ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
ОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Ф.М. ДОСТОЕВСКОГО

ХРОНОГЕОМЕТРИЯ

Аксиоматическая теория относительности

Омск
Издательство Омского государственного университета
2008

УДК 530.12+523.112

Г 97

Рекомендовано к изданию кафедрой кибернетики и ученым
советом факультета компьютерных наук

Гуц А.К.
Г 97 **Хроногеометрия.** Аксиоматическая теория относительности. – Омск: Изд-во Ом. гос. ун-та, 2008. – 340 с.

ISBN 978-5-7779-0903-9

Книга посвящена основаниям специальной теории относительности. Рассматриваются различные аксиоматики пространства-времени Минковского. Особое внимание уделяется причинной теории пространства-времени.

Излагаются результаты, касающиеся описания порядков и порядковых автоморфизмов в различных пространствах. Все эти результаты получены группой математиков, работающих в 1970-80-е годы в Новосибирске под руководством выдающегося математика академика АН СССР А.Д.Александрова.

УДК 530.12+523.112
Г 97

———-

ISBN 978-5-7779-0903-9

© Гуц А.К., 2008
© ГОУ ВПО «Омский госуниверситет им. Ф.М. Достоевского, 2008

Оглавление

Предисловие

Одним из традиционно важных занятий философии и классической науки считалось выявление как можно меньшего числа исходных положений, на которых основывалась любая сколь-нибудь значимая научная теория. Такие исходные положения получили названия *аксиом*, или *постулатов*. Наиболее древней аксиоматически изложенной наукой считается геометрия Евклида.

Практически с самых первых лет появления специальной теории относительности (СТО) начались поиски аксиом, лежащих в основе этой теории. Наиболее значительными этапами на пути аксиоматизации СТО являются работы Германа Минковского [185] и Альфреда Робба [326].

В середине 1950-х годов А.Д.Александров [9] предложил программу построения аксиоматической специальной теории относительности на основе следующих основных положений:

а) пространство-время есть многообразие всех событий, взятое лишь с точки зрения его структуры, определенной системой отношений предшествования, в отвлечении от всех иных свойств;

б) пространство-время есть четырёхмерное многообразие;

в) пространство-время максимально однородно, т.е. группа его преобразований, сохраняющих отношение предшествования, максимальная из всех возможных.

В 1970-80-е годы А.Д.Александрову удалось привечь к реализации своей программы группу молодых математиков, обучавшихся в Новосибирском государственном университете. Этот коллектив, работавший на протяжении почти двадцати лет, представлял уникальное научное содружество, посвятившее свои силы и ум выявлению оснований самой значительной физической теории XX века. Плодом его многолетней деятельности стали различные изощренные теоремы и полученные с их помощью разнообразные аксиоматики теории относительности.

В данной монографии излагаются основные результаты, полученные данным коллективом под руководством выдающегося российского математика академика АН СССР Александра Даниловича Александрова.

ВВЕДЕНИЕ

Хроногеометрия – в переводе с греческого – означает «измерение земли и времени». Поскольку «земля» – это пространство, то под хроногеометрией следует понимать теорию пространства-времени. В этом значении термин «хроногеометрия» использовал физик В.А.Фок [212]. Его ученик А.Д.Александров в 1967 году статью, посвященную канадскому геометру Кокстеру, назвал «Contribution to chronogeometry», т.е. «Вклад в хроногеометрию». Цель этой статьи состояла в нахождении минимального набора условий, налагаемых на некоторое семейство $\mathcal{P} = \{P_x\}$ областей $P_x \subset \mathcal{M}$, лежащих в Мире событий $\mathcal{M}$, которые бы позволили однозначно заявить о том, что Мир событий обладает четырехмерной псевдоевклидовой геометрией.

Таким образом, А.Д.Александров хроногеометрией назвал *основания* теории пространства-времени. Именно такая хроногеометрия излагается в данной книге.

0.1. Что такое хроногеометрия?

Термин «хроногеометрия» современным человеком скорее будет переведен как «геометрия времени». Термин применяют к геометрии пространства-времени по той причине, что геометрия последнего является четырёхмерной, а приведенный его перевод акцентирует внимание на так называемом «временном измерении». Такой акцент легко объясняется, если учесть, что к концу XIX века многое было известно о физическом пространстве и его возможной геометрии. Однако сущность времени для многих была окутана тайной. Во второй половине XIX века стали говорить о времени как о четвёртом измерении, проводя геометрическую аналогию с реально наблюдаемыми тремя пространственными измерениями – *шириной, глубиной, высотой.* У четвёртого измерения было свое наименование – *длительность*, о чем одним из первых стал говорить Ньютон.

Объединение времени и пространства в единое пространство-время, осуществленное Германом Минковским и названное им *Миром* (*событий*), породило иллюзию, что тайна времени раскрыта и геометрия пространства-времени – это прежде всего геометрия времени. Важно отметить, что Минковский сразу заметил, что *геометрия пространства-времения – это геометрия четырёхмерного псевдоевклидова пространства.*

Как известно, исследуя такой объект как пространство-время, не удается понять сущность времени по той простой причине, что исследователь, моделируя на фоне пространства-времени физические явления, вынужден обращаться к дополнительному понятию *собственное время.* Фактически это означает, что, пытаясь геометризировать собственное время, мы вынуждены ввести **пятое измерение**. Но нетрудно сообразить, что вскоре нам придется ввести шестое измерение и т.д. Иначе говоря, раскрытие тайны времени сведется к абсурдному увеличению размерности Мира событий.

Следовательно, остается предположить, что пространство-время – это объект *вневременной.* Пространство-время лишено времени и является просто вместилищем *событий* (вещей в себе). Но нам известна еще одна сущность, которая никак пока не является физическим понятием, т.е. понятием науки физики, таким, как сила, импульс, энергия, масса и т.д. Речь идет о *сознании.*

С сознанием связан материальный объект – *носитель сознания*, или *наблюдатель*. Наблюдатель не есть прибор. Это существо, которое мы называем живым, разумным. В частности, это человек.

Осознание события (вещи в себе), или совокупности событий (множества вещей в себе) из Мира событий, или всего Мира событий есть акт возникновения сущности, которую мы называем временем. Применительно к человеку это было блестяще пояснено Кантом. По сути дела, если нет человека, то нет и времени. Но это совсем не означает отсутствие другого типа осознания, а следовательно, и другого типа описания (объяснения, восприятия и т.д.) Мира событий. Мир событий Минковского, мёртвый, находящийся вне времени, может осознаваться самым различными способоми, и каждое осознание следует назвать временем.

Если выписать ряд типов осознания – $\ell A, \ell B, \ell C, \ldots$, то возникает ряд различных типов *оживлений*, т.е. описаний во времени (или просто типов времен) любой вещи в себе $x \in \mathcal{M}$

$$x \in_{\ell A} \mathcal{M}, \quad x \in_{\ell B} \mathcal{M}, \quad x \in_{\ell C} \mathcal{M}, \ldots$$

Такой подход очень хорошо отвечает представлению о многовариантности Мира событий. Мир не сводится к одной Вселенной, а есть Мультиверс, т.е. множество взаимодействующих вселенных.

> «Объективный мир, пространство-время только существует, а не происходит; как целое оно не имеет истории. Только перед взглядом сознания, поднимающегося по моей мировой линии, сечение этого мира «оживает» и движется мимо как пространственный образ, подвергаемый временно́му преобразованию» (Г. Вейль, [58]).

Какое значение в таком случае имеют исследования, касающиеся оснований геометрии вневременного Мира событий Минковского?

Вневременной характер пространства-времени наиболее ярко выражен в теории *абсолютного пространства-времени*. Согласно этой теории, события прошлого, настоящего и будущего одинаково реальны и все вместе составляют то, что Минковский назвал четырёхмерным Миром событий.

Человеческое познание является временны́м, т.е. проистекает во времени, но сила этого познания в том, что оно способно охватить структуру Мира событий в целом. К этим «вневременным» знаниям относится и геометрия пространства-времени. Другие вневременные знания – это то, что мы называем законами физики. Хотя их специфично временные выражения, записи, использующие временной параметр (время), мешают нам это увидеть. Четырёхмерная геометрия по свой сути является лучшим вневременны́м способом задания ряда физических законов, связанных с тем, что мы, живущие в мире со временем, называем механическим перемещением тел (динамикой тел). Знание геометрии Мира событий позволяет нам делать **предсказания будущего** механически перемещающихся тел. Впрочем, если вспомнить об электродинамике, следует говорить не только о механическом движении материи.

Абсолютные, т.е. вневременны́е знания, касающиеся геометрии и иных сторон Мира событий Минковского, будучи спроецированы на различные типы осознания, дают множественный набор самых различных предсказний относительно событий, т.е. вещей в себя, становящихся при их оживлении вещами для «нас». Мы обязаны взять слово *нас* в кавычки, поскольку речь при этом не всегда идет о нас, людях, как о наблюдателях вещей в себе, лежащих во вневременном пространстве-времени.

Хроногеометрия в понимании А.Д.Александрова – это область геометрических исследований, и занимается она установлением природы обнаруживаемой нами четырёхмерной псевдоевклидовой[1] геометрии Мира событий Минковского (пространства-времени).

Хроногеометрия – это наука, основной задачей которой является не получение следствий из факта псевдоевклидовости (псевдоримановости) структуры пространства-времени, а выяснение того, *как* и *почему* Мир событий имеет псевдоевкли-

[1] При переходе к общей теории относительности следует говорить о псевдоримановой геометрии.

дову (псевдориманову) структуру.

0.2. Используемые обозначения и определения

Для обозначения множества вещественных чисел используется символ $\mathbb{R}$.

Через A^n будем обозначать n-мерное аффинное пространство. Мы фиксируем выделенную точку e в пространстве A^n.

Точки пространства A^n будем обозначать малыми латинскими буквами. Если B — множество, то $int(B)$, $\overline{B}$, ∂B, $conv(B)$ обозначают соответственно его внутренность, замыкание, границу и выпуклую оболочку.

Через T обозначаем группу параллельных переносов в A^n.

Пусть M – множество в A^n. Через M_x будем обозначать[2] множество, полученное из M с помощью переноса $t \in T$ такого, что $t(e) = x$. Полагаем, по определению, $M = M_e$.

Если $x, y \in A^n$, то $[x, y]$ есть отрезок прямой в A^n с концами x и y, а $(x, y) = [x, y] \setminus \{x, y\}$. В A^n вводим евклидову метрику $|x - y|$ с началом e.

Далее, $l(x, y)$ и $l^+(x, y)$ $(x \neq y)$ обозначают соответственно прямую, проходящую через точки x, y, и луч, исходящий из точки x и проходящий через y.

Точки на луче $l^+(x, y)$, где $x \neq y$, упорядочиваем естественным образом: считаем $v \geq w$, если $v, w \in l^+(x, y)$ и $|x - v| \geq |x - w|$.

Если $x \in A^n$ и $r > 0$ – некоторое число, то через $B(x, r)$ обозначаем открытый шар с радиусом r и центром x, т.е. $B(x, r) = \{y \in A^n : |x - y| < r\}$.

Если M — некоторое множество в пространстве A^n, то точка $x \in M$ называется ***крайней***, если она не содержится в вы-

[2] За исключением специальных случаев, когда под T понимается не группа параллельных переносов, а другая группа. Но и в этом случае будем сохранять данные обозначения, оговаривая лишь, о какой группе идет речь.

пуклой оболочке остальных точек. Если M — выпуклое множество, то *крайняя точка* — это такая точка, которая не содержится внутри отрезка с концами, принадлежащими множеству M.

0.2.1. Смещения и квазицилиндры

Дадим теперь определения смещения и квазицилиндра.

Определение 0.1. *Смещением* d_{El} (или d_{EL}), где E — некоторая гиперплоскость, а l — вектор (или луч L), непараллельный E, называется гомеоморфизм A^n в себя, удовлетворяющий условиям:

1) на каждой гиперплоскости E_a, параллельной E, d_{El} (соответственно d_{EL}) есть перенос из группы параллельных переносов T;

2) d_{El} (или d_{EL}) переводит отрезки (лучи), равные и параллельные l (соответственно L) в такие же отрезки (лучи) [29].

Определение 0.2. *Квазицилиндром* $Q(E,l)$ называется множество M, удовлетворяющее следующим условиям [29]:

1) имеются гиперплоскости $E_1, E_2, \ldots$, параллельные E, где E_{i+1} получено из E_i переносом на вектор l, а множество M представляется в виде

$$M = \bigcup_i [M_i \cup (M \cap E_i)], \tag{0.1}$$

где каждое M_i есть цилиндр, образованный открытыми отрезками, равными l (как векторы), с концами на E_i, E_{i+1} (не исключается, что некоторые и даже все M_i пусты);

2) M не допускает представления (0.1) с той же гиперплоскостью E и вектором l', параллельным l, но не равным l.

Наглядно квазицилиндр состоит из поставленных друг на друга цилиндров с равными и параллельными образующими; основания цилиндров удалены и между цилиндрами есть прокладки на гиперплоскостях E_i.

Квазицилиндр можно охарактеризовать как множество M, для которого существуют гиперплоскость E, вектор l и перенос $t \in T$ такие, что $d_{El}(M) = t(M)$ ([29], с.15).

Определение квазицилиндра $Q(E, L)$, где L — луч, дается аналогично определению квазицилиндра $Q(E, l)$.

0.2.2. Предпорядок, порядок и порядковые автоморфизмы

Определение 0.3. *Предпорядок* на множестве $\mathcal{M}$ – это семейство подмножеств $\mathcal{P} = \{P_x : x \in \mathcal{M}\}$, удовлетворяющее следующим условиям:

O1) подмножество P_x сопоставлено каждой точке $x \in \mathcal{M}$;
O2) $x \in P_x$ для любой точки $x \in \mathcal{M}$;
O3) если $y \in P_x$, то $P_y \subset P_x$.

Если $P_x \neq \{x\}$, то предпорядок называется *нетривиальным*. В противном случае – *тривиальным*.

Пусть

$$x \preceq y \ \Leftrightarrow y \in P_x.$$

Полагаем

$$P_x^- = \{y \in \mathcal{M} : y \preceq x\}.$$

Определение 0.4. *Порядок* на множестве $\mathcal{M}$ – это семейство подмножеств $\mathcal{P} = \{P_x : x \in \mathcal{M}\}$, удовлетворяющее условиям O1) - O3) определения 0.3 и дополнительному условию:

O4) если $y \neq y$, то $P_x \neq P_y$.

Определение 0.5. Биективное отображение $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, удовлетворяющее условию $f(P_x) = P_{f(x)}$ для любой точки $x \in \mathcal{M}$, где $\mathcal{P}$ – предпорядок в $\mathcal{M}$, будем называть *порядковым автоморфизмом*, или *$\mathcal{P}$-автоморфизмом.*

Из определения следует, что обратное отображение f^{-1} также является $\mathcal{P}$-автоморфизмом, т.е. $f^{-1}(P_x) = P_{f^{-1}(x)}$ для любой точки $x \in A^n$.

Обозначим через $Aut(\mathcal{P})$ множество всех $\mathcal{P}$-автоморфизмов, а через $Aut_c(\mathcal{P})$ множество всех непрерывных $\mathcal{P}$-автоморфизмов.

Ясно, $Aut(\mathcal{P})$ является группой относительно операции композиции.

Стабилизатор группы $Aut(\mathcal{P})$ *в точке* x обозначаем как $Aut(\mathcal{P})_x$. Напомним, что $Aut(\mathcal{P})_x = \{g \in Aut(\mathcal{P}) : g(x) = x\}$.

Пусть дан предпорядок $\mathcal{P}$ в топологическом пространстве $\mathcal{M}$.

Говорим, что предпорядок $\mathcal{P}$ – *замкнутый*, если все P_x – замкнутые множества; предпорядок $\mathcal{P}$ – *открытый*, если все множества $P_x \setminus \{x\}$ открыты.

0.2.3. Инвариантные порядки в A^n

Пусть на аффинном пространстве A^n действует группа G преобразований этого пространства.

Определение 0.6. Порядок $\mathcal{P} = \{P_x : x \in A^n\}$, заданный в A^n, называется G-*инвариантным* (или инвариантный относительно группы G), если для любого $x \in A^n$ и любого $g \in G$ $g(P_x) = P_{g(x)}$.

Говорим, что группа G преобразований действует на A^n *транзитивно*, если для любых $x,\ y \in A^n$ найдется $g \in G$ такое, что $g(x) = y$. Если для любых $x,\ y \in A^n$ найдется единственный элемент $g \in G$ такой, что $g(x) = y$, то группа G действует *эффективно* или *просто транзитивно* на A^n.

В случае порядка G-инвариантного относительно просто транзитивной группы G свойства множеств P_x точно такие же, как у конкретного множества P_e, взятого в выделенной точке $e \in A^n$. Поэтому часто можно говорить о свойствах порядка, говоря только о множестве P_e. Более, в силу того, что $P_x = g(P_e)$, где $x = g(e),\ g \in G$, видна определяющая роль множества P_e при задании порядка $\mathcal{P}$. Будем в таком случае говорить, что *множество* P_e *задает порядок* $\mathcal{P}$.

Будем также писать P вместо P_e.

Определение 0.7. Порядок $\mathcal{P} = \{P_x : x \in A^n\}$, заданный в A^n, называется *релятивистским*, если он инвариантен относительно группы параллельных переносов.

0.2.4. Конусы

Под *конусом* в аффинном пространстве A^n $(n \geq 2)$ понимается множество точек K, состоящее из лучей – *образующих конуса* – с началом в точке e, которую называем *вершиной* конуса.

Образующая конуса, лежащего в аффинном пространстве A^n, называется *крайней*, если она не содержится в выпуклой оболочке остальных его образующих. В случае выпуклого конуса крайняя образующая – это образующая, которая не лежит внутри угла между любыми двумя другими образующими.

Конус назовем *строго выпуклым*, если он обладает следующими свойствами:

а) Сечение конуса всякой 2-плоскостью, содержащей хотя бы одну образующую, представляет выпуклый угол, причем его стороны принадлежат ему, т.е. являются крайними образующими конуса. При этом все такие образующие – крайние.

б) Конус имеет как крайние, так и некрайние образующие.

Пусть K – строго выпуклый конус. Крайние образующие этого конуса образуют «поверхностный» конус ∂K. Образующие, не являющиеся крайними, образуют «открытый» строго выпуклый конус $int(K) \cup \{e\}$, где e – вершина K. В обычной топологии пространства A^n конус K замкнут, ∂K – граница K, множество $int(K)$ – открытое. Поэтому далее пишем названия указанных конусов – замкнутый, открытый, поверхностный – без кавычек. Если конус состоит из прямых, то его образующими мы называем эти прямые, а сам конус – *двойным.*

Если K – замкнутый строго выпуклый конус и K^- – конус, симметричный K относительно вершины, то $K \cup K^-$ представляет собой двойной замкнутый конус; мы называем его *двой-*

ным строго выпуклым конусом. Соответственно определяются *двойной поверхностный* $\partial K \cup \partial K^-$ и *двойной открытый* $int(K) \cup (int(K))^- \cup \{e\}$ *конусы.* В противопоставление двойному конусу конус, образующие которого – лучи, называем *ординарным.*

В случае, когда P_x — конус и $P_x \setminus \{x\}$ — открытое множество, говорим об *открытом конусе.*

0.3. Аффинные структуры и аффинные многообразия

Пусть V^n n-мерное дифференцируемое многообразие, $n \geq 1$.

Определение 0.8. Аффинный атлас $\mathcal{A}$ на V^n есть совокупность покрывающих V^n локальных карт таких, что любая функция перехода между картами из $\mathcal{A}$ продолжается до аффинного преобразования пространства $\mathbb{R}^n$. Максимальный аффинный атлас есть *аффинная структура* на V^n. Многообразие V^n, оснащенное аффинной структурой, называется *аффинным многообразием.*

Каждая локальная карта аффинной структуры определяет аффинные координаты.

Отображение $f : V^n \to V^k$ аффинных многообразий V^n, V^k называется *аффинным*, если оно, будучи выраженным в аффинных координатах, является ограничением аффинного преобразования из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^k$.

Множество всех аффинных отображений аффинного многообразия V^n обозначим через $\mathrm{Aff}(V^n)$.

На аффинном многообразии V^n имеется естественная линейная связность ∇ с нулевой кривизной и кручением: в аффинных координатах она является стандартной связностью на $\mathbb{R}^n$. Ковариантное дифференцирование относительно ∇ в V^n отвечает обычному дифференцированию в $\mathbb{R}^n$.

Аффинное многообразие *полное*, если оно геодезически полное (относительно ∇).

Аффинное многообразие V^n полное тогда и только тогда, когда оно представимо в виде $\mathbb{R}^n/\Gamma$, где Γ подгруппа аффинных преобразований, действующая свободно и вполне разрывно на $\mathbb{R}^n$ [66, с.61].

Геодезические аффинного многообразия $\langle V^n, \mathcal{A}\rangle$ относительно связности ∇ будем называть *прямыми*. Очевидно, образ прямой при аффинной биекции будет всегда прямой. Кроме того, на аффинном многообразии через каждую точку в любом направлении можно провести единственную прямую.

0.3.1. Аффинные пространственно-временные структуры и порядки

Пусть $\langle V^n, \mathcal{A}, g\rangle$ аффинное многообразие с лоренцевой метрикой g сигнатуры $(+-...-)$. *Изотропный аффинный конус* C_x с вершиной $x \in V^n$ – это объединение всех прямых, проходящих через точку x и имеющих в точке x изотропное направление.

Объединение всех прямых, проходящих через точку x и имеющих непространственноподобные направления в точке x будем называть *лоренцевыми аффинными конусами.*

Определение 0.9. *Аффинная пространственно-временная структура* есть структура рода

$$\langle V^n, \mathcal{A}, g, \mathcal{C}, Aut(\mathcal{C})\rangle,$$

где

$\langle V^n, \mathcal{A}, g\rangle$ – аффинное многообразие с лоренцевой метрикой g;

$\mathcal{C} = \{C_x : x \in V^n\}$ – семейство изотропных аффинных конусов:

$Aut(\mathcal{C})$ – группа пространственно-временных автоморфизмов, т.е. биекций $f : V^n \to V^n$ таких, что $f(C_x) = C_{f(x)}$ для любой точки $x \in V^n$.

Любой аффинный лоренцев конус C_x состоит из двух ординарных конусов – конуса будущего P_x и конуса прошлого P_x^-. Каждый из последних двух конусов назовем *аффинным причинным конусом.* Можно рассмотреть семейство аффинных причинных конусов $\mathcal{P} = \{P_x : x \in V^n\}$. Здесь x – вершина конуса P_x.

Аффинная лоренцева структура порядка на аффинном многообразии $\langle V^n, \mathcal{A}\rangle$ есть структура рода

$$\langle V^n, \mathcal{A}, g, \mathcal{P}, Aut(\mathcal{P})\rangle,$$

где

$\mathcal{P} = \{P_x : x \in V^n\}$ – семейство аффинных причинных конусов, удовлетворяющее аксиомам $O1, O2, O3$,

$Aut(\mathcal{P})$ – группа $\mathcal{P}$-автоморфизмов.

0.3.2. Однородные аффинные многообразия

Аффинное многообразие $\langle V^n, \mathcal{A}\rangle$ будем называть *однородным*, если на нем действует транзитивно аффинная подгруппа $T \subset \mathrm{Aff}(V^n)$. Причем, если T связная группа Ли, действующая просто транзитивно на V^n, то T диффеоморфна V^n. Следовательно, T оснащается аффинной структурой, в которой левые сдвиги являются аффинными биекциями. Другими словами, группа T приобретает левоинвариантную аффинную структуру.

Если G связная односвязная группа Ли, оснащенная левоинвариантной аффинной структурой, тогда G допускает *аффинное представление*, т.е. существует гомоморфизм

$$\alpha : G \to \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n).$$

Причем $\alpha(G)$ сохраняет область $D(G) \subset \mathbb{R}^n$ и действует транзитивно на ней [268].

Обратно, если $dim\ G = n$ и $\alpha : G \to \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ аффинное представление, имеющее открытую орбиту, тогда можно оснастить G единственной левоинвариантной аффинной структурой [268].

При изучении связных односвязных групп Ли G с левоинвариантными аффинными структурами, которые являются полными, полезно иметь в виду, что группа $\alpha(G)$ действует просто транзитивно на $\mathbb{R}^n$. Известно, что при этом G должна быть разрешимой, и можно изучать вместо аффинной геометрии на G фигуры аффинной геометрии на $\mathbb{R}^n$, но инвариантные относительно группы $\alpha(G)$.

Если $\mathcal{E}$ – пространственно-временная или порядковая аффинная структура на однородном аффинном многообразии, то она инвариантна относительно группы аффинных изометрий T, действующей транзитивно на V^n.

0.3.3. Физический смысл аффинных структур

Аффинная структура на многообразии – это набор привилегированных систем отсчёта. Действительно, по отношению к аффинному атласу не меняется энергия гравитационного поля, поскольку последняя, как правило, вычисляется с помощью псевдотензоров, построенных с помощью алгебраических выражений из коэффициентов римановой связности Γ^i_{jk}. Подобным образом, тензорное поведение Γ^i_{jk} при аффинных преобразованиях означает отсутствие дополнительных физических сил, которые могли бы появиться, если бы переход от одной системы отсчёта (локальной карты) к другой совершался с помощью нелинейного преобразования. Таким образом, аффинный атлас можно интерпретировать как совокупность инерциальных систем отсчёта в пространстве-времени V^n, а «аффинизированные» преобразования из группы T – это соотвествущие «привилегированные состояния движения» [233, с.122]. Привилегированность аффинного атласа как раз заключается в том, что в нем преобразования группы T записываются в аффинном виде, т.е. достаточно простом.

Как для любой другой привилегированной системы координат, существование аффинного атласа определяется свойствами многообразия в целом [211, с.12], и, естественно, далеко не всякое многообразие допускает аффинную структуру [344].

В случае однородного многообразия V^n с разрешимой транзитивной группой преобразований мы имеем дело с так называемыми разрешимыми многообразиями или солвмногообразиями, которые являются векторными слоениями над компактными солвмногообразиями [237, 348]. При этом компактное солвмногообразие есть расслоение над тором с нильмногообразием в качестве слоя. Нильмногообразия изучались А.И.Мальцевым [183] и представляют собой фактор-пространство G/D, где G – связная односвязная нильпотентная группа Ли, а D ее замкнутая дискретная подгруппа.

Глава 1

СТРУКТУРА МИРА СОБЫТИЙ

Мир событий – это совокупность всех событий во Вселенной, которые были, есть и будут, где бы пространственно они ни находились.

Минковский, который осознанно ввел в научное употребление это понятие[1], воспринимал Мир событий как сущность, объединяющую воедино время и пространство. Он сразу математизировал Мир событий, оснастив его геометрией четырёхмерного псевдоевклидова пространства сигнатуры $(+---)$.

Математизированный Мир событий будем, как правило, называть *Миром Минковского* или *пространством-временем Минковского.*

Таким образом, Мир событий $\mathcal{M}$ будет в монографии представлять собой абстрактное множество, состоящее из некото-

[1] Если быть точным, то Минковский использовал не слово «событие», а слова *мировая точка* и говорил о *мире.* В мировую точку он, «чтобы не оставлять зияющей пустоты», помещает некоторый объект наблюдения, который он называет, избегая конкретизации в форме материя или электричества, «субстанцией». Позже «субстанциональные точки» Минковского были названы событиями.

рых элементов, которые мы называем событиями и природа которых нами не анализируется.

Задача хроногеометрии состоит в том, чтобы понять, какая первичная структура на $\mathcal{M}$ порождает топологическую и геометрическую структуры Мира Минковского. А.Д.Александров высказал гипотезу, что топологическая и геометрическая структуры являются прозводными причинной структуры. Доказательство этой гипотезы составляет основное содержание хроногеометрии.

1.1. Временной порядок

Воспринимаемый человеком Мир событий наделяется *нами*, людьми, *временным порядком*, который ассоциируется нами со словами «раньше» и «позже». Что такое временной порядок с математической точки зрения?

Пусть $\mathcal{M}$ – Мир событий и $t : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ сюрьективное отображение такое, что

1) для каждого $d \in \mathbb{R}$ $T_d = t^{-1}(d)$ есть трехмерное подмногообразие;

2) если $d_1 \neq d_2$, то $T_{d_1} \cap T_{d_1} = \emptyset$;

2) $\mathcal{M} = \bigcup\limits_{d \in \mathbb{R}} T_d$.

Тогда отображение t называется *часами* в Мире событий $\mathcal{M}$. Значение $d = t(x)$ – дата события $x \in \mathcal{M}$ по часам t.

Пусть

$$T_x^+ = t^{-1}(\{r \in \mathbb{R} : r \geq t(x)\}) = \bigcup_{d \geq t(x)} T_d.$$

В таком случае семейство множеств $\mathcal{T} = \{T_x^+ : x \in \mathcal{M}\}$ задает на $\mathcal{M}$ линейный плотный порядок, который будем называть *временным порядком* в $\mathcal{M}$.

Временной порядок – это способ осознания событий в форме последовательности, т.е. это то, что мы называем временем. Временной порядок, согласно данному выше определению, расслаивает Мир событий на трехмерные гиперповерхности «одновременности» T_d. Время проявляется на такой гиперповерхности сразу везде в тот же самый «миг» $t = d$. Это одновременное проявление времени сразу во всех точках пространства является способом осознания вещей в себе, их оживление и представляет собой одно из основных свойств времени. Иначе говоря, время обладает свойством *дальнодействия*. Этим временной порядок отличается от причинного. Сущность последнего – *близкодействие*.

Если Мир событий оснащен аффинной структурой A^4, то естественным является *аффинный временной порядок* $\mathcal{T}_{аф}$, для которого все многообразия T_d являются трехмерными аффинными плоскостями.

Аффинная биекция $g : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ аффинный временной порядок $\mathcal{T}_{аф} = \{T_x^+ : x \in \mathcal{M}\}$ преобразует в аффинный временной порядок

$$\widetilde{\mathcal{T}}_{аф} = \{\widetilde{T}_x^+ : x \in \mathcal{M}\},$$

где

$$\widetilde{T}_x^+ = \widetilde{t}^{-1}(\{r \in \mathbb{R} : r \geq \widetilde{t}(x)\}) = \bigcup_{d \geq \widetilde{t}(x)} T_d,$$

а $\widetilde{t} : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ – часы, отвечающие порядку $\widetilde{\mathcal{T}}_{аф}$.

Пусть в Мире событий с аффинной структурой A^4 задана группа преобразований G, состоящая из аффинных биекций $g : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, *сохраняющих временной порядок* $\mathcal{T}_{аф}$, т.е.

$$g(T_x^+) = T_{g(x)}^+.$$

Очевидно, что при этом $g(T_d) = T_{d'}$. Это означает, что те события, которые были одновременными, остаются таковыми после преобразования g.

Одновременность сохраняется при преобразованиях Мира событий, образующих группу Галилей $G_{гал}$, но нарушается при преобразованиях Лоренца $G_{лор}$. Во втором случае говорят об относительности одновременности.

1.1.1. Направление времени

Осознание Мира событий, присущее человеку, обладает тем свойством, что последовательное восприятие (оживление) событий идет всегда в сторону увеличения дат событий.

Очевидно, это следствие того, что человеческое осознание вещей в себе является *одномерным* [124], и это дает возможность без путаницы, появляющейся при хождении по прямой «туда-обратно», датировать (метить, запоминать) различные события.

Эта особенность человеческого времени называется *направлением времени*.

1.2. Причинный порядок

Помимо временного порядка, мы говорим о существовании *причинного порядка*. Ему соответствуют часто употребляемые в нашей речи слова «причина» и «следствие».

Причинный порядок с точки зрения математики есть бинарное отношение порядка $\prec$, заданное в Мире событий $\mathcal{M}$.

Отношение порядка – это бинарное отношение на $\mathcal{M}$, удовлетворяющее условиям:

i) если $x \prec y$, то $\neg(y \prec x)$ (антисимметричность);

j) если $x \prec y$ и $y \prec z$, то $x \prec z$ (транзитивность).

Порядок $\prec$ называют *строгим*. Чаще удобнее использовать *нестрогий порядок*, для которого условие i), j) заменяется на менее жесткие условия:

1) $x \preceq x$ (рефлексивность);

2) если $x \preceq y$ и $y \preceq x$, то $x = y$;

3) если $x \preceq y$ и $y \preceq z$, то $x \preceq z$ (транзитивность).

Если отказаться от условия 2), то имеем *предпорядок* на множестве $\mathcal{M}$.

Вместе с порядком $\prec$ естественно изучать его автоморфизмы. *Порядковым автоморфизмом* называют биекцию $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ такую, что для любых $x, y \in \mathcal{M}$, если $x \prec y$, то $f(x) \prec f(y)$ и $f^{-1}(x) \prec f^{-1}(y)$. Множество всех порядковых автоморфизмов обозначаем как $Aut(\prec)$. Аналогично вводится множество $Aut(\preceq)$. Ясно, $Aut(\prec)$ и $Aut(\preceq)$ – группы.

Уже на ранних этапах развития хроногеометрии было показано, что временной порядок есть следствие причинного. Это легко объснимый факт. Во-первых, мы, люди, наблюдаем так называемый Мир событий Минковского[2], причем наблюдаем во времени, которое для нас, по сути дела, отождествляется с временным порядком. Следовательно, временно-порядковая структура вторична к той структуре, которая порождает псевдоевклидову геометрию Мира событий. А причинная структура как раз является структурой, порождающей геометрию пространства-времени. А во-вторых, причинность – это одностороннее представление о взаимодействии вещей в себе в Мире событий, порожденное тем, что человек способен прослеживать взаимосвязи событий только в одном направлении времени. Иначе говоря, постулируя причинность, мы неявно постулируем временной порядок. Не стоит поэтому удивляться, что временной порядок появляется «вследствие» причинного.

Сама же причинная структура есть формализация констатации наличия причинно-следственных связей между событиями (вещами в себе). Первичным является понятия взаимодействия; причинно-следственные связи – это всего лишь ограниченный, локальный взгляд на природу взаимодействий (Энгельс), свойственный человеческому видению Мира событий. Следовательно, *причинная теория пространства-времени в значительной мере субъективная теория, привязанная к типу осознания Мира событий, который воплощен в человеке.*

Аксиоматическую теорию пространства-времени, постро-

[2]Мир Минковского – это пространство-время специальной теории относительности (см. § 1.3).

енную на основе отношения причинности взаимодействия $\preceq$, будем называть *причинной*. Исходной структурой для построения причинной теории пространства-времяни является структура рода $\langle \mathcal{M}, \preceq \rangle$.

1.2.1. Первичность временного порядка?

Хотя мы говорили выше об установленном хроногеометрией факте первичности причинного порядка, интуиция говорит о другом: коль причина всегда наблюдается **раньше**, чем следствие, т.е. следствие наблюдается всегда **позже** причины, то, наверное, первичным является временной порялок.

В чем же дело? Мы поясняли, что причинность – производное понятие от понятия взаимодействия. Следовательно, интуиция, указывающая на первичность временного порядка, говорит в действительности против первичности понятия взаимодействия. Другими словами, нам только кажется, что в Мире есть взаимодействия. Мир событий дан человеку через время, во времени, т.е. последовательно, часть за частью. Поэтому мы и вынуждены говорить о существовании взаимодействий, а значит, о причинно-следственных связях. Причинная теория пространства-времени – это теория того, как Мир дается, представляется человеку. Поэтому причинная теория, коль скоро она отражает объективно существующий Мир событий (реальность вне нас), обязана восстановить **то**, посредством чего этот Мир нам дан, т.е. восстанавливает временной порядок, поскольку Мир дан нам во времени. Акт **математического** восстановления временного порядка вторичен по отношению постулирования причинности; отсюда вторичность временного порядка в хроногеометрии.

Причинность и время тесно связаны. Более того, при анализе первичности любого из них мы сталкиваемся с противоречием. Пуанкаре писал в статье «Измерение времени» (1898): «...когда одно явление нам кажется причиной другого, мы рассматриваем первое как предшествующее.

Следовательно, именно причиной мы определяем время. Но как чаще всего мы узнаем, какой из двух факторов, кажущихся нам связанными постоянно, является причиной и какой следствием? Мы считаем, что предшествующий факт (антецедент) является причиной другого, следствия. И тогда время определяет причину. Как освободиться от этого логического противоречия? Мы говорим: то после этого, следовательно, по причине этого; то по причине этого, следовательно, после этого[3]. Удастся ли нам когда-нибудь выйти из такого порочного круга?» [204, с.18].

И Пункаре заявляет: «Рассмотрим теперь не как выходят из такого положения, **поскольку полностью это не удастся** (выделено мной – А.Г.), а как пытаются из него выйти» [204, с.18].

Наш способ выхода из положения логического противоречия состоит в следующем доводе в пользу причинной теории: Мир событий Минковского в действительности является **вневременным миром** [124]. Время вносится в него извне, что, в частности, отражено во вторичности временного порядка в причинных теориях.

Однако если мы пожелаем строить аксиоматику Мира Минковского, мира специальной теории относительности как вневременного мира, то следует обратиться к интерактивным теориям пространства-времени (см. § 1.6).

1.3. Мир Минковского

Мир Минковского является моделью Мира событий, наделенного временным и причинным порядками. Этот Мир представляет собой пространство-время специальной теории относительности. Впервые[4] он был описан в докладе Германа Минковского. Этот доклад был сделан 21 сентября 1908 года на 80-м собрании немецких естествоиспытателей и врачей в Кельне [185]. Именно аксиоматизация Мира Минковского и

[3] У Пуанкаре эта фраза написана на латинском языке.

[4] Доклад Минковского вызвал широкий резонанс научной общественности. Но задолго до Минковского и Эйнштейна об едином 4-мерном пространстве-времени писали М.Аксенов [42], Паладьи [312] и Мах [184].

является основной, первой задачей хроногеометрии.

Мир Минковского – это множество, снабженное структурой 4-мерного аффинного пространства и псевдоевклидовой метрикой
$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{1.1}$$

Таким образом, Мир Минковского, называемый также пространством-временем Минковского, обладает, по крайней мере, тремя структурами: топологической, которая гомеоморфна $\mathbb{R}^4$, 4-мерной аффинной и псевдоевклидовой. Иначе говоря, пространство-время Минковского – это четырёхмерное псевдоевклидово пространство ${}^1E^4$ сигнатуры $(+---)$.

Метрика (1.1) имеет группу изометрий, состоящую из преобразований Лоренца, за исключением подобий

$$(x, y, z, t) \to (\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t).$$

1.3.1. Преобразования Лоренца

Под *преобразованием Лоренца*[5] понимается биективное преобразование
$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,$$
$$f : (x, y, z, t) \to (x', y', z', t'),$$

являющееся композицией следующих преобразований:

1) преобразование Лоренца частного вида

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \ z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \tag{1.2}$$

2) ортогональные преобразования переменных x, y, z (включая перенос начала и перемену знака);

3) перенос начала отсчета t (т.е. преобразования $t' = t + a$.

[5]Название «преобразование Лоренца» введено Пуанкаре.

Преобразование Лоренца можно записать следующим образом. Если $\mathbf{r}$ – радиус-вектор (x, y, z) и $\mathbf{v}$ – вектор скорости, то

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right)\frac{(\mathbf{rv})\mathbf{v}}{v^2} - \frac{\mathbf{v}t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \mathbf{b},$$

$$t' = \frac{t - \frac{(\mathbf{rv})}{v^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + a.$$

Если дополнительно разрешить еще умножение всех переменных x, y, z, t на одно и то же число (подобие), то говорят об *общем преобразовании Лоренца* от переменных x, y, z, t к x', y', z', t' [6].

Однородная группа Лоренца – это группа, состоящая из однородных преобразований Лоренца, т.е. таких преобразований Лоренца, которые не переносят начала отсчета t и осей x, y, z и не являются подобиями.

Группа Пуанкаре[6] – группа, состоящая из всех преобразований Лоренца, за исключением подобий. Группу Пуанкаре называют также *неоднородной группой Лоренца.*

1.3.2. Световые конусы

В каждой точке $a = (x, y, z, t)$ Мира Минковского $\mathcal{M}$ в касательном пространстве $T_a\mathcal{M}$ задан *световой конус*

$$c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = 0. \tag{1.3}$$

Поскольку геодезические в псевдоевклидовом пространстве являются прямыми, то в точке $a \in \mathcal{M}$ задан световой конус

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0,$$

[6]Пуанкаре раньше [205, с.154] Минковского написал, что преобразование Лоренца – это поворот в четырехмерном пространстве с координатами $(x, y, z, t\sqrt{-1})$.

лежащий уже целиком в пространстве $\mathcal{M}$. Он состоит из двух половин – *конуса будущего* C_a и *конуса прошлого* C_a^- (см. рис.1.1).

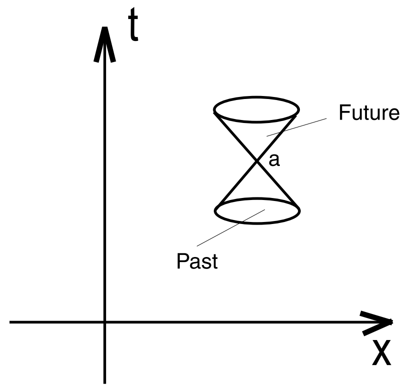


Рис. 1.1: Световой конус в Мире Минковского.

Оснащение Мира событий световыми конусами, т.е. псевдоевклидовой структурой, есть констатация выполнения закона постоянства скорости света.

Закон постоянства скорости света имеет две эквивалентные формулировки:

- *Скорость света в пустоте одна и та же во всех инерциальных системах отсчёта*, т.е. если (x, y, z) – декартовы координаты и t – часы в инерциальной системе отсчёта, то величина

$$c = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \qquad (1.4)$$

является постоянной в любой инерциальной системе отсчёта.

Из (1.4) следует уравнение (1.3).

• *Свет в пустоте всегда распространяется с определенной скоростью c, не зависящей от состояния движения излучающего тела* (Эйнштейн, 1905, [232]).

Иначе говоря, если (x, y, z) – декартовы координаты и t – часы в движущейся инерциальной системе отсчёта и измеряемая скорость распространения света в ней равна

$$c = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}, \qquad (1.5)$$

а (x', y', z') – декартовы координаты и t' – часы в покоящейся инерциальной системе отсчёта и скорость света в ней равна

$$c' = \sqrt{\left(\frac{dx'}{dt'}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt'}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dt'}\right)^2}, \qquad (1.6)$$

причем предполагается, что свет распространяется в том же направлении, что и движущаяся система отсчёта, то $c' = c$, а не $c' = c + v$, где v скорость движущейся системы отсчёта.

С помощью семейства телесных конусов будущего $\mathcal{P} = \{P_a : a \in \mathcal{M}\}$, где $P_a = \{b = (x, y, z, t) \in \mathcal{M} : c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0\}$, задается причинный порядок в Мире Минковского:

$$a \prec b \iff b \in P_a.$$

Для двух событий $a = (x, y, z, t)$ и $b = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{t})$ определим разделяющий их *интервал*

$$s(a, b) = \sqrt{c^2(\overline{t} - t)^2 - (\overline{x} - x)^2 - (\overline{y} - y)^2 - (\overline{z} - z)^2}.$$

Два события $a = (x, y, z, t)$ и $b = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{t})$, говорят, разделены *времениподобным*, *пространственноподобным* или *изотропным* (световым) интервалом в зависимости, от того, является ли $s^2(a, b) > 0$, $s^2(a, b) < 0$ или $s^2(a, b) = 0$.

Два события *причинно связаны*, если они разделены непространственноподобным интервалом.

1.4. Теория абсолютного пространства-времени Минковского

1.4.1. Относительность пространства и времени

В ньютоновской физике пространство и время являются независимыми и абсолютными сущностями.

Условия абсолютности пространства и абсолютности времени в ньютоновской теории означают, что отрезки времени dt и длины dl не зависят от того, в какой инерциальной системе отсчета они найдены. Иначе говоря, величины $dt = t_2 - t_1$ и $dl = l_2 - l_1$ инвариантны относительно преобразований Галилея:

$$t' = t, \quad x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z.$$

Абсолютные пространство и время Ньютона, связанные с группой Галилея, Минковский заменяет на *абсолютное пространство-время*[7], в котором действует группа Лоренца.

Абсолютность пространства-времени – это инвариантность 4-мерного интервала $ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$, имеющего смысл «расстояния» между двумя событями (t, x, y, z) и $(t + dt, x + dx, y + dy, z + dz)$, относительно преобразований Лоренца[8]

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \dfrac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}.$$

---

[7] Видимо, Минковский первым ввёл термин «пространство-время». По крайней мере, в работе [186] 1907 года он писал «Raum-Zeitpunkte» (точка пространства-времени), «Raum-Zeit-Vektor».

[8] При этом отрезки времени dt и длины $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ уже не являются инвариантными относительно преобразований Лоренца. Поэтому говорят об *относительности* времени и пространства.

1.4.2. Относительность одновременности

Наше интуитивное и, как показала теория относительности, наивное представлении о Мире событий сводится к тому, что **реально существующим** мы считаем лишь *трёхмерное пространство*, заполненное вещами, которые с *течением времени* t подвергаются изменениям.

> Абсолютное пространство по своей собственной природе и безотносительно ко всему остается всегда неподвижным и неизменным (Ньютон, 1686)[9].

Настоящим, и, значит, реально существующим, в этом пространстве является всё то, что имеет место в момент времени $t = t_0$. В следующий миг $t = t_0 + \Delta t$ происходит переход в Прошлое, и, значит, в нереальное, несуществующее, всего того, что было до этого реальным. Новое настоящее – это всё, что имеет место при $t = t_0 + \Delta t$, т.е. всё то, что при $t = t_0$ было Будущим.

> Абсолютное, настоящее и математическое время само по себе и по своей природе равномерно течет безотносительно ко всему окружающему (Ньютон, 1686)[10].

Естественно, что при таком ви́дении Мира, если два события A и B имели место при $t = t_0$, то оба они дружно уйдут в Прошлое при $t = t_0 + \Delta t$ по той простой причине, что они *одновременны*!

Но именно это и опровергает теория относительности. Было показано, что можно в пространстве начать перемещение, скажем, на автомобиле с некоторой скоростью v так, что для водителя события A и B не будут одновременными (рис. 1.2). Следовательно, раньше (момент t'_B) будет фиксироваться одно из них, скажем B, и только через какой-то отрезок времени (момент $t'_A > t'_B$) наступит другое – A!

[9]Цитируется по (В.И.Вернадский, [61, с.240]).
[10]Цитируется по (В.И.Вернадский, [61, с.237]).

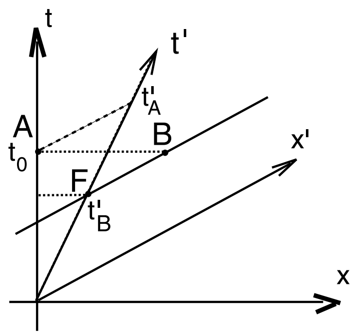


Рис. 1.2: События A и B одновременны в системе отсчета (x, t), но в системе отсчета (x', t') (автомобиль) они не одновременны (A в будущем для B). Для события B в системе отсчета (x', t') одновременным стало событие F, которое было в прошлом для B в системе отсчета (x, t).

Но это означает, что то, что для водителя до движения было *одним неизменным пространством*, в котором шли изменения по мере тикания часов, после начала движения превращается в два пространства, одно из которых – это дорога, по которой он едет, а другое – жестко привязано к автомобилю. При этом в каждом таком пространстве свой ход часов, своё течение времени, своя хронология событий. Рушатся привычные, обыденные и интуитивно ясные представления об (абсолютных) пространстве и времени.

1.4.3. Объединение пространства и времени

Открытие относительности одновременности заставило сделать вывод о зависимости пространства и времени от поступательного движения, об их относительности, о наличии *связи* между ними, которая становится заметной при больших скоростях перемещений. Констатация связи между пространством и временем говорит о том, что они всего лишь разные стороны некой новой единой сущности. Эту единую сущность Минковский назвал *Миром событий*, или пространством-временем. Именно она является *физической реальностью*, а пространство и время всего лишь её тени, воспринимаемые как разные реальные сущности там, где перемещения осуществляются с очень малыми скоростями.

> «Физическое пространство и физическое время объединились в физический мир, интерпретирующий геометрическое пространство четырех измерений» (А.А.Фридман, 1923, [213, с.59]).

Пространство-время само по себе лишено того, что мы интуитивно понимаем под временем. Время, как и пространство, появляется только при осознании части Мира событий

$$x \in_{\ell A} \mathcal{M},$$

или в других обозначениях

$$x : \ell A \to \mathcal{M},$$

где x вещь, принадлежащая пространству-времени, а ℓA одна из фозможных форм осознания (оживления) материального Мира событий (мира вещей) [124].

> «Сценой действия реальности является не трехмерное евклидово пространство, а четырёхмерный мир, в котором неразрывно связаны вместе пространство и время. Однако глубока пропасть, отделяющая интуитивную сущность пространства от интуитивной сущности времени в нашем опыте, и ничто из этого качественного различия не входит в объективный мир, который удалось выкристаллизовывать физике из непосредственного опыта. Это четырёхмерный континуум, который не является ни «временем», ни «пространством». Только сознание, которое схватывает часть этого мира, испытывает обособленный кусок, который ему приходится встретить и оставить позади себя как историю, т.е. как процесс, который протекает во времени и имеет место в пространстве» (Г.Вейль, 1923, [60, с.218]).

1.5. Реальность пространства-времени Минковского

Теория абсолютного пространства-времени уверяет, что события прошлого и будущего столь же *реальны*, сколь реальны события настоящего.

> В абсолютном пространстве-времени ничего не происходит – в абсолютном пространстве-времени всё (уже) существует.

Другими словами, будущие события и события прошлого доступны наблюдению в той же мере, как и события настоящего. При этом, конечно, следует уточнить, что мы понимаем под наблюдением. Ведь, к примеру, мой знакомый, в данный момент живущий в США, столь же реален, как и я, он часть моего настоящего, но это не значит, что я могу его видеть «живьем», хотя его наблюдение возможно, скажем, посредством телефонного разговора. В отношении событий будущего (прошлого) также надо понять, как осуществляется «телефонный разговор».

> В абсолютном пространстве-времени ничего не происходит – в абсолютном пространстве-времени всё уже существует.

Если не будет предъявлено фактов таких наблюдений, то теорию абсолютного пространства-времени придется признать удобной геометрической иллюстрацией. Тем более, что «с точки зрения здравого смысла более вероятно, что в реальном мире существуют отдельно трёхмерное физическое пространство и одномерное физическое время, что понятие пространства-времени – это лишь некая научная абстракция» (Мостепаненко [188, с.47]) [11].

[11] Одновременно здравый смысл уверяет нас, что Солнце вращается вокруг Земли, и в этом может убедиться каждый человек – достаточно понаблюдать за движением Солнца на небосводе.

1.5.1. Эксперименты Н.А. Козырева

Наверное, единственный, кто попытался предъявить экспериментальные доказательства наблюдения событий прошлого и будущего, был известный советский астроном Н.А.Козырев [139]. Он заявил, что с помощью его аппаратуры удалось получить сигналы из того места, где в данный момент находится звезда, а также из того места, где она была в прошлом (место видимого изображения) [129, с.160-166].

Эксперименты Н.А.Козырева были повторены исследователями из Института математики СО РАН (г.Новосибирск) [128, 163, 164], [129, с.160-166]. Они утверждали, что были обнаружены мгновенные воздействия от звёзд, когда те находились на световом конусе прошлого и будущего, в вершине которых находилась аппаратура наблюдателя. Иначе говоря, когда звезда и аппаратура были разделены нулевым интервалом $ds^2 = 0$. Кроме того, сигнал фиксировался от истинного положения звезды.

М.М.Лаврентьев и И.А.Еганова в связи с этим пишут [165]:

> «Из четырехмерности физической реальности следует возможность существования связи между точками пространства-времени по «временному каналу». Такие связи, реализующиеся через временную форму существования материального мира, в работах по теории относительности не рассматривались, «скорости» их реализации не интерпретировались. Н.А.Козырев рассмотрел возможность дальнодействия именно с точки зрения связи между точками пространства-времени по «временному каналу». Речь идет о мгновенном действии одного объекта на другой при любом расстоянии между ними. Предполагается, что это действие осуществляется через интервал собственного времени, равный нулю. Другими словами, речь идет об объективной связи событий, разделенных нулевым интервалом собственного времени. Поэтому, если иметь в ви-

ду известное соотношение, связывающее интервал собственного времени и интервал времени в лабораторной системе наблюдателя, можно ожидать, что кроме мгновенной связи в буквальном смысле связь через один и тот же момент собственного времени может осуществляться движением по поверхности светового конуса в мире событий наблюдателя. Например, кроме дальнодействия от истинного положения светила теоретически возможны еще два воздействия на наземный датчик по «временному каналу»: от видимого положения светила (если рефракция отсутствует, иначе необходима соответствующая поправка, учитывающая, что рассматриваемое воздействие не испытывает рефракции) и от положения на небесной сфере, симметричного видимому положению относительно истинного. Именно эти три положения вызывали реакцию датчика при наблюдении многочисленных звёзд разных спектральных классов, разной звёздной величины, с разнообразными собственными движениями и параллаксами, различных звездных систем, а также при наблюдениях планет [137, 138]. Поэтому можно говорить об установлении факта объективной связи между точками пространства-времени, обусловленной его метрикой» [139].

На сегодня научная общественность не склонна считать эксперименты Н.А.Козырева и новосибирских исследователей заслуживающими доверия. Думается, что выход книги И.А.Егановой [129] будет способствовать скорейшему установлению истины в истории с козыревскими экспериментами.

1.5.2. Павел Флоренский о реальности пространства-времени

П.Флоренский писал (1936)[12]:

> «Доказать реальность пространства-времени, т.е. несводимость его ни к отвлеченному понятию о порядке и соотношении чего-то беспространственно-безвременного (как это делали рационалисты), ни к ассоциации (условному рефлексу) психических элементов, ощущений, тоже беспространственных-безвременных (как это делали представители сенсуализма разных толков – английские эмпиристы, юмовцы, берклеянцы, бэконцы, последователи Милля, махисты и др.) есть основная задача естествознания. При обратном же ответе упраздняется и самое естествознание – с отменою реальности его объекта, естества, ибо нет смысла изучать то, чего нет и что только кажется существующим,– хотя бы и принудительно (Кант). – Наиболее веское доказательство реальности пространства-времени лежит в указании на факт существования в природе асимметрии и необратимости. Ассиметрия – в пространственном аспекте мира, необратимость – во временном. По нераздельности пространства и времени надо, собственно, и эти моменты, асимметрию и необратимость, объединить одним термином, и лишь в целях дидактических говорить о них порознь. – Что такое асимметрия? – Наличие в природе таких объектов, которые не могут быть различены между собою никаким отвлеченно указуемым признаком (напр. правая и левая перчатка), т.е. сведением к какому-нибудь инородному понятию, а различаемы лишь в отношении друг к другу или к какому-либо другому случаю асим-

[12] Написано в ссылке, в Соловках, откуда не было возврата для людей чести.

метрии же; однако асимметрические объекты действительно различны и не могут быть взаимозаменимы, различие их реально, т.е. не обусловлено произволом, желанием, привычкою, условным рефлексом. Их различие не субъективно. Как же сказать, чем именно они различны, в чем заключается невозможность заменить один парный сапог другим, правую перчатку левой? <...> Асимметрия во времени есть необратимость. Быть – значит быть во времени; быть во времени – значит быть необратимым, т.е. историчным. $A \Rightarrow B$ не есть $B \Rightarrow A$. Нельзя сказать, чем именно направление (смысл, sens) от прошлого к будущему отличается от направления обратного, все элементы процесса и порядок их – одни и те же в обоих случаях. И тем не менее, несмотря на отсутствие различающего признака, эти направления существенно различны, и не зависит от нашего желания видеть процесс идущим навыворот, как в кино с движущейся в обратном направлении фильме» [210].

1.5.3. Что такое реальность, реальный мир?

Что мы понимаем под словами «реальный мир» или, что то же самое, «физический мир»?

Реальность – это то в нашей жизни, с чем нельзя не считаться[13]. Под «то» мы понимаем как материальные вещи, так и идеальное, имеющее место в мыслях, в идеях, в книгах, в изображениях и т.д. Мы не можем не считаться с тем, что огонь обжигает и ведёт к тяжёлым ранам; падение с большой высоты означает смерть или переломы костей. Нам приходится считаться с тем, что поведение другого человека не может

[13] Отсюда не следует справедливость утверждения, что *не реально то, с чем можно не считаться.* Дело в том, что ошибочно думать, что при построении утверждений, приводимых в книгах, следует использовать двузначную логику. Логика высказываний русского языка отнюдь не двузначная.

быть нами в ряде случаев изменено, если тот иначе мыслит или имеет иные убеждения, которым остается верным даже под пытками.

Флоренский пишет, что необратимость времени есть признак реальности пространства-времени. Действительно, нам приходится считаться с невозвратимостью того, что мы содержим в своей памяти, и того, что называем своим прошлым.

В современной хроногеометрии принято считать, что физичская реальность, т.е. пространство-время, состоит из событий и образует четырехмерный континуум.

Однако далеко не все события пространства-времени можно рассматривать как *реальные*. Пространство-время всего лишь *бытие как таковое*, совокупность свободных возможностей. То, что мы относим к реальности, – это то, что самоконструируется для *сознания*[14].

Реальность – продукт, (само)конструируемый[15] большим множеством субъектов, точнее, их индивидуальных сознаний, посредством воплощения (материализации) скоррелированных идей в форме вещей объективно и независимо существующего внешнего мира и являющего собой совокупность возможностей, занимающих часть Мира событий. Отражаясь в мозгу, порожденная реальность опознается сознанием субъекта как воплощенная идея, что приводит к осознанию субъектом своего присутствия в реальности [126].

С реальностью субъекту приходится считаться, поскольку она плод объединённых (скоррелированных) усилий множества индивидуальных сознаний, а не сон отдельного разума.

Отсюда становится понятным, почему реальность продолжает существовать, если кто-то умирает. Раз реальность – плод объединённых (скоррелированных) усилий множества индивидуальных сознаний, то прекращение усилий одного ума по созиданию (поддержанию) реальности почти всегда явля-

[14] Переосмысленное высказывание Германа Вейля [59, с.194].

[15] Мы должны дописывать слово «(само)» поскольку сами субъекты – часть вещественного мира; следовательно, коструируют не только Мир, но и себя самих.

ется исчезающе малым воздействием, и это не приводит, как правило, к катастрофическому изменению реальности.

Исключением являются воздействия в окрестностях бифуркационных множеств. Но поскольку нахождение вблизи бифуркационных множеств не является типичным (общим правилом), то распространенным является мнение, что среда обитания, мир вещей может существовать без нас, а мы существовать без среды, т.е. *нашей* физической реальности, не можем.

Осознание своего присутствия в реальности, в Мире, осуществляется так, что Мир предстает перед сознанием в форме того, что мы называем существованием в пространстве и во времени. Поэтому Кант и писал, что пространство и время представляют собой формы чистого созерцания.

1.6. Причинная структура лоренцевых многообразий

Псевдориманово пространство $\langle {}^1V^n, g\rangle$ сигнатуры $(+ - ...-)$ называется *лоренцевым многообразием.*

Лоренцева метрика g для гладкого паракомпактного многообразия V^n – это задание на каждом касательном пространстве T_pV^n невырожденной билинейной формы: $g|_p : T_pV^n \times T_pV^n \to \mathbb{R}$ с диагональным видом $(+ - ...-)$.

Ненулевые касательные векторы v классифицируются как *времениподобные* (временные), *пространственноподобные* (пространственные), *непространственноподобные* или *изотропные* (световые) соответственно тому, что $g(v,v) > 0$, $g(v,v) < 0$, $g(v,v) \geq 0$ или $g(v,v) = 0$.

Лоренцево многообразие $\langle V^n, g\rangle$ называется *ориентируемым во времени*, если на V^n существует непрерывное, нигде не обращающееся в нуль времениподобное векторное поле X.

Это векторное поле используется для разбиения в каждой точке множества непространственноподобных векторов на два класса – класс векторов, направленных в будущее, и класс векторов, направленных в прошлое.

Определение 1.1. *Пространство-время* – это лоренцево многообразие $\langle V^n, g\rangle$ вместе с выбранной на нем ориентацией во времени.

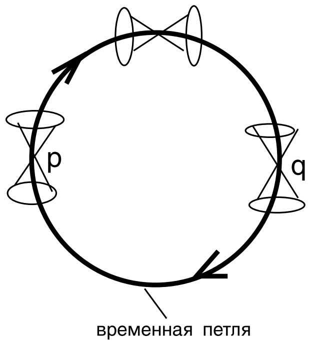


Рис. 1.3:

Если на V^n существует направленная в будущее кусочно-гладкая времениподобная кривая, идущая из точки p в точку q, то обычно пишут $p \ll q$. Если же $p = q$ или на многообразии V^n существует направленная в будущее кусочно-гладкая непространственноподобная кривая из p в q, то пишут $p \leq q$.

Бинарные отношения $\ll$ и $\leq$ являются транзитивными. Однако они не являются антисимметричными. В V^n могут существовать такие точки p и q, что $p \neq q$, но $p \ll q$ & $q \ll p$ (см. рис. 1.3; аналогично для отношения $\leq$).

Определение 1.2. Пространство-время $\langle V^n, g\rangle$ называется *хронологическим*, если отношение $\ll$ является строгим порядком на V^n. Этот порядок будем обозначать $\prec (mod\, g)$, подчеркивая то, что он индуцируется, порождается метрикой g.

Определение 1.3. Пространство-время $\langle V^n, g\rangle$ называется *причинным*, если отношение $\leq$ является нестрогим порядком на V^n. Этот порядок будем обозначать $\preceq (mod\, g)$, подчеркивая то, что он индуцируется, порождается метрикой g.

Хронологическое прошлое и *хронологическое будущее* точки p задаются следующими соотношениями:

$$I^-(p) = \{q \in V^n : q \ll p\} \text{ и } I^+(p) = \{q \in V^n : p \ll q\},$$

а *причинное прошлое* и *причинное будущее* точки p имеют вид

$$J^-(p) = \{q \in V^n : q \leq p\} \text{ и } J^+(p) = \{q \in V^n : p \geq q\}$$

соответственно.

