержит других точек из  $T$ , кроме своих вершин (см. рис. 74). Действительно, если бы в  $\Pi$  нашелся период  $\tau \in T$ , отличный от вершин  $\Pi$ , то либо сам период  $\tau$ , либо симметричный ему (относительно центра параллелограмма) период  $\tau' := \tau_1 + \tau_2 - \tau$  принадлежал бы треугольнику  $\Delta$ , вопреки выбору  $\Delta$ .

Покажем, что любой элемент  $\tau \in T$  представим в виде  $\tau = n\tau_1 + m\tau_2$  для некоторых  $n, m \in \mathbb{Z}$ . Действительно, допустим,

напротив, что нашелся элемент  $\tau \in T$ , представимый в виде

$$\tau = (n + \alpha)\tau_1 + (m + \beta)\tau_2,$$

где  $n, m \in \mathbb{Z}$  и  $0 \leq \alpha, \beta < 1$  — некоторые числа, из которых хотя бы одно отлично от нуля. Но тогда период

$$\alpha\tau_1 + \beta\tau_2 = \tau - n\tau_1 - m\tau_2$$

принадлежал бы параллелограмму  $\Pi$  и был отличен от его вершин, что противоречит выбору  $\Pi$ . Таким образом, в этом случае функция  $f$  имеет два линейно независимых периода  $\tau_1$  и  $\tau_2$  таких, что все остальные периоды  $f$  являются их целочисленными линейными комбинациями. ■

**ЗАДАЧА.** Покажите, что всякая замкнутая дискретная подгруппа аддитивной группы  $\mathbb{R}^n$  имеет вид

$$\{k_1x_1 + k_2x_2 + \dots + k_mx_m : k_1, \dots, k_m \in \mathbb{Z}\}$$

для некоторых линейно независимых векторов  $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ .

### 20.3. Определение и свойства эллиптических функций.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Любая непостоянная двоякопериодическая мероморфная функция  $f: \mathbb{C} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  называется *эллиптической функцией*.

Как мы видели, множество периодов эллиптической функции есть решетка вида

$$L = \{n\tau_1 + m\tau_2 : n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Для определенности будем всегда считать, что

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right) > 0,$$

т.е. направление вектора  $\tau_2$  получается из направления вектора  $\tau_1$  поворотом на угол от 0 до  $\pi$ . В силу двоякопериодичности эллиптическую функцию  $f$  достаточно изучать в любом параллелограмме  $\Pi$  с вершинами в точках  $z_0, z_0 + \tau_1, z_0 + \tau_2, z_0 + \tau_1 + \tau_2$ . Такой параллелограмм называется *фундаментальным*. Далее, мы будем обычно считать для простоты, что  $z_0 = 0$ . Для того чтобы

сдвиги параллелограмма  $\Pi$  на векторы решетки  $L$  не пересекались между собой и покрывали всю плоскость, будем присоединять к внутренности параллелограмма  $\Pi$  также открытые отрезки  $(0, \tau_1)$ ,  $(0, \tau_2)$ , лежащие на его сторонах, и точку  $0$ .

*Свойство 20.1. Эллиптические функции с данной решеткой периодов  $L$ , если к ним добавить все тождественно постоянные функции на  $\mathbb{C}$ , образуют поле, замкнутое относительно операции дифференцирования.*

*Свойство 20.2 (теорема Лиувилля). Всякая эллиптическая функция имеет хотя бы один полюс. Иными словами, не существует целых эллиптических функций.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Целая эллиптическая функция была бы ограничена на своем фундаментальном параллелограмме  $\Pi$ , а значит, и на всей плоскости  $\mathbb{C}$ . По теореме Лиувилля она должна быть тождественной константой. ■

*Свойство 20.3. Сумма вычетов эллиптической функции по всем полюсам, принадлежащим фундаментальному параллелограмму  $\Pi$ , равна нулю.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Выберем фундаментальный параллелограмм  $\Pi$  с вершинами в точках  $z_0$ ,  $z_0 + \tau_1$ ,  $z_0 + \tau_2$ ,  $z_0 + \tau_1 + \tau_2$  так, чтобы на границе  $\Pi$  не было полюсов  $f$ . Функция  $f$  принимает одинаковые значения на противоположных сторонах  $\Pi$ . Поэтому по теореме Коши о вычетах

$$2\pi i \sum_{a \in \Pi} \operatorname{res}_a f = \int_{\partial \Pi} f dz = 0,$$

поскольку противоположные стороны  $\Pi$  проходятся в противоположных направлениях и интегралы по ним в сумме дают нуль. ■

**СЛЕДСТВИЕ.** Эллиптическая функция имеет в фундаментальном параллелограмме не менее двух полюсов (с учетом кратности).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Иначе функция  $f$  имела бы в параллелограмме  $\Pi$  единственный полюс 1-го порядка. При этом вычет

в этом полюсе был бы равен нулю по свойству 20.3, т.е. указанный полюс был бы устранимой особой точкой, что невозможно по свойству 20.2. ■

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Число полюсов эллиптической функции в фундаментальном параллелограмме (с учетом кратностей) называется ее *порядком*.

**СВОЙСТВО 20.4.** Эллиптическая функция принимает в фундаментальном параллелограмме каждое значение  $a \in \overline{\mathbb{C}}$  одинаковое число раз, равное ее порядку.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Снова можно считать, что на  $\partial\Pi$  нет полюсов и  $a$ -точек функции  $f$ . (Напомним, что  $z$  называется  $a$ -точкой функции  $f$ , если  $f(z) = a$ .) Пусть  $N_a$  есть число  $a$ -точек  $f$  в параллелограмме  $\Pi$ . По принципу аргумента, примененному к функции  $f(z) - a$ , имеем:

$$N_a - P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Pi} \frac{f'(z)}{f(z) - a} dz.$$

Так как подынтегральная функция является эллиптической с теми же периодами, что и  $f$ , то интеграл в правой части равен нулю по теореме Коши о вычетах (см. свойство 20.3), откуда следует, что  $N_a = P$  совпадает с порядком  $f$ . ■

**СЛЕДСТВИЕ.** Предположим, что эллиптическая функция  $f$  имеет в фундаментальном параллелограмме  $\Pi$  нули  $\{a_k\}$  порядков  $n_k$  и полюсы  $\{b_l\}$  порядков  $m_l$ . Тогда

$$N - P = \sum n_k - \sum m_l = 0.$$

**СВОЙСТВО 20.5.** Предположим, что эллиптическая функция  $f$  имеет в фундаментальном параллелограмме  $\Pi$  нули  $\{a_k\}$  порядков  $n_k$  и полюсы  $\{b_l\}$  порядков  $m_l$ . Тогда

$$\sum n_k a_k - \sum m_l b_l = n\tau_1 + m\tau_2 \quad \text{для некоторых } n, m \in \mathbb{Z}.$$

Иначе говоря,

$$\sum n_k a_k - \sum m_l b_l \equiv 0 \pmod{L}.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Выберем фундаментальный параллелограмм  $\Pi$  с вершинами в точках  $z_0$ ,  $z_0 + \tau_1$ ,  $z_0 + \tau_2$ ,  $z_0 + \tau_1 + \tau_2$  так, чтобы точка  $0$  не принадлежала  $\overline{\Pi}$  и на  $\partial\Pi$  не было нулей и полюсов функции  $f$ . Введем функцию

$$g(z) := z \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Она мероморфна в окрестности  $\overline{\Pi}$ , а ее полюсы в  $\Pi$  располагаются в нулях и полюсах функции  $f$ . При этом вычет  $g$  в нуле  $a_k$  порядка  $n_k$  равен  $n_k a_k$ , а вычет  $g$  в полюсе  $b_l$  порядка  $m_l$  равен  $-m_l b_l$  (это проверяется также, как в примерах 13.1, 13.2 из п. 13.1). Применим к функции  $g$  теорему Коши о вычетах:

$$2\pi i \left( \sum n_k a_k - \sum m_l b_l \right) = \int_{\partial\Pi} g(z) dz.$$

(Заметим, что это равенство есть частный случай задачи (3) из п. 13.3.) Вклад пары сторон  $[z_0, z_0 + \tau_1]$  и  $[z_0 + \tau_2, z_0 + \tau_2 + \tau_1]$  параллелограмма  $\Pi$  в правую часть равен

$$\int_{z_0}^{z_0 + \tau_1} g(z) dz - \int_{z_0 + \tau_2}^{z_0 + \tau_1 + \tau_2} g(z) dz.$$

После замены  $z = \zeta + \tau_2$  во втором интеграле последнее выражение принимает вид

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^{z_0 + \tau_1} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \int_{z_0}^{z_0 + \tau_1} (\zeta + \tau_2) \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta \\ = -\tau_2 \int_{z_0}^{z_0 + \tau_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -2\pi i m \tau_2, \end{aligned}$$

где

$$m := \frac{1}{2\pi} \Delta_{[z_0, z_0 + \tau_1]} \arg f(z).$$

Это целое число, поскольку  $f(z_0) = f(z_0 + \tau_1)$  (см. п. 13.2). Аналогично получаем, что сумма интегралов от  $g(z)$  по остальным двум сторонам параллелограмма равна  $2\pi i n \tau_1$  для некоторого  $n \in \mathbb{Z}$ . ■

**ЗАМЕЧАНИЕ.** В свойстве 20.5 можно заменить нули  $f$  на  $a$ -точки  $f$  для произвольного  $a \in \mathbb{C}$ .

## Лекция 21. Функция Вейерштрасса

**21.1. Определение и основные свойства.** В п. 20.1 мы рассмотрели конкретный пример эллиптической функции — эллиптический синус  $\operatorname{sn}(z)$ . Эта функция имеет прямоугольную решетку периодов, порождаемую периодами  $\tau_1 = 4K$  и  $\tau_2 = 2iK'$ . В фундаментальном параллелограмме  $\operatorname{sn}(z)$  (обведенном жирной чертой на рис. 73) содержатся ровно два полюса 1-го порядка:  $z = iK'$  и  $z = 2K + iK'$ , так что  $\operatorname{sn}(z)$  есть эллиптическая функция 2-го порядка. (Отметим, что согласно следствию из свойства 20.3 это минимальный возможный порядок эллиптической функции.) В этом пункте мы построим для произвольной решетки

$$L = \{n\tau_1 + m\tau_2 : n, m \in \mathbb{Z}\} \quad \text{с} \quad \operatorname{Im} \frac{\tau_2}{\tau_1} > 0$$

эллиптическую функцию 2-го порядка, имеющую  $L$  своей решеткой периодов.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** *Функция Вейерштрасса* задается формулой

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\tau \in L'} \left[ \frac{1}{(z - \tau)^2} - \frac{1}{\tau^2} \right], \quad (21.1)$$

где  $L' := L \setminus \{0\}$ , т.е. суммирование ведется по всем  $\tau = n\tau_1 + m\tau_2$  с целыми  $n, m$ , не равными одновременно нулю.

Заметим, что ряд в формуле (21.1) нельзя представлять в виде суммы рядов

$$\sum_{\tau \in L'} \frac{1}{(z - \tau)^2} \quad \text{и} \quad \sum_{\tau \in L'} \frac{1}{\tau^2},$$

поскольку указанные ряды по отдельности расходятся.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 21.1.** *Ряд (21.1) сходится абсолютно и равномерно на компактах в  $\mathbb{C} \setminus L$ , и его сумма есть мероморфная функция на  $\mathbb{C}$ , имеющая двукратные полюсы в точках решетки  $L$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Обозначим через  $K$  произвольный компакт в множестве  $\mathbb{C} \setminus L$ . Имеем

$$\frac{1}{(z - \tau)^2} - \frac{1}{\tau^2} = \frac{2z\tau - z^2}{\tau^2(z - \tau)^2} = \frac{1}{\tau^3} \cdot \frac{2z - z^2/\tau}{(z/\tau - 1)^2}.$$

Так как  $|z|$  ограничен некоторой константой при  $z \in K$ , то при  $|\tau| \rightarrow \infty$  второй сомножитель в правой части стремится к  $2z$ . Поэтому при всех  $z \in K$  и достаточно больших  $|\tau|$  справедливо неравенство

$$\left| \frac{1}{(z - \tau)^2} - \frac{1}{\tau^2} \right| < \frac{C}{|\tau|^3} \quad (21.2)$$

с некоторой константой  $C > 0$ . С другой стороны, по условию существует  $\varepsilon > 0$  такое, что

$$|z - \tau| > \varepsilon \quad \text{для всех } z \in K \text{ и } \tau \in L'.$$

Поэтому, увеличивая константу  $C$ , всегда можно добиться того, чтобы неравенство (21.2) выполнялось при всех  $\tau \in L'$  и  $z \in K$ .

Таким образом, ряд (21.1) для всех  $z \in K$  оценивается по модулю (умноженным на  $C$ ) рядом вида

$$\sum_{\tau \in L'} \frac{1}{|\tau|^3} = \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \frac{1}{|n\tau_1 + m\tau_2|^3}. \quad (21.3)$$

Сумму по всем точкам  $(n, m)$  решетки  $\mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$  можно заменить суммой “по квадратам”:  $\max\{|n|, |m|\} = k$  (см. рис. 75), так что

$$\sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \frac{1}{|n\tau_1 + m\tau_2|^3} = \sum_{k=1}^{\infty} S_k,$$

где

$$S_k := \sum_{\max\{|n|, |m|\} = k} \frac{1}{|n\tau_1 + m\tau_2|^3}.$$

Иначе говоря,  $S_k$  есть сумма членов ряда (21.3) по всем точкам  $\tau$  решетки  $L$ , лежащим на границе параллелограмма  $\Pi_k$  с вершинами в точках  $k\tau_1 + k\tau_2$ ,  $-k\tau_1 + k\tau_2$ ,  $-k\tau_1 - k\tau_2$ ,  $k\tau_1 - k\tau_2$ .

Докажем, что ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} S_k$  сходится. Для этого обозначим расстояние от начала координат до границы параллелограмма  $\Pi_1$  через  $h > 0$  (см. рис. 76). Поскольку  $\Pi_k$  получается из  $\Pi_1$  растяжением в  $k$  раз, расстояние от начала координат до границы параллелограмма  $\Pi_k$  равно  $kh$ . Следовательно,

$$|\tau| \geq kh \quad \text{для всех } \tau \in \partial\Pi_k.$$

Поскольку на  $\partial\Pi_k$  лежат ровно  $8k$  точек решетки  $L$ , получаем, что

$$S_k \leq 8k \cdot \frac{1}{(kh)^3} = C \frac{1}{k^2},$$



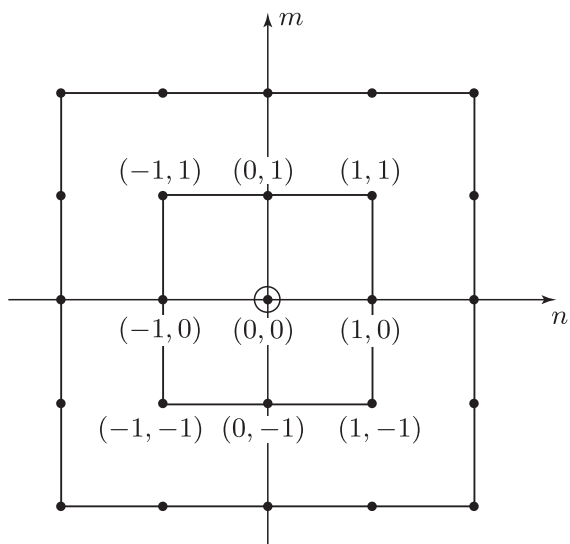


Рис. 75

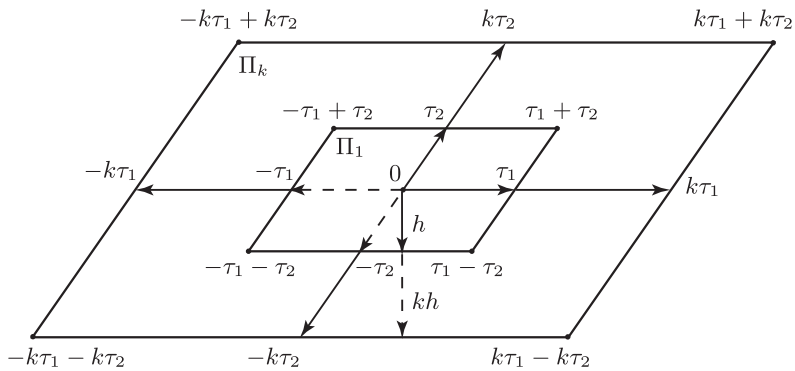


Рис. 76

т.е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} S_k \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

По признаку Вейерштрасса это влечет абсолютную и равномерную на  $K$  сходимость ряда (21.1). По теореме Вейерштрасса (п. 6.14) сумма  $\wp(z)$  этого ряда голоморфна на  $\mathbb{C} \setminus L$ .