Множества $I^-(p)$ и $I^+(p)$ в любом пространстве-времени всегда открыты, а множества $J^-(p)$ и $J^+(p)$ в общем случае не открыты, не замкнуты.

Причинная структура пространства-времени $\langle V^n, g\rangle$ может быть определена как набор семейств множеств прошлого и множеств будущего во всех точках многообразия V^n.

Определение 1.4. *Лоренцева функция расстояния* в пространстве-времени $\langle V^n, g\rangle$ – это отображение $d : V^n \times V^n \to [0, +\infty)$ такое, что

$$d(p,q) = \begin{cases} 0, & \text{если } q \notin J^+(p), \\ \sup\limits_L s(L), & \text{если } q \in J^+(p), \end{cases}$$

где

$$s(L) = \int\limits_p^q \sqrt{g_{L(t)}\langle L_*(t), L_*(t)\rangle}dt, \tag{1.7}$$

L – непространственная кривая, идущая из точки p в q.

Лоренцева функция расстояния является аналогом римановой функции расстояния для (собственно) римановых пространств. Вместо неравенства треугольника она удовлетворяет неравенству Эйнштейна:

$$\forall p \forall r \forall q ((p \leq r \leq q) \Rightarrow d(p,q) \geq d(p,r) + d(r,q)).$$

1.6.1. Локальный причинный порядок

Как выяснилось при исследовании причинной структуры пространств-времен общей теории относительности (ОТО), глобальный причинный порядок $\prec$ может и не существовать. Наличие временных петель в ряде решений уравнений Эйнштейна означало, что вводимый в ОТО естественным образом причинный порядок[16] не удовлетворяет, вообще говоря, условию антисимметричности.

Однако, если ограничиться малыми пространственно-временными областями, то в них причинный естественный порядок уже удовлетворяет условиям строгого порядка. Мы имеем тем самым *локальный порядок*, т.е. порядок, который действует только в малых пространственно-временных областях.

Формализация локального порядка в Мире событий $\mathcal{M}$ возможна несколькими способами. Дадим только два способа.

Первый способ. Введем в $\mathcal{M}$ *симметричное бинарное отношение близости* $x\ddagger y$ событий $x, y \in \mathcal{M}$.

Истинность отношения $x\ddagger y$ означает, что x и y топологически близкие события.

Строгий *локальный порядок* на $\mathcal{M}$ – это бинарное отношение $\prec_l$, удовлетворяющее условиям:

1) $x \prec_l y \Rightarrow x\ddagger y$;

2) $x \prec_l y \ \& \ y \prec_l z \ \& \ x\ddagger z \Rightarrow x \prec_l z$.

Второй способ. При втором способе задания локального порядка мы определяем его как бинарное отношение $x \prec_l y$, которое антисимметрично и удовлетворяет условию ограниченной транзитивности:

$$(\exists x)(x \prec_l a \ \& \ x \prec_l b \ \& \ x \prec_l c) \vee (\exists y)(a \prec_l y \ \& \ b \prec_l y \ \& \ c \prec_l y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a \prec_l b \ \& \ b \prec_l c \ \& \ a \prec_l c).$$

Очевидно, что (глобальный) строгий порядок $\prec$ является локальным порядком.

1.6.2. Кинематики Пименова

Рассмотрим упорядоченную структуру $\langle \mathcal{M}, \prec_l \rangle$. Нас интересуют такие упорядоченные структуры, которые похожи

[16]Этот естественный порядок в пространстве-времени $\langle V^4, g \rangle$ индуцируется, порождается с помощью метрики g (см. определение 1.2).

на те, что используются в теории относительности и называются либо пространством-временем Минковского, либо пространством-временем общей теории относительности.

В случае обобщенной римановой геометрии основным инструментом является понятие метрики. *Метрика* на множестве X– это функция $\rho : X \times X \to [0, +\infty)$, удовлетворяющая условиям:

1) $\rho(x, y) \geq 0$;
2) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
3) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
4) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Метрический подход позволяет строить богатую геометрическую теорию, имеющую самые различные приложения.

В случае пространства-времени V теории относительности существует то, что называется *собственным временем* $s(L)$ и вычисляется вдоль времениподобных кривых L (см.(1.7)). Для изотропных кривых $s(L) = 0$ и является мнимым для пространственно-подобных кривых. С помощью $s(L)$ можно определить функцию $d : V \times V \to [0, +\infty]$, называемую *лоренцевой функцией расстояния*, которая вычисляется для точек x, y, соединяющихся непространственно-подобной кривой L (см. определение 1.4).

Естественно попытаться построить аксиоматическую теорию относительности, беря в качестве исходного пункта функцию $d(x, y)$, удовлетворяющую аксиомам, которые являются свойствами лоренцевой функции расстояния. Именно это было независимо сделано Р.И.Пименовым [190] в СССР и Г.Буземаном [260] в США. Их частные результаты представлены в § 2.8 и § 2.9. В этом подпараграфе мы даем определение самых общих так называемых пространств кинематического типа, которые были предложены Р.И.Пименовым. Его книга [190] излагает результаты кандидатской диссертации.

Итак, полагаем

$$O_p = \{x \in \mathcal{M} : p \prec_l x\} \quad \text{и} \quad O_p^- = \{x \in \mathcal{M} : x \prec_l p\}$$

и определим *интервал*

$$(p,q) = O_p \cap O_q^-, \quad \text{если} \quad p \prec_l q.$$

Определение 1.5. Мир событий $\langle \mathcal{M}, \prec_l \rangle$ называется *кинематикой*, если всяких a, b, c, d, e при $e \in (a,b) \cap (c,d)$ следует существование $p, q \in (a,b) \cap (c,d)$ таких, что $e \in (p,q)$.

Кинематическая метрика – это отображение $\tau : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to [0, +\infty)$, удовлетворяющее условиям:

1) $\tau(p,q) > 0 \Leftrightarrow p \prec_l q$;

2) $\tau(p,q) = 0 \Leftrightarrow q \in \partial O_p^+$;

3) если $p \prec_l r \prec_l q$, то $\tau(p,q) \geq \tau(p,r) + \tau(r,q)$.

Здесь ∂O_p^+ – граница множества O_p^+ относительно топологии пространства $\mathcal{M}$, базой которой являются все интервалы. Такую топологию называют *александровской*.

Определение 1.6. Мир событий $\langle \mathcal{M}, \prec_l \rangle$, снабженный кинематической метрикой, называется *метрической кинематикой*.

Теорема 1.1 (В.Я.Крейнович, [143]). *На всякой нормальной кинематике можно ввести непрерывную согласованную с порядком кинематичекую метрику.* ■

1.7. Причинная аксиоматика пространства-времени

Рассмотрим подробнее проблемы, пути, ограничения и успехи хроногеометрии.

1.7.1. Программа А.Д. Александрова построения специальной теории относительности

В 1959 году А.Д.Александров изложил основные положения, на основе которых должна строиться специальная теория относительности [17]. Подход А.Д.Александрова опирается на представление о фундаментальной роли причинно-следственных связей между событиями Мира событий $\mathcal{M}$:

1. Пространство-время есть многообразие всех событий, взятое лишь с точки зрения его структуры, определенной системой отношений предшествования, в отвлечении всех иных свойств. Другими словами, пространство-время – это структура рода $\langle \mathcal{M}, \preceq \rangle$.

2. Пространство-время есть четырёхмерное топологическое многообразие.

3. Пространство-время максиально однородно, т.е. группа его преобразований $\mathcal{G}$, сохраняющих отношение предшествования, максимальная из всех возможных.

4. Как само многообразие, которое представляет пространство-время, так и преобразования, указанные в п.3, являются дифференцируемыми. Иначе говоря, в общем случае должна рассматриваться структура рода $\langle \mathcal{M}, \preceq, \mathcal{F} \rangle$, где $\mathcal{F}$ есть гладкая структура.

Со временем эта программа претерпевала изменения и в 1980-е годы была разбита Р.И.Пименовым на следующие три задачи хроногеометрии [197].

1.7.2. Три задачи хроногеометрии по Пименову

Первая задача. *Дана структура* $\langle \mathcal{M}, \preceq \rangle$. *Найти такие аксиомы, в силу которых* $\langle \mathcal{M}, \preceq \rangle$ *оказывается четырёхмерным псевдоевклидовым пространством* ${}^1E^4$ *сигнатуры* $(+ - - -)$, т.е. ${}^1E^4$ как множество совпадает с $\mathcal{M}$, а априорный порядок $\preceq$ совпадает с индуцированным $\preceq (mod\ \eta)$ относительно метрического тензора Минковского η пространства ${}^1E^4$.

Все объекты, входящие в определение ${}^1E^4$, т.е. аффинная структура, векторная структура, метрический тензор, должны с указанной степенью однозначности получаться в силу искомых аксиом на $\langle \mathcal{M}, \preceq \rangle$.

Вторая задача. *Дана структура* $\langle \mathcal{M}, \prec_l \rangle$. *Найти такие аксиомы, при которых* $\langle \mathcal{M}, \prec_l \rangle$ *оказывается четырёхмерным псевдоримановым пространством* $\langle {}^1V^4, g \rangle$ *сигнатуры* $(+ - - -)$.

Так как ${}^1E^4$ есть частный случай ${}^1V^4$, то нетривиальным будет наличие ${}^1V^4$ ненулевой и переменной кривизны. Поэтому можно дать минимальную и максимальную формулировки второй задачи.

Минимальная формулировка предлагает найти такие аксиомы для структуры $\langle \mathcal{M}, \prec \rangle$, при которых она оказывается псевдоримановой структурой $\langle {}^1V^4, g \rangle$, и всякое хронологическое пространство-время $\langle {}^1V^4, g \rangle$ с переменной кривизной удовлетворяет этим аксиомам, если $\prec \Leftrightarrow \prec$ $(mod\ g)$.

Максимальная формулировка требует найти такие аксиомы для структуры рода $\langle \mathcal{M}, \{\preceq_{U_\alpha}\}_{\alpha \in \mathcal{A}} \rangle$ с локальным порядком, задаваемым семейством порядков, каждый из которых $\preceq_{U_\alpha}$ определен на некоторой окрестности U_α, при которых она оказывается $\langle {}^1V^4, g \rangle$ и всякое $\langle {}^1V^4, g \rangle$ с переменной кривизной удовлетворяет этим аксиомам, если за семейство $\{\preceq_{U_\alpha}\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ принять локальные индуцированные порядки $\preceq$ $(mod\ g, U_\alpha)$.

При этом имеется в виду, что $\langle {}^1V^4, g \rangle = \langle \mathcal{M}, \mathcal{T}, \mathcal{F}, g \rangle$ и что все эти объекты $\mathcal{T}$ (топология), $\mathcal{F}$ (гладкость) и g (метрика) могут быть получены из локального порядка $\preceq_{U_\alpha}$.

Третья задача – задача обобщения. Она не поддается точной математической формулировке, т.к. проводить обобщения можно в разных смыслах. Интуитивно ее можно понимать так: *проследить, насколько содержательные математические, физические и философские результаты можно получить, если рассматривать структуру* $\langle \mathcal{M}, \preceq \rangle$, *или* $\langle \mathcal{M}, \{\preceq_{U_\alpha}\}_{\alpha \in \mathcal{A}} \rangle$, *подчиненные тем или иным «пространственно-временноподобным условиям»*. Здесь единственным критерием остается принцип перманентности: новые объекты должны включать как частный случай пространство $\langle {}^1E^4, \eta \rangle$ и/или $\langle {}^1V^4, g \rangle$.

1.7.3. Итоги решения трех задач хроногеометрии

Итоги по первой задаче. Первая задача связана с аксиоматизацией специальной теории относительности, она проще, и в силу этого для нее достатоточно быстро А.Д.Александров нашел несколько приемлемых решений [10, 19, 31, 32]. Дело в том, что соответствующая топологическая часть проблемы была уже решена ранее (в частности, Л.С.Понтрягиным). Порядок предполагался инвариантным относительно коммутативной группы преобразований $T \subset Aut(\preceq)$, сохраняющих порядок, и действующей транзитивно на $\mathcal{M}$. Поэтому группа T оказывалась группой Ли, изоморфной группе параллельных переносов в аффинном пространстве A^n, и это позволяло оснастить Мир событий аффинной структурой (см. § 2.2). Порядок $\preceq$ оказывается тесно связанным с эллиптическими конусами в A^n, что является прямым шагом к введению псевдоевклидовой метрики η (см. подробнее в § 1.7.4).

В нашей монографии в гл. 2 мы приводим аксиоматику А.Д.Александрова, а также другие аналогичные аксиоматики специальной теории относительности Г.Буземана (§ 2.8), Р.И.Пименова (§ 2.9) и А.К.Гуца (гл.7 и 8), являющиеся решениями первой задачи.

Итоги по второй задаче. Отсутствие в пространствах-временах общей теории относительности группы преобразований[17], аналогичной $T \subset Aut(\preceq)$, сохраняющей порядок и действующей транзитивно на $\mathcal{M}$, существенным образом осложняет решение второй задачи хроногеометрии. Вторым затруднением является отсутствие в общем случае глобального порядка в псевдоримановых пространствах $\langle {}^1V^4, g\rangle$.

В случае минимальной задачи порядок глобальный, а значит, пространство-время является некомпактным 4-мерным многообразием. В таком случае гладкая структура $\mathcal{F}$ всегда существует [313], и Р.И.Пименову удалось ввести ее исходя из

[17] Псевдоримановы пространства в общем случае не являются однородными, т.е. не обладают транзитивными группами изометрий.

порядковой структуры. Соотвествующую аксиоматику можно найти в [190] (см. также § 9.8).

В случае максимальной задачи порядок локальный и существование гладкой структуры[18] постулируется в виде одной из аксиом. Это связано с тем, что, например, на $\mathbb{R}^4$ существует несчетное число недиффеоморфных гладких структур, и это может означать наличие, как минимум, двух недиффеоморфных пространств-времен с одной и той же лоренцевой функцией расстояния [99].

В § 9.8 приводится решение максимальной задачи, найденное Р.И.Пименовым в 1988 году.

Итоги по третьей задаче. К решениям третьей задачи можно относить любые обобщения псевдоевклилова и псевдоримановых пространств, используемых в теории относительности. Такие обобщения могут строиться как на основе теории упорядоченных множеств, так и без нее (хотя неявно подразумевается, что причинный порядок должен появляться на каком-то этапе конструирования пространства).

Знание возможных обобщений является важным этапом хроногеометрических исследований, т.к. необходимо строить аксиоматические теории относительности таким образом, чтобы за счет тех или иных аксиом исключались возможные более общие, чем это используется в теории относительности, пространственно-временные модели. А таких обобщенных пространственно-временных моделей, отличных от псевдоримановых пространств, было найдено великое множество.

Р.И.Пименов пишет по этому поводу [197]: «Задача обобщения псевдориманова пространства-времени решалась как с явным введением отношения порядка (работы [240, 260, 73, 189, 145, 304, 190, 193, 194, 195, 196]), так и с неявным (работы [45, 46, 51, 52, 53, 54, 55]), причем здесь мы игнорируем все обобщения в виде пространств аффинной связности, пространств с несимметричным метрическим тензором, многомерные, а также расплывчато-неспецифицированные финслеровы. По последним см. библиографию [46, 284]. Локальное

[18]Компактное 4-многообразие может не иметь гладкой структуры [267].

ее решение практически одинаково: на структуре $\langle\mathcal{M},\mathcal{T}\rangle$, где $\mathcal{T}$ – некоторая хорошая топология, на окрестностях задается отношение порядка.

Описаны следующие восемь классов пространств-времен, обобщающих псевдоевклидовы и псевдоримановы пространства-времена:

1. Векторные кинематики $\langle E^n,\preceq,\tau\rangle$, где E^n – векторное пространство, а $\preceq$ согласуется со сложением и умножением на положительные числа, а τ – векторная кинематическая метрика (см.[197]).

2. Аффинные кинематики $\langle A^n,\preceq,\tau\rangle$, где векторная подструктура образует векторную кинематику. Эти две кинематики моделируют «анизотропную специальную теорию относительности», т.е. реализуют замысел В.И.Вернадского. Световой конус тут необязательно эллиптичен, но даже в случае эллиптического конуса метрика в них может быть не лоренцова [51, 196].

3. Трансляционные кинематики $\langle A^n,\preceq,\tau\rangle$, в которых $\preceq$ не согласуется с умножением, τ не положительно-однородна, а в остальном они похожи на аффинные. «Скорость света» в них нелинейна.

4. Общие метрические кинематики $\langle\mathcal{M},\preceq,\tau\rangle$. Частным случаем их являются финслеровы кинематики.

5. Времениподобное пространство Буземана [260].

6. Кинематики ограниченной кривизны [73], напоминающие введенные А.Д.Александровым в случае обычной метрики Фреше двумерные многообразия ограниченной кривизны».

1.7.4. Классы пространств однозначного решения задач хроногеометрии

Существование пространств, отличных от псевдоримановых, заставляет задумываться о том, в каком классе пространств существует модель прстранства-времени, удовлетворяющая рассматриваемой системе аксиом.

Действительно, как правило, во всех причинных аксиоматиках специальной теории относительности доказывается, что мир событий $\mathcal{M}$ является аффинным пространством, а множество

$$P_a = \{x \in \mathcal{M} : a \preceq x\}$$

– это (ординарный) эллиптический конус, которому дается название «световой конус будущего». По нему записывается уравнение «двойного светового конуса»:

$$g_{ik}(a)X^iX^k \geq 0,$$

позволяющее *восстановить* лоренцеву метрику $g_{ik}(a)$. Но данное введение лоренцевой структуры делается, конечно же, с точностью до умножения на скалярный множитель

$$g_{ik}(a) \to \lambda(a)g_{ik}(a).$$

Иначе говоря, для класса псевдоримановых пространств-времен справедливо заявление: «на базе отношения (потенциальной) причинности можно однозначно построить пространство-время специальной теории относительности» с незначащей оговоркой о масштабе[19].

Однако «в классе финслеровых (в частности, в классе аффинных и векторных) кинематик это неверно. Конусом P_a метрика τ определяется неоднозначно. Даже в случае эллиптического конуса существуют нелоренцовы метрики, обладающие при том богатой (например, орисферической) группой автоморфизмов. Эта последняя подвергнута детальному физическому изучению [51, 52, 53, 202]. Поэтому, если стоять на той точке зрения, что кинематическая метрика является объектом геометрической природы, то можно утверждать, что отношения порядка недостаточно для построения геометрии пространства-времени. Если же относить метрику к физическим объектам, то появление нeримановых пространств-

[19]Более того, чаще всего и эта оговорка опускается: подразумевается, что читатель сам понимает, что метрика восстановлена с точностью до конформности, т.е. на $\mathcal{M}$ задана не одна лоренцева структура, а целый класс конформных структур.

времен не препятствует утверждению, что специальную теорию относительности можно построить практически однозначно на базе одного лишь отношения порядка (потенциальной причинности). По-видимому, выбор между этими двумя точками зрения относится скорее к философии, во всяком случае, к метатеории» [197].

1.8. Интерактивная аксиоматика пространства-времени

Причинная структура Мира событий, как уже говорилось, появляется как сугубо человеческий взляд на природу взаимодействия. Взаимодействие – это форма организации вещей в себе (событий) в единое *нечто*, что на языке математики называется четырехмерным топологическим многообразием.

Выявление того, благодаря чему складывается, образуется структура топологического многообразия, называемого пространством-временем, и является задачей хроногеометрии. Как уже говорилось А.Д.Александров считал, что топологическая и метрическая структуры пространства-времени – это следствия его причинно-следственной структуры Мира событий.

Но причинность всего лишь локальный, ограниченный взгляд на взаимодействие событий. Следовательно, имеет смысл объяснять топологическую и метрическую структуры пространства-времени непосредственно исходя из констатации наличия отношения взаимодействия событий. Математически это означает, что вместо асимметричного отношения порядка $x \preceq y$ мы должны первичным в Мире событий считать симметричное бинарное отношение $x \sharp y$.

Думается, что отношение $x \sharp y$ является *первичным*, а отношение причинности $x \preceq y$ вторичным. Почему? Цепочка доводов может выглядеть следующим образом. Мир событий, симметричный относительно изменения знака времени, т.е. относительно замены будущего на прошлое и наоборот, должен быть сам абсолютно симметричным. Переход к несимметричному отношению, который для человека естественен, поскольку он четко знает, что прошлое не возвращается, может объясняться следующими двумя способами:

1. Мир событий становится несимметричным сразу после того, как в нем появляется Наблюдатель – человек. В силу самой организации Наблюдателя как объекта, *не способного отразить в себе* весь Мир событий *целиком*, он воспринимает Мир с теми или иными ограничениями. Для человека это ограничение сводится к понятию времени, которое «течет только от прошлого к будущему».

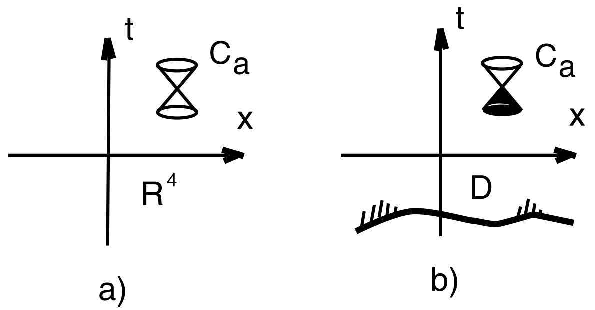


Рис. 1.4:

2. Мир событий несимметричен изначально, т.е. безотносительно к тому, «оснащается» ли он наблюдателем. Математически это означает, что пространство-время не есть *всё* $\mathbb{R}^4$ (рис.1.3, а)), а всего лишь некоторая собственная (под)область $D \subset \mathbb{R}^4$ (рис.1.3, b)). Несимметричное пространство-время D, оснащенное симметричным отношением $x \sharp y$, геометрически означающее наличие в D семества световых (двойных) полных конусов $\mathcal{C} = \{C_a : a \in D\}$, неизбежно означает, что половины светового конуса не являются равнозначными. Следовательно, прошлое отлично в восприятии от будущего: прошлое не возвращается. Впервые о такой ситуации написали Уиллер и Фейнман [355, 356], обнаружившие, что рассмотрение несимметричного пространства-времени приводит к тому, что вме-

сто симметричного решения волнового уравнения

$$f_+(x-ct)+f_-(x+ct)$$

мы неизбежно оставляем только запаздывающие взаимодействия $f_+(x-ct)$.

Несимметричность Мира событий в действительности означает немаксимальность группы преобразований, сохраняющих отношение $x \sharp y$. Это легко подтверждается на примере построения аксиоматической теории нестационарной вселенной де Ситтера [88].

Аксиоматическую теорию пространства-времени, построенную на основе отношения взаимодействия $\sharp$, будем называть *интерактивной*. Исходной структурой для построения интерактивной теории пространства-времяни является структура рода $\langle\mathcal{M},\sharp\rangle$.

Но прежде чем говорить о более широком взгляде на основания геометрии пространства-времени, мы в этой книге выясним, как видится структура пространства-времени в рамках причинной теории, т.е. в рамках восприятия Мира человеком.

1.9. Проблема четырёхмерности пространства-времени

При аксиоматическом построении теории относительности важной задачей является отыскание условий, которым должен удовлетворять порядок $\preceq$ на $\mathcal{M}$, чтобы получаемое в результате псевдоевклидово пространство ${}^1E^n$ имело размерность, равную в точности 4, т.е. $n=4$ [86, задача 12].

При этом в искомые условия не должны входить какие-либо числа, как натуральные, так и действительные. Например, не должно быть фраз, подобных следующей: «поверхности четырёх произвольных конусов (областей воздействия), ни один из которых не лежит целиком в другом, пересекаются в одной точке»[20]. Действительно, в такой аксиоме уже обозначена требуемая размерность. А если бы речь шла не о четырёх, а о, скажем, трёх областях воздействия, то, как это часто бывает, такое условие в действительности говорит о размерности 4. (Можно сказать, что между двумя домами одна перегородка, и говорить далее о числе перегородок, имея в виду определение числа домов, либо говорить о двух домах, думая о числе перегородок между ними).

Выяснению разного типа поведения физических систем, обусловленного четырехмерием, посвящены многочисленные работы. Много интересного собрано в книге [187]. На семинаре «Хроногеометрия» акад. А.Д.Александрова, который функционировал в 1970-80-е годы в Новосибирском государственном университете, хотя постоянно и обсуждалась аксиоматическая причинная теория пространства-времени, но вопрос об условиях, влекущих четырёхмерность Мира событий, как-то всерьез не рассматривался. Считалось, что важнее получить конечномерное псевдоевклидово пространство и преобразования Лоренца.

Таким образом, автору трудно привести пример удачного решения проблемы четырёхмерности пространства-времени в рамках причинной теории. В § 3.10, тем не менее, приводится решение проблемы четырёхмерия, осуществленное Ю.Ф.Борисовым (1960), а в гл. 11 В.Трифоновым в рамках так называемой топосной хроногеометрии, которая базируется не на теории множеств, являющейся основой любой математической теории в XX веке, а на теории топосов.

[20]Эта аксиома, по мнению Г.Е.Горелика, решает проблему задания размерности пространства-времени [70, с.55].

Глава 2

ПРИЧИННАЯ ТЕОРИЯ МИРА СОБЫТИЙ

В этой главе достаточно подробно дается представление об аксиоматической причинной теории пространства-времени, предложенной в 1970-е годы А.Д.Александровым.

Построение причинной теории пространства-времени являлось одной из самых привлекательных задач науки XX века. С точки зрения математики речь идет об исследовании частично упорядоченных структур. Под этим понимают, как правило, некоторое множество $\mathcal{M}$, называемое Миром событий, с заданным на нем рефлексивным и транзитивным бинарным отношением $\preceq$. В действительности исходным, первичным является не понятие причинности, а представление о движении (взаимодействии) материальных объектов. Причинность выступает на первый план благодаря тому, что наблюдатель фиксирует смену движения или изменение в состоянии объектов. Именно отсюда берет исток воззрение об особой значимости вскрытия причин и следствий для изучаемого явления, а также убеждение в несимметричности причинно-следственных связей. Причинность рассматривается как такое отношение в материальном мире, с помощью которого можно объяснить топологическую, метрическую и все иные мировые структуры.

2.1. Понятие пространства-времени

Что такое пространство-время? Ответ[1] нам нужен не на философском уровне, а на таком, который бы дал почву для построения теории пространства-времени. Ответ должен заключаться в теории относительности, так как она и является теорией пространства-времени, но ответ этот нужно еще из нее извлечь.

Форма предмета есть, собственно, не что иное, как совокупность отношений его частей. Поэтому речь идет о тех материальных связях мира, которые в своей совокупности и определяют пространство-время.

Простейший элемент мира – это то, что называется *событием*. Это *точечное* явление вроде мгновенной вспышки точечной лампы или, пользуясь наглядными понятиями о пространстве и времени, это явление, протяжением которого в пространстве и во времени можно пренебречь. Словом, событие аналогично точке в геометрии, и, подражая определению точки, данному Евклидом, можно сказать, что событие – это явление, часть которого есть ничто, оно есть «атомарное» явление. Всякое явление, всякий процесс представляется как некоторая связная совокупность событий. С этой точки зрения весь мир рассматривается как множество событий.

Отвлекаясь от всех свойств события, кроме того, что оно существует, мы представляем его как точку, «мировую точку». Пространство-время и есть множество всех мировых точек.

Однако при таком определении пространство-время еще не обладает никакой структурой – оно просто совокупность событий, в которых удерживается лишь один факт их существования как разных событий, в отвлечении от всех прочих

[1] При написании этого параграфа использовалась работа А.Д.Александрова [22].

свойств и без всяких пока отношений между ними. Можно ввести понятие о непрерывности ряда событий, заимствуя его из наглядного представления или давая ему какое-либо подходящее определение. Тогда пространство-время окажется просто четырехмерным многообразием в смысле топологии. Мы не останавливаемся на этом и определяем структуру и саму непрерывность пространства-времени, исходя из самого общего и основного отношения событий, какое имеется в мире. Мы имеем в виду движение материи.

Каждое событие так или иначе воздействует на некоторые другие события и само подвержено воздействиям других событий. Физическая природа воздействия может быть весьма разнообразной; мы можем представлять его как распространение света, вылет частицы и т.п. Понятно, что оно не обязано быть непосредственным, а может идти через ряд агентов. Само движение малого тела представляет собой ряд событий, в котором предыдущие события воздействуют на последующие. В понятиях физики воздействие можно определить как передачу импульса и энергии. Эти понятия представляются тогда первоначальными, что отвечает существу дела, так как импульс и энергия есть основные физические характеристики движения и воздействия. Но, отвлекаясь в самих событиях от их конкретных свойств, мы отвлекаемся и в понятии воздействия от его конкретных свойств, кроме того, что оно есть отношение между событиями, обладающее свойствами предшествования (антисимметричностью и транзитивностью). Если мыслить аксиоматическое (а такова основная задача книги) построение теории пространства-времени, то понятия события – мировой точки и воздействия – предшествования берутся как исходные и не подлежащие определению. Те события, которые подвергаются воздействию данного события a, образуют «область P_a воздействия события a». Такие области определяют в множестве всех событий некоторую структуру. Она равносильна, конечно, той структуре, которая определяется самими отношениями воздействия. Эта структура и есть пространственно-временная структура мира. Иначе говоря, само пространство-время можно определить следующим образом.

> *Пространство-время есть множество всех событий в мире, отвлеченное от всех его свойств, кроме тех, которые определяются отношениями воздействия одних событий на другие.*

Воздействие одного события на другое есть элементарная форма причинной связи, точно так же, как событие есть «атомарное» явление. Поэтому только что сказанное можно выразить хотя и менее точно, но более выразительно в следующих словах: пространственно-временная структура мира есть не что иное, как его причинно-следственная структура, взятая лишь в соответствующей абстракции. Эта абстракция состоит в отвлечении от всех свойств явлений и их причинных связей, кроме того, что явления слагаются из событий, а их взаимные влияния – из воздействий одних событий на другие.

То, что высказанное определение пространства-времени действительно возможно в рамках специальной теории относительности, доказывается в этой главе.

Данное определение пространства-времени представляет собой не что иное, как соответствующее современной физике конкретное и точное выражение того, что пространство-время есть форма существования материи. Сама материя в ее движении и тем самым во взаимодействии ее элементов и определяет свою пространственно-временную форму.

2.2. Аксиомы A_1, A_2

> А к с и о м а A_1. *Пространство-время – это связное односвязное локально компактное хаусдорфово четырёхмерное топологическое пространство $\mathcal{M}$, на котором заданы семейство подмножеств $\mathcal{P} = \{P_a : a \in \mathcal{M}\}$ – «областей воздействия» и*

транзитивная коммутативная группа T гомеоморфизмов $\mathcal{M}$ на себя, удовлетворяющие следующим условиям:

1) *подмножество $P_a \neq \{a\}$ сопоставлено каждой точке $a \in \mathcal{M}$;*

2) *$a \in P_a$ для любой точки $a \in \mathcal{M}$;*

3) *если $y \in P_x$, то $P_y \subset P_x$;*

4) *для любого гомеоморфизма $t \in T$ и любой точки $a \in \mathcal{M}$ имеет место равенство $t(P_a) = P_{t(a)}$.*

Приведенная аксиома, казалось бы, не отвечает желанию определить топологию пространства-времени, исходя только из структуры, задаваемой областями воздействия P_a. Но из приводимых ниже теорем (см. §§ 2.3, 2.7) станет ясно, что это действительно так, и мы могли бы исходную аксиому A_1 изложить в терминах, использующих только области P_a, но это привело бы к чрезмерно усложненной формулировке аксиомы, теряющей всю свою простоту и наглядность.

Из аксиомы A_1 сразу же следует [207, 264], что в $\mathcal{M}$ можно ввести координаты x^1, x^2, x^3, x^4 так, что элемент $t \in T$ можно представить в виде обычного переноса: $t : (x^1, x^2, x^3, x^4) \to (x^1 + t^1, x^2 + t^2, x^3 + t^3, x^4 + t^4)$, т.е. $\mathcal{M}$ есть четырёхмерное аффинное пространство, а T — группа параллельных переносов в $\mathcal{M}$.

Постулирование существования группы T связано с предположением об однородности пространства-времени, причем отказ от коммутативности приводит нас к геометрии пространства-времени, отличной от геометрии мира Минковского (см. § 9.7).

Из аксиомы A_1 следует, что семейство областей воздействия $\mathcal{P} = \{P_a\}$ инвариантно относительно гомеоморфизмов группы T. Поэтому достаточно задавать одну область P_e, отвечающую некоторой фиксированной точке e, а остальные получать «разносом» по $\mathcal{M}$ с помощью группы T. Далее мы фиксируем точку e и будем писать P вместо P_e.

Мы будем говорить, что область воздействия P задает в аффинном пространстве $\mathcal{M}$ *предпорядок*, если выполняются для системы подмножеств $\mathcal{P} = \{P_a : a \in \mathcal{M}\}$ условия 1)–3) аксиомы A_1.

Если для предпорядка $\mathcal{P}$ дополнительно справедливо условие $x \neq y$ влечет $P_x \neq P_y$, то будем говорить, что $\mathcal{P}$ задает *порядок* в $\mathcal{M}$.

Введем следующее обозначение: мы пишем $x \preceq y$ тогда и только тогда, когда $y \in P_x$. Очевидно, что в случае, когда $\mathcal{P}$ задает порядок в $\mathcal{M}$, отношение $\preceq$ задает частичный порядок на множестве $\mathcal{M}$.

С точки зрения физики отношение $x \preceq y$ можно интерпретировать как отношение причинности, в котором x – причина, а y – следствие, т.е. мы констатируем наличие передачи воздействия (энергии–импульса) от события x к событию y.

Далее полагаем $P_x^- \equiv \{y \in \mathcal{M} : y \preceq x\}$.

Говорим, что предпорядок $\mathcal{P}$ – замкнутый, если P – замкнутое множество; предпорядок $\mathcal{P}$ – открытый, если множество $P \setminus \{e\}$ открыто. В случае, когда P – конус и $P \setminus \{e\}$ — открытое множество, говорим об открытом конусе.

Введем *слабую аксиому Эйнштейна*:

> А к с и о м а A_2. *Для любых точек $x, y \in \mathcal{M}$ таких, что $y \in P_x$, множество $P_x \bigcap P_y^-$ ограничено.*

Аксиома A_2 на языке физики говорит об ограниченности скорости передачи воздействия.

2.3. Теорема о непрерывности

Теорема 2.1 (А.Д.Александров). *Пусть выполнена аксиома A_1 и предположим, что области воздействия $\mathcal{P} = \{P_a\}$ удовлетворяют аксиоме A_2 и либо множество $P \setminus \{e\}$ — открытое, либо P — замкнутое с внутренними точками. Тогда любой порядковый автоморфизм f является гомеоморфизмом.*

Доказательство. [25, 31]. (а) Пусть $P \setminus \{e\}$ — открытое множество. Рассмотрим непустое множество $M = (P \bigcap P_a^-) \setminus \{e, a\}$, где $a \in P$ — некоторая точка. Очевидно, M — открытое множество. Пусть $x \in \mathcal{M}$ — произвольная точка и U — произвольная открытая окрестность точки $f(x)$.

Положим
$$M_1 = \bigcup \{t(M) : e \in t(M)\}.$$

Это центрально симметричное относительно e множество. Его замкнутая выпуклая оболочка H также центрально симметрична. Пусть $b, \tilde{b}$ — две взаимно симметричные крайние точки оболочки H. Ясно, что $b, \tilde{b} \in \overline{M}_1$.

Пусть $t, \tilde{t}$ — переносы такие, что $t(b) = f(x)$, $\tilde{t}(\tilde{b}) = f(x)$. Тогда, так как точки $b, \tilde{b}$ — крайние, то $t(\overline{M}_1) \cap \tilde{t}(\overline{M}_1) = \{f(x)\}$. Ввиду этого найдутся такие малые переносы $\tau, \tilde{\tau}$,что

$$f(x) \in \tau t(M_1) \cap \tilde{\tau}\tilde{t}(M_1) \subset U. \tag{2.1}$$

Из равенства $f(P_u) = P_{f(u)}$ в силу биективности отображения f следует равенство $f^{-1}(P_u) = P_{f^{-1}(u)}$ для любой точки $u \in \mathcal{M}$. Следовательно, f^{-1} отображает семейство открытых множеств $\{M_a : a \in \mathcal{M}\}$ на некоторое семейство открытых множеств $\{f^{-1}(M_a) : a \in \mathcal{M}\}$. Каждое множество $\{f^{-1}(M_a)\}$ можно представить в виде $(P_b \cap P_c^-) \setminus \{b, c\}$ для некоторых точек b, c, где $c \in P_b$. Следовательно, $B = f^{-1}(\tau t(M_1))$ и $\tilde{B} = f^{-1}(\tilde{\tau}\tilde{t}(M_1))$ представимы в виде объединений открытых множеств вида $(P_b \cap P_c^-) \setminus \{b, c\}$, т.е. B и $\tilde{B}$ — открытые множества, содержащие точку x. Но тогда отношение (2.1) можно переписать в виде

$$f(x) \in f(B \cap \tilde{B}) \subset U. \tag{2.2}$$

Так как $x \in B \cap \tilde{B}$ и $B \cap \tilde{B}$ — открытое множество, то (2.2) означает непрерывность f в точке x. В силу произвольности точки x отсюда следует непрерывность отображения f. Значит, f — гомеоморфизм. Пункт (а) доказан.

(б) Пусть P — замкнутое множество с внутренними точками.

Предположим, что множество $M = (P \cap P_a^-)$ содержит внутренние точки. Возьмем произвольно $y \in \mathcal{M}$ и вокруг нее открытый шар U, настолько малый, чтобы его покрывало какое–либо множество $t(M)$. Пусть r — радиус шара U. Образуем множество W — пересечение всех $t(M) \supset U$. Оно не содержит шаров, равных U (кроме самого U), так как если U' — такой шар и τ — перенос от его центра к центру U, то $\tau(W) \supset U$ и, стало быть, по определению множества W должно быть $\tau(W) = W$. Но тогда W неограниченно вопреки ограниченности M.

Итак, W не содержит шаров, равных U. Отсюда следует, что вне концентричного U шара $2U$ двойного радиуса множество W не содержит открытых шаров U' радиусов $r' \geq r - \varepsilon$ с каким-то $\varepsilon > 0$.

Возьмем шар U_1 радиуса $r_1 = \varepsilon/2$, концентричный U. Определим по нему множество W_1 так же, как W определено по U.

Тогда ввиду выбора r_1 оказывается, что $W_1 \subset 2U$. В самом деле, пусть существует $u \in W_1 \setminus 2U$. Тогда, так как $W_1 \subset W$, то $u \in W$. Найдется точка $z \in (\mathcal{M} \setminus W) \cap S(u, r - \varepsilon)$, где $S(u, \rho)$ обозначает сферу с центром u и радиусом ρ. Пусть t — перенос точки z в u. Но тогда $t(W) \supset U_1$ и $u \notin t(W)$, т.е. $u \notin W_1$. Получили противоречие с предположением $u \in W_1$.

Итак, $W_1 \subset 2U$. Продолжая описанный процесс, получим последовательность множеств W_n такую, что $U_n \subset W_n \subset 2U_{n-1}$ и $\bigcap\limits_n W_n = \{y\}$.

Теперь заметим, что так как W_n есть пересечение всех $t(M) \supset U_n$, то $f^{-1}(W_n)$ есть пересечение всех $f^{-1}[t(M)] \supset f^{-1}(U_n)$. Но в силу равенства $f^{-1}(P_x) = P_{f^{-1}(x)}$ множество $f^{-1}[t(M)]$ имеет вид $P_b \cap P_c^-$, где $c \in P_b$. Поэтому множества $f^{-1}(W_n)$ будут компактными. Но их пересечение есть точка $x = f^{-1}(y)$. Значит, какова бы ни была окрестность O_x точки x, найдется такой номер n, что $f^{-1}(W_n) \subset O_x$. Этим доказана непрерывность f^{-1}, а стало быть, и f. Пункт (б) доказан.

Теорема 2.1 доказана. ■

Замечание 2.1. Заметим, что в случае, когда $P \setminus \{e\}$ открыто, множества вида $P_a \cap P_b^- \setminus \{a,b\}$ образуют базу топологии, эквивалентной топологии пространства-времени $\mathcal{M}$. В случае замкнутого P с внутренними точками «интервалы» $P_a \cap P_b^-$ $(b \in P_a)$ образуют базу топологии, в общем-то, более сильной, нежели топология пространства-времени.

2.4. Теоремы о контингенции

Определение 2.4. Пусть множество $M \subset A^n$. *Контингенцией* $cont(M,a)$ множества M в точке a называется конус, составленный из всевозможных пределов лучей $l^+(a,x)$, где $x \in M$ при стремлении x к a. Если a не является предельной точкой множества M, то такого конуса нет. Но тогда можно считать, что $cont(M,a) = \{a\}$ — «нулевой конус».

Предложение 2.1. *$cont(M,a)$ есть замкнутое множество и*

$$cont(M,a) = cont(\overline{M},a).$$

Доказательство.

Так как $M \subset \overline{M}$, то, очевидно,

$$cont(M,a) \subset cont(\overline{M},a).$$

Докажем, что

$$cont(\overline{M},a) \subset cont(M,a). \tag{2.3}$$

Если $cont(\overline{M},a) = \{a\}$, то и $cont(M,a) = \{a\}$. Пусть $b \in cont(\overline{M},a), b \neq a$.

Для доказательства соотношения (2.3) достаточно установить, что луч $l = l^+(a,b)$ содержится в $cont(M,a)$. Задавшись любым $\varepsilon > 0$, рассмотрим множество

$$W = \bigcup_{|x-b|<\varepsilon} l^+(a,x).$$

Так как $l \subset cont(\overline{M},a)$, то в W есть точки $a_n \in \overline{M}$, сколь угодно близкие к a. Отсюда следует, что в W есть точки $x_n \in M$, сколь угодно близкие к a. Тем самым установили, что $l \subset cont(M,a)$. Соотношение (2.3) и предложение 2.1 доказаны [170]. ■

Предложение 2.2. *$cont(M,a)$ есть замкнутое множество.*

Доказательство.

В самом деле, пусть луч $l^+(a,x)$ содержится в $\overline{cont(M,a)}$. Это означает, что

$$l^+(a,x) = \lim_{n\to\infty} l_n, \tag{2.4}$$

где

$$l_n = \lim_{k\to\infty} l(a,x_{kn}), \quad x_{kn} \in M, \quad \lim_{k\to\infty} x_{kn} = a. \tag{2.5}$$

Задавшись любым $\varepsilon > 0$, рассмотрим множество

$$W = \bigcup_{|u-x|<\varepsilon} l^+(a,u).$$

Из (2.4), (2.5) следует, что в W есть точки x_{kn}, сколь угодно близкие к a. Тем самым мы установили, что $l^+(a,x) \subset cont(\overline{M},a)$.

Предложение 2.2 доказано [170]. ■

Пусть $\mathcal{P} = \{P_x : x \in A^n, \ n \geq 2\}$ задает порядок в аффинном пространстве A^n. Назовем *направленной кривой*, исходящей из точки x, образ полуоси $[0,\infty)$ при непрерывном и монотонном (не убывающем по отношению к порядку на $[0,\infty)$ и порядку $\mathcal{P}$ в A^n) отображении ее в A^n, при котором число 0 отображается в x. Очевидно, всякая направленная кривая, исходящая из x, содержится в P_x.

Следующая теорема дает информацию о «внешнем виде» контингенции:

Теорема 2.2. *Пусть $\mathcal{P}$ задает предпорядок в A^n $(n \geq 2)$ и $C = cont(P,e)$. Тогда*

1) *$C \subset \overline{P}$ и C — замкнутый выпуклый конус.*

2) *Если P – замкнутое множество, удовлетворяющее аксиоме A_2, то C – конус с острой вершиной, совпадающий с объединением S всех направленных кривых, исходящих из точки e.*

Доказательство. [29, 170].

Лучом контингенции C будем называть луч, исходящий из e и содержащийся в C. Случай $e \notin \overline{P \setminus \{e\}}$ тривиален. Считаем далее, что $e \in \overline{P \setminus \{e\}}$.

(1) Покажем, что $C \subset \overline{P}$. Пусть l – луч контингенции C; по самому определению он является пределом лучей $l_n = l^+(e, x_n)$, где $x_n \in P$, $x_n \to e$ при $n \to \infty$. Вместе с точкой x_n каждый луч l_n содержит точки $k \cdot x_n$ $(k = 1, 2, ...)$, причем, очевидно, все $k \cdot x_n \in P$. По мере того как $x_n \to e$, точки $k \cdot x_n$ сгущаются на лучах l_n и их пределы образуют луч l. Но так как все $k \cdot x_n \in P$, то $l \subset \overline{P}$. Следовательно, $C \subset \overline{P}$.

Докажем, что C выпукло. Пусть l_1, l_2 – два луча из C. По доказанному $l_1, l_2 \subset \overline{P}$. Так как $\mathcal{P}$ тоже задает предпорядок, то при $x_1 \in l_1, x_2 \in l_2$ точка $x_1 + x_2 \in \overline{P}$. Когда же x_1, x_2 независимо пробегают лучи l_1, l_2 соответственно, $x_1 + x_2$ зачерчивает угол U между ними. Стало быть, этот угол $U \subset \overline{P}$. Но всякий луч $l^+(e, x) \subset \overline{P}$, очевидно, лежит в $cont(\overline{P}, e)$. По предложению 2.1 $cont(\overline{P}, e) = cont(P, e) = C$. Поэтому $U \subset C$, чем выпуклость C доказана. Замкнутость C следует из предложения 2.2.

Первая часть утверждения теоремы доказана.

(2) Докажем второе утверждение. Если бы C содержало прямую, то, ввиду выпуклости и замкнутости C, $C \cap C^-$, где C^- – множество точек, центрально симметричных множеству C относительно e, тоже содержало бы прямую. В силу замкнутости P, $P = \overline{P}$. Поэтому, так как $C \subset P, C^- \subset P^-$, то $P \cap P^-$ содержит прямую, т.е. неограниченно. Это противоречит аксиоме A_2. Итак, C – конус с острой вершиной.

Очевидно, всякий луч, содержащийся в P, является направленной кривой. Поэтому, так как $C \subset P$ и, очевидно, содержит все такие лучи, то, стало быть, $C \subset S$. Покажем, что и, обратно, $S \subset C$. Допустим противное, и пусть a – точка из S, не принадлежащая C. Пусть L – дуга направленной кривой, проходящая из e через a, образованная точками $x : e \preceq x \preceq a$.

По доказанному C есть замкнутый конус с острой вершиной. Поэтому его можно заключить в такой замкнутый, выпуклый конус K с острой вершиной e, что (i) $C \setminus \{e\}$ содержится внутри K и (j) $a \notin K$. Тогда конус K имеет в e строго опорную плоскость Q, отделяющую от K точку a.

Так как $C \setminus \{e\}$ лежит внутри K, то, как следует из самого определения контингенции, существует такая окрестность U точки e, что $P \cap U \subset K$. Поэтому некоторый начальный отрезок дуги L содержится в K. Но дуга L доходит до a, отделенной от K плоскостью Q. Поэтому L пересекает Q.

Пусть b – последняя (в смысле порядка на L) точка дуги L, в которой L пересекает Q. Пусть L' – часть L, заключенная между b и a. Очевидно, $L' \subset P_b$. Как отмечено выше, имеется окрестность U точки e такая, что $P \cap U \subset K$. Поэтому $P_b \cap U_b \subset K_b$, и, стало быть, некоторый начальный отрезок дуги L' лежит в K_b.

Плоскость Q, будучи строго опорной для K, будет таковой и для K_b (поскольку $b \in Q$). Поэтому дуга L' на начальном отрезке оказывается отделенной от точки a. Но она должна достигать ее и, стало быть, должна пересечь плоскость Q. Значит, точка b не может быть последней, в которой дуга L пересекает Q.

Полученное противоречие показывает, что $a \in S$ необходимо принадлежит C. Тем самым $S \subset C$. Следовательно, мы окончательно установили, что $S = C$.

Теорема 2.2 доказана.

■

И, наконец, ответ на вопрос, чем же так хорошо множество $cont(P_x, x)$, связанное с порядком $\mathcal{P} = \{P_x : x \in A^n\}$, дает следующая

Теорема 2.3. *Пусть $f : A^n \to A^n$, $n \geq 2$, – непрерывный $\mathcal{P}$-автоморфизм, $\mathcal{P}$ — замкнутый предпорядок, удовлетворяющий аксиоме A_2. Тогда $f(C_x) = C_{f(x)}$, где $C = cont(P, e)$, для любой точки $x \in A^n$.*

Доказательство. [29]. По теореме 2.2 $C_x = S_x$, где S_x – объединение всех направленных кривых, исходящих из x. Так как f гомеоморфно, то оно сопоставляет направленные кривые таким же кривым. Следовательно, $f(S_x) = S_{f(x)}$ или $f(C_x) = C_{f(x)}$.

Теорема 2.3 доказана. ■

Замечание 2.2. В [170] показано, что от условия A_2 в теореме 2.3 можно отказаться.

2.5. Отображение конусов

Пусть C_e – конус с вершиной e в аффинном пространстве A^n, т.е. C_e – это множество точек, состоящее из лучей, исходящих из e. Полагаем $C = C_e$.

Предполагаем, что конус C – замкнутое выпуклое множество с острой вершиной e (т. е. C не содержит прямой).

Теорема 2.4 (А.Д.Александров). *Если $C \neq L \times K$, где L – луч с началом e, а K – конус, $L \cap K = \{e\}$, то любой гомеоморфизм $f : A^n \to A^n (n \geq 2)$ – такой, что $f(C_x) = C_{f(x)}$ будет аффинным преобразованием.*

Доказательство. [29, 19].

(A) Пусть $y \in \partial C_x, y \neq x$. Определим множество

$$T_{xy} = \bigcup_{x \in C_z,\ \ y \in \partial C_z} C_z.$$

Множество T_{xy} состоит из лучей, выходящих y и проходящих через все точки, принадлежащие C_x. Если замыкание$\overline{T}_{xy}$ есть полупространство, то ∂T_{xy} есть касательная плоскость к C_x в точке y. В общем, $\overline{T}_{xy}$ есть выпуклый конус с вершиной y и содержащий прямую, проходящую через x и y. Пусть R_{xy} – максимальная плоскость, проходящая через y и содержащаяся в $\overline{T}_{xy}$. Для пары точек x', y' имеем $T_{x'y'} = T_{xy}$ тогда и только тогда, когда $x', y' \in R_{xy}$. Поэтому R_{xy} есть множество всех x', для которых существует y' такая, что $T_{x'y'} = T_{xy}$.

Благодаря данному представлению множеств T_{xy} отображение f преобразует их в самих себя. Следовательно, f преобразует плоскости R_{xy} в такие же плоскости с сохранением размерности. В частности, f преобразует касательные плоскости $R_{xy} = \partial T_{xy}$ в касательные.

(Б) Возьмем n касательных к C плоскостей T_i, ограничивающих n-гранный телесный угол W_e. Так как f переводит касательные плоскости в касательные и параллельные – в параллельные, то и ребра углов W_x переходят в параллельные ребра углов $W_{f(x)}$. Возьмем какое-либо ребро λ угла W. Конус C имеет касательные плоскости, отличные от T_i, ибо иначе $C = W$ и получили противоречие с условием $C \neq L \times K$. Все такие касательные плоскости не могут проходить через ребро λ, так как иначе вновь имели бы $C = L \times K$. Поэтому имеется касательная плоскость T, но проходящая через ребро λ и отличная от противоположной ему плоскости T_i. Значит, кроме λ есть еще хотя бы одно ребро λ_1, не содержащееся в T. Плоскость Q, натянутая на λ, λ_1, пересекает T по прямой $l = Q \cap T$. Таким образом, мы имеем на Q три семейства прямых, параллельных соответственной, λ, λ_1 и l. При отображении f прямые, параллельные λ, λ_1, переходят в параллельные. Поэтому плоскости Q_x переходят в параллельные, и касательные плоскости T_x тоже переходят в параллельные, так что прямые $\{l_x\}$ переходят в параллельные прямые.

Таким образом, плоскость Q отображается на некоторую плоскость Q' так, что семействам $\{\lambda_x\}$, $\{\lambda_{1x}\}$, $\{l_x\}$ отвечают семейства параллельных прямых. Так как f непрерывно, то f аффинно отображает Q на Q' (см., например, теорему 9.3).

Следовательно, f аффинно на ребре λ и на всей прямой, идущей вдоль него. Ребро λ было взято произвольно, поэтому f аффинно на прямых, проходящих вдоль ребер угла W. Это же верно для ребер углов W_x. Беря теперь систему координат с осями по ребрам угла W, убеждаемся, что f аффинно на A^n.

Теорема 2.4 доказана. ■

Теорема 2.5 (А.Д.Александров). *Пусть* $C = L_1 \times ...L_p \times K$, *где* $K \neq L \times K_1$, K, K_1 *– конусы, а* $L_1, ..., L_p, L$ *– лучи. Тогда всякий гомеоморфизм* $f: A^n \to A^n (n \geq 2)$ *такой, что*

$f(C_x) = C_{f(x)}$, представим в виде

$$f = f_0 \circ d_1 \circ ... \circ d_p, \tag{2.6}$$

где f_0 – аффинное преобразование, а d_i – суть смещения $d_{E_i L_i}$, являющиеся гомеоморфизмами A^n на себя. При этом $f(C)$ всегда является аффинным образом C и в (2.6) допустимы любые $d_i = d_{E_i L_i}$, а порядок, в котором стоят d_i в (2.6), безразличен.

Доказательство. [29]. ■

Каждый луч L_i в разложении

$$C = L_1 \times ...L_p \times K \tag{2.7}$$

является ребром конуса C и служит пересечением всех касательных плоскостей, кроме E_i, противоположной L_i. При отображении f касательные плоскости переходят в касательные (см. доказательство теоремы 2.4). Поэтому $f(L_i)$ будет также ребром конуса $C_{f(e)}$. Плоскость E, натянутая на конус K, является пересечением плоскостей E_i. Поэтому она отображается в плоскость (а параллельные ей плоскости E_x – в параллельные).

В плоскости E мы имеем систему конусов $\{K_x\}$, которые отображаются в конусы, совмещаемые переносами. По условию, $K \neq L \times K_1$, поэтому, по теореме 2.4, f аффинно на E.

Отсюда вытекает, что существует такое аффинное отображение $f_0 : A^n \to A^n$, которое переводит C в $C_{f(e)}$ и притом так, что для каждого ребра L_i $f_0(L_i) = f(L_i)$, а также $f_0(K) = f(K)$, причем на E f_0 совпадает с f.

Поэтому, полагая $f_0^{-1} \circ f = h$, имеем

$$h(C) = C, \; h(L_i) = L_i (i = 1, ..., p), \; h(E) \equiv E, \tag{2.8}$$

т.е. h тождественно на E.

То же, конечно, получается для любого конуса C_x, с той разницей, что $h(C_x) = C_{h(x)}$ и т.п.

Пусть d_1 – отображение $d_{E_1L_1}$, совпадающее с h на прямой N_1, содержащей луч L_1. Тогда отображение $d_1^{-1} \circ h$ тождественно на N_1, и, кроме того, для него будут выполнены соотношения, аналогичные (2.8) (потому, что $d_1(C) = t(C)$, но перенос t – тождественный, так как вершина e конуса C неподвижна при h, а стало быть, и при выбранном d_1).

Отображение d_1^{-1} равносильно для каждого конуса C_x его переносу, так что соотношения, подобные (2.8), выполняются при $d_1^{-1} \circ h$ для любого C_x. Но $d_1^{-1} \circ h$ тождественно на $N_1 \supset L_1$ и соответственно сводится к переносу на всех параллельных ей прямых N_{1x}.

Теперь положим $d_1^{-1} \circ h = h_1$; определим по h_1 смещение d_2 аналогично тому, как d_1 было определено по h: d_2^{-1} совпадает с h_1 на прямой $N_2 \supset L_2$.

Продолжая этот процесс, придем к отображению $h_p = d_p^{-1} \circ ... \circ d_1^{-1} \circ h$, тождественному на всех прямых $N_1, ..., N_p$ и сводящемуся, самое большое, к переносам на параллельных им прямых N_{ix}. Но h тождественно на K и сохраняет те же прямые N_i и, самое большое, перепосит N_{ix}.

Отсюда следует, что h_p тождественно на всем A^n. Поэтому, вспоминая, что $h = f_0^{-1} \circ f$, получаем $d_p^{-1} \circ ... \circ d_1^{-1} \circ f_0^{-1} \circ f = h_p$ – тождественное. Отсюда $f = f_0 \circ d_1 \circ ... \circ d_p$, что и требовалось доказать.

Теорема 2.5 доказана. ■

2.6. Конусы с транзитивной группой

Световой конус в теории относительности, как известно, является эллиптическим. Следовательно, возникает задача поиска условий, которые позволят нам выделить эллиптические конусы среди выпуклых конусов и даже, что было бы еще интереснее, среди всевозможных конусов в аффинном пространстве A^n. Такие дополнительные условия или гипотезы о структуре пространства-времени обнаруживаются без каких-либо затруднений и издавна постулировались в классической физике. Речь идет о предположениях об однородности мира в пространстве и во времени, а также об изотропности пространства.

Математически это приводит к идее изучить, как устроены все однородные конусы, т.е. конусы, на которых действует транзитивно некоторая группа преобразований [6], [56] [95].

Пусть C – конус в аффинном пространстве A^n ($n \geq 2$) в смысле § 0.2.4.

Обозначим через G группу всех биективных отображений A^n на себя, сохраняющих семейство конусов $\{C_x : x \in A^n\}$, т.е. если $f \in G$, то $f(C_x) = C_{f(x)}$ для любой точки $x \in A^n$, и удовлетворяющих условию $f(e) = e$.

> А к с и о м а T. *Группа G действует транзитивно на C, т.е. для любых $x, y \in C \setminus \{e\}$ существует $f \in G$ такая, что $f(x) = y$.*

Теорема 2.6 [21]. *Если C есть $(n-1)$-мерное замкнутое множество, содержащееся в полупространстве и отличное от плоскости, то при выполнении аксиомы T конус C является эллиптическим, а G однородной группой Лоренца (с подобием).* ■

В случае выпуклого поверхностного конуса C эта теорема была доказана в 1967 г. Буземаном [260, с.34].

Теорема 2.7 [21]. *Пусть выполнена аксиома T и C такой конус с острой вершиной e, что $A^n \setminus C$ – несвязное множество и одно из множеств $C \setminus \{e\}$, $A^n \setminus C$ имеет не более чем счетное число связных компонент. Тогда C – эллиптический конус, а G – однородная группа Лоренца (с подобием).* ■

Теорема 2.8 [21]. *Пусть выполнена аксиома T и конус C имеет острую вершину e и содержит внутренние точки. Тогда:*

1) C – выпуклый конус и $C \setminus \{e\}$ – открытое множество;

2) конус C будет эллиптическим, а группа G – однородной группой Лоренца (с подобием), если выполнено одно из следующих двух условий:

а) *∂C – гладкая поверхность (кроме точки e);*

б) *сечение ∂C плоскостью, пересекающей все образующие, содержит хотя бы одну такую точку, что это сечение имеет соприкасающийся параболоид (не вырождающийся в цилиндр).* ■

Замечание 2.3. В предположении выпуклости конуса C теорема 2.8 доказана Буземаном [260, с.38].

2.7. Аксиоматики А.Д. Александрова

Изложим систему аксиом, содержащуюся в работе А.Д. Александрова «К основаниям геометрии пространства-времени» [31, 32].

Пусть G_a – группа всех биекций g пространства $\mathcal{M}$ на себя, обладающая свойствами: $g(a) = a$ и $g(P_x) = P_{g(x)}$ для любой точки $x \in \mathcal{M}$.

А к с и о м а A_3. *Для любых точек $x, y \in \partial P_a \setminus \{a\}$ существует биекция $g \in G_a$ такая, что $g(x) = y$.*

А к с и о м а A_4. *Для любых точек $x, y \in int(P_a) = P_a \setminus \partial P_a$ существует биекция $g \in G_a$ такая, что $g(x) = y$.*

А к с и о м а A_5. $int(P) \neq \emptyset$.

Аксиомы A_3 и A_4 представляют собой требования максимальной однородности и изотропности пространства-времени.

Теорема 2.9 (А.Д.Александров, [31]) . *Пусть выполняются аксиомы A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. Тогда P – замкнутый либо открытый эллиптический конус, а G_e – однородная группа Лоренца с растяжениями, т.е. существует декартова система координат x_0, x_1, x_2, x_3 в $\mathcal{M}$ такая, что либо*

$$P = \left\{ (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{M} : x_0^2 - \sum_{\alpha=1}^{3} x_\alpha^2 \geq 0,\ x_0 \geq 0 \right\},$$

либо

$$P = \left\{ (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{M} : x_0^2 - \sum_{\alpha=1}^{3} x_\alpha^2 > 0,\ x_0 > 0 \right\} \cup \{e\},$$

где точка e имеет координаты $(0,0,0,0)$, а G_e есть прямое произведение группы линейных однородных преобразований, сохраняющих форму $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$, за исключением преобразования $x_0' = -x_0$, и группы подобий $x_i' = \lambda x_i$ $(i = 0, 1, 2, 3)$, где $\lambda > 0$ – произвольное число.

Доказательство.

(а) Из A_2, A_4 следует, что $e \in \overline{P \setminus \{e\}}$. В самом деле, по A_5 $int(P) \neq \emptyset$. Пусть $a \in int(P)$. Тогда, если точка b такова, что $\overrightarrow{eb} = 2\overrightarrow{ea}$, то $a \prec b$, $b \in int(P)$. По A_4 найдется $g \in G_e$ такое, что $a = g(b)$; следовательно, $g(b) \prec b$ и $g^{n+1}(b) \prec g^n(b)$. Из A_2 вытекает существование сколь угодно близких одна к другой точек $g^n(b), g^m(b)$. Поэтому есть сколь угодно близкие к e точки $x \in P \setminus \{e\}$.

(б) Отображения из G_a непрерывны. В самом деле, из A_3 следует, что либо $P_a = \overline{P_a}$, либо $int(P_a) = P_a \setminus \{a\}$. Но тогда утверждение пункта (б) вытекает из A_5 и теоремы о непрерывности 2.1 (§ 2.3).

(в) Пусть $C = cont(P, e)$. По теореме 2.3 $g(C_a) = C_a$ для любой точки $a \in \mathcal{M}$ и любого преобразования $g \in G_a$. Либо C лежит в k-мерной плоскости, где $k < 4$, либо $int(C) \neq \emptyset$. В первом случае получаем противоречие с аксиомами A_3, A_4, A_5. Поэтому $int(C) \neq \emptyset$.

(г) Все $g \in G_a$ аффинны. Действительно, g сохраняет семейство замкнутых выпуклых конусов $\{C_a : a \in V\}$, имеющих острую вершину. Поэтому либо g аффинно по теореме 2.4, либо C – квазицилиндр и $g = g_0 \circ d_1 \circ ... \circ d_p$, где g_0 – аффинное преобразование, а $d_i (i = 1, ..., p)$ – смещения, по теореме 2.5. Во втором случае, повторяя рассуждения, изложенные в пунктах 6.3-6.8 из [29], мы убеждаемся, что либо g аффинно, либо P – квазицилиндр. Но P не может быть квазицилиндром благодаря аксиоме A_3. Поэтому g аффинно.

(д) Покажем, что $\overline{P}_a = C_a$ и C_a – эллиптический конус. Тем самым будет доказана теорема. Пусть K_a – конус, проектирующий P_a из точки a. Из (г) следует, что $g(K_a) = K_a$ для $g \in G_a$. Если $K_a \neq C_a$, то, добавляя к G_a подобия с центром a, получаем аффинную группу, транзитивную на $K_a \setminus C_a$. Но, как нетрудно видеть, такой группы быть не может. Поэтому $K_a = C_a$, откуда $\overline{P_a} = C_a$. Но тогда G_a действует транзитивно на ∂C_a и по теореме 2.7 C_a является эллиптическим копусом.

Теорема 2.9 доказана. ■

Таким образом, геометрия Минковского может быть аксиоматизирована с помощью группы аксиом $\langle A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \rangle$. Но эта аксиоматика не единственно возможная. Для того чтобы сформулировать другие, введем следующие условия:

D_1. P_a не содержит луча с началом a, сохраняемого группой G_a.

D_2. Существуют точка $b \in \overline{P_a}$ и отображение $g \in G_a$ такие, что $g(b) \in P_b$.

D_3. $a \in \overline{P_a \setminus \{a\}}$.

D_4. Либо $P_a \setminus \{a\}$ открыто, либо P_a замкнуто, но $int(P_a) \neq \emptyset$.

D_5. Для любой точки $b \in \partial P_a$ множество $\partial P_a \cap \partial P_b^-$ содержится в прямой или линейно упорядочено в предпорядке, задаваемом $\overline{\mathcal{P}}$.

Теорема 2.10 (А.Д.Александров, [31, 32]). *Геометрия мира Минковского аксиоматизируется с помощью любого из следующих наборов аксиом:*

$$< A_1, A_2, A_3, D_1, D_2 >, \; < A_1, A_2, A_3, D_1, D_3 >,$$

$$< A_1, A_2, A_4, D_4, D_5 > .$$

■

(Доказательство этой теоремы не было опубликовано).

Приведем в заключение этого параграфа интересную теорему, принадлежащую А.Д.Александрову [31].

Теорема 2.11. *Пусть выполнены аксиомы* $\langle A_1, A_2, A_3, A_5, D_3 \rangle$. *Тогда в некоторых декартовых координатах* x_1, x_2, x_3, x_4 *множество* P *задается либо соотношением*

$$x_4 \geq r^p, \quad r = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} x_i^2}, \quad 0 < p \leq 1,$$

либо $x_4 > r^p$ *с добавлением точки* $e = (0,0,0,0)$. *При* $p = 1$ *справедливо утверждение теоремы* 2.9, *а при* $p < 1$ *группа* G_e *порождается преобразованиями вида* $x_4' = \lambda^p x_4$, $x_i' = \lambda x_i$ $(i = 1, 2, 3)$ *и ортогональными преобразованиями с неизменным* x_4. ■

2.8. Аксиоматика Г. Буземана

В работе [260] Г.Буземан построил теорию времениподобных G-пространств. Частным случаем этой теории являются времениподобные пространства Минковского, имеющие прямое отношение к аксиоматической теории относительности. Времениподобное пространство Минковского – это непустое множество F, для которого помимо аксиомы A_1, где предполагается, что $\mathcal{P} = \{P_a\}$ задают порядок в $\mathcal{M}$, выполняются следующие аксиомы.

А к с и о м а B_1. *Множество* $(\prec)$ *всех пар* (x, y) *в* $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ *таких, что* $x \prec y$ *открыто в* $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$, *и каждая окрестность* U_z *данной точки* z *содержит точки* x, y *с* $x \prec z$ *и* $z \prec y$.

А к с и о м а B_2. *На множестве* $(\preceq)$ *пар* (x, y) *таких, что* $x \preceq y$, *определена непрерывная функция*

$\rho : (\preceq\ ) \to [0, +\infty)$, *удовлетворяющая условиям*

$$\rho(x, x) = 0, \quad \rho(x, y) > 0 \text{ для } x \prec y$$

и

$$\rho(x, y) + \rho(y, x) \leq \rho(x, z) \text{ для } x \prec y \prec z$$

и инвариантная относительно действия группы T [2].

А к с и о м а B_3. *Если* $x_n \preceq y_n$, $x_n \to x$, $y_n \to y$ *и неверно, что* $x \preceq y$, *то* $\rho(x_n, y_n) \to 0$.

А к с и о м а B_4. *Если* $x_n \to a, z_n \to a$ *и* $\rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, z_n) = \rho(x_n, z_n)$, *то* $y_n \to a$.

А к с и о м а B_5. *Если* $a \prec b$, *то точка* x *такая, что* $\rho(a, x) + \rho(x, b) = \rho(a, b)$, *существует, и замыкание всех таких* x *есть компактное множество.*

А к с и о м а B_6. *Каждая точка* a *имеет окрестность* U_a *такую, что для* $x, y \in U_a$ *с* $x \prec y$ *существуют точки* u *и* v *такие, что* $\rho(u, x) + \rho(x, y) = \rho(u, y)$ *и* $\rho(x, y) + \rho(y, v) = \rho(x, v)$.

А к с и о м а B_7. *Если* $\rho(u_1, x) + \rho(x, y) = \rho(u_1, y)$ *и* $\rho(u_2, x) + \rho(x, y) = \rho(u_2, y)$ *и* $\rho(u_1, x) = \rho(u_2, x)$, *то* $u_1 = u_2$. *Если* $\rho(x, y) + \rho(y, v_1) = \rho(x, v_1)$ *и* $\rho(x, y) + \rho(y, v_2) = \rho(x, v_2)$ *и* $\rho(y, v_1) = \rho(y, v_2)$, *то* $v_1 = v_2$.

Положим
$$C = \{x \in \mathcal{M} : \rho(e, x) > 0\}.$$

Тогда C есть выпуклый открытый конус в $\mathcal{M}$ с вершиной e [260, с.30].

Обозначим через Γ группу движений пространства $\mathcal{M}$, причем под движением φ понимаем гомеоморфизм $\mathcal{M}$ на себя

[2] См. аксиому $\mathcal{A}_1$.

такой, что $x \prec y$ тогда и только тогда, когда $\varphi(x) \prec \varphi(y)$ и $\rho(\varphi(x), \varphi(y)) = \rho(x, y)$. Группа Γ действует дважды транзитивно на $\mathcal{M}$, если для данных $x \prec y$ и $a \prec b$ таких, что $\rho(x, y) = \rho(a, b)$ существует движение φ, переводящее x в a и y в b. Через Γ_e обозначим подгруппу движений, оставляющих точку e неподвижной.

Теорема 2.12 (H.Busemann, [260]). *Конус ∂C во времениподобном пространстве Минковского является эллиптическим, если одно из следующих условий а), б) выполняется.*

а) *Подгруппа Γ_e транзитивна на множестве образующих конуса C.*

б) *Группа движений Γ дважды транзитивна, и сечение конуса C гиперплоскостью, не проходящей через e, обладает эйлеровой точкой* [3] *с неисчезающей гауссовой кривизной.* ■

При любом из названных условий а), б) пространство не обязано быть лоренцевым, т.е. в подходящих аффинных координатах x_1, x_2, x_3, x_4 функция ρ не обязана иметь вид

$$\rho(x, y) = [(x_4 - y_4)^2 - \sum_{i=1}^{3}(x_i - y_i)^2]^{1/2}.$$

Соответствующие примеры приведены в [260, с.42,43].

Дело здесь в том, что группа движений Γ в подходе Буземана может быть лишь некоторой подгруппой неоднородной группы Лоренца. Вся группа Лоренца получается, например, следующим образом. Группа движений Γ действует трижды транзитивно на $\mathcal{M}$, если для данных $x \prec y \prec z, x' \prec y' \prec z'$ с $\rho(x, y) = \rho(x', y'), \rho(x, z) = \rho(x', z'), \rho(y, z) = \rho(y', z')$ найдется движение φ такое, что $\varphi(x) = x', \varphi(y) = y', \varphi(z) = z'$.

Теорема 2.13 (H.Busemann, [260]). *Времениподобное пространство Минковского с трижды транзитивной группой движения является лоренцевым.* ■

[3] В точке Эйлера существует соприкасающийся параболоид [260].

Следовательно, если через Tr обозначить требование трижды транзитивного действия группы Γ на $\mathcal{M}$, то теорема 2.13 говорит нам о том, что геометрия пространства-времени характеризуется системой аксиом $\langle A_1, B_1 - B_7, Tr \rangle$.

2.9. Лоренцевы и галилеевы кинематики Р.И. Пименова

Одно из интересных направлений аксиоматического построения геометрии пространства-времени развивалось Р.И.Пименовым [190]. Идеи Пименова охватывают не только случай геометрии Минковского, но главным образом нацелены на создание аксиоматической теории искривленного пространства-времени. Здесь же мы приведем лишь один результат, касающийся аксиоматизации специальной теории относительности.

Предполагаем, что справедлива аксиома A_1, причем $\mathcal{P}$ задает порядок на пространстве-времени $\mathcal{M}$.

> А к с и о м а Π_1. *Область воздействия P_a есть открытый конус в пространстве $\mathcal{M}$.*

Говорим, что имеем *кинематику*, если справедлива система аксиом $\langle A_1, \Pi_1 \rangle$.

Галилеева кинематика представляет собой такую кинематику, в которой для любого $x \in \mathcal{M}$ справедливо одно из трех отношений: $x \prec e$, $e \prec x$ или $x \in \overline{P \setminus \{e\}}$ и $e \in \overline{P_x \setminus \{x\}}$.

Лоренцева кинематика определяется как кинематика, для которой в подходящих аффинных координатах x_1, x_2, x_3, x_4

$$e = (0, 0, 0, 0),$$

$$P = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_4^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 > 0,\ x_4 > 0\} \cup \{e\},$$

а отношение порядка вводится формулой

$$x \prec x' \Leftrightarrow x'_4 - x_4 > \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (x'_i - x_i)^2}.$$

Назовем допустимым репером в кинематике $\langle \mathcal{M}, \preceq \rangle$ следующий объект: $(a, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4)$, где $a \in \mathcal{M}$ – точка; α^1 – луч $\{x : x = a + \lambda a_1, \lambda > 0\}$ при условии, что $a_1 \succ e$ или $a_1 \prec e$; α^2 – полуплоскость $\{x : x = a + \mu a_1 + \lambda a_2,\ \lambda > 0\}$; ...; α^4 – полупространство $\{x : x = a + \sum_{i=1}^{3} \mu_i a_i + \lambda a_4, \lambda > 0\}$, где $a_1, a_2, ..., a_k$ входят в определение α^k.

Обозначим через G множество всех $\mathcal{P}$-автоморфизмов пространства $\mathcal{M}$ на себя. Очевидно, G – группа.

> А к с и о м а Π_2. *Группа G действует просто транзитивно на множесте всех допустимых реперов.*

Теорема 2.14 (Р.И.Пименов). *Пусть выполнены аксиомы $\langle A_1, \Pi_1, \Pi_2 \rangle$. Тогда кинематика $\langle \mathcal{M}, \preceq \rangle$ есть либо галилеева, либо лоренцева* ([190, с.49]). ■

2.10. Неточно измеренная причинность влечет группу Лоренца

Как известно, в реальной жизни измерения никогда не бывают точными. Более того, соотношения неопределенности Гейзенберга, установленные в квантовой механике, говорят о том, что бóльшая точность при измерении одной физическое величины достигается за счёт бóльшей ошибки при измерении другой величины. Последнее свойство можно описать с помощью «функции точности» $h(t)$, удовлетворяющей условию $h(t) \to 0$, когда $t \to +\infty$.

Если с помощью некоторой процедуры измерения выявляется событие, которое является следствием события a, то в действительности результатом будет названо (измеренное) событие b, которое подменяет событие b', действительно являющееся следствием события a.

С другой стороны, если процедура измерения, целью которого было нахождение следствия события a, определяло с ошибкой событие b, которое должно было бы быть следствием события a, но это не было твердо установлено, т.е. не было найдено событие b', являющееся следствием события a, то естествено не считать измеренное событие b следствием события a.

Эти соображения были положены В.Я.Крейновичем в основание понятия *измеренной причинности*. Вопрос, на который надо было найти ответ, заключался в проверке лоренцевости преобразований, сохраняющих отношение измеренной причинности.

Для двух точек $a = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ и $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ в пространстве A^4 пишем $a \prec b$, если

$$b_4 > a_4 \text{ и } b_4 - a_4 \geq \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}.$$

Положим

$$d(a, b) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2 + (b_4 - a_4)^2}.$$

Определение 2.5. Пусть дана функция $h : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ такая, что $h(t) \to 0$, когда $t \to +\infty$. Говорим, что множество $\mathcal{C} \subset A^4 \times A^4$ – это *измеренная причинность*, если выполнены следующие условия:

1) если $(a, b) \in \mathcal{C}$, то существует b' такая, что $a \prec b'$ и $d(b, b') \leq h(d(a, b))$;

2) если $(a, b) \notin \mathcal{C}$, то существует b' такая, что $\neg(a \prec b')$ и $d(b, b') \leq h(d(a, b))$.

Теорема 2.15 (В.Я.Крейнович, [147]). *Пусть $\mathcal{C} \subset A^4 \times A^4$ – измеренная причинность, $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ биективное непрерывное отображение такое, что f^{-1} также непрерывно и $(a, b) \in \mathcal{C}$ тогда и только тогда, когда $(f(a), f(b)) \in \mathcal{C}$. В таком случае f аффинно. Более того, f композиция преобразования Лоренца, переноса и подобия.* ■

Глава 3

ИНТЕРАКТИВНАЯ ТЕОРИЯ МИРА СОБЫТИЙ

Теория относительности – это физическая теория, важнейшим постулатом которой считается *принцип относительности*.

Принцип относительности, как он был сформулирован в работах Пуанкаре, говорит о том, что любые физические законы, касающиеся механических перемещений или электромагнитных явлений, имеют одинаковую формулировку как для неподвижного наблюдателя, так и для наблюдателя, увлекаемого равномерным поступательным движением. Позже этот принцип был распространён на все физические явления. Следовательно, принцип относительности подразумевает, что уравнения, описывающие физические законы, будучи выраженными через (аффинные) координаты[1] в различных инерциальных системах отсчёта, имеют один и тот же вид [166, с.11].

[1] Термин «координаты» понимается в смысле пространственных и временных координат.

Под *инерциальной системой отсчёта* понимается система отсчёта, в которой выполняется первый закон Ньютона, т.е. движение тел, не находящихся под действием внешних сил, – такое движение называется свободным – происходит с постоянной скоростью. Если использовать математический язык, то мировая линия тела, находящегося в свободном движении, является прямой линией.

Пусть даны две инерциальные системы отсчёта с заданными в них соответственно координатами (x, y, z, t) и (x', y', z', t'). Естественно поинтересоваться, как связаны математически эти координаты? Известно, что это преобразования Лоренца. Иначе говоря, переход от одной инерциальной системы отсчёта к другой осуществляется с помощью преобразований, образующих группу Лоренца.

Исторически это было выяснено, благодаря тому что уравнение распространения света имеет вид

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2 - \left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2\right] = 0$$

и инвариантно относительно группы Лоренца, т.е. сохраняет свой вид, если в нем заменить координаты (x, y, z, t) на координаты (x', y', z', t'), используя для этого преобразования Лоренца. Но как раз это и подразумевает принцип относительности. Поэтому принцип относительности часто формулируют как требование инвариантности уравнений, выражающих физические законы, относительно группы Лоренца.

Сказанное вызывает у математика желание выявить тот единственный физический закон, одинаковая запись которого в разных инерциальных системах отсчета позволит вычислить группу Лоренца. Фактически это означает, что принцип относительности в его универсальной форме применимости к любым физическим явлениям как постулат, положенный в основание теории относительности, отбрасывается и применяется только к одному единственному физическому закону. Но такое жесткое сужение принципа относительности означает на деле полный отказ от него. И если удастся определить группу Лоренца на основе инвариантности одного физического закона, то можно будет сказать, что теория относительности как аксиоматическая теория не нуждается в такой аксиоме как принцип относительности.

Именно это было сделано в работе А.Д.Александрова и В.В.Овчинниковой [6]. Их основной результат выражается в фразе: «Закон постоянства скорости света влечет группу Лоренца».

3.1. Теорема Александрова-Овчинниковой

В этом параграфе кратко излагается основное математическое содержание статьи А.Д.Александрова и В.В.Овчинниковой «Замечания к основам теории относительности» (1953). В указанной работе доказывается, что *для вывода преобразований Лоренца достаточно требования, что закон постоянства скорости света выражается в одинаковой форме в любой инерциальной системе отсчёта.* И нет никакой необходимости в принципе относительности, который говорит о том, что любые физические законы, касающиеся механических перемещений или электромагнитных явлений, имеют одинаковую формулировку.

Было также показано, что требования линейности и даже непрерывности преобразований, связывающих две инерциальные системы отсчёта, оказываются лишними.

Таким образом, благодаря результату А.Д.Александрова и В.В.Овчинниковой можно сказать, что ядро теории относительности – группа Лоренца появляется в теории как следствие инвариантности закона постоянства скорости света относительно группы биекций пространства-времени, а затем сам принцип относительности вводится в теорию как требование уделять особое внимание к тем явлениям, формулировка которых, записанная в некоторой инерциальной системе отсчёта, является инвариантной относительно группы Лоренца.

Для того чтобы результат А.Д.Александрова и В.В.Овчинниковой стал фактом, существенным является предположение о существовании как минимум двух инернциальных систем отсчёта. Между ними и осуществляются преобразования, которые, как выясняется при доказательстве теорем, являются общими лоренцевыми преобразованиями.

Важна при этом форма, в которой формулируется закон постоянства скорости света в инерциальной системе отсчёта.

Известно, что в инерциальных системах отсчёта, т.е. в системах остчета, в которых справедлив первый закон Ньютона [211], свет распространяется во все стороны с одинаковой скоростью. Следовательно, если r означает расстояние от источника, а t – время, то

$$r = c(t - t_0), \tag{3.1}$$

где c – скорость света.

Это и есть закон постоянства скорости света.

Евклидовость пространства равносильна существованию такой декартовой системы координат, в которой

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}. \tag{3.2}$$

Если такая система координат в пространстве может быть введена в системе отсчета, где имеет место закон (3.1), то соединение (3.1) и (3.2) дает формулу:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = c(t - t_0). \tag{3.3}$$

Таким образом, вывод преобразований Лоренца может основываться или на законе постоянства скорости света в виде формулы (3.1), или на этом же законе в форме (3.1) и на предположении об евклидовости пространства, выраженном формулой (3.2), т.е. на формуле (3.3).

Пропорциональное изменение масштабов пространственных и временных координат, т.е. подобие, очевидно, не нарушает формулы (3.1), выражающей закон распространения света[2]. Поэтому, естественно, мы должны были включить в общее преобразование Лоренца умножение всех координат на любой общий множитель.

В теории относительности нет преимущественных, выделенных в силу общих законов, единиц длины и времени, но в отличие от классической теории в ней есть преимущественная, выделенная в силу общих законов, скорость – скорость света c. Поэтому здесь допустимы только пропорциональные изменения масштабов для пространственных и временных координат, тогда как в классической теории единицы времени можно менять независимо.

Непропорциональные изменения масштабов длин и времени ведут к изменению фундаментальной постоянной c.

Далее, если исходить из требования неизменности формулы закона распространения света в виде (3.3), то, так как слева здесь стоит расстояние, которое всегда больше нуля, изменение знака времени невозможно. Иными словами, общие преобразования Лоренца, сохраняющие формулу (3.3), не допускают перестановки прошедшего и будущего.

Однако вместо формулы (3.3) всегда пишут

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - c^2(t - t_0)^2 = 0. \qquad (3.4)$$

Само собой ясно, что проделанное здесь возведение в квадрат влечет возможность изменения знака времени.

В четырехмерной геометрической интерпретации, о которой говорилось в начале параграфа, уравнения (3.3) определяют не полные конусы, а только половины полных конусов, обращенные отверстием в сторону положительных значений координаты t. Уравнения же (3.4) определяют полные конусы, которые мы называем *двойными* конусами.

Итак, предполагая, что справедлив *закон постоянства скорости света* либо в форме (3.3), либо форме (3.4),

[2]В геометрии Лобачевского это не так, поскольку там нет подобия фигур и существуют отрезки, выделенные по своим геометрическим свойствам (например, сторона правильного треугольника с суммой углов, равной 90^o), подобно тому как прямой угол или радиан выделены по своим геометрическим свойствам.

А.Д.Александровым и В.В.Овчинниковой были доказаны следующие теоремы.

Теорема 3.1 *Взаимно однозначное преобразование пространства $\mathbb{R}^4$ на себя, переводящее каждый конус*

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=c(t-t_0) \tag{1}$$

в такой же конус, есть общее преобразование Лоренца. ■

Теорема 3.2. *Взаимно однозначное преобразование пространства $\mathbb{R}^4$ на себя, переводящее каждый двойной конус*

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-c^2(t-t_0)^2=0$$

в такой же, есть общее преобразование Лоренца с возможным добавлением изменения знака координаты t. ■

Вместо закона постоянства скорости света (3.1) можно принять за основу *закон ограниченности скоростей*: *всякое воздействие распространяется не быстрее света, чем с некоторой скоростью c.*

Этот закон можно выразить в соответствующих координатах неравенством:

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\le c(t-t_0). \tag{3.5}$$

Геометрически неравенство (3.5) определяет в четырехмерном пространстве телесный конус. Справедлива теорема

Теорема 3.3. *Взаимно однозначное преобразование пространства $\mathbb{R}^4$ на себя, переводящее каждый телестный конус*

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\le c(t-t_0)$$

в такой же, есть общее преобразование Лоренца. ■

Таким образом, закон ограниченности скоростей (3.5) вполне может быть положен в основу теории относительности вместо закона постоянства скорости света (3.1). Этот закон, будучи сформулирован в ином виде, для полных телесных конусов, называемых нами также *двойными телесными конусами*, приводит к следующей теореме.

Теорема 3.4 *Взаимно однозначное преобразование пространства* $\mathbb{R}^4$ *на себя, переводящее двойной телесный конус*

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 \le c^2(t-t_0)^2$$

в такой же, есть общее преобразование Лоренца с возможным добавлением изменения знака координаты t. ■

3.2. Отображение семейств эллиптических конусов

Пусть A^n — аффинное пространство ($n \ge 3$) и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — декартовы координаты в A^n. Обозначим через x^2 квадратичную форму:

$$x^2 \equiv {x_n}^2 - \sum_{i=1}^{n-1} {x_i}^2.$$

Под преобразованием Лоренца понимаем линейное биективное преобразование, сохраняющее форму x^2 с точностью до параллельных переносов.

Для пары точек $x, y \in A^n$ рассмотрим три симметричных отношения:

$$\text{(I)}\ \ (x-y)^2 = 0, \quad \text{(II)}\ \ (x-y)^2 \ge 0, \quad \text{(III)}\ \ (x-y)^2 > 0$$

и три соответствующих антисимметричных отношения $(\mathrm{I}^+)-(\mathrm{III}^+)$, полученные из (I) – (III) добавлением условия $x_n \le y_n$.

Теорема 3.5. *Если биективное отображение* $f : A^n \to A^n$ *и его обратное* f^{-1} *сохраняют одно из шести отношений* $(\mathrm{I})-(\mathrm{III}^+)$, *то* f *есть преобразование Лоренца с точностью до подобия.* ■

Переформулируем эту теорему в терминах конусов. Определим множества:

(1) $C_x = \{y : (x-y)^2 = 0\}$ — поверхностный двойной конус с вершиной x;

(2) $K_x = \{y : (x-y)^2 \geq 0\}$ — телесный замкнутый двойной конус;

(3) $Q_x = \{y : (x-y)^2 > 0\}$ — телесный открытый двойной конус.

Добавляя условие $x_n \leq y_n$, мы определим множества:

(1^+) ${C_x}^+$ — поверхностный одинарный конус с вершиной x;

(2^+) ${K_x}^+$ — телесный замкнутый одинарный конус;

(3^+) ${Q_x}^+$ — телесный открытый одинарный конус.

Условие сохранения отображениями f и f^{-1} отношений (I) – (III^+) эквивалентно условию $f(M_x) = M_{f(x)}$, где M_x — одно из шести множеств $C_x, K_x, \ldots, {Q_x}^+$.

Тогда теорема 3.5 примет вид:

Теорема 3.5а. *Если биективное отображение $f : A^n \to A^n \quad (n \geq 3)$ удовлетворяет условию $f(M_x) = M_{f(x)}$ для любой точки $x \in A^n$, где M_x — множество одного из шести указанных типов* (1) – (3^+), *то f есть преобразование Лоренца с точностью до подобия.* ■

Физическое содержание теоремы 3.5. Отношения (I^+) – (III^+) и (I) -(III) можно интерпретировать как существование соответственно воздействия и связи между событиями x и y, происходящих посредством: (I) прямого распространения света; (II) распространения света и механическим образом (т.е. посредством посылки частицы с ненулевой массой покоя от x к y либо от y к x); (III) механическим путем либо с помощью отраженного света.

В случаях (I^+) – (III^+) мы говорим о воздействии x на y, подчеркивая тем самым причинный характер рассматриваемого отношения между событиями x и y.

Рассмотрение отношений (I) – (III^+) связано с существованием инерциальных систем отсчета. Инвариантность отношений относительно биекций пространства-времени $\mathcal{M}$ выражает фундаментальное значение закона постоянства скорости света для теории относительности. Следовательно, физическое содержание теоремы 3.5 заключается в том, что преобразования Лоренца – ядро специальной теории относительности – могут быть выведены из инвариантности закона постоянства скорости света в любой из принятых форм (I) – (III$^+$) и евклидовости пространства без привлечения принципа относительности [6]. Последний, как известно, говорит о равноправности всех инерциальных систем отсчета или о том, что выражения физических законов инвариантны относительно преобразований Лоренца. Поскольку отношения (II$^+$) и (III$^+$) задают частичный порядок в пространстве $\mathcal{M}$, то теорема 3.5 в этих случаях говорит о том, что «причинность влечет группу Лоренца» [34, 358].

Замечание 3.2. Теорема 3.5 для случая (I) была впервые установлена в 1949 г. А.Д.Александровым. Случаи (I$^+$), (II$^+$) были изучены в статье А.Д.Александрова и В.В.Овчинниковой в 1953 г. (см. § 3.1). В 1964 г. Е. Зиман опубликовал работу, посвященную случаям (I$^+$) и (III$^+$). Наконец, в 1972 г. Борхерс и Хегерфельд повторили теорему 3.5 для случая (I) и рассмотрели случай (III). Случай (II) был доказан А.Д.Александровым в работе «Конусы с транзитивной группой» в 1962 г.

Заметим, что отношения (I) - (III) сохраняются при следующих отображениях, отличных от преобразований Лоренца:

1) гомотетиях $H : x' = \lambda x + a$ ($\lambda \neq 0$; не исключая $\lambda < 0$; допуская $\lambda = 1$), мы относим к гомотетиям переносы);

2) инверсиях

$$I_a : x \to \frac{x-a}{(x-a)^2} + a;$$

3) особых двойных инверсиях

$$J_{ca} : x \to \frac{x - a + c(x-a)^2}{1 + 2c(x-a)} + a,$$

где вектор $c \neq 0$ таков, что $c^2 = 0$, а в остальном произволен.

Причем инверсия I_a не определена па конусе $C_a : (x-a)^2 = 0$, а инверсия J_{ca} – на плоскости $P_{ca} : 1+2c(x-a) = 0$. Поэтому эти отображения следует рассматривать не на всем пространстве A^n, а на связном подмножестве $D \subset A^n$, где они определены.

Теорема 3.6 [15]. *Пусть $f : D \to A^n$ – взаимно однозначное отображение области $D \subset A^n$, сохраняющее одно из отношений (I) – (III$^+$) вместе с его отрицанием. Тогда f есть либо однородное преобразование Лоренца L с гомотетией H, либо может быть представлено как такое преобразование с добавлением инверсии I или особой двойной инверсии J. Иначе говоря, f приводится к одному из трех видов HL, HLI, HLJ, причем в двух последних случаях оно может быть приведено также к виду IHL и соответственно JHL.*

Теорема 3.6а [15]. *Пусть $f : D \to A^n$ – взаимно однозначное отображение области $D \subset A^n$ такое, что для каждого конуса M_x одного из шести типов (1) – (3$^+$) при всякой $x \in D$ оказывается*

$$f(M_x \cap D) = M_{f(x)} \cap f(D).$$

Тогда f – такое, как в теореме 3.6. ■

3.3. Конформное пространство

Пространство $\mathcal{M}$ можно дополнить «бесконечно удаленным» конусом, на который при любой инверсии отображается ее особый конус. Получаем пространство C, на которое преобразования L, H, I, J распространяются в качестве его взаимно однозначных отображений (и непрерывных при естественном определении топологии C).

Пространство C называется *конформным*, потому что конформные отображения областей в A^n – это преобразования L, H, I, J и их комбинации – те же HL, HLI, HLJ, так что дополнение A^n до C регуляризирует конформные отображения.

То, что конформные отображения – это HL, HLI, HLJ, хорошо известно при $\dim A^n < \infty$ (см., например, [206]).

При пополнении A^n до C пополняются и конусы C_x, K_x, так что в C имеются в виду эти пополненные конусы. Каждая изотропная прямая пополняется «бесконечно удаленной» точкой и становится, таким образом, замкнутой.

Пространство C при исключении из него любого конуса C_x превращается в A^n. Отображение, которое в A^n является отражением в плоскости, оказывается в C инверсией. Выделение особых двойных инверсий теряет смысл, поскольку инверсии не имеют на C особенностей [3].

Поэтому естественно выделить на только три вида отображений:

1) гомотетии H^C;

2) преобразования Лоренца L^C без отражений;

3) инверсии I^C, т.е. такие (гомеоморфные) отображения C на себя, которые при исключении из C подходящего конуса превращаются в названные.

Теорема 3.7 [35]. *Отображение $f : D \to C$ области $D \subset C$, удовлетворяющее тем же условиям, что в теореме* 3.6а, *является либо $H^C L^C$, либо $H^C L^C$ с добавлением одной или двух инверсий I^C.* ■

Замечание 3.3. В теореме 3.7 имеются в виду отношения (I) - (III) (см., однако, [35, с.9]).

Пространство C гомеоморфно произведению сферы на окружность. Поэтому существует накрывающее его пространство $\widetilde{C}$, гомеоморфное проведению сферы на прямую. В нем естественно индуцируется геометрия, локально совпадающая с геометрией в C. Изотропные прямые в C уже не замкнуты, так что можно выделить ординарные конусы C_x^+, K_x^+, и Q_x^+. На $\widetilde{C}$ распространяются отображения H^C, L^C, I^C, и из теоремы 3.7 следует

[3]Выделение инверсий J_{ca} в A^n имело тот смысл, что они определены на полупространствах, тогда как инверсии I_a – на областях, на которые A^n разбивают их особые конусы.

Теорема 3.8 [35]. *Сказанное в теореме 3.7 применимо соответственно к пространству $\widetilde{C}$. При этом условие для ординарных конусов имеет смысл рассматривать не только локально, но и в целом.* ■

3.4. Простые системы аксиом

Теоремы из §§ 3.2, 3.3 означают, что одно сохранение любого из перечисленных шести отношений (I) – (III$^+$) вместе с его отрицанием без всяких дополнительных условий уже обеспечивает определенный характер возможных преобразований пространства-времени. При естественном требовании, что эти преобразования образуют группу, нет необходимости требовать сохранения вместе с данным отношением его отрицания, т.к. оно обеспечивается сохранением отношения при обратном преобразовании. Если допускать только неограниченно продолжаемые преобразования, то инверсии I_a и J_{ca} в плоском пространстве-времени Минковского $\mathcal{M}$ отпадают и остаются только преобразования Лоренца с гомотетиями. Но в случае пространств C и $\overline{C}$ любые локально допустимые преобразования неограниченно продолжаемы, и соответственно в этих пространствах действуют группы всех конформных преобразований.

Требование, чтобы преобразования образовывали группу, влечет те же результаты, что и требование их продолжаемости. Заметим, что это последнее не означает рассмотрения мира в целом, как продолжаемость натурального ряда не означает рассмотрения его как актуально бесконечного. Считая в соответствии с известным общим взглядом на геометрию, что геометрия пространства-времени определяется группой преобразований, мы заключаем из теорем из §§ 3.2, 3.3, что каждое из шести отношений (I) – (III$^+$) определяет в этом смысле геометрию пространства-времени.

Помимо пространства Минковского $\mathcal{M}$ имеем две модели C и $\widetilde{C}$ для пространства-времени, в которых геометрия определяется одним из отношений (I) – (III$^+$). Модели эти рассматривались И.Сигалом в [336] в связи с космологией.

В соответствии со сказанным выше введем следующие аксиомы.

> А к с и о м а $\mathrm{I}_{\mathcal{M}}$. 1) *На пространстве $\mathcal{M}$ задано отношение* (I)*, которое сохраняется множеством G биекций пространства $\mathcal{M}$, образующих группу;* 2) *G содержит все биекции, сохраняющие отношение* (I).

Аналогично формулируются аксиомы $\mathrm{II}_{\mathcal{M}}$ – $\mathrm{III}^+_{\mathcal{M}}$, I_{C} -$\mathrm{III}_{\mathrm{C}}$, $\mathrm{I}_{\widetilde{\mathrm{C}}}$ - $\mathrm{III}^+_{\widetilde{\mathrm{C}}}$.

Следовательно, геометрия мира Минковского аксиоматизируется с помощью любой из аксиом $\mathrm{I}_{\mathcal{M}}, ...\mathrm{III}^+_{\mathcal{M}}$, конформное пространство C – с помощью одной из аксиом $\mathrm{I}_{\mathrm{C}}, \mathrm{II}_{\mathrm{C}}, \mathrm{III}_{\mathrm{C}}$ и, наконец, пространство $\widetilde{C}$ определяется аксиоматиками с аксиомами $\mathrm{I}_{\widetilde{\mathrm{C}}}$,...,$\mathrm{III}^+_{\widetilde{\mathrm{C}}}$.

Аксиоматика Бергера [254]. Рассмотренные отношения (I) – (III) являются симметричными. Одно из них, отношение (II), было положено Бергером в основу аксиоматического построения геометрии Минковского. Предложенная им аксиоматика содержит целый ряд предположений, которые вынуждают автора говорить о том, что метрическая структура мира определяется как его причинной структурой, так и топологической. Последнее как раз не играет существенной роли в аксиоматике $\mathrm{II}_{\mathcal{M}}$. Поэтому аксиомы Бергера следует рассматривать как усложненный вариант аксиоматики $\mathrm{II}_{\mathcal{M}}$.

3.5. Теоремы о конечном числе источников света

В 1974 г. при обсуждении теоремы 3.5a на семинаре А.Д.Александрова по хроногеометрии в Новосибирском университете

А.П.Копыловым была высказана гипотеза, что в формулировке теоремы можно отказаться от необходимости накладывать условия на *все* конусы, параллельные конусу C^+ (см. § 3.2).

В дальнейшем им была доказана следующая

Теорема 3.9. *Пусть F – подмножество гиперплоскости $H_0 = \{x_n = 0\}$ таково, что для любой сферы S^{n-2}, $(n \geq 3)$, лежащей в H_0 и имеющей центр в точке $(0, ..., 0) \in A^n$, множество $\xi[F \setminus conv(S^{n-2})]$ (где ξ – центральная проекция $H_0 \setminus \{(0, ..., 0)\}$ из центра $(0, ..., 0)$ на сферу S^{n-2}) всюду плотно в S^{n-2}. Обозначим через D множество точек всех прямых, параллельных оси x_n, такое, что $D \cap H_0 = F$. Тогда каждое биективное отображение $f : A^n \to A^n$ $(n \geq 3)$ такое, что для каждой точки $x \in D$ $f(C^+_x) = C^+_{f(x)}$ является преобразованием Лоренца с точностью до подобия.* ■

(Доказательство не опубликовано.)

Эта теорема была обобщена А.В.Кузьминых, результаты которого излагаются в этом параграфе.

Теорема 3.10 [157]. *Существует множество $D_1 \subset A^n$ $(n \geq 3)$, являющееся объединением $((9n-7)/2)$ (если n нечетно) или $((9n-4)/2)$ (если n четно) прямых, параллельных оси x_n, такое, что каждое биективное отображение $f : A^n \to A^n$, удовлетворяющее условию: $f(C^+_x) = C^+_{f(x)}$ для любой точки $x \in D_1$, является преобразованием Лоренца с точностью до подобия.* ■

Теорема 3.11 [157]. *Пусть $T_0 \subset H_0$, где H_0 есть гиперплоскость $x_n = 0$, – множество, состоящее из n точек в общем положении, такое, что для некоторых трех его точек x, y, z отношение расстояний $|x-y|/|x-z|$ (здесь $|x-y|$ – евклидова метрика в A^n) иррационально. Через D_2 обозначим множество, являющееся объединением точек прямых, параллельных оси x_n, такое, что $D_2 \cap H_0 = T_0$. Каждое биективное отображение $f : A^n \to A^n$ $(n \geq 3)$, удовлетворяющее* *условию: $f(C_x) = C_{f(x)}$ для любой точки $x \in D_2$, является преобразованием Лоренца с точностью до подобия.* ■

Замечание 3.4. В работе [157] дается способ построения множества D_1.

Замечание 3.5. Число прямых в теореме 3.11 не может быть уменьшено: для каждых двух прямых l_1 и l_2 из A^3, параллельных оси x_n, существует разрывное отображение $\varphi : A^3 \to A^3$ такое, что для каждой точки $x \in l_1 \cup l_2$ $\varphi(C_x) = C_{\varphi(x)}$.

А.В.Кузьминых [157] давал следующую физическую интерпретацию теореме 3.10. Она «означает, что взаимно однозначное преобразование пространства-времени на себя, сохраняющее постоянство скорости света, испускаемого некоторыми шестнадцатью источниками, покоящимися в некоторой инерциальной системе отсчёта, есть преобразование Лоренца».

Если под $(\mathrm{I}^+_{\mathcal{M}}|D_1)$, $(\mathrm{I}_{\mathcal{M}}|D_2)$ понимать ограничение первого аргумента отношений (I^+), (I) на множествах D_1 и D_2 соответственно, то можно рассмотреть аксиоматики $\mathrm{I}^+_{\mathcal{M}}|D_1$, $\mathrm{I}_{\mathcal{M}}|D_2$, определяющие геометрию пространства-времени Минковского.

3.6. Отображение строго выпуклых конусов

Рассматриваем аффинное пространство A размерности, большей 2, хотя бы бесконечномерное, т.е., иными словами, топологическое линейное пространство с переносами и выпуклыми окрестностями.

Под конусом будем понимать множество, образуемое лучами – образующими конуса, исходящими из одной точки, – вершины конуса.

Образующую конуса назовем *крайней*, если во всяком содержащем ее сечении конуса двумерной плоскостью (2-

плоскостью) нет других образующих, в угле между которыми она лежала бы (имея в виду выпуклый угол).

Конус назовем *строго выпуклым*, если он обладает следующими свойствами:

а) Сечение конуса всякой 2-плоскостью, содержащей хотя бы одну образующую, представляет выпуклый угол, причем его стороны принадлежат ему, т.е. являются крайними образующими конуса. При этом все такие образующие – крайние.

б) Конус имеет как крайние, так и некрайние образующие.

Следующая теорема, как и все предыдущие, говорит об аффинности преобразования, сохраняющего семейство выпуклых конусов.

Теорема 3.12 [28]. *Пусть K – строго выпуклый конус в аффинном пространстве A. Пусть f – биективное отображение пространства A на аффинное пространство A' такое, что для любой точки $x \in A$ $f(K_x)$ есть конус $K_x{}'$, причем конусы $K_x{}'$ получаются друг из друга переносом. Тогда f переводит прямые пространства A в прямые пространства A'. Поэтому в случае конечномерного пространства это отображение аффинно.* ∎

Определение 3.1. Пусть $K_x{}^-$ – конус, симметричный конусу K_x относительно его вершины x. Говорим, что топология в A определена конусом K, если базис окрестностей образуется пересечениями $K_y \cap K_x{}^-$, где x лежит на некрайней образующей конуса K_y.

Конус можно назвать *строго выпуклым*, если он представляет собой замкнутое выпуклое множество с внутренними точками и всякая его опорная плоскость содержит не более одной образующей (предполагается, что конус не простирается на всё пространство). Легко видеть, что конус, строго выпуклый в этом смысле, обладает свойствами а), б). Обратное — что конус со свойствами а), б) будет строго выпуклым в смысле только что данного определения — само собой верно в конечномерном пространстве. При $dim A = \infty$ это может быть и не так.

Теорема 3.13 [28]. *Если в условиях теоремы* 3.12 *конус* K *— строго выпуклый в смысле только что данного определения 3.1, то отображение переводит прямые пространства* A *в прямые пространства* A' *и будет непрерывным, если топология в* A' *определена конусом* K'. *Если к тому же топология в* A *определена конусом* K, *то* f *будет гомеоморфным.* ■

Так как при отображении f прямые переходят в прямые, то конус K' будет обладать свойствами а), б).

Теорема 3.14 [28]. *Теорема* 3.12 *остается верной, если в ней конус* K *такой, что его выпуклая оболочка удовлетворяет условиям* а), б). ■

Под двойным конусом с вершиной x понимаем множество $K_x \cup K_x^-$. Конусы K_x, K_x^- – «половины» двойного конуса.

Теорема 3.15 [28]. *Пусть* K *– двойной конус с выпуклой половиной, удовлетворяющей условиям а), б) в пространстве* A. *Пусть* f *– инъективное отображение* A *в* A', *переводящее конусы* K_x *в двойные конусы* K'_x, *получаемые переносами из некоторого* K'. *Тогда* f *переводит прямые пространства* A *в прямые пространства* A' *и, следовательно, аффинно, если* A *конечномерно.* ■

Отображение f переводит половины конусов K_x в половины конусов $K'_{f(x)}$. Поэтому, в частности, непрерывность (гомеоморфность) отображения f обеспечивается так же, как в теореме 3.13.

Подчеркнем, что в теореме 3.15 отображение f не предполагается отображением на A'. Аналогично усиливается теорема 3.14.

Теорема 3.14a [28]. *Утверждение теоремы* 3.14 *верно, если f предполагается отображением в пространство A', но не обязательно на A'.* ■

Теорема 3.16 [28]. *В теореме* 3.15 *конус K можно считать границей двойного конуса со строго выпуклой половиной.* ■

Нетрудно заметить, что теоремы 3.12-3.16 обобщают теоремы 3.5, 3.5a.

3.7. Сколько инерциальных систем отсчёта?

Определение 3.1. *Инерциальная система отсчёта* – это такая система аффинных координат в A^n, в которой закон распространения света задается семейством равных и параллельных конусов.

Мы до сих пор рассматривали семейства равных и параллельных конусов. Иначе говоря, мы изучали физику пространства-времени в инерциальной системе отсчёта. При переходе к другой системе отсчёта имели также систему равных и параллельных конусов. Следовательно, инерциальных систем отсчёта должно быть более чем одна! В работе [6] в связи с этим формулировался следующий физический закон: всякое преобразование Лоренца возможно.

Однако это, на наш взгляд, сильная формулировка действительного физического закона. В ослабленном виде следует постулировать лишь возможность движения относительно инерциальной системы отсчёта, т.е. следует допустить, что существует преобразование, переводящее систему равных и параллельных эллиптических конусов в некоторую систему конусов, не обязательно равных, не обязательно параллельных. Одновременно это означает отказ от закона постоянства скорости света как аксиомы, при выводе преобразований Лоренца, поскольку его фундаментальное значение состоит в том, что он имеет место в любой инерциальной системе отсчёта.

Итак, не только отказ от принципа относительности (см. § 3.2), но и отказ от закона постоянства скорости света?

Утвердительный ответ на такой вопрос стал возможным после того, как в 1974 г. А.В.Шайденко показала, что от требования параллельности эллиптических конусов в образе можно отказаться и при этом по-прежнему получать преобразования Лоренца.

После того, как А.В.Шайденко сделала доклад с изложением своего результата на семинаре «Хроногеометрия» в Новосибирском университете, ее теорема была усилена. В этом параграфе мы излагаем результаты, полученные А.Д.Александровым, А.П.Копыловым, А.В.Кузьминых и А.В.Шайденко, существенно обобщающие теорему А.В.Шайденко.

Рассмотрим аффинное n-мерное пространство A^n $(n \geq 3)$. Пусть K – строго выпуклый конус. Крайние образующие этого конуса образуют «поверхностный» конус ∂K. Образующие, не являющиеся крайними, образуют «открытый» строго выпуклый конус $int(K) \cup \{e\}$, где e – вершина K. В обычной топологии пространства A^n конус K замкнут.

Поэтому далее пишем названия указанных конусов – замкнутый, открытый, поверхностный – без кавычек. Если конус состоит из прямых, то его образующими мы называем эти прямые, а сам конус – двойным.

Если K – замкнутый строго выпуклый конус и K^- – конус, симметричный K относительно вершины, то $K \cup K^-$ представляет собой двойной замкнутый конус; мы называем его *двойным строго выпуклым конусом.* Соответсветственно определяются *двойной поверхностный* $\partial K \cup \partial K^-$ и *двойной открытый* $int(K) \cup (int(K))^- \cup \{e\}$ конусы. В противовес двойному конусу, конус, образующие которого – лучи, называем *ординарным.*

Итак, рассматриваем шесть типов строго выпуклых конусов, три ординарных:

(I_0) замкнутый K,

(II_0) поверхностный ∂K,
(III_0) открытый $int(K) \cup \{e\}$ (где e – вершина K)
и соответственно три двойных:
(IV) замкнутый $K \cup K^-$,
(V) поверхностный $\partial K \cup \partial K^-$,
(VI) открытый $int(K) \cup (int(K))^- \cup \{e\}$.

Теорема 3.17 [36]. *Пусть Q – строго выпуклый конус одного из шести указанных типов. Пусть $f : A^n \to A^n$ $(n \geq 3)$ – биекция такая, что для всякой точки $x \in A^n$ множество $f(Q_x)$ есть строго выпуклый конус, гомеоморфный Q. Тогда f аффинно.* ■

Оказывается, что в теореме можно отказаться от требования гомеоморфности $f(Q_x)$ и Q. А именно имеет место

Теорема 3.18 [214]. *Пусть $Q \subset A^n$ $(n \geq 3)$ – строго выпуклый конус одного из типов* $(\mathrm{I}_0) - (\mathrm{VI})$ *и $f : A^n \to A^n$ – биекция такая, что для каждой точки $x \in A^n$ $f(Q_x)$ – строго выпуклый конус, причем, когда Q – двойной поверхностный, предполагается дополнительно, что $f(x)$ – вершина конуса $f(Q_x)$. Тогда f аффинно.* ■

Естественно возникает вопрос: «Что можно сказать об отображении f, если не предполагать, что $f(Q_x)$ является конусом?». Если допустить, что множества $f(Q_x)$ получаются друг из друга переносами, то справедлива следующая

Теорема 3.19 [214]. *Пусть $Q \subset A^n$ $(n \geq 3)$ – двойной телесный замкнутый строго выпуклый конус, т.е. конус типа* (IV). *Пусть $M \subset A^n$ – множество, удовлетворяющее условиям:*
а) $M = \overline{int(M)}$;
б) *M связно, и существует точка $e \in M$ такая, что $M \setminus \{e\}$ распадается на две компоненты связности, причем e такая, что $M \setminus \{e\}$ несвязно, единственна;*
в) *существует такой двойной телесный замкнутый строго выпуклый Q', что $M \subset Q'$.*

Тогда биекция $f : A^n \to A^n$ такая, что для каждой точки x множество $f(Q_x)$ получается из M переносом, является аффинной. ■

Наконец, дополнительно к заданному выше вопросу можно задать вопрос о существенности требования, заключающегося в том, что образы *всех* конусов, получаемых переносами из конуса K, получаются переносами из множества $f(K)$ (см. § 3.5). Ответ на эти два вопроса дает следующая

Теорема 3.20 [158]. *Существует множество $D \subset A^n$ ($n \geq 3$), обладающее свойствами:*

1) *для каждой пары H_1, H_2 гиперплоскостей, параллельных гиперплоскости $x_n = 0$, множество $D \cap conv(H_1 \cup H_2)$ конечно;*

2) *для каждого двойного замкнутого строго выпуклого конуса $Q \subset A^n$ каждое биективное отображение $f : A^n \to A^n$ такое, что для любой точки $x \in D$ множество $f(Q_x)$ есть объединение двух замкнутых выпуклых пересекающихся множеств[4], является аффинным.* ■

Замечание 3.6. Для ординарных конусов не существует аналога теоремы 3.20 (см. [158]).

Замечание 3.7. Множество D строится следующим образом. Обозначим через B_k ($k = 1, 2, ...$) множество $\{(x_1, ..., x_n) : x_1 = l_1/m_1, ..., x_n = l_n/m_n,$ где $l_1, ..., l_n, m_1, ..., m_n$ – –целые числа; $|m_1| \leq k, ..., |m_n| \leq k$; $m_i \neq 0$ ($i = 1, ..., n$); $|x_n| \geq k\}$. Через B' обозначим множество $\{(x_1, ..., x_n) : x_1^2 + ... + x_{n-1}^2 < x_n^4\}$. Тогда

$$D = B' \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \right).$$

[4]Здесь не предполагается, что $f(Q_x)$ и $f(Q_y)$ ($x \neq y$) параллельны.

3.8. Аксиоматика теории относительности

Пусть $D \subset \mathcal{M}$ – множество из теоремы 3.20.

А к с и о м а H_1. *На пространстве* $D \times \mathcal{M}$ *задано отношение* $\mathrm{II}[D]$ *такое, что* $(x, y) \in \mathrm{II}[D]$ *тогда и только тогда, когда* $(x - y)^2 \geq 0$.

А к с и о м а H_2. 1) *Существует группа биекций* G *пространства* $\mathcal{M}$ *на себя такая, что если* $f \in G$ *и* $K_x = \{y \in \mathcal{M} : (x, y) \in \mathrm{II}[D]\}$, *где* $x \in D$, *то* $f(K_x)$ *есть объединение двух замкнутых выпуклых пересекающихся множеств;* 2) G *содержит все такие биекции.*

Теорема 3.21. *Система аксиом* $\langle H_1, H_2 \rangle$ *определяет геометрию мира Минковского, причем* G *совпадает с группой Лоренца (исключая подобие).* ■

Данная теорема – всего лишь переформулировка теоремы 3.20 для случая конусов K_x, заданных отношением (II) из § 3.2.

На наш взгляд, аксиоматика $\langle H_1, H_2 \rangle$ – самое значительное достижение[5] в решении задачи построения аксиоматической теории относительности. В ней объединяется идея отказа от закона постоянства скорости света с идеей постулирования принципа доступности наблюдениям для каждого конечного отрезка времени лишь конечного числа кратковременно действующих (точечных) источнико-приемников света.

Аксиоматика $\langle H_1, H_2 \rangle$ сложилась в результате работы четырех новосибирских математиков: А.Д.Александрова, А.П.Копылова, А.В.Кузьминых и А.В.Шайденко.

[5]Это заявление было сделано в 1982 году. Думается, что оно справедливо и в 2008 году.

3.9. Аксиоматика Ю.Ф. Борисова

Изложим систему аксиом, которая направлена на определение группы движений пространства-времени, но не касается выяснения структуры самого многообразия событий [57].

Пусть $\mathcal{M}$ – множество элементов, интерпретируемых как «события». В $\mathcal{M}$ выделено семейство D подмножеств, называемых инерциальными движениями. Кроме того, задано семейство K биекций $\mathcal{M}$ на $\mathbb{R}^4$, называемых инерциальными системами отсчёта.

Предполагаем, что выполняются следующие условия:

1) Если $S \in K$ и множество I таково, что $S(I) \subset \mathbb{R}^4$ задается системой уравнений $x_i = a_i$ $(i = 1, 2, 3)$, где $a_i = const$, то $I \in D$ (т.е. покоящееся относительно S тело находится в инерциальном движении).

2) Если $I \in D$ и $S \in K$, то $S(I) \subseteq \mathbb{R}^4$ задается системой уравнений $x_i = a_i + v \cdot x_4$ $(i = 1, 2, 3)$, где $a_i,\ v = const$.

Говорим, что S' покоится относительно S, если всякое множество I, задаваемое в S' уравнениями вида $x_i = a_i$ $(i = 1, 2, 3)$, $a_i = const$, задается в S уравнениями того же вида. Если неверно, что S' покоится относительно S $(S, S' \in K)$ будем говорить, что S' движется относительно S.

Линейное преобразование $\mathbb{R}^4$ с матрицей $||a_{i,j}||_{i,j=1}^4$ назовем тривиальным, если матрица третьего порядка $||a_{\alpha\beta}||_{\alpha,\beta=1}^3$ ортогональна и $a_{41} = a_{42} = a_{43} = 0$, $a_{44} = 1$, $a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0$.

Рассмотрим следующую систему аксиом.

А к с и о м а Б$_1$. *Существуют такие $S, S' \in K$, что S' движется относительно S.*

А к с и о м а Б$_2$. *а) Если $S \in K$, φ – тривиальное преобразование, то существует $S' \in K$ такое, что $S \circ S'^{-1} = \varphi$.*

б) Если $S, S' \in K$ и S' покоится относительно S, то $S \circ S'^{-1}$ – тривиальное преобразование.

А к с и о м а Б$_3$. *Если $I \in D, S \in K$, φ – тривиальное преобразование, то существует такое $\widetilde{I} \in D$, что $S(\widetilde{I}) = \varphi(S(I))$.*

А к с и о м а Б$_4$. *Если $S_1, S_1', S_2 \in K$, то существует такое $S_2' \in K$, что $S_2 \circ S_2'^{-2} = S_1 \circ S_1'^{-1}$.*

Теорема 3.22 (Ю.Ф.Борисов, [57]). *Если для множества $\mathcal{M}$ выполнена система аксиом $\langle Б_1 - Б_4 \rangle$, то имеются две исключающие друг друга возможности:*

1) *$G = \{S \circ S'^{-1} : S' \in K\}$, где $S \in K$ – произвольный элемент, есть группа Галилея.*

2) *Группа G имеет вещественный параметр $c > 0$ и совпадает с неоднородной группой Лоренца.* ■

3.10. Размерность Мира событий по Борисову

Как мы писали в § 1.9, одна из самых трудных проблем хроногеометриии – это аксиоматическое задание размерности Мира Минковского.

В 1960 году Ю.Ф.Борисов предложил весьма оригинальное решение этой проблемы.

Будем исходить из того, что уже выявлена аффинная структура Мира событий и предполагается, что Мир событий обладает псевдоевклидовой структурой ${}^kE^n$. Это означает, что Мир событий имеет размерность n, пространство – $(n-k)$, а время – k.

Нужно установить, что $n = 4$ и $k = 1$. Это и сделал Ю.Ф.Борисов в статье [56] с помощью трех аксиом. Иначе говоря, среди всех возможных псевдоевклидовых структур, которыми мог бы обладать Мир событий, аксиомы Ю.Б.Борисова однозначно выделяют пространство-время Минковского ${}^1E^4$.

Итак, пусть ${}^kE^n$ – n-мерное пространство, в котором квадрат длины вектора с координатами $u_1, ...u_n$ равен

$$u_1^2 + ... + u_{n-k}^2 - u_{n-k+1}^2 - ... - u_n^2.$$

Будем считать, что $n > 2, 1 \leq k \leq n - k$.

Вектор с координатами $u_1, ...u_n$ называется *изотропным*, если

$$u_1^2 + ... + u_{n-k}^2 - u_{n-k+1}^2 - ... - u_n^2 = 0,$$

и *пространственным*, если

$$u_1^2 + ... + u_{n-k}^2 - u_{n-k+1}^2 - ... - u_n^2 > 0.$$

Если $A(a_1, ..., a_n)$, $B(b_1, ..., b_n)$ – точки с координатами $(a_1, ..., a_n)$, $(b_1, ..., b_n)$, то $\overrightarrow{AB}$ обозначает вектор с координатами $(b_1 - a_1, ..., b_n - a_n)$.

Биективное преобразование $f : {}^kE^n \to {}^kE^n$ сохраняет изотропность векторов, если изотропность вектора $\overrightarrow{AB}$ влечет изотропность вектора $\overrightarrow{f(A)f(B)}$, и наоборот.

Пусть G совокупность всех биективных преобразований ${}^kE^n$, сохраняющих изотропность векторов.

> А к с и о м а БМ$_1$. *Если вектор $\overrightarrow{AB}$ – пространственный и $f \in G$, то $\overrightarrow{f(A)f(B)}$ тоже пространственный.*

Аксиома говорит о том, что то, что считается пространством, должно оставаться таковым в любой инерциальной системе отсчёта.

> А к с и о м а БМ$_2$. *Для любого $k' \neq k$ пространство ${}^{k'}E^n$ не удовлетворяет аксиоме БМ$_1$.*

Аксиома говорит о том, что если время имеет размерность k, то для других размерностей времени пространственность не является инвариантом относительно любых инерциальных систем отсчёта.

А к с и о м а БМ$_3$. *При* $n' > n$ *аксиомы БМ$_1$ и БМ$_2$ несовместны.*

То есть совместимость аксиом БМ$_1$ и БМ$_2$, будучи достгнутой для размерности Мира событий равной n, нарушится для всех больших размерностей.

Теорема 3.23 (Ю.Ф.Борисов, [56]). *Аксиомы БМ$_1$, БМ$_2$ и БМ$_3$ выполняются в том и только в том случае, когда* $n = 4, k = 1$. *При этом G есть группа Лоренца (изменение знака x_4 не исключается), дополненная подобиями с произвольным коэффициентом.* ■

3.11. Аксиоматика В.К. Ионина

Аксиоматика специальной теории относительности, излагаемая в данном параграфе, поражает своим изяществом. Это достигается за счёт того, что В.К.Иониным была предложена крайне простая аксиоматизация аффинных пространств. Первичным в аксиоматике Ионина является понятие временнóго порядка, а точнее постулирование существования в Мире событий (мировых) часов.

Пусть α континуальное множество. Говорим, что оно оснащено *часами*, если задано множество $w(\alpha) = \{f : \alpha \to \mathbb{R}\}$, удовлетворяющее условиям:

а) множество $w_0(\alpha)$, состоящее из постоянных отображений, входит в $w(\alpha)$;

б) множество $w_1(\alpha) = w(\alpha) \setminus w_0(\alpha)$ состоит из биективных отображений;

в) для того чтобы отображение $f : \alpha \to \mathbb{R}$ входило в $w(\alpha)$, необходимо, чтобы для любого $g \in w_1(\alpha)$ суперпозиция $f \circ g^{-1}$ являлась неубывающим аффинным отображением $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, т.е. таким отображением, которое переводит произвольное число t в s по формуле $s = at + b$, где a, b – произвольные постоянные действительные числа, удовлетворяющие условию $a \geq 0$.

Функцию, входящую в $w(\alpha), w_0(\alpha), w_1(\alpha)$, будем называть соответственно *часами*, *стоящими часами* и *идущими часами* множества α.

Пусть $\mathcal{M}$ – множество, а H – множество некоторых его подмножеств, каждое из которых оснащено часами. Будем $\mathcal{M}$ называть *Миром событий*, его элементы – *событиями*, а элементы множества H – *направленными прямыми*.

Каждую функцию $\phi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, сужение которой на любую направленную прямую является её часами, назовем *мировыми часами*. Множество всех мировых часов обозначим через Φ. Ясно, что всякая постоянная функция входит в Φ. Назовем такие функции *стоящими мировыми часами*, а остальные функции из Φ – *идущими мировыми часами*. Множества стоящих и идущих мировых часов обозначим соответственно Φ_0 и Φ_1.

Направленную прямую l назовем *времениподобной прямой*, если для любой функции $\phi \in \Phi_1$ ее сужение на l принадлежит $w_1(l)$. Направленную прямую l назовем *изотропной прямой*, если для любой функции $\phi \in \Phi_1$ её сужение на l принадлежит $w_0(l)$. Множества времениподобных прямых и изотропных прямых обозначим соответственно $\mathcal{T}$ и $\mathcal{I}$. Очевидно, что $\mathcal{T} \cup \mathcal{I} = H$ и $\mathcal{T} \cap \mathcal{I} = \emptyset$.

Множество $l \subset \mathcal{M}$ назовем *пространственноподобной прямой*, если на нём можно задать структуру одномерного аффинного пространства так, что совокупность всех мировых часов на l совпадает с множеством всех аффинных отображений l в $\mathbb{R}$. Множество всех пространственноподобных прямых обозначаем $\mathcal{S}$.

Отрезком прямой $l \in H \cup \mathcal{S}$ называется объединение двух произвольных событий (концов отрезка) $x, y \in l$ со всеми событиями, лежащими на l между x и y. Не исключаются вырожденные отрезки, т.е. отрезки с совпадающими концами. Рассмотрим конечную последовательность событий $x_1, x_2, ..., x_{m+1}$, у которых для каждого числа $i = 1, 2, ..., m$ через x_i и x_{i+1} проходит некоторая прямая $l_i \in H \cup \mathcal{S}$. Обозначим через O_i отрезок прямой l_i с концами x_i и x_{i+1}. Объединение всех O_i называется *ломаной*, соединяющей события x_1 и x_{m+1}.