Рассмотрим теперь произвольную точку  $\tau_0 \in L$ . Если исключить из ряда (21.1) член

$$\frac{1}{(z - \tau_0)^2} - \frac{1}{\tau_0^2}$$

(или член  $1/(z^2)$  в случае, когда  $\tau_0 = 0$ ), то все остальные его члены будут голоморфны в окрестности  $\tau_0$ , а образованный ими ряд будет сходиться равномерно в окрестности  $\tau_0$  (это доказывается тем же рассуждением, что и выше). Следовательно, функция  $\wp(z)$  имеет в точке  $\tau_0$  двукратный полюс. ■

Для доказательства эллиптичности функции  $\wp(z)$  необходимо показать, что она двоякопериодична. Указанная двоякопериодичность не очевидна из формулы (21.1), поэтому мы предпочитаем установить ее следующим обходным путем.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 21.2.** *Функция  $\wp(z)$  четна, т.е.  $\wp(z) = \wp(-z)$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Замена  $z$  на  $-z$  в формуле (21.1) эквивалентна замене  $\tau$  на  $-\tau$  в сумме по  $\tau \in L$ . ■

**УТВЕРЖДЕНИЕ 21.3.** *Производная  $\wp'(z)$  функции Вейерштрасса есть нечетная эллиптическая функция порядка 3 с решеткой периодов  $L$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Нечетность  $\wp'(z)$  следует из четности  $\wp(z)$ . Далее, поскольку ряд (21.1) сходится равномерно на компактах в  $\mathbb{C} \setminus L$  (утверждение 21.1), его можно дифференцировать почленно. Получаем, что

$$\wp'(z) = -2 \sum_{\tau \in L} \frac{1}{(z - \tau)^3}, \quad (21.4)$$

откуда ясно, что каждое число  $\tau \in L$  является периодом функции  $\wp'(z)$ . Кроме того,  $\wp'(z)$  имеет полюсы 3-го порядка в точках

$\tau \in L$  (и только в них). Отсюда следует, что  $\wp'(z)$  не имеет никаких других периодов, кроме точек  $L$ , т.е. решетка периодов этой функции есть в точности  $L$ . ■

**УТВЕРЖДЕНИЕ 21.4.** *Функция  $\wp(z)$  двоякопериодична с решеткой периодов  $L$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Покажем, что  $\tau_1$  есть период  $\wp(z)$ . Из равенства  $\wp'(z + \tau_1) \equiv \wp'(z)$  вытекает, в силу единственности первообразной (предложение 4.1 из п. 4.4), что

$$\wp(z + \tau_1) \equiv \wp(z) + C \quad \text{для некоторой константы } C \in \mathbb{C}.$$

Подставляя в это равенство  $z = -\tau_1/2$ , получим, что

$$C = \wp\left(\frac{\tau_1}{2}\right) - \wp\left(-\frac{\tau_1}{2}\right).$$

Но правая часть равна нулю в силу четности  $\wp(z)$ , так что  $C = 0$  и  $\tau_1$  есть период  $\wp(z)$ . Аналогично показывается, что  $\tau_2$  также является периодом. Наконец, функция  $\wp(z)$  имеет полюсы в точках решетки  $L$  (и только в них), откуда вытекает, что эта функция не имеет периодов, отличных от точек  $L$ . ■

Рассмотрим поведение функции Вейерштрасса  $\wp(z)$  в фундаментальном параллелограмме  $\Pi$  с точки зрения общих свойств эллиптических функций, изложенных в п. 20.3.

Удобно выбрать в качестве  $\Pi$  параллелограмм с вершинами в точках (см. рис. 77)

$$\frac{-\tau_1 - \tau_2}{4}, \quad \frac{-\tau_1 + 3\tau_2}{4}, \quad \frac{3\tau_1 - \tau_2}{4}, \quad \frac{3\tau_1 + 3\tau_2}{4}.$$

Тогда функция  $\wp(z)$  будет иметь в  $\Pi$  единственный 2-кратный полюс в точке 0, поэтому *порядок  $\wp(z)$  равен 2, а сумма полюсов совпадает с 0*. Следовательно, по свойствам 20.4, 20.5 из п. 20.3 функция  $\wp(z)$  имеет внутри  $\Pi$  два нуля  $a_1, a_2$  и сумма этих нулей равна 0 по mod  $L$ . То же самое верно для любого значения  $c \in \mathbb{C}$ , а именно в  $\Pi$  найдутся ровно две точки  $b_1, b_2$  такие, что

$$\wp(b_1) = \wp(b_2) = c \quad \text{и} \quad b_1 + b_2 \equiv 0 \pmod{L} \iff b_2 \equiv -b_1 \pmod{L}.$$

В том случае, когда  $b_1 =: b$  обладает тем свойством, что

$$b \equiv -b \pmod{L} \iff 2b \equiv 0 \pmod{L},$$

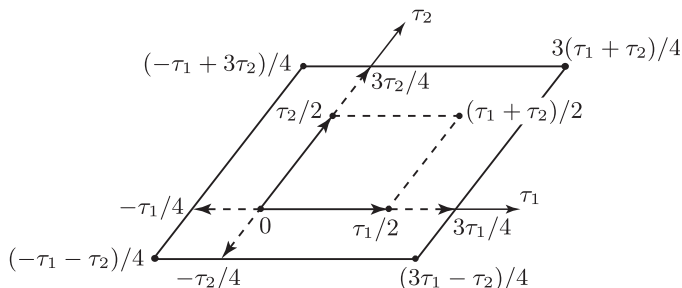


Рис. 77

обе точки  $b_1, b_2$  сливаются в одну точку  $b$  и значение  $c \in \mathbb{C}$  принимается двукратно (как в случае полюса, расположенного в 0). В фундаментальный параллелограмм попадают всего четыре таких точки  $b$ , поскольку

$$2b \equiv 0 \pmod{L} \iff 2b = n\tau_1 + m\tau_2 \iff b = n\frac{\tau_1}{2} + m\frac{\tau_2}{2}.$$

Мы выбрали параллелограмм  $\Pi$  так, чтобы  $b = 0$  и точки

$$b = \frac{\tau_1}{2}, \frac{\tau_2}{2}, \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} =: \frac{\tau_3}{2},$$

называемые иначе *полупериодами*, попадали внутрь  $\Pi$ . В нуле функция  $\wp(z)$  имеет двукратный полюс, а значения  $\wp(z)$  в остальных трех точках обозначим через

$$e_1 := \wp\left(\frac{\tau_1}{2}\right), \quad e_2 := \wp\left(\frac{\tau_2}{2}\right), \quad e_3 := \wp\left(\frac{\tau_3}{2}\right) = \wp\left(\frac{\tau_1 + \tau_2}{2}\right).$$

**Задача.** Докажите, что для любой решетки  $L$  и любого целого  $n \geq 2$  существует эллиптическая функция порядка  $n$ , имеющая  $L$  своей решеткой периодов.

**21.2. Описание эллиптических функций с заданной решеткой периодов.** Как мы уже видели, эллиптические функции с заданной решеткой периодов образуют (вместе с константами) поле, замкнутое относительно взятия производной. Оказывается, это поле порождается функцией Вейерштрасса  $\wp$  и ее производной. Точнее, имеет место следующая

**ТЕОРЕМА.** Пусть  $f$  — произвольная эллиптическая функция с решеткой периодов  $L$ , а  $\wp$  — функция Вейерштрасса с той же решеткой периодов. Тогда найдутся рациональные функции  $R$  и  $R_1$  такие, что

$$f = R(\wp) + R_1(\wp)\wp'.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Функцию  $f$  можно представить в виде суммы четной и нечетной функций:

$$f = g + h, \quad \text{где } g(z) := \frac{f(z) + f(-z)}{2} \quad \text{и} \quad h(z) := \frac{f(z) - f(-z)}{2}.$$

Так как производная  $\wp'$  функции Вейерштрасса нечетна, то функция  $g_1(z) := h(z)/\wp'(z)$  четна, и мы имеем

$$f(z) = g(z) + g_1(z)\wp'(z),$$

где  $g, g_1$  — четные эллиптические функции. Поэтому достаточно показать, что *любая четная эллиптическая функция с решеткой периодов  $L$  есть рациональная функция от  $\wp$ .*

Отвлечемся от доказательства теоремы, чтобы установить лемму о нулях и полюсах четных эллиптических функций.

**ЛЕММА.** Пусть  $f$  — четная эллиптическая функция с решеткой периодов  $L$ . Пусть  $a$  — нуль порядка  $n$  функции  $f$ . Тогда

- (1)  $-a$  также является нулем  $f$  порядка  $n$ ;
- (2) если  $a \equiv -a \pmod{L}$ , то порядок  $n$  четен.

Аналогичное утверждение верно, если  $a$  есть полюс порядка  $n$  функции  $f$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ.** Первое утверждение вытекает из того, что  $k$ -я производная четной функции удовлетворяет соотношению

$$f^{(k)}(-z) = (-1)^k f^{(k)}(z).$$

Докажем второе утверждение. Из условия  $a \equiv -a \pmod{L}$  в силу периодичности  $f^{(k)}$  вытекает, что

$$f^{(k)}(-a) = f^{(k)}(a) \quad \text{для всех } k.$$

При нечетном  $k$  это вместе с предыдущей формулой дает

$$f^{(k)}(a) = 0.$$

Следовательно, первая ненулевая производная  $f$  в точке  $a$  обязательно имеет четный порядок, т.е. порядок нуля  $f$  в точке  $a$  четен. Для доказательства аналогичных утверждений в случае полюсов  $f$  нужно рассмотреть функцию  $1/f$ . ■

Вернемся к доказательству теоремы. Пусть  $f$  — произвольная четная эллиптическая функция с решеткой периодов  $L$ , а  $\Pi$  — ее фундаментальный параллелограмм. Из доказанной леммы вытекает, что множество всех нулей  $f$  в параллелограмме  $\Pi$  (с учетом кратности) можно разбить на пары точек вида  $\{a, -a\}$  (в некоторых из этих пар точки могут совпадать по модулю  $L$ ). Аналогичным образом, множество полюсов  $f$  в параллелограмме  $\Pi$  разбивается на пары вида  $\{b, -b\}$ . Выберем в каждой паре по одному представителю:

$$\begin{aligned} a_1, \dots, a_k & \text{ — представители нулей;} \\ b_1, \dots, b_k & \text{ — представители полюсов} \end{aligned}$$

(число представителей нулей и полюсов одно и то же по свойству 20.4 из п. 20.3).

Предположим сначала, что ни одна из этих точек-представителей не принадлежит  $L$ . Рассмотрим четную эллиптическую функцию

$$Q(z) = R(\wp(z)) := \frac{\prod_{j=1}^k (\wp(z) - \wp(a_j))}{\prod_{j=1}^k (\wp(z) - \wp(b_j))}.$$

Она имеет те же нули и полюсы, что и  $f$ . Действительно,  $\wp(z)$  принимает каждое значение ровно 2 раза (по свойству 20.4 из п. 20.3) и при каждом  $j = 1, \dots, k$  имеем:  $\wp(-a_j) = \wp(a_j)$  в силу четности  $\wp$ . Поэтому

$$\wp(z) - \wp(a_j) = 0 \iff z \equiv \pm a_j \pmod{L},$$

т.е. множество нулей  $Q(z)$  совпадает с  $\{\pm a_1, \dots, \pm a_k\}$  (с учетом кратностей), и аналогично для полюсов. Следовательно,  $\frac{f(z)}{Q(z)}$  есть эллиптическая функция, не имеющая нулей и полюсов в фундаментальном параллелограмме, т.е. константа, откуда

$$f(z) \equiv \text{const} \cdot R(\wp(z)).$$

В случае, если один или несколько представителей  $a_j, b_j$  попадают в узел решетки  $L$ , это рассуждение необходимо модифицировать, поскольку функция Вейерштрасса  $\wp(z)$  имеет в соответствующей точке полюс. Если, например, представитель  $a_j$  попал в узел  $L$ , то в числителе  $Q(z)$  нужно выбросить сомножитель с номером  $j$ . Тогда в знаменателе формулы станет на один сомножитель больше, чем в числителе, и при  $z \rightarrow a_j$  предел  $Q(z)$  будет равен

$$Q(z) \sim \frac{1}{\wp(z)} \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow a_j,$$

т.е.  $Q$  имеет в точке  $a_j$  нуль, как и  $f$ . Если же представитель  $b_j$  попал в узел  $L$ , то нужно выбросить  $j$ -й сомножитель в знаменателе  $Q$  и, по тем же соображениям, функция  $Q$  будет иметь в точке  $b_j$  полюс, как и функция  $f$ . Модифицированная таким образом функция  $Q$  будет снова иметь те же нули и полюсы, что и функция  $f$ . Поэтому, как и в предыдущем случае,

$$f(z) \equiv \text{const} \cdot R(\wp(z)).$$

■

**21.3. Дифференциальное уравнение для функции Вейерштрасса.** Как мы только что показали, всякая четная эллиптическая функция с решеткой периодов  $L$  есть рациональная функция от  $\wp(z)$ . В частности, это относится к функции  $(\wp'(z))^2$ . Она имеет двукратные нули в полупериодах

$$\frac{\tau_1}{2}, \quad \frac{\tau_2}{2}, \quad \frac{\tau_3}{2} := \frac{\tau_1}{2} + \frac{\tau_2}{2}$$

и 6-кратный полюс в нуле. Действительно, в силу утверждения 21.3 из п. 21.1 порядок  $(\wp'(z))^2$  равен 6. В нуле эта функция имеет 6-кратный полюс, а в полупериодах  $a = \tau_1/2, \tau_2/2, \tau_3/2$  — нули (в силу нечетности  $\wp'(z)$  и свойства  $a \equiv -a \pmod{L}$ ). Указанные нули имеют порядок 2, поскольку являются нулями функции  $\wp'(z)$  порядка 1 (напомним, см. п. 20.3, что функция Вейерштрасса  $\wp(z)$  принимает в этих точках значения с кратностью 2).

Поэтому конструкция из предыдущего доказательства дает для функции  $(\wp'(z))^2$  представление

$$(\wp'(z))^2 = \text{const} \cdot (\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3), \quad (21.5)$$

где  $e_j := \wp(\tau_j/2)$  при  $j = 1, 2, 3$ .

Выпишем лорановские разложения функций  $\wp$  и  $\wp'$  в нуле:

$$\wp(z) = z^{-2} + \dots, \quad \wp'(z) = -2z^{-3} + \dots$$

(точками обозначены неотрицательные степени  $z$ , т.е. регулярные части лорановских разложений в нуле) и подставим их в формулу (21.5). Сравнение коэффициентов при  $z^{-6}$  в обеих частях этой формулы показывает, что постоянная  $\text{const}$  в (21.5) равна 4. Таким образом, представление (21.5) можно переписать в виде

$$(\wp'(z))^2 = 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3). \quad (21.6)$$

**Задача.** Покажите, что  $\text{sn}^2(z)$  есть четная эллиптическая функция с решеткой периодов  $2K\mathbb{Z} + 2iK'\mathbb{Z}$  (сравните с  $\text{sn}(z)$ !). Покажите, что  $\text{sn}^2(z) = (\wp(z) - e_2)^{-1}$ , где  $\wp(z)$  — отвечающая этой решетке функция Вейерштрасса.

Выведем еще одну форму дифференциального уравнения для функции Вейерштрасса. Перепишем формулу (21.6) в виде

$$(\wp'(z))^2 = 4\wp^3(z) + b\wp^2(z) + c\wp(z) + d \quad (21.7)$$

с неизвестными пока коэффициентами  $b, c, d$ . Нам предстоит их определить из условия совпадения главных частей лорановских разложений в нуле функций, стоящих в обеих частях равенства (21.7).

Чтобы выписать лорановские разложения указанных функций в нуле, воспользуемся известными разложениями в ряд функций:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \dots, \\ \frac{1}{(1-x)^2} &= 1 + 2x + 3x^2 + \dots, \\ \frac{1}{(1-x)^3} &= 1 + 3x + 6x^2 + \dots \end{aligned}$$

(выписанные ряды сходятся при  $|x| < 1$ ). Лорановское разложе-



ние функции Вейерштрасса  $\wp(z)$  в нуле имеет вид

$$\begin{aligned}\wp(z) &= \frac{1}{z^2} + \sum_{\tau \in L'} \left[ \frac{1}{(z - \tau)^2} - \frac{1}{\tau^2} \right] \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{\tau \in L'} \left[ \frac{1}{\tau^2} \left( 1 + 2\frac{z}{\tau} + 3\frac{z^2}{\tau^2} + \dots \right) - \frac{1}{\tau^2} \right] \\ &= \frac{1}{z^2} + 2 \left( \sum_{\tau \in L'} \frac{1}{\tau^3} \right) z + 3 \left( \sum_{\tau \in L'} \frac{1}{\tau^4} \right) z^2 + \dots\end{aligned}$$

Введем обозначение

$$G_m := \sum_{\tau \in L'} \frac{1}{\tau^m} \quad \text{для всех натуральных } m$$

и заметим, что  $G_m = 0$  при нечетных  $m$  (так как решетка  $L$  в этом случае содержит вместе с каждой своей точкой  $\tau \neq 0$  и симметричную точку  $-\tau$ ).