Рассмотрим произвольное множество $E_0 \subset \mathcal{M}$. Через каждую пару различных событий множества E_0 проведем все прямые из $H \cup \mathcal{S}$ и обозначим через E_1 объединение этих прямых. Далее, через каждую пару различных событий множества E_1 проведем все прямые из $H \cup \mathcal{S}$ и обозначим через E_2 их объединение. Продолжив этот процесс, получим бесконечную последовательность множеств $E_0, E_1, ..., E_k, ...$

Мир событий $\mathcal{M}$ называется *бесконечномерным* ($\dim \mathcal{M} = \infty$), если для любого конечного множества E_0 выпоняется неравенство $\mathcal{M} \neq \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} E_k$. В противном случае $\mathcal{M}$ называется *конечномерным пространством размерности*

$$\dim \mathcal{M} = \min |E_0| - 1,$$

где $|E_0|$ – число событий в конечном множестве E_0, удовлетворяющем равенству $\mathcal{M} = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} E_k$.

Для каждого события x определим *световой конус будущего* C_x следующим образом. Событие y принадлежит C_x тогда и только тогда, когда:

1) через события x и y проходит изотропная прямая;
2) для любых мировых часов ϕ выполняется неравенство

$$\phi(x) \leq \phi(y).$$

Обозначим через G группу всех биективных преобразований Мира событий, сохраняющих семейство конусов $\{C_x : x \in \mathcal{M}\}$. Это означает, что если $g \in G$, то

$$g(C_x) = C_{g(x)}$$

для любого события $x \in \mathcal{M}$.

Рассмотрим следующую систему аксиом.

А к с и о м а И$_1$. *Если два различных события x и y таковы, что для любых мировых часов ϕ выполняется неравенство*

$$\phi(x) \leq \phi(y),$$

то через события x и y проходит направленная прямая.

А к с и о м а $И_2$. *Для любых двух различных событий x и y найдутся разделяющие их мировые часы, т.е. такая функция $\phi \in \Phi$, для которой выполняется неравенство*

$$\phi(x) \neq \phi(y).$$

А к с и о м а $И_3$. *Любые два различных события x и y можно соединить ломаной.*

А к с и о м а $И_4$. *Мир событий является конечномерным пространством размерности строго большей двух.*

А к с и о м а $И_5$. *Если $x, y, x', y' \in \mathcal{M}$ и $x \neq y$, $x' \neq y'$, $y \in C_x$, $y' \in C_{x'}$, то найдется такое $g \in G$, что*

$$g(x) = x', \quad g(y) = y'.$$

Теорема 3.24 (В.К.Ионин, [132]). *Пусть выполняется система аксиом $\langle И_1 - И_5 \rangle$. Тогда либо Мир событий $\mathcal{M}$ пуст, либо*

1) *на нем можно задать структуру аффинного пространства так, что размерность Мира событий совпадает с размерностью аффинного пространства и множество прямых $H \cup \mathcal{S}$ совпадает с множеством прямых аффинного пространства $\mathcal{M}$;*

2) *семейство световых конусов будущего $\{C_x : x \in \mathcal{M}\}$ – это семейство равных и параллельных поверхностных эллиптических конусов, а группа G является группой общих преобразований Лоренца.* ■

Глава 4

СВЯЗНЫЕ РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ПОРЯДКИ В A^n

В этой главе изучим связные релятивистские порядки в аффинном пространстве A^n, $n \geq 2$.

Определение 4.1. Порядок $\mathcal{P} = \{P_x : x \in A^n\}$ называется *связным*, если $x \in \overline{P_x \setminus \{x\}}$ для любой $x \in A^n$.

С точки зрения теории относительности, связность порядка означает передачу энергии-импульса через непрерывный ряд промежуточных агентов от события x к событию y, связанных причинно-следственным отношением $x \preceq y$.

4.1. Отображение семейства параллельных конусов

Под конусом в аффинном пространстве A^n $(n \geq 2)$ понимается множество точек C, состоящее из лучей с началом в точке e, которую называем вершиной конуса.

Предполагаем в этом параграфе, что C удовлетворяет следующим условиям:

1) C не содержится в плоскости;

2) C имеет острую вершину, т.е. не содержит никакой прямой.

Будем рассматривать инъективные непрерывные отображения $f : A^n \to A^m$, удовлетворяющее условиям:

а) для каждой $x \in A^n$ множество $f(C_x)$ получено из $f(C)$ с помощью переноса $t : e' \to f(x)$, где $e' = f(e)$;

б) замыкание конуса, который проектирует $f(C)$ из точки e', имеет острую вершину.

Теорема 4.1 [26, 29]. *Отображение f аффинно, исключая случай, когда C есть квазицилиндр вида*

$$C = Z \cup (C \cap E), \tag{4.1}$$

где Z образовано открытыми лучами, параллельными некоторому лучу L, а начала этих лучей лежат на плоскости E. ■

Конус C может допускать различные представления вида (4.1) с различными парами L, E, но число таких пар не превышает $n = \dim A^n$.

Теорема 4.2 [26, 29]. *Если конус C допускает k представлений* (4.1) *с парами $(L_1, E_1), ..., (L_k, E_k)$, то*

$$f = f_0 \circ d_1 \circ ... \circ d_k, \tag{4.2}$$

где f_0 – аффинное отображение A^n в A^m, и каждое d_i есть смещение $d_{E_i L_i}$ (см. § 0.2.1). Порядок, в котором стоят d_i, несущественен. Обратно, каждое отображение вида (4.2) *удовлетворяет условиям* а), б) *для изучаеых нами отображений. Причем $f(C) = (f_0 \circ t)(C)$, где t – перенос. Поэтому $f(C)$ – всегда аффинный образ конуса C.* ■

Замечание 4.1. Образ $f(A^n)$ есть область в некотором подпространстве $A'^n \subset A^m$. В случае теоремы 4.1 имеем $f(A^n) = A'^n$, но в случае теоремы 4.2 может случиться $f(A^n) \neq A'^n$, т.к. любое из d_i в (4.2) может не отобразить A^n на себя, а на открытое полупространство, ограниченное плоскостью, параллельной E_i. Вид $f(A^n)$ определяется формулой (4.2).

Замечание 4.2. В [26] теоремы 4.1, 4.2 сформулированы без требования непрерывности отображении F. Однако в доказательстве имеется ошибка (см. [29, с.5]). Доказательство теорем 4.1 и 4.2 дано в [29] (теорема 6).

Теорема 4.3 [19]. *Пусть $\overline{conv(C)} \neq L \times K$, где K – $(n-1)$-мерный конус. Если биекция $f : A^n \to A^n$ $(n \geq 3)$ такова, что $f(C_x) = C_{f(x)}$, то f аффинно.* ■

4.2. Отображения связно упорядоченных пространств

Рассматриваем аффинное пространство A^n, в котором задан предпорядок $\mathcal{P}$, инвариантный относительно всех параллельных переносов.

Под отображением f в этом параграфе будем понимать такое взаимно однозначное отображение A^n в аффинное пространство A^m, что каждое множество $f(P_x)$ может быть получено из $f(P)$ переносом. Полагая $P' = f(P)$, можно выразить это условие равенством $f(P_x) = P'_{x'}$. Тем самым в $f(A^n)$ индуцируется предпорядок $\mathcal{P}'$, который однозначно продолжается на все A^m в виде предпорядка, инвариантного относительно переносов (см. [29], лемма 1 из § 3).

На предпорядок $\mathcal{P}$ налагаем следующие условия:

А) Существует окрестность точки e, в которой $\overline{P}_e$ и $\overline{P_e^-}$ не имеют общих точек, помимо e;

Б) $\overline{P}_e$ содержит конус с вершиной e, имеющий внутренние точки.

Очевидно, рассматриваемый порядок являтся связным.
Справедлива

Теорема 4.4 [29]. *Пусть предпорядок $\mathcal{P}$, заданный в A^n, удовлетворяет условиям* А) *и* Б). *Пусть отображение $f : A^n \to A^m$ $(n \geq 2)$ непрерывно. Тогда, если P не является квазицилиндром, то f аффинно. Если же P – квазицилиндр и представим k способами $Q(E_1, l_1), ..., Q(E_k, l_k)$, то*

$$f = f_0 \circ d_1 \circ ... \circ d_k,$$

где f_0 – аффинное преобразование A^n в A^m, а d_i суть смещения $d_{E_i l_i}$ (допуская, что, возможно, прямая l_i есть луч L_i), которые коммутируют. ■

Замечание 4.3. Требование непрерывности в этой теореме является лишним для широкого класса предпорядков. Например, если предпорядок $\mathcal{P}$ удовлетворяет аксиоме A_2 и является замкнутым или открытым. Это следует из теоремы 2.1 о непрерывности.

Предложение 4.1. *Если $\mathcal{P}$ связный предпорядок в A^n и $cont(P, e)$ имеет острую вершину, то существует строго выпуклый замкнутый конус K с вершиной e и окрестность U точки e такие, что:* 1) $\overline{P} \cap U \subset K$; 2) $cont(P, e) \setminus \{e\} \subset int\, K$.

Доказательство. См. [95, 107]. ■

4.3. Сильно связные и квазисвязные предпорядки

Если под связным предпорядком понимать такой предпорядок $\mathcal{P}$, для которого множество P_e является только связным, то трудно ожидать сколь угодно удовлетворительного их описания. Они могут быть довольно различными, и соответствующие примеры легко построить.

В аксиоматической теории относительности главную роль играют порядки, задаваемые выпуклыми конусами. Поэтому вполне естественно поставить цель определить условия, характеризующие предпорядок, задаваемый выпуклым конусом, на основе того или иного интуитивного представления о «связности» предпорядка. Эта задача была поставлена А.Д.Александровым, и ее решение содержится в работах А.В.Левичева [167, 168, 169, 170].

Определение 4.2. Назовем предпорядок $\mathcal{P}$ *сильно связным* (соответственно *квазисвязным*), если при любых x, y таких, что $x \preceq y$ (т.е. при $y \in P_x$), точки x, y принадлежат некоторому содержащемуся в $P_x \cap P_y^-$ (соответственно $\overline{P_x} \cap \overline{P_y^-}$) связному множеству M.

Очевидно, сильно связный предпорядок всегда является квазисвязным.

Легко проверяется, что предпорядок сильно связный тогда и только тогда, когда множества $P_x \cap P_y^-$ связны при всех x, y таких, что $x \preceq y$.

Простейший пример квазисвязного порядка, не являющегося сильно связным, – это множество P, состоящее из всех неотрицательных рациональных чисел действительной оси.

Если P_e – выпуклый конус, то P_e задает в A^n сильно связный предпорядок. Очевидно также, что если $\overline{P_e}$ – выпуклый конус, а P_e задает предпорядок, то этот предпорядок – квазисвязный.

Теорема 4.5 [167, 168]. *Если множество P_e задает квазисвязный предпорядок, то $\overline{P_e}$ есть выпуклый конус.* ■

Следствие 4.4. *Замкнутый квазисвязный (в частности, сильно связный) предпорядок задается выпуклым конусом.* ■

Теорема 4.6. *Если предпорядок – квазисвязный, $e \in \overline{int(P_e)}$, то P_e содержит внутренность своей выпуклой оболочки.* ■

Следствие 4.6. *Открытый квазисвязный (в частности, сильно связный) предпорядок задается конусом.* ■

Прежде чем продемонстрировать интересные примеры предпорядков, дополняющие теоремы 4.5 и 4.6, введем еще одно понятие.

Определение 4.3. Предпорядок будем называть *линейно связным*, если при всех x, y таких, что $x \preceq y$, точки x, y принадлежат некоторому, содержащемуся в $P_x \cap P_y^-$, линейно упорядоченному связному множеству M (т.е. при $x, y \in M$, или $x \preceq y$, или $y \preceq x$).

Очевидно, что линейно связный предпорядок является всегда сильно связным.

Линейно связные порядки и предпорядки могут определяться не конусом. В самом деле [167], существует функция $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что при любых $a, b \in \mathbb{R}$ $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ график Γ_φ функции φ на плоскости $\mathbb{R}^2$ связен, а φ не является непрерывной.

Положим $P_e = \Gamma_\phi$ и $Q_e = \{(x, \phi(x)) : x \geq 0\}$. Тогда P_e определяет линейно связный предпорядок в $\mathbb{R}^2$, причем $P_e \cap P_x^- = P_e$ для всех $x \in P_e$, а Q_e определяет линейно связный порядок в $\mathbb{R}^2$. Но ни P_e, ни Q_e не есть конус.

При этом справедлива

Теорема 4.7 [170]. *Если предпорядок $\mathcal{P}$ линейно связный и существует такая окрестность U точки e, что семейство множеств $\{P_e \cap P_x^- : x \in P_e \cap U\}$ ограничено в совокупности, то P_e есть конус.* ■

Теорема 4.8 [170]. *Если для замкнутого предпорядка $\mathcal{P}$ выполнена аксиома A_2 и $P_e \cap P_x^- \neq \{e, x\}$, то P_e есть конус.* ■

Определение 4.4. Предпорядок, задаваемый множеством P_e, назовем *локально компактно связным*, если для любой точки $x \in P_e$ и любого $\varepsilon > 0$ множество $P_e \cap P_x^-$ содержит такой связный компакт $K = \cup_{i=1}^m K_i$, что все K_i – связные компакты, диаметры которых не превосходят ε, а $e, x \in K$.

Теорема 4.9 [170]. *Если $\mathcal{P}$ задает локально компактно связный предпорядок, то P_e есть выпуклый конус.* ■

Определение 4.5. Предпорядок $\mathcal{P}$ называется *компактно связным*, если для любого $x \in P_e$ множество $P_e \cap P_x^-$ содержит связный компакт, соединяющий точки e, x.

Очевидно, локально компактно связный предпорядок является компактно связным.

Теорема 4.10 [170]. *Пусть $\mathcal{P}$ – компактно связный предпорядок в A^n. Если выполняется одно из следующих трех условий:*

1) $conv(P_e) = A^n$;

2) $conv(P_e)$ не содержит прямой;

3) $\dim conv(P_e) \leq 2$,

то P_e – выпуклый конус. ■

Глава 5

НЕСВЯЗНЫЕ РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ПОРЯДКИ В A^n

В этой главе изучим несвязные релятивистские порядки в аффинном пространстве A^n, $n \geq 2$.

Определение 5.1. Порядок $\mathcal{P} = \{P_x : x \in A^n\}$ называется *несвязным*, если $x \notin \overline{P_x \setminus \{x\}}$ для любой $x \in A^n$.

Полагаем, что

$$P_x = Q_x \cup \{x\},$$

$$x \notin Q_x.$$

С точки зрения теории относительности несвязность порядка означает, что если два события x, y связаны причинно-следственным отношением $x \preceq y$, то не предполагается, что в некоторой малой пространственно-временной окрестности событий x есть события, которые каким-то образов связаны с x или с y. Иначе говоря, мы не предполагаем какого-либо причинно-следственного взаимодействия для событий микромира.

Простейшим примером несвязного порядка в A^3 служит семейство

$$\mathcal{P} = \{P_x = Q_x \cup \{x\} : x \in A^3\},$$

где

$$Q_x = \{y \in A^3 : y_3 - x_3 \geq \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + 1}\}$$

(см. ри.5.1, b)).

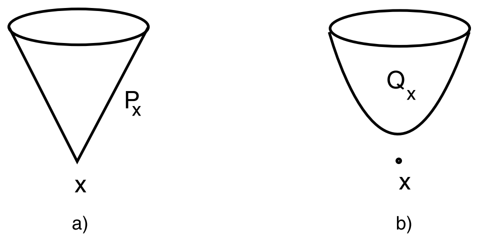


Рис. 5.1: a) связный конический порядок; b) несвязный порядок.

5.1. Порядковые автоморфизмы несвязно упорядоченного аффинного пространства

Рассматривается несвязный релятивистский порядок $\mathcal{P}$ в n-мерном аффинном пространстве A^n ($n \geq 2$).

Далее, $P^- \equiv \{x \in A^n : x \preceq e\}$.

Задача, которой посвящен этот параграф, состоит в изучении $\mathcal{P}$-автоморфизмов.

Будем в этом параграфе предполагать, что несвязный порядок $\mathcal{P}$, изучаемый нами, удовлетворяет следующим условиям:

А) $P = \{e\} \cup Q$, где Q – замкнутое связное множество с внутренними точками, не содержащее точку e.

Б) P лежит внутри некоторого выпуклого конуса с острой вершиной e («острая вершина» – означает, что конус не содержит никакой прямой).

В) Существуют n лучей $L_1, L_2, \ldots, L_n$, не лежащие в одной гиперплоскости и исходящие из точки e, такие, что для любой $x \in Q$

$$t\Big(\bigcup_{i=1}^{n} L_i\Big) \subset Q,$$

где t — сдвиг, обладающий свойством: $t(e) = x$.

Основным полученным нами результатом является

Теорема А. *Пусть порядок $\mathcal{P}$ удовлетворяет условиям* А), Б) *и* В)[1]. *Тогда любой $\mathcal{P}$-автоморфизм аффинного пространства $A^n (n \geq 2)$ является аффинным преобразованием, за исключением особого случая, когда порядок задан квазицилиндром. Однако и в этом случае дается полное описание отображения – оно является смещением.* ■

Если ограничиваться только непрерывными отображениями, то требование замкнутости и связности Q необязательно.

Всюду в статье $\mathcal{P}$-автоморфизмы предполагаются гомеоморфизмами A^n на себя, поскольку имеется теорема 2.1 о непрерывности, принадлежащая А.Д.Александрову, и которую можно переформулировать в следующем виде:

Теорема Б. *Если порядок удовлетворяет условиям* А) *и* Б), *то всякий $\mathcal{P}$-автоморфизм A^n на себя является гомеоморфизмом.* ■

Так как нас интересуют лишь гомеоморфизмы, то можно считать, что $Q = \overline{int(Q)}$, ибо это не отразится на теореме А. Очевидно, если P – порядок, то и $P' = \{e\} \cup \overline{int(Q)}$ – порядок.

[1] Условие В) является лишним, но доказать это не удалось. Физический смысл данного условия разъясняется в § 5.1.2.

5.1.1. Внешний конус

Определение 5.2. *Внешний конус* с вершиной e – это множество

$$C = ext(P) \equiv \overline{\bigcup_{x \in int(Q)} l^+(e,x)},$$

где Q — связная часть порядка P.

Множество C, как легко видеть, действительно есть конус. Его вершиной является точка e.

Предложение 5.1. *Если x_0 — внутренняя точка множества Q, то существует луч $l^+(v,y) \subset l^+(e,x_0)$, целиком лежащий в $int(Q)$. Более того, для некоторого $\varepsilon > 0$ конус*

$$\bigcup_{w \in \overline{B(y,\varepsilon)}} l^+(v,w)$$

лежит целиком в $int(Q)$ $(0 < \varepsilon < |v-y|)$.

Доказательство.

Это следует из условия A) и из того, что P есть порядок, ибо если $x_0 \in int(Q)$, то найдется $\delta > 0$ такое, что $B(x_0,\delta) \subset int(Q)$. Однако поскольку $P_x \subset P$, $x \in B(x_0,\delta)$, то, обозначив через t сдвиг, переводящий e в x_0, получим $B(t(x_0),2\delta) \subset int(Q)$. Так как $P_{t(x)} \subset P$ для $x \in B(x_0,\delta)$, то отсюда следует, что $B(t(t(x_0)),3\delta) \subset int(Q)$ и т. д. Найдется натуральное число m такое, что

$$B(\underbrace{t(\ldots t}_{m-\text{раз}}(x_0)\ldots),(m+1)\delta) \cap B(\underbrace{t(\ldots t}_{(m-1)-\text{раз}}(x_0)\ldots),m\delta) \neq \emptyset.$$

Понятно, что повторение описанной процедуры будет давать шар, который имеет с предыдущим непустое пересечение. Искомая точка y равна $\underbrace{t(\ldots t}_{m-\text{раз}}(x_0)\ldots)$. Остальная часть утверждения очевидна.

∎

Лемма 5.1. $P \subset C$.

Доказательство.

(a) Если $x \in Q$ и x является пределом последовательности $\{x_n\}$, где $x_n \in int(Q)$, то последовательность лучей $\{l^+(e, x_n)\}$ сходится к лучу $l^+(e, \tilde{x})$. Ясно, $x \in l^+(e, \tilde{x})$ и $l^+(e, \tilde{x}) \subset C$, т. е. $x \in C$.

(b) Пусть $x \in Q$, но ситуация, описанная в пункте (a), не имеет места. Предположим, что $x \notin C$. Поскольку $P_x \subset P$, то существует последовательность точек $\{x_m\}, x_m \in Q \setminus int(Q)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ такая, что $|x_m - x_{m+1}| = |x - e|$ и $x_1 = x$. В самом деле, если t — сдвиг, переводящий e в x, то $x_m = \underbrace{t(\ldots t}_{m-\text{раз}}(x)\ldots)$.

Ясно, $\{x_m\} \not\subset C$. Так как множество C замкнутое, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что конус

$$K_\varepsilon = \bigcup_{v \in B(x, \varepsilon)} l^+(e, v)$$

не имеет общих точек с конусом C, кроме точки e. Пусть $z \in int(Q)$ – такая точка, что $\lambda \equiv l^+(e, z) \setminus [e, z) \subset int(Q)$. Положим $\rho = |e - z|$. Найдется число $m_0 > 0$, для которого $B(x_{m_0}, 2\rho) \subset K_\varepsilon$. Значит, $t(\lambda) \cap B(x_{m_0}, 2\rho) \neq \emptyset$, где t – сдвиг, переводящий e в x_{m_0}, т.е. существует точка $y \in t(\lambda)$ такая, что $y \in int(Q_{x_{m_0}}) \cap K_\varepsilon$. Но $K_\varepsilon \cap int(Q) = \emptyset$, и, значит, $K_\varepsilon \cap int(Q_{x_{m_0}}) = \emptyset$, что противоречит только что полученному утверждению. Значит, на самом-то деле $x \in C$.

Лемма 5.1 доказана. ∎

Очевидно, имеет место равенство

$$C = ext(P) = \overline{\bigcup_{x \in Q} l^+(e, x)}. \tag{5.1}$$

Лемма 5.2. *Конус C является выпуклым.*

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы неверно. Тогда найдутся точки $x, y \in \partial C$ такие, что для любой $v \in (x, y)$ имеем $v \notin C$. Так как $C = \overline{C}$, то существует точка $v_0 \in (x, y)$ и число $\varepsilon > 0$, для которых $B(v_0, \varepsilon) \cap C = \emptyset$. Пусть $p', q' \in int(Q)$ такие точки, что для точек p, q, лежащих соответственно на лучах $l^+(e, p')$ и $l^+(e, q')$, имеем

$$[p, q] \cap B(v_0, \varepsilon) \neq \emptyset. \tag{5.2}$$

Без ограничения общности можно принять, что $p \neq p', q \neq q'$, $l^+(p, p') \subset l^+(e, p')$, $l^+(q, q') \subset l^+(e, q')$ и $l^+(p, p') \backslash [e, p) \subset int(Q)$,

$$\lambda \equiv l^+(q, q') \backslash [e, q) \subset int(Q). \tag{5.3}$$

Рассмотрим конус C_p. Луч $[l^+(q, q')]_p$ параллелен лучу $l^+(q, q')$, а значит, пересекается с конусом

$$\bigcup_{w \in B(v_0, \varepsilon)} l^+(e, w). \tag{5.4}$$

Двигая теперь конус C_p вдоль луча $l^+(p, p')$, мы легко найдем точку $w \in l^+(p, p')$ такую, что луч $t(\lambda)$ (см. (5.3)), где t – сдвиг, переводящий e в w, будет пересекаться с конусом (5.4). Но $t(\lambda) \subset int(Q_w)$, а конус (5.4) лежит вне конуса C. Значит, найдется точка $\tilde{w} \in t(\lambda)$ такая, что $\tilde{w} \notin C$. Но $\tilde{w} \in int(Q_w)$, и так как $P_w \subset P$, то $\tilde{w} \in int(Q)$. Откуда $\tilde{w} \in C$. Получаем противоречие с тем, что получили выше.

Лемма 5.2 доказана. ■

В силу условия Б) внешний конус C имеет острую вершину. Собственно говоря, в условии Б) мы как раз имели в виду внешний конус.

Предложение 5.2. *Из условия Б) следует, что существует гиперплоскость H, проходящая через точку e и для которой имеем*

$$H \cap Q = \emptyset, \quad C \cap H = \{e\}.$$

■

Мы сохраняем обозначение H для такой гиперплоскости на протяжении всего параграфа. Пусть также H^+ замкнутое полупространство, порожденное H, содержащее множество P, а $H^- = A^n \backslash int(H^+)$.

Если H_x пересекается с Q, то множество $H_x \cap Q$ компактное.

5.1.2. Линейчатый порядок

Определение 5.3. Порядок $\mathcal{P}$ называется *внутренне линейчатым*, если существует луч $l^+(e, x_0) \subset int(C) \cup \{e\}$, где $x_0 \in int(Q)$, такой, что любая прямая l, параллельная лучу $l^+(e, x_0)$, пересекается с множеством Q обязательно по лучу, т.е. если $l \parallel l^+(e, x_0)$, то $l \cap Q$ – луч.

Определение 5.4. Порядок $\mathcal{P}$ называется *гранично-линейчатым,* если он не является внутренне-линейчатым и существует луч $l^+(e, x_0) \subset \partial C$, где $x_0 \in \partial C$ такой, что для любой прямой l, параллельной лучу $l^+(e, x_0)$, множество $l \cap Q$ либо пусто, либо обязательно является лучом (т.е. $l \cap Q$ либо пусто, либо луч).

Определение 5.5. Порядок $\mathcal{P}$ будем называть *линейчатым*, если он либо внутренне-линейчатый, либо гранично-линейчатый.

Физическая интерпретация линейчатости. На первый взгляд, условие линейчатости порядка кажется искусственным и не имеющим физического смысла. Но в действительности под линейчатостью скрывается вполне определенный взгляд на природу причинности. Если x причина события $y \in \partial Q_x$, то в случае несвязного порядка $\mathcal{P}$ между x и y может не существовать промежуточных событий, находящихся в причинно-следственной связи с x, y. Другими словами, воздействие от x передается скачком y. Однако для линейчатого порядка $\mathcal{P}$ найдется луч L_y с началом y, целиком лежащий в Q_x. На этом луче лишь счетное число событий $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ образуют причинно связанную цепочку, начинающуюся с $y = x_1$. Естественно, что все они должны лежать в Q_x. Почему же остальные точки луча L_y должны лежать в Q_x, как это предполагает условие линейчатости? Ответ очень простой: причина x – это всего лишь *толчок*, запускающий *непрерывный процесс* L_y с началом в точке y. Для непрерывного процесса нет необходимости требовать, чтобы события, его образующие, составляли причинную кривую, любые два сколь угодно близкие события a, b

которой должны находиться в причинном отношении $a \preceq b$ (или $b \preceq a$). Поясним сказанное на примере. Если x взрыв пороха в патроне, находящегося в стволе ружья, а y начало движения пули, вытолкнутой из ствола пороховыми газами, то пуля летит по мировой линии L_y, и совсем нелепо считать, что эти газы, давно рассеявшиеся, продолжают толкать пулю в далеком от y состоянии $a \neq y$, которое она занимает на линии L_y.

Остается понять, почему непрерывный процесс L_y должен быть *прямолинейным* лучом? Ответ также незатейливый. Процесс L_y – это мировая линия материальной точки (тела), *движущейся по инерции*. Именно движению по инерции, т.е состоянию прямолинейного и равномерного движения материальной точки в пространстве или состоянию покоя, отвечают прямолинейные мировые линии в пространстве-времени $\mathcal{M}$. Закон инерции, т.е. первый закон Ньютона, и составляет содержание условия линейчатости порядка $\mathcal{P}$. Другими словами, предполагая выполнение закона инерции и дополняя его принципом причинности в определенной форме, о которой было сказано выше, мы должны требовать выполнение условия линейчатости порядка.

В этом параграфе порядок $\mathcal{P}$ предполагается линейчатым. Пусть

$$\tilde{P} \equiv A^n \setminus \bigcup_{e \in \partial Q_x} int(Q_x). \tag{5.5}$$

Тогда можно рассмотреть семейство $\tilde{\mathcal{P}} = \{\tilde{P}_x : x \in A^n\}$, которое осуществляет вообще-то переход к связному линейчатому порядку.

Лемма 5.3. *Если порядок $\mathcal{P}$ – линейчатый*[1]*, то $\tilde{P} \subset C^-$, где C^- обозначает конус, центрально-симметричный конусу C, относительно точки e.*

Доказательство. Пусть $x \in \tilde{P}$. Возможны четыре случая:

[1]Лемма справедлива и для нелинейчатого порядка.

1) $x \in int(C)$;
2) $x \in \partial C \backslash \{e\}$;
3) $x \notin C \cup C^{-}$;
4) $x \in C^{-}$.

Четвертый случай сразу же ведет к утверждению леммы. Поэтому последовательно рассмотрим первые три.

Так как $x \in \tilde{P}$, то для любой точки z такой, что $e \in \partial Q_z$, имеем $x \notin int(Q_z)$, т.е.

$$x \notin \bigcup_{e \in \partial Q_z} int(Q_z). \tag{5.6}$$

1) Итак, $x \in int(C)$. Пусть $z \in l^{+}(e,x)$ самая дальняя от e точка, принадлежащая ∂Q. Такая точка найдется, ибо $l^{+}(e,x) \subset int(C) \cup \{e\}$. Более того, этот луч проходит обязательно (см. определение 5.2) через некоторую точку $y \in int(Q)$. Значит, луч $l^{+}(z,v) \subset l^{+}(e,x)$, где $z < v \in l^{+}(e,x)$, таков, что $l^{+}(z,v) \backslash \{z\} \subset int(Q)$. Пусть t — сдвиг, переводящий точку z в e. Тогда $\partial t(Q) \ni e$ и $x \in t(int(Q))$. Но это противоречит (5.6).

2) Пусть $x \in \partial C \backslash \{e\}$. Возьмем точку $v \in int(Q)$. Тогда согласно предложению 5.1 существует круговой конус K с осью L_0 и вершиной $w \in l^{+}(e,v)$ такой, что $K \subset int(Q)$. Рассмотрим шары $\overline{B(z,r(z))}$, где $z \in L_0$, вписанные в K. Обозначим через z_0 такую точку, что $r(z_0) > |e-x|$.

Положим $l(e,x) = l^{+}(e,x) \cup L$, $L \cap l^{+}(e,x) = \{e\}$. Тогда луч L_{z_0} обязательно пересекается с ∂Q. Пусть $a \in L_{z_0} \cap \partial Q$ такая точка, что на $[z_0,a)$ нет точек из ∂Q. Ясно, что $|z_0 - a| \geq r(z_0) > |e-x|$. Поскольку $[z_0,a) \subset int(Q)$, то, обозначив через t сдвиг, переводящий a в e, получим

$$e \in \partial t(Q), \qquad x \in t(int(Q)).$$

Но это противоречит (5.6).

3) Пусть $x \notin C \cup C^{-}$. Воспользуемся конусом K, введенным нами в 2), а также лучом L. Луч L_{z_0} обязательно пересекается с ∂Q, ибо $L_{z_0} \subset H^{-}_{z_0}$ (см. предложение 5.2). Пусть $a \in L_{z_0}$ – ближайшая к z_0 точка из ∂Q. Тогда $(a, z_0] \neq \emptyset$ и более того

$(a, z_0) \subset int(Q)$, $|a - z_0| \geq r(z_0) > |e - x|$. Если t – сдвиг такой, что $t(a) = e$, то

$$e \in \partial t(Q) \quad \text{и} \quad x \in t(int(Q)),$$

а это противоречит (5.6).

Лемма 5.3 доказана. ∎

В этом пункте мы докажем важную лемму, которой воспользуемся в дальнейшем.

Пусть Π – некоторое неограниченное множество, содержащее точку e, лежащее внутри выпуклого замкнутого конуса K с острой вершиной e.

Лемма 5.4. *Если $f : A^n \to A^n$ – гомеоморфизм, сохраняющий семейство $\{\Pi_x : x \in A^n\}$, т.е. $f(\Pi_x) = \Pi_{f(x)}$ для любой точки $x \in A^n$, то существует множество Π', содержащее точку e и лежащее внутри конуса K, такое, что Π' задает в A^n порядок и, более того, $f(\Pi'_x) = \Pi'_{f(x)}$, где $x \in A^n$ произвольная точка, т.е. f является Π'-автоморфизмом.*

Доказательство.

Пусть

$$\Pi^{(0)} = \Pi,\ \Pi^{(1)} = \bigcup_{x \in \Pi} \Pi_x,\ \ldots,\Pi^{(n)} = \bigcup_{x \in \Pi^{(n-1)}} \Pi_x^{(n-1)},\ \ldots$$

$$\Pi' = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Pi^{(n)}.$$

Покажем, что Π' — искомый порядок. Предположим противное, т.е. Π' не задает порядка. Тогда существует точка $x \in \Pi'$ такая, что Π'_x не является подмножеством множества Π'. Следовательно, найдется точка $y \in \Pi'_x$, которая не принадлежит Π'. Отсюда получаем, что для любого $n = 0, 1, \ldots$ точка $y \notin \Pi^{(n)}$, и в то же время существует m_0 такой, что $y \in \Pi_x^{(m_0)}$. Так как $x \in \Pi'$, то найдется m_1, для которого имеем

$x \in \Pi^{(m_1)}$. Значит, $x \in \Pi_x^{(m_1)} \subset \Pi^{(m_1+1)}$. Но, как легко видеть, $\Pi^{(k)} \subset \Pi^{(k+1)}$ $(k = 0, 1, \ \ldots)$. Поэтому

$$y \in \Pi_x^{(m_0)} \subset \Pi_x^{(\max(m_0, m_1))},$$

$$x \in \Pi_x^{(m_1)} \subset \Pi_x^{(\max(m_0, m_1))} \subset \Pi^{(\max(m_0, m_1)+1)},$$

т.е. $y \in \Pi^{(\max(m_0,m_1)+1)}$. Но это противоречит тому, что $y \notin \Pi^{(n)}$ для любого $n = 0, 1, \ldots$.

Полученное противоречие показывает, что Π' задает порядок в A^n. Так как мы построили Π' из семейства $\{\Pi_x : x \in A^n\}$, использовав лишь теоретико-множественные операции, то, очевидно, f будет сохранять порядок Π'.

Лемма 5.4 доказана. ■

Таким образом, с помощью леммы 5.4 мы можем от данного семейства множеств переходить к такому, которое задает уже порядок в A^n. Причем сохраняется свойство инвариантности семейства по отношению к рассматриваемому гомеоморфизму.

Предложение 5.3. *Обозначим через* $\mathrm{ord}(\Pi)$ *множество* Π' *из леммы* 5.4, *полученное из множества* Π, *удовлетворяющего условиям леммы* 5.4. *Если* Π *задает порядок, то* $\mathrm{ord}(\Pi) = \Pi$. *Когда же* Π *не задает порядка, то* $\mathrm{ord}(\Pi)$ *его задает.*

Доказательство. Очевидно. ■

Нетрудно также заметить, что если Π — линейчатое по отношению к лучу L линейно-связное множество, то $\mathrm{ord}(\Pi)$ будет линейчатым по отношению к лучу L и линейно-связным.

Если $\mathcal{P}$ — линейчатый порядок по отношению к лучу $L_0 = l^+(e, x_0)$, то введем в рассмотрение следующий луч:

$$L_0^- = (l(e, x_0) \backslash L_0) \cup \{e\}.$$

Лемма 5.5. *Пусть $\mathcal{P}$ — линейчатый порядок по отношению к лучу L_0. Тогда существует линейчатый относительно L_0^- порядок $\mathcal{P}'$, который линейно-связный; $L_0^- \subset P'$; и любой непрерывный $\mathcal{P}$-автоморфизм будет $\mathcal{P}'$-автоморфизмом. Кроме того, $P' \subset C^-$.*

Доказательство.

(a) Множество $\tilde{P}$ (см. (5.5)) линейчато относительно L_0^-.

В самом деле, пусть $x \in \tilde{P}$. Достаточно показать, что $L_{0x}^- \subset \tilde{P}$. Предположим противное, и пусть $y \neq x, y \in L_{0x}^-$, но $y \notin \tilde{P}$. Тогда найдется z, для которой $e \in \partial Q_z$ и $y \in int(Q_z)$. Пусть $\delta > 0$ такое число, что $B(y, \delta) \subset int(Q_z)$. Так как P линейчато относительно L_0, то $L_{0y} \subset Q_z$. Значит, $x \in Q_z$. Но $x \in \tilde{P}$, т.е. существует точка $v \in B(x, \delta/2)$, но $v \notin Q_z$. Тогда $v \in L_{0w}$, где $w \in B(y, \delta)$ — некоторая точка. Отсюда следует, что $w \in int(Q_z)$, а, значит, в силу линейчатости порядка $\mathcal{P}$ $v \in Q_z$. Получили противоречие.

(b) $L_0^- \subset \tilde{P}$. В самом деле, так как $e \in \tilde{P}$, то методом, изложенным в пункте (a), получаем требуемое.

(c) Обозначим через S ту часть множества $\tilde{P}$, которая соединяется с e непрерывным путем, лежащим в $\tilde{P}$. Множество S не пусто в силу пункта (b) и удовлетворяет благодаря лемме 5.3 условиям леммы 5.4. Тогда $\mathrm{ord}(S)$ — линейчатый относительно L_0^- линейно связный порядок в A^n (см. предложение 5.3).

Очевидно, $P' = \mathrm{ord}(S)$ — искомый порядок.

Лемма 5.5 доказана. ■

Лемма 5.6. *Пусть порядок $\mathcal{P}$ удовлетворяет условиям* А), Б) *и* В). *Тогда существует выпуклый конус K с острой вершиной e и внутренними точками такой, что любой непрерывный $\mathcal{P}$-автоморфизм f будет удовлетворять равенству*

$$f(K_x) = K_{f(x)}.$$

Доказательство. Пусть $L_1, \ldots, L_n$ — лучи, о которых говорится в условии В). Ясно, порядок $\mathcal{P}$ линейчатый по отношению к любому из этих лучей. Положим $L_i^- = (l(e, x_i) \backslash L_i) \cup \{e\}$, где $x_i \in L_i (x_i \neq e)$ — произвольная точка на L_i.

Если $\mathcal{P}'$ — порядок, полученный из $\mathcal{P}$ в соответствии с леммой 5.5, то $\mathcal{P}'$ будет линейчатым по отношению к любому лучу L_i^-. Более того, $L_i^- \subset P'$ $(i = 1, \dots, n)$ и $P' \subset C^-$. Обозначим через K контингенцию множества P' в точке e. Ясно, что $L_i^- \subset K$ $(i = 1, \dots, n)$. По теореме 2.2 контингенция K есть выпуклый конус с острой вершиной. Следовательно, K имеет внутренние точки. Поскольку $P' \subset C^-$, то P' удовлетворяет условию теоремы 2.2 (теоремы 1 из [29]). Значит, K совпадает с объединением всех направленных кривых (см. теорема 2.2 или [29, с.5]), исходящих из e. Отсюда следует, что любой непрерывный $\mathcal{P}$-автоморфизм f будет удовлетворять равенству $f(K_x) = K_{f(x)}$.

Лемма 5.6 доказана. ■

5.1.3. Доказательство теоремы A

Теорема 5.1 (А.К. Гуц, [82]). *Пусть $\mathcal{P}$ – порядок в $A^n, n \geq 2$, удовлетворяющий условиям* А), Б) *и* В)[2]. *Тогда любой непрерывный $\mathcal{P}$-автоморфизм $f : A^n \to A^n$ либо является аффинным преобразованием, либо P есть квазицилиндр и f имеет вид*

$$f = f_0 \circ d_1 \circ \ldots \circ d_p, \tag{5.7}$$

где f_0 — аффинное преобразование, а d_i есть $d_{E_i l_i}$ или $d_{E_i L_i}$. Причем порядок, в котором стоят d_i, несуществен.

Доказательство. Пусть $\mathcal{P}$ – порядок, удовлетворяющий условиям А), Б) и В). В силу леммы 5.6 любой непрерывный $\mathcal{P}$-автоморфизм f будет сохранять семейство множеств $\{K_x : x \in A^n\}$, где K — некоторый замкнутый выпуклый конус с острой вершиной. Причем $int(K) \neq \emptyset$. Очевидно, K задает связный порядок в A^n. Тогда по теоремам 2.4, 2.5 (теоремы 3, 4 А. Д. Александрова из [29]) гомеоморфизм f будет либо аффинным преобразованием, либо представляется в виде

$$f = f_0 \circ D_1 \circ \ldots \circ D_m, \tag{5.8}$$

[2] Условие В) является лишним, но доказать это не удалось.

где f_0 – аффинное преобразование, а D_i есть $d_{E_i I_i}$ или $d_{E_i L_i}$. Причем порядок, в котором стоят смещения D_i, несуществен. Остается показать, что в случае, когда f имеет вид (5.8), P — квазицилиндр, а f определяется формулой (5.7) [2]. Но эта ситуация достаточно подробно изучена в работе [29] в пп. 6.3–6.8. Причем в этих рассуждениях А.Д. Александрова несущественно предположение о связности порядка. Следовательно, мы убеждаемся, что (5.8) влечет квазицилиндричность порядка $\mathcal{P}$ [2].

Теорема 5.1 доказана. ■

5.2. Теоремы о несвязном порядке

Рассматриваем релятивистский порядок $\mathcal{P} = \{P_x = Q_x \cup \{x\} : x \in A^n\}$ в n-мерном аффинном пространстве A^n, $n \geq 2$.

Предложение 5.4. *Если $\mathcal{P}$ предпорядок в A^n, $n \geq 2$, то*

$$cont(P, e) \subset \overline{P} \subset ext(P).$$

Доказательство. См. теорему 2.2. и определение внешнего конуса. ■

Предложение 5.5. *Если $\mathcal{P}$ нетривиальный*[3] *предпорядок в A^n, $n \geq 2$, такой, что $int(P) \neq \emptyset$, то $exp(P) \neq A^n$, т.е. $exp(P)$ содержится в полупространстве.*

Доказательство. См. [95, 107]. ■

Пусть $\mathcal{P} = \{P_x = Q_x \cup \{x\} : x \in A^n\}$ несвязный релятивистский порядок в n-мерном аффинном пространстве A^n, $n \geq 2$.

Положим

$$\sigma(\mathcal{P}) = \{\sigma(P_x) : x \in A^n\},$$

[2] Точнее, либо f аффинно, либо P — квазицилиндр.

[3] То есть $P_x \neq \{x\}$.

где

$$\sigma(P_x) = \bigcap_{x \in Q_y} Q_y.$$

Предложение 5.6. *Пусть $\mathcal{P}$ несвязный релятивистский порядок в A^n, $n \geq 2$, и $int(P) \neq \emptyset$. Тогда*

$$\sigma(P) \subset ext(P), \quad ext(P) \neq A^n.$$

Следовательно, $\sigma(\mathcal{P})$ нетривиальный предпорядок.

Доказательство. См. [95, 107]. ■

Определение 5.6. Порядок $\mathcal{P}$ называется k-*линейчатым*, $k = 1, 2, ...$ $(k \leq n)$, если существуют лучи $L_1(e, x_1), ..., L_k(e, x_k)$, не лежащие в одной $(k-1)$-мерной плоскости и удовлетворяющие условиям :

(a) $L_i(e, x_i) \subset C_e$;

(b) для любой прямой l параллельной любому из лучей $L_i(e, x_i)$ множество $Q \cap l$ либо пусто, либо является лучом.

Линейчатым порядком, или *L-линейчатым* порядком называем *1-линейчатый* порядок относительно луча L.

Лемма 5.7. *Семейство $\sigma(\mathcal{P})$ является предпорядком в A^n. Если $\mathcal{P}$ L-линейчатый предпорядок, то $\sigma(\mathcal{P})$ L-линейчатый связный предпорядок.*

Доказательство. См. [95, 107]. ■

Лемма 5.8. *Если $\mathcal{P}$ n-линейчатый предпорядок в A^n, то $cont(\sigma(P), e)$ содержит внутренние точки. Обратно, если $int\ cont(\sigma(P), e) \neq \emptyset$, то $\overline{\mathcal{P}} = \{\overline{P_x}\}$ n-линейчатый предпорядок. Если $\sigma(\mathcal{P})$ связный предпорядок, то $\overline{\mathcal{P}}$ линейчатый.*

Доказательство. См. [95, 107]. ■

Введем следующую *слабую аксиому Эйнштейна*:

> (AE_w). *Для любых $x, y \in A^n$, если $y \in P_x$, то $P_x \cap P_y^-$ является ограниченным множеством.*

Предложение 5.7. *Предпорядок, удовлетворяющий слабой аксиоме Эйнштейна, является порядком.*

Доказательство. См. [95, 107]. ∎

Лемма 5.9. *Если предпорядок $\overline{\mathcal{P}}$ удовлетворяет слабой аксиоме Эйнштейна, то $cont(\sigma(P), e)$ строго выпуклый конус.*

Доказательство. См. [95, 107]. ∎

Замечание 5.1. Утверждение обратное утверждению леммы 5.9 неверно. Достаточно рассмотреть предпорядок, задаваемый множеством

$$P = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 + |x| \le y,\ |x| \le 1\} \cup$$

$$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3 \le y,\ 1 \le |x|\}.$$

Оно содержит прямую, но $cont(\sigma(P), e))$ – конус с острой вершиной.

Теорема 5.2 [95, 107]. *Пусть $\mathcal{P}$ несвязный n-линейчатый предпорядок в A^n, $n \ge 2$, такой, что $\overline{\mathcal{P}}$ удовлетворяет слабой аксиоме Эйнштейна. Тогда любой непрерывный $\mathcal{P}$-автоморфизм $f : A^n \to A^n$ либо является аффинным преобразованием, либо P есть квазицилиндр и f имеет вид*

$$f = f_0 \circ d_1 \circ \ldots \circ d_p, \tag{5.9}$$

где f_0 — аффинное преобразование, а d_i есть $d_{E_i l_i}$ или $d_{E_i L_i}$. При этом допустимы любые смещения d_i, и различные d_i коммутируют. (Мы допускаем, что некоторые l_i – это лучи L_i.)

Доказательство. См. [95, 107]. ∎

Следствие 5.1. *Если $\mathcal{P}$ несвязный открытый или замкнутый n-линейчатый предпорядок в A^n, $n \geq 2$, удовлетворяющий слабой аксиоме Эйнштейна, то любой $\mathcal{P}$-автоморфизм либо является аффинным преобразованием, либо P есть квазицилиндр и f имеет вид*

$$f = f_0 \circ d_1 \circ \ldots \circ d_p, \tag{5.10}$$

где f_0 — аффинное преобразование, а d_i есть $d_{E_i l_i}$ или $d_{E_i L_i}$. При этом допустимы любые смещения d_i, и различные d_i коммутируют. (Мы допускаем, что некоторые l_i – это лучи L_i). ■

Определение 5.7. Релятивистский несвязный порядок $\mathcal{P}$ является *K-линейчатым*, где K есть выпуклый конус с вершиной e, если $t_x(K) \subset Q$ для каждой $x \in Q$. Здесь t_x – параллельный перенос, такой, что $t_x(e) = x$.

Предложение 5.8. *Если $\mathcal{P}$ есть K-линейчатый предпорядок, то $K \subset \sigma(P)$. Обратно, если $\sigma(\mathcal{P})$ связный предпорядок, то $\overline{\mathcal{P}}$ есть $cont[\sigma(P)]$-линейчатый.* ■

Определение 5.8. Порядок $\mathcal{P}$ называется *максимально линейчатым*, если он является $ext(P)$-линейчатым.

Теорема 5.3 [95, 107]. *Пусть $\mathcal{P}$ максимально линейчатый несвязный предпорядок и $int(P) \neq \emptyset$. Тогда $\sigma(P) = ext(P)$ и, следовательно, $Aut(\mathcal{P}) \subset Aut(ext(\mathcal{P}))$. Обратно, если $\sigma(P) = ext(P)$, то $\overline{\mathcal{P}}$ максимально линейчатый предпорядок.*

Доказательство. См. [95, 107]. ■

Предложение 5.9. *Если $\mathcal{P}$ несвязный замкнутый предпорядок с $int\ P \neq \emptyset$ и $P \subset cont(\sigma(P), e)$, то $\mathcal{P}$ максимально линейчатый.*

Доказательство. См. [95, 107]. ■

Рассмотрим *сильную аксиому Эйнштейна*

(AE_s). *Внешний конус* $ext(P)$ *строго выпуклый.*

Предложение 5.10. *Если максимально линейчатый несвязный предпорядок* $\mathcal{P}$ *удовлетворяет слабой аксиоме Эйнштейна и* $int(P) \neq \emptyset$, *то справедлива аксиома* (AE_s).

Доказательство. См. [95, 107]. ■

5.3. Асимптотически линейчатый порядок

Рассматриваем несвязный релятивистский порядок $\mathcal{P} = \{P_x = Q_x \cup \{x\} : x \in A^n\}$ в n-мерном аффинном пространстве A^n, $n > 2$, внешний конус которого имеет острую вершину.

Определение 5.9. Порядок $\mathcal{P}$ *асимптотически линейчатый*, если существует число $R > 0$ такое, что для открытого шара $B(x, R)$ радиуса R с центром в точке $x \in A^n$ множество $P_e \setminus B(x, R)$ будет линейчатым.

Определение 5.10. Порядок $\widetilde{\mathcal{P}} = \{\widetilde{P}_x : x \in A^n\}$ называется *расширением порядка* $\mathcal{P} = \{P_x : x \in A^n\}$, если, во-первых, для любой точки $x \in A^n$ мы имеем $P_x \subset \widetilde{P}_x$; во-вторых, $Aut(\mathcal{P}) \subset Aut(\widetilde{\mathcal{P}})$.

Понятие асимптотически линейчатого порядка, очевидно, является ослаблением понятия линейчатого порядка. Учитывая физическую интепретацию условия линейчатости как требование выполнения закона инерции, мы должны сказать, что более слабое условие асимптотической линейчатости порядка означает, что закон инерции считается выполняющимся лишь по истечении достаточно большого времени с момента реализации причины x, повлекшей и могущей повлечь следствия y, образующие область воздействия O_x.

Переходя на язык порядковых структур, ту же самую идею можно сформулировать так: те или иные свойства или особенности строения областей воздействия P_x нам известны, вообще говоря, только вне некоторого шара $B(x,R)$ радиуса R, где R – некоторое положительное (возможно очень большое) число, т.е. на множестве $P_x \setminus B(x,R)$.

Имеет место следующая

Теорема 5.4 (Н.Л. Шаламова, [231]). *Пусть $\mathcal{P} = \{P_x : x \in A^n\}$ – несвязный асимптотически L-линейчатый релятивистский порядок в A^n $(n > 2)$ такой, что внешний конус имеет острую вершину. Тогда его можно расширить до L-линейчатого связного порядка.*

Доказательство. Рассмотрим следующее семейство множеств, построенное для фиксированной точки $e \in A^n$:

$$T_e^1 = \bigcup\{Q_z : \ z \in \partial Q_e\},\ T_e^2 = \bigcup\{T_z^1 : \ z \in \partial Q_e\},\ ...$$

$$...,\ T_e^n = \bigcup\{T_z^{n-1} : \ z \in \partial Q_e\}.$$

Здесь T_z^i – это множество, получающееся из T_e^i параллельным переносом τ_{ez}, переводящим точку e в точку z. Очевидно, что найдется такое $k_0 \in N$ такое, что $\rho(e, \partial T_e^{k_0}) \gg R$, так как $\rho(e, \partial T_e^1) = 2d > 0$, где $d = \rho(e, \partial Q_e)$ (под $\rho(e, A)$ понимаем обычное евклидово расстояние от точки до множества, то есть $\rho(e, A) = \inf\{\rho(e,x) : x \in A\}$).

Если наш исходный порядок L-линейчатый, то теорема верна, т.к., переходя от семейства множеств $\mathcal{P} = \{P_x\}$ к семейству множеств $\Gamma = \{\Upsilon_x\}$, где

$$\Upsilon_x = \bigcap\{Q_z : \ x \in \partial Q_z\},$$

получаем уже связный L-линейчатый порядок.

Предположим теперь, что $\mathcal{P}$ не является L-линейчатым порядком, то есть в множестве $P_e \cap B(e,R)$ найдется точка $z_0 \in \partial Q_e$ такая, что часть луча $(z_0, z_1) \subset L_0$, $L_0 \parallel L, z_0 \neq z_1$, лежит в $A^n \setminus (P_e \cup P_e^-)$. Так как $\rho(e, \partial T_e^{k_0}) \gg R$, то множество $T_e^{k_0}$ попадает в $Q_e \setminus B(e,R)$, то есть в заведомо L-линейчатую часть множества P_e. Поэтому и множество $T_e^{k_0} \subset Q_e \setminus B(e,R)$; более того, в $Q_e \setminus B(e,R)$ содержится весь цилиндр

$$T = \bigcup \{L_w \ : \ w \in T_e^{k_0}\}.$$

Здесь и далее L_w – луч, параллельный L и исходящий из точки w. Отсюда следует, что для любой точки $z \in (z_0, z_1)$ множество $T_e^k \subset Q_e \setminus B(e,R)$.

Если теперь $f \in Aut(\mathcal{P})_e$ – любой порядковый автоморфизм, то

$$f(T_e^1) = f(\bigcup \{Q_z : z \in \partial Q_e\}) = \bigcup \{Q_{f(z)} : f(z) \in \partial Q_e\} =$$

$$= \bigcup \{Q_w : w \in \partial Q_e\} = T_e^1.$$

Аналогично $f(T_z^k) = T_{f(z)}^k$ $(k = 1, 2, ...)$. Следовательно, если для некоторой точки $z \in A^n \setminus (P_e \cup P_e^-)$ $T_z^{k_0} \subset Q_e$, то для любого $f \in Aut(\mathcal{P})_e$ имеем $f(T_z^{k_0}) = T_{f(z)}^{k_0} \subset Q_e$.

Итак, на данный момент нами доказано следующее: если u_0 любая точка из ∂Q_e, в которой нарушается линейчатость порядка $\mathcal{P}$, то есть $(u_0, u_1) \subset L_{u_0}$, но $(u_2, u_1) \subset A^n \setminus (P_e \cup P_e^-)$, то $T_u^{k_0} \subset Q_e$ для $u \in (u_0, u_1)$ и $\bigcup \{f(T_u^{k_0}) : f \in Aut(\mathcal{P})_e\} \subset Q_e$.

Далее строим множество

$$\widetilde{P_e} = \overline{\{u : u \in A^n \setminus (P_e \cup P_e^-), \ \ T_u^{k_0} \subset Q_e\}}.$$

Очевидно, что для любого $f \in \mathcal{A}ut(\mathcal{P})_e$ $f(\widetilde{P_e}) = \widetilde{P_e}$. Следует отметить, что в $\widetilde{P_e}$ могут попасть и точки w_0, находящиеся, самое большое, в множестве C_p, где C_p – конус, равный и параллельный C_e, $p \in C_e^-$, $\rho(\partial C_e, \partial C_p) = \rho(\partial C_e, \partial T_e^{k_0})$. Однако в любом случае семейство $\widetilde{\mathcal{P}} = \{\widetilde{P}_x\}$ состоит из L-линейчатых множеств.

Построим по семейству множеств $\widetilde{\mathcal{P}}$ семейство множеств $\mathcal{K} = \{K_x\}$, где

$$K_x = \bigcap \{\widetilde{P_z} : x \in \partial \widetilde{P_z}\}.$$

По построению видно, что K_x L-линейчатые множества, причем $K_x \subset C_{px}$, где $C_{px} = \tau(C_p)$, τ – параллельный перенос, переводящий точку e в точку x. Покажем, что $K_x \subset C_x, x \in A^n$. Достаточно показать, что $K_e \subset C_e$. Предположим противное, пусть найдется точка $w_0 \in K_e$, $w_0 \in C_p \setminus C_e$. Тогда либо $w_0 \in C_e^-$, либо $w_0 \in C_p \setminus (C_e \cup C_e^-)$.

Пусть $w_0 \in C_e^-$. Возьмем произвольную точку $v_0 \in \widetilde{P_e}$ и рассмотрим прямую λ_{v_0}, $v_0 \in \lambda_{v_0}$, параллельную лучу $L_{w_0 e}$, проходящему через точки e и w_0. Очевидно, что эта прямая пересечет конус ∂C_p в некоторой точке u_1 (напоминаем, что C_e – конус с острой вершиной, то есть не содержит никакой прямой). Обозначим через v_λ такую точку прямой λ_{v_0}, что $\rho(u_1, v_\lambda) = \inf\{\rho(u_1, v) : v \in \lambda_{v_0} \cap \widetilde{P_e}\}$.

Если теперь τ – это такой параллельный перенос, что $\tau(u_1) = e$, то, очевидно, множество $\partial\widetilde{P_x}$, где $x = \tau(e)$, содержит точку e, но не содержит точки w_0. Поэтому и множество $K_e = \bigcap\{\widetilde{P_z} : e \in \partial\widetilde{P_z}\}$ не содержит точки w_0. Случай $w_0 \in C_p \setminus (C_e \cup C_e^-)$ исключается аналогичными рассуждениями. Поэтому всегда имеем $K_e \subset C_e$, $K_x \subset C_x$.

Если семейство множеств $\mathcal{K} = \{K_x\}$ не задает порядка в A^n, то по нему можно построить согласно лемме 5.4 новое семейство множеств $\widetilde{\mathcal{K}} = \{\widetilde{K}_x\}$, также L-линейчатое, но которое уже будет задавать связный L-линейчатый порядок. Таким образом, мы расширили наш несвязный порядок $\mathcal{P} = \{P_x\}$ до $\mathcal{L}$-линейчатого связного порядка $\widetilde{\mathcal{K}} = \{\widetilde{K}_x\}$.

Теорема 5.4 доказана. ■

Глава 6

ОДНОРОДНЫЕ ПОРЯДКИ В A^n

В этой главе рассматриваются однородные релятивистские порядки в аффинном пространстве.

Однородность порядка $\mathcal{P}$ – это равноправность[1] событий, входящих в области воздействия P. Поскольку материя состоит либо их фотонов, летящих со скоростью света, либо из тардионов, двигающихся с досветовой скоростью, и оба типа частиц, перемещаясь, меняют *места* в постранстве и во времени, то однородность порядка – это равноправность мест (и направлений) в пространстве и во времени, входящих в состав областей воздействия. Если при этом мы концентрируем внимание на воздействиях, осуществляемых посредством только фотонов, то говорим о *граничной однородности* порядка; в случае же тардионов – о *внутренней однородности*.

Равноправие, касающееся мест, которые занимаются при перемещении тахионов – гипотетических частиц, двигающихся быстрее света, мы называем *внешней однородностью* поряд-

[1] Равноправность означает одинаковость топологических и причинных свойств малых окрестностей событий, входящих в состав областей воздействия.

ка $\mathcal{P}$. Эти места в разные моменты времени лежат вне «световых конусов», т.е. вне множества $P \cup P^{-}$.

Теория связных однородных порядков, инвариантных относительно группы параллельных переносов, в аффинном пространстве была развита в работах Э.Б. Винберга [62, 63] и А.Д.Александрова [20]. Аналогичная теория несвязных однородных порядков до сих пор не построена. Тем не менее целый ряд интересных результатов в этой области, был получен Н.Л.Шаламовой [223, 224, 225, 226, 227, 228].

В данной главе мы приводим теоремы, касающиеся однородных порядков в аффинном пространстве, инвариантных относительно либо группы параллельных переносов, либо некоммутативной основной аффинной группы Ли.

6.1. Определение однородных порядков и примеры

Обозначим через $Aut(\mathcal{P})_x$ стабилизатор группы $Aut(\mathcal{P})$ в точке x. Группа $Aut(\mathcal{P})_x$ состоит из таких $f \in Aut(\mathcal{P})$, для которых $f(x) = x$.

Определение 6.1. Порядок $\mathcal{P}$ называется *гранично однородным* или *∂-однородным*, если группа $Aut(\mathcal{P})_e$ действует транзитивно на $\partial P_e \setminus \{e\}$. Порядок $\mathcal{P}$ называется *внешне однородным* или *ext-однородным*, если группа $Aut(\mathcal{P})_e$ действует транзитивно на $A^n \setminus (P_e^- \cup P_e)$. Наконец, порядок $\mathcal{P}$ называется *внутренне однородным* или *int-однородным*, если группа $Aut(\mathcal{P})_e$ действует транзитивно на $int(P_e)$.

Пример 6.1. Релятивистский эллиптический конический порядок

$$P_x = \{y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n : y_n - x_n \geq \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} (y_i - x_i)^2}\},$$

$$x = (x_1, ..., x_n), \quad n \geq 3,$$

является одновременно $int-$, $\partial-$, and ext-однородным. ■

Пример 6.2. Релятивистский конический порядок

$$P_x = \{y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n : y_n - x_n > \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}(y_i - x_i)^2}\} \cup L_x,$$

$$x = (x_1, ..., x_n), \quad n \geq 3,$$

где L_x есть луч с вершиной x и направляющим вектором ξ таким, что

$$(\xi^n)^2 = \sum_{i=1}^{n-1}(\xi^i)^2,$$

является $int-$ и ext-однородным, но не ∂-однородным. ■

6.2. Несвязные гранично однородные порядки

Предложение 6.1. *Любой ∂-однородный несвязный предпорядок $\mathcal{P}$ либо открытый, либо замкнутый.*

Доказательство. Пусть существует точка $x_0 \in \partial Q \cap Q$ и $x \in \partial Q$ произвольная точка. Тогда существует $g \in Aut(\mathcal{P})_e$ такой, что $g(P) = P$, $g(x_0) = x$. Так как $g(e) = e$ и g биекция, то $g(Q) = Q$ и поэтому $x = g(x_0) \in g(Q) = Q$. Итак, если существует точка $x_0 \in \partial Q \cap Q$, то $\partial Q \subset Q$, т.е. предпорядок $\mathcal{P}$ замкнутый. Если же $\partial Q \cap Q = \emptyset$, то Q открытое множество, т.е. предпорядок $\mathcal{P}$ открытый.

Предложение 6.1 доказано. ■

Рассмотрим следующую *слабую аксиому Эйнштейна*:

(AE_w). *Для любых $x, y \in A^n$, если $y \in P_x$, то $P_x \cap P_y^-$ является ограниченным множеством.*

Теорема 6.1. *Пусть $\mathcal{P}$ несвязный ∂-однородный нетривиальный порядок, удовлетворяющий слабой аксиоме Эйнштейна. Тогда*

1) $int(Q) \neq \emptyset$, *т.е. предпорядок $\mathcal{P}$ либо открытый, либо замкнутый с внутренними точками;*

2) *каждый $\mathcal{P}$-автоморфизм является гомеоморфизмом.*

Доказательство. Предположим, что утверждение 1) неверно, т.е. $int(Q) = \emptyset$. Тогда $\partial Q = Q$. Следовательно, группа $Aut(\mathcal{P})_e$ действует транзитивно на Q. Возьмем $a \in Q$. Такая точка существует, ибо порядок $\mathcal{P}$ нетривиальный. Если t перенос, переводящий e в a, то $b = t(a) \in Q$. Найдется $\mathcal{P}$-автоморфизм $g \in Aut(\mathcal{P})_e$, для которого $g(b) = a$. Но $a \preceq b$ или $g(b) \preceq b$, поэтому в силу монотонности g имеем $g(g(b)) \preceq g(b) \preceq b$, и, вообще,

$$g^{m+1}(b) \equiv \underbrace{g(...g}_{(m+1)-\text{раз}}(b)...) \preceq \underbrace{g(...g}_{m-\text{раз}}(b)...) \equiv g^m(b) \preceq b.$$

Последовательность $\{g^m(b)\}$ бесконечна, ибо с самого начала $a \neq b$, и поэтому в силу биектнвности $\mathcal{P}$-автоморфизма g для каждого m имеем: $g^m(b) \neq g^{m+1}(b)$. Далее, для каждого m имеем $g^m(b) \in P \cap P_b^-$. Но множество $P \cap P_b^-$ ограничено, ибо порядок $\mathcal{P}$ удовлетворяет слабой аксиоме Эйнштейна. Следовательно, последовательность $\{g^m(b)\}$ имеет предельную точку. Пусть $\varepsilon > 0$ столь малое число, что

$$B(e, \varepsilon) \cap Q = \emptyset, \tag{6.1}$$

а точки $g^m(b), g^k(b)$ таковы, что $g^m(b) \preceq g^k(b)$ и

$$|g^m(b) - g^k(b)| < \varepsilon.$$

Если t_1 перенос, переводящий $g^m(b)$ в e, то

$$P = t_1(P_{g^m(b)}) \ni t_1(g^k(b)).$$

Значит, $t_1(g^k(b)) \in B(e, \varepsilon) \cap Q$. Это противоречит (6.1).

Итак, утверждение 1) теоремы справедливо. Утверждение 2) вытекает немедленно благодаря теореме 2.1.

Теорема 6.1 доказана. ■

Следствие 6.1. *Если $\mathcal{P}$ несвязный нетривиальный ∂-однородный замкнутый порядок, удовлетворяющий аксиоме (AE_w), то $Q = \overline{int(Q)}$.*

Доказательство. Действительно, $int(Q) \neq \emptyset$ в силу теоремы 6.1. Если $x_0 \in \partial Q$ и существует такое $\varepsilon > 0$, что

$$B(x_0, \varepsilon) \cap int(Q) = \emptyset,$$

то в силу однородности подобным свойством обладают все точки границы ∂Q. Но любая точка $x_1 \in \overline{int(Q)} \setminus int(Q)$ является граничной. В то же время для любого $\varepsilon > 0$ имеем $B(x_1, \varepsilon) \cap int(Q) \neq \emptyset$. Противоречие. ∎

Определение 6.2. Релятивистский несвязный порядок $\mathcal{P}$ является K-*линейчатым*, где K есть выпуклый конус с вершиной e, если $t_x(K) \subset Q$ для каждой $x \in Q$. Здесь t_x – параллельный перенос, такой, что $t_x(e) = x$.

Определение 6.3. Конус

$$ext(P_x) = \overline{\bigcup_{y \in P_x \setminus \{x\}} l^+(x, y)}$$

с вершиной x, где $l^+(x, y)$ – луч с началом x и проходящий через y, называется *внешним*.

Внешний конус есть замкнутый выпуклый конус в A^n.

Вводим следующую *сильную аксиому Эйнштейна*:

> (AE_s). *Внешний конус $ext(P_x)$ имеет острую вершину x, т.е. не содержит никаких прямых.*

Справедлива следующая

Теорема 6.2. *Пусть $\mathcal{P}$ релятивистский несвязный ∂-однородный K-линейчатый ($int(K) \neq \emptyset$) порядок в A^n, $n \geq 2$, удовлетворяющий аксиоме (AE_w). Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *$Aut(\mathcal{P}) \subset Aff(A^n)$;*
2) *порядок $\overline{\mathcal{P}} = \{\overline{P_x} : x \in A^n\}$ является $ext(P)$-линейчатым, и $Aut(\overline{\mathcal{P}}) \subset Aff(A^n)$;*
3) *выполняется аксиома (AE_s), причем*

$$ext(P) = cont(\sigma(P), e);$$

4) *конический порядок $ext(\mathcal{P}) = \{ext(P_x) : x \in A^n\}$ допускает аффинную группу G, состоящую из $ext(\mathcal{P})$-автоморфизмов; стабилизатор в x которой действует транзитивно на $int(ext(P_x))$;*
5) *множество Q_x является выпуклым и выделяется из $ext(P_x)$ гиперплоскостями, отсекающими от $ext(P_x)$ конечный объем;*
6) *$Aut(\mathcal{P})$ есть подгруппа группы G.*

Доказательство. См. [90, 95, 107]. ■

6.3. Классификация несвязных граничио однородных порядков

Теорема 6.2 позволяет классифицировать релятивистские ∂-однородные несвязные K-линейчатые порядки, удовлетворяющие аксиоме (AE_w). Это сводится к классификации *int*-однородных выпуклых конусов в A^n, $n \geq 3$, и вычислению группы G. Тогда ∂Q_x есть орбита группы $Aut(\mathcal{P})_x \subset G_x$. Группа G была вычислена Э.Б.Винбергом в [62] (гл.III, § 2, Предложение 1) и в [63].

Опишем релятивистские несвязные ∂-однородные порядки в A^n, $n = 3, 4,$ используя для точек $x \in A^n$ аффинные координаты $x = (x_1, ..., x_n)$.

$\boxed{\text{n} = 3}$

1)

$$P = \left\{ x \in A^3 : x_3 \geq \sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2} \right\} \cup \{(0,0,0)\},$$

$$P_x = t_x(P),$$

где t_x – параллельнй перенос такой, что $t_x((0,0,0)) = x$,

$$ext(P) = \left\{ x \in A^3 : x_3 \geq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right\}.$$

2)

$$P = \{x \in A^3 : x_1x_2x_3 \geq 1 \;\&\; x_i \geq 0 \ (i = 1,2,3)\} \cup \{(0,0,0)\},$$

$$P_x = t_x(P),$$

и

$$ext(P) = \{x \in A^3 : x_i \geq 0 \ (i = 1,2,3)\}.$$

$\boxed{\text{n} = 4}$

1)

$$P = \left\{ x \in A^4 : x_4 \geq \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{3} x_i^2} \right\} \cup \{(0,0,0,0)\},$$

$$P_x = t_x(P), \quad t_x((0,0,0,0)) = x,$$

$$ext(P) = \left\{ x \in A^4 : x_4 \geq \sqrt{\sum_{i=1}^{3} x_i^2} \right\}.$$

2)

$$P = \{x \in A^4 : x_1x_2x_3x_4 \geq 1 \,\&\, x_i \geq 0 \, (i = 1,2,3,4)\} \cup \{(0,0,0,0)\},$$

$$P_x = t_x(P),$$

$$ext(P) = \{x \in A^4 : x_i \geq 0 \ (i = 1, 2, 3, 4)\}.$$

3) ∂Q – множество точек, которое получим, когда одна половина гиперболоида

$$\{(0, x_2, x_3, x_4) : x_4^2 - x_2^2 - x_3^2 = \ 1 \ \& \ x_4 \geq 0\}$$

движется так, что ее вершина принадлежит гиперболе

$$\{(x_1, 0, 0, x_4) : x_1 x_4 = 1 \ \& \ x_1, x_4 \geq 0\},$$

$$ext(P) = L \times C,$$

где L есть луч и C – эллиптический 3-мерный конус. ■

6.4. Внешне однородные порядки

Определение 6.4. Несвязный порядок $\mathcal{P}$ *особый*, если множество

$$\sigma(Q_x) = \{y \in A^n : Q_x \subset Q_y \ \& \ y \neq x\}$$

совпадает с Q_x^-, где $Q_x^- = P_x^- \setminus \{x\}$.

Порядок $\mathcal{P}$ особый тогда и только тогда, когда

$$Q_x = \{y \in A^n : Q_y \subset Q_x \ \& \ y \neq x\}.$$

Вводим следующие условия:

(C1). Внешний конус $ext(P_x)$ не является полупространством.

(C2). Порядок $\mathcal{P}$ замкнутый, $int(P_x) \neq \emptyset$, и $\partial Q_x \subset \overline{int(Q_x)}$.

Теорема 6.3. (Н.Л. Шаламова). *Пусть $\mathcal{P}$ релятивистский ext-однородный порядок в $A^n, n \geq 2$, удовлетворяющий условиям* (C1), (C2). *Тогда порядок $\mathcal{P}$ связный, исключая, быть может, особый несвязный порядок.*

Доказательство. См. [226]. ■

Нам неизвестен пример особого порядка.

Теорема 6.4. (Н.Л. Шаламова). *Пусть $\mathcal{P}$ связный релятивистский ext−однородный порядок, удовлетворяющий следующим условиям:*

1) $int(cont(P_x, x)) \neq \emptyset$,

2) *существует окрестность U_x точки x, для которой*

$$U_x \cap \overline{P_x} \cap \overline{P_x^-} = \{x\}.$$

Тогда $\mathcal{P}$ есть эллиптический конический порядок.

Доказательство. См. [226, 225]. ∎

6.5. Внутренне однородные порядки

Теорема 6.5. (Н.Л. Шаламова). *Пусть $\mathcal{P}$ релятивистский несвязный порядок в $A^n, n \geq 2$, удовлетворяющий условиям* (AE_s), (C2). *Тогда $\mathcal{P}$ не является int-однородным.*

Доказательство. См. [226, 225]. ∎

6.6. Нерелятивистские однородные порядки

Порядок $\mathcal{P}$ называется *сравнимым*, если для любого P_x и параллельного переноса t_x такого, что $t_x(x) = e$ либо $t_x(P_x) \subset P$, либо $t_x^{-1}(P) \subset P_x$.

Теорема 6.6 [122]. *Пусть $\mathcal{P}$ произвольный сравнимый порядок в A^3. Тогда порядок является либо ∂-однородным, либо int-однородным, либо ext-однородным в том и только в том случае, когда семейство $\mathcal{P}$ состоит из равных и параллельных эллиптических конусов.* ∎

Основной аффинной группой Ли T_a называется вещественная связная и односвязная группа Ли, алгебра Ли которой изоморфна полупрямому произведению группы параллельных переносов пространства A^{n-1} и подобий в A^n.

Основная аффинная группа Ли в полупространстве $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ представляется в виде преобразований

$$(x_1, ..., x_n) \to (\lambda x_1 + \alpha_1, ..., \lambda x_{n-1} + \alpha_{n-1}, \lambda x_n),$$

$$\lambda > 0, \quad \alpha_1, ..., \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}.$$

Алгебра Ли основной аффинной группы Ли T_a задается в некотором базисе $\{X_1, ..., X_n\}$ с помощью следующих коммутационных соотношений:

$$[X_n, X_i] = X_i \quad (i = 1, ..., n).$$

Группа T_a реализуется как просто транзитивная подгруппа группы изометрий пространства Лобачевского L^n. Поэтому вместо T_a-инвариантных порядков в A^n можно изучать T_a-инвариантные порядки в L^n.

Орбиту однопараметрической подгруппы группы T_a в L^n назовем *квазипрямой*, а орбиту однопараметрической подполугруппы группы T_a – *квазилучом*. Теперь из этих объектов по аналогии с аффинной геометрией можно построить *квазиплоскости*, *квазиконусы* и *квазиконтингенции* и т.д. [80, 97].

Если M подмножество в L^n, а e фиксированная точка в L^n, то через M_x обозначаем множество $t_x(M)$, где $t_x \in T_a$, $t_x(e) = x$.

Пусть $\mathcal{P} = \{P_x : x \in L^n\}$ T_a-инвариантный порядок в n-мерном пространстве Лобачевского L^n.

Для связных порядков справедлива

Теорема 6.7 [122]. *Пусть связный T_a-инвариантный порядок $\mathcal{P}$ в $L^n, n \geq 3$, удовлетворяет условиям:*

1) имеется окрестность U фиксированной точки e такая, что $U \cap \overline{P_e} \cap \overline{P_e^-} = \{e\}$, где $P_x^- = \{y : x \in P_y\}$;

2) квазиконтингенция $qc(P_e, e) \neq L \times K$, где L, K квазиконусы и $int(qc(P_e, e)) \neq \emptyset$.

Тогда $\mathcal{P}$ не может быть ни $int-$, ни $\partial-$, ни ext-однородным. ■

Этот результат согласуется с аналогичным, полученным для трехмерных разрешимых групп Ли (см. § 10.6).

Внешний квазиконус с вершиной e для P_x - это множество

$$ext(P_x) = \overline{\bigcup_{y \in Q_x} l^+(x, y)},$$

где $l^+(x, y)$ квазилуч с началом x, проходящий через точку y, $y \neq x$.

Рассмотрим условия:

L1) внешний квазиконус $ext(P_x)$ имеет острую вершину, т.е. не содержит никакой квазипрямой;

L2) порядок $\mathcal{P}$ является K-линейчатым, т.е. если $y \in Q_x$, то $K_y \subset Q_x$; $int(K_x) \neq \emptyset, K_e \neq L \times K_1$, где K, K_1 – квазиконусы, L – квазилуч.

Теорема 6.8 [122]. *Пусть несвязный T_a-инвариантный порядок $\mathcal{P}$ в $L^n, n \geq 3$, удовлетворяет условиям* L1) *и* L2). *Тогда каждый $\mathcal{P}$-автоморфизм является квазиаффинным преобразованием, т.е. каждую квазипрямую отображает на квазипрямую.* ■

Теорема 6.9 [122]. *Пусть несвязный T_a-инвариантный порядок $\mathcal{P}$ в $L^n, n \geq 3$, удовлетворяет условиям* L1) *и* L2). *Тогда он не является ни $int-$, ни $\partial-$, ни $ext-$однородным.* ■

В заключение можно сказать, что, по всей видимости, однородность свойственна релятивистским порядкам. В таком случае полная теория однородных порядков в аффинном пространстве близка к своему окончательному построению.

Глава 7

СВЯЗНАЯ ХРОНОГЕОМЕТРИЯ

В этой главе излагается еще одна возможная аксиоматическая причинная теория пространства-времени Минковского.

7.1. Профизические и философские предпосылки причинной аксиоматики

Целью этого параграфа является напоминание о тех основных философских и физических принципах, на которых может основываться аксиоматическое построение специальной теории относительности, точнее, четырёхмерной псевдоевклидовой геометрии сигнатуры $(+---)$, которая известна в физических теориях как пространство-время Минковского.

Определение 7.1. Пространство-время Минковского – это четырёхмерное псевдоевклидово пространство ${}^{1}E^{4}$ сигнатуры $(+---)$, метрика которого в ортонормированной системе координат x_1, x_2, x_3, x_4 имеет вид

$$ds^2 = dx_4^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2. \qquad (7.1)$$

Метрика (7.1) инвариантна относительно десятипараметрической группы преобразований П, состоящей из группы переносов T, вращений и псевдовращений и называемой группой Пуанкаре.

Группа переносов T может быть отождествлена с четырёхмерным векторным пространством $v(^1E^4)$, ассоциированным с аффинной структурой пространства $^1E^4$.

Поскольку каждой точке x псевдоевклидова пространства можно однозначно поставить в соответствие вектор $\vec{ex} \in v(^1E^4)$, где e – фиксированная точка из $^1E^4$, то пространство-время Минковского можно рассматривать как векторное пространство T, являющееся абелевой топологической группой (с естественной топологией).

Таким образом, будем исходить из представления, что пространство-время – это абелева топологическая группа. Такова одна из формальных предпослок излагаемой в этой главе аксиоматики пространства-времени специальной теории относительности. Необходимо еще перечислить философские и профизические предпосылки. Они неизбежны, поскольку наша цель – аксиоматизация геометрии, которая сама по себе, быть может, не заслуживала внимания, но она стала объектом столь пристального изучения благодаря тому, что связана с одной из самых значительных физических теорий. Собственно говоря, то, что исследуется псевдоевклидова геометрия, а не теория относительности, скрывает в себе такое важное обстоятельство, как имевший место факт геометризации теории относительности. Последнее сделано Минковским. Геометризация физической теории – это, по существу, этап в ее аксиоматизации, ибо геометрия всегда представляла исторический образец формулирования теории. Однако аксиоматизация не просто образец систематичности и строгости; это еще инструмент прояснения и очищения. Аксиоматизируя физическую теорию, мы вскрываем ее сущность. И здесь большое значение имеют философские и профизические предпосылки аксиоматической теории. Они помогают сделать правильный выбор первичных понятий и аксиом.

В основе излагаемой ниже аксиоматики лежит представление о пространстве-времени, развитое в работах Минковского [185], Робба [326] и А.Д.Александрова [40]

Исходным является представление о пространстве-времени как о мире или о многообразии элементарных (атомарных) событий. Элементарное событие – это явление, протяжением которого в пространстве и во времени можно пренебречь. Подразумевается, что все явления состоят из элементарных событий. Событие подобно точке в геометрии Евклида. Оно неделимо, первично. Такой подход позволяет нам повторить путь Евклида и прийти к геометрической теории пространства-времени.

Многообразие событий должно представлять окружающий нас материальный мир. Материя существует не иначе, как в движении. Движение проявляется во взаимном воздействии тел друг на друга. Поэтому события также воздействуют друг на друга. Пытаясь проследить процесс воздействия, мы упрощаем картину взаимодействия, концентрируем внимание на смене состояний и тем самым выделяем причины и следствия. Мир предстает перед нами как совокупность самых разнообразных цепей причинно-следственных связей между событиями.

Таким образом, если рассматривать мир, развертывающийся в пространстве и во времени, как совокупность взаимодействующих явлений, то можно попытаться представить пространство-время как совокупность (множество) $\mathcal{M}$ элементарных событий, подчиненных причинно-следственным отношениям (связям). Иначе говоря, пространственно-временная структура мира есть не что иное, как его причинно-следственная структура, взятая в соответствующей абстракции [40]. Следовательно, метрическая структура пространства-времени, фигурировавшая в определении 7.1, вторична, «выводима» из причинной структуры.

Нами сформулированы основные идеи причинной теории пространства-времени. Причинно-следственное отношение предполагается несимметричным, и в этом отражена наблюдаемая сущность времени. Поэтому причинная связь при формализации моделируется отношением (частичного) порядка.

7.2. Связная аксиоматика Мира Минковского

Система аксиом, к изложению которой мы переходим, основывается на определении пространства-времени, данном А.Д.Александровым (см. § 2.1, [40]). Согласно этому определению, пространство-время есть множество $\mathcal{M}$ всех событий в мире, отвлеченное от всех его свойств, кроме тех, которые определяются отношениями воздействия одних событий на другие.

1. Исходные понятия. $\mathcal{M}$ (множество), $x, y, \ldots$(элементы множества $\mathcal{M}$), $P_x, P_y, \ldots$ (подмножества множества $\mathcal{M}$), $\mathcal{P} = \{P_x : x \in \mathcal{M}\}, Aut(\mathcal{P})$ (подмножество множества $\mathcal{M}^{\mathcal{M}}$).

Пространство-время специальной теории относительности – это структура

$$\langle \mathcal{M}, \mathcal{P}, Aut(\mathcal{P})\rangle.$$

2. Аксиомы порядка.

AC$_1$. *Семейство множеств $\mathcal{P} = \{P_x : x \in \mathcal{M}\}$ задает нетривиальный порядок на $\mathcal{M}$, т.е. выполняются условия:*

1) $x \in P_x$;

2) *если* $y \in P_x$, *то* $P_y \subset P_x$;

3) $x \neq y$, *то* $P_x \neq P_y$;

4) $P_x \neq \{x\}$.

AC$_2$. *Порядок $\mathcal{P}$ – плотный, т.е. если $y \in P_x$, то $P_x \cap P_y^- \neq \{x, y\}$.*

3. Аксиомы топологической и групповой структур.

Пусть $\mathcal{B}$ семейство подмножеств множества $\mathcal{M}$ вида $(P_x \cap P_y^-) \setminus A_{xy}$, где A_{xy} – объединение всех линейно упорядоченных интервалов $P_a \cap P_b^- \subset P_x \cap P_y^-, b \in P_a$ таких, что либо $a = x$, либо $b = y$. На $\mathcal{M}$ рассматривается топология $\mathcal{T}_\leq$ с предбазой $\mathcal{B}$.

> AC$_3$. $\langle \mathcal{M}, \mathcal{T}_\leq \rangle$ *является связной локально компактной хаусдорфовой топологической группой.*

Подполугруппа M называется *максимальной*, если из $M \subset H \subset \mathcal{M}$ следует $H = M$ или $H = \mathcal{M}$. Подполугруппа M *нормальная*, если для любого $a \in \mathcal{M}$ имеем $aM = Ma$.

> AC$_4$. *Существует* $x \in \partial P_e \setminus \{e\}$, *для которого*
>
> $$\overline{\bigcup_{e,x \in \partial P_y} P_y}$$
>
> *есть максимальная нормальная подполугруппа.*

Множество K – *выпуклое*, если

$$K = \bigcap_{i \in I} x_i \cdot M_i,$$

где $x_i \in \mathcal{M},\ M_i$ – максимальная замкнутая нормальная подполугруппа и I – произвольное множество индексов.

> AC$_5$. *Топология* $\mathcal{T}_\leq$ *– выпуклая, т.е. существует базис окрестностей единицы группы, состоящий из окрестностей чьи замыкания являются выпуклыми множествами.*

4. Аксиома, связывающая порядковую и групповую структуры.

> AC$_6$. *Порядок* $\mathcal{P}$ *– биинвариантный, т.е.* $x \cdot P_e = P_e \cdot x = P_x$ *для всех* $x \in \mathcal{M}$.

5. Аксиомы связи между топологией и порядком.

AC$_7$. *Для любых* $x, y \in \mathcal{M}$ *множества* $\overline{P_x} \cap \overline{P_y^-}$ *компактны.*

AC$_8$. *Все множества* P_x *замкнуты и* $int(P_x) \neq \emptyset$.

6. Аксиома изотропии пространства-времени.

AC$_9$. *Порядок* $\mathcal{P}$ *is* ∂*-однородный.*

Теорема 7.1. *Пусть выполняется система аксиом* AC$_1$ - AC$_9$. *Тогда* $\langle \mathcal{M}, \mathcal{T}_{\leq} \rangle$ *может быть оснащено* n*-мерной псевдоевклидовой структурой* ${}^1E^n$, $n \geq 2$, *сигнатуры* $(+ - ...-)$ *такой, что в некоторых орнормированных координатах* $x_1, ..., x_n$:

$$P_x = \left\{ y \in {}^1E^n : y_n - x_n \geq \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} (y_i - x_i)^2} \right\},$$

и $Aut(\mathcal{P})$ *есть группа Пуанкаре, включая подобия* $x \to \lambda x$, $\lambda > 0$ *и исключая отражения* $x \to (x_1, ..., x_{n-1}, -x_n)$.

Доказательство. См. [95]. ∎

Глава 8

НЕСВЯЗНАЯ ХРОНОГЕОМЕТРИЯ

8.1. Отказ от микропричинности

Очевидно, что наличие причинно-следственной связи между событиями x и y ничего не говорит о том, как она образовалась, то есть каким образом x воздействовало на y. Были ли промежуточные события, по которым «прокатилось» воздействие от x к y? Более традиционно было бы думать, что да, были такие промежуточные события. Во всяком случае, классическое изложение специальной теории относительности согласуется с таким воззрением (область воздествия P_x события x, то есть множество событий, на которые воздействует или может воздействовать x образует так называемый световой конус будущего). Но обязательно ли для построения теории относительности такое предположение? Столь ли обязательно думать, что P_x – это множество, для которого событие x является предельной точкой?

Истинным ядром теории относительности может считаться группа Пуанкаре, для которой метрика

$$ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2$$

всего лишь инвариант, так же как одним из инвариантов является система областей воздействия $\{P_x : x \in \mathcal{M}\}$.

Если же можно получить саму группу Пуанкаре как группу, инвариантом которой является постулируемая система областей воздействия $\{P_x : x \in \mathcal{M}\}$, отнюдь не являющаяся априори системой (эллиптических) световых конусов, то как следствие получаем и метрику пространства-времени Минковского и сами световые конусы. Более того, если при этом x не является предельной точкой для P_x, то это означает, что теория не предполагает никаких промежуточных событий при передачи воздействий в мире событий в достаточно малых областях пространства-времени. Другими словами, воздействие передается скачком, и события, достаточно близкие друг к другу в пространстве и во времени, вообще никак не связаны никакими причинно-следственными отношениями. Это не отвергает наличия взаимодействия между ними, но означает, что данное взаимодействие уже не может быть проанализировано в терминах причины и следствия, в силу их «грубости», неспособности «увидеть» более тонкие детали взаимодействия, протекающего на малых расстояниях и за малые отрезки времени.

Возможна ли такая аксиоматическая теория, «отвергающая» микропричинность? Возможна. Роль области воздействия P_x играет множество

$$P_x = \left\{ (y_0, y_1, y_2, y_3) : (y_0 - x_0)^2 - \sum_{i=1}^{3} (y_i - x_i)^2 \geq l_0^2 \ \& \right.$$

$$\left. \& \ y_0 \geq x_0 \right\} \cup \{x\},$$

$$x = (x_0, x_1, x_2, x_3),$$

где l_0 – некоторое фиксированное число, определяющее пространственный масштаб микрообластей без причинно-следственных связей (сответствующий масштаб времени равен l_0/c, где c – скорость света).

То, что x не является предельной точкой множества $P_x \setminus \{x\}$, означает, что причинный порядок не является непрерывным, т.е. разрывен, а, в силу этого, если y следствие x, то *между ними* может не существовать промежуточного события z такого, что $x \preceq z \ \& \ z \preceq y$. Это означает, что причинный порядок $\preceq$ не удовлетворяет такому свойству времени, а точнее, временного порядка, как непрерывность, когда между любыми двумя датами, поставленными в соответствие событиям x, y, можно вставить дату, отвечающую некоторому реальному событию z.

8.2. Аксиоматика, основанная на предположении о макропричинности

При построении аксиоматической теории пространства-времени мы будем принимать во внимание причинную структуру, групповую структуру (однородность пространства-времени) и однородность причинно-следственных отношений.

Первичными понятиями являются: множество $\mathcal{M}$ (многообразие событий = пространство-время); элементы $x, y, ...$ множества $\mathcal{M}$ (события); система подмножеств $\mathcal{P} = \{P_x : x \in \mathcal{M}\}$ множества $\mathcal{M}$ (области воздействия); группа преобразований $Aut(\mathcal{P})$, состоящая из биекций $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ таких, что $f(P_x) = P_{f(x)}$ для любого $x \in \mathcal{M}$.

Аксиоматика, которую мы имеем в виду, является содержательной аксиоматикой в понимании Гильберта и Бернайса [69, с.24], а не формальной. Последние возникают в результате отвлечения от конкретного содержания и формулируются в экзистенциальном виде.

К первичным понятиям добавим множество вещественных чисел $\mathbb{R}$. Это очень сильное предположение, в котором в общем-то нет большой необходимости [86]. Хотя вещественные числа определяются посредством большого количества различных аксиом – все они порождения математического разума и потому не мешают нашей основной цели, преследуемой в ходе аксиоматизации теории относительности – выяснению минимального набора философских и профизических предпосылок, лежащих в основе постулируемых утверждений (аксиом).

Перечислим аксиомы (несвязной) причинной теории пространства-времени, разбивая их на группы.

1. Аксиома предпорядка.

> (AG_1) *Система* $\mathcal{P} = \{P_x : x \in \mathcal{M}\}$ *задает на* $\mathcal{M}$ *частичный предпорядок, то есть*

$$x \in P_x;$$

$$y \in P_x \Rightarrow P_y \subset P_x.$$

Напомним, что порядок получается, если предпорядок удовлетворяет дополнительному условию (несимметричности отношения)

$$x \neq y \Rightarrow P_x \neq P_y.$$

Следовательно, аксиома (AG_1) не требует несимметричности воздействий между событиями x и y. Несимметричность вытекает из нижеследующей аксиомы (AG_6) (предложение 2.2 из [107]).

Введем обозначения

$$Q_x = P_x \setminus \{x\}, \quad Q_x^- = P_x^- \setminus \{x\},$$

где $P_x^- = \{y \in \mathcal{M} : x \in P_y\}$.

2. Аксиома топологической и групповой структуры.

Рассмотрим $\mathcal{B}$ семейство всех подмножеств вида $Q_x \cap Q_y^-$, где $y \in P_x$.

Пусть $\mathcal{T}_{\preceq}$ топология на $\mathcal{M}$ с предбазой $\mathcal{B}$.

> (AG_2) $\langle \mathcal{M}, \mathcal{T}_{\preceq} \rangle$ *есть связная хаусдорфова локально компактная четырёхмерная топологическая группа.*

Замечание 8.1. Нет необходимости постулировать конечномерность; она вытекает из нижеследующих аксиом. Таким образом, аксиома (AG_2) просто уточняет число измерений.

3. Аксиомы абелевости групповой структуры.

Определение 5.1. Подполугруппа H называется *максимальной*, если из $H \subset L \subset \mathcal{M}$, где L подполугруппа, следует $L = \mathcal{M}$, и *нормальной*, если для любого $x \in \mathcal{M}$ имеем $xH = Hx$.

Определение 5.2. Множество $K \subset \mathcal{M}$ называется *выпуклым*, если оно может быть представлено в виде

$$K = \bigcap_{\alpha \in A} x_\alpha H_\alpha,$$

где $x_\alpha \in \mathcal{M}, H_\alpha$ – максимальная подполугруппа, A – некоторое множество индексов.

> (AG_3) *Существует замкнутая максимальная нормальная собственная подполугруппа.*
>
> (AG_4) *Топология* $\langle \mathcal{M}, \mathcal{T}_{\preceq} \rangle$ *выпуклая, то есть существует база окрестностей единицы группы, состоящая из окрестностей с замыканиями, являющимися выпуклыми множествами.*

Аксиома (AG_3) независима от причинной структуры, она – свойство групповой структуры. Но обе указанные структуры связаны посредством аксиомы (AG_4), а также с помощью следующей аксиомы.

4. Аксиома связи причинной и групповой структур.

> (AG_5) *Предпорядок* $\mathcal{P}$ *является биинвариантным, то есть* $xP_e = P_e x = P_x$ *для любого* $x \in \mathcal{M}$, *где* e *– единица группы* $\mathcal{M}$.

Ясно, $P_e^- = P_e^{-1}$ и P_e – нормальная подполугруппа группы $\mathcal{M}$.

5. Аксиомы связи порядка и топологии.

(AG_6) *Для любого* $y \in P_x$, $x \in \mathcal{M}$, *множество* $\overline{P_x} \cap \overline{P_y^-}$ *компактно.*

Здесь $\overline{A}$ обозначает замыкание множества A относительно топологии $\mathcal{T}_{\preceq}$.

(AG_7) $x \notin \overline{Q_x}$, $Q_x \neq \emptyset$.

6. Аксиома изотропности пространства.

(AG_8) *Стабилизатор* $Aut(\mathcal{P})_x$ *в точке* x *действует транзитивно на границе* ∂Q_x *множества* Q_x.

Данная аксиома характеризует степень однородности причинно-следственных связей.

Пусть
$$\sigma(\overline{P_x}) = \bigcap_{x \in \overline{Q_y}} \overline{Q_y}.$$

Семейство $\sigma(\overline{\mathcal{P}}) = \{\sigma(\overline{P_x}) : x \in \mathcal{M}\}$ задает, как нетрудно проверить, предпорядок на $\mathcal{M}$. Хотя этот предпорядок порожден причинной структурой, он имеет иной смысл. Множество $\sigma(\overline{P_x})$ состоит из тех событий, которые причинно порождены (или могут быть причинно порожденными) всеми теми событиями, которые являются причиной события x. Если $y \in \sigma(\overline{P_x})$, то y не обязано быть следствием события x, хотя это справедливо для событий из $P_x \subset \sigma(\overline{P_x})$. События, вошедшие в $\sigma(\overline{P_x})$, не что иное, как события, происходящие *позже*, чем x. Другими словами, предпорядок $\sigma(\overline{\mathcal{P}})$ – это *временной порядок* в пространстве-времени. В данной аксиоматике он определяется причинным порядком, но стоит отметить, что отношение между временным и причинным порядками – предмет многочисленных философских споров (см. § 1.2.1).

Теперь можно рассматривать непрерывные отображения множества неотрицательных вещественных чисел $\mathbb{R}_+$ в $\mathcal{M}$, монотонные относительно естественного порядка в $\mathbb{R}$ и предпорядка $\sigma(\overline{\mathcal{P}})$. Пусть $Ru[\sigma(\overline{P_e})]$ – множество всех указанных выше непрерывных монотонных относительно $\sigma(\overline{\mathcal{P}})$ отображений $\mathbb{R}_+$ в $\mathcal{M}$ таких, что 0 отображается в единицу e группы $\mathcal{M}$. Такое известное свойство временного порядка, как непрерывность, постулируется с помощью аксиомы

(AG_9) $P_e \subset Ru[\sigma(\overline{P_e})]$.

Наконец, нижеследующая аксиома исключает псевдофинслеровы геометрии:

(AG_{10}) *Множество* $\sigma(\overline{P_e})$ *не является прямым произведением подполугрупп.*

Результатом изложенной аксиоматики является

Теорема 8.1 [95]. *Пусть выполнена система аксиом* $\langle AG_1 - AG_{10}\rangle$. *Тогда* $\langle \mathcal{M}, \mathcal{T}_{\preceq}\rangle$ *можно оснастить псевдоевклидовой структурой* ${}^1E^4$ *такой, что в некоторых ортонормированных координатах* x^0, x^1, x^2, x^3 *имеем:*

$$\partial Q_x = \left\{ y \in {}^1E^4 : (y_0 - x_0)^2 - \sum_{i=1}^{3}(y_i - x_i)^2 = l_0^2, \right.$$

$$\left. l_0 = const \neq\ 0 \ \&\ y_0 > x_0 \right\};$$

$$\sigma(\overline{P_x}) = \left\{ y \in {}^1E^4 : (y_0 - x_0)^2 \geq \sum_{i=1}^{3}(y_i - x_i)^2 \ \&\ y_0 \geq x_0 \right\};$$

и, наконец, $Aut(\mathcal{P})$ *есть группа Пуанкаре.*

Доказательство. Из аксиом $(AG_2) - (AG_4)$ и теоремы 2 из [271] следует, что группа $\mathcal{M}$ изоморфна четырёхмерному векторному пространству $\mathcal{V}^4$ с естественной топологией, которое есть абелева группа. Поэтому можно оснастить $\mathcal{V}^4$ аффинной структурой A^4, для которой ассоциированным векторным пространством является пространство $\mathcal{V}^4$. В таком случае $\mathcal{M}$ – это аффинное пространство A^4, на котором задан инвариантный относительно параллельных переносов (аксиома (AG_5)) так называемый несвязный предпорядок $\mathcal{P}$ (аксиома (AG_7)). В силу (AG_9) предпорядок $\sigma(\overline{\mathcal{P}})$ является связным, то есть $x \in \overline{\sigma(\overline{P_x}) \setminus \{x\}}$. В таком случае, благодаря аксиоме (AG_6), лемме 5.9 и предложению 4.1 (или лемме 2.3 и предложению 1.2 из [107]), для предпорядка $\sigma(\overline{\mathcal{P}})$ выполнены условия теоремы А из [107]. Поэтому $Ru[\sigma(\overline{P_x})]$ выпуклый конус с острой вершиной x, называемый контингенцией (§ 2.4).

Тогда по предложению 5.9 (предложение 3.3 из [107]) (внутренность $int(P_x) \neq \emptyset$ в силу (AG_7) и теоремы 6.1) порядок $\mathcal{P}$ является максимально линейчатым и, следовательно, по теореме 6.2 $Aut(\mathcal{P})$ состоит из аффинных преобразований пространства $\mathcal{V}^4$, а $\sigma(\overline{P_x})$ есть выпуклый замкнутый конус с вершиной x, совпадающий с замыканием выпуклой оболочки множества P_x. Более того, конус $C = int(\sigma(\overline{P_e})) \cup \{e\}$, где $int(A)$ – внутренность множества A, однородный. Известно, что в таком случае конус C один из трех следующих: $L_1 \times L_2 \times L_2 \times L_4, L \times K^3, K^4$, где K^i – i-мерный эллиптический конус с вершиной e. Два первых случая исключаются аксиомой (AG_{10}).

Итак, $\sigma(\overline{P_x})$ – эллиптический конус (– это световой конус). Можно (теорема 6.2 и § 6.3) ввести аффинные координаты x_0, x_1, x_2, x_3 с началом e так, что конус $\sigma(\overline{P_x})$ задается неравенствами

$$(y_0 - x_0)^2 \geq \sum_{i=1}^{3} (y_i - x_i)^2 \ \& \ y_0 \geq x_0,$$

множество

$$\partial Q_x = \left\{ y \in \mathcal{V}^4 : (y_0 - x_0)^2 - \sum_{i=1}^{3} (y_i - x_i)^2 = l_0^2, \right.$$

$$l_0 = const \neq 0 \ \& \ y_0 > x_0\},$$

а группа $Aut(\mathcal{P})$ есть группа Пуанкаре.

Скалярное произведение в данных координатах имеет вид:

$$< u, v >= u_0 v_0 - \sum_{i=1}^{3} u_i v_i,$$

где u, v – векторы ассоциированного с $\mathcal{V}^4$ векторного пространства.

Тем самым $\mathcal{V}^4$ оснащено псевдоевклидовой структурой ${}^1E^4$ сигнатуры $(+ - --)$.

Теорема 8.1 доказана. ■

Таким образом, геометрия пространства времени ${}^1E^4$ – это согласование причинной и групповой структур, при условии непрерывности временного порядка (аксиома (AG_9)). Присутствие групповой структуры обязательно, коль скоро речь идет о геометрии. Это отвечает духу Эрлангенской программы Феликса Клейна.

Неоднократно заявлялось, что псевдоевклидова геометрия – следствие аксиом, подобных аксиомам $\langle AG_1 - AG_8, AG_{10}\rangle$ (либо их аналогов), то есть нет необходимости предполагать микропричинность и непрерывность временного порядка. Однако на сегодня не появилось удовлетворительного во всех отношениях доказательства данного утверждения.

Требование непрерывности времени может быть заменено условием непрерывности причинного порядка, означающего отказ от требования $x \notin \overline{Q_x}$ в аксиоме (AG_7). Соответствующая аксиоматика изложена в [89]. В рассматриваем случае отказа от микропричинности можно уйти от требования непрерывности времени и причинности, но за счет допущения аффинной структуры мира событий [86].

Глава 9

ХРОНОГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВ

В этой главе рассматриваются отображения, сохраняющие некоторые семейства множеств, которые не всегда связаны с понятием причинности, в самых разнообразных пространствах: аффинном, пространстве Лобачевского, гильбертовом пространстве, псевдоевклидовом пространстве и, наконец, в лоренцевых многообразиях.

В конце главы мы приводим аксиоматическую причинную теорию общей теории относительности, предложенную Р.И.Пименовым.

9.1. Отображение произвольных конусов

Преобразования, полученные при отображении различных семейств попарно параллельных конусов в аффинном пространстве A^n $(n \geq 2)$, как правило, за исключением так называемых квазицилиндров, являются аффинными. Интересно выяснить, является ли аффинным отображение, сохраняющее достаточно произвольное, т.е. состоящее не из параллельных фигур, семейство конусов в пространстве A^n?

Исчерпывающего ответа на этот вопрос нет. Но имеется довольно общая теорема, принадлежащая А.В.Шайденко, к изложению которой мы и переходим.

Рассмотрим семейство ординарных конусов $\mathcal{K} = \{K_x : x \in A^n\}$ в аффинном пространстве A^n. Через t_{xy} обозначим перенос, для которого $t_{xy}(x) = y$.

Будем говорить, что конус K_x «меньше», «равен» или «больше» конуса K_y в зависимости от того, какое из следующих соотношений выполняется:

1) $t_{xy}(\overline{K_x}) \setminus \{y\} \subset int[conv(K_y)]$;

2) $t_{xy}(K_x) = K_y$;

3) $\overline{K_y} \setminus \{y\} \subset int[conv\ t_{xy}(K_x)]$.

Назовем конусы и *sh-сравнимыми*, если для них выполняется какое-либо из этих соотношений.

Предположим, что все конусы K_x нашего семейства $\mathcal{K}$ либо ординарные поверхностные строго выпуклые, либо они все удовлетворяют следующему условию: для каждой точки x существует такой ординарный телесный замкнутый строго выпуклый конус C_x с вершиной x, что $int(C_x) \subset K_x \subset C_x$. Конусы, удовлетворяющие этому условию, будем называть *ординарными произвольными телесными строго выпуклыми конусами*.

Будем также предполагать, что любые два конуса нашего семейства $\mathcal{K}$ sh-сравнимы. Ясно, что существует луч $l^+(e, x_0)$, что для любой точки x $l^+(e, x_0) \setminus \{e\} \subset int[conv(t_{xe}(K_x))]$.

Будем говорить, что конусы $\{K_x\}$ *непрерывно зависят от* x, если для любой точки x и любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность U точки x такая, что для каждой точки $y \in U$ и для любой двумерной плоскости $\pi \supset t_{ex}[l^+(e, x_0)]$ выполняется неравенство $|\angle[\pi \cap t_{xy}(K_y)] - \angle[\pi \cap K_x]| < \varepsilon$ (где через $\angle[\pi \cap K_z]$ обозначается угол $\pi \cap K_z$).

Легко видеть, что это определение эквивалентно следующему, более стандартному. Конусы K_x непрерывно зависят от x, если для каждой точки x и для каждой последовательности точек $\{x_m\}$, $\lim_{m\to\infty} x_m = x$, имеем $\overline{K} = lt_{m\to\infty} K_{x_m}$ (где через lt обозначен топологический предел).

Теорема 9.1 [214]. *Пусть $\mathcal{K} = \{K_x : x \in A^n\}$ – семейство конусов в A^n $(n \geq 3)$ одного из двух типов: либо все K_x – ординарные поверхностные строго выпуклые, либо все K_x – ординарные произвольные телесные строго выпуклые конусы; причем оно удовлетворяет следующим условиям:*

1) *$conv(K_x)$ задают порядок в A^n;*
2) *для любых x, y конусы K_x и K_y sh-сравнимы;*
3) *$\{K_x\}$ непрерывно зависит от x.*

Пусть $f : A^n \to A^n$ – биективное отображение такое, что для каждой точки x $f(K_x)$ – конус того же типа, что и K_x, причем все конусы $f(K_x)$ удовлетворяют условию 2). Тогда f аффинно. ■

9.2. Отображение конусов в пространстве Лобачевского

Пусть $Л^n$ $(n \geq 2)$ – n-мерное пространство Лобачевского. Рассмотрим семейство $\mathbf{L} = \{l_x : x \in Л^n\}$ всевозможных прямых, параллельных прямой l в некотором определенном направлении.

Рассмотрим в $Л^n$ семейство двойных круговых конусов $\{C_x : x \in Л^n\}$ с осями, принадлежащими семейству $\mathbf{L}$, с одним и тем же углом раствора α $(0 < \alpha < \pi)$. Здесь x – вершина конуса C_x.

Данное семейство конусов инвариантно относительно некоторой подгруппы изометрий, действующей транзитивно на $Л^n$ и изоморфной группе вида

$$(x_1, ..., x_n) \to (\lambda x_1, \lambda x_2 + \alpha_1, ..., \lambda x_n + \alpha_{n-1}),$$

$$x_1 > 0, \ \lambda > 0.$$

Теорема 9.2 [78, 79]. *Если $f : Л^n \to Л^n$ $(n \geq 2)$ – биективное отображение такое, что $f(C_x) = C_{f(x)}$, то f есть изометрия.* ■

Данная теорема, доказанная в 1971 году, являющаяся естественным перенесением основной теоремы хроногеометрии из аффинного пространства в пространство Лобачевского, так и не нашла какого-либо физического приложения. Напротив, подобная теорема, касающаяся «конусов» в пространстве $Л^n$, образующими которых являются эквидистанты, напрямую связана с хроногеометрией стационарной вселенной де Ситтера [76, 78, 88] (см. § 9.7.2).

9.3. Отображения дискретных конусов в гильбертовом пространстве

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство.

Если x, y – два вектора, то под прямой в H, проходящей через точку x в направлении вектора y, понимаем множество точек $\{x + \tau y, -\infty < \tau < +\infty\}$. Перенос t в H – это отображение $t : x \to x + t$, где $x \in H$ – произвольный вектор.

Говорим, что прямые l_0^i $(i = 1, 2, ...)$, проходящие через 0, образуют *минимальный дискретный конус* D_0 с вершиной в точке 0, если направляющие векторы этих прямых таковы, что, выбрасывая из их множества любой вектор, будем получать базис в пространстве H, т.е. полную систему векторов.

Пусть

$$D_x = t(D_0), \quad D_0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} l_0^i,$$

где t – такой перенос, что $t(0) = x$.

Теорема 9.3 [77]. *Если $f : H \to H$ – биективный и непрерывный оператор такой, что $f(D_x) = D_{f(x)}$, то f есть непрерывный аффинный оператор, т.е. непрерывный линейный оператор с точностью до переноса.* ■

Замечание 9.1. Условие непрерывности в теореме существенно, т.к. можно построить неаффинный оператор, удовлетворяющий условию теоремы 9.3.

Замечание 9.2. Если из конуса D_0 выбросить хотя бы одну прямую, то утверждение теоремы 9.3 перестает быть справедливым.

Говорим, что оператор $f : H \to H$ имеет в точке $x \in H$ *бесконечный скачок*, если существует последовательность $\{x_n\}$, сходящаяся слабо к x, такая, что $\lim_{n\to\infty} ||f(x_n)|| = \infty$.

Теорема 9.4 [77]. *Пусть $f : H \to H$ – биективный оператор, удовлетворяющий условию $f(D_x) = D_{f(x)}$. Для того чтобы оператор f был непрерывным и аффинным, необходимо и достаточно, чтобы он не имел бесконечных скачков ни в одной точке пространства H.* ■

9.4. Отображения псевдоевклидовых пространств

9.4.1. Теоремы об отображениях конусов Ю.Ф. Борисова и А.Н. Астракова

Пусть ${}^kE^n$ – n-мерное псевдоевклидово пространство. Квадрат расстояния в ${}^kE^n$ между точками $a = (a_1, ..., a_n)$ и $b = (b_1, ..., b_n)$ равен

$$d(a, b) = \sum_{i=1}^{n-k} (a_i - b_i)^2 - \sum_{i=n-k+1}^{n} (a_i - b_i)^2.$$

Изотропный конус C_a с вершиной a определяется уравнением:

$$\sum_{i=1}^{n-k} (x_i - a_i)^2 = \sum_{i=n-k+1}^{n} (x_i - a_i)^2$$

или, что то же самое,

$$C_a = \{x \in {}^kE^n : d(x,a) = 0\}.$$

Рассмотрим отображение $f : {}^kE^n \to {}^kE^n$. Очевидно, что условие

$$\forall a \in {}^kE^n (f[C_a] = C_{f(a)})$$

эквивалентно условию

$$\forall a, b \in {}^kE^n (d(a,b) = 0 \Leftrightarrow d(f(a), f(b)) = 0),$$

а условие

$$\forall a \in {}^kE^n (f[C_a] \subset C_{f(a)})$$

эквивалентно условию

$$\forall a, b \in {}^kE^n (d(a,b) = 0 \Rightarrow d(f(a), f(b)) = 0).$$

Теорема 9.5 (Ю.Ф. Борисов, [56]). *Если $f : {}^kE^n \to {}^kE^n$, $n \geq 3$, биективное отображение такое, что для любой точки $a \in {}^kE^n$*

$$f[C_a] = C_{f(a)},$$

то f является аффинным преобразованием. ■

Теорема 9.6 (С.Н. Астраков, [50]). *Если $f : {}^kE^n \to {}^kE^n$, $n \geq 3$, биективное отображение такое, что для любой точки $a \in {}^kE^n$*

$$f[C_a] \subset C_{f(a)},$$

то f является аффинным преобразованием. ■

Теорема 9.7 (С.Н. Астраков, [50]). *Пусть $f : {}^1E^n \to {}^1E^n$, $n \geq 3$, – инъективное отображение и $f({}^1E^n)$ не является подмножеством световой линии. Тогда f будет преобразованием Лоренца (с точностью до подобия), если выполняется условие*

$$f[C_a] \subset C_{f(a)},$$

для любой точки $a \in {}^kE^1$. ■

Отображение f пространства ${}^1E^n$ в себя называется *счётнократным*, если для любой точки $a \in {}^1E^n$ её прообраз $f^{-1}(a)$ есть не более, чем счётное множество.

Теорема 9.8 (С.Н. Астраков, [50]). *Пусть $f : {}^1E^n \to {}^1E^n$, $n \geq 3$, – счётнократное отображение и $f({}^1E^n)$ не является подмножеством световой линии. Тогда f будет преобразованием Лоренца (с точностью до подобия), если выполняется условие*

$$f[C_a] \subset C_{f(a)},$$

для любой точки $a \in {}^1E^n$. ■

9.4.2. Теорема Дж. Лестер

Теорема 9.9 (J.A. Lester, [291]). *Предположим, что в $\mathbb{R}^n$ определена функция $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ вида*

$$d(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x_i - y_i)(x_j - y_j),$$

где $||g_{ij}||$ – симметрическая неособенная матрица с вещественными компонентами и $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$. Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – биекция такая, что $d(x,y) = \rho$ тогда и только тогда, когда $d(f(x), f(y)) = \rho$. Тогда (исключая случай $\rho = 0$ и $||g_{ij}||$ – положительно или отрицательно определенная) $f(x) = L(x) + f(e)$, $e = (0, ..., 0)$, где L есть линейная биекция, удовлетворяющая $d(L(x), L(y)) = \pm d(x,y)$ для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ (знак минус возможен тогда и только тогда, когда $\rho = 0$ и $||g_{ij}||$ имеет сигнатуру 0). ■

В случае евклидова пространства эта теорема была доказана Бекманом и Кворлесом [256] в 1953 г. Случай псевдоевклидова пространства с $\rho = 0$ был впервые изучен в работе Ю.Ф.Борисова [56] в 1960 г. и, повторно, Джун Лестер [289] через семнадцать лет. Лестер распространила результат Ю.Ф.Борисова на векторные пространства над произвольным алгебраическим полем F характеристики, не равной двум, и получила следующую теорему.

Теорема 9.10 [289]. *Пусть V – векторное пространство над полем F с характеристикой, не равной двум, на котором определена неособенная симметричная билинейная форма $(,)$. Предположим, что $dim V \geq 3$ и найдется $x \neq 0$, для которого $(x,x) = 0$. Пусть $f : V \to V$ – биекция такая, что $f(C_x) = C_{f(x)}$, где*

$$C_x = \{y \in V : (y - x, y - x) = 0\},$$

для любого вектора $x \in V$. Тогда $f(x) = L(x) + f(0)$, где пара (L,τ) есть полулинейная биекция, удовлетворяющая условиям:

1) $L(x + y) = L(x) + L(y)$;

2) $L(\alpha x) = \alpha^\tau L(x)$, $\tau : F \to F$ – автоморфизм поля F;

3) $(L(x), L(y)) = \lambda(x,y)^\tau$ для некоторого ненулевого $\lambda \in F$ и для всех $x, y \in V$. ■

Замечание 9.3. Если $F = \mathbb{R}$, то $\tau = id_{\mathbb{R}}$ (т.к. $\mathbb{R}$ не имеет нетривиальных автоморфизмов) и для некоторого $\mu \in \mathbb{R}$ либо $\lambda = \mu^2$, либо $\lambda = -\mu^2$. В первом случае $i = \mu^{-1}L$ удовлетворяет $(i(x), i(y)) = (x,y)$, т.е. i – изометрия на V. Во втором случае $j = \mu^{-1}L$ удовлетворяет $(j(x), j(y)) = -(x,y)$. Последнее означает, что билинейные формы $(,)$ и $-(,)$ имеют одну и ту же сигнатуру. Следовательно, именно первый случай охватывает теорему 3.5 для отношения (I) [6, 257].

9.5. Хроногеометрия лоренцевых многообразий

Теоремы об отображениях упорядоченного аффинного пространства имеют довольно естественное обобщение на лоренцевы многообразия. Но прежде чем изложить имеющиеся в этом направлении результаты, приведем некоторые определения.

Определение 9.1. Пространство-время – это связное четырехмерное гладкое многообразие $\mathcal{M}$ без края вместе с гладкой псевдоримановой метрикой g сигнатуры $(+---)$.

Предполагаем также, что $\mathcal{M}$ *временно ориентировано*, т.е. $\mathcal{M}$ допускает не исчезающее нигде временное векторное поле, и на $\mathcal{M}$ фиксирована некоторая временная ориентация, определяющая будущее и прошлое.

Пусть $A, U \subset \mathcal{M}$ и $U \supset A$ открыто. Через $I_+(A, U)$ обозначим множество точек $x \in U$ таких, что существуют направленная в будущее гладкая временная кривая $\gamma : I \to U$ (где $I \subset \mathbb{R}$ – связное множество) и точки $t_1, t_2 \in I$ такие, что $t_1 < t_2$, $\gamma(t_1) \in A$, $\gamma(t_2) = x$.

Множество $I_+(A, U)$ называется *хронологическим будущим* множества A относительно U. Если $A = \{x\}$, то пишем $I_+(x, U)$ вместо $I_+(A, U)$ и $I_+(x)$ вместо $I_+(x, \mathcal{M})$.

Полагаем, по определению, $x \ll y(U)$ тогда и только тогда, когда $y \in I_+(x, U)$. Пишем $x \ll y$ вместо $x \ll y(\mathcal{M})$). Аналогично определяется *хронологическое прошлое* $I_-(A, U)$ (заменяя направленные в будущее кривые на направленные в прошлое).

Пространство-время $\mathcal{M}$ *разделимо по будущему* (прошлому), если для любых $x, y \in \mathcal{M}$ равенство $I_+(x) = I_+(y)$ влечет $x = y$ (соответственно $I_-(x) = I_-(y)$ влечет $x = y$).

Пусть $\langle \mathcal{M}, g \rangle$ и $\langle \mathcal{M}', g' \rangle$ – два пространства-времени и $f : \mathcal{M} \to M'$ – биекция. Говорим, что f – *конформное преобразование*, если f и f^{-1} – гладкие отображения и существует гладкое нигде не обращающееся в нуль отображение $\Omega : \mathcal{M}' \to \mathbb{R}$ такое, что $f_* g = \Omega^2 g'$.

Биекция $f : \mathcal{M} \to M'$ называется *причинной*, если для любых $x, y \in \mathcal{M}$ и любых $u, v \in \mathcal{M}'$ таких, что $x \ll y$ и и $u \ll v$ справедливы отношения $f(x) \ll f(y)$ и $f^{-1}(u) \ll f^{-1}(v)$.

Теорема 9.11 [303]. *Предположим, что $\langle \mathcal{M}, g \rangle$ и $\langle \mathcal{M}', g' \rangle$ – два разделимые по прошлому и будущему пространства-времени и $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ – причинная биекция. Тогда f – конформное преобразование.* ■

Этот результат, принадлежащий Маламенту [303], обобщает теорему Зимана [358] (см. теорему 3.5 из § 3.2). Как показано в [303], утверждение теоремы 9.11 перестает быть справедливым, если требовать только разделимости по прошлому или разделимости по будущему.

Пусть $\mathcal{M}$ – пространство-время и $U \subset \mathcal{M}$. Множество U называется ***выпуклым***, если для любых точек $x, y \in U$ существует геодезическая $\gamma : [0,1] \to U$ с $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$, которая единственна (с точностью до перепараметризации).

Предположим, что $\gamma : I \to \mathcal{M}$ ($I \subset \mathbb{R}$ – связное множество) – непрерывная кривая. Говорим, что она *направлена в будущее* и является *временной*, если для любого $t_0 \in I$ и любых открытых выпуклых множеств U, содержащих $\gamma(t_0)$, существует открытый подынтервал $\widetilde{I} \subset I$, содержащий t_0 такой, что

$$\begin{cases} t \in \widetilde{I} \text{ и } t < t_0 \text{ влечет } \gamma(t) \ll \gamma(t_0)(U), \\ t \in \widetilde{I} \text{ и } t_0 < t \text{ влечет } \gamma(t_0) \ll \gamma(t)(U). \end{cases} \tag{9.1}$$

Наконец, γ есть ***направленная в будущее непрерывная световая геодезическая***, если в данном выше определении условия (9.1) заменены на требование:

$$t_1, t_2 \in \widetilde{I} \text{ и } t_1 < t_2 \text{ влечет } \gamma(t_2) \in J_+(\gamma(t_1), U) \setminus I_+(\gamma(t_1), U),$$

где $J_+(\gamma(t_1), U)$ – причинное будущее точки $\gamma(t_1)$ относительно U. Оно, по определению, состоит из $y \in U$, для которых существует гладкая кривая, лежащая в U и соединяющая $\gamma(t_1)$ с y с нигде не обращающимися в нуль направленными в будущее непространственными касательными векторами.

Теорема 9.12 (Хокинг - Маламент). *Предположим, $\langle \mathcal{M}, g \rangle$ и $\langle \mathcal{M}', g' \rangle$ – два пространства-времени и $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ – гомеоморфизм такой, что f и f^{-1} сохраняют направленные в будущее непрерывные световые геодезические. Тогда f – конформное преобразование* [274, 303]. ■

В случае мира Минковского эта теорема была впервые доказана Борхерсом и Хегерфельдтом [257].

Теорема 9.13 [303]. *Пусть* $\langle \mathcal{M}, g\rangle$ *и* $\langle \mathcal{M}', g'\rangle$ *– два пространства-времени и* $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ *– биекция такая, что* f *и* f^{-1} *сохраняют направленные в будущее непрерывные временные кривые. Тогда* f *– конформное преобразование.* ■

Гладкая кривая γ в $\mathcal{M}$ называется *причинной*, если касательный вектор к γ не является пространственным.

Пространство-время называется *причинным*, если в $\mathcal{M}$ нет замкнутых причинных кривых.

Пространство-время называется *сильно причинным*, если для любой точки $x \in \mathcal{M}$ и её окрестности V существует окрестность U точки x такая, что $U \subset V$ и любая исходящая из U (т.е. не только из x) причинная кривая γ пересекает U по связному множеству.

Имеем логические следствия:

$$\boxed{\textbf{сильная причинность}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\textbf{разделимость по прошлому и по будущему}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\textbf{причинность}}$$

Теорема 9.14 [282]. *Пусть* $\langle \mathcal{M}, g\rangle$ *сильно причинное пространство-время* $\dim \mathcal{M} \geq 3$*. Пусть* $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ *биекция, такая, что образы и прообразы световых геодезических являются также световыми геодезическими. Тогда* f *– конформное преобразование.* ■

9.6. Аналог теоремы Александрова в классе частично упорядоченных полей

Пусть F – коммутативное поле, $X = F^n$ $(n \geq 3)$ и Q – неопределенная квадратичная форма на X с индексом Витти, равным 1. Последнее означает, что X разлагается в ортогональную прямую сумму $U \perp V$, где U – подпространство, не содержащее ненулевых световых векторов (т.е. таких $x \neq 0$, что $Q(x,x) = 0$), а V – подпространство, натянутое на два неортогональных световых вектора [291].

Полагаем

$$C_a = \{x \in X : Q(x-a, x-a) = 0\}.$$

Теорема 9.15 [350]. *Если $f : X \to X$ – биекция такая, что $f(C_a) = C_{f(a)}$, то f есть композиция переноса и полуподобия g, т.е. $Q(g(x), g(x)) = c \cdot \mu Q(x,x)$ для некоторого $c \neq 0$, где μ – автоморфизм поля F. Если характеристика поля F отлична от двух, то можно опустить требование, что вершины конусов переходят в вершины.* ■

Замечание 9.4. Условие $char(F) \neq 2$ обязательно, как показывает соответствующий контрпример, приведенный в [350].

Пусть теперь F – коммутативное поле, снабженное нетривиальным частичным порядком $\leq$. Положим $P = \{x \in F : x \geq 0\}$. На $X = F^n$ $(n \geq 3)$ определим форму

$$Q(x,x) = x_n^2 - \sum_{k=1}^{n-1} x_k^2, \quad x = (x_1, ..., x_n).$$

Введем отношения $\preceq$ и $\prec$ на X:

1) $y \preceq x$ тогда и только тогда, когда $Q(x-y, x-y) \geq 0$ и $x_n \geq y_n$ и

2) $y \prec x$ тогда и только тогда, когда $Q(x-y, x-y) > 0$ и $x_n > y_n$.

Заметим, что $x \preceq y$ не означает $x \prec y$ или $x = y$.

Пусть

$$P_a^1 = \{x \in X : a \preceq x\},$$
$$P_a^2 = \{x \in X : a \prec x\},$$
$$P_a^3 = P_a^1 \setminus P_a^2.$$

Теорема 9.16 [350]. *Предположим, что пара* $(F, \leq)$ *удовлетворяет условиям:*

а) $P + P \subset P$;

б) $P \cdot P \subset P$;

в) $P \cap (-P) = \{0\}$;

г) $F^2 \subset P$.