Тогда лорановское разложение  $\wp(z)$  в нуле примет вид

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + 3G_4z^2 + 5G_6z^4 + \dots \quad (21.8)$$

Отсюда возведением в степень получаются лорановские разложения функций  $\wp^2$  и  $\wp^3$  в нуле:

$$\begin{aligned}\wp^2(z) &= \frac{1}{z^4} + 6G_4 + 10G_6z^2 + \dots, \\ \wp^3(z) &= \frac{1}{z^6} + 9G_4\frac{1}{z^2} + 15G_6 + \dots.\end{aligned}$$

С другой стороны, пользуясь формулой (21.4) из п. 21.1, получим лорановское разложение функции  $\wp'(z)$  в нуле:

$$\begin{aligned}\wp'(z) &= -\frac{2}{z^3} - 2 \sum_{\tau \in L'} \frac{1}{(z - \tau)^3} = -\frac{2}{z^3} - 2 \sum_{\tau \in L'} \frac{1}{\tau^3} \cdot \frac{1}{(z/\tau - 1)^3} \\ &= -\frac{2}{z^3} + 2 \sum_{\tau \in L'} \frac{1}{\tau^3} \left( 1 + 3\frac{z}{\tau} + 6\frac{z^2}{\tau^2} + 10\frac{z^3}{\tau^3} + \dots \right) \\ &= -\frac{2}{z^3} + 6G_4z + 20G_6z^3 + \dots\end{aligned}$$

Следовательно, лорановское разложение  $(\wp'(z))^2$  в нуле имеет вид

$$(\wp'(z))^2 = \frac{4}{z^6} - 24\frac{G_4}{z^2} - 80G_6 + \dots$$

Сравним его с лорановским разложением функции

$$4\wp^3(z) + b\wp^2(z) + c\wp(z) + d,$$

которое имеет вид

$$\frac{4}{z^6} + \frac{b}{z^4} + (36G_4 + c)\frac{1}{z^2} + (60G_6 + 6bG_4 + d) + \dots,$$

и найдем отсюда значения констант  $b, c, d$ :

$$\begin{aligned} b &= 0, \\ 36G_4 + c &= -24G_4 \implies c = -60G_4, \\ 60G_6 + 6bG_4 + d &= -80G_6 \implies d = -140G_6. \end{aligned}$$

Введем дополнительно обозначения:

$$\begin{aligned} g_2(L) = g_2 &:= 60G_4 = 60 \sum_{\tau \in L'} \frac{1}{\tau^4}, \\ g_3(L) = g_3 &:= 140G_6 = 140 \sum_{\tau \in L'} \frac{1}{\tau^6}. \end{aligned}$$

Тогда уравнение (21.7) примет окончательный вид:

$$(\wp'(z))^2 = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3. \quad (21.9)$$

Приравнивая правые части уравнений (21.6) и (21.9) и пользуясь тем, что область значений функции Вейерштрасса  $\{\wp(z) : z \in \mathbb{C} \setminus L\}$  есть вся комплексная плоскость  $\mathbb{C}$  (по свойству 20.4 из п. 20.3), а также формулами Виета, получаем, что

$$\begin{cases} e_1 + e_2 + e_3 = 0, \\ e_1e_2 + e_1e_3 + e_2e_3 = -\frac{g_2}{4}, \\ e_1e_2e_3 = \frac{g_3}{4}. \end{cases} \quad (21.10)$$

## Лекция 22. Реализация тора в виде кубической кривой в $\mathbb{C}^2$

Дифференциальное уравнение (21.9) из п. 21.3 для функции Вейерштрасса показывает, что точки  $(\wp(z), \wp'(z))$  лежат на кубической кривой  $C$  в 2-мерном комплексном пространстве  $\mathbb{C}^2$ , задаваемой уравнением

$$C = C_L := \{(u, v) \in \mathbb{C}^2 : v^2 = 4u^3 - g_2u - g_3\},$$

где  $g_2 = g_2(L) = 60G_4(L)$ ,  $g_3 = g_3(L) = 140G_6(L)$ . С другой стороны, функции  $\wp(z)$  и  $\wp'(z)$ , будучи дwoякопериодическими относительно решетки  $L$ , определены на торе  $T = T_L := \mathbb{C}/L$ . Тем самым, отображение, задаваемое функциями  $(\wp(z), \wp'(z))$ , связывает тор  $T_L$  с кубической кривой  $C_L$ . Это отображение целиком определяется заданием решетки  $L$  на комплексной плоскости. В данной лекции мы подробно изучим свойства этого замечательного отображения. Начнем с точных определений, относящихся к тору  $T$  и кубической кривой  $C$ .

**22.1. Определения тора и кубической кривой в  $\mathbb{C}^2$ .** Каждой решетке  $L$  на комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  отвечает *комплексный тор*

$$T = T_L := \mathbb{C}/L,$$

являющийся одномерным комплексным многообразием. По определению  $T$  есть множество классов эквивалентности точек комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  относительно отношения

$$z_1 \sim z_2 \iff z_1 - z_2 \in L.$$

Локальная карта в малой окрестности произвольной точки  $\zeta \in T$ , с помощью которой вводится локальная координата в точке  $\zeta$  (см. п. 12.5), задается тождественным отображением этой окрестности на себя. Проекция  $\pi: \mathbb{C} \rightarrow T$ , сопоставляющая каждой точке плоскости отвечающий ей класс эквивалентности в  $T = \mathbb{C}/L$ , есть неразветвленное голоморфное накрытие в смысле п. 12.6.

Тор  $T = T_L$  является естественной областью определения для эллиптических функций с решеткой периодов  $L$ . Более точно, *мероморфная функция  $f: \mathbb{C} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  эллиптически с решеткой периодов  $L \iff$  существует голоморфное отображение  $\Phi: T_L \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$*

такое, что  $f = \Phi \circ \pi$ :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{f} & \overline{\mathbb{C}} \\ & \searrow \pi & \nearrow \Phi \\ & T_L & \end{array}$$

Сопоставим теперь решетке  $L \subset \mathbb{C}$  комплексную кубическую кривую

$$C = C_L := \{(u, v) \in \mathbb{C}^2 : v^2 = 4u^3 - g_2u - g_3\},$$

где

$$g_2 = g_2(L) = 60G_4(L), \quad g_3 = g_3(L) = 140G_6(L).$$

Заметим, что вместе с каждой точкой  $(u, v)$  кривая  $C$  содержит и симметричную точку  $(u, -v)$ .

Чтобы задать структуру одномерного комплексного многообразия на  $C = C_L$ , рассмотрим аналитическую функцию

$$v = \sqrt{P(u)} \quad \text{на } \mathbb{C} \setminus \{e_1, e_2, e_3\},$$

где

$$P(u) := 4u^3 - g_2u - g_3 = 4(u - e_1)(u - e_2)(u - e_3)$$

(см. формулы (21.6), (21.9) из п. 21.3). В окрестности любой точки  $u_0 \in \mathbb{C} \setminus \{e_1, e_2, e_3\}$  указанная функция распадается (по теореме о монодромии) на две голоморфных ветви, так что пересечение

$$C \cap \{(u, v) \in \mathbb{C}^2 : |u - u_0| < \varepsilon\}$$

является объединением графиков этих ветвей (см. рис. 78). Поэтому в окрестности каждой из двух точек  $(u_0, \pm v_0) \in C$ , лежащих над точкой  $u_0 \in \mathbb{C} \setminus \{e_1, e_2, e_3\}$ , множество  $C$  однозначно (и непрерывно) проектируется на плоскость переменной  $u$ . Эту проекцию мы и выбираем в качестве локальной карты в точках  $(u_0, \pm v_0) \in C$ .

Рассмотрим теперь оставшиеся точки  $C$  (которые проектируются в точки  $u_0 = e_1, e_2, e_3$ ). Заметим, прежде всего, что для любой решетки  $L$  числа  $e_1, e_2, e_3$  попарно различны. Действительно, допустим, напротив, что одно из значений  $e_j$  совпадает с другим значением  $e_k$ . Тогда функция  $\wp(z)$  будет принимать значение  $e_j = e_k$  в фундаментальном параллелограмме не менее четырех раз с учетом кратностей, тогда как ее порядок равен 2. Противоречие.

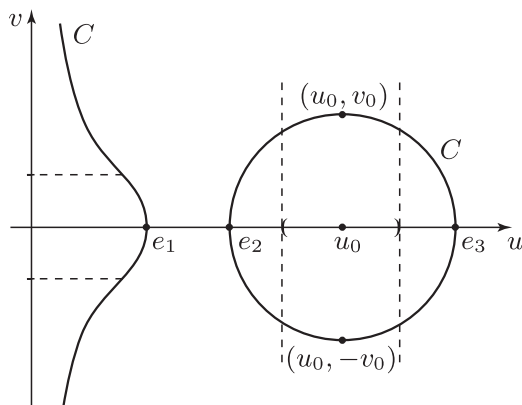


Рис. 78

Следовательно,  $P'(e_j) \neq 0$ , т.е. функция  $v = P(u)$  обратима в окрестности точки  $u = e_j$  (см. п. 14.2), а значит, множество  $C$  в окрестности каждой из трех оставшихся точек  $(e_j, 0) \in C$ ,  $j = 1, 2, 3$ , однозначно проектируется на плоскость переменной  $v$ . Эта проекция задает локальные карты в указанных точках. (С помощью аналогичного рассуждения можно было бы избежать ссылки на теорему о монодромии в предыдущем абзаце).

Проверку того, что построенная система локальных карт действительно задает на  $C_L$  структуру одномерного комплексного многообразия (т.е. удовлетворяет условию определения 12.1 из п. 12.5), оставляем читателю в качестве упражнения.

**Задача.** Покажите, что ни один из указанных приемов не позволяет ввести на подмножествах  $\{v^2 = u^3\}$  и  $\{v^2 = u^2(u - 1)\}$  пространства  $\mathbb{C}^2$  структуру одномерного комплексного многообразия вблизи точки  $(0, 0)$ .

**22.2. Параметризация кубической кривой с помощью функции Вейерштрасса.** Построенные в предыдущем пункте локальные карты на кривой  $C_L$  задают на ней локальную параметризацию (комплексным параметром, изменяющимся на комплексной плоскости). Однако отображение  $z \mapsto (\wp(z), \wp'(z))$  позволяет ввести на  $C_L$  и глобальную параметризацию. Точнее, справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Отображение*

$$\gamma: T_L \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^2,$$

*задаваемое формулой*

$$z \mapsto \gamma(z) = (\wp(z), \wp'(z)),$$

*является биголоморфизмом проколотого тора  $T_L \setminus \{0\}$  на кубическую кривую  $C_L$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что образ отображения  $\gamma$  содержится в  $C_L$ , вытекает из формулы (21.9) в п. 21.3. С другой стороны, голоморфность  $\gamma$ , рассматриваемого как отображение  $T_L \setminus \{0\} \rightarrow C_L$ , следует из описания локальных карт в п. 22.1. Поскольку биективное голоморфное отображение одномерных комплексных многообразий является биголоморфизмом (это доказывается так же, как для плоских областей в замечании 14.3 из п. 14.2), осталось только показать, что отображение  $\gamma: T_L \setminus \{0\} \rightarrow C_L$  биективно. Иными словами, для каждой точки  $(u_0, v_0) \in C_L$  существует единственная точка  $z \in T_L \setminus \{0\}$  такая, что

$$\gamma(z) = (u_0, v_0) \iff \wp(z) = u_0, \wp'(z) = v_0.$$

Пусть сначала  $v_0 = 0$ , т.е.  $u_0$  есть один из трех корней  $e_1, e_2, e_3$  уравнения  $P(u) = 0$ . Значение  $u = e_j$  принимается функцией  $u = \wp(z)$  в единственной точке  $z = \tau_j/2$  фундаментальной параллелограмма  $\Pi$ , но с кратностью 2, поэтому  $\wp'(\tau_j/2) = 0$ . Следовательно,  $z = \tau_j/2$  есть единственное решение уравнения  $\gamma(z) = (e_j, 0)$  в параллелограмме  $\Pi$  (или, эквивалентно, на торе  $T_L$ ).

Пусть теперь  $v_0 \neq 0$ , т.е.  $u_0 \in \mathbb{C} \setminus \{e_1, e_2, e_3\}$ . Тогда значение  $u = u_0$  принимается функцией  $u = \wp(z)$  ровно в двух различных точках  $z_1, z_2$  параллелограмма  $\Pi$  (оба раза с кратностью 1), причем

$$z_2 \equiv -z_1 \pmod{L} \quad \text{и} \quad \wp'(z_2) = -\wp'(z_1) \neq 0.$$

Тем самым,

$$u_0 = \wp(z_1) = \wp(z_2), \quad v_0^2 = 4u_0^3 - g_2u_0 - g_3 = [\wp'(z_1)]^2 = [\wp'(z_2)]^2.$$

Таким образом, каждая из точек  $(u_0, \pm v_0)$  кривой  $C_L$ , лежащих над точкой  $u_0$  плоскости  $u$ , имеет единственный прообраз (а именно  $z_1$  или  $z_2$ ) при отображении  $\gamma$ . ■

**ЗАМЕЧАНИЕ 22.1.** Можно продолжить построенное отображение  $\gamma$  в точку  $z = 0$ , если рассмотреть замыкание  $\overline{C}$  кубической кривой  $C \subset \mathbb{C}^2$  в комплексном проективном пространстве  $\mathbb{C}P^2 \supset \mathbb{C}^2$ . Точке  $z = 0$  будет отвечать при этом (единственная) точка  $c_0 \in \overline{C}$ , лежащая на бесконечно удаленной комплексной прямой  $L_\infty \subset \mathbb{C}P^2$ . Отметим без доказательства, что проекция  $\overline{C}$  на  $L_\infty$  однозначна в окрестности точки  $c_0$  (так как  $\overline{C}$  и  $L_\infty$  касаются друг друга в точке  $c_0$  как гладкие 2-мерные подмногообразия  $\mathbb{C}P^2$ ) и может быть взята за локальную карту на  $\overline{C}$  в окрестности этой точки. Продолженное отображение  $\gamma$  является биголоморфизмом тора  $T_L$  на кубическую кривую  $\overline{C}_L \subset \mathbb{C}P^2$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 22.2.** Отметим еще, что метод изучения кубических кривых вида  $\{v^2 = 4u^3 - \gamma_2 u - \gamma_3\}$  с помощью функции Вейерштрасса применим к любым кубическим кривым. Точнее, для любых  $\gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{C}$ , удовлетворяющих условию  $\gamma_2^3 - 27\gamma_3^2 \neq 0$  (которое означает, что все три корня полинома  $P(u) = 4u^3 - \gamma_2 u - \gamma_3$  различны), найдется решетка  $L$ , для которой  $g_2(L) = \gamma_2$ ,  $g_3(L) = \gamma_3$ .

**ЗАДАЧА.** Пусть  $0 < k < 1$ . Определим числа  $K, K' > 0$  так же, как в утверждении 19.2 из п. 19.1, и рассмотрим решетку  $L := 4K\mathbb{Z} + 2iK'\mathbb{Z}$ . Опишите структуру одномерного комплексного многообразия на кривой 4-й степени

$$C'_L := \{(u, v) \in \mathbb{C}^2 : v^2 = (1 - u^2)(1 - k^2 u^2)\}$$

и покажите, что отображение  $z \mapsto (\text{sn}(z), \text{sn}'(z))$  задает биголоморфизм тора  $T_L$  с двумя выколотыми точками (полюсами  $\text{sn}(z)$ ) на кривую  $C'_L$ .

*Указание:* см. уравнение (20.2) из п. 20.1.

**22.3. Сложение точек на кубической кривой.** Сложение чисел на комплексной плоскости порождает операцию сложения точек на торе, а она с помощью отображения  $\gamma$  индуцирует операцию сложения точек кубической кривой. Найдем явную формулу для этой операции.

Пусть точки  $P_1, P_2$  кубической кривой  $C$  отвечают точкам  $z_1, z_2$  фундаментального параллелограмма  $\Pi$ , т.е.

$$P_1 = (\wp(z_1), \wp'(z_1)), \quad P_2 = (\wp(z_2), \wp'(z_2)).$$

Проведем через них комплексную прямую  $v = au + b$  (см. рис. 79), так что

$$\wp'(z_j) = a\wp(z_j) + b \quad \text{при } j = 1, 2.$$

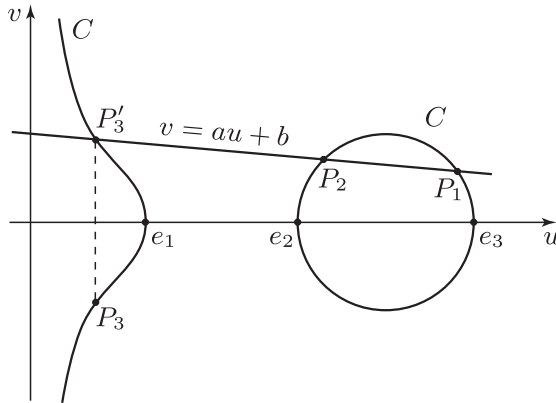


Рис. 79

Эллиптическая функция  $\wp'(z) - a\wp(z) - b$  имеет в фундаментальном параллелограмме  $\Pi$  единственный полюс  $z = 0$  кратности 3. Поэтому (см. свойство 20.4 из п. 20.3) уравнение

$$\wp'(z) - a\wp(z) - b = 0$$

имеет в  $\Pi$  ровно 3 корня (с учетом кратности), а именно  $z_1$ ,  $z_2$  и еще один корень  $z_3$  (который может совпадать с  $z_1$  или  $z_2$ ). Пользуясь свойством 20.5 из п. 20.3 и тем, что сумма полюсов функции  $\wp'(z) - a\wp(z) - b$  равна нулю, получаем, что

$$z_1 + z_2 + z_3 \equiv 0 \pmod{L}, \quad \text{т.е.} \quad z_3 \equiv -(z_1 + z_2) \pmod{L}.$$

Следовательно, третья точка пересечения прямой  $v = au + b$  с кубической кривой  $C$  имеет вид

$$\begin{aligned} P_3' &= (\wp(z_3), \wp'(z_3)) = (\wp(-z_1 - z_2), \wp'(-z_1 - z_2)) \\ &= (\wp(z_1 + z_2), -\wp'(z_1 + z_2)). \end{aligned}$$

Иными словами, точка  $P_3 := (\wp(z_1 + z_2), \wp'(z_1 + z_2))$ , отвечающая сумме  $z_1 + z_2$ , “симметрична” точке пересечения  $P_3'$  относительно оси  $u$ .