Тогда отношение $\preceq$ *есть частичный порядок на* X *и любая биекция* $f : X \to X$*, сохраняющая конусы одного из следующих типов:* $P_a^1, P_a^2, P_a^3, P_a^1 \cup (-P_a^1), P_a^2 \cup (-P_a^2), P_a^3 \cup (-P_a^3)$ *(вершина* $\neq 0$ *включается), есть композиция переноса и полулинейного отображения.* ∎

9.7. Вселенные с некоммутативной группой

Мы рассмотрели уже достаточно примеров порядков в A^n, инвариантных относительно группы параллельных переносов, которая, как известно, является коммутативной или абелевой группой Ли.

9.7.1. Хроногеометрия вселенной Гёделя

Рассмотрим теперь вместо группы параллельных переносов следующую некоммутативную группу Ли:

$$\begin{cases} \overline{x}_1 = x_1 + \alpha, \\ \overline{x}_2 = x_2 + \beta, \\ \overline{x}_3 = x_3 \cdot e^{-\beta} + \gamma, \\ \overline{x}_4 = x_4 + \delta, \end{cases} \tag{9.2}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – вещественные числа, действующую просто транзитивно в $\mathbb{R}^4$.

Относительно этой группы инвариантно семейство двойных поверхностных эллиптических конусов

$$\mathcal{C} = \{C_x : x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4\},$$

$$C_x = \{y \in \mathbb{R}^4 : (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2 - \frac{1}{2}e^{2x_2}(y_3 - x_3)^2 -$$
$$-(y_4 - x_4)^2 + 2e^{x_2}(y_1 - x_1)(y_3 - x_3) = 0\}.$$

Теорема 9.17 [83]. *Любое гомеоморфное отображение* $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ *такое, что* $f(C_x) = C_{f(x)}$, *является преобразованием вида*

$$\begin{cases} \overline{x}_1 = (\pm)x_1 + \alpha; \\ \overline{x}_2 = x_2 + \beta; \\ \overline{x}_3 = (\pm)x_3 \cdot e^{-\beta} + \gamma; \\ \overline{x}_4 = \pm x_4 + \delta, \end{cases}$$

где символ $(\pm)$ *означает, что выбор знака перед* x_1 *и перед* x_3 *согласованный – берется одинаковый знак, тогда как знак перед* x_4 *выбирается произвольно.* ■

Группа (9.2) является группой движений в пространстве-времени Гёделя, имеющего метрику

$$ds^2 = dx_1^2 - dx_2^2 - \frac{1}{2}e^{2x_2}dx_3^2 - dx_4^2 + 2e^{x_2}dx_1 dx_3. \qquad (9.3)$$

Замечание 9.5. Пространство-время (9.3) было найдено знаменитым австрийским логиком Куртом Гёделем и было им предложено в качестве модели вращающейся Вселенной. В своей статье [272], вышедшей в 1949 году, Гёдель впервые заговорил о возможности создания машины времени.

9.7.2. Хроногеометрия стационарной вселенной де Ситтера

Рассмотрим теперь другую некоммутативную группу:

$$\begin{cases} \overline{x}_1 = \lambda x_1, \\ \overline{x}_2 = \lambda x_2 + \alpha, \\ \overline{x}_3 = \lambda x_3 + \beta, \\ \overline{x}_4 = \lambda x_4 + \gamma, \end{cases} \qquad (9.4)$$

где $\lambda > 0, \alpha, \beta, \gamma$ — вещественные числа, действующую транзитивно на полупространстве $\mathbb{R}^4_+ = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 > 0\}$.

Относительно группы (9.4) инвариантна система двойных эллиптических конусов

$$\mathcal{C} = \{C_x : x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4\},$$

$$C_x = \{y \in \{x_1 > 0\} : (y_1 - x_1)^2 - \sum_{i=2}^{4}(y_i - x_i)^2 = 0\},$$

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4), \quad x_1 > 0.$$

Теорема 9.18 [83]. *Если $f : \mathbb{R}^4_+ \to \mathbb{R}^4_+$ гомеоморфное отображение такое, что $f(C_x) = C_{f(x)}$, то f имеет вид*

$$f(x) = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & U & \\ 0 & & & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \quad \lambda > 0,$$

где U – ортогональная матрица порядка 3. ■

Группа (9.4) является группой движений в стационарной вселенной де Ситтера $\mathcal{M} = \mathbb{R}^4_+$, имеющего метрику

$$ds^2 = \frac{1}{x_1^2}(dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 - dx_4^2).$$

9.8. Причинная аксиоматизация общей теории относительности

Изложим теперь причинную теорию пространства-времени общей теории относительности, предложенную Р.И.Пименовым [201, 198, 203].

1. Исходные понятия. $\mathcal{M}$ (множество), $x, y, ...$ (элементы множества $\mathcal{M}$), $\prec$ (бинарное отношение на $\mathcal{M}$), $\mathbb{R}$ (множество вещественных чисел), $\mathcal{F}$ (подмножество множества $\mathbb{R}^{\mathcal{M}}$), $\{\mathcal{G}_x : x \in \mathcal{M}\}$ (подмножество множества $\mathcal{M}^{\mathcal{M}}$).

Пространство-время общей теории относительности – это структура рода

$$\langle \mathcal{M}, \prec, \mathcal{F}, \{\mathcal{G}_x : x \in \mathcal{M}\}\rangle.$$

2. Аксиома порядка.

AP_1. $\langle \mathcal{M}, \prec\rangle$ *есть локально упорядоченное множество, т.е.*

$$(\exists x)(x \prec a \& x \prec b \& x \prec c) \vee (\exists y)(a \prec y \& b \prec y \& c \prec y) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (a \prec b \& b \prec c \& a \prec c)$$

Замечание 9.6. Локальный порядок на $\mathcal{M}$ не задается никакой полугруппой, т.к. $\mathcal{M}$ не является однородным в общеупотребительном смысле. Однако порядковая структура имеет определенную связь с некоторой полугруппой. Это становится понятным при топосно-теоретическом описании причинной структуры пространства-времени (см. гл. 11 и определение 11.2).

3. Аксиома топологии.

Пусть $\mathcal{T}_\prec$ хаусдорфова топология с базисом $\{(a,b) : a,b \in \mathcal{M}\}$, где $(a,b) = \{x \in \mathcal{M} : a \prec x \ \& \ x \prec b\}$.

AP_2. $\langle \mathcal{M}, \mathcal{T}_\prec\rangle$ *есть n-мерное топологическое многообразие со счетным базисом.*

4. Аксиома гладкости.

Множество $\mathcal{F}$ есть гладкая структура. Она состоит из непрерывных функций $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям:

1) Область определения $dom(f)$ функции f является открытым множеством.

2) Для любой $x \in \mathcal{M}$ существуют n функций $f_1, ..., f_n \in \mathcal{F}$, $x \in \cap_{i=1}^n dom(f_i)$ такие, что имеется непостоянная C^∞-функция $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, для которой $g(f_1, ..., f_n) = \mathrm{const}$ на $(f_1 \times ... \times f_n)(\cap_{i=1}^n dom(f_i)) \subset \mathbb{R}^n$ (набор из таких n функций называется картой на $\mathcal{M}$).

3) преобразование координат, соответствующих двум картам, является C^∞-дифференцируемым отображением.

Пусь $\mathcal{F}_x = \{f \in \mathcal{F} : x \in dom(f)\}$. Множество всех дифференциальных операторов $X : \mathcal{F}_x \to \mathbb{R}$ определяет n-мерное касательное векторное пространство $T_x\mathcal{M}$. Элемент пространства $T_x^*\mathcal{M}$ будем обозначать как df. Говорим, что функция $f \in \mathcal{F}_x \setminus A$, где $A \subset \mathcal{F}_x$, является *граничным элементом множества* A в x, если существуют $f_k \in A$ $(k = 1, 2, ...)$, для которых $\lim_{k\to\infty} df_k(x) = df(x)$ (по отношению к обычной топологии на $T_x^*\mathcal{M}$).

Функция $f \in \mathcal{F}_x$ называется *локально изотонной в точке* x (соотв.: *локально антиизотонной в точке* x), если существует окрестность точки x, в которой $a \prec b$ влечет $f(a) < f(b)$ (соотв.: $f(a) > f(b)$). Функция $f \in \mathcal{F}_x$ является *локально изотонной в области*, если f локально изотонна в каждой точке x этой области. Множество всех локально изотонных функций из $\mathcal{F}_x$ обозначается через $\mathcal{F}_x^+$.

Пусть $f \in \mathcal{F}_x^+$. Говорят, что функция $f \in \mathcal{F}_x$ *сильно изотонная в точке* x, если существует такая окрестность $U \subset T^*\mathcal{M}$ (т.е. $U = \{(p, Z) : p \in V \& Z \in W_p\}, V \subset \mathcal{M}, W_p \subset T_p^*\mathcal{M}$) элемента $(x, df(x))$, для которой отношение $(p, dg(p)) \in U$ влечет $g \in \mathcal{F}_x^+$ для любой $g \in \mathcal{F}_x$.

AP_3. *$\langle \mathcal{M}, \mathcal{T}_\prec \rangle$ обладает гладкостью $\mathcal{F}$.*

AP_4. *Множество всех сильно изотонных в x функций не пусто для любой $x \in \mathcal{M}$.*

AP_5. *Если некоторая $f \in \mathcal{F}_x$ есть граничный элемент множества сильно изотонных функций и множества сильно антиизотонных функций в x, тогда $df(x) = 0$.*

AP_6. *Для любой точки* $x \in \mathcal{M}$ *множество* $\mathcal{G}_x$ *есть псевдогруппа диффеоморфизмов* $g : U \to V$ $(U, V \subset \mathcal{M})$, *удовлетворяющих условиям:*

1) $g(x) = x$.

2) *Если* f_V *сильно изотонна в* x, *тогда функция* $f_U = f_V \circ g$ *является также сильно изотонной в* x *для любой* $g \in \mathcal{G}_x$.

3) *Если* f_U *и* f_V *граничные элементы в точке* x *множества функций, которые сильно изотонны в* x, *но сами* f_U *и* f_V *не сильно изотонны в* x, *то существует* $g \in \mathcal{G}_x$, *для которой* $df_U = df_V dg(p)$.

Теорема 9.19. *Пусть выполняются аксиомы* $AP_1 - AP_6$. *Тогда* $\langle \mathcal{M}, \mathcal{T}_\prec, \mathcal{F} \rangle$ *может быть снабжено псевдоримановой структурой (с точностью до конформного множителя)* $\langle , \rangle_x$ *сингатуры* $(+ - \ldots -)$ *такой, что* $\langle \mathcal{M}, \mathcal{T}_\prec, \mathcal{F}, \langle , \rangle_x \rangle$ *являеся временно ориентированным многообразием.*

Доказательство. См. [201]. ■

Глава 10

ЛЕВО-ИНВАРИАНТНЫЕ КОНИЧЕСКИЕ ПОРЯДКИ В $\mathbb{R}^n$

Данная глава содержит перевод на русский язык статьи [115], являющейся обзором результатов, полученных в области хроногеометрии в Новосибирском и Омском университетах с 1982 по 1995 годы.

Одной из хорошо разработанных в математике теорий является теория подполугрупп групп Ли. В действительности эта теория является теорией упорядоченных однородных многообразий, поскольку известно, что подполугруппа P, содержащая единицу e группы Ли G_n, задает *левоинвариантный порядок* на G_n.

В самом деле, если P – подполугруппа, то определяем порядок следующим образом: мы пишем $x \preceq y$, если $x^{-1}y \in P$. Легко проверяется, что $\preceq$ является левоинвариантным порядком на G_n[1]. Обратно, если $\preceq$ – левоинвариантный порядок на G_n, то $P = \{x \in G_n : e \preceq x\}$ есть подполугруппа группы G_n, содержащая единицу e.

Таким образом, равным образом можно использовать в исследованиях язык теории полугрупп, а можно использовать язык теории упорядоченных однородных пространств. Последний удобен, когда речь идет о приложениях теории полугрупп групп Ли в геометрии и физике. Язык теории порядка, как мы знаем, связан с представлением о причинно-следственных связях между событиями в пространстве-времени.

В этой главе рассматриваются упорядоченные однородные аффинные многообразия V^n с просто транзитивной связной односвязной разрешимой группой Ли G_n аффиных преобразований. Это одно из возможных направлений изучения однородных упорядоченных многообразий [1, 95]. Другое направление, более общее, состоит в исследовании однородных упорядоченных лоренцевых многообразий [175, 277, 278, 279].

Цель этой главы – дать обзор результатов по левоинвариантным упорядочиваниям, инвариантным относительно действия просто транзитивных аффинных групп преобразований n-мерного арифметического пространства $\mathbb{R}^n$. В ряде предыдущих глав в полной мере были представлены аналогичные результаты по упорядочиваниям, инвариантным относительно действия группы паралельных переносов пространства $\mathbb{R}^n$.

10.1. Определения

Порядок $\mathcal{P}$ в $\mathbb{R}^n$ есть семейство подмножеств

$$\mathcal{P} = \{P_x : x \in \mathbb{R}^n\},$$

удовлетворяющее следующим условиям:

(O1) $x \in P_x$.

[1]Порядок $\preceq$ на группе G называется левоинвариантным, если $x \preceq y$ влечет $gx \preceq gy$ для любого $g \in G$.

(O2) если $y \in P_x$, то $P_y \subset P_x$.

(O3) если $x \neq y$, то $P_x \neq P_y$.

Говорят, что порядок $\mathcal{P}$ *замкнутый*, если каждое множество P_x является замкнутым. Порядок $\mathcal{P}$ – *открытый*, если каждое множество $P_x \setminus \{x\}$ является открытым.

Пишем $x \preceq y$ тогда и только тогда, когда $y \in P_x$. Отношение $x \preceq y$ задает частичный порядок в $\mathbb{R}^n$.

Определение 10.1. Пусть H группа преобразований пространства $\mathbb{R}^n$. Говорят, что порядок $\mathcal{P}$ является *H-инвариантным*, если $h(P_x) = P_{h(x)}$ для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$ и любого $h \in H$.

Определение 10.2. Порядок $\mathcal{P}$ в $\mathbb{R}^n$ называется *релятивистским*, если

$$t(P_x) = P_{t(x)}$$

для любой $x \in \mathbb{R}^n$ и каждого параллельного переноса t в пространстве $\mathbb{R}^n$, т.е. $\mathcal{P}$ инвариантен относительно группы параллельных переносов.

Определение 10.3. Порядок $\mathcal{P}$ называется *коническим*, если каждое P_x есть (ординарный) конус с вершиной x, и называется *эллиптическим коническим*, если каждое P_x есть замкнутый эллиптический конус с вершиной x, т.е.

$$P_x = \left\{ y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n : y_n - x_n \geq \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} (y_i - x_i)^2} \right\},$$

$$x = (x_1, ..., x_n).$$

Пусть $G_n, n \geq 3$, – n-мерная связная односвязная разрешимая группа Ли. Далее в этой главе символ G_n будем использовать только для таких групп.

Пусть

$$\alpha : G_n \to \mathrm{Aff}\,(\mathbb{R}^n) \tag{10.1}$$

– просто транзитивное аффинное действие группы G_n на $\mathbb{R}^n$. Здесь Aff $(\mathbb{R}^n)$ обозначает группу всех аффинных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$.

Просто транзитивное действие (10.1) порождает полную левоинвариантную аффинную структуру $\mathcal{A}$ на группе Ли G_n. Действительно, рассмотрим следующий диффеоморфизм

$$\phi : G_n \to \mathbb{R}^n,$$

$$G_n \ni g \xrightarrow{\varphi} \phi(g) = \alpha(g)((0,...,0)) = (x_1,...,x_n) = x \in \mathbb{R}^n, \tag{10.2}$$

$$\phi(e) = (0,...,0),$$

где e – единица группы G_n, который может быть использован как глобальная аффинная карта на G_n и в которой левые сдвиги имеют вид

$$[L_h(\phi^{-1}(x))]^k = [L_h(g)]^k = \sum_{i=1}^{n} A_i^k x_i + A^k \quad (k = 1,...,n). \tag{10.3}$$

Далее в этой главе будем рассматривать только такие аффинные структуры на G_n, которые порождаются просто транзитивным аффинным действием группы G_n на $\mathbb{R}^n$.

Пусть $\mathcal{A}$ полная левоинвариантная аффинная структура на G_n. Эта структура определяет естественное просто транзитивное аффинное действие $\alpha_{\mathcal{A}}$ на $\mathbb{R}^n$ посредством группы левых сдвигов, действующей просто транзитивно на G_n. Действительно, в глобальной аффинной карте $\phi : G_n \to \mathbb{R}^n$ левый сдвиг имеет вид (10.3). Тогда действие $\alpha_{\mathcal{A}}$ определяется как

$$[\alpha_{\mathcal{A}}(h)(x)]^k = [L_h(\phi^{-1}(x))]^k, \quad h \in G_n \quad (k = 1,...,n).$$

Определение 10.4. Просто транзитивное аффинное действие α группы G_n на $\mathbb{R}^n$ и соответствующая аффинная структура на G_n называются *нормальными*, если $\alpha(g)$ является параллельным переносом для каждого $g \in T$, где T есть максимальная абелева подгруппа группы G_n.

10.2. Существование левоинвариантных конических порядков

Пусть α просто транзитивное аффинное действие (10.1) группы G_n на $\mathbb{R}^n$.

Существование $\alpha(G_3)$-инвариантного конического порядка на $\mathbb{R}^n$ эквивалентно существованию в G_n левоинвариантного порядка относительно полной левоинвариантной аффинной структуры на G_n, порожденной α или, что эквивалентно, существованию конической подполугруппы группы G_n.

Каждое ли просто транзитивное аффинное действие α группы G_n допускает $\alpha(G_n)$-инвариантный эллиптический конический порядок на $\mathbb{R}^n$? Известно, что это неверно для аффинной структуры на группе Гейзенберга G_3, содержащей канонические координаты первого рода [280] и канонические координаты второго рода [1, 2].

Теорема 10.1. *Если G_3 не является группой Гейзенберга, то G_3 допускает левоинвариантный эллиптический конический порядок относительно полной левоинвариантной нормальной аффинной структуры $\mathcal{A}$, содержащей координаты второго рода. Значит, $\mathbb{R}^3$ допускает $\alpha(G_3)$-инвариантный эллиптический конический порядок, где α есть просто транзитивное нормальное аффинное действие, соответствующее структуре $\mathcal{A}$, построенной с помощью метода Ямагучи* [357].

Доказательство. См. [2, 3]. ■

Детальное описание этих конических порядков дано в [3].

$\alpha(G_n)$-инвариантный эллиптический конический порядок $\mathcal{P} = \{P_a : a \in \mathbb{R}^n\}$ дает возможность ввести левоинвариантную лоренцеву метрику $\langle , \rangle_a$ (с точностью до конформного множителя) в G_n, или, что эквивалентно, $\alpha(G)$-инвариантную лоренцеву местрику на $\mathbb{R}^n$ [1]. В самом деле, если P_a есть одна половина эллиптического конуса

$$\sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}(a) x_i x_k = 0,$$

то
$$\langle \xi, \xi \rangle_a = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}(a)\xi^i \xi^k$$
есть лоренцева метрика на $\mathbb{R}^n$. Такая лоренцева метрика является временно ориентированной (А.В.Кузьминых, 1985, неопубликованный доклад, сделанный в Новосибирском университете), причинной и допускает группы движений $\alpha(G_n)$.

Известно что временно ориентированная метрика на лоренцевом мнгообразии задает причинный порядок. Некоторые вопросы, связанные с этим порядком, были решены в работах [175, 277, 278, 279, 310].

10.3. Единственность абелевой хроногеометрии

Аффинные структуры $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ на G называются *эквивалентными*, если существует аффинная биекция $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такая, что для любых двух глобальных аффинных карт
$$\mu_1 : G \to \mathbb{R}^n, \quad \mu_2 : G \to \mathbb{R}^n,$$
принадлежащих соответственно $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$, справедливо равенство $\mu_1 \circ \mu_2^{-1} = A$.

Аффинные действия α_1 и α_2 группы G_n на $\mathbb{R}^n$ называются *аффинно сопряженными*, если существует аффинная биекция $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такая, что $\alpha_1(g) = A \circ \alpha_2(g) \circ A^{-1}$ для каждого $g \in G_n$.

Пусть $\mathcal{P} = \{P_g : g \in G_n\}$ левоинвариантный порядок на G_n. Рассмотрим диффеоморфизмы $\phi_2, \phi_2 : G_n \to \mathbb{R}^n$ вида (10.2), которые порождаются аффинными действиями α_1, α_2 соответственно.

Пусть
$$\mathcal{P}_i = \phi_i(\mathcal{P}) = \{\phi_i(P_g) : P_g \in \mathcal{P}\} \quad (i = 1, 2).$$

Ясно, что
$$\alpha_i(h)(P_{ix(i)}) = P_{i\alpha_i(h)(x(i))}$$

для каждого $h \in G_n$, где $P_{ix(i)} = \phi_i(P_g), x(i) = \phi_i(g)$. Другими словами, порядок $\mathcal{P}_i$ является $\alpha_i(G_n)$-инвариантным.

Имеем следующую теорему:

Теорема 10.2. *Пусть $\alpha_1(G_n)$ – группа параллельных переносов в $\mathbb{R}^n$, где $n \geq 3$, и $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ состоят из эллиптических конусов[2]. Тогда действия α_1, α_2 аффинно сопряжены и соответствующие аффинные структуры $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ эквивалентны.*

Доказательство. См. [110]. ■

Ясно, что группа G_n в условиях теоремы 10.2 является абелевой.

Как известно [238], абелева группа может иметь различные аффинно неэквивалентные просто транзитивные представления в $\mathbb{R}^n$, и, следовательно, возникает вопрос о существовании аффинно неэквивалентных причинных теорий пространства-времени Минковского. Для $n = 4$ теорема 10.2 говорит об единственности абелевой хроногеометрии, т.е. традиционного изложения специальной теории относительности, когда световые конусы в $\mathbb{R}^4$ берутся равными и параллельными.

Замечание 10.1. Утверждение теоремы 10.2, аннонсированной в [113], справедливо для нормального действия α_1.

10.4. Порядковые автоморфизмы

Пусть $\mathcal{P}$ – порядок в $\mathbb{R}^n$.

Порядковый автоморфизм, или *$\mathcal{P}$-автоморфизм* – это гомеоморфизм $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такой, что $f(P_x) = P_{f(x)}$ для каждой $x \in \mathbb{R}^n$. Будем обозначать множество всех порядковых автоморфизмом чере $Aut(\mathcal{P})$.

Вычисление порядковых автоморфизмов является очень трудной задачей. Подробные описания порядковых автоморфизмов в случае абелевой группы и основной аффинной груп-

[2]Теорема верна для строго выпуклых конусов [110].

пы Ли были даны соответственно в статьях А.Д.Александрова [86, 29] и А.К.Гуца [94, 96] и представлены в гл.2,4 и 5.

Для других некоммутативных групп Ли имеем теорему:

Теорема 10.3. *Пусть $\mathcal{P}$ является $\alpha(G)$-инвариантным эллиптическим коническим порядком в $\mathbb{R}^3$, где α – нормальное просто транзитивное аффинное действие. Тогда $Aut(\mathcal{P}) \subset Aff(\mathbb{R}^3)$.*

Доказательство. См. [1, 222, 226]. ■

Доказательство теоремы 10.3, наряду с другими, использует теорему А.В.Шайденко [214], в которой описываются порядковые автоморфизмы выпуклых конических конусов в $\mathbb{R}^n, n \geq 3$.

Пример 10.1. Не эллиптический конический порядок $\mathcal{P}$ в $\mathbb{R}^3$

$$P_{(x_1,x_2,x_3)} = \{y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : y_i \geq x_i \ (i = 1, 2, 3)\}$$

является $\alpha(G_3III)$-инвариантным, где $\alpha(G_3III)$ состоит из аффинных преобразований вида

$$(x_1, x_2, x_3) \to (x_1 e^{-t} + \alpha, x_2 + \beta, x_3 + t),$$

$$\alpha, \beta, t \in \mathbb{R}.$$

Он обладает неаффинным $\mathcal{P}$-автоморфизмом

$$f : (x_1, x_2, x_3) \to (\phi(x_1), \psi(x_2), \mu(x_3)),$$

где ϕ, ψ, μ – произвольные неаффинные гомеоморфизмы. ■

Определение 10.5. *Луч контингенции* множества $M \subset \mathbb{R}^n$ в точке x есть предел лучей, исходящих из точки x и проходящих через $y \in M$ при стремлении y к x. Множество всех таких лучей контингенции обозначаем через $cont(M, x)$.

Гипотеза 10.1. *Утверждение теоремы* 10.3 *справедливо для произвольного $\alpha(G_n)$-инвариантного порядка в $\mathbb{R}^n, n \geq 3$, для которого $cont(P_x, x)$ есть эллиптический конус с внутренними точками.*

10.5. Разрывные расширения группы $\mathbf{Aut}(\mathcal{P})$

Здесь мы покажем, как может быть обобщено обычное понятие порядкового автоморфизма [90].

Пусть $\mathcal{I}$ – идеал подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$, т.е. семейство подмножеств, удовлетворяющее условиям:

1) если $A, B \in \mathcal{I}$, то $A \cup B \in \mathcal{I}$;

2) если $A \subset B$ и $B \in \mathcal{I}$, то $A \in \mathcal{I}$.

Определение 10.6. Биекция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется *$\mathcal{I}$-порядковым автоморфизмом*, если симметрическая разница $f(P_x) \bigtriangleup P_f(x) \in \mathcal{I}$ для любой точки $x \notin A_f$, где A_f есть некоторый элемент идеала $\mathcal{I}$.

Говорят, что конический порядок $\mathcal{P} = \{P_x : x \in \mathbb{R}^n\}$ является *строго выпуклым*, если каждый конус P_x удовлетворяет условиям:

1) каждый конус P_x является выпуклым;

2) каждое пересечение P_x и опорной гиперплоскости к P_x есть либо точка $\{x\}$, либо образующая.

Теорема 10.4. *Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – биекция, такая, что $f(P_x) \bigtriangleup P_f(x) \in \mathcal{I}$ для каждой точки $x \in R^n, n \geq 3$, где $\mathcal{P} = \{P_x : x \in \mathbb{R}^n\}$ есть замкнутый релятивистский конический строго выпуклый порядок, $int(P_x) \neq \emptyset$, and $\mathcal{I}$ – идеал подмножеств, имеющих нулевую меру Лебега. Тогда f – аффинное отображение.*

Доказательство. См. [219]. ■

В [220] была заявлена следующая

Теорема 10.5. *Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, n \geq 3$, $\mathcal{I}$-порядковый автоморфизм замкнутого релятивистского конического строго выпуклого порядка $\mathcal{P} = \{P_x : x \in \mathbb{R}^n\}$, где $int(P_x) \neq \emptyset$, and $\mathcal{I}$ есть либо идеал подмножеств с нулевой мерой Лебега, либо идеал подмножеств первой категории*

Бэра. Тогда существует аффинное отображение g такое, что $g\,|_{\mathbb{R}^n\setminus A_f} = f\,|_{\mathbb{R}^n\setminus A_f}$. ■

Следующий пример позволяет лучше понять смысл теоремы 10.4 и 10.5.

Пример 10.2. Рассмотрим релятивистский эллиптический конический порядок

$$P_x = \{y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n : y_n - x_n \geq \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}(y_i - x_i)^2}\},$$

$$x = (x_1, ..., x_n), \quad n \geq 2,$$

и биекцию $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, определенную следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} t(x), & x \in H \\ x, & x \in \mathbb{R}^n \setminus H, \end{cases}$$

где $H = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n \geq x_1 + 1\}$ и $t(x) = x + (1, 0, ..., 0, 1)$.

Тогда f есть $\mathcal{I}$-порядковый автоморфизм относительно идеала $\mathcal{I}_D$ множеств, имеющих нулевую меру Дирака с носителем $\{(0, ..., 0)\}$, но не является $\mathcal{I}_L$-порядковым автоморфизмом относительно идеала $\mathcal{I}_L$ множеств, имеющих нулевую меру Лебега. ■

Физическая интепретация. С физической точки зрения теория $\mathcal{I}$-порядковых автоморфизмов – это теория, в которой допускается возможность потери некоторой информации, касающейся причинно-следственных связей, при переходе от одной системы отсчета к другой.

10.6. Однородные порядки

Пусть $\mathcal{P}$ – порядок в $\mathbb{R}^n$.

Определение 10.7. Порядок $\mathcal{P}$ называется *int-однородным* (соотв.: *∂-однородным*, *ext-однородным*), если стабилизатор $Aut(\mathcal{P})_x$ в x действует транзитивно на $int(P_x)$ (соотв.: на $\partial P_x \setminus \{x\}$, $\mathbb{R}^n \setminus (P_x \cup P_x^-)$).

Напомним, что $int(A)$, ∂A обозначают внутренность, границу множества A соответственно и $P_x^- = \{y \in \mathbb{R}^n : x \in P_y\}$.

Теорема 10.6. *Пусть $\mathcal{P}$ – нерелятивистский эллиптический конический $\alpha(G_3)$-инвариантный порядок в $\mathbb{R}^3$, где α есть нормальное просто транзитивное действие группы G_3 на $\mathbb{R}^3$. Тогда $\mathcal{P}$ не является ни $int-$, ни $\partial-$, ни ext-однородным.*

Доказательство. См. [224, 226]. ■

Пример 10.5. Релятивистский эллиптический конический порядок из примера 10.2 при $n = 3$ является $\alpha(G_3VII_0)$-инвариантным, т.е. инвариантным относительно некоммутативной группы аффинных преобразований вида

$$(x_1, x_2, x_3) \to$$

$$\to (x_1 \cos(t) + x_2 \sin(t) + \alpha, -x_1 \sin(t) + x_2 \cos(t) + \beta, x_3 + t),$$

$$t, \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

и является одновременно $int-$, $\partial-$, и ext-однородным. ■

Релятивистские конические однородные порядки в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, были изучены в [21, 62] (см. также обзор [86]).

Пусть $\mathcal{A}_\gamma$ – полная левоинвариантная аффинная структура на G_3, предложенная С.П.Гавриловым в статье [68]. Эта структура задает естественное просто транзитивное аффинное действие α_γ на $\mathbb{R}^3$. В [68] описываются $\alpha_\gamma(G_3)$-инвариантные лоренцевы метрики относительно гладкой структуры $\mathcal{A}_\gamma$. Пусть $\langle , \rangle$ такая метрика в $\mathbb{R}^3$.

Конус K_x с вершиной x в $\mathbb{R}^3$ называется *причинным*, если любой луч из K_x имеет направляющий вектор ξ, принадлежащий фиксированной половине касательного конуса $\{\zeta : \langle\zeta,\zeta\rangle_x \geq 0\}$. Порядок $\mathcal{P}$ в $\mathbb{R}^3$ называется *аффинно причинным*, если он задается множеством эллиптических конусов $\{P_x : x \in \mathbb{R}^3\}$, таким, что каждый конус P_x является причинным.

Теорема 10.7. *Пусть $\mathcal{P}$ аффинный причинный порядок относительно аффинной структуры С.П.Гаврилова $\mathcal{A}_\gamma$. Тогда для групп Ли G_3 типа I, VI_0, VII_0 класса I* (см. [68]) *порядок $\mathcal{P}$ является одновременно $int-, \partial-$ и ext-однородным. Соответствующие лоренцевы метрики плоские, и, значит, порядок $\mathcal{P}$ является релятивистским. В других случаях порядок $\mathcal{P}$ не является ни $int-$, ни $\partial-$, ни ext-однородным.*

Доказательство. См. [104, 109]. ■

10.7. Плотные порядки

Определение 10.8. Порядок $\mathcal{P}$ называется *плотным*, если для любых $x, y \in \mathbb{R}^n, y \in P_x$ множество $P_x \cap P_y^- \neq \{x, y\}$.

Интересно узнать, как устроены плотные порядки.

Основная аффинная группа Ли G_n – это связная односвязная разрешимая группа Ли, алгебра Ли которой в некотором базисе задается следующими коммутационными соотношениями

$$[X_n, X_i] = X_i \quad (i = 1, ..., n-1).$$

Замечание 10.2. Особое положение основной аффинной группы Ли среди упорядоченных групп Ли было установлено в работах К.Хофманна и Дж.Лаусона [280], Й.Хильгерта и К.Хофманна [277] и А.В.Левичева [174, 176].

Порядки и их автоморфизмы основной аффинной группы Ли были исследованы в статье [94].

Важно отметить, что 4-мерная основная аффинная группа Ли является просто транзитивной подгруппой группы изометрий стационарной вселенной де Ситтера, которая рассматривалась Хойлом и Нарликаром в качестве альтернативы теории Большого Взрыва в космологии.

Определение 10.9. Пусть G группа Ли. Подполугруппа $S \subset G$ называется *лучевой*, если S порождается (как полугруппа) объединением однопараметричеких полугрупп, которые S содержит. *Подполугруппа Ли* группы Ли G есть замыкание лучевой подполугруппы [281, p.135].

Теорема 10.8. *Пусть $\mathcal{P} = \{P_x : x \in G_n\}$ плотный замкнутый левоинвариантный порядок на абелевой или на основной аффинной группе Ли $G_n, n \geq 2$. Предположим, что минимальная полугруппа Ли S, для которой $P_e \subset S$, удовлетворяет условию $S \cap S^{-1} = \{e\}$. Тогда P_e есть подполугруппа Ли.*

Доказательство. См. [100, 171]. ∎

Следствие 10.1. *Пусть α просто транзитивное аффинное действие абелевой группы G_n на $\mathbb{R}^n$ посредством параллельных переносов, т.е. $\alpha(G_n)$ есть группа параллельных переносов. Тогда порядок $\phi(\mathcal{P}) = \{\phi(P_x) : P_x \in \mathcal{P}\}$ in $\mathbb{R}^n$ является релятивистским замкнутым коническим порядком, где ϕ есть диффеоморфизм* (10.2) *и порядок $\mathcal{P}$ удовлетворяет условиям теоремы* 10.8.

Следствие 10.2. *Пусть α просто транзитивное аффинное действие основной аффинной группы Ли G_n на $\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 > 0\}$ посредством преобразований вида:*

$$(x_1, ..., x_n) \to (\lambda x_1, \lambda x_2 + \alpha_1, ..., \lambda x_n + \alpha_{n-1}),$$

$$\lambda > 0, \quad \alpha_1, ..., \alpha_{n-1} \in \mathbb{R},$$

т.е. действие α определяет неполную левоинвариантную аф-

финную структуру на G_n*. Тогда порядок* $\phi(\mathcal{P}) = \{\phi(P_x) : P_x \in \mathcal{P}\}$ *in* $\mathbb{R}^n_+$ *является релятивистским замкнутым коническим порядком, где* ϕ *есть диффеоморфизм* (10.2) *и порядок* $\mathcal{P}$ *удовлетворяет условиям теоремы* 10.8*.*

Гипотеза 10.2. *Утверждение теоремы* 10.8 *истинно для произвольной связной односвязной разрешимой группы Ли* $G_n, n \geq 2$.

10.8. Аксиоматизация трёхмерной псевдоевклидовой геометрии

Используем полученные результаты для аксиоматизации псевдоевклидовой геометрии. Наша цель будет достигнута, если будут решены следующие задачи:

1) оснастить абстрактную группу G левоинвариантной аффинной структурой;

2) ввести лоренцеву метрику $\langle , \rangle_a$ на группе G без того, чтобы использовать понятие гладкого тензорного поля.

Первая задача была решена В.К.Иониным [131, 134].

Структура связного односвязного аффинного многообразия на множестве G есть четверка $\langle G, \Gamma, \Phi, \Psi \rangle$, где Γ есть множество всех аффинных преобразований вещественной прямой $\mathbb{R}$, и

$$\Phi \subset G^{\mathbb{R}}, \quad \Psi \subset \mathbb{R}^G$$

удовлетворяют следующим условиям:

1) Для любых $\phi \in \Phi$ и $\psi \in \Psi$ композиция $\psi \circ \phi \in \Gamma$.

2) Φ максимально, т.е. если $f : \mathbb{R} \to G$, но $f \notin \Phi$, то существует $\psi \in \Psi$ такое, что $\psi \circ f \notin \Gamma$.

3) Ψ максимально, т.е. если $f : G \to \mathbb{R}$, но $f \notin \Psi$, то существует $\phi \in \Phi$ такое, что $f \circ \phi \notin \Gamma$.

4) Для любых $x, y \in G$ существует $\phi \in \Phi$ такое, что $x, y \in \phi(\mathbb{R})$.

5) Для любых $x, y \in G, x \neq y$, существует $\psi \in \Psi$ такое, что $\psi(x) \neq \psi(y)$.

Аффинное преобразование $h : G \to G$ определяется в этих терминах как отображение, для которого $\psi \circ h \circ \phi \in \Gamma$ для любого $\phi \in \Phi$ и $\psi \in \Psi$.

Множество *прямых* – это множество $\{\phi(\mathbb{R}) : \phi \in \Phi_0\}$, где $\Phi_0 \subset \Phi$ – подмножество всех непостоянных отображений. *Луч* с началом x есть множество $\phi(\mathbb{R}_+)$, где $\phi \in \Phi_0$ и $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} : t > 0\}$, $\phi(0) = x$.

Обычным образом определяется *размерность* $dim\ G$ аффинного многообразия G [3].

Аффинная структура $\langle G, \Gamma, \Phi, \Psi\rangle$ *левоинвариантная*, если каждый левый сдвиг $L\ : x \to ax$ является аффинным преобразованием.

Левоинвариантная аффинная структура $\langle G, \Gamma, \Phi, \Psi\rangle$ называется *нормальной*, если для любых $x, y \in G$ и $t \in T$, где T максимальная абелева подгруппа группы G, существует единственный $z \in G$ такой, что

$$\psi(z) - \psi(y) = \psi(L_t(x)) - \psi(x)$$

для любого $\psi \in \Psi$.

Точка $a \in M \subset G$ называется *внутренней* для множества M, если для любого $\phi \in \Phi_0$, $\phi(\mathbb{R}) \ni a$ найдутся $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \beta$, для которых $a \in \phi((\alpha, \beta))$ и $\phi((\alpha, \beta)) \subset M$. Множество всех внутренних точек для M обозначается как $int(M)$. Значит, мы имеем топологию на $\langle G, \Gamma, \Phi, \Psi\rangle$, которая не связана априори ни с каким-либо порядком на G.

Вторая задача решается следующим образом.

Пусть G произвольная абстрактная группа, снабженная левоинвариантной аффинной структурой $\langle G, \Gamma, \Phi, \Psi\rangle$. Предположим, что на G задан левоинвариантный порядок $\mathcal{P} = \{P_x : x \in G\}$, удовлетворяющий условиям:

[3] См., например, определение размерности пространства в § 3.11.

AO_1. $P = P_e$ – конус с острой вершиной e.

AO_2. Аффинная оболочка множества P совпадает с G.

AO_3. Множество P замкнутое, т.е. $G \setminus P = int(G \setminus P)$.

AO_4. Конус P – эллиптический, т.е. для любых двух $x, y \in P, x, y \neq e$, $x \neq y$, найдется аффинное преобразование $f \in \mathrm{Aff}\,(G)$ такое, что $f(e) = e$, $f(x) = y$, $f(P) = P$.

AO_5. Порядок $\mathcal{P}$ является int-однородным.

Теорема 10.9. *Пусть G абстрактная группа, снабженная 3-мерной левоинвариантной нормальной аффинной структурой Ионина $\langle G, \Gamma, \Phi, \Psi \rangle$ и левоинвариантным порядком $\mathcal{P}$, удовлетворяющим условиям $AO_1 - AO_5$. Тогда G допускает структуру 3-мерной связной односвязной разрешимой группы Ли с полной левоинвариантной аффинной структурой, порожденной структурой Ионина $\langle G, \Gamma, \Phi, \Psi \rangle$, и левоинвариантной плоской лоренцевой метрикой $\langle , \rangle$ такой, что в глобальной аффинной карте x_1, x_2, x_3*

$$x = (x_1, x_2, x_3),$$

$$\langle \xi, \zeta \rangle_x = \sum_{i,k=1}^{3} g_{ik} \xi^i \zeta^k,$$

$$g_{ik} = const.$$

Значит, порядок $\mathcal{P}$ является G-инвариантным и причинным относительно метрики $\langle\ ,\ \rangle$, и группа G есть просто транзитивная подгруппа группы всех изометрий псевдоевклидова пространства $\langle G, \langle\ ,\ \rangle\rangle$.

Доказательство. См. [226, 113]. ■

Замечание 10.3. Теорема 10.9 показывает, что псевдоевклидова геометрия в $\mathbb{R}^3$ может быть определена без предположения абелевости группы Ли G, относительно которой инвариантен порядок $\mathcal{P}$. А это обычное условие во многих аксиоматиках специальной теории относительности.

Глава 11

ТОПОСНАЯ ХРОНОГЕОМЕТРИЯ

11.1. Переход к теории топосов. Новые возможности

Основным исходным понятием хроногеометрии при построении картины Вселенной, благодаря Минковскому, стало понятие *события*. Вселенная **как пространство и время** – это совокупность всех событий. Иными словами, Вселенная – это Мир событий.

Для того чтобы Мир событий стал объектом научного исследования, необходимо осуществить математизацию Мира событий.

В предыдущих главах мы интерпретировали Мир событий как множество $\mathcal{M}$. Это означает, что *математическое моделирование* физического пространства-времени основывалось на теории множеств. Теория множеств в двадцатом веке являлась не только языком, на котором математики формулировали, реализовывали свои мысли, но и, по существу, идеологией математиков. Понятно, что Природа не обязана втискиваться в теоретико-множественные идеолологические рамки математических абстракций. Следствием теоретико-множественного подхода являлось рассмотрение **события как неделимого явления, как элемента множества $\mathcal{M}$, как геометрической точки**. Однако это явное упрощение. Временные петли, появляющиеся в общей теории относительности, наглядно демонстрируют недостаток такого подхода.

Событие в современной *теоретико-множественной* теории пространства-времени – это набор из четырех чисел (x, y, x, t), которые отражают лишь геометрические свойства *события*. Это постоянно отмечалось многими исследователями. Но событие обладает и физическими [129, с.15-16], и, возможно, многими другими свойствами. Выход за пределы теории множеств даст новые возможности для описания свойств реального пространства-времени [106]. Новая теория должна допускать возможность автоматического усложнения структуры элементарного (атомарного) события в зависимости от возникшей ситуации, наделять его физическими и другими свойствами. При этом усложнится структура (причинного) взаимодействия событий и вполне могут измениться представления о способах оснащения пространства-времени топологической и метрической структурами.

В идеале необходимо иметь формальную теорию пространства-времени, которая предстает в самых неожиданных формах при выборе конкретной модели. Нам представляется, что пришло время перейти к теоретико-топосной математике, которая предлагает в качестве моделей особые категории, именуемые топосами, и которые хотя и подобны теории множеств, но обладают более изощренной структурой, в том числе и более сложной логикой.

Ниже в § 11.3 дан пример такого подхода: только за счет выбора модели (топоса) из одного набора аксиом можно получить либо плоское пространство-время Минковского, либо искривленное пространство-время общей теории относительности.

Взгляд на пространство-время не как на объект топоса, а как на топос позволяет (см. § 11.5) рассматривать различные потоки времени и получать не теоретико-множественные, т.е. не описываемые как отображения, переходы между потоками времени.

Таким образом, в §§ 11.3, 11.5 мы демонстрируем теоретико-топосную схему аксиоматического построения причинной топосной теории пространства-времени. Полученные в итоге теории пространства-времени будут уже неклассическими, отличными от теории пространства-времени Минковского.

В § 11.4 показано, как В.Трифонову удалось дать теоретико-топосное объяснение четырехмерности пространства-времени. Оказывается, это связано с выбором классической логики оперирования с «подмножествами».

Еще более удивительные возможности открывает использование в качестве модели пространства-времени объектов *гладких* топосов

$$\mathbf{Sets}^{\mathbf{L}^{\mathrm{op}}},\ \mathbf{Sh}(\mathbf{L}),\ \mathcal{G},\ \mathcal{F}$$

и других [307].

В роли Мира событий вместо $\mathbb{R}^4$, принимаемого в теории множеств, выступает, например, его «аналог»

$$R^4 = \ell C^\infty(\mathbb{R}^4) \in \mathbf{Sets}^{\mathbf{L}^{\mathrm{op}}},$$

являющийся уже не простым набором точек, но набором гладких функций. Здесь $\mathbf{L}$ – это так называемая категория локусов (C^∞-гладких колец). При этом появляется возможность наделять событие структурой более сложной, чем простой набор из четырех чисел. Событие меняется в зависимости от взгляда на него. Формально это называется быть *элементом в стадии локуса* ℓA.

Событие x **как элемент в стадии локуса** $\ell A = \ell C^\infty(\mathbb{R}^n)/I \in \mathbf{L}$ пространства-времени R^4, что символически записывается как

$$x \in_{\ell A} R^4,$$

является классом C^∞-гладких вектор-функций $(X^0(u), X^1(u), X^2(u),\ \ X^3(u)) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^4$, где каждая функция $X^i(u)$ берется по $mod\ I$, I – некоторый идеал C^∞-гладких функций из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$. Аргумент $u \in \mathbb{R}^n$ – это «скрытые» физические параметры, отвечающие стадии ℓA.

Отсюда следует, что в *стадии вещественных чисел* $R = \ell C^\infty(\mathbb{R})$ рассматриваемого топоса *событие* x *описывается* C^∞*-гладкой вектор-функцией* $(X^0(u), X^1(u), X^2(u), X^3(u))$, $u \in \mathbb{R}$. Классические четыре числа (x^0, x^1, x^2, x^3) – координаты события x, получаются в стадии $\mathbf{1} = \ell C^\infty(\mathbb{R}^0) = \ell C^\infty(\mathbb{R})/(t)$ (идеал (t) позволят отождествлять функции, если их значения в 0 совпадают), то есть $x^i = X^i(0), i = 0, 1, 2, 3$.

Пространственно-временные преобразования $f : R^4 \to R^4$ – это *элементы в стадии* ℓA функтора

$$(R^4)^{R^4} \in \mathbf{Sets}^{\mathbf{L}^{\mathbf{op}}},$$

состоящие из классов C^∞-гладких вектор-функций $(F^0(u,x), F^1(u,x), \ F^2(u,x), F^3(u,x)) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, где каждая функция $F^i(u,x)$ берется по mod идеала $\pi^*(I) = (\phi \circ \pi \mid \phi \in I, \pi : \mathbb{R}^{n+4} \to \mathbb{R}^n$ – проекция). В стадии $\mathbf{1}$ – это обычные преобразования без «скрытого» физического многомерного параметра u, а в стадии R – гладкие преобразования со «скрытым» параметром.

Подробно описанная теоретико-топосная модель пространства-времени дана в книге автора [124].

11.2. Элементарные топосы

Топос – это частный случай более общего понятия *категория*. Теория категорий базируется на двух первичных понятиях: *объекты* и *морфизмы*.

11.2.1. Категории

Определение 11.1. *Категория* $\mathcal{K}$ включает в себя:

1) объекты $A, B, C, ...$;

2) морфизмы $f, g, h, ...$;

3) каждый морфизм f связан с двумя объектами A, B; первый называют областью определения морфизма, а второй – областью значений. Используются обозначения $f : A \longrightarrow B$ или $A \xrightarrow{f} B$;

4) для каждого объекта A имеется тождественный морфизм $1_A : A \longrightarrow A$;

5) для каждой пары морфизмов $f : A \longrightarrow B$ и $g : B \longrightarrow C$ определена композиция морфизмов $g \circ f : A \longrightarrow C$. Композиция должна удовлетворять двум условиям:

(i) Закон идентичности. Если дан морфизм $f : A \longrightarrow B$, то $1_B \circ f = f$ и $f \circ 1_A = f$.

(ii) Закон ассоциативности. Если даны морфизмы $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$, $h : C \longrightarrow D$, то $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Совокупность морфизмов из A в B обозначают как $Hom_{\mathcal{K}}(A, B)$ или просто как $Hom(A, B)$.

Двойственная категория. Если дана категория $\mathcal{K}$, то легко строится *двойственная категория* $\mathcal{K}^{op}$. Она имеет те же самые объекты, что категория $\mathcal{K}$, а морфизмы получаются из морфизмов категории $\mathcal{K}$ «обращением стрелки», т.е. если в $\mathcal{K}$ есть морфизм $f : A \longrightarrow B$, то в $\mathcal{K}^{op}$ рассматривается морфизм $f : B \longrightarrow A$.

Определение 11.2. Морфизм $f : A \longrightarrow B$ называется *мономорфизмом*, если для любой пары морфизмов $g : C \longrightarrow A$, $h : C \longrightarrow A$ из равенства $f \circ g = f \circ h$ следует $g = h$.

Определение 11.3. *Диаграммой* в категории $\mathcal{K}$ называется совокупность объектов $A_i, A_j, \ldots$ вместе с некоторыми морфизмами $f : A_i \longrightarrow A_j$ между отдельными объектами из этой диаграммы (между данной парой объектов может быть несколько морфизмов, а может и не быть их вовсе).

Диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "k"] \\ Y \arrow[r, "h"'] & B \end{tikzcd}$$

называется *декартовым квадратом*, если

1) она коммутативна, т.е. $k \circ f = h \circ g$;

2) для любых $\phi : C \longrightarrow X$, $\psi : C \longrightarrow Y$, для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\psi"'] & X \arrow[d, "k,"] \\ Y \arrow[r, "h"'] & B \end{tikzcd}$$

существует единственный морфизм $j : C \longrightarrow A$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} C \arrow[dr, "j"'] \arrow[drr, "\phi"] \arrow[ddr, "\psi"'] & & \\ & A \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "g"] & X \\ & Y & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Определение 11.4. *Конусом* для диаграммы $\mathcal{D}$ с объектами $A_i, A_j, ...$ называется такой объект C вместе с морфизмами $f_i : C \longrightarrow A_i$ для каждого объекта A_i из $\mathcal{D}$, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[rr, "g"] & & A_j \\ & C \arrow[ul, "f_i"] \arrow[ur, "f_j"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна для любого морфизма $g : A_i \longrightarrow A_j$ из $\mathcal{D}$.

Конус для диаграммы $\mathcal{D}$ обозначаем через $(f_i : C \longrightarrow A_i)$.

Определение 11.5. *Предел диаграммы* $\mathcal{D}$ есть конус $(f_i : C \longrightarrow A_i)$ такой, что для любого другого конуса $(f_i' : C' \longrightarrow A_i)$ для $\mathcal{D}$ существует единственный морфизм $f : C' \longrightarrow C$, для которого диаграмма

$$\begin{tikzcd} & A_i & \\ C' \arrow[ur, "f_i'"] \arrow[rr, "f"'] & & C \arrow[ul, "f_i"'] \end{tikzcd}$$

коммутативна для каждого объекта A_i из $\mathcal{D}$.

Диаграмма *конечная*, если она состоит их конечного числа объектов и конечного числа морфизмов.

Определение 11.6. Категория $\mathcal{K}$ называется *конечно полной,* если она содержит предел любой конечной диаграммы.

Конечный объект. Пусть $\mathcal{D}$ – пустая диаграмма

т.е. без объектов и без морфизмов. Тогда конус для $\mathcal{D}$ – это просто любой объект. (Нет никаких морфизмов). Предел для пустой $\mathcal{D}$ есть объект C такой, что любого объекта C' существует единственный морфизм $f : C' \longrightarrow C$.

Этот удивительный объект C получает специальное название *конечный объект* и обозначается как 1.

В категории множеств **Sets** конечный объект – это любое одноэлементное множество.

Определение 11.7. Объект 1 называется *конечным*, если для каждого объекта A существует один и только один морфизм из A в 1.

11.2.2. Функторы. Категория функторов $\mathcal{E}^{\mathcal{K}}$

Функтором F из категории $\mathcal{K}$ в категорию $\mathcal{E}$ называется функция, которая ставит в соответствие

1) каждому объекту A категории $\mathcal{K}$ объект $F(A)$ категории $\mathcal{E}$;

2) каждому морфизму $f : A \longrightarrow B$ категории $\mathcal{K}$ морфизм $F(f) : F(A) \longrightarrow F(B)$ категории $\mathcal{E}$ такой, что

a) $F(1_A) = 1_{F(A)}$;

b) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ для любых морфизмом f, g, для которых определена композиция $g \circ f$.

Категория функторов. Пусть даны две категории $\mathcal{K}$, $\mathcal{E}$. Построим *категорию функторов* $\mathcal{E}^{\mathcal{K}}$, объектами которой являются функторы из $\mathcal{K}$ в $\mathcal{E}$.

Определим морфизмы категории $\mathcal{E}^{\mathcal{K}}$. Возьмем два функтора $F : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{E}$ и $G : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{E}$. *Морфизм* $\tau : F \longrightarrow G$ *объекта* F *в объект* G называется *естественным преобразованием* функтора F в функтор G и состоит из семейства морфизмов $\{\tau_A : F(A) \longrightarrow G(A),$ где $A -$ любой объект категории $\mathcal{K}\}$. Причем морфизм $\tau_A : F(A) \longrightarrow G(A)$ таков, что для любого морфизма $f : A \longrightarrow B$ диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & F(A) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ B & F(B) \arrow[r, "\tau_B"] & G(B) \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Морфизмы τ_A называются *компонентами* преобразования τ.

11.2.3. Топосы

Теория категорий развивалась долгое время без какого-либо серьезного к ней отношения со стороны математиков. Она рассматривалась как экзотическая теория обо всем и про всё. Именно это не способствовало ее использованию при решении многих важных научных задач.

В 1960 г. А. Гротендик пришел к открытию класса категорий, который впоследствии назвал топосами и которые являются исключительно сложными теоретико-множественными конструкциями». Топосы Гротендика имели непосредственное отношение к востребованной в математике теории пучков.

«Ловер к концу 60-х годов заметил, что каждый топос Гротендика имеет объект истинностных значений, а само двухэлементное множество {*истина, ложь*} можно рассматривать как «объект истинностных значений» в категории множеств. Этим фундаментальным открытием была значительно продвинута разработка теории топосов. В результате появилось понятие классификатора подобъекта, которое в свою очередь вводит в обиход понятие «подобъекта», являющегося категорным аналогом понятия подмножества. Классификатор подобъектов обозначается посредством Ω, и следствием существования такого объекта является всё то, что мы можем сказать о подобъектах A объекта D и что может быть переведено в разговор об отображениях D в Ω»[1]. В итоге элементарный топос (т.е. его свойства могут быть описаны в первопорядковом языке) был определен как декартово замкнутая категория с классификатором подобъектов.

Топосы оказались теми категориями, которые достаточно близки к категории множеств **Sets**. Теория множеств стала оплотом математики XX века, отчасти благодаря тому, что обладает возможностью легко порождать объекты, которые нашли широкое использование при решении самых разнообразных задач. Речь идет о декартовых произведениях объектов, а также об объектах, состоящих из того, что на языке те-

[1]Карпенко А.С. Логика на рубеже тысячелетия.
– http://www.philosophy.ru/library/logic/karpenko/01.html

ории множеств называеся множеством отображений из одного иножества A в другое множество B, т.е. о множествах вида $B^A = \{f : A \to B\}$. Кроме того, учитывается то, что подмножество A множества D описывается с помощью характеристической функции χ_A, которая принимает значение в двуэлементном множестве $\{0, 1\}$ (=$\{$ложь, истина$\}$). Эти свойства категории **Sets** берутся в качестве основных при сужении теории категорий до теории топосов.

Определение 11.8. *Произведением* объектов A и B называется предел диаграммы, которая состоит только из двух объектов A и B и не имеет ни одного морфизма. Для призведения используется обозначение $A \times B$.

Поскольку $A \times B$ – конус, то имеем диаграмму

$$\begin{tikzcd} A & & B \\ & A \times B \arrow[ul, "p_A"] \arrow[ur, "p_B"'] & \end{tikzcd}$$

где морфизмы p_A, p_B называются *проекциями.*

Пусть даны объекты A, B, C, D и морфизмы $f : A \to C$, $g : B \to D$. Тогда существует единственный морфизм $f \times g : A \times B \to C \times D$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, "f"] & C & \\ A \times B \arrow[ur, "p_A"] \arrow[rrr, "f \times g"] \arrow[dr, "p_B"'] & & & C \times D \arrow[ul, "p_C"'] \arrow[dl, "p_D"] \\ & B \arrow[r, "g"'] & D & \end{tikzcd}$$

Морфизм $f \times g : A \times B \to C \times D$ называется *произведением морфизмов* f и g.

Определение 11.9. Категория $\mathcal{K}$ допускает *экспоненцирование*, если

1) в ней существует произведение любых двух объектов;

2) если для любых двух объектов A и B существует объект B^A («отображение» объекта A в объект B), называемый *экспоненциалом*, и морфизм $ev : B^A \times A \longrightarrow B$, называемый *морфизмом значения*, такие, что для любых объекта C и морфизма $g : C \times A \longrightarrow B$ существует единственный морфизм $\widehat{g} : C \longrightarrow B^A$, для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} B^A \times A \arrow[dr, "ev"] & \\ & B \\ C \times A \arrow[uu, "\hat{g} \times 1_A"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Многие категории обладают произведениями, но только некоторые имеют экспоненциалы.

Определение 11.10. Категории с произведениями, в которых каждая пара объектов имеет экспоненциал, называются *декартово замкнутыми* категориями.

Определение 11.11. *Классификатором подобъектов* для категории $\mathcal{K}$ называется объект Ω вместе с морфизмом $\top : 1 \longrightarrow \Omega$ такой, что выполняется следующая

Ω-аксиома. Для каждого мономорфизма $f : A \mapsto D$ существует единственный морфизм $\chi_f : D \longrightarrow \Omega$, для которого диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "!"'] & D \arrow[d, "\chi_f"] \\ 1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

является декартовым квадратом.

Здесь через $! : A \to 1$ обозначен единственный морфизм из A в 1.

Морфизм χ_f называется *характеристическим*, или *характером* морфизма f, а объект Ω – *классифицирующим объектом*. Морфизм $\top$ носит название «истина».

Термин «классификатор подобъектов» для Ω связан с тем, что любой мономорфизм $f : A \mapsto D$ носит название *подобъекта* объекта D. В теории категорий подобъекты – это аналоги подмножеств $A \subset D$ в теории множеств.

Следствием существования классификатора подобъектов Ω является всё то, что мы можем сказать о подобъектах A объекта D и что может быть переведено в разговор об отображениях χ_f D в Ω. [2]

Определение 11.12. *Элементарный топос* – это декартово замкнутая категория, обладающая классификатором.

11.2.4. Логика топоса

Рассмотрим совокупность $Sub(D)$ всех подобъектов объекта D. Можно (см.[71]) на $Sub(D)$ определить операции $\cup, \cap, \setminus$ и отношение $\subset$, аналогичные операциям объединения, пересечения, дополнения и включения, определяемые в теории множеств.

Но в отличие от теории множеств, $Sub(D)$, в общем случае, не является булевой алгеброй. Поскольку булева алгебра связана с классической двузначной логикой, то говорят, что **топосы, в общем случае, подчиняются неклассической логике**.

Топос называется *булевым*, если $Sub(D)$ является булевой алгеброй. Для булева топоса справедлив закон исключенного третьего [71, с.172] и любые другие утверждения, которые доказуемы в рамках классической логики [71, с.173].

[2] Карпенко А.С. Логика на рубеже тысячелетия.
– http://www.philosophy.ru/library/logic/karpenko/01.html

Таким образом, в произвольном топосе, в общем случае, действуют законы интуиционистской логики, а совокупность $Sub(D)$ является так называемой *алгеброй Гейтинга* [71, с.196].

11.2.5. Топосы $\mathbf{Bn}(X)$, $\mathbf{Top}(X)$, $\mathbf{Sets}^{\mathbf{P}}$ и $\mathbf{M}$–$\mathbf{Set}$

Категориями являются теория множеств Кантора **Sets**, состоящая из множеств (объекты) и отображений (морфизмы), и теория топологических пространств **Top**, состоящая из топологических пространств (объекты) и непрерывных отображений (морфизмы). Но это простейшие примеры категорий. Ниже нам потребуются более сложно устроенные категории, являющиеся топосами.

Категория $\mathcal{E}$ называется *малой*, если в ней совокупности морфизмов $Hom(A, B)$ из A в B для любых объектов A, B являются настоящими множествами, т.е. объектами категории **Sets**.

Теорема 11.1. *Если $\mathcal{E}$ малая категория, то категория $\mathbf{Sets}^{\mathcal{E}}$ является топосом.* ■

Топос $\mathbf{Bn}(X)$. Пусть X – непустое множество. *Расслоением над* X называется пара (A, p), где A – множество и $p : A \longrightarrow X$ – отображение.

Объектами *категории* $\mathbf{Bn}(X)$ *всех расслоений над* X являются расслоения (A, p), а морфизмами $f : (A, p) \longrightarrow (B, q)$ – отображения $f : A \longrightarrow B$, для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & B \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Категория $\mathbf{Bn}(X)$ является топосом [71, с.103].

Топос $\mathbf{Top}(X)$. *Пучок* – это расслоение, обладающее некоторой дополнительной топологической структурой. Пусть X – топологическое пространство.

Пучком над X называется пара (A, p), где A – топологическое пространство и $p : A \longrightarrow X$ – непрерывное отображение, являющееся локальным гомеоморфизмом. Последнее означает, что каждая точка $x \in A$ имеет открытую окрестность O_x, которая посредством p гомеоморфно отображается на $p(O_x)$, являющееся открытым в X.

Объектами *категории* $\mathbf{Top}(X)$ *пучков над* X являются пучки (A, p), а морфизмами $f : (A, p) \longrightarrow (B, q)$ – непрерывные отображения $f : A \longrightarrow B$ такие, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & B \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Категория $\mathbf{Top}(X)$ является топосом и назвается *пространственным топосом* [71, с.110].

Топос $\mathbf{Sets}^{\mathbf{P}}$. Категория $\mathbf{P}$, в которой любые два объекта p, q связаны не более чем одним морфизмом $p \longrightarrow q$, называется *категорией предпорядка.* Если P есть совокупность всех объектов категории $\mathbf{P}$, то на P можно ввести предпорядок $\preceq$:

> $p \preceq q$ тогда и только тогда, когда в категории $\mathbf{P}$ существует морфизм $p \longrightarrow q$.