**УТВЕРЖДЕНИЕ.** Значение  $\wp(z_1 + z_2)$  выражается через  $\wp(z_1)$  и  $\wp(z_2)$  алгебраической формулой (см. формулу (22.1) ниже).



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что все три точки  $z_1, z_2, z_1 + z_2 \in T_L$  различны и ни одна из них не совпадает с 0. Тогда, согласно предыдущему пункту, значения

$$u_1 = \wp(z_1), \quad u_2 = \wp(z_2), \quad u_3 = \wp(z_1 + z_2)$$

являются тремя (различными) корнями уравнения

$$(au + b)^2 = 4u^3 - g_2u - g_3.$$

Выражая коэффициент при  $u^2$  в этом уравнении через его корни по теореме Виета, получаем, что

$$\frac{a^2}{4} = \wp(z_1) + \wp(z_2) + \wp(z_1 + z_2).$$

При этом параметр  $a$  находится из условия

$$\left. \begin{array}{l} \wp'(z_1) = a\wp(z_1) + b \\ \wp'(z_2) = a\wp(z_2) + b \end{array} \right\} \iff a = \frac{\wp'(z_1) - \wp'(z_2)}{\wp(z_1) - \wp(z_2)}.$$

Отсюда

$$\wp(z_1 + z_2) = -\wp(z_1) - \wp(z_2) + \frac{1}{4} \left( \frac{\wp'(z_1) - \wp'(z_2)}{\wp(z_1) - \wp(z_2)} \right)^2, \quad (22.1)$$

т.е.  $\wp(z_1 + z_2)$  является рациональной функцией от  $\wp(z_j), \wp'(z_j), j = 1, 2$ . Но

$$\wp'(z) = \sqrt{4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3},$$

так что  $\wp'(z_j)$  выражается через  $\wp(z_j)$  алгебраической формулой. ■

ЗАМЕЧАНИЕ. Алгебраическая формула, выражающая функцию  $\wp(z_1 + z_2)$  через  $\wp(z_1)$  и  $\wp(z_2)$ , получена нами в предположении, что  $z_1 \not\equiv z_2 \pmod{L}$ . Чтобы получить формулу сложения при  $z_1 \equiv z_2 \pmod{L}$ , перейдем в формуле (22.1) к пределу при  $z_2 \rightarrow z_1 =: z$ . Получим

$$\wp(2z) = -2\wp(z) + \frac{1}{4} \left( \frac{\wp''(z)}{\wp'(z)} \right)^2,$$

что дает алгебраическое выражение для  $\wp(2z)$  через  $\wp(z)$ , поскольку функция  $\wp''(z)$  удовлетворяет уравнению

$$2\wp''(z) = 12\wp^2(z) - g_2.$$

Задача. Докажите формулу сложения для эллиптического синуса:

$$\operatorname{sn}(z_1 + z_2) = \frac{\operatorname{sn}(z_1) \operatorname{sn}'(z_2) + \operatorname{sn}(z_2) \operatorname{sn}'(z_1)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(z_1) \operatorname{sn}^2(z_2)}.$$

Указание: пусть точки

$$P_1, P_2 \in C' := \{(u, v) \in \mathbb{C}^2 : v^2 = (1 - u^2)(1 - k^2 u^2)\}$$

отвечают точкам  $z_1, z_2$  при отображении  $z \mapsto (\operatorname{sn}(z), \operatorname{sn}'(z))$ . Подберем числа  $a, b \in \mathbb{C}$  так, чтобы парабола  $v = 1 + au + bu^2$  проходила через точки  $P_1, P_2$ , и обозначим четвертую точку пересечения этой параболы с  $C'$  (помимо  $P_1, P_2$  и  $(0, 1)$ ) через  $P'_3$ . Тогда, как и выше,

$$z_1 + z_2 + z_3 \equiv 0 \pmod{L}.$$

Искомая формула сложения получится отсюда, если выписать формулы Виета для коэффициентов при  $u^3$  и  $u$  в полученном уравнении 4-й степени.

## Лекция 23. Модулярная функция и теорема Пикара

**23.1. Построение модулярной функции.** Эллиптические функции, с которыми мы познакомились в предыдущих лекциях, представляют собой класс мероморфных функций на  $\mathbb{C}$ , инвариантных относительно сдвигов комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  на периоды вида

$$z \mapsto z + n\tau_1 + m\tau_2, \quad \text{где } n, m \in \mathbb{Z}.$$

Иными словами, это функции, инвариантные относительно дискретной подгруппы периодов  $T = \{\tau\}$  в аддитивной группе  $\mathbb{C}$ . Модулярная функция, изучаемая в данном параграфе, дает другой пример функций подобного рода. А именно функция  $\mu: U \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ , которая будет построена при доказательстве нижеследующей теоремы, голоморфна в единичном круге  $U$  и инвариантна относительно бесконечной дискретной подгруппы в группе  $\text{Aut } U$  автоморфизмов единичного круга.

При построении эллиптического синуса и других эллиптических функций мы многократно пользовались аналитическим продолжением с помощью симметрии относительно отрезков прямой — симметрии, тесно связанной с евклидовой геометрией комплексной плоскости. В отличие от комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ , естественной геометрией единичного круга  $U$  является гиперболическая геометрия, роль отрезков в которой играют дуги окружностей, ортогональных единичной окружности. При построении модулярной функции мы снова воспользуемся приемом аналитического продолжения с помощью симметрии, но на этот раз гиперболической — относительно дуг окружностей, ортогональных  $\partial U$ .

Прежде чем переходить к построению модулярной функции, напомним определение и нужные нам свойства гиперболических треугольников. Выберем две произвольные различные точки  $A$  и  $B$  на единичной окружности  $\partial U$  и рассмотрим лежащую в  $U$  дугу окружности, проходящей через точки  $A$ ,  $B$  и ортогональной к  $\partial U$  в этих точках. Обозначим указанную дугу (которая определяется единственным образом точками  $A$ ,  $B$ ) через  $\widehat{AB}$  и будем называть ее *гиперболической дугой*, соединяющей точки  $A$  и  $B$ . (Существование и единственность гиперболической дуги проще всего усмотреть, отобразив  $U$  дробно-линейно на верхнюю

полуплоскость  $D_+$  так, чтобы точка  $A$  перешла в  $\infty$ .) Если теперь  $A, B, C$  — три произвольные попарно различные точки на окружности  $\partial U$ , то гиперболические дуги  $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CA}$  не имеют общих точек, кроме концов (в которых указанные дуги касаются друг друга), и ограничивают область  $\Delta \subset U$ , которая и называется *гиперболическим треугольником*. (Отмеченное свойство гиперболических дуг  $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CA}$  также становится более наглядным, если отобразить  $U$  на верхнюю полуплоскость  $D_+$ ; при этом две из трех дуг превращаются в вертикальные лучи, а треугольник  $\Delta$  превращается в вертикальную полуполосу  $\Delta'$ , ограниченную снизу полуокружностью  $\widehat{B'C'}$ , имеющей отрезок  $[B', C']$  вещественной оси своим диаметром, см. рис. 80.)

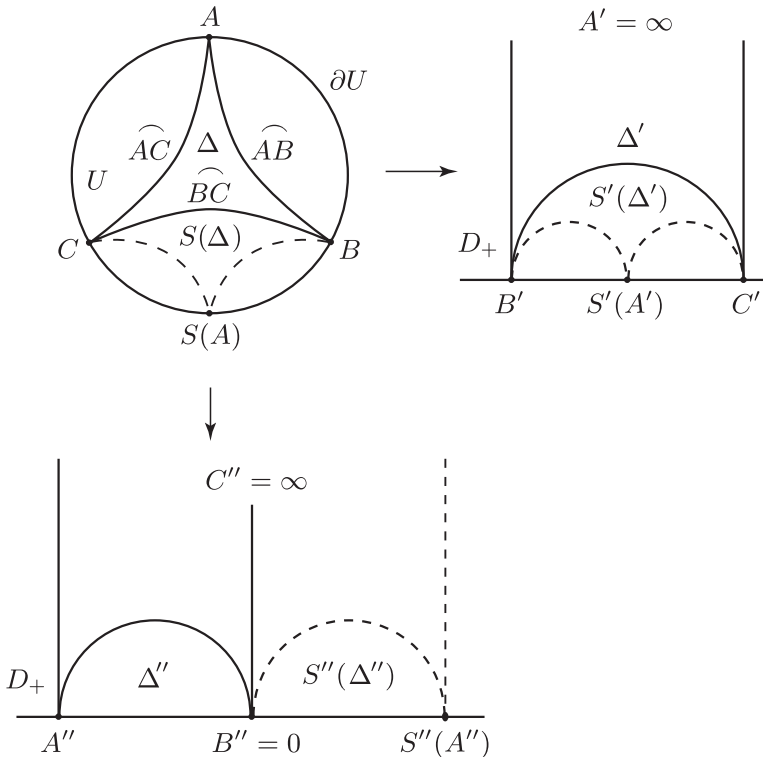


Рис. 80

Рассмотрим теперь симметрию  $S$  относительно одной из сторон, например  $\widehat{BC}$ , гиперболического треугольника  $\Delta$ . Заметим, что при такой симметрии образ  $S(A)$  вершины  $A$  треугольника  $\Delta$  снова лежит на  $\partial U$ , а образ  $S(\Delta)$  самого треугольника  $\Delta$  содержится в  $U$  и является гиперболическим треугольником, не пересекающимся с  $\Delta$ . Действительно, после дробно-линейного преобразования  $U \rightarrow D_+$ , переводящего точки  $B, C$  в  $0, \infty$  соответственно, дуга  $\widehat{BC}$  перейдет в вертикальный луч, перпендикулярный вещественной оси в точке  $B''$ , а единичная окружность  $\partial U$  — в вещественную ось (см. рис. 80). Симметрии  $S$  относительно дуги  $\widehat{BC}$  будет отвечать в образе этого дробно-линейного преобразования симметрия  $S''$  относительно указанного вертикального луча. При этом отмеченные свойства симметрии  $S$  становятся очевидными.

Перейдем теперь собственно к построению *модулярной функции*. Фиксируем произвольный гиперболический треугольник  $\Delta_0$  в  $U$ . По теоремам Римана и Каратеодори существует непрерывное (и даже гомеоморфное) отображение

$$\mu: \overline{\Delta}_0 \rightarrow \overline{D}_+,$$

осуществляющее биголоморфизм области  $\Delta_0$  на верхнюю полуплоскость  $D_+$  и переводящее вершины треугольника  $\Delta_0$  в точки  $0, 1, \infty$  соответственно. Пользуясь принципом симметрии, продолжим отображение  $\mu: \overline{\Delta}_0 \rightarrow \overline{D}_+$  на треугольники  $\Delta_1^1, \Delta_1^2, \Delta_1^3$ , симметричные треугольнику  $\Delta_0$  относительно его сторон (см. рис. 81). Полученные продолжения

$$\mu: \overline{\Delta}_1^i \rightarrow \overline{D}_-, \quad i = 1, 2, 3,$$

конформно отображают треугольники  $\Delta_1^i$  на нижнюю полуплоскость  $D_-$  так, что вершины этих треугольников переходят снова в точки  $0, 1, \infty$ . Ввиду отмеченных выше свойств гиперболических треугольников при симметрии относительно гиперболических дуг, этот процесс можно повторить и голоморфно продолжить отображение  $\mu$  на гиперболические треугольники  $\Delta_2^j$ , симметричные треугольникам  $\Delta_1^i$  относительно их сторон (здесь  $j$  принимает значения от 1 до 6), и т.д.

Полученные таким образом треугольники  $\Delta_k^i, k = 0, 1, 2, \dots$ , попарно не пересекаются, так как по построению множества их

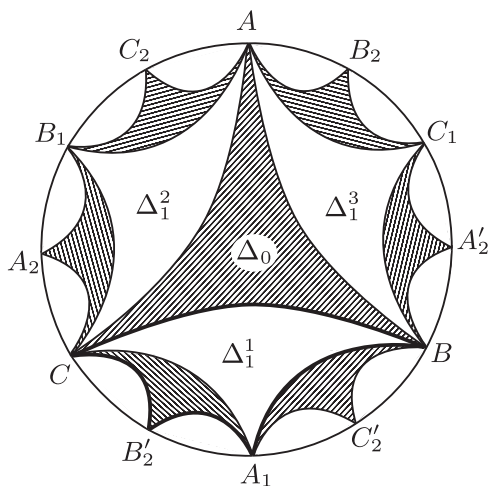


Рис. 81

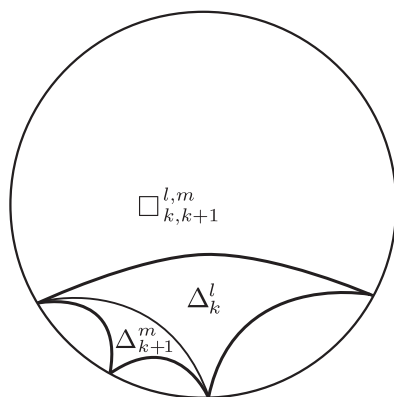


Рис. 82

вершин не перемежаются. Отметим еще, что продолжение  $\mu$  на треугольники  $\Delta_k^l$  обладает следующим важным свойством: оно конформно отображает область  $\square_{k,k+1}^{l,m}$  (гиперболический четырехугольник), полученную объединением любых двух смежных треугольников  $\Delta_k^l$ ,  $\Delta_{k+1}^m$  и их общей стороны (см. рис. 82), на объединение верхней и нижней полуплоскостей с одним из отрезков  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, 1)$  или  $(1, +\infty)$  расширенной вещественной оси.

Обозначим через  $\Omega_n \subset U$  область, полученную на  $n$ -м шаге указанного процесса. Область  $\Omega_n$  состоит из всех треугольников  $\Delta_k^l$ ,  $0 \leq k \leq n$ , с добавленными к ним отрезками их смежных границ. Множества  $\Omega_n$  открыты и возрастают:  $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$ , а их объединение составляет область

$$\Omega := \bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega_n \subset U.$$

Описанный выше процесс аналитического продолжения задает голоморфную функцию  $\mu(z)$  на области  $\Omega$  со значениями в  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ .

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ.** *Область  $\Omega$  совпадает со всем единичным кругом  $U$ , а функция  $\mu$  задает неразветвленное голоморфное накрытие  $\mu: U \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** 1°. Для доказательства равенства  $\Omega = U$  нам понадобится лемма о свойствах гиперболических треугольников  $\Delta_k^l$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , составляющих область  $\Omega$ . Совокупность всех таких треугольников назовем для краткости *сетью* и докажем, что треугольники сети обладают следующим свойством.

**ЛЕММА.** *Образ любого треугольника сети при симметрии относительно любой из сторон любого другого треугольника сети есть снова треугольник сети.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ.** Назовем *цепочкой* всякую конечную упорядоченную последовательность непересекающихся гиперболических треугольников, в которой любые два соседних треугольника имеют общую сторону и симметричны друг другу относительно нее. Из построения треугольников  $\Delta_k^l$  ясно, что гиперболический треугольник принадлежит сети тогда и только тогда, когда его можно соединить цепочкой с некоторым (и тогда с любым) треугольником сети. Кроме того, индукцией по числу треугольников цепочки легко установить, что если  $\Gamma$  есть сторона

одного из треугольников цепочки, не являющаяся общей стороной никаких двух треугольников цепочки, то вся цепочка лежит по одну сторону от окружности, частью которой является  $\Gamma$ .

Рассмотрим образ  $S(\Delta_k^l)$  треугольника  $\Delta_k^l$  при симметрии  $S$  относительно некоторой стороны  $\gamma$  треугольника  $\Delta_{k'}^{l'}$ . По предыдущему абзацу  $\Delta_k^l$  можно соединить цепочкой с  $\Delta_{k'}^{l'}$ . Будем считать, что  $\gamma$  не есть общая сторона  $\Delta_{k'}^{l'}$  и предыдущего треугольника цепочки. (Если это не так, то заменим  $\Delta_{k'}^{l'}$  на этот предыдущий треугольник.) Тогда по сказанному в конце предыдущего абзаца вся цепочка лежит по одну сторону от той окружности, частью которой является  $\gamma$ . Поэтому образ этой цепочки при симметрии  $S$  также является цепочкой, соединяющей треугольник  $\Delta_{k'}^{l'}$  (по условию принадлежащий сети) с треугольником  $S(\Delta_k^l)$ . Тем самым, последний также принадлежит сети. ■

Вернемся к доказательству равенства  $\Omega = U$ . С помощью дробно-линейного отображения отождествим круг  $U$  с верхней полуплоскостью  $D_+$  так, чтобы треугольник  $\Delta_0$  стал вертикальной полуполосой  $\Delta_0'$ , основанием которой служит полуокружность, имеющая отрезок  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$  своим диаметром. Отражая  $\Delta_0'$  относительно вертикальных сторон и повторяя этот процесс, видим, что все сдвиги  $\Delta_0'$  на целые числа суть треугольники сети. Тем самым, образ  $\Omega'$  области  $\Omega$  в  $D_+$  содержит все такие треугольники и разделяющие их вертикальные стороны, т.е. имеем включение

$$\Omega' \supset D_0 := D_+ \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Z}} B_\alpha^{(0)},$$

где  $B_\alpha^{(0)}$  есть замкнутый полукруг с диаметром  $[\alpha, \alpha + 1] \subset \mathbb{R}$  (см. рис. 83 а). Граница области  $D_0$  состоит из полуокружностей с диаметрами на  $\mathbb{R}$ .

Для  $n = 1, 2, \dots$  определим по индукции области  $D_n \subset D_+$ , полагая  $D_n$  равной объединению области  $D_{n-1}$  и ее образов при симметрии относительно всех полуокружностей, составляющих границу  $D_{n-1}$ , включая сами эти полуокружности (без концевых точек). Тогда по лемме имеем

$$\Omega' \supset D_n \quad \text{для всех } n = 1, 2, \dots$$

Поэтому остается лишь показать, что объединение  $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$  сов-



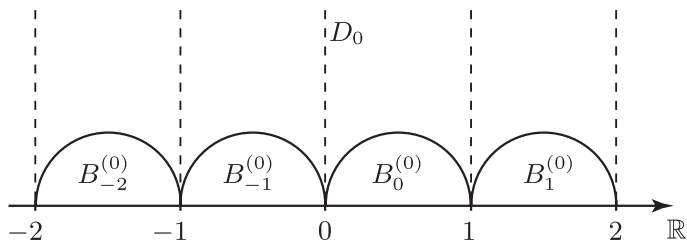


Рис. 83 а

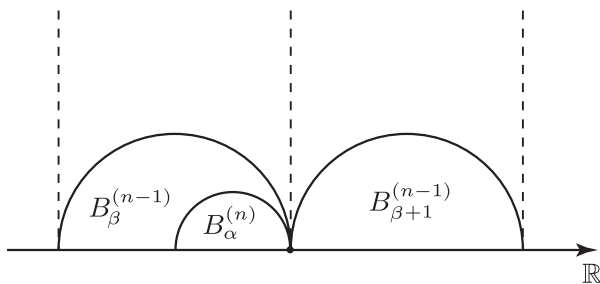


Рис. 83 б

падает со всей полуплоскостью  $D_+$ . Представим  $D_n$  в виде

$$D_n = D_+ \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Z}} B_{\alpha}^{(n)},$$

где  $B_{\alpha}^{(n)}$  — замкнутые полуокружности с диаметрами на  $\mathbb{R}$ , и положим

$$r_n := \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}} \text{diam } B_{\alpha}^{(n)}.$$

Тогда имеем  $r_n \leq \frac{1}{2}r_{n-1}$ , так как диаметр каждого  $B_{\alpha}^{(n)}$  лежит на радиусе некоторого  $B_{\beta}^{(n-1)}$  и, следовательно, не превосходит  $r_{n-1}$  (см. рис. 83 б). Получаем, что  $r_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , откуда и вытекает доказываемое равенство

$$D_+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n.$$

2°. Докажем, что построенная выше функция  $\mu: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  является неразветвленным голоморфным накрытием. Согласно

определению голоморфного неразветвленного накрытия из п. 12.6 для этого нужно проверить, что:

- (1)  $\mu$  сюръективно отображает  $\Omega$  на  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ ;
- (2) у каждой точки  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  найдется окрестность  $V_w$ , прообраз которой  $\mu^{-1}(V_w)$  есть объединение

$$\mu^{-1}(V_w) = \bigcup_{j \in J} U_j$$

непересекающихся открытых подмножеств  $U_j \subset \Omega$ , которые биголоморфно отображаются  $\mu$  на  $V_w$ .

Сюръективность  $\mu$  ясна из построения. Действительно,  $\mu(\Delta_0)$  есть открытая верхняя полуплоскость  $D_+$ ,  $\mu(\Delta_1^i)$  есть открытая нижняя полуплоскость  $D_-$  для любого  $i = 1, 2, 3$ , а множество  $\partial\Delta_0 \setminus \{A, B, C\}$  (объединение сторон треугольника  $\Delta_0$ , исключая его вершины) переходит при отображении  $\mu$  в объединение интервалов  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, 1)$  и  $(1, +\infty)$  вещественной оси. Тем самым, объединение указанных четырех треугольников и их общих сторон при отображении  $\mu$  покрывает всю область  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ .

Существование окрестности  $V_w$  для точек  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ . Пусть сначала  $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} = D_+ \cup D_-$ . Предположим, для определенности, что  $w \in D_+$ . В этом случае существование окрестности  $V_w$  вытекает из того, что прообраз  $\mu^{-1}(w)$  принадлежит объединению гиперболических треугольников  $\Delta_k^l$ , которые попарно не пересекаются между собой, и ограничение  $\mu$  на каждый из этих треугольников конформно отображает его на  $D_+$  (случай  $w \in D_-$  рассматривается аналогично). Пусть, далее, точка  $w$  принадлежит  $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\} = (0, 1) \cup (1, +\infty) \cup (-\infty, 0)$ . Для определенности предположим, что  $w \in (0, 1)$ . В этом случае существование окрестности  $V_w$  вытекает из того, что прообраз  $\mu^{-1}(w)$  принадлежит объединению гиперболических четырехугольников  $\square_{k, k+1}^{l, m}$ , которые также попарно не пересекаются, и ограничение  $\mu$  на общую сторону составляющих  $\square_{k, k+1}^{l, m}$  гиперболических треугольников  $\Delta_k^l$  и  $\Delta_{k+1}^m$  гомеоморфно отображает ее на интервал  $(0, 1)$ . Случай  $w \in (1, +\infty)$  и  $w \in (-\infty, 0)$  рассматриваются аналогично. ■

В заключение остановимся более подробно на упомянутом в начале *свойстве инвариантности модулярной функции*. Как было указано выше, симметрии относительно гиперболических дуг

переводят единичный круг  $U$  на себя. В частности, преобразования  $U \rightarrow U$ , задаваемые композициями четного числа симметрий относительно сторон треугольников  $\Delta_k^l$ , являются конформными отображениями  $U$  на себя и, следовательно, дробно-линейными автоморфизмами  $U$ . Они образуют подгруппу  $\Lambda$  в группе всех автоморфизмов  $\text{Aut } U$  единичного круга. Покажем, что *модулярная функция инвариантна относительно преобразований из  $\Lambda$* . Действительно, пусть  $z$  — произвольная точка  $U$ . Тогда действию произвольного преобразования  $\lambda \in \Lambda$  на  $z$  будет отвечать в образе  $\mu$  четное число отражений точки  $\mu(z)$  относительно вещественной оси, откуда  $\mu(\lambda z) = \mu(z)$ .

Задачи. (1) Проверьте следующее утверждение, использованное при построении модулярной функции: два гиперболических треугольника имеют непустое пересечение тогда и только тогда, когда их вершины перемежаются.

(2) Как и в доказательстве равенства  $\Omega = U$ , отождествим круг  $U$  с верхней полуплоскостью  $D_+ = \{\zeta \in \mathbb{C} : \text{Im } \zeta > 0\}$  так, чтобы выполнялось равенство  $\Delta_0 = \{\zeta \in D_+ : 0 < \text{Re } \zeta < 1, |2\zeta - 1| > 1\}$ . Покажите, что в этих обозначениях группа  $\Lambda$  порождается преобразованиями

$$\lambda_1(\zeta) = \zeta + 2 \quad \text{и} \quad \lambda_2(\zeta) = \frac{\zeta}{2\zeta + 1}$$

и что она состоит из всех дробно-линейных отображений

$$\lambda(\zeta) = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d}$$

таких, что  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ,  $a, d$  нечетны,  $b, c$  четны и  $ad - bc = 1$ .

### 23.2. Теорема Пикара.

**ТЕОРЕМА ПИКАРА.** *Целая функция, отличная от постоянной, принимает все значения из  $\mathbb{C}$ , за исключением, быть может, одного.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Допустим, напротив, что целая функция  $f$  не принимает двух значений  $a, b \in \mathbb{C}$ . Заменяя  $f(z)$  на целую функцию

$$g(z) := \frac{f(z) - a}{b - a},$$

можно считать, что  $a = 0$ ,  $b = 1$ .

Рассмотрим неразветвленное голоморфное накрытие  $\mu: U \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  из предыдущей теоремы. Как было отмечено в п. 12.6

(примените конструкцию из замечания в п. 12.6 к  $\Phi \equiv \text{Id}$  и  $\pi \equiv \mu$ ), каждый элемент обратной функции  $\mu^{-1}$  допускает продолжение вдоль любого непрерывного пути в  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ . Так как функция  $g$  не принимает значений  $0, 1$ , то в качестве такого пути можно взять любой путь вида  $g \circ \gamma$ , где  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  — произвольный путь в  $\mathbb{C}$ . Поэтому каждый элемент функции  $\mu^{-1} \circ g$  допускает продолжение вдоль любого пути в  $\mathbb{C}$ , и по теореме о монодромии (п. 10.6) это продолжение задает некоторую (однозначную) голоморфную функцию  $F \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ . По построению все значения  $F$  лежат в единичном круге  $U$ , откуда следует по теореме Лиувилля, что  $F \equiv \text{const}$ . Так как  $g = \mu \circ F$  всюду на  $\mathbb{C}$ , то функция  $g$  также является константой вопреки условию теоремы. ■

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Принципиальным моментом доказательства является утверждение о том, что *каждый элемент функции  $\mu^{-1}$  допускает продолжение вдоль любого непрерывного пути в  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$*  (оно необходимо для применения теоремы о монодромии). Это утверждение вытекает из теоремы о поднятии путей для голоморфных неразветвленных накрытий из п. 12.6. Покажем, что указанное свойство аналитического продолжения, вообще говоря, не имеет места для голоморфных, сюръективных и локально обратимых отображений, не являющихся накрытиями.

Рассмотрим функцию

$$f(z) = \int_0^z g(\zeta) d\zeta,$$

где  $g$  — произвольная непостоянная целая функция, которая является четной и не имеет нулей (в качестве  $g$  можно взять, например, функцию  $g(z) = \exp(z^2)$ ). Покажем, что *отображение  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  голоморфно, сюръективно и локально обратимо, но некоторые элементы  $f^{-1}$  не допускают продолжения вдоль некоторых путей в  $\mathbb{C}$* .

Действительно, из односвязности  $\mathbb{C}$  вытекает, что интеграл в определении  $f(z)$  не зависит от пути и задает целую функцию  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Так как производная  $g := f'$  не обращается в нуль на  $\mathbb{C}$ , то  $f$  локально обратимо (см. теорему из п. 14.2). Покажем далее, что отображение  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  сюръективно. Действительно, функция  $f$  нечетна, поскольку ее производная  $g$ , по условию, четна. Поэтому если бы  $f$  не принимала какого-то значения  $a \neq 0$ , то она не принимала бы и значения  $-a$ , откуда по теореме Пикара

вытекало бы, что  $f \equiv \text{const}$ , т.е.  $g \equiv 0$ , что невозможно по условию. Следовательно,  $f$  принимает все значения  $a \neq 0$ , а значение  $a = 0$  (опять же в силу нечетности) принимается ею при  $z = 0$ . Таким образом, отображение  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  сюръективно.

Если бы все элементы  $f^{-1}$  допускали продолжение вдоль произвольных путей в  $\mathbb{C}$ , то полученная аналитическая функция на  $\mathbb{C}$  была бы однозначной по теореме о монодромии. Отсюда вытекало бы, что  $f$  является автоморфизмом комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  на себя, т.е. линейной функцией (см. п. 17.1), что противоречит условию  $g \not\equiv \text{const}$ .

Задачи. (1) Покажите, что всякая голоморфная в  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  функция, отличная от постоянной, принимает все значения из  $\mathbb{C}$ , за исключением, быть может, одного.

(2) Покажите, что функция  $f(z) = ze^z$  принимает все значения из  $\mathbb{C}$ .

(3) Покажите, что мероморфная в  $\mathbb{C}$  функция, отличная от постоянной, принимает все значения из  $\overline{\mathbb{C}}$ , за исключением, быть может, двух.

(4) Целые функции  $f(z) = \sin z$  и  $g(z) = \cos z$  удовлетворяют уравнению  $f^2 + g^2 \equiv 1$ . Существуют ли непостоянные целые функции  $f, g$ , удовлетворяющие уравнению  $f^3 + g^3 \equiv 1$ ?

(5) Пусть  $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$  удовлетворяют  $e^f + e^g \equiv 1$ . Покажите, что  $f, g \equiv \text{const}$ .

(6) Верно ли, что локально обратимая функция  $f \in \mathcal{O}(D)$  задает голоморфное неразветвленное накрытие  $f: D \rightarrow f(D)$  тогда и только тогда, когда каждый элемент обратного отображения  $f^{-1}$  допускает аналитическое продолжение вдоль любого пути в области  $f(D)$ ?

## Лекция 24. Гармонические функции

### 24.1. Определение и основные свойства гармонических функций.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Вещественнозначная функция  $u: D \rightarrow \mathbb{R}$  в области  $D \subset \mathbb{C}$  называется *гармонической* в  $D$ , если  $u \in C^2(D)$  и удовлетворяет уравнению Лапласа

$$u_{xx} + u_{yy} \equiv 0 \quad \text{в } D.$$

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ.** Если функция  $f$  голоморфна в области  $D$ , то ее действительная часть

$$u(z) = \operatorname{Re} f(z)$$

гармонична в  $D$  (то же самое верно и для мнимой части  $v(z) = \operatorname{Im} f(z)$ ). Обратное, если область  $D$  односвязна и функция  $u: D \rightarrow \mathbb{R}$  гармонична, то найдется (единственная с точностью до аддитивной чисто мнимой константы) функция  $f \in \mathcal{O}(D)$  такая, что

$$u(z) = \operatorname{Re} f(z) \quad \text{для всех } z \in D.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Если функция  $f$  голоморфна в  $D$ , то ее действительная и мнимая части  $u := \operatorname{Re} f$  и  $v := \operatorname{Im} f$  принадлежат  $C^\infty(D)$  и удовлетворяют в  $D$  уравнениям Коши–Римана:  $u_x = v_y$ ,  $u_y = -v_x$ . Из них следует, что

$$u_{xx} + u_{yy} = (v_y)_x + (-v_x)_y \equiv 0,$$

т.е.  $u$  и  $v$  гармоничны в  $D$ .

Обратно, если функция  $u: D \rightarrow \mathbb{R}$  гармонична, то функция  $\varphi := u_x - iu_y$  является  $\mathbb{R}$ -дифференцируемой в  $D$ , поскольку  $u \in C^2(D)$ , и удовлетворяет в  $D$  уравнениям Коши–Римана. Действительно,  $(u_x)_x = (-u_y)_y$  в силу гармоничности  $u$ , а  $(u_x)_y = -(-u_y)_x$ , поскольку  $u \in C^2(D)$ . Таким образом, функция  $\varphi$  голоморфна в  $D$ . Если область  $D$  односвязна, то всякая функция, голоморфная в  $D$ , имеет там первообразную. Иначе говоря, существует функция  $f \in \mathcal{O}(D)$  такая, что  $f' = \varphi$  в  $D$ . Записывая эту функцию в виде  $f = U + iV$ , будем иметь

$$f' = U_x + iV_x = U_x - iU_y$$

в силу уравнений Коши–Римана. Поэтому из  $f' = \varphi$  следует, что  $U_x = u_x$  и  $U_y = u_y$ , т.е.  $(U - u)_x = (U - u)_y = 0$ , и, следовательно, функция  $U - u$  постоянна в  $D$ . Вычитая эту постоянную из  $f$ , получим голоморфную в  $D$  функцию  $f$ , для которой  $\operatorname{Re} f = u$  в  $D$ . ■

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Для неодносвязных областей  $D$  можно указать гармонические функции  $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ , не являющиеся вещественными частями голоморфных. Пусть, например,  $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  и

$$u(z) = \ln |z| = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2).$$

Тогда функция

$$u_x - iu_y = \frac{x}{r^2} - i \frac{y}{r^2} = \frac{\bar{z}}{r^2} = \frac{1}{z}$$

не имеет первообразной на  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  (см. замечание 4.9 в п. 4.5). Иными словами, функция

$$f(z) = \int_{z_0}^z (u_x - iu_y)(\zeta) d\zeta$$

(которая в данном случае равна  $\ln z$ ) есть *многозначная* аналитическая функция на  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

**ЗАДАЧИ.** (1) Покажите, что две функции  $f_1, f_2$ , голоморфные в области  $D$  и удовлетворяющие в ней соотношению  $\operatorname{Re} f_1 \equiv \operatorname{Re} f_2$ , отличаются на чисто мнимую аддитивную константу.

(2) Покажите, что всякая гармоническая функция  $u: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  имеет вид

$$u(z) = c \ln |z| + \operatorname{Re} f(z)$$

для некоторых  $c \in \mathbb{R}$  и  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ .

Приведем теперь свойства гармонических функций, непосредственно вытекающие из доказанного выше предложения.

**СВОЙСТВО 24.1** (бесконечная дифференцируемость). *Если функция  $u: D \rightarrow \mathbb{R}$  гармонична, то  $u \in C^\infty(D)$ , причем все ее частные производные также гармоничны в  $D$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Для любой точки  $z_0 \in D$  найдется ее достаточно малая окрестность  $U = \{|z - z_0| < \varepsilon\}$ , в которой  $u$  можно представить в виде  $u = \operatorname{Re} f$  для некоторой  $f \in \mathcal{O}(U)$ . Тогда

из бесконечной дифференцируемости  $f$  следует бесконечная дифференцируемость  $u$  в этой окрестности. Из равенств  $\partial_x f = f'$  и  $\partial_y f = if'$  индукцией по  $k, l$  получаем, что все функции  $\partial_x^k \partial_y^l f(z)$  голоморфны в окрестности  $U$ . Следовательно, функции

$$\partial_x^k \partial_y^l u(z) = \operatorname{Re} \partial_x^k \partial_y^l f(z)$$

гармоничны в  $U$ . ■

**СВОЙСТВО 24.2** (теорема о среднем). *Если функция  $u(z)$  гармонична в круге  $\{|z - z_0| < R\}$ , то для всех  $0 \leq r < R$  справедливо равенство*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Представим  $u$  в виде  $u = \operatorname{Re} f$  для некоторой функции  $f$ , голоморфной в круге  $\{|z - z_0| < R\}$ , и возьмем вещественную часть от равенства

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta,$$

представляющего собой теорему о среднем для голоморфных функций (см. п. 5.3). ■

**СВОЙСТВО 24.3** (теорема единственности). *Если функции  $u_1, u_2: D \rightarrow \mathbb{R}$  гармоничны в области  $D$  и множество*

$$E := \{z \in D : u_1(z) = u_2(z)\}$$

*имеет хотя бы одну внутреннюю точку, то  $u_1 \equiv u_2$  в  $D$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Функции  $\varphi_1 := u_{1x} - iu_{1y}$  и  $\varphi_2 := u_{2x} - iu_{2y}$  голоморфны в  $D$ , и множество  $\{z \in D : \varphi_1(z) = \varphi_2(z)\}$  имеет по условию внутреннюю точку. Отсюда по теореме единственности для голоморфных функций (см. п. 6.13) вытекает, что  $\varphi_1 \equiv \varphi_2$  в  $D$ . Следовательно,  $u_1(z) - u_2(z) \equiv \operatorname{const}$  в  $D$ . Подставляя в это равенство  $z \in E$ , получаем, что указанная константа равна нулю. ■

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Если, как в теореме единственности для голоморфных функций, ослабить условие утверждения, потребовав



только, чтобы множество  $E$  имело предельную точку в  $D$ , то утверждение перестанет быть верным. В качестве примера можно взять функции  $u_1(z) \equiv \operatorname{Im} z$ ,  $u_2(z) \equiv 0$ . Они гармоничны в  $D = \mathbb{C}$  и совпадают на  $E = \mathbb{R}$ , но не всюду на  $\mathbb{C}$ .

Задачи. (1) Пусть функция  $u: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  гармонична и множество нулей  $u(z)$  в  $\mathbb{C}$  есть в точности  $\mathbb{R}$ . Покажите, что  $u(z) = c \operatorname{Im} z$  для некоторой константы  $c \in \mathbb{R}$ .

(2) Пусть  $l_1, l_2$  – две прямые на плоскости  $\mathbb{C}$ . Для того чтобы нашлась гармоническая функция  $u: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ , не равная тождественно нулю, которая обращается в нуль на  $l_1 \cup l_2$ , необходимо и достаточно, чтобы прямые  $l_1, l_2$  либо были параллельны, либо пересекались под углом, равным рациональному кратному  $\pi$ .

Указание к обеим задачам: примените рассуждение из п. 14.2, чтобы представить любую голоморфную в окрестности точки  $z_0$  функцию  $f$  в виде  $f(z) = f(z_0) + g(z)^n$ , где  $n$  есть порядок нуля функции  $f(z) - f(z_0)$  в точке  $z = z_0$ , а  $g$  конформно отображает окрестность  $U$  точки  $z_0$  на  $g(U)$ .

СВОЙСТВО 24.4 (принцип максимума). (1) Пусть функция  $u: D \rightarrow \mathbb{R}$  гармонична в области  $D \subset \mathbb{C}$ . Предположим, что в некоторой окрестности  $U = \{|z - z_0| < \varepsilon\} \subset D$  точки  $z_0 \in D$  выполняется неравенство

$$u(z) \leq u(z_0) \quad \text{при } z \in U.$$

Тогда  $u(z) \equiv \operatorname{const}$ .

(2) Пусть  $D$  – ограниченная область в  $\mathbb{C}$ , а функция  $u: \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна в замыкании  $\overline{D}$  и гармонична в  $D$ . Тогда

$$\max_{z \in \overline{D}} u(z) = \max_{z \in \partial D} u(z).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Выберем функцию  $f$ , голоморфную в окрестности  $U$ , для которой  $u = \operatorname{Re} f$ . Тогда функция  $g(z) := e^{f(z)}$  также голоморфна в  $U$ , а ее модуль  $|g(z)| = e^{u(z)}$  имеет локальный максимум в точке  $z = z_0$ . Из принципа максимума модуля для голоморфных функций (теорема 15.1 из п. 15.1) вытекает, что  $g(z) \equiv \operatorname{const}$ . Тогда функция  $u(z) = \ln |g(z)|$  также постоянна.

(2) Поскольку  $\overline{D}$  есть компакт, то  $\max_{z \in \overline{D}} u(z)$  достигается в некоторой точке  $z_0 \in \overline{D}$ . Если  $z_0 \in \partial D$ , то утверждение доказано. Если же  $z_0 \in D$ , то  $u \equiv \operatorname{const}$  в силу утверждения (1) и требуемое равенство также выполняется. ■

**СВОЙСТВО 24.5** (теорема Лиувилля). *Если функция  $u: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  гармонична на  $\mathbb{C}$  и ограничена сверху, т.е.*

$$u(z) \leq M \quad \text{для всех } z \in \mathbb{C},$$

*то  $u \equiv \text{const}$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим функцию  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ ,  $\text{Re } f = u$ , и положим  $g = e^f$ , так что  $|g(z)| = e^{u(z)}$ . По теореме Лиувилля для голоморфных функций (см. п. 6.4)  $g \equiv \text{const}$ , откуда  $u \equiv \text{const}$ . ■

**СВОЙСТВО 24.6** (инвариантность при конформных отображениях). *Если  $F: D_1 \rightarrow D_2$  есть конформное отображение области  $D_1$  на область  $D_2$ , а функция  $u: D_2 \rightarrow \mathbb{R}$  гармонична, то функция  $u \circ F$  гармонична в  $D_1$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В окрестности любой точки  $z_0 \in D_2$  функцию  $u$  можно представить в виде  $u = \text{Re } f$  для некоторой функции  $f$ , голоморфной в этой окрестности. Тогда функция  $u \circ F = \text{Re}(f \circ F)$  гармонична в окрестности точки  $f^{-1}(z_0)$ . ■

**ЗАДАЧА.** Покажите, что в этом утверждении нельзя заменить  $u \circ F$  на  $F \circ u$ . Например, если функции  $u$  и  $u^2$  гармоничны в области  $D$ , то  $u \equiv \text{const}$  в  $D$ .

**ФОРМУЛА ПУАССОНА.** Пусть  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ , функция  $u: \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна в  $\overline{D}$  и гармонична в  $D$ . Тогда для всех  $z \in D$  имеем

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} u(\zeta) d\theta, \quad \text{где } \zeta := R e^{i\theta}. \quad (24.1)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Представим функцию  $u$  в виде  $u = \text{Re } f$  для некоторой функции  $f \in \mathcal{O}(D)$  и предположим сначала, что  $f \in \mathcal{O}(\overline{D})$ . Тогда для  $z \in D$  имеет место интегральная формула Коши (см. п. 5.3)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)\zeta}{\zeta - z} d\theta,$$

где мы воспользовались заменой  $\zeta = R e^{i\theta}$ . С другой стороны, симметричная  $z \in D$  точка  $z^* := R^2/\bar{z}$  принадлежит  $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$ , поэтому

по теореме Коши (см. замечание 5.3 из п. 5.3)

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)\zeta}{\zeta - R^2/\bar{z}} d\theta.$$

Вычтем это интегральное равенство из предыдущего. Тогда, поскольку

$$\frac{\zeta}{\zeta - z} - \frac{\bar{z}\zeta}{\bar{z}\zeta - R^2} = \frac{\zeta}{\zeta - z} - \frac{\bar{z}}{\bar{z} - \bar{\zeta}} = \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2},$$

получим в результате формулу (24.1).

Теперь избавимся от предположения, что  $f \in \mathcal{O}(\bar{D})$ . Для всех  $z \in D$  справедливо соотношение

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z), \quad \text{где } f_n(z) := f\left(z\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right).$$

Все функции  $f_n$  голоморфны в  $\bar{D}$ , следовательно, по доказанному

$$u_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} u_n(\zeta) d\theta, \quad \text{где } u_n := \operatorname{Re} f_n.$$

Так как последовательность  $u_n(\zeta)$  сходится к  $u(\zeta)$  равномерно на  $\partial U$  в силу условия  $u \in C(\bar{D})$ , то в последнем равенстве можно перейти к пределу при  $n \rightarrow \infty$ . ■

## 24.2. Задача Дирихле.

**ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ.** Дана область  $D \subset \mathbb{C}$  с простой границей и непрерывная функция  $\varphi: \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ . Требуется найти непрерывную в  $\bar{D}$  и гармоническую в  $D$  функцию  $u: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  такую, что

$$u = \varphi \quad \text{на } \partial D.$$

Покажем, прежде всего, что задача Дирихле не может иметь более одного решения. Допустим, напротив, что  $u_1, u_2: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  — два решения задачи Дирихле с одной и той же граничной функцией  $\varphi$ . Применяя принцип максимума (свойство 24.4, (2) из предыдущего пункта) к функциям  $u_1 - u_2$  и  $u_2 - u_1$ , получим, что они совпадают всюду в  $\bar{D}$ .

Задача Дирихле в круге решается с помощью формулы Пуассона (24.1), доказанной в предыдущем пункте.

ТЕОРЕМА. Пусть  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$  и  $\varphi: \partial D \rightarrow \mathbb{R}$  — произвольная непрерывная функция на границе  $D$ . Тогда функция  $u$ , задаваемая интегралом Пуассона

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} \varphi(\zeta) d\theta \quad \text{при } z \in D, \quad \zeta = Re^{i\theta}, \quad (24.2)$$

гармонична в  $D$  и непрерывно продолжается на  $\bar{D}$ . При этом

$$u = \varphi \quad \text{на } \partial D.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1°. Покажем сначала, что функция  $u$ , задаваемая формулой (24.2), гармонична в  $D$ .

Так как

$$\frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} = \operatorname{Re} \frac{\zeta + z}{\zeta - z},$$

то при  $z \in D$  функция  $u$  совпадает с вещественной частью функции  $f$ , задаваемой интегралом вида

$$f(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \varphi(\zeta) d\theta. \quad (24.3)$$

По лемме о голоморфной зависимости интеграла от параметра (см. п. 9.1) функция  $f$  голоморфна в  $D$ . Поэтому ее вещественная часть  $u = \operatorname{Re} f$  гармонична в  $D$ .

2°. Докажем теперь, что функция  $u$ , задаваемая формулой (24.2), непрерывно продолжается на  $\bar{D}$ .

Обозначим через

$$P(\zeta, z) := \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} \quad (24.4)$$

ядро Пуассона. Оно обладает следующими свойствами:

- (а)  $P(\zeta, z) \geq 0$  для всех  $\zeta \in \partial D$  и  $z \in D$ ;
- (б)  $\int_0^{2\pi} P(\zeta, z) d\theta = 1$  для всех  $z \in D$ ;
- (в) при каждом  $\zeta_0 \in \partial D$  справедливо соотношение

$$\lim_{D \ni z \rightarrow \zeta_0} P(\zeta, z) = 0$$

равномерно на компактах по  $\zeta \in \partial D \setminus \{\zeta_0\}$ ; иными словами, для каждого компакта  $K \subset \partial D \setminus \{\zeta_0\}$  и любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta > 0$  такое, что

$$|P(\zeta, z)| < \varepsilon \quad \text{для всех } \zeta \in K \text{ и всех } z \in D \text{ с } |z - \zeta_0| < \delta.$$

Действительно, свойства (а) и (с) вытекают непосредственно из формулы (24.4) для ядра Пуассона, а свойство (б) есть частный случай (отвечающий  $u \equiv 1$ ) формулы Пуассона (24.1).

Доопределим теперь функцию  $u$  на  $\partial D$ , полагая  $u(\zeta) = \varphi(\zeta)$  при  $\zeta \in \partial D$ , и докажем непрерывность продолженной функции в точках  $\zeta_0 \in \partial D$ . Из свойства (б) вытекает, что

$$u(z) - u(\zeta_0) = \int_0^{2\pi} P(\zeta, z) \{\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)\} d\theta \quad (24.5)$$

для всех  $z \in D$ . Фиксируем  $\varepsilon > 0$  и найдем столь малую дугу  $\gamma_1 \subset \partial D$ , содержащую  $\zeta_0$ , что

$$|\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)| < \varepsilon \quad \text{для всех } \zeta \in \gamma_1. \quad (24.6)$$

Положим  $\gamma_2 := \partial D \setminus \gamma_1$  и представим интеграл (24.5) в виде суммы интегралов по дугам  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  (см. рис. 84):

$$\int_0^{2\pi} P(\zeta, z) \{\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)\} d\theta = I_1(z) + I_2(z),$$

где

$$I_j(z) := \int_{\gamma_j} P(\zeta, z) \{\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)\} d\theta \quad \text{для } j = 1, 2.$$

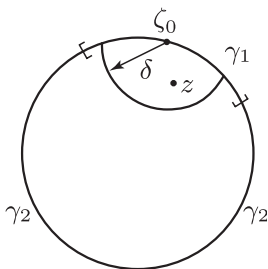


Рис. 84

Тогда интеграл по  $\gamma_1$  мал ввиду оценки (24.6):

$$|I_1(z)| < \varepsilon \int_{\gamma_1} P(\zeta, z) d\theta < \varepsilon \quad \text{для всех } z \in D,$$

где мы воспользовались также свойствами (а) и (б).

Оценку второго интеграла  $I_2(z)$  достаточно получить для точек  $z$ , близких к  $\zeta_0$ . А именно выберем, пользуясь свойством (с), такое  $\delta > 0$ , что для всех  $z \in D$  с  $|z - \zeta_0| < \delta$  выполняется неравенство

$$0 \leq P(\zeta, z) < \varepsilon \quad \text{при } \zeta \in \gamma_2.$$

Тогда при  $|z - \zeta_0| < \delta$ ,  $z \in D$ , будет справедлива оценка

$$|I_2(z)| < \varepsilon \int_{\gamma_2} |\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)| d\theta \leq \varepsilon \int_0^{2\pi} |\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)| d\theta \leq 4\pi M\varepsilon,$$

где

$$M := \max_{\zeta \in \partial D} |\varphi(\zeta)|.$$

Следовательно, для таких  $z$  будем иметь

$$|u(z) - u(\zeta_0)| < (1 + 4\pi M)\varepsilon,$$

что и доказывает непрерывность  $u$  в точке  $\zeta_0$ . ■

**СЛЕДСТВИЕ 24.1** (разрешимость задачи Дирихле в односвязной области). Пусть  $D \subset \mathbb{C}$  — односвязная область с простой границей. Тогда для всякой непрерывной функции  $\varphi: \partial D \rightarrow \mathbb{R}$  найдется единственная функция  $u: \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ , которая непрерывна в  $\overline{D}$ , гармонична в  $D$  и удовлетворяет граничному условию:

$$u = \varphi \quad \text{на } \partial D.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** По теореме Римана найдется конформное отображение  $F: U \rightarrow D$  единичного круга  $U$  на область  $D$ . Это отображение продолжается по теореме Каратеодори до гомеоморфизма  $F: \overline{U} \rightarrow \overline{D}$ . Поэтому композиция  $\varphi \circ F: \partial U \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна на  $\partial U$ . Обозначим через  $u_0: \overline{U} \rightarrow \mathbb{R}$  решение задачи Дирихле в круге  $U$  с граничной функцией  $\varphi \circ F$ , построенное в предыдущей теореме. Тогда

$$u := u_0 \circ F^{-1}: \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$$

есть решение задачи Дирихле на  $D$  с граничной функцией  $\varphi$ . Действительно, граничное условие на  $u$  выполняется по построению, а гармоничность  $u$  в области  $D$  вытекает из свойства инвариантности относительно конформных отображений (свойство 24.6 из предыдущего пункта). ■

Вернемся еще раз к примечательной формуле (24.3) из доказательства теоремы. Она дает способ восстановления функции, голоморфной в круге, по граничным значениям ее вещественной части на  $\partial D$ .