Отношение $\preceq$ обладает свойствами:

1) рефлексивность, т.е. для каждого p выполнено $p \preceq p$;

2) транзитивность, т.е. если $p \preceq s$ и $s \preceq q$, то $p \preceq q$.

Таким образом, отношение $\preceq$ – это обычное отношение предпорядка. Следовательно, $\mathbf{P} = \langle P, \preceq \rangle$ – частично предупорядоченное множество, которое является частично упрядоченным множеством, если отношение $\preceq$ удовлетворяет следующему условию:

3) антисимметричность,т.е. если $p \preceq q$ и $q \preceq p$, то $p = q$.

Обратно, если дано частично преупорядоченное множество $\mathbf{P} = \langle P, \preceq \rangle$, то легко строится категория предпорядка $\mathbf{P}$. Ее объекты – это элементы множества P, а морфизм $p \longrightarrow q$ имеет место, если задано отношение $p \preceq q$. Рефлексивность предпорядка обеспечивает существование морфизмов 1_p, а транзитивность – возможность образовывать композиции морфизмов.

Если $\mathbf{P}$ – категория предпорядка, то категория $\mathbf{Sets^P}$ является топосом.

Топос M–Set. Пусть $\mathbf{M} = \langle M, *, e \rangle$ – моноид[3] и X – произвольное множество.

Действием λ моноида $\mathbf{M}$ на X называется отображение $\lambda : M \times X \longrightarrow X$, удовлетворяющее условиям:

1) $\lambda(e, x) = x$ для любого $x \in X$;

2) $\lambda(m_1, \lambda(m_2, x) = \lambda(m_1 * m_2, x)$ для любых $m_1, m_2 \in M$ и $x \in X$.

Пара $\langle X, \lambda \rangle$ называется $\mathbf{M}$-множеством.

Вводим отображение $\lambda_m : X \longrightarrow X$, полагая, что

$$\lambda_m(x) \equiv \lambda(m, x).$$

Все $\mathbf{M}$-множества рассматриваем как объекты категории **M–Set**. Ее морфизмы состоят из отображений $f : \langle X, \lambda \rangle \longrightarrow \langle Y, \mu \rangle$, где $f : X \longrightarrow Y$ – отображение, $\langle X, \lambda \rangle$, $\langle X, \lambda \rangle$ – **M**-

[3]Моноидом называется тройка $\mathbf{M} = \langle M, *, e \rangle$, где 1) M – некоторое множество; 2) $* : M \times M \longrightarrow M$ – бинарная операция на M, которая ассоциативна, т.е. $x * (y * z) = (x * y) * z$; 3) $e \in M$ – единица, для которой $x * e = e * x = x$.

множества, и диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\lambda_m"'] & Y \arrow[d, "\mu_m"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

коммутативна для любого $m \in M$.

Категория **M–Set** является топосом [71, с.114].

11.3. Причинная категорная теория пространства-времени

В предыдущих главах приводились различные теоретико-множественные аксиоматизации специальной и общей теорий относительности. Мы видели, что системы аксиом для этих теорий значительно различаются. Система аксиом для специальной теории относительности содержит небольшое число первичных понятий – более простая и достаточно легко приводит к поставленной цели. В случае общей теории относительности огромной трудностью, как мы знаем, является введение гладкой структуры (см. § 1.7.3, [197]).

Существует ли единый способ аксиоматизации этих двух различных физических теорий? Казалось бы, ответ отрицательный – уж очень отличны соответствующие геометрические структуры этих теорий. Однако такой единый способ аксиоматизации возможен, если воспользоваться языком теории топосов [71]. В рамках теории топосов система аксиом одна и та же для обеих теорий. Переход от одной теории к другой осуществляется за счет выбора конкретного топоса.

В этом параграфе мы приводим теоретико-топосную причинную теорию пространства-времени, построенную по аналогии с теоретико-множественной аксиоматизацией псевдоевклидовой геометрии, данной в § 10.8.

Пусть $\mathcal{E}$ элементарный топос с объектом натуральных чисел N, и пусть $\mathbb{R}_T$ объект непрерывных вещественных чисел.

Эти два объекта подробно описаны в книгах [71, 127] и в статье [345].

Аффинный морфизм $\alpha : \mathbb{R}_T \longrightarrow \mathbb{R}_T$ определяется как конечная композиция морфизмов вида

$$1_{\mathbb{R}_T}, \quad \otimes \circ (\lambda \times 1_{\mathbb{R}_T}) \circ j, \quad \oplus \circ (1_{\mathbb{R}_T} \times \mu) \circ j,$$

где $\oplus, \otimes$ – операции сложения и умножения в $\mathbb{R}_T$ соответственно, λ, μ – произвольные элементы из $\mathbb{R}_T$, и $j : \mathbb{R}_T \simeq 1 \times \mathbb{R}_T$ – изоморфизм.

Пусть Γ – совокупность всех аффинных морфизмов из $\mathbb{R}_T$ в $\mathbb{R}_T$.

Определение 11.12. *Аффинный объект* в топосе $\mathcal{E}$ – это объект A вместе с двумя совокупностями морфизмов:

$$\Phi \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathbb{R}_T, A), \quad \Psi \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(A, \mathbb{R}_T)$$

такими, что следующие условия выполняются:

1) Для любых $\phi \in \Phi, \psi \in \Psi$ композиция $\psi \circ \phi \in \Gamma$.

2) Если $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathbb{R}_T, A) \setminus \Phi$, то найдется $\psi \in \Psi$ такой, что $\psi \circ f \notin \Gamma$.

3) Если $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(A, \mathbb{R}_T) \setminus \Psi$, то найдется $\phi \in \Phi$ такой, что $f \circ \phi \notin \Gamma$.

4) Для любых мономорфизмов $f : \Omega \mapsto A$, $g : \Omega \mapsto \mathbb{R}_T$ существует $\phi \in \Phi$ такой, что $\phi \circ g = f$.

5) Для любых мономорфизмов $f : \Omega \mapsto A$, $g : \Omega \mapsto \mathbb{R}_T$ существует $\psi \in \Psi$ такой, что $\psi \circ f = g$.

Здесь Ω есть классификатор подъобъектов в $\mathcal{E}$.

Аффинный объект в категории **Sets** – это множество, снабженное аффинной структурой [131].

В топосе $\mathbf{Bn}(\mathcal{M})$ и в пространственном топосе $\mathbf{Top}(\mathcal{M})$ аффинный объект является расслоенным пространством с базой $\mathcal{M}$ и аффинными пространствами в качестве слоев.

Категорное описание теории относительности означает введение лоренцевой структуры либо в аффинном пространстве, либо в расслоенном пространстве с аффинными пространствами в качестве слоев. Это может быть сделано посредством определения семейства равных и параллельных эллиптических конусов, т.е. релятивистского эллиптического порядка [1].

Пусть A аффинный объект в топосе $\mathcal{E}$.

Определение 11.13. *Порядок* в A – это объект P вместе с совокупностью подобъектов $p_x : P \mapsto A$, где $x : 1 \longrightarrow A$ – произвольный элемент такой, что:

1) $x \in p_x$.

2) Если $y \in p_x$, то $z \in p_y$ влечет $z \in p_x$.

Порядок $\langle P, \{p_x\}\rangle$ обозначается как $\mathcal{P}$.

Морфизм $f : A \longrightarrow A$ называется *аффинным*, если $\psi \circ f \circ \phi \in \Gamma$ для любых $\phi \in \Phi$ и $\psi \in \Psi$.

Мы обозначаем семейство всех аффинных морфизмов объекта A через $\mathrm{Aff}\,(A)$.

Пусть $T \subset \mathrm{Aff}\,(A)$ состоит из всех коммутируемых друг с другом морфизмов. Порядок $\mathcal{P}$ является *инвариантным относительно* T, если для любых p_x, p_y найдется $g_{xy} \in T$ такой, что $g_{xy} \circ p_x = p_y$.

Морфизм $f : A \longrightarrow A$ *сохраняет* порядок $\mathcal{P}$, если для каждого p_x найдется p_y такой, что $f \circ p_x = p_y$. Семейство всех морфизмов, сохраняющих порядок $\mathcal{P}$, инвариантный относительно T, обозначаем через $Aut(\mathcal{P})$.

Луч – это морфизм

$$\lambda : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_T \xrightarrow{\varphi} A,$$

где $\phi \in \Phi_0 \subset \Phi$, и для любого $\phi \in \Phi_0$ нельзя найти $x : 1 \longrightarrow A$ такого, что $\phi = x\circ\, !$. Здесь $! : \mathbb{R}_T \longrightarrow 1$ и $\mathbb{R}_+$ – подобъект объекта $\mathbb{R}_T$, состоящий из тех t, для которых $0 \leq t$ (см. определение порядка на $\mathbb{R}_T$, описанного в [345]).

Порядок $\mathcal{P}$ называется *коническим*, если 1) для каждого $y \in p_x$ существует луч $\lambda \subset p_x$ такой, что $x, y \in \lambda$, и 2) x есть начало луча λ, т.е. если μ есть луч и $y \in \mu \subset \lambda$, $\mu \neq \lambda$, то $x \notin \mu$.

Порядок $\mathcal{P}$ имеет *острую вершину*, если для каждого p_x не существует $\phi_x \in \Phi_0$ такой, что $\phi_x \subset p_x$.

Порядок $\mathcal{P}$ *полный*, если для любых элемента $z : 1 \longrightarrow A$ и p_x существуют различные элементы $u_x, v_x : 1 \longrightarrow A$ и $\phi \in \Phi_0$ такие, что $z, u_x, v_x \in \phi$ и $u_x, v_x \in p_x$.

Элемент $u \in p_x$ называется *крайним*, если существует $\phi \in \Phi_0$, для которого $u \in \phi$, но $y \notin \phi$ для всех $y \in p_x, y \neq u$.

Говорят, что конический порядок $\mathcal{P}$ *строгий*, если для любого некрайнего элемента $u \in p_x$, и $v \in p_x, v \neq u$, и каждого луча λ с началом u такого, что $v \in \lambda$, существует крайний элемент $w \in \lambda$ и $w \in p_x$.

Определение 11.14. Аффинный объект A с порядком $\mathcal{P}$, который является полным, строгим, коническим, с острой вершиной и инвариантным относительно T, называется *лоренцевым*, если для каждого $x : 1 \longrightarrow A$ и любых крайних элементов $u, v \in p_x$, где $u, v \neq x$, существует $f \in Aut(\mathcal{P})$ такой, что $f \circ u = v,\ f \circ x = x$.

Теорема 11.2. *Лоренцев объект A в топосе* **Sets** *является аффинным пространтством, допускающим псевдоевклидову сруктуру, определенную квадратичной формой*

$$x_0^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

где n конечно или равно ∞, и $Aut(\mathcal{P})$ есть группа Пуанкаре (см. [1]). *Лоренцев объект A в топосе* $\mathbf{Top}(\mathcal{M})$ *является расслоенным пространством над $\mathcal{M}$ со слоями, снабжен-*

ными аффинной структурой и непрерывной псевдоевклидовой структурой конечной или бесконечной размерности. ■

Ясно, что можно рассматривать не только топосы **Sets**, **Bn**($\mathcal{M}$), или **Top**($\mathcal{M}$), но и многие другие, которые обладают аффинным объектом. При этом будем получать «иные теории относительности».

Существующие категорные определения теории множеств **Sets** и **Top**($\mathcal{M}$) в совокупности всех элементарных топосов дают возможность говорить о решении проблемы категорного описания теории относительности.

В формулировке следующей теоремы используются различные понятия, определения которых можно найти в книгах по теории топосов [71, 127].

Теорема 11.3. *Если $\mathcal{E}$ точечный топос, удовлетворяющий аксиоме транзитивности, имеет лоренцев объект A, то $\mathcal{E}$ является моделью теории множеств Цермело Z, а объект A является моделью специальной теории относительности. Если $\mathcal{E}$ топос, определенный над* **Sets**, *имеет достаточно много точек, удовлетворяет аксиоме (SG) и обладает лоренцевым объектом A, то $\mathcal{E}$ есть топос* **Top**($\mathcal{M}$), *а объект A является моделью общей теории относительности.*

Доказательство. Первое утверждение следует из теоремы 9.37 из [127, с.338]. Второе утверждение есть теорема 7.25 из [127, с.251]. ■

11.4. Теоретико-топосное решение проблемы четырёхмерности пространства-времени

В топосной хроногеометрии находит решение проблема четырёхмерности пространства-времени. В.Трифонов [349] показал, что если собственное (психологическое) время наблюдателя адекватно описывается с помощью вещественных чисел $\mathbb{R}$, а логика является булевой, то наши современные представления о Мире событий (наша парадигма) однозначно связаны с Миром событий Минковского, т.е. с четырёхмерным псевдоевклиловым пространством.

Изложим основные идеи и результат В.Трифонова.

Определение 11.15. F-алгебра $\mathbf{A}$ – это пара $\langle A, C\rangle$, где A – векторное пространство над полем F, а $C : A^* \times A \times A \longrightarrow F$ – трилинейная форма, называемая структурной, симметричная по второму и третьему аргументу, т.е. $C(t, a, b) = C(t, b, a)$.

С помощью структурной формы C вводим призведение $*$ векторов F-алгебры $\mathbf{A}$ (при фиксированном $t \in A^*$) следующим образом. Если $a, b \in A$, то $(a * b)(t) = C(t, a, b)$. Вектор $e \in A$ такой, что $e * a = a * e = a$ называется единицей.

Метрика g F-алгебры $\mathbf{A}$ – задается квадратичной формой $g_{nm} = C(t, e_n, e_m)$, где $t \in A^*$ – фиксированный ковектор, а $\{e_0, e_1, ...e_{\dim A}\}$ – базис в пространстве A. Имеем

$$C(t, a, b) = C(t_i e^i, a^n e_n, b^m e_m) = C^i_{nm} t_i a^n b^m,$$

$$C^i_{nm} = C(e^i, e_n, e_m),$$

$$g_{nm} = t_i C^i_{nm}. \tag{11.1}$$

Определение 11.16. F-ксеноформа – это категория $\mathbf{A}[F]$ всех F-алгебр над частично упорядоченным полем F. Объект $\mathbf{A}$ категории $\mathbf{A}(F)$ называем *парадигмой*. Размерность парадигмы – это число $\dim A$. Ковектор $t \in A^*$ называется собственным (психологическим) временем.

Пусть $\mathbf{M}_A = \langle A, *, e\rangle$ мультипликативный группоид парадигмы, т.е. F-алгебры $\mathbf{A}$, порожденный множеством ненулевых векторов пространства A.

Определение 11.17. Парадигма $\mathbf{A}$ называется *классической*, если $\mathbf{M}_A$ есть моноид, а топос $\mathbf{M}_A$–$\mathbf{Set}$ является булевым.

Теорема 11.4. *$\mathbb{R}$-ксеноформа имеет единственную классическую парадигму* $\mathbf{E}$ *размерности* 4 *с лоренцевой метрикой* g.

■

При доказательстве этой теоремы ключевыми являются два момента:

1. Для поля $\mathbb{R}$ топос $\mathbf{M}_E-\mathbf{Set}$ является булевым, а $\mathbf{M}_E$ группой.

2. Для $\mathbb{R}$-ксеноформы имеется изоморфизм для любой ее парадигмы $\mathbf{E} \cong \mathbf{H}$, где $\mathbf{H}$ – алгебра кватернионов, размерность которой, как известно, равна 4. Таким образом, имеется единственная парадигма, или, другими словами, в нашем распоряжении единственное векторное пространство, оснащенное метрикой g.

3. Имеется базис $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ в алгебре кватернионов, в котором

$$C^0_{nm} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; C^1_{nm} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C^2_{nm} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; C^3_{nm} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (11.2)$$

Из (11.1) и (11.2) следует, что

$$g_{nm} = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & t_3 \\ t_1 & -t_0 & t_3 & -t_2 \\ t_2 & -t_3 & -t_0 & t_1 \\ t_3 & t_2 & -t_1 & -t_0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку метрика симметрична, т.е. $g_{nm} = g_{mn}$, то $t_1 = -t_1, t_2 = -t_2, t_3 = -t_3$. Следовательно, $t_1 = t_2 = t_3 = 0$. Поэтому метрика g имеет лоренцеву сигнатуру,

$$g_{nm} = \begin{pmatrix} t_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -t_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -t_0 \end{pmatrix},$$

а $t = (t_0, 0, 0, 0)$ – представляет собственное время, адекватно описываемое полем $\mathbb{R}$.

Конструкция пространства-времени в форме парадигмы кажется непонятной и странной. В действительности В.Трифонов в своей первой работе начинал с разъяснений понятий, которые в формальном виде изложены выше.

Любой исследователь воспринимает Мир событий, получает о нем знания. Его восприятия образуют *сенсорное пространство* A. Если, следуя квантовой механике, считать, что важнейшим свойством наблюдения состояний любой системы является принцип суперпозиции, когда состояния знания складываются с некоторыми весами, то сенсорное пространство следует наделить линейной (векторной) структурой над некоторым полем F, из которого берутся необходимые «весовые» коэффициенты.

Но исследователь еще и воздействует на Мир, производя измерения и другие действия. Можно производить новое действие вслед за первым. Иначе говоря, нужно предусмотреть композицию действий. Формально это означает, что мы «перемножаем» действия, и это реализуется как композиция действий на некотором множестве, представляющем собой или состояния Мира, или состояния той или иной физической системы. Таким образом, при формализации появляется то, что называется моноидом $\mathbf{M}_A$. Топос $\mathbf{M}_A\mathbf{-Set}$ – это совокупность различных физических систем, подвергаемых воздействиям со стороны исследователя. Трифонов вводит понятие *моторного пространства* всевозможных действий исследователя, которое отождествляется с моноидом $\mathbf{M}_A$.

Парадигма – это множество состояний знания исследователя. Наблюдение – суперпозиция с весами состояний знаний. Исследователь может воздействовать на состояния знания. Поэтому парадигма, представленная как линейное векторное пространство с допущением операции умножения его векторов, одновременно являет собой сенсорное и моторное пространства.

По сути дела, пространство-время Минковского – это сенсорное пространство, и его можно представлять как некую парадигму. Это и сделано В.Трифоновым в форме F-алгебры. Поскольку априори F-алгебр может быть великое множество, то и парадигм может быть очень много. Все парадигмы над одним полем, играющим роль типа течения времени (психологии исследователя), объединяются в одну F-ксеноформу.

Выбор поля F – это и выбор типа течения времени (потока времени), это и выбор F-ксеноформы.

Идеи В.Трифонова получили дальнейшее развитие в статье Раптиса [314].

11.5. Топос $\mathbf{Sets^P}$ как пространство-время

Очень часто используется понятие *поток времени.* Как правило, имеется в виду лоренцева метрика и соответствующее непрерывное поле временных векторов. Если это поле не имеет сингулярностей, т.е. точек, в которых вектор поля обращается в нуль, то говорят о временной ориентации Мира событий. Собственно говоря, термины пространство-время и лоренцево многообразие автоматически связаны с понятием потока времени.

Может ли Мир событий $\mathcal{M}$ иметь несколько потоков времени? Обычно отвечают положительно, поскольку можно задать несколько лоренцевых метрик. Возможен ли переход от одного потока времени к другому? Ответ, как правило, сводится к отысканию отображения $\tau : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ такого, что

$$d\tau(g_1) = g_2, \tag{11.3}$$

где g_1, g_2 – две различные лоренцевы метрики, т.е. два разных потока времени. В геометрии задача (11.3) называется задачей нахождения движений или задачей нахождения изометрических отображений. Однако, если мы не желаем, чтобы событие перемещалось, т.е. полагаем, что $\tau = id_{\mathcal{M}}$, или $\tau(x) = x$ для любого $x \in \mathcal{M}$, но желаем найти нетривиальное преобразование τ от одного потока времени к другому, то мы должны предположить, что $d\tau \neq id_{\mathbb{R}^4}$. Ясно, такого преобразования τ, удовлетворяющего двум условиям $\tau = id_{\mathcal{M}}, d\tau \neq id_{\mathbb{R}^4}$, не существует.

Но мы использовали теорию множеств. Если использовать теорию топосов [71], то можно найти нетривиальное преобразование τ разных потоков времени, оставляющее каждое событие на месте, т.е. $\tau = id_{\mathcal{M}}$.

Для этого откажемся от классического представления о пространстве-времени как о Мире событий, «размещенном» в одном топологическом пространстве [112].

Пусть нам дано частично упорядоченное множество $\mathbf{P} = \langle P, \preceq \rangle$. Рассмотрим совокупность всех контрвариантных функторов из категории предпорядка $\mathbf{P}$ в категорию множеств $\mathbf{Sets}$. Возникает *элементарный топос* $\mathbf{Sets}^{\mathbf{P}}$*, который и есть новое формальное пространство-время.*

Значениями функтора $F \in \mathbf{Sets}^{\mathbf{P}}$ на элементах x множества $\mathbf{P}$ будут множества $F(x)$. Множество $\mathbf{P}$ интерпретируем как совокупность возможных ситуаций получения знания о прошлом. Оно допускает временной частичный порядок, так как должно включать все мыслимые ситуации. Множество $F(x)$ – это события, наблюдаемые в ситуации x. На языке теории относительности $F(x)$ – это (причинные) конусы прошлого. Функтор F можно интерпретировать как поток времени.

Топос $\mathbf{Sets}^{\mathbf{P}}$ – всевозможные потоки времени. Классическое преобразование Лоренца превращается в естественный изоморфизм двух функторов, то есть потоков времени. В самом деле, рассмотрим два различных потока времени F и G, и пусть $x, y, \quad x \preceq y$ две (временные) ситуации. Тогда имеем следующую диаграмму:

$$
\begin{array}{ccc}
x & \preceq & y \\
 & & \\
F(x) & \stackrel{F(\preceq)}{\longrightarrow} & F(y) \\
\downarrow \tau_x & & \downarrow \tau_y \\
G(x) & \stackrel{G(\preceq)}{\longrightarrow} & G(y),
\end{array}
$$

где τ – естественный изоморфизм функторов F, G. Пусть все $F(x), G(x),\ x \in \mathbf{P}$, «помещены» в одно пространство $\mathbb{R}^4$. Предположим, что $F(x), G(x)$ есть эллиптические конусы с вершиной x; $F(x)$ равен и параллелен конусу $F(y)$; $G(x)$ равен и параллелен конусу $G(y)$; и $\tau_x = \tau : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ для всех $x \in \mathbf{P}$ – это отображение такое, что

$$
\begin{aligned}
&\tau(F(x)) = G(x), \\
&G(x) = F(\tau(x)). \qquad (11.4)
\end{aligned}
$$

Как следует из [86], отображение τ – это классическое преобразование Лоренца. Но если (11.4) не является справедливым, например, $G(x) = \phi_x(F(x))$, где ϕ_x есть вращение на постоянный угол вокруг точки x, $G(x) \neq F(x)$, и $G(x)$ содержит пространственный вектор относительно потока времени F, т.е. мы имеем поток времени G (жизнь) там, где мы видели настоящее (смерть) относительно потока F, то теория множеств становится бесполезной, поскольку в данных условиях как раз $\tau(x) = x$ для всех $x \in \mathbb{R}^4$.

Таким образом, пространство-время $\mathbf{Sets^P}$, которое может быть описано как топос Гротендика [71], уже не «помещается» в одном «пространстве» и допускает различные потоки времени, преобразуемые друг в друга неклассическим (т.е. не теоретико-множественным) способом.

Глава 12

ХРОНОГЕОМЕТРЫ

В этой главе приводятся биографические сведения о людях, чьи научные работы формировали мысль о необходимости объединения пространства и времени в единое пространство-время. Удивительно, но никто из создателей специальной теории относительности, ни Пуанкаре, ни Эйнштейн, ни Лоренц не оказались таковыми.

Следует начать с Альфреда Робба, который первым построил причинную аксиоматическую теорию пространства-времени. Подход Робба, на момент публикации его работ (1911), однако, не оказался в поле внимания современников и был оценен лишь во второй половине XX века. Тем не менее, Робб был тем, кто приучил научную общественность к теории относительности как к теории единого пространства-времени.

Вторым следует назвать Германа Минковского, хотя именно его подход (1908) к теории относительности оказался наиболее результативным и популярным.

Современную аксиоматическую причинную теорию абсолютного пространства-времени создал А.Д.Александров. Но А.Д.Александров публиковал свои результаты в виде отдельных статей, которые никогда не были объединены в одной монографии, где все части логически связаны и все возможные подходы и направления исследования оговорены и обсуждены. Это сделал его ученик Р.И.Пименов, опубликовав три монографии на тему аксиоматической причинной теории пространства-времени [190, 198, 203]. Р.И.Пименов был незаурядной личностью, успевавшей одновременно решать важные задачи, касающиеся как создания причинной теории пространства-времени, так и создания демократической России.

12.1. А.А. Робб

Альфред Артур Робб родился в Белфасте 18 января 1873 года. Получил образование в Королевской академической школе и в Колледже королевы в Белфасте. Затем обучался в Колледже Св.Джона и Колледже Эмануилла в Кембридже. В 1904 году он уехал в Гёттингенский университет, где защитил докторскую диссертацию по магнитному эффекту Зеемана под руководством Вольдемара Фогта.

Робб редко публиковался, и его работы не были хорошо известны за пределами Англии. Тем не менее, Лармор [287] называл Робба одним из главных поборников теории относительности в период ее становления.

Робб имел три ученые степени: доктор наук (Sc.D) в Кембридже и в Белфасте, доктор философии (Ph.D) в Гёттингене и был избран в 1921 году членом Королевского общества[1]

Его заслуги перед обществом Красного Креста были столь значительны, что он стал кавалером французского «Военного креста» (Croix de Guerre).

Робб был очень популярной личностью среди сотрудников знаменитой Кэвиндишской лаборатории во времена, когда ею руководил Дж.Дж.Томпсон.

Умер Альфред А. Робб 13 декабря 1936 года.

В некрологе, появившемся в «Obituary Notices of Fellows of the Royal Society»[287] и написанном Дж. Лармором, приводятся сведения, раскрывающие сторону жизни Робба, которая

[1] Королевское общество Британии – это Академия наук Великобритании, членами которой были многие всемирно знаменитые ученые.

ffl

Рис. 12.1: Аспиранты Кэвиндишской лаборатории в 1898-99: Слева направо: Задний ряд: G.H. Bryan, R.S. Willows, unidentified. Средний ряд (стоят): J.W. Walker, A.A. Robb, H.S. Allen, J.C. Mclennan, J.S. Townsend, J.H. Vincent, unidentified. Сидят в переднем ряду: C.T.R. Wilson, J. Talbot, John Zedeny, R.G. Klempfer, Sir J.J. Thomson, G.A. Shakespeare, H.A. Wilson, J. Butler Burke.

была неизвестна многим из его друзей. В одной из ирландских газет говорилось, что после смерти Робба было продано принадлежащее ему стадо породистых коров и что «... при этой продаже Королевское Олстерское агрокультурное общество «рассеет» известное лизнабринское (Lisnabreeny) стадо, принадлежащее покойному доктору Альфреду А. Роббу и получившее Абердино-Ангусскую премию для рогатого скота... Это стадо, наибольшее и старейшее в Ирландии, было заведено сорок лет назад... На распродаже победила ... за 6000 гиней, рекордную цену за данную породу... и было решено экспортировать стадо в Америку... Деньги были переданы его племяннице мисс Неске А. Робб из Оксфорда и Национальному обществу (Trust) Северной Ирландии для устройства санатория для больных детей».

ﬄ

Рис. 12.2: Альфред Артур Robb.

12.1.1. А. Робб и сэр Дж. Дж. Томпсон

Робб писал стихи и пел. Одно их стихотворений, посвящённое его учителю сэру Дж.Дж.Томпсону, говорит о выдающемся научном достижении Томпсона – открытии структуры атома:

All preconceived notions he sets at defiance
By means of some neat and ingenious appliance
By which he discovers a new law of science
Which no one had ever suspected before.
All the chemists went off into fits,
Some of them thought they were losing their wits,
When quite without warning

(Their theories scorning)
The atom one morning
He broke into bits.

12.1.2. Оптическая геометрия Робба

Первая публикация Робба по теории относительности представляла собой 32-х страничную антиконвенционалистскую[2] брошюру «Оптическая геометрия движения» [322], в которой рассматривалась геометрия равномерно движущихся систем отсчёта.

Считая, что конвенциалистские взгляды Пуанкаре – это «самая типичная неправда», Робб утверждал, что *ряда оптических фактов и логических аксиом вполне достаточно для того, чтобы определить геометрию пространства-времени.*

В брошюре Робб выводит, используя гиперболические функции, формулы для скоростей. В данной работе он получил, по крайней мере, один новый результат: в самом общем случае нашел соотношение для суммы скоростей для нескольких систем отсчёта, движущихся равномерно в произвольных направлениях в гиперболическом пространстве.

Обратный гиперболический тангенс скорости системы отсчёта Робб называет быстротой. Он считал, что его формула для сложения быстрот эквивалентна теореме Эйнштейна о сложении скоростей, и отмечал, что Зоммерфелд сумел вывести последнюю в рамках теории Минковского.

[2]Конвенционализм – философские представления о Мире одного из создателей теории относительности Анри Пуанкаре.

Робб поддерживал предложение Эйнштейна о необходимости измерять длины с помощью световых сигналов.

В работе подробно исследовалось движение материальной точки в двух, трех, и четырех измерениях. При этом использовался некоторый «стандартный конус», аналогичный световому конусу Минковского.

Брошюра пронизана открытой враждебностью к алгебраическому формализму Минковского. Робб не утверждал, что его оптическая геометрия отличается от способа изложения теории относительности, данного Минковским. Существенными особенностями теории Робба были: 1) применение синтетического подхода, 2) использование гиперболической тригонометрии, и 3) констатация неевклидовости геометрии пространства-времени.

Хотя «Оптическая геометрия» индеферентна к математическому аппарату, предложенному Минковским для описания пространства-времени, в последующей публикации Робб говорил о «чисто аналитическом характере» работы Минковского [326] [3].

12.1.3. Причинная теория времени Робба

Альфред Робб построил первую аксиоматическую причинную теорию пространства-времени [326]. Он исходил из отношения порядка, который удовлетворял ряду дополнительных условий. Одно их них – ограниченность скорости передачи воздействия одних событий на другие, которую он связывал со скоростью распространения света.

В своих работах [326, 328, 333] Робб продемонстровал, что метрическая структура пространства-времени – следствие причинной. Предполагая, что пространство-время имеет более, чем одно измерение, Робб вводит понятие ортогональности и показывает ортогональность пространственноподобных

[3] Краткий пересказ статьи Scott W. The non-Euclidean style of Minkowskian relativity / The Symbolic Universe, J. Gray (ed.). Oxford University Press, 1999. P.91-127.

и времениподобных направлений. Затем получает метрику и показывает, что она имеет лоренцеву сигнатуру.

***

Цитата из книги Робба: «Вообще не существует никаких средств для отождествления мгновений времени, происходящих в разных местах... реально одновременными событиями будут только те, которые происходят в одном и том же месте» [328, p.12-13].

12.2. Г. Минковский

ffl

Г.Минковский.

«Герман Минковский (нем. Hermann Minkowski; 22 июня 1864 – 12 января 1909) – математик, разработавший геометрическую теорию чисел и использовавший методы геометрии для решения сложных задач в области теории чисел, математической физики и теории относительности.

Герман Минковский родился в Алексотах (пригороде Каунаса в Литве, в то время входившем в состав Минской губернии) в семье немецкого, польского и еврейского происхождения. Учился в Германии в университетах Берлина и Кёнигсберга, где в 1885 году под руководством Фердинанда фон Линдеманна получил докторскую степень.

Еще студентом в 1883 году был награжден Математической премией Французской академии наук за свою рукопись по теории квадратичных форм. Минковский преподавал в университетах Бонна, Гёттингена, Кёнигсберга и Цюриха. В Цюрихе он был одним из преподавателей Эйнштейна»[4]..

[4] См. ВикипедиЯ. – http://ru.wikipedia.org

Минковский увидел в теории относительности то, что не сумели разлядеть ни Пуанкаре, ни Эйнштейн. Он заявил следующее в самом начале своего знаменитого доклада «Raum und Zeit», сделанного 21 сентября 1908 г. на 80-м собрании немецких естествоиспытателей и врачей в Кёльне [185, с.167]: «Отныне пространство само по себе и время само по себе должны погрузиться в тень и лишь некоторый вид соединения обоих должен еще сохранить самостоятельность» [5]:

> Von Stund an sollen Raum für sich und Zeit fuř sich völlig zu Schatten herabsinken und nur noch eine Art Union der beiden soll Selbständigkeit hewahren.

Придавая большое значение группе Лоренца G_c и говоря о том, что законы природы должны быть инвариантны относительно G_c, Минковский пишет: «Термин «*постулат относительности*» для требования инвариантности по отношению к группе G_c кажется мне слишком бледным. Так как смысл постулата сводится к тому, что в явлениях нам дается только четырехмерный в пространстве и времени мир, но что проекции этого мира на пространство и на время могут быть взяты с некоторым произволом, мне хотелось бы этому утверждению скорее дать название «*постулат абсолютного мира*» (или, коротко, мировой постулат» [185, с.173].

Иначе говоря, Минковский говорит о том, что главное, что содержится в новой физической теории – теории относительности, – это не констатация одинаковости записи законов природы в инерциальных системах отсчета, а открытие новой сущности, ныне называемой *абсолютным пространством-временем*, в недрах которой переход от *различных пространств* и *различных времен*, которых *множество*, происходит с помощью группы Лоренца. Группа Лоренца, а точнее, её действия на пространственные сечения и временные оси в четырехмерном мире, помогли увидеть *относительность* про-

[5] В русской литературе вместо «погрузиться в тень» приводится иной перевод: «обратиться в фикцию».

странства и времени и осознать наличее более значимой *абсолютной* сущности – Мира событий.

Абсолютные пространство и время Ньютона, связанные с группой Галилея, Минковский заменяет на абсолютное пространство-время, в котором действует группа Лоренца.

Отметим, что первоначально, в 1907 году, Минковский предположил, что специальная теория относительности, сформулированная Эйнштейном и основанная на более ранних работах Лоренца и Пуанкаре, лучше всего может быть описана в псевдоевклидовом четырёхмерном пространстве (известном сейчас как пространство-время Минковского), в котором время и пространство являются различными измерениями пространства-времени и в которое хорошо вписывается геометрия специальной теории относительности. Подробно всё это Минковский изложил в статье «Основные уравнения электромагнитных процессов в движущихся телах» [186].

Но, видимо, осмысливая столь удачную формализацию теории относительности, Минковский пришел к выводу, что физический мир событий является интерпретацией псевдоевклидова четырёхмерного пространства, с помошью которого так удобно и легко можно было изложить теорию относительности, а пространство и время как таковые всего лишь тени этого мира событий и не представляют собой самостоятельных сущностей. Об этом своем открытии он и заявил в знаменитом докладе в Кёльне в 1908 году [185].

Эйнштейн долго не осознавал объективного и абсолютного характера пространства-времени и считал, что использование четырёхмерной геометрии при изложении теории относительности – это всего лишь удобный математический аппарат. В полной мере с тем, что объективный физический Мир событий – это четырехмерное пространство-время, Эйнштейн согласился лишь в 1921 году, о чём заявил в своем докладе в Принстонском университете [233, с.25].

12.3. Н.А. Умов и В.А. Фок

ffl

Н.А. Умов.

Умов Николай Алексеевич (1846-1915). Окончил физико-математический факультет Московского университета. Российский физик-теоретик, профессор Московского университета (1893-1911). Ушел в отставку в знак протеста против притеснений студенчества правительством.

Ввел понятие плотности потока энергии, сформулировал уравнение движения энергии. Труды по земному магнетизму, диффузии и др.

Умов был организатором ряда просветительских обществ, в течение 17 лет (с 1897) избирался президентом Московского общества испытателей природы. Он одним из первых русских ученых оценил значение теории относительности.

ffl

В.А. Фок.

Н.А.Умов одним из первых (1910) установил аффинность преобразований пространства-времени, исходя из сохранения закона распространения света [208, с.492].

Учеником Н.А.Умова был выдающийся советский физик Владимир Александрович Фок, одним из научных результатов которого было доказательство аффинности преобразований, переводящих друг в друга инерциальные системы отсчета в механическом и электромагнитном смыслах [211, с.31].

Точнее, В.А.Фок доказал, что если $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ – диффеоморфизм,

$$x' = f_x(x, y, z, t),$$
$$y' = f_y(x, y, z, t),$$
$$z' = f_z(x, y, z, t),$$
$$t' = f_t(x, y, z, t),$$

который:

1) любые прямые

$$x = x_0 + v_x(t - t_0), \quad y = y_0 + v_y(t - t_0), \quad z = z_0 + v_z(t - t_0),$$

лежащие в любом 3-мерном пространстве, переводит в такие же прямые:

$$x' = x'_0 + v'_x(t - t_0), \quad y' = y'_0 + v'_y(t - t_0), \quad z' = z'_0 + v'_z(t - t_0)$$

и

2) уравнение распространения света

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2 - \left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2\right] = 0$$

преобразует в аналогичное уравнение

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial t'}\right)^2 - \left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial z'}\right)^2\right] = 0,$$

то f является аффинным [211, §8].

12.4. А.Д. Александров

Александров Александр Данилович родился 4 августа 1912 году в деревне Волыни Рязанской губернии. Его родители были школьными учителями. В 1929 г. он стал студентом физического факультета Ленинградского университета, который окончил в 1933 году:

1935 – кандидат физико-математических наук,

1937 – доктор физико-математических наук,

1942 – сталинская премия за решение проблемы Германа Вейля,

1946 – избрание член-корреспондентом Академии наук СССР,

1949 – мастер спорта СССР по альпинизму,

1951 – премия им. Н.И.Лобачевского за результаты в области геометрии,

1952-1964 – ректор Ленинградского университета,

1964 – избрание действительным членом Академии наук СССР (от Сибирского отделения АН СССР),

1965-1986 – заведущий кафедрой геометрии и топологии Новосибирского университета,

1986-1999 – заведущий лабораторией геометрии Санкт-Петербургского отделения математического института Российской Академии наук им. В.А.Стеклова

Учителями А.Д.Александрова были математик Б.Н.Делоне (ученик выдающегося русского математика П.Л.Чебышева) и выдающийся советский физик В.А.Фок

В 1959 г. А.Д.Александров и В.И.Смирнов основали Ленинградское математическое общество (с 1991 г., Санкт-Петербургское математическое общество).

А.Д.Александров создал Ленинградскую геометрическую школу – научное направление в современной геометрии. Основное отличие этой школы состоит в том, что вместо методов дифференциальной геометрии, используемых в геометрии в конце XIX – начале XX веков, вновь стали использоваться методы синтетической геометрии. Кратко это выражалась в форме лозунга – «Назад, к Евклиду!». Опорой для решения многих классических проблем, которые оставались неразрешимыми в теории выпуклых поверхностей и в теории римановых многообразий, стала общая теория метрических пространств. В 1950-80 гг. были построены «геометрия в целом» и теория обобщенных римановых пространств.

Три академика Российской Академии наук входят в Ленин-

ffl

Рис. 12.3: А.Д. Александров. 1972.

градскую геометрическую школу: А.Д.Александров, А.В.Погорелов и Ю.Г.Решетняк.

А.Д.Александров был членом Коммунистической партии Советского Союза с 1951 года, и он оставался сторонником социализма в современной России.

А.Д.Александров как ректор Ленинградского университета дал работу бывшему заключенному Льву Гумилёву (знаменитому русскому историку, сыну Анны Ахматовой). Дважды он посещал в тюменской тюрьме Вадима Делоне, который был активным противником советской власти. А.Д.Александров оказывал поддержку замечательному русскому поэту Андрею Вознесенскому, когда тот подвергался гонениям.

В 80-е годы А.Д.Александров, как редактор, способствовал изданию избранных произведений Н.А.Козырева – известного астронома и создателя скандально известной в Советском Союзе причинной теории времени.

В 1950-е годы А.Д.Александров способствовал выживанию генетики, неоднократно подвергавшейся гонениям. Это было отмечено советским правительством М.С.Горбачёва в 1987 году, когда А.Д.Александров вместе с группой видных генетиков был награжден орденом «Дружбы народов».

Александр Данилович Александров скончался 27 июля 1999 года в 4.00 по московскому времени.

ffl

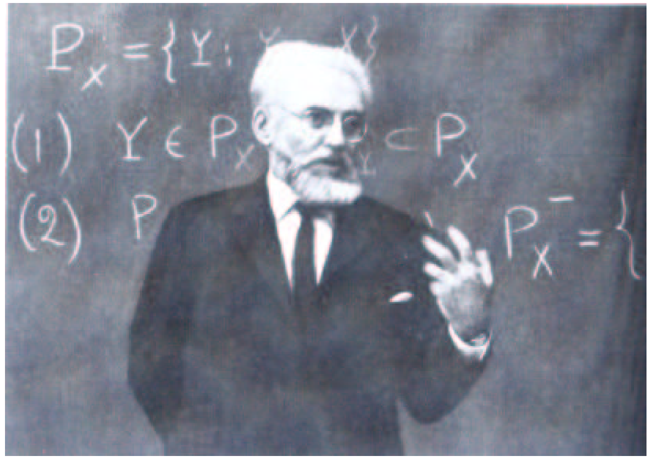


Рис. 12.4: А.Д. Александров: лекция по хроногеометрии.

12.4.1. Ученики А.Д.Александрова

1. Либерман И.М., Оловянишников С.П., Костелянец П. – все трое погибли на фронтах Великой Отечественной войны.

2. Погорелов А.В. – из Харькова, Юсупов А. – из Бухары.

3. *Ленинградские ученики* (в порядке участия в семинарах): Борисов Ю.Ф., Залгаллер В.А., Решетняк Ю.Г., Бакель-

ман И.Я., Волков Ю.А., Заморзаев А.М., Богачева С.М. (позднее – жена А.Д.[6]), Боровский Ю.Е., Пименов Р.И.

4. Собчук В. и Старохозяев – с Украины.

5. Русиешвили Г.И. – из Грузии.

6. Франк Б. и Франк Г. – из Германии.

7. *Приехавшие из Алма-Аты*, куда А.Д. ездил читать лекции: Квачко М., Овчинникова В.В., Сенькин Е.П.

8. *Оставшиеся в Алма-Ате*: Зильберберг А.А., Стрельцов В.В., Юсупов Д.

9. *Новосибирские ученики*: Гуц А.К., Кузьминых А.В., Левичев А.В., Шайденко А.В., Астраков С.Н., Крейнович В.Я., Кошелева О.М.

11. Последним аспирантом А.Д. Александрова (уже после возвращения А.Д. в Ленинград в 1986 году) был Перельман Г.Я.[7]

12.4.2. А.В.Левичев: воспоминания об А.Д.Александрове

Начало 1976 года. Я решил щегольнуть недавно полученным званием «Мастер спорта СССР». Пришёл на семинар со значком на лацкане пиджака. А.Д. обратил на него внимание сразу же, натолкнувшись на меня около Мальцевской аудитории: «Подумаешь, мастер спорта... Я вот – мастер спорта, да ещё академик!».

Он чувствовал, по-видимому, мою склонность к зазнайству. Чаще поругивал. Но иногда и очень лестно отзывался (даже при мне). Не поймёшь, правда, – шутил или с долей серьёзности?

Когда узнал, что я ушел из (своей первой) семьи – заявил отчётливо (тоже прямо на одном из этажей НГУ): «Оставлять несовершеннолетних детей – преступление!». Но больше к этому вопросу не возвращался.

[6] А.Д. – так называли А.Д.Александрова его ученики и близкие люди.

[7] Действительным научным руководителем Г.Я.Перельмана являлся Ю.Д.Бураго.

Анна Тихоновна[8] рассказывала, что она выходила время от времени с ним погулять (незадолго до его кончины, видимо). Иногда он присаживался у ограды Симеоновской церкви (не уверен за правильность названия – это та из трех церквей, которая в сторону стекловского института на Фонтанке от их дома на Моховой улице). Она куда-то на несколько минут отошла. Возвращается, а А.Д. ей говорит удивленно: «А мне пóдали...»

Почти каждый шаг моей «служебной лестницы» (которую я считаю очень удачной) связан с его опекой, его имя «открывало двери».

Успешная защита диплома, рекомендация в аспирантуру НГУ, поступление в аспирантуру НГУ, публикации в «Сибирском математическом журнале» и в «ДАН СССР», защита кандидатской диссертации, устройство на работу в Институт математики СО АН СССР в 1986 году (когда я из Куйбышева, теперь – Самара, вернулся в Новосибирск), продвижение по службе в НГУ и Институте математики, подготовка и защита докторской диссертации, удачное обустройство в США. Последнее связано с тем, что И.Сигал был очень высокого мнения о достижениях А.Д. в хроногеометрии. Кроме того, Александр Данилович прислал мне в США хорошее рекомендательное письмо. Сила его авторитета помогала мне и после его кончины – в 2004-2005 годах, большую часть которых я провел в Санкт-Петербурге.

Вот подробности о моем поступлении в аспирантуру. Три приятеля, я – на третьем месте (по способностям). Один получает пятёрку – с блестящей дальнейшей карьерой. Я – четвёрку (проходной балл) – благодаря тому, что мой предполагаемый руководитель – А.Д. Третий – тройку (не поступает в аспирантуру, что на многие годы осложняет ему жизнь).

Вообще, А.Д. действовал на меня в определенной степени «гипнотически»: стоило мне посмотреть на его фотографию (не говоря уж о личном контакте), как мне сразу же хотелось

[8]Женщина, живующая в семье А.Д.Александрова в Санкт-Петербурге.

бросить всякие другие занятия и идти «доказывать теоремы».

А как мы любили собираться в его коттедже! Вот связанный с этим эпизод: конец 1987 года, мы с Викой (моей второй женой) два-три месяца как живём в «шестиметровке» третьего общежития НГУ, на Пирогова. Александр Данилович устраивает «сабантуйчик» в своем коттедже. Приглашены все сотрудники (а я в то время уже работал в ИМ) – но без жён! Можете представить мое душевное состояние: или оставить молодую жену на эти несколько часов (ну разве мне вечер в коттедже будет в радость?!), или пойти «против» Шефа. Я выбираю второе. Единственный из всех посмел ослушаться. Александр Данилович минут пятнадцать не спускался сверху! А все гости уже сидят за столом. Я с Викой – всё ещё в прихожке, в пальто... Светлана Михайловна[9] и так и сяк – то наверх к нему поднимется, то нас пытается успокоить (видя, что я чуть не плачу). Мы были готовы уйти, но тут он всё-таки спустился. «Ну Светлана, – говорит, – пропала ты!» (Вика очень красива). По-моему, для Вики это была одна из немногих (если не единственная) возможностей побыть на таком представительном вечере (да к тому же в знаменитом александровском коттедже на Золотодолинской).

12.5. Р.И. Пименов

Р.И.Пименов – один из самых ярких учеников А.Д.Александрова. Отношения учителя и ученика были сложными, как это видно из воспоминаний Р.И.Пименова[10]. Ученик отличался враждебностью к советской системе, а учитель был коммунистом. Тем не менее, А.Д.Александров постоянно способствовал творческому росту своего ученика.

[9]С.М.Богачева – вторая жена А.Д.Александрова.

[10]Пименов Р.И. Воспоминания. Т.1. М., 1996. Размещено на сайте http://www.sakharov-center.ru

12.5.1. Обзор научных достижений Р.И. Пименова

ffl

Р.И. Пименов.

Револьт Иванович Пименов родился 16 мая 1931 г. После окончания математико-механического факультета Ленинградского университета в 1954 г. Р.И.Пименов работал старшим редактором в Библиотеке Академии наук, ассистентом кафедры математики Ленинградского технологического института пищевой промышленности.

С 1953-го по 1970 г. он работал научным сотрудником Ленинградского отделения Математического института АН СССР, где вёл научный семинар по математическим проблемам теории пространства-времени, читал лекции по геометрии студентам матмеха ЛГУ, защитил кандидатскую (1955 г.) и вскоре докторскую (1969 г.) диссертации по специальности геометрия и топология. Из-за своих политических взглядов, к которым советская власть отнеслась настороженно, докторский диплом он получил только в конце 1988 г.

С 1972 г. до своей кончины Р.И.Пименов работал в Коми филиале АН СССР, преобразованном впоследствии в Коми научный центр Уральского отделения АН СССР, где он прошел путь от младшего до ведущего научного сотрудника.

«Р.И.Пименов обладал ярко выраженными математическими способностями, большими навыками в самообразовании, творческой самостоятельностью мышления и высокой работоспособностью. Его научные работы можно разбить на три цикла.

Уже первый цикл работ Р.И.Пименова (1956-1964 гг.) содержал единое аксиоматическое построение системы неевклидовых геометрий. Здесь Р.И.Пименову удалось опередить работы целого ряда других геометров и развить новые плодотворные подходы к этим теориям, оказавшиеся эффективными также и в теории групп.

Второй цикл работ Р.И.Пименова (1964-1966 гг.) содержал исследование аналогов римановых пространств, представляющих собой метризованные гладкие многообразия, у которых в касательных пространствах имеет место та или иная однородная псевдоевклидова геометрия. В этом направлении Р.И.Пименов, в частности, обеспечил приоритет отечественной науки в развитии тензорного исчисления, согласованного с расслоением пространства. В терминах этих понятий Р.И.Пименовым был развит один из вариантов единой общей теории относительности и электромагнетизма, не потерявший своей актуальности до настоящего времени.

Третий цикл работ Р.И.Пименова (1966-1990 гг.) связан с развитием идеи академика А.Д. Александрова о первичности причинного отношения в рамках программы: построить теорию относительности исходя из отношения порядка. Здесь Р.И.Пименов построил теорию неоднородных пространств, значительно расширивших систему математических моделей пространства-времени, которые используются учёными в различных областях науки, он решил проблему построения нерегулярных пространств со знакопеременной метрикой, а также проблему выведения пространственно-временных структур из отношения порядка. Суть его подхода состоит в том, что в основу всех пространственно-временных конструкций кладётся отношение порядка (линейной или частичной упорядоченности) и далее тщательно анализируется, какие другие аксиомы и отношения (топологические, метрические и т.д.) и каким образом должны быть добавлены к свойствам отношения порядка, чтобы получить используемые в Физике многообразия. Именно в таком ключе Р.И.Пименов построил теорию анизотропного пространства-времени, в котором скорость света различна по разным направлениям, т.е. световой конус не круговой, а «гранёный». Дальнейшее допущение, что этот конус меняется от точки к точке, приводит к финслерову обобщению общей теории относительности. По убеждению Р.И.Пименова, «изучение структур порядка есть в физическом аспекте разработка самых базисных априорных моделей для укладывания в них последующего физического материала»[11].

12.5.2. Научные труды Р.И. Пименова

Книги

1. Пространства кинематического типа (математическая теория пространства-времени) // Записки ЛОМИ. 1968. Т.6. С.3-496.

2. Анизотропное финслерово обобщение теории относительности как структуры порядка. Сыктывкар, 1987. 182 с.

3. Основы темпорального универсума. Сыктывкар, 1991. 196 с.

Статьи

1. Аксиоматическое исследование пространственно-временных структур // Труды III Всесоюз. матем. съезда (Москва, 1956). М., 1959. N.4. С.78-79.

2. К основаниям геометрии // Доклады АН СССР. 1964. Т.155, N.1. С.44-46.

3. Применение полуримановой геометрии к единой теории поля // Доклады АН СССР. 1964. Т.157, N.4. С.759-797.

4. Тензорная теория флаговых пространств // Тез. докл. II геометр. конф. Харьков, 1954. С.215-216.

5. Алгебра флагтензоров // Вестник ЛГУ. 1964. N.13. С.150-152.

6. К определению полуримановых пространств // Вестник ЛГУ. 1965. N.1. С.137-140.

7. Тензорная теория полуэвклидовых и попуримановых пространств. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Л.,1965. 24 с.

8. Тензорная теория полуэвклидовых и полуримановых пространств: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Л., 1965. 100 с.

9. Полуриманова геометрия и единые теории // Проблемы гравитации. Тбилиси, 1965. С.111-114.

10. Единая аксиоматика пространств с максимальной группой движений // Литовск.мат.сб. 1965. Т.5, N.3. С.457-486.

II. Метрические пространства кинематического типа // Международный конгресс математиков: Тез. докл. Москва, 1966. Секция 9. С.40.

12. Теоретико-групповое описание трех плоскостей // Сиб. мат. журн. 1967. Т.8, N.1. С.49-55.

[11] Автор текста Н.А.Громов.

13. Некоторые теоремы о метрических пространствах кинематического типа // II Всесоюзный симпозиум по геометрии о целом. Петрозаводск, 1967. С.51-52.

14. Топологические и метрические пространства кинематического типа и теория пространства-времени // Ш межвузовская научная конф. по проблемам геометрии. Казань, 1967. С.132-133.

15. Полуриманова геометрия // Труды семин. по векторному и тензорному анализу. Вып.14. М.,1968. С.154-173.

16. Пространства кинематичесного типа (математическая теория пространства-времени) // Зап.научн. семинаров ЛОМИ. 1968. Т.6. 496с.

17. Теория пространства-времени как теория упорядоченных пространств // Тез. докл. V междунар. конф. по гравитации и теории относительности. Тбилиси, 1968. С.47-50.

18. Новые модели пространства-времени и некоторые связанные с ними философские проблемы // Философские проблемы теории относительности. М.: МГУ, 1968. С.40-52.

19. Пространства кинематического типа: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 1969. 18 с.

20. Пространства кинематического типа // Математ. заметки. 1970. Т.7, N.5. С.641-653.

21. Пространства кинематического типа: Дис. ... д-ра физ.-мат.наук. М.,1969. 314 с.

22. Дополнение к теореме А.Д.Александрова о преобразованиях, сохраняющих конусы // Ш Всесоюзный симпозиум по геометрии в целом. Петрозаводск, 1969. С.52-53.

23. Необходимые и достаточные условия линейности преобразований, сохраняющих конусы // Математ. заметки. 1969. Т.6, N.4. С.361-369.

24. О связи между пространственной метрикой, кинематической метрикой и конгруэнцией временных кривых // IV Всесоюзн. конференция по геометрии: Тез. докл. Тбилиси, 1969. С.202-205.

25. Kinematic spaces. New-York & London: Consultants Bureau, 1970. 185 p.

26. Еще один шаг в направлении геометризации электромагнетизма общей теории относительности // Ш советская гравитационная конф. Тез. докл. Ереван,1972. С.136-138.

27. К геометрическому выводу уравнений движения заряда в электродинамике // Вопросы развития энергетики и водного хозяйства. Сыктывкар, 1973. С.80-92.

28. Язык для описания правил эксплуатации программ на языке Наири-С // Применение в учебном процессе и методическое обеспечение малых ЭВМ: Тез. докл. I Всесоюзн. конф. Обнинск, 1974. С.64-65. (Совм. с В.С.Никифоровым, Б.Г.Новаковским).

29. Дисперсионный анализ. Сыктывкар, 1974. 56 с. (Сер. препринтов «Научн. рекоменд. - народному хоз-ву» / АН СССР, Коми фил.; вып.3). (Совместно с В.П.Кузнецовым).

30. К основаниям теории дифференцируемого пространства-времени // Доклады АН СССР. 1975. Т.222, N.1. С.36-38.

31. Кривые в кинематиках и смежные вопросы физики и космологии. Сыктывкар. 1976. 16 с. (Сер. препринтов «Научн. докл.» / АН СССР: Коми фил.; вып.22). (Совместно с С.Н.Беловым, Н.А.Громовым и В.Я.Крейновичем).

32. Теория кривых в гладких кинематиках // Сиб. мат. жури. 1978. Т.19, N.2. С.370-384.

33. Негладкие и другие обобщения в теории пространства-времени и электричества. Сыктывкар, 1979. 60 с. (Сер. препринтов «Науч. докл.» / АН СССР, Коми фил.; вып.47).

34. Нормативный пересчет на ЭВМ как средство получения минералогической информации // Ин-т геологии Коми фил. АН СССР, 1980. Вып.31. С.91-93. (Совместно с Я.Э.Юдовичем и др.).

35. A non-smooth approach to the physical content of General Relativily // 9th Intern. conf. on General Relativity and Gravitation. Abstracts. Jena. 1980. V.3. P.663-664.

36. Финслеровы кинематики // Сиб.мат. журн. 1981. Т.22, N.3. С.136-146.

37. Анизотропию невозможно обнаружить радарным методом // Симпозиум по геометрии в целом и основаниям теории относительности: Тез. докл. Новосибирск, 1982. С.87-88.

38. К одной проблеме Буземана // Симпозиум по геометрии в целом и основаниям теории относительности: Тез. докл. Новосибирск, 1982. С.89-90.

39. О полноте решения Шварцшильда // Сиб. мат. журн. 1884. Т.25, N.5. С.119-124.

40. Устойчивость оптимального решения в задаче с производящим и потребляющим регионом // Применение математических методов в анализе и планировании отраслей народного хозяйства Европейского Северо-Востока. Сыктывкар, 1984. С.40-46. (Совместно с М.И.Игнатовым).

41. Финслерово пространство-время позволяет обойтись без черных дыр. Сыктывкар, 1989. 8 с. (Сер. препринтов «Науч. докл.» / АН СССР, Коми фил.; вып.136).

42. Хроногеометрия: достижения, препятствия, структуры. Сыктывкар, 1987. 22 с. (Сер. препринтов «Науч. докл.» / АН СССР. Коми фил.; вып. 150).

43. Анизотропное финслерово обобщение теории относительности как структуры порядка. Сыктывкар, 1987. 182 с.

44. Самостоятельное место гладкости в системе дискретное-непрерывное в теории пространства-времени // VIII Междунар. конгресс по логике, методологии и философии науки. Abstracts. М., 1987. V.2. P.212-214.

45. Горизонты как экстремальные точки выпуклой структуры // Всесоюэн. конф. по геометрии в целом. Новосибирск. 1987. С.95.

46. Хроногеометрическая аксиоматика общей теории относительности // Всесоюзн. конф. по геометрии в целом: Тез. докл. Новосибирск, 1987. С.96.

47. Каузальная аксиоматика общей теории относительности // Тез. докл. IX Всесоюзн. геометрической конф., 20-22 сентября 1988. Кишенев. 1988. С.244-246.

48. Аксиоматика общерелятивисткого и финслерова пространства-времени посредством причинности // Сиб. мат. журн. 1988. Т.29. N.2. С.133-143.

49. Кинематическое доказательство невозможности кривой Пеано // Всесоюзн. конф. по геометрии и анализу. Новосибирск, 1989. С.63.

50. New spacetime – anisotropic and semi-Riemannean // Proc. XVIII Intern. colloquium on group theoretical methods in physics, June 4-9, 1990, Moscow / Lecture Notes in Physics, Springer, 1991.

12.5.3. Воспоминания об А.Д. Александрове

«Александров был учеником очень нетривиального геометра – Бориса Николаевича Делоне, двадцатью годами его старшего, деда прославившегося в шестидесятые годы поэта Вадима Делоне. Как и Делоне, Александров занимался альпинизмом и, пожалуй, больше своих математических регалий гордился значком «мастер спорта» по альпинизму <..>

В свои 30 лет он стал лауреатом Сталинской премии, в 34 года (в 1946 году) – членом-корреспондентом Академии Наук СССР. Так как он не занимался никакой военной тематикой, а то ли его отец, то ли его дед был сенатором в дореволюционном Сенате и чуть ли не начальником какого-то департамента, то эти успехи объяснялись исключительно научными причинами. Он был нетривиален, замечательно импровизировал, старался во всем вникнуть до самой сути и не успокаивался, пока не возникало в нем искренней убеждённости. Как и многие в его поколении, он истово веровал в марксизм, в диалектический материализм особенно. После премии и избрания в АН вступил в ВКП(б). Не был он лишён и приспособительных способностей, но честность мешала ему и в конце концов привела к безнадежному конфликту с ленинградским горкомом или обкомом. Известен случай, когда он ехал на «колбасе» трамвая, его снял милиционер, потребовал документы.

Увидав карточку членкора Академии, милиционер козырнул и вернул документы со словами: «Продолжайте эксперимент». У Александрова замечательная память на лица – была сорок лет назад, и сейчас сохранилась. Он помнил – в лицо, хотя фамилии мог и не знать – всякого, с кем хоть раз разговаривал. Как и многие творческие натуры, он плохо помнит то, что сам он произносил в тех или иных обстоятельствах.

И вот он читал обязательный курс «Дифференциальной геометрии» для общего потока всех математиков и механиков курса в IV-V семестрах. Ничего особо выдающегося в содержании не было – мне с тех пор попадались книжки и программы этого курса куда как более насыщенные. Более того, Александров не давал общего и единого аппарата (например, тензорного, как в книгах Кагана), овладевши которым всякий, даже туповатый, студент решил бы все задачи дифференциальной геометрии. Вообще цельности, завершенности в этом его курсе было маловато. Не случайно за всю свою более чем полувековую математическую деятельность он так и не написал ни одной книги (та, что с Залгаллером – Данилычу не в зачёт)[12]. Он был мастером этюдов, мгновенных импровизаций. Он учил каждую теорему воспринимать с самого начала, доказывать, словно бы ничего пред тем не зная, с чистого листа. Гениальным озарением. Поэтому к нему и установилось двойственное отношение: одни его терпеть не могли «за пижонство», «за халтуру», «за неподготовленность к лекциям», а другие восхищались его «концепцией конгениальности», «возможностью наблюдать процесс творчества воочию у доски», нахождением минимальных и красивейших путей мысли. Вот относящиеся к этой черте строки из той же шуточной поэмы:

Служил Данилыч на матмехе,
Вставал не рано поутру,
Читал Данилыч для потехи
Студентам всякую муру.

По геометрии Данилыч
Аксиоматику читал.

[12]А.Д. – автор нескольких книг и учебников по геометрии (А.Г.).

Студенты слушали, томились,
Да он и сам не понимал.

Да, не редкостью было услышать от этого профессора с кафедры признание в том, что он НЕ ПОНИМАЕТ того или иного факта, имеющего тем не менее место в системе геометрических наук. Меня такое признание словно бы приобщало к миру горнему. Wer von euch kann zugleich lachen und erhoben sein?» [13]

12.5.4. Политическая деятельность Р.И. Пименова

1. Из биографии кандидата в народные депутаты СССР по Сыктывкарскому территориальному избирательному округу N 371 Револьта Ивановича Пименова

Русский, беспартийный. Научный сотрудник Коми научного центра Уральского отделения АН СССР.