**СЛЕДСТВИЕ 24.2 (формула Шварца).** Пусть функция  $f$  голоморфна в круге  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ , а ее вещественная часть  $u := \operatorname{Re} f$  непрерывно продолжается на  $\overline{D}$ . Тогда для всех  $z \in D$  имеет место следующая формула Шварца

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} u(\zeta) d\theta + i \operatorname{Im} f(0). \quad (24.7)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Обозначим интеграл в правой части через  $F(z)$ . Тогда функция  $F \in \mathcal{O}(D)$  по лемме о голоморфной зависимости интеграла от параметра (см. п. 9.1) и  $\operatorname{Re} F = u$  в  $D$  по формуле Пуассона. Поэтому

$$\operatorname{Re}(F - f) = 0 \quad \text{в } D \quad \implies \quad F - f \equiv \operatorname{const} \quad \text{в } D.$$

Чтобы найти указанную константу, подставим  $z = 0$  в определение  $F(z)$ . Получим, что

$$F(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\zeta) d\theta = u(0) = \operatorname{Re} f(0)$$

(второе равенство следует из формулы Пуассона), что доказывает формулу (24.7). ■

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Отметим, что из условия следствия 24.2 (т.е. непрерывной продолжимости вещественной части  $u := \operatorname{Re} f$  на  $\overline{D}$ ), вообще говоря, не вытекает непрерывная продолжимость на  $\overline{D}$  самой функции  $f$ . Рассмотрим в качестве примера функцию  $f$ , голоморфную в единичном круге  $D$ , которая задается рядом

$$f(z) = -i \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n \ln n} \quad \text{для } z \in D.$$

Можно показать, что ее вещественная часть  $u := \operatorname{Re} f$  непрерывно продолжается на  $\overline{D}$ . Однако сама  $f$  не может быть непрерывно продолжена на  $\overline{D}$ , поскольку

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} i f(r) = +\infty.$$

Задачи. (1) Пользуясь формулой Шварца, докажите следующее обобщение теоремы Лиувилля. Если целая функция  $f$  удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{Re} f(z) \leq M|z|^n \quad \text{при } |z| > R$$

для некоторых  $M > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $R > 0$ , то она есть полином степени не выше  $n$ .

(2) Пользуясь задачей (1), дайте новые решения задачи (7) п. 13.3 и задачи (2) п. 23.2.

(3) Пусть последовательность функций  $f_n$ , голоморфных в области  $D$ , сходится в точке  $z_0 \in D$ , а последовательность их вещественных частей  $\operatorname{Re} f_n$  сходится равномерно на компактах из  $D$ . Покажите, что последовательность  $f_n$  также сходится равномерно на компактах в  $D$ .



## Дополнение. Физическая интерпретация голоморфных функций и доказательство теоремы Римана

В этом параграфе мы приведем другое, базирующееся на физических соображениях, доказательство теоремы Римана из лекции 17. Оно опирается на тесную связь уравнений Коши–Римана с некоторыми моделями математической физики. Например, как будет показано ниже, векторное поле в области  $D \subset \mathbb{C}$ , компоненты которого удовлетворяют уравнениям Коши–Римана, можно физически интерпретировать тремя различными способами: как поле скоростей установившегося безвихревого течения идеальной несжимаемой жидкости (считая  $\partial D$  одной из линий тока), как электростатическое поле (считая  $\partial D$  проводником) или как градиент температуры при установившемся тепловом режиме в  $D$  (считая, что на  $\partial D$  поддерживается постоянная температура).

**Д.1. Гидродинамическая интерпретация конформных отображений.** Начнем с гидродинамической интерпретации уравнений Коши–Римана. Что означает в этих терминах теорема Римана для односвязной области  $D \subset \mathbb{C}$ ? Рассмотрим вначале случай единичного круга. Предположим, что этот круг заполнен идеальной несжимаемой жидкостью, и поместим в его центр точечный вихрь.

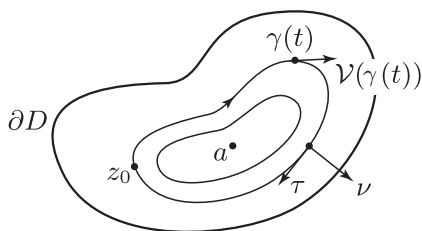


Рис. 85

Указанный вихрь породит в круге течение жидкости, траектории которого (после того, как течение установится) будут совпадать с концентрическими окружностями. Если такой же вихрь поместить в произвольную точку  $a$  односвязной области  $D$  (см. рис. 85), то линии тока будут задаваться более сложными конту-

рами, которые, однако, останутся, в силу односвязности  $D$ , простыми замкнутыми кривыми, охватывающими точку  $a$  (включая границу  $\partial D$ , являющуюся одной из линий тока). Поскольку оба течения (как в круге, так и в области  $D$ ) описываются уравнениями Коши–Римана, естественно ожидать, что конформное отображение области  $D$  на единичный круг, переводящее точку  $a$  в начало координат, преобразует линии тока одного течения в линии тока другого. Пользуясь этим соображением, можно построить конформное отображение  $D$  на круг. Такова исходная идея доказательства теоремы Римана, близкая к подходу самого Римана. Хотя приведенные физические соображения и нелегко довести до строгого доказательства, они, тем не менее, наглядно демонстрируют, как можно было до этой теоремы “догадаться”, а также дают пример использования комплексного анализа при изучении различных физических моделей.

Всякое гладкое (класса  $C^1$ ) отображение

$$\mathcal{V} = (V_1, V_2): D \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

заданное в области  $D \subset \mathbb{C}$ , можно рассматривать как *поле скоростей установившегося течения жидкости в  $D$* . А именно указанное отображение задает векторное поле  $\mathcal{V}(z)$  в области  $D$ , интегральные кривые которого совпадают с линиями тока жидкости. Более подробно, траектория частицы жидкости, находившейся в начальный момент времени  $t = 0$  в точке  $z_0 \in D$ , будет задаваться интегральной кривой  $\gamma(t) \subset D$  поля  $\mathcal{V}$ , проходящей через точку  $z_0$  и удовлетворяющей условию

$$\dot{\gamma}(t) = \mathcal{V}(\gamma(t)) \quad \text{для всех } t.$$

Добавим еще, что термин “установившееся течение” означает, что скорость течения  $\mathcal{V}(z)$  зависит только от точки  $z = x + iy \in D$ , но не от времени  $t$ .

Течение  $\mathcal{V} = (V_1, V_2)$  называется *несжимаемым*, если

$$V_{1x} + V_{2y} = 0 \quad \text{в } D,$$

и *безвихревым*, если

$$V_{2x} - V_{1y} = 0 \quad \text{в } D.$$

Чтобы пояснить эту терминологию, рассмотрим интеграл от функции  $V_1 - iV_2$  по произвольной замкнутой кривой  $\gamma: [0, 1] \rightarrow D$ .

Его можно записать в виде суммы интегралов от вещественных 1-форм:

$$\int_{\gamma} (V_1 - iV_2) dz = \int_{\gamma} (V_1 dx + V_2 dy) + i \int_{\gamma} (-V_2 dx + V_1 dy) =: \Gamma + iN.$$

Интеграл  $\Gamma$  можно записать иначе как

$$\Gamma = \int_{\gamma} (\mathcal{V} \cdot \tau) ds,$$

где  $\tau(t)$  — единичный касательный вектор к траектории  $\gamma$  в точке  $\gamma(t)$ . Он называется *циркуляцией* поля  $\mathcal{V}$  вдоль  $\gamma$ . С другой стороны, интеграл  $N$  можно переписать в виде

$$N = \int_{\gamma} (\mathcal{V} \cdot \nu) ds,$$

где  $\nu(t)$  — единичный вектор нормали к  $\gamma$  в точке  $\gamma(t)$ . Он называется *поток*ом поля  $\mathcal{V}$  через  $\gamma$ .

Если  $\gamma$  совпадает с границей  $\partial D_1$  некоторой подобласти  $D_1 \Subset D$ , то по формуле Грина–Стокса

$$\Gamma = \int_{D_1} (-V_{1y} + V_{2x}) dx dy \quad \text{и} \quad N = \int_{D_1} (V_{2y} + V_{1x}) dx dy.$$

Таким образом, условие несжимаемости жидкости означает, что поток через границу любой подобласти равен нулю (сколько жидкости втекает в подобласть, столько из нее и вытекает), а условие отсутствия вихрей эквивалентно тому, что циркуляция вдоль границы любой подобласти равна нулю (течение не закручивается вдоль этой границы).

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ Д.1.** Пусть  $D \subset \mathbb{C}$  — односвязная область и  $a$  — произвольная точка в  $D$ . Тогда формула

$$f' = V_1 - iV_2 \quad \text{на } D \tag{Д.1}$$

задает взаимно однозначное соответствие между множеством всех функций  $f \in \mathcal{O}(D)$  с  $f(a) = 0$  и множеством всех векторных полей  $\mathcal{V}$  на  $D$ , удовлетворяющих условиям несжимаемости и отсутствия вихрей

$$V_{1x} + V_{2y} = 0, \quad V_{2x} - V_{1y} = 0. \tag{Д.2}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условия (Д.2) суть в точности уравнения Коши–Римана для функции  $g := V_1 - iV_2$ . С другой стороны, в односвязной области  $D$  всякая функция  $g \in \mathcal{O}(D)$  имеет единственную первообразную  $f \in \mathcal{O}(D)$  с  $f(a) = 0$ . ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция  $f \in \mathcal{O}(D)$  из предложения Д.1 называется *комплексным потенциалом* течения  $\mathcal{V}$ . Ее вещественная часть  $u = \operatorname{Re} f$  является *потенциалом* поля  $\mathcal{V}$  в обычном смысле:

$$V_1 = u_x, \quad V_2 = u_y.$$

Поясним, почему в качестве главной комплексной характеристики течения  $\mathcal{V}$  выбирается первообразная от  $V_1 - iV_2$ , а не сама функция  $V_1 - iV_2$ . Важность комплексного потенциала  $f$  объясняется тем, что задаваемая им конформная замена координат  $w = f(z)$  локально выпрямляет линии тока течения  $\mathcal{V}$  вблизи неособых точек. Приведем более подробную формулировку, которая мотивирует конструкцию конформного отображения  $D$  на круг, данную в следующем пункте.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ Д.2. Пусть выполнены условия предложения Д.1 и точка  $z_0 \in D$  такова, что  $\mathcal{V}(z_0) \neq 0$ . Тогда  $w = f(z)$  есть конформное отображение некоторой окрестности точки  $z_0$  на окрестность точки  $w_0 = f(z_0)$ , переводящее линии тока  $\mathcal{V}$  в горизонтальные отрезки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Конформность отображения  $w = f(z)$  в окрестности точки  $z_0$  вытекает из критерия локальной обратимости голоморфных функций в п. 14.2, поскольку  $f'(z_0) \neq 0$  по условию. Рассмотрим линии тока поля  $\mathcal{V}$ , т.е. пути  $\gamma: [0, 1] \rightarrow D$  такие, что

$$\dot{\gamma}(t) = \mathcal{V}(\gamma(t)) \quad \text{при } t \in [0, 1].$$

Представим  $\gamma$  и  $f$  в виде  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$  и  $f(z) = u(z) + iv(z)$ . При этом равенство (Д.1) переписется с учетом уравнений Коши–Римана в виде

$$V_1 - iV_2 = f' = v_y + iv_x,$$

откуда

$$\frac{d}{dt}\{v(\gamma(t))\} = v_x(\gamma(t))\dot{x}(t) + v_y(\gamma(t))\dot{y}(t) = -V_2V_1 + V_1V_2 = 0.$$

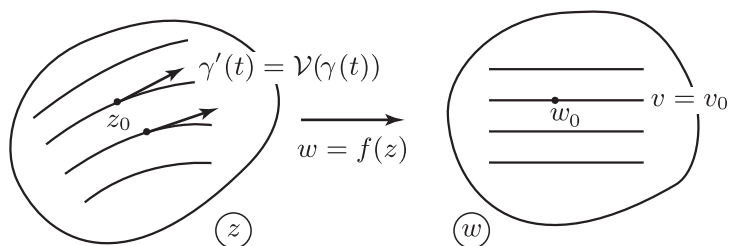


Рис. 86

Таким образом, функция  $v$  постоянна на линиях тока поля  $\mathcal{V}$  и образы этих линий при отображении  $w = f(z) = u(z) + iv(z)$  лежат на горизонтальных прямых  $\{v = v_0\}$  плоскости  $w$  (см. рис. 86). Поскольку эти образы связны, непусты и не сводятся к точке, они являются отрезками. ■

Если область  $D$  неодносвязна, то функция  $f$ , задаваемая формулой (Д.1) из предложения Д.1, может оказаться многозначной.

Рассмотрим в качестве примера *точечный источник мощности*  $N_0 > 0$ . Создаваемое им поле  $\mathcal{V}$  в области  $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  имеет линиями тока лучи  $\{\arg z = \text{const}\}$  (см. рис. 87). При этом модуль  $|\mathcal{V}(z)|$  постоянен на каждой окружности  $\{|z| = r\}$ , а поток поля  $\mathcal{V}$  через эту окружность равен  $N_0$ . Вычислим комплексный потенциал  $f$  поля  $\mathcal{V}$ . Обозначим через  $k(r)$  значение  $|\mathcal{V}(z)|$  при  $|z| = r$ .

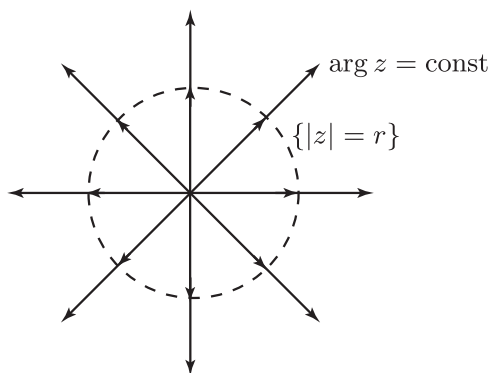


Рис. 87

Тогда

$$V_1 - iV_2 = k(r) \frac{x}{r} - ik(r) \frac{y}{r} = \frac{k(r)}{r} \bar{z}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_{|z|=r} (V_1 - iV_2) dz &= \frac{k(r)}{r} \int_{|z|=r} \bar{z} dz \\ &= \frac{k(r)}{r} \int_0^{2\pi} re^{-i\theta} ire^{i\theta} d\theta = 2\pi irk(r). \end{aligned}$$

Мнимая часть интеграла

$$\int_{|z|=r} (V_1 - iV_2) dz = \Gamma + iN$$

должна равняться  $N_0$ , поэтому  $k(r) = N_0/(2\pi r)$ . Тем самым, формула (Д.1) из предложения Д.1 принимает вид

$$f'(z) = \frac{N_0}{2\pi r} \cdot \frac{x - iy}{r} = \frac{N_0}{2\pi z} \implies f(z) = \frac{N_0}{2\pi} \ln z + \text{const},$$

откуда следует, что комплексный потенциал точечного источника действительно многозначен. Заметим, что, формально, подобные рассуждения можно провести и в случае, когда  $N_0 < 0$ , только направление линий тока поменяется при этом на противоположное. Этот случай отвечает *точечному стоку мощности*  $|N_0|$ .

Можно также, заменяя  $f(z)$  на  $-if(z)$ , добиться того, что линии тока и ортогональные к ним *эквипотенциальные линии* (т.е. множества уровня функции  $u(z)$ ) поменяются местами. В этом случае комплексный потенциал

$$f_1(z) = \frac{\Gamma_0}{2\pi i} \ln z + \text{const} \quad (\text{Д.3})$$

будет задавать векторное поле на  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , имеющее линиями тока окружности  $\{|z| = r\}$ , циркуляция вдоль которых равна  $\Gamma_0$ . Такое поле отвечает полю скоростей *точечного вихря мощности*  $\Gamma_0$ , расположенного в начале координат (см. рис. 88).

Изучим более подробно *точечные вихри в произвольной односвязной области*  $D \subset \mathbb{C}$  с кусочно гладкой границей. Выберем точку  $a \in D$  и рассмотрим поле скоростей  $\mathcal{V}$  установившегося течения в  $D$ , создаваемого точечным вихрем мощности  $\Gamma_0$ ,

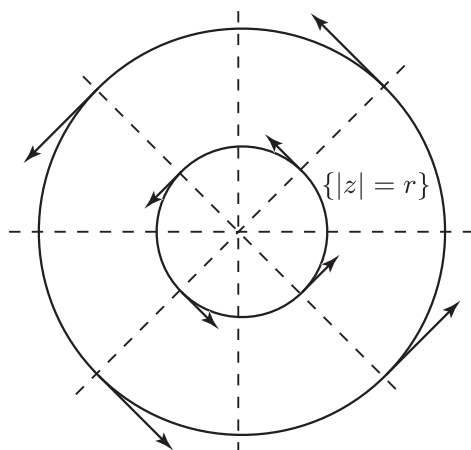


Рис. 88

помещенным в точку  $a$ . Что можно сказать о компонентах  $V_1, V_2: D \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$  поля  $\mathcal{V}$  и о его линиях тока (интегральных кривых)? Ответ на этот вопрос суммируется в трех следующих утверждениях:

- (1) функция  $V_1 - iV_2$  голоморфна в  $D \setminus \{a\}$  и непрерывна на  $\overline{D} \setminus \{a\}$ ;
- (2) имеет место соотношение

$$\lim_{z \rightarrow a} \left\{ (V_1 - iV_2)(z) - \frac{\Gamma_0}{2\pi i} \frac{1}{z - a} \right\} = 0;$$

- (3) все линии тока поля  $\mathcal{V}$  суть замкнутые кусочно гладкие жордановы кривые, обходящие точку  $a$  один раз, причем граница  $\partial D$  является одной из линий тока (см. рис. 89).

Первое из этих утверждений уточняет установленное выше соответствие между течениями жидкости и голоморфными функциями. Второе означает, что течение  $\mathcal{V}$  вблизи точки  $a \in D$  ведет себя “приблизительно” так же, как в рассмотренном выше случае точечного вихря на комплексной плоскости (иными словами, производная  $V_1 - iV_2$  комплексного потенциала течения  $\mathcal{V}$  близка в окрестности точки  $a$  к производной комплексного потенциала точечного вихря на  $\mathbb{C}$ ). Тем самым, граница  $\partial D$  оказывает “слабое” влияние на поведение вихря в окрестности точки  $a$ . Третье

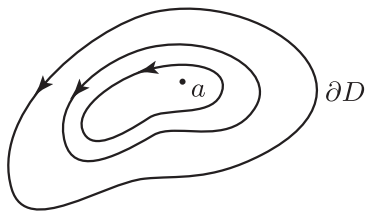


Рис. 89

утверждение демонстрирует влияние границы  $\partial D$  на топологию линий тока. В этом утверждении важно, что граница  $\partial D$  связна (что эквивалентно односвязности области  $D$ ).

Приняв на веру существование векторного поля  $\mathcal{V}$  в области  $D \setminus \{a\}$ , обладающего перечисленными свойствами (1)–(3), мы построим в следующем пункте конформное отображение области  $D$  на единичный круг, переводящее точку  $a$  в начало координат.

**Д.2. “Физическое” доказательство теоремы Римана.**

Из свойств (1), (2) векторного поля  $\mathcal{V}$ , введенного в конце предыдущего пункта, вытекает, что функция  $V_1 - iV_2$  имеет при  $z = a$  полюс первого порядка с вычетом, равным  $\Gamma_0/(2\pi i)$ . Поэтому комплексный потенциал

$$f(z) := \int_{z_0}^z (V_1 - iV_2)(\zeta) d\zeta$$

течения  $\mathcal{V}$  является аналитической функцией в области  $D \setminus \{a\}$ , которая имеет при  $z = a$  логарифмическую точку ветвления. Более точно, интегрируя соотношение в свойстве (2), мы видим, что функция

$$\varphi(z) := f(z) - \frac{\Gamma_0}{2\pi i} \ln(z - a)$$

однозначна и голоморфна всюду в  $D$ , включая точку  $a$ . Иными словами, функция

$$F(z) := \exp\left\{\frac{2\pi i}{\Gamma_0} f(z)\right\} = (z - a) \exp\left\{\frac{2\pi i}{\Gamma_0} \varphi(z)\right\} \tag{Д.4}$$

однозначна и голоморфна всюду в  $D$ , непрерывна в  $\overline{D}$  и имеет нуль первого порядка при  $z = a$ . Выберем константу интегрирования, входящую в определение потенциала  $f(z)$  (иначе говоря,



фиксируем начальную точку  $z_0 \in D \setminus \{a\}$ , так, чтобы граница  $\partial D$  была нулевой линией уровня  $\{v = 0\}$  функции  $v(z) := \operatorname{Im} f(z)$ . (Заметим, что функция  $v$  однозначна в  $\overline{D} \setminus \{a\}$ , поскольку “период”  $\Gamma_0$  функции  $f$  является вещественным, а также постоянна на  $\partial D$  в силу свойства (3) поля  $\mathcal{V}$ ).

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ Д.3.** *Функция  $\zeta = F(z)$  осуществляет конформное отображение области  $D$  на круг  $\{|\zeta| < 1\}$ , переводящее точку  $a$  в начало координат.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Согласно формуле (Д.4)

$$|F(z)| = \exp \left\{ \operatorname{Re} \left( \frac{2\pi i}{\Gamma_0} f(z) \right) \right\} = \exp \left( -\frac{2\pi}{\Gamma_0} v(z) \right) \quad (\text{Д.5})$$

для всех  $z \in D$ . Отсюда следует, что  $v(z) \rightarrow +\infty$  при  $z \rightarrow a$ , поскольку  $|F(a)| = 0$ . Тогда, применяя принцип максимума к функции  $|F(z)|$  в области  $D \setminus \{|z - a| < \varepsilon\}$ , получим, что  $v(z) > 0$  для всех  $z \in D \setminus \{a\}$ . Кроме того, из формулы (Д.5) вытекает, что каждая линия тока  $\{v = c\}$ ,  $0 \leq c < +\infty$ , переходит при отображении  $\zeta = F(z)$  в некоторое подмножество отвечающей ей окружности  $\{|\zeta| = \exp(-\frac{2\pi}{\Gamma_0} c)\}$ .

Рассмотрим множества

$$D_c := \{z \in D : v(z) > c\}, \quad \text{где } 0 < c < +\infty.$$

(см. рис. 90). Ввиду свойства (3) поля  $\mathcal{V}$  из предыдущего пункта они являются областями с простой границей  $\partial D_c := \{z \in D : v(z) = c\}$ . Для того чтобы доказать, что  $\zeta = F(z)$  конформно отображает область  $D$  на круг  $\{|\zeta| < 1\}$ , достаточно проверить, что *каждое множество  $D_c$ ,  $0 < c < +\infty$ , биективно отображается функцией  $\zeta = F(z)$  на круг  $U_c := \{|\zeta| < \exp(-\frac{2\pi}{\Gamma_0} c)\}$ .*

Но мы уже показали, что  $F(\partial D_c) \subset \partial U_c$ . В частности, для любой точки  $\zeta_0 \in U_c$  имеем:  $|F(z)| > |\zeta_0|$  на  $\partial D_c$ . Поэтому для нахождения числа прообразов точки  $\zeta_0$  при отображении  $\zeta = F(z)$  можно воспользоваться принципом аргумента (п. 13.2) и теоремой Руше (п. 13.3):

$$\begin{aligned} & \{\text{число нулей } F(z) - \zeta_0 \text{ в } D_c\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \Delta_{z \in \partial D_c} \arg(F(z) - \zeta_0) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{z \in \partial D_c} \arg F(z) = 1. \end{aligned}$$

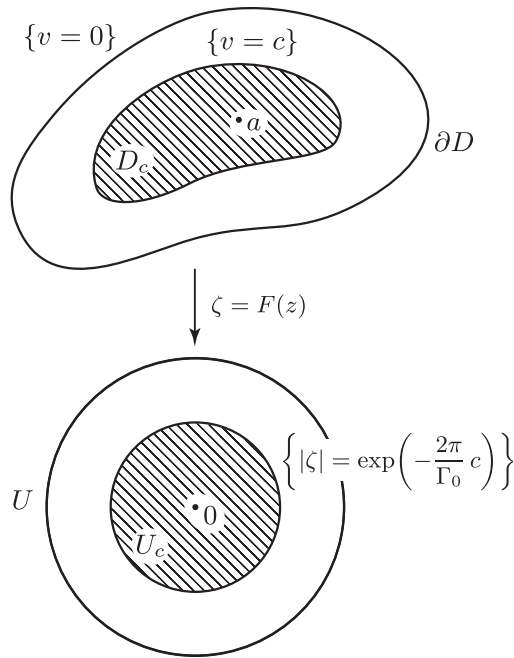


Рис. 90

Последнее равенство в этой цепочке вытекает (по принципу аргумента) из того, что функция  $F(z)$  имеет в области  $D_c$ , согласно (Д.4), единственный нуль  $z = a$  порядка 1. Далее, для любой точки  $\zeta_0 \in \mathbb{C} \setminus \bar{U}_c$  имеем по тем же соображениям:

$$\begin{aligned} & \{ \text{число нулей } F(z) - \zeta_0 \text{ в } D_c \} \\ &= \frac{1}{2\pi} \Delta_{z \in \partial D_c} \arg(F(z) - \zeta_0) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{z \in \partial D_c} \arg \zeta_0 = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, функция  $F$  принимает в  $D_c$  каждое значение из  $U_c$  ровно по одному разу и не принимает ни одного значения из  $\mathbb{C} \setminus \bar{U}_c$ . Значения из  $\partial U_c$  также не могут приниматься в  $D_c$  по принципу сохранения области. Следовательно,  $F$  биективно отображает  $D_c$  на  $U_c$ , что доказывает требуемое утверждение. ■

Задачи. (1) Покажите, что ни в какой односвязной области  $D \subset \mathbb{C}$  с кусочно гладкой границей нельзя создать установившееся течение, которое не имело бы в  $\bar{D}$  источников, вихрей или иных особенностей.

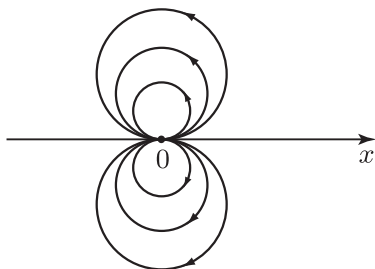


Рис. 91

Действительно, если бы такое течение существовало, то его комплексный потенциал  $f$  должен был бы удовлетворять условию

$$f \in \mathcal{O}(D) \cap C(\overline{D}) \quad \text{и} \quad \text{Im } f(z) \equiv \text{const} \quad \text{при} \quad z \in \partial D.$$

Покажите, что в этом случае  $f \equiv \text{const}$ .

(2) Рассмотрим векторное поле  $\mathcal{V}$  на  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  с комплексным потенциалом  $f(z) = 1/z$  (особенность этого поля при  $z = 0$  называется *точечным диполем*). Покажите, что его линии тока — окружности, касающиеся вещественной оси в начале координат (см. рис. 91).

(3) Пусть  $D \subset \mathbb{C}$  — односвязная область с кусочно гладкой границей. Поместим диполь из предыдущей задачи в точку  $a \in D$  и обозначим через  $f(z)$  комплексный потенциал получившегося в  $D$  течения. Указанное течение имеет сепаратрису (см. рис. 92). Исходя из этого сформулируйте для данного случая аналоги свойств (1)–(3) из п. Д.1. Пользуясь ими, найдите образ области  $D$  при отображении  $w = f(z)$  и покажите, что  $f$  конформно отображает  $D$  на  $f(D)$ . Это дает еще один вариант “физического” доказательства теоремы Римана.

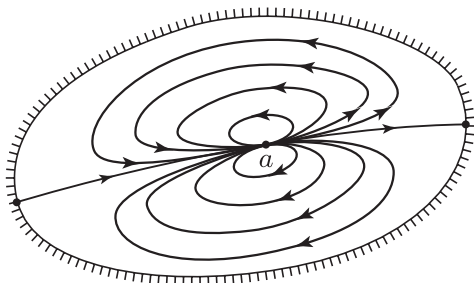


Рис. 92

### Д.3. Другие физические интерпретации голоморфных функций.

(А) *Электростатика*. Обозначим через  $\mathcal{V}(z)$  напряженность электростатического поля в точке  $z \in D$  (т.е. силу, с которой поле действует на единичный пробный заряд, находящийся в точке  $z$ ; обычно она обозначается через  $\mathbf{E}$ ). Пользуясь обозначениями из п. Д.1, рассмотрим поток

$$N = \int_{\partial D_1} \mathcal{V} \cdot \nu \, ds = \int_{D_1} (V_{1x} + V_{2y}) \, dx \, dy$$

поля  $\mathcal{V}$  через границу произвольной подобласти  $D_1 \Subset D$  и циркуляцию

$$\Gamma = \int_{\partial D_1} \mathcal{V} \cdot \tau \, ds = \int_{D_1} (V_{2x} - V_{1y}) \, dx \, dy$$

вдоль этой границы. Тогда  $N/(4\pi)$  совпадает с полным электрическим зарядом внутри  $D_1$  (теорема Гаусса), а  $\Gamma$  равно работе поля по перемещению пробного заряда вдоль  $\partial D_1$ . Поэтому условие несжимаемости  $V_{1x} + V_{2y} = 0$  из п. Д.1 интерпретируется теперь как условие отсутствия зарядов в  $D$ . Условие отсутствия вихрей  $V_{2x} - V_{1y} = 0$  означает, в свою очередь, что электростатическое поле не требует затрат энергии для своего поддержания. (Если бы циркуляция поля  $\mathcal{V}$  вдоль  $\partial D_1$  была отлична от нуля, то перемещение пробного заряда вдоль  $\partial D_1$  дало бы вечный двигатель.)

При выполнении указанных условий функция

$$f(z) = \int_{z_0}^z (V_1 - iV_2)(\zeta) \, d\zeta + \text{const}$$

будет, как и в п. Д.1, корректно определена и голоморфна в каждой односвязной подобласти  $D_1 \subset D$ . Функция  $u(z) := \text{Re } f(z)$  называется *потенциалом* поля  $\mathcal{V}$  и удовлетворяет уравнениям

$$u_x = V_1, \quad u_y = V_2.$$

Формула для циркуляции  $\Gamma$  показывает, что  $u(z_1) - u(z_2)$  есть работа поля по перемещению пробного заряда из точки  $z_1 \in D$  в точку  $z_2 \in D$ .

С учетом этого (в отличие от гидродинамического случая, когда мы налагали на комплексный потенциал  $f = u + iv$  условие  $v \equiv \text{const}$  на  $\partial D$ ) в электростатическом случае нужно требовать,

чтобы  $u \equiv \text{const}$  на  $\partial D$ , и считать границу  $\partial D$  проводником. Соответственно, картинка из доказательства теоремы Римана (т.е. семейство прообразов окружностей  $\{|\zeta| = r\}$  при конформном отображении  $\zeta = F(z)$  области  $D$  на круг  $\{|\zeta| < 1\}$ ) изображает теперь *эквипотенциальные линии поля в  $D$ , создаваемого точечным зарядом, находящимся в точке  $a$ .*

(В) *Термостатика.* Обозначим через  $u(z, t)$  температуру среды, заполняющей область  $D \subset \mathbb{C}$ , взятую в точке  $z \in D$  в момент времени  $t$ . Согласно линейной модели теплопроводности функция  $u(z, t)$  удовлетворяет уравнению

$$u_t = c(u_{xx} + u_{yy}), \quad \text{где } c > 0 \text{ — константа.}$$

Если режим установился (т.е.  $u$  не зависит от  $t$ ), мы приходим к уравнению Лапласа

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

В этом случае векторное поле  $\mathcal{V} := (u_x, u_y)$  удовлетворяет уравнениям  $V_{2x} - V_{1y} = 0$  (по самому определению) и  $V_{1x} + V_{2y} = 0$  (в силу уравнения Лапласа). Поэтому рассуждения из п. Д.1 о связи поля  $\mathcal{V}$  с голоморфными функциями сохраняют силу и в данной ситуации.

Заметим, что решение задачи Дирихле, рассмотренной в лекции 24, с термостатической точки зрения описывает распределение температуры установившегося теплового режима в односвязной области  $D \subset \mathbb{C}$  с простой границей, задаваемое распределением температуры на  $\partial D$ . Картинка из доказательства теоремы Римана, с точки зрения термостатики, изображает *изотермы установившегося теплового режима в  $D$ , создаваемого точечным источником тепла, помещенным в точку  $a \in D$ , при условии, что на границе  $\partial D$  поддерживается (не зависящая от времени) постоянная температура.*

### Список литературы

- [1] Гурвиц А., Курант Р., *Теория функций*. — М.: Наука, 1968, первое издание 1922.
- [2] Поля Г., Серё Г., *Задачи и теоремы из анализа*. — М.: Наука, 1978, первое издание 1925.
- [3] Привалов И. И., *Введение в теорию функций комплексного переменного*. — М.: Наука, 1984, первое издание 1934.
- [4] Маркушевич А. И., *Теория аналитических функций*. Т. 1, 2. — М.: Наука, 1968, первое издание 1950.
- [5] Волковысский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г., *Сборник задач по теории функций комплексного переменного*. — М.: Наука, 1970, первое издание 1960.
- [6] Картан А., *Элементарная теория аналитических функций одного и нескольких комплексных переменных*. — М.: ИЛ, 1963, первое издание 1961.
- [7] Евграфов М. А., *Аналитические функции*. — М.: Наука, 1991, первое издание 1965.
- [8] Rudin W., *Real and complex analysis*. — New York: McGraw-Hill, 1987, первое издание 1966.
- [9] Шабат Б. В., *Введение в комплексный анализ. Часть 1. Функции одного переменного*. — М.: Наука, 1985, первое издание 1968.
- [10] Евграфов М. А. (ред.), *Сборник задач по теории аналитических функций*. — М.: Наука, 1972, первое издание 1969.

*Учебное издание*

*А. В. Домрин, А. Г. Сергеев*

**Лекции по комплексному анализу  
Часть II. Второе полугодие**

Ответственный за выпуск *А. Д. Изаак*  
Компьютерная верстка и рисунки *О. Г. Мисюриной*

---

Сдано в набор 21.06.2004. Подписано в печать 20.10.2004.  
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 8,5. Тираж 200 экз.

---

Отпечатано в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН  
Москва, 119991, ул. Губкина, 8.

<http://www.mi.ras.ru/spm/> e-mail: [spm@mi.ras.ru](mailto:spm@mi.ras.ru)