В 1957 году был арестован по статье 58 (10-11): распространял перед выборами листовку: «На один депутатский мандат – несколько кандидатов», выдвигал лозунг «Земля – крестьянам, заводы – рабочим!». Приговорен к 10 годам. В 1963 году освобожден по ходатайству Президента АН СССР М.В.Келдыша и главного редактора «Нового мира» А.Т.Твардовского.

В 1969 году защитил докторскую диссертацию. 1970 год – арестован по статье 190-1: обвинялся в том, что давал читать письмо П.И.Якира в редакцию журнала «Коммунист», где Якир требовал судить посмертно Сталина перед народом. Был приговорен к ссылке на 5 лет. 1988 год – избран членом правления общества «Мемориал».

2. Письмо Р.И. Пименова к X

Дорогой X,

[13] Пименов Р.И. Воспоминания. Т.1. М., 1996. Размещено на сайте http://www.sakharov-center.ru

ffl

Рис. 12.5: Аэропорт Сыктывкара, 19 мая 1989 года. Академик А.Д.Сахаров прилетел для поддержки кандидатуры Р.И.Пименова.

по Вашей просьбе посылаю Вам некоторые материалы, относящиеся к прошедшей кампании. Она прошла для меня так: по городу выиграл у своего соперника примерно 10:9, а по сельским районам – приграл с соотношением примерно 1:2. Итого – с учетом различной явки по городу и по селам – получилось 65000:89000:95000, где в последнем члене число неявившихся на выборы. К сожалению, у меня сейчас вовсе нет времени написать заметку о прошедших выборах на манер посылаемой здесь «Опыт...». А эта последняя уже опубликована в ряде неформальных журналов.

«Профессором» меня «ВЗГЛЯД»[14] обозвал ошибочно, мне всего лишь вернули мой докторский диплом.

С наилучшими пожеланиями, Ваш Пименов.

30.06.89

[14]Популярная в 1980-е годы центральная телевизионная программа.

Читайте также «СовЦирк» от 01.06.89 – там продолжение моих мемуаров.

3. Револьт Пименов – народный депутат РСФСР

Весной 1990 года Р.И.Пименов был избран народным депутатом РСФСР, членом Конституционной комиссии Российской Федерации.

Умер от рака 19 декабря 1990 года.

12.6. Ю.Ф. Борисов

ffl

Ю.Ф. Борисов.

«Юрий Федорович Борисов (15 июня 1925 г.– 19 октября 2007 г.) – известный специалист в области геометрии, ученик и друг А.Д.Александрова.

Юрий Федорович окончил в 1948 году Ленинградский университет, в 1950 году защитил кандидатскую диссертацию, а в 1962 году – докторскую. Ленинградский период научной и педагогической деятельности Юрия Федоровича связан, главным образом, с Ленинградским отделением Математического Института им. В.А.Стеклова и с Ленинградским университетом.

С сентября 1964 года Юрий Федорович переходит на работу в Институт математики СО АН СССР, в 1965 году его избирают на должность профессора НГУ, где в течение ряда лет он заведовал кафедрой геометрии и топологии, руководил философским семинаром. Под его руководством защищены 5 кандидатских диссертаций по геометрии.

Основные геометрические работы Юрия Федоровича относятся к теории многообразий ограниченной кривизны и к проблеме регулярности гладких изометрических погружений таких многообразий в евклидовы пространства, а также к основаниям теории относительности. Им разработаны подход к метрическим основаниям римановой геометрии, базирующийся на постулате «инфинитезимальной евклидовости».[15]

Ю.Ф.Борисов опубликовал три работы по хроногеометрии [37, 56, 57] и был постоянным участником семинара «Хроногеометрия», организованным академиком А.Д.Александровым в Новосибирском университете (гл.13).

12.7. М. Аксёнов

Идея об объективно существующем абсолютном пространстве-времени была детально проработана русским мыслителем начала XX века М.Аксёновым. В своей трансцендентально-кинетической теории времени он пишет о четырёхмерном мире, в котором осуществляется движение не тела нашего, но самого недоступного нашему восприятию, для нас трансцендентального, воспринимающего в нас начала. Именно в четвёртом пространственно подобном измерении «все объекты и все явления (события) существуют до нашего их восприятия и после него (нужды нет, что для всех нас, для всего человечества существование их еще не наступило или прекратилось уже)» [43, с.26,58].

«Все объекты нашего восприятия, – пишет М.Аксёнов, – простираются и в четвёртое измерение, так что трёхмерные для нас объекты на самом деле четырёхмерны... Все объекты четырёхмерного пространства пребывают в абсолютном покое, воспринимающее же в нас начало непрестанно совершает несознаваемое нами движение в направлении четвёртого измерения, по нормали к нашему трёхмерному пространству...» [42, с.4].

[15]См. http://math.nsc.ru/Archive/yubilei/page24.html

12.8. М. Паладьи

Паладьи (Palagyi) Мельхиор (род. 26 декабря 1859 г., Пакш, Венгрия – умер 14 июля 1924 г., Дармштадт) – венгерский математик, философ-виталист, профессор физики в Будапеште, работал и умер в Германии. Задолго до Минковского предложил концепцию единого четырехмерного пространства-времени. Согласно его идее, время является четвёртым измерением пространства. В.И.Вернадский в работе «Пространство и время в неживой и живой природе» [61, с.238] неоднократно обращался к книге Палади.

ffl

М. Паладьи.

В своем труде «Neue Theorie des Raumes und der Zeit, Entwurf einer Metageometrie» (1901) Паладьи выдвинул теорию, согласно которой трёхосевая пространственная система координат дополняется четвёртой осью, временем; пространство не является застывшей системой бытия, но в различные моменты порождается временем. Пространство «течет».

Все движения возникают из «эфира» – устойчивого носителя напряжений и передачи напряжений. С точки зрения психологии и гносеологии Паладьи строго различает жизнь и дух. Переживания, носителями которых является витальная жизнь, представляют собой непрерывный процесс. Напротив, духовные явления в человеке (к которым Паладьи относит наряду с сознанием и мышлением еще и волю) обнаруживаются только в нулевых точках и точках, соответствующих теперешнему состоянию, где акты прерывны, вневременны и невидимы. Поэтому непрерывные явления, происходящие в мире и жизни, не могут быть поняты адекватно.

12.9. Э. Мах

ffl

Э. Мах.

Знаменитый австрийский физик и философ Эрнст Мах, значимость работ которого для физики отмечал Эйнштейн, делает следующее замечание в своей книге: «Познание и заблуждение. Очерки по психологии исследования» (1905): «...пространство и время не могут быть вполне отделены друг от друга в исследовании. См. остроумную философскую шутку Фехнера в «Четырёх парадоксах», именно: Пространство имеет четыре измерения[16]. – Серьезное обсуждение этого вопроса дает M.Palagyi в своей работе: Neue Theorie des Raumes und der Zeit. Leipzig, 1901. Взгляд, родственный взгляду Фехнера, см. в моей книге «Анализ ощущений». На неотделимость пространства от времени я указывал в небольшой заметке в Fichtes Zeitschr. f. Philosophie, 1866. – Во время печатания настоящей книги я получил еще работу K.C.Sneider'a: Das Wesen der Zeit (Wiener klinische Rundschau, 1905, Nr. 11, 12). В сочинении этом проводятся идеи, напоминающие мысли Фехнера и Palagyi, на что здесь только и указываю».

Таким образом, идея объединения пространства и времени в единое пространство-время пришла на ум многим исследователям и философам. Минковский, однако, не только высказал эту же мысль. Он разработал математическую теорию пространства-времени как теорию псевдоевклидова пространства.

Биографическая справка.

Мах (Mach) Эрнст (18.2.1838, Турас, ныне Туржани, Чехословакия – 19.2.1916, Хар, близ Мюнхена), австрийский физик

[16] До Фехнера (1846) о времени как о четвёртом измерении говорили д'Аламбер, Лагранж, психолог Людвиг Ланге и физик Мах (см. [61, с.240].

и философ-идеалист. Окончил Венский университет. Приват-доцент в Венском университете (с 1861), профессор физики в Граце (с 1864), профессор физики и ректор немецкого университета в Праге (с 1867). Профессор философии Венского университета (1895-1901).

Маху принадлежит ряд важных физических исследований. С 1881 года Мах изучал аэродинамические процессы, сопровождающие сверхзвуковой полёт тел (например, артиллерийских снарядов). Он открыл и исследовал специфический волновой процесс, впоследствии получивший название ударной волны. В этой области именем Маха назван ряд величин и понятий. Предложил принцип, называемый в наши дни *принципом Маха*, согласно которому наличие у тела инертной массы является следствием гравитационного взаимодействия его со всем веществом Вселенной. Иначе говоря, силы инерции сводятся к силам гравитации.

Работы Маха оказали большое влияние на Эйнштейна, о чём последний неоднократно заявлял.

12.10. Э.К. Зиман

В 1964 году в «Journal of Mathematical Physics» появилась статья «Causality implies the Lorentz group», автором которой был известный английский математик Эрик Кристофер Зиман. В статье была доказана теорема о лоренцевости биективных отображений в аффинном пространстве, сохраняющих либо поверхностные одинарные эллиптические конусы, либо телесные открытые одинарные эллиптические конусы (см. § 3.2).

Данный результат является единственным вкладом Зимана в хроногеометрию, но теорема Зимана получила широкую известность, и на неё часто ссылаются на Западе.

Биографическая справка. «Sir Erik Christopher Zeeman (born February 4, 1925), is a Japanese-born British mathematician known for work in geometric topology and singularity theory.

Zeeman's main contribution to mathematics was in topology, particularly in the piecewise linear category, and dynamical systems.

ffl

E.C. Zeeman.

Zeeman was elected as a Fellow of the Royal Society in 1975, and was awarded the Society's Faraday Medal in 1988.

He received an MA and PhD (the latter under the supervision of Shaun Wylie, who had spent the war at Bletchley Park) from the University of Cambridge. After working at Cambridge (during which he spent a year abroad at University of Chicago and Princeton as a Harkness Fellow) and the Institut des Hautes Etudes Scientifiques, he founded the Mathematics Department and Mathematics Research Centre at the new University of Warwick in 1964.

He remained at Warwick until 1988, but from 1966 to 1967 he was a visiting professor at the University of California at Berkeley, after which his research turned to dynamical systems, inspired by many of the world leaders in this field, including Stephen Smale and Rene Thom, who both spent time at Warwick. Zeeman subsequently spent a sabbatical with Thom at the Institut des Hautes Etudes Scientifiques in Paris, where he became interested in catastrophe theory. On his return to Warwick, he taught an undergraduate course in Catastrophe Theory which became immensely popular with students; his lectures generally were "standing room only" ».[17]

[17] Wikipedia. – http://en.wikipedia.org/wiki/Erik_Christopher_Zeeman

Глава 13

СЕМИНАР «ХРОНОГЕОМЕТРИЯ»

Хроногеометрия – это направление оснований геометрии, поставившее перед собой цель найти самую простую и интуитивно ясную систему аксиом, описывающую специальную теорию относительности. Таким пониманием термина «хроногеометрия» мы обязаны академику Александру Даниловичу Александрову, использовавшему это слово в названии своей статьи (1967), посвященной 60-летию Кокстера [19]. Статья содержала серию теорем, описывающих биективные отображения, сохраняющие конусы в аффинном пространстве, а также касалась возможного построения основ теории относительности с использованием полученных в статье результатов.

В этой статье А.Д.Александров, после долгого перерыва (1955), вернулся к исследованиям по аксиоматической теории относительности. Надо, конечно, отметить, что и после 1955 года А.Д.Александров уделял заметное внимание теории относительности [12] – [17]. Но в это время его публикации и выступления носили, в основном философский характер и были связаны с развернувшимися в стране идеологическими спорами вокруг теории относительности. Тем не менее этот период можно рассматривать как философскую предысторию семинара «Хроногеометрия», поскольку в это время вырабатывались принципы построения будущей математической теории, формулировались, как выражался А.Д.Александров, философемы, на основе которых отыскивались позже точные формулировки теорем, составившие костяк аксиоматических теорий пространства-времени, характерных для круга участников семинара «Хроногеометрия».

Новый хроногеометрический период (1967-1977) в научной деятельности А.Д.Александрова, по существу, совпал с его переездом в Новосибирский Академгородок и избранием в действительные члены АН СССР (1964). За это время им по указанной теме было опубликовано 19 статей [19], [20] – [39]. Большое внимание было уделено чтению специального курса «Хроногеометрия» (1969-1970, 1974-75?) для студентов Новосибирского университета. Однако среди тех, кто затем увлекся данной темой и добился хороших результатов, лекции, видимо, прослушал только Александр Владимирович Левичев.

Основная коллективная работа по исследованию семейств множеств, сохраняемых биективными отображениями, в аффинном и других пространствах, и связанных с ними аксиоматик специальной теории относительности началась в 1971 году на организованном А.Д.Александровым спецсеминаре «Хроногеометрия». Автор был участником и старостой семинара с 1971 по 1974 год. После 1974 года семинар действовал еще несколько лет, но постепенно угас, поскольку основное внимание А.Д.Александрова с 1980 года было уже сконцентрировано на написании школьных учебников по геометрии. Был открыт «учебно-педагогический сезон» в деятельности основателя Ленинградской геометрической школы.

В ходе работы семинара произошло расширение содержания термина «хроногеометрия». Под «хроногеометрией» участники семинара стали понимать изучение биективных отображений, сохраняющих то или иное семейство подмножеств (или обладающее некоторым свойством) в конкретном пространстве. Например, отображения, сохраняющие семейство конусов в аффинном пространстве, отображения, сохраняющие фиксированное расстояние или объем в метрическом пространстве, отображения, сохраняющие свойство произвольного множества быть выпуклым в том или ином пространстве, отображения, сохраняющие порядок, и т.д. Ясно, что далеко не все такие исследования имеют непосредственное отношение к основам теории относительности. Поэтому то, что руководитель семинара не пытался ограничить тематику семинара, позволило его участникам найти себя в складывающемся коллективе, привнося в его деятельность дух восприимчивости новых идей и отсутствие боязни сменить направление деятельности. В итоге темой семинара стал поиск тех свойств, которые полностью характеризовали бы аффинные и изометрические отображения соответственно в аффинном или евклидовом, псевдоевклидовом, гиперболическом, и наконец, в сферическом пространствах. Результатом этой деятельности стали самые разнообразные статьи (см. список литературы) и пять кандидатских диссертаций [79, 161, 170, 218, 50]. Достижения участников семинара в области оснований теории относительности были подытожены в обзоре [86].

13.1. Первая статья по хроногеометрии

Особое место в хроногеометрии занимает статья А.Д.Александрова и В.В.Овчинниковой «Замечания к основам теории относительности» (1953) [6]. В ней были доказаны теоремы (см. § 3.1), показывающие, что преобразования Лоренца можно получить: во-первых, только из закона постоянства скорости света, а во-вторых, из закона ограниченности скоростей, который в действительности в геометрической форме означал сохранение причинно-следственных связей при смене инерциальной системы отсчёта. Этот второй результат приобрел позднее особое значение, поскольку именно он стал основой причинной теории пространства-времени.

Данная статья и предшествующая ей очень маленькая заметка в журнале «Успехи математических наук» (1950) [5] обязаны своим появлением вопросам, которые возникли у В.А.Фока в ходе написания известной книги по теории пространства-времени [211]. Фока интересовали минимальные требования к отображениям, которые сохраняют закон распространения света в инерциальной системе отсчета. Этим же вопросом задавался в свое время Умов – учитель В.А.Фока, а также знаменитый математик Г.Вейль. Ответ был найден в статье А.Д.Александрова и В.В.Овчинниковой.

ffl

В.В. Овчинникова.

Позже в 1964 г. результат А.Д.Александрова и В.В.Овчинниковой, касающийся сохранения причинности был, по сути дела, повторен Зиманом [358] и приобрел большую известность на Западе. Западные авторы, знающие о статье А.Д.Александрова и В.В.Овчинниковой, пишут о теореме Александрова-Зимана.

Для В.В.Овчинниковой эта статья была, кажется, единственной научной публикацией. Она познакомилась с А.Д.Александровым, будучи студенткой физико-математического факультета Казахского университета, когда он приезжал читать лекции в Алма-Ату в 1949-51 годах. В 1951 г. она приехала в Ленинград и стала аспиранткой А.Д.Александрова. Через год она уехала в Москву, и, как пишет В.А.Залгаллер: «А.Д. сделал ей щедрый подарок, опубликовав в соавторстве с ней известную статью 1953 г. о причинах линейности преобразований в специальной теории относительности» [4, с25].

13.2. Новосибирский университет. 1965-1970 гг.

Феномен семинара «Хроногеометрия» тесно связан с таким событием в истории Сибири, как строительство Новосибирского Академгородка – научного центра, собравшего на берегу Оби многих талантливых представителей московской и ленинградской науки. В 1959 г. был открыт Новосибирский государственный университет, в составе которого не было штатных преподавателей. Все они работали в научно-исследователских институтах СО АН СССР и были преподавателями лишь по совместительству. В основной своей массе это были люди в возрасте до 40 лет, и поэтому наука занимала их мысли почти все время. Распри и склоки еще не поглотили их души, поэтому их благотворное влияние на студентов проявлялось в максимальной степени. В стенах университета царил культ науки. Студенты жили на расстоянии 1-3 км от здания университета, преподаватели несколько далее, в силу чего свет в окнах НГУ горел до 22 часов, а семинары начинались и 18.00, и даже в 20.00 вечера.

В университете процветала коммунистическая демократия, дозволявшая большую свободу в высказываниях и действиях. В общежитиях отсутствовала пропускная система, двери никогда не закрывались. Старшекурсники жили по одному, в маленьких отдельных комнатах. Вообще НГУ располагал тогда самыми современными общежитиями. Комнаты делились на блоки. Блок состоял из двух комнат (на 1 и на 3 человек соответственно) и санузла. Царивший культ учения и науки делал крайне редкими драки между студентами, а воровство, хотя и имевшее место, не портило настроения всеобщего багополучия.

Доминировали естественные факультеты, на которых экзамены принимали лекторы и несколько человек из числа преподавателей, проводивших семинары, а также из числа приглашенных лектором из института, где он работал. Это сводило к нулю необъективность, предвзятость преподавателя (лектора или семинариста) при приеме экзамена, поскольку студент мог выбрать (если не «засиживался» при подготовке вопроса из билета) себе «понравившегося» из 5-7 экзаменаторов. Конечно, были такие преподаватели, над которыми «витала» слава изверга или, напротив, добряка. Выбор позволял многим избежать встечи с «извергом»; хотя к добряку приходилось занимать очередь.

После 1967 года в НГУ произошло несколько политических акций, в которых приняли участие студенты. Это насторожило реакционную часть властей, но реализовать свои замыслы, направленные на сворачивание коммунистической демократии в университете, они смогли лишь в 70-е годы. Символами конца демократии следует назвать попытки ввести пропуска в общежитиях в 1971 году и уничтожение права старшекурсников жить по одному в маленькой комнате – в 1972 году. Вскоре стали закрывать общежития на ночь. «Процесс» протекал неустойчиво – ряд деканов противились наступлению «нового порядка». Но когда автор посетил НГУ в 1980 году, там уже вовсю «процветали» пропускная система, замки на дверях после 24.00 и решетки на окнах над козырьками входа в общежития, дабы загулявший студент не смог проникнуть вовнутрь через окно на втором этаже. Студенты ничего уже не знали о прошлых временах, когда все была иначе.

Основная масса участников семинара «Хроногеометрия» была воспитанниками коммунистической демократии в НГУ, наука была их страстью, ей они отдавали все свое время, которое, как оказалось, они направили на раскрытие тайны собственно Времени.

13.3. Предыстория семинара. 1968 год

В сентябре 1968 года на кафедре геометрии и топологии Новосибирского университета состоялось заседание, на котором предполагалось назначить научных руководителей студентам четвертого курса, пожелавшим специализироваться в области геометрии или топологии. К удивлению членов кафедры таких студентов оказалось человек двадцать (А.С.Балаян, В.П.Голубятников, А.Гуц, В.Лисейкин, П.Речевский, В.В.Усов, В.Шарафутдинов и другие), то есть достаточно много, и, кроме того, большинство из них имели очень хорошие оценки. Студентов распределили весьма быстро, а затем было принято решение о начале постоянной работы научного семинара кафедры. Решение это самым тесным образом связано с появлением на кафедре значительного числа студентов (годом позже пришли И.Йомдин, Н.Ф.Тищенко, А.Шишко, Агульник и др.).

Проявившийся интерес студентов к геометрии и топологии (чего не наблюдалось в НГУ ранее) объясняется достаточно легко. Кафедру возглавил А.Д.Александров, академик, и это играло свою роль. Сам заведующий стал читать курс дифференциальной геометрии (1966/67 и 1967/68 учебные годы). Параллельно профессор Ю.Ф.Борисов предложил вниманию студентов двухгодовой цикл лекций по римановой геометрии, а доценты В.И.Кузьминов, И.А.Шведов и Л.Н.Ивановский (ученики академика П.С.Александрова) – спецкурсы по алгебраической и дифференциальной топологии. На кафедре готовились к защите докторские диссертации В.А.Топоногова и С.З.Шефеля. В дальнейшем большое значение для подготовки геометров будет иметь возглавляемый ими семинар, проводимый в стенах Института математики СО АН СССР.

К сказанному надо добавить, что заведующим кафедрой математического анализа был Юрий Григорьевич Решетняк (ученик А.Д.Александрова, будущий академик АН СССР). На этой кафедре также велись геометрические исследования, и часть студентов (например, В.В.Славский, И.Г.Николаев) шли специализироваться туда.

Таким образом, для появления семинара «Хроногеометрия» имелся вполне определенный задел, плод работы многих математиков. Но роль личности самого А.Д.Александрова огромна. Ему и до появления в Сибири удавалось создавать группы интенсивно работающих математиков. Характерно, что при этом каждый раз ядром становились несколько молодых людей, студентов, которые быстро набирались сил

ffl

Рис. 13.1: А.Д. Александров. 1966(?).

и начинали выдавать математические результаты в новой, до сих пор мало изведанной области математики. При этом А.Д.Александров, как правило, не предлагал кому-либо конкретную задачу, но в ходе работы, на постоянно действующем семинаре, он ставил то в виде готовой формулировки теоремы или гипотезы, предположения, то в виде «философемы» ту или иную проблему, за решение которой просто невозможно было не взяться кому-нибудь из участников семинара. Часто такой участник семинара находился, причем совершенно добровольно, и уже через какое-то время заслушивался соответствующий доклад. Так формировался контингент учеников А.Д.Александрова. Особенно ценил он тех, кто сам находил серьёзную задачу или тему исследований (так было с темой дипломной работы А.В.Левичева). Предлагаемые же им задачи были очень и очень трудными, и это также влияло на то, что из окружения академика быстро исчезали любители быстрых и лёгких успехов.

Интересна «система поощрений», применяемая А. Д. Александровым к своим молодым ученикам. Кого-то он постоянно хвалил, кого поругивал, кому-то вообще ничего не доставалось.

13.4. Предыстория семинара. 1971 год

ffl

Н.Ф. Тищенко. 2001 г. .

В 1971 году А.Д.Александров имел одного аспиранта (А.Гуц) и одного дипломника (Николай Федорович Тищенко). Дипломник писал работу по отображениям, сохраняющим дискретные конусы в аффинном пространстве. Идея такого обобщения теоремы А.Д.Александрова и В.В.Овчинниковой [6] принадлежала самому Тищенко. Он получил массу следствий из правильно сформулированной им основной теоремы, но ее доказательство ему никак не давалось. Он поделился своей горестью с аспирантом, который неожиданно в течение одной ночи нашел простое доказательство.

Теорема вошла в дипломную работу со ссылкой на автора доказательства и была позднее опубликована в статье аспиранта, где указано, кто подлинный автор формулировки теоремы. Последнее осуществлено было после строгого выговора, который сделал своему аспиранту А.Д.Александров, ибо первоначально в рукописи аспирант не указал, кому принадлежала формулировка теоремы.

В июне-августе аспирант после чтения книг по геометрии Лобачевского сформулировал и доказал теорему, являющуюся аналогом теоремы А.Д.Александрова и В.В.Овчинниковой для пространства Лобачевского, о чем известил своего руководителя. А.Д.Александров в конце сентября предложил аспиранту сделать доклад на спецсеминаре, который планировался как новый спецсеминар для студентов.

Было сделано объявление о начале работы семинара. На первое заседание пришло около десяти человек, среди которых профессор Юрий Федорович Борисов и будущие «хроники» Александр Вениаминович Кузьминых (студент 4 курса), Анна Викторовна Шайденко (студентка 1 курса), А.В.Левичев (студент 3 курса). Кажется, присутствовали: Агульник (студент 4 курса - курсовик А.Д.Александрова), Иохим Мазманиди (студент 2 или 3 курса) и Альтерович (студент, короткое время курсовик А.Д.Александрова, эмигрировавший вскоре в Израиль). Остальных не помню.

Особо следует отметить роль профессора Ю.Ф.Борисова в плодотворной деятельности семинара. Ученик и друг А.Д.Александрова, он был долгое время единственным представителем старшего поколения среди участников семинара, за исключением, конечно, самого руководителя. Выступал с докладами Юрий Федорович крайне редко, но был, пожалуй, самым активным слушателем и комментатором полученных результатов. Его постоянные шутки способствовали созданию дружелюбной атмосферы на семинаре.

ffl

Ю.Ф. Борисов. 1980 г.

13.5. 1971-72 учебный год

Два-три первых заседания семинара были отданы докладу А.Гуца «Отображения, сохраняющие конусы в пространстве

Лобачевского». Число участников составляло где-то семь - восемь человек. Был назначен староста семинара – А.Гуц. Он должен был обеспечивать вывешивание объявления о теме следующего доклада, а также следить за чистотой доски, наличием мела и тряпки. Очень часто староста сам определял тему и докладчика. Семинар получил название – «Хроногеометрия».

Последующие заседания были часто реферативными. Участники семинара по очереди рассказывали о содержании статей Rothaus [334], Zeeman E.C.[358], о теореме Дарбу и др.

Профессор Ю.Ф.Борисов сделал подробный доклад по своей статье «Отображения, сохраняющие изотропность векторов в псевдоевклидовых пространствах» [56]. При этом он старался разъяснить физический и философский смысл полученного результата, уделяя особое внимание обоснованию четырехмерности пространства-времени.

Кажется, в этом же учебном году Юрий Федорович выступил с еще одним докладом, который посвящён был философским вопросам теории относительности. Он говорил о том, что для становления теории относительности не играли сколь-либо значительной роли эксперименты, и эксперимент Майкельсона-Морли в частности. Важным было то, что: 1) был принят новый научный взгляд на пространство и время, и то, 2) чтобы предсказания, которые делаются, опираясь на новую теорию, адекватно отражали то, с чем мы имеем дело в реальной деятельности. После этого Ю.Ф.Борисов перешел к описанию философских взглядов, распространенных среди физиков и философов, занимающихся вопросами теории относительности, и охарактеризовал идеализм в философии как учение, которое признает наличие инструмента, способного менять действительность, но инструмент этот не в руках людей, но бога; материализм же, напротив, дает инструмент в руки людей.

Семинар привлекал внимание людей, интересующихся основами теории относительности, но, надо заметить, лишь на короткое время. Среди самых постоянных участников семинара были люди, проявляющие интерес к физике, главным образом к общей теории относительности (А.Д.Александров, Ю.Ф.Борисов, А.Гуц, Е.Малков, А.В.Левичев) и те, кто предпочитал не углубляться в физику (А.В.Кузьминых, А.В.Шайденко, С.Н.Астраков, И.Мазманиди). Тем не менее многие доклады на семинаре были «чисто физические» (решения уравнений Эйнштейна, обзор статей по тахионам и др.), и подчас их делали физики. Например, однажды доклад «Максвеллизация гравитации» сделал известный физик Юрий Борисович Румер, написавший в сталинской шарашке книгу «5-оптика».

Студент А.В.Кузьминых в этом году несколько раз рассказывал о своих результатах по отображениям семейств дискретных конусов (не опубликовано, см.[79]), по обобщению теоремы Дарбу о коллинеациях [160] и др.

13.6. 1972-73 учебный год

Этот год открылся докладом Револьта Ивановича Пименова (ученик А.Д.Александрова, будущий депутат Верховного Совета РСФСР, умерший от рака в 1990 году). Он рассказывал о своей докторской диссертации (автор данного текста был в это время бригадиром студентов, убирающих картофель на совхозных полях под Новосибирском). Диссертация была успешно защищена, но утверждена только в 1989 году. Дело в том, что Пименов имел постоянные столкновения с коммунистическим правительством и подвергался преследованию со стороны КГБ. На момент защиты он находился в ссылке в Сыктывкаре, хотя ему были позволены научные публикации. Утверждение ученой степени произошло во времена горбачевской Перестройки, и то после хлопот со стороны самого Пименова (и, видимо, при поддержке многих других людей, использовавших моду на Гласность).

На втором заседании был заслушан доклад А.Д.Александрова по основам теории относительности. Присутствовало, к полному удивлению докладчика, наверное, человек двести. Это было связано с тем, что было дано большое (по размерам) объявление с портретом докладчика, в котором говорилось, что академику А.Д.Александрову исполнилось 60 лет. В то время Институт математики СО АН СССР разослал письма членам Академии и в различные научные учреждения на стандартно изготовленных бланках с портретом юбиляра, извещающие о юбилейной дате, а также о том, что никакого чествования по пожеланию виновника указанного события не планируется. Таким образом, заседание семинара неожиданно оказалось юбилейным. Староста семинара получил выговор от руководителя семинара за нестандартное объявление, хотя до этого подвергался критике, что вывешиваемые объявления плохо привлекают внимание людей (Саша! Надо делать хорошую рекламу нашему семинару!). Выговор был таков: «Я собирался делать деловой доклад для своих, а пришлось говорить для тех, кто пришел поглядеть на юбиляра!».

ffl

June Lester. 1995.

Последующие несколько заседаний были посвящены обзору препринтов Сигала по хроногеометрии пространств с топологией $S^3 \times R$ или $S^3 \times S$ и ее космологическому приложению. Препринты были присланы автором А.Д.Александрову. Доклад делал А.Гуц. В 1990-е годы сигаловскими идеями увлёкся Александр Владимирович Левичев. Порядковой структуре указанных пространств (под названием конформные пространства) были в последующем посвящены статьи А.Д.Александрова (1976) [35] и June Lester (1980) [292].

В марте А.Д.Александров раздал участникам семинара оттиск своей статьи [29], где были полностью описаны непрерывные отображения, сохраняющие инвариантный относительно группы параллельных переносов порядок в аффинном пространстве. Он выразил при этом мнение, что аналогичных результатов нельзя получить для порядков инвариантных относительно некоммутативной группы преобразований упорядоченного пространства. Однако уже в апреле А.Гуц показал как переделать результаты из указанной статьи руководителя семинара на случай некоммутативной группы, которая сейчас носит название основной аффинной группы Ли [80].

Вообще в этом учебном году А.Д.Александров постоянно рассказывал о ведущихся им исследованиях по отображениям, сохраняющим порядок в аффинном пространстве. По существу, речь шла о создании причинной теории пространства-времени. В дальнейшем данной теорией надолго увлекутся А.Гуц и А.В.Левичев, и посвятят упорядоченным (причинным) структурам свои докторские диссертации.

Несколько докладов сделал А.В.Кузьминых о своих результатах, касающихся выпукло-инвариантных отображений, то есть сохраняющих выпуклость некоторых множеств, а также об изометричности отображений, сохраняющих расстояние равное 1.

ﬄ

А.П. Копылов. 1982 г.

Видимо, на последнем заседании в этом году заслушивался доклад Н.А.Черникова (Дубна) об использовании геометрии Лобачевского в физике элементарных частиц.

В июне 1973 года была защищена первая «хроногеометрическая» кандидатская диссертация [79].

13.7. 1973-1974 учебный год

В этом учебном году на семинаре появился Анатолий Павлович Копылов (ученик академика Ю.Г.Решетняка, в последующем доктор физико-математических наук). Послушав несколько докладов он предложил вниманию участников семинара доказанную им теорему об отображениях, сохраняющих не все конусы из семейства равных и параллельных конусов в аффинном пространстве, а только некоторое их достаточно прореженное подмножество (см. опубликованную в [156] формулировку этой теоремы). Уже на следующем заседании А.В.Кузьминых предложил более сильный результат, физическая интерпретация которого производила значительное впечатление [156, 157].

Зимой студентка 3-его курса Анна Викторовна Шайденко показала, что можно отказаться от требования параллельности конусов в образе изучаемых на семинаре отображений. Такой подход был естественным (см. физическую интерпретацию предложенной теоремы в обзоре [86]), но до той пор ни одному участнику семинара это не пришло в голову.

ffl

А.В. Шайденко. 1968 г.

Идея Шайденко захватила А.Д.Александрова, А.П.Копылова и А.В.Кузьминых, и дальше ряд заседаний они занимались усилением результата очень симпатичной девушки. В итоге появилась их совместная статья [36] – статья, в которой академик доводил до совершенства идею и теорему студентки.

За свою работу Анна Шайденко получила медаль Академии наук СССР. В Новосибирск приехала спецкорреспондент «Комсомольской правды». О целях её приезда говорить трудно, но дать большой материал о талантливой студентке во всесоюзной газете ей очень хотелось. Как выяснилось потом, не только автор, но и другие участники семинара противились появлению такой статьи, считая, что Аню надо оберегать от славы, чтобы она «не испортилась» и не дай боже, отвлеклась от математики. Тем не менее её фотография появилась в популярном в СССР журнале «Советская женщина» (издаваемом на английском, немецком и других языках).

После окончания Новосибирского университета Шайденко была взята на работу в Институт математики Сибирского отделения АН СССР в отдел А.Д.Александрова. В течение нескольких лет она доказала серию прекрасных теорем [214, 215, 216, 217, 218] и, не учась в аспирантуре, представила кандидатскую диссертацию в Диссертационный совет по геометрии и топологии в институте, которую успешно защитила в 1983 году. В конце 80-х годов она вышла замуж за швейцарца и переехала жить за границу. Последние ее работы в России были посвящены теории биллиарда.

13.8. А.В. Кузьминых

А.В. Кузьминых. 1970-е годы.

О роли А.В.Кузьминых в работе семинара «Хроногеометрия» следует сказать отдельно.

Он сделал большое количество докладов. Почти всегда это были его собственные результаты. А был он студентом; университет окончил в июне 1973 года. Впервые появился на кафедре в 1969 году, будучи второкурсником. Тогда на семинаре кафедры А.Д.Александров рассказал о старой проблеме о теле с конгруэнтными проекциями, не поддающейся решению. Буквально через неделю А.В.Кузьминых нашел ее решение и сделал на кафедре доклад. Позже эта студенческая работа была опубликована в «Докладах АН СССР» [153]. В дальнейшем такая его «скорострельность» стала привычной для участников семинара, но именно напористость Кузьминых стала как бы катализатором в деятельности семинара. Все старались так же быстро, как Кузьминых, придумать что-либо новенькое. Состязательность – неотъемлемая часть атмосферы семинаров, возглавляемых А.Д.Александровым. Вопрос, как это удавалось делать.

Другая черта Кузьминых – это нежелание заниматься модной (если хотите, современной) математикой. При его способностях он легко бы мог достичь хороших результатов в алгебраической топологии (это тогда очень ценилось: время С.П.Новикова и др.; в Новосибирске – В.И.Кузьминов, И.А.Шведов) или в римановой геометрии в целом (время М.Громова и др.; в Новосибирске – В.А.Топоногов и С.З.Шефель). Но Кузьминых отказался от соответствующих предложений и предпочел заняться хроногеометрией, а затем «старыми» вещами в духе польской математики 1920-х годов.

К Кузьминых А.Д.Александров применял «меры поощрения» в виде громких публичных похвал, что не влияло, впрочем, на его поведение среди участников семинара, но это, видимо, было необходимо (руководителю виднее) для стимулирования математической деятельности молодого математика.

Внешне Кузьминых очень высокий, худощавый, резкий в движениях. У автора первое с ним знакомство (в 1969 году) вызвало чувство неприязни, от которого в дальнейшем не осталось ни малейшего следа.

Кандидатскую диссертацию А.В.Кузьминых защитил поздно, в 1979 году. Но это была блестящая работа, без единой описки или помарки (две машинистки не выдержали педантизма соискателя и отказались от сотрудничества с автором). Охотники найти хотя бы мелкую неточность в тексте диссертации успеха не имели. У самого Кузьминых процесс защиты вызвал ужас, он измучился сам, нервировал оппонентов и окружающих. По его словам, сказанным где-то в 1989 году по поводу срока защиты докторской диссертации, он еще не отошел от кошмара с кандидатской.

В 1990-е годы А.В.Кузьминых уехал жить в США. Однако он периодически звонил по телефону А.Д.Александрову. От Кузьминых автор узнал в июле 1999 года о тяжелой болезни

ffl

Рис. 13.2: 1960-е. А.В. Кузьминых.

А.Д.Александрова. Можно было общаться с А.Д. по телефону прямо в больничной палате. Позвонив, автор поговорил с выдающимся математиком за несколько часов до его смерти.

13.9. После лета 1974 года

Автор уехал из Новосибирска летом 1974 года. Поэтому описать дальнейшую деятельность семинара не имеет возможности. Семинар работал еще несколько лет, затем угас. Думается, он выполнил свою задачу – подготовку еще одной группы исследователей, вошедшей в ленинградскую геометрическую школу. Студенты, участники семинара, перестали быть студентами. Чтобы пришли новые, нужно было начинать всё сначала. А для этого нужны свежие идеи, другие студенты, новое место. В 1986 году А.Д.Александров вернулся в Ленинград, но его основным занятием стало написание учебников по геометрии.

Осенью 1974 года состоялся первый и последний симпозиум по хроногеометрии. Он не имел официального статуса, так как не была вовремя оформлена заявка на проведение симпозиума в каком-то бюрократическом ведомстве. Поэтому никакого сборника тезисов симпозиум не оставил.

На симпозиум приехали Р.И.Пименов из Сыктывкара, В.Я.Крейнович и С.М.Владимирова из Ленинграда, В.П.Федотов [209] из Петразаводска и др.

В дальнейшей работе семинара самое активное участие принимали новые его участники: В.Я.Крейнович (переехавший на работу в Институт математики СО АН СССР, работавший до этого в содружестве с Р.И.Пименовым), Владимир Кузьмич Ионин, Сергей Николаевич Астраков (аспирант А.Д.Александрова). В полную силу заработали «старики» – А.В.Кузьминых, А.В.Шайденко – сотрудники ИМ СО АН СССР и А.В.Левичев (аспирант А.Д.Александрова).

ffl

А.В. Левичев. 1982 г..

А.В.Левичев получил ряд замечательных результатов, которые показывали, в каком случае порядок в банаховом пространстве задается конусом, если пересечение областей воздействия представляют собой в некотором смысле «связные» множества.

В 1979 году А.В.Левичев защитил кандидатскую диссертацию, а затем и докторскую. Его докторская диссертация была посвящена изучению причинной структуры однородных лоренцевых многообразий.

А.В.Левичев постоянно интересовался новыми результатами в области общей теории относительности. Одна из его статей [179] была посвящена условиям наличия машины времени в однородных лоренцевых многообразиях. В 1990-е годы он переехал в США, где стал работать в группе И.Сигала, развивающей космологию, основанную на пространстве-времени, получаемом из мира Минковского добавлением бесконечно удалённого светового конуса.

ﬄ

Рис. 13.3: 1992. А.К. Гуц, А.В. Кузьминых, А.В. Левичев.

13.10. В.Я. Крейнович: после 1974 г. (воспоминания)

Я[1] много слышал о семинаре по хроногеометрии еше до того, как побывал в Новосибирском Академгородке. В первый раз я

[1]Автор признателен В.Я.Крейновичу, приславшему свои воспоминания о семинаре.

об этом семинаре услышал от Револьта Ивановича Пименова, к которому я сначала ходил на семинар в Ленинграде (Петербурге), а потом, когда его за самиздат сослали в Республику Коми – я ездил к нему в Коми Филиал Академии Наук на практику. Через какое-то время сам А.Д.Александров, приезжая к нам в Ленинград, стал читать различные лекции, делать доклады, на которых рассказывал о семинаре.

В октябре 1974 года А.Д. организовал в Академгородке Первый Всесоюзный симпозиум по хроногеометрии. Мои доклады на симпозиум приняли, так что я с удовольствием на него съездил. На симпозиуме выступал сам А.Д., выступал Револьт Иванович (у короторого как раз закончился срок ссылки), а также многие участники семинара по хроногеометрии.

ffl

В.Я. Крейнович. 1970 е годы.

Мне особенно запомнилось доклад Саши Кузьминых. В отличие от самого А.Д., Сашу не очень интересовали физические мотивировки и связь с физикой пространства-времени. С одной стороны, это до некоторой степени ограничивало Сашу, поскольку он не мог, как А.Д., ставить физически интересные задачи. Но с другой стороны, это же его и раскрепощало: все задачи, поставленные А.Д., он рассматривал как чисто математические и часто находил удивительные решения. Саша брал любую теорему А.Д., типа теоремы о преобразованиях, сохраняющих конусы, и слой за слоем «очищал» формулировку – пока не оставалось в ней только самое необходимое: например, не все конусы, а только конусы с вершинами на прямых из некоторого семейства и т.д. С точки зрения технических вопросов Саша был недосягаем.

В декабре 1974 года по окончании Ленинградского университета, по официальному приглашению А.Д., университет направил меня на работу в Институт математики Сибирского отделения АН СССР. Я должен был быть зачислен на должность стажера-исследователя. Но ситуация сложилась непростая – первые полгода враги А.Д. в Сибирском отделении Академии наук меня в должности не утверждали. Таким образом, я оказался на нелегальном положении – без прописки (обязательного тогда милицейского разрешения на проживание) и без работы. Одним из главных утешений для меня был семинар по хроногеометрии.

ffl

В.К. Ионин. 1982 г.

Хотя семинар носил название «Хроногеометрия», тематика затрагиваемых на нем вопросов была гораздо шире: там были и чисто геометрические доклады, и доклады скорее физические – связанные с физикой и геометрией пространства-времени, и доклады о необычных применениях геометрии. Все мы, постоянные участники семинара, по очереди докладывали свои новые результаты. Я сам выступал в среднем раз в два месяца, в основном на темы, связанные с физикой пространства-времени. Постоянно приезжали гости, как геометры и физики, так и специалисты других наук, пытающиеся применять в своих исследованиях геометрические идеи. А.Д. их всех привечал, и хотя и изображал иногда, что дремлет, но, судя по репликам слушал всех очень внимательно, вопросы задавал в самую точку и советы давал разумные.

Несколько раз Владимир Кузьмич Ионин рассказывал свою естественную и необычную аксиоматику специальной теории относителности. В его аксиоматике рассматривались два основных объекта: частицы (прямые) и часы (линейные функции).

Периодически сам А.Д. рассказывал свои новые результаты, формулировал открытые вопросы. Очень много выступал Саша Кузьминых с блестящими и неожиданными улучшениями предыдущих результатов. Почти все, что он рассказывал, посылось в «Доклады Академии наук СССР» или в «Сибирский математический журнал».

Юрий Федорович Борисов сделал несколько очень увлекательных докладов. Борисова интересовала не столько математическая сторона хроногеометрии (как Сашу Кузьмииных) и не физические приложения (как меня), а скорее вопросы оснований теории относительности, вопросы философии пространства-времени. Как известно, А.Д. философией и основаниями тоже очень увлекался, и в этом Юрий Федорович за А.Д. следовал. Доклады его всегда было очень интересно слушать, потому что он убедительно объяснял на простых примерах важность, казалось бы, абстрактных математических конструкций. Например, понятие полноты. С точки зрения чисто физической, координаты мы измеряем только приближенно, так что мы можем наблюдать только рациональные приближения к истинным координатам. Таким образом, физически вроде бы неважно, рассматриваем ли мы только рациональные числа или все вещественные числа – экспериментально их нельзя отличить. Но, если добавить физику, например простейшее дифференциальное уравнение движения

$$m\ddot{x} = F,$$

то сразу будет резкая разница между полной моделью (например, со всеми вещественными числами) и моделью неполной (только с рационалными числами). Дело в том, что в неполной модели, даже при нулевой силе $F = 0$, есть решения с нетривиальным движением, например

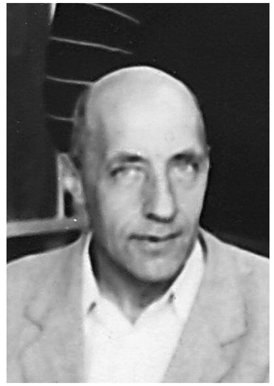
$$x(t) = 0 \text{ при } t < 1 \text{ и } x(t) = 1 \text{ при } t > 1.$$

Кроме анализа подобных математически простых, но философски глубоких примеров, Юрий Федотович занимался и философскими вопросами, которые требовали серьезной математики – например, его всегда волновал вопрос, где граница между топологией и геометрией, где тот порядок дифференцируемости отображений, при котором результаты, более похожие на топологические, начинают быть скорее похожими на геометрические.

Задачи себе Ю.Ф. выбирал трудные и часто формулировать их в математических терминах было трудно. Из-за этого доклады делал он очень редко (не то что мы с Сашей Кузьминых, каждый месяц новая идея) и публиковался мало – раз в год, а то и реже. Но каждый раз результаты были очень глубокими.

Несколько раз рассказывал свои результаты Юрий Евелевич Боровский. Я запомнил его доклад о том, как можно теорию физических структур, которую тогда пропагандировал новосибирский физик Юрий Иванович Кулаков как новое основание физики, изложить в терминах геометрических групп преобразований и симметрий.

ffl

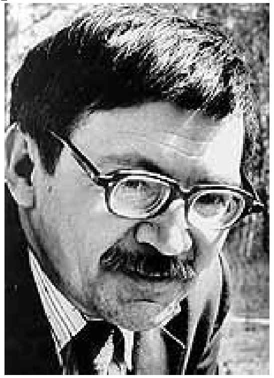


Ю.Е. Боровский. 1983 г.

Саша Левичев обобщал теоремы о преобразованиях, сохраняющих конусы, на неевклидовы пространства. Блистала Аня Шайденко, выступали иногда Аналолий Павлович Копылов, Юрий Григорьевич Решетняк и многие другие. Трудно перечислить все результаты – ведь заседания семинара проходили почти каждую неделю, а значит, излагался каждый раз новый научный результат.

В основном все докладчики рассказывали о своих исследованиях. Это и понятно – ведь мы и были, по существу, мировым центром по хроногеометрии. Но иногда сообщались и чужие результаты – или кто-то А.Д.Александрову пришлет из-за границы свою статью, или в журналах интересная новая физическая статья появится. Поэтому я часто рассказывал о физических идеях, которым посвящались эти статьи.

ffl



Ю.Г. Решетняк. 198(?).

Заслушивались и чисто математические достижения. Так, несколько раз Саша Кузьминых рассказывал о преобразованиях, сохраняющих расстояние 1 в евклидовом пространстве.

Семинар был интересным, приходили новые студенты – многие шли на этот семинар, привлечённые популярными лекциями и спецкурсами А.Д.Александрова. Иногда, когда собиралось несколько новых студентов, А.Д. просил одного из нас помочь новичкам – прочитать небольшой «краткий курс» по введению в хроногеометрию.

Один раз я читал такой курс и встретил свою судьбу – самая способная студентка Оля Кошелева стала моей женой.

Оля была постоянной участницей семинара; несколько раз докладывала на нем свои результаты. Сначала она, под руководством Юрия Борисовича Румера[2], занималась основаниями общей теории относительности, особенно формализацией неформального квантового вывода уравнений Эйнштейна. Но дипломную работу она делала уже у А.Д. В своей дипломной работе она показала, что если в четвертой проблеме Гильберта – об аксиоматике объема в элементарной геометрии – ограничиться конструктивными функциями объема, то результат получится совсем другой – никаких Деновских контрпримеров больше нет. В Олиной дипломной работе было много сложной математики – например, использовались сравнительно новые результаты по теории когомологий – но зато выводы был чисто

[2]Ю.Б.Румер – знаменитый физик из Академгородка, работавший вместе с Эйнштейном, Ландау и многоми другими.

геометрическими.

ffl

О.М. Кошелева. 2005.

В 1978 году я был откомандирован в Пулково, где занимался приложениями хроногеометрии к физике – геометрическим анализом задач радиоинтерферометрии со сверхдлинной базой. Хроногеметрия, по существу, началась с результата А.Д. о преобразованиях, сохраняющих конусы (т.е. причинность). Этот результат означает, что для однозначного определения геометрии пространства-времени достаточно знать отношение причинности. Другой результат говорил о том, что достаточно знать траектории лучей света. Эти результаты до 1970-х годов были чисто теоретическими, т.к. для реального восстановления геометрии нужно проводить измерения с очень большой точностью, которая тогда была еще недоступна. С появлением точных мазеров и больших антенн возникла возможность проводить измерения с невиданной до того времени точностью – и, следовательно, восстанавливать геометрию по результатам этих измерений. На фундаментальном уровне, по существу, основной результат – это теорема А.Д., но практически нужно было решать вопросы точности, алгоритмов по обработке данных – всем этим я и занимался.

В Академгородке я теперь бывал периодически, поэтому и семинар стал посещать реже. В 1980 году, после того как ВАК СССР утвердил мою диссертацию, под давлением КГБ меня попросили уволиться из Института математики СО АН СССР по собственному желанию (что было прогрессом, т.к. в 1976 году меня лишили возможности преподавать в Новосибирском университете под тем же давлением, не дав даже дочитать курс лекций и не удосужившись даже скрыть причину увольнения). После некоторых мытарств я устроился на постоянную работу в Ленинграде, и в Новосибирск мы с Олей стали приезжать только раз в год – повидаться с Олиными родителями. Потом и они в Петербург переехали, и мы перестали посещать Сибирскую землю.

Мы с Олей стали свои результаты рассказывать на геометрическом семинаре Юрия Бураго в Ленинграде. А семинар в Новосибирске активно продолжал свою деятельность; с Сашей Кузьминых и другими мы активно переписывались, обменивались оттисками статей.

ﬄ

Рис. 13.4: 1990. Ю.Ф. Борисов и А.К. Гуц.

13.11. Осень 1985 года

Осенью 1985 года неожиданно в Новосибирск приехали А.В.Левичев (из Куйбышева), А.Гуц (из Омска), И.Мазманиди (из Узбекистана), и семинар возобновил на два месяца активную работу. Но это были скорее заседания в память о семинаре «Хроногеометрия» 70-х годов.

А.Д. в это время был поглощен написанием школьных учебников по геометрии. Его ученики помогали ему: прочитывали рукопись, делали замечания, вписывали в отпечатанные на пишущей машинке страницы формулы, делали рисунки. Везде в кабинетах сотрудников отдела, руководимого А.Д., лежали листы бумаги, исписанные рукой А.Д. Эти листы, видимо, оказались впоследствии в мусорной корзине. Никто не взял их себе на память или как будущие ценные автографы. Мы редко задумываемся о бренности жизни. Поэтому рукописи пропадают, исчезают, тлеют и, наконец, просто сгорают на мусорных свалках.

Рис. 13.5: 1985. С.Н. Астраков, А.В. Левичев, Ю.Ф. Борисов, А.Д. Александров, В. Проставилин, ?, А.В. Шайденко, А.В. Кузьминых, А.К. Гуц, И. Мазманиди (слева направо).

13.12. После 1985 года

В 1986 году А.Д.Александров получил от советских властей разрешение на возвращение в Ленинград. Развитие исследований по хроногеометрии в Новосибирске приостановилось. Появлялись лишь отдельные работы А.В.Левичева и его студентов. При этом интересы А.В.Левичева с соавторами относились к изучению причинной структуры лоренцевых многообразий.

Н.Л. Шаламова. 1997 г.

В конце 1980-х А.К.Гуцем и А.В.Левичевым в Институте математики СО АН СССР им. С.Л.Соболева были защищены докторские диссертации, относящиеся целиком к хроногеометрии.

В Омске активно стала изучать порядки в аффинном пространстве Нина Леонидовна Шаламова. Работы Н.Л.Шаламовой были полностью посвящены созданию причинной теории пространства-времени Минковского. В 1992 году Н.Л.Шаламова защитила в Новосибирске в Институте математики СО РАН кандидатскую диссертацию.

Отдельные результаты были получены А.К.Гуцем совместно с его студентками Н.Р.Абдрахимовой и Е.В.Ермаковой [1, 2, 3, 104, 109].

В 1996 году был написан и опубликован в Германии на английском языке обзор результатов [115], полученных в период с 1982 по 1996 г., дополняющий обзор 1982 года [86].

К концу XX века российские «хроники» прекратили исследования, относящиеся к хроногеометрии. В определенной мере это было связано с тем, что А.В.Левичев, А.В.Кузьминых и А.В.Шайденко уехали в 1990-е годы из Новосибирска в далекие зарубежные страны.

13.13. С.Н. Астраков: воспоминания

Участвовать в работе семинара я [3] стал с 1976 года, когда решил пойти специализироваться на кафедру геометрии и топологии. С нашего курса как-то ударно «двинули» в хроногеометрию сразу три человека: я, Оля Кошелева и Саша Левыкин, которого подви́г туда А.К.Гуц, ведший у него семинарские занятия по аналитической геометрии.

Название семинару придумал, скорее всего, А.Д. Александров. Всем оно нравилось. Было в этом что-то от древних греков и от Евклида. Постоянными и наиболее активными участниками семинара были Ю.Ф.Борисов, А.В.Кузьминых, А.Шайденко, В.К.Ионин, А.П.Копылов, Д.А.Троценко и В.Крейнович.

С.Н. Астраков. 2000-е годы.

Кошелева и Крейнович выполняли на пару обязанности секретаря семинара (объявления и другая организационная работа), пока не уехали в Ленинград. Потом этим занимался я; уже после поступления в аспирантуру.

Об атмосфере на семинаре. Заседания семинара всегда проходили как-то необычно. Существовало какое-то «притяжение», вроде того, что существует у театралов, идущих на спектакль. Докладчик («свой» или приезжий) волновался и суетился в районе доски, а основные действующие лица во главе с А.Д. появлялись к началу заседания и раскланивались. Если был кто-то «новенький» или «новенькая» (часто заглядывали на семинар слушатели ФПК), то А.Д. подсаживался и спрашивал: «Вы кто?» После этого вопроса пришедший чувствовал себя как дома.

[3]Автор признателен С.Н.Астракову, приславшему свои воспоминания о семинаре.

Обычно А.Д. сидел за последней партой, прикрыв глаза. Новичкам семинара казалось, что руководитель задремал. Но стоило докладчику «уйти в сторону» или начать «пускать пыль в глаза», т.е. приукрашивать простые вещи, как в него летела острая реплика.

ffl

Рис. 13.6: А.Д. Александров. 1977.

Всё было просто и естественно. После окончания доклада шло небольшое обсуждение. Если были «слабые места», то А.В.Кузьминых безжалостно «сажал» докладчика на «одно место» своими жёсткими вопросами. Его полезную роль «научного цензора» семинара трудно переоценить. Это держало семинар на высоком качественном уровне.

В конце семинара (после небольшой паузы) шла неофициальная часть. Что-то обсуждалось, вспоминали поучительные истории и т.д. Это, по-видимому, и формировало «научно-моральный» характер учеников александровской школы.

Тематика и доклады. На семинаре выступали «свои» и приезжие. Иногда А.Д. говорил: «В следующий раз буду рассказывать я про ...». Примерно один-два раза в год активные участники семинара выступали со своими результатами. Пару раз приезжал Р.И.Пименов из Сыктывкара с докладами по хроногеометрии. Несколько раз были А.К.Гуц из Омска и А.В.Левичев из Самары-Куйбышева, которые «двигали вперед» теорию пространства-времени вдали от Академгородка.

На семинаре не просто делались доклады. Там ставились проблемы, зарождались идеи и получали новые результаты в области исследования причинных свойств пространства-времени, характеризации отображений аффинных и метрических пространств, по аксиоматизации различных объектов и пр.

Временами на А.Д. «наезжали» ферматисты[4] со своими рукописями. После чего на семинаре назначался очередной цензор для поиска ошибки.

Вспомнился один эпизод, который произошел три года назад. Некий профессор В.Фенелонов, работающий в Институте катализа СО РАН, имел трудности при изучении различным молекулярных структур. Его друзья-химики (как он потом рассказал мне при случайном знакомстве) советовали ему искать учеников А.Д.Александрова. «Другие тебе не помогут», – говорили они.

Из забавного. После семинара общение участников заседания продолжалось. Народ разговаривал с А.Д. и между собой. Кто-то просто наблюдал со стороны за происходящим. Аспиранты договаривались о встрече с руководителями. А.Д. говорил, чтобы звонили ему долго и настойчиво, так как ему далеко идти к телефону. Постепенно участники семинара выходили из аудитории, и их процессия «стекала» с третьего этажа

[4]Ферматист – человек, как правило, не имевший математического образования и пытавшийся найти решение проблемы Ферма. Всегда в их решениях профессиональный математик находил ошибку. Чтение таких работ было безрадостным занятием и рассматривалось как тяжелая повинность. Этой повинностью в советское время математики были наделены по решению партийных органов.

главного корпуса НГУ на первый. А.Д. давал последние указания, вызывал СОАНовскую «Волгу», дожидался ее минут десять, делал всем ручкой и уезжал.

Иногда по какому-либо поводу все направлялись домой к А.Д., в его коттедж на Золотодолинской, 69 – отмечать «событие». Это был семинар в движении. Забавным было то, что все шли-шли, а потом вдруг останавливались, потому что останавливался А.Д. Некоторое время дискуссия продолжалась на месте. Затем А.Д. делал шаг, и все снова начинали движение. Рядом с А.Д. неизменно находился профессор Ю.Ф.Борисов. В «походе» участвовало около десяти человек, и, видимо, со стороны это смотрелось весело.

О главном. Поэту для вдохновения нужна муза, а ученому (и опытному, и молодому) нужны люди, которые бы его выслушали и помогли ему поверить в силу своего таланта. Семинар «Хроногеометрия» выполнял, в частности, именно эту важную миссию.

С А.Д. разрешалось спорить и отстаивать собственное мнение. Однажды я построил ему пример отображения, который показался ему невозможным. Когда я его переубедил, он искренне меня похвалил. В другой раз я наблюдал, как он минут десять спорил с Василием Проставилиным (студентом четвертого курса механико-математического факультета) по поводу одной аксиомы (предназначенной для школьного учебника по геометрии). Оба что-то эмоционально доказывали друг другу. В какой-то момент А.Д. замолчал, а потом радостно признал правоту оппонента. Позже, когда на семинаре обсуждали оценки за курсовые работы, А.Д. спросил: «Все ли знают, за что Василию ставится пятерка?» И далее пояснил: «За то, что он нашел у меня ошибку!»

В связи с этим я вспомнил одну из его любимых фраз: «В науке не может быть авторитетов!» Это означало, что доказать что-либо можно только с помощью аргументов, а не опираясь на свое высокое положение в науке.

И еще одна фраза: «Осознание своей глупости особенно плодотворно повышает интеллект!» Эту «прививку» можно и нужно ставить всем и во все времена.

13.14. Зарубежные исследования по хроногеометрии

Параллельно с исследованиями в области аксиоматической теории относительности, проводимыми в СССР, аналогичные исследования достаточно интенсивно и регулярно велись за границей. В этом параграфе упомянем лишь нескольких ученых, имена которых были постоянно в сфере внимания новосибирских хроногеометров. Это H.J.Borchers и G.C.Hegerfeldt [257, 258, 275], W.Benz [241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253], Джун Лестер [289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 302], D.B.Malament [303], J.W.Schutz [339, 340], E.M.Schröder [337, 338], P.G.Vroegindewey [350, 351, 352].

Никаких прямых контактов со своими заграничными коллегами, за исключением P.G.Vroegindewey, новосибирцы не устанавливали. Отсутствовала переписка, обмен оттисками статей, а электронная почта и Интенет еще не существовали.

Отметим, что результаты, получаемые в Новосибирске, по своей глубине и широте часто превосходили зарубежные, и после того, как однажды В.Я.Крейнович, кажется, в 1975 году разослал ряду западных авторов оттиски статей на английском языке, принадлежащих новосибирцам, интенсивность публикаций этих авторов и их окружения, как нам тогда показалось, резко пошла на спад. Пожалуй, только канадка Джун Лестер, которая нашла свою нишу в хроногеометрии, продолжала получать новые и с каждым разом все более интересные результаты.

Глава 14

ФИЛОСОФИЯ ХРОНОГЕОМЕТРИИ

Хроногеометрия – это математическая теория пространства-времени. Впрочем, слово «математическая» является излишним – научная теория может быть только математической.

Основы современной теории пространства-времени заложил Минковский. Для того чтобы теория стала действенной, Минковский упростил её, придав ей характер чисто геометрической теории. Пространство и время соединившись, превратились в единое четырёхмерное многообразие, оснащенное псевдоевклидовой геометрией.

Главной сущностью этой теории стало понятие *события*. Физики достаточно быстро и легко с этим согласились; сыграло свою роль то, что для физиков той поры «Начала» Евклида были образцом научной строгости, а событие Минковский представил как мировую точку, т.е. как аналог точки в геометрии Евклида.

Пространство-время Минковского стало неотъемлемой частью специальной теории относительности, и это способствовало созданию Эйнштейном релятивистской теории гравитации как теории четырёхмерного псевдориманова многообразия, геометрия которого есть гравитационное поле, удовлетворяющее полевым уравнением. Эти уравнения были найдены Гильбертом, вдохновленным работами Эйнштейна, и называются, думается, справедливо уравнениями Эйнштейна.

В этой книге было показано, как, опираясь на упрощенное представление о событии, предложенное Минковским, строится аксиоматическая теория псевдоевклидова пространства-времени. В заключении книги хотелось бы сказать о возможных направлениях развития хроногеометрической науки, а точнее, хотелось бы в конце книги показать, сколь скудны всё-таки наши знания о том, что мы называем событием, причинностью и пространством-временем, и каковыми автору видятся если не пути, то ручейки, быть может, ведущие к более полным и богатым знаниям по названным сущностям.

14.1. События

Мир событий $\mathcal{M}$ в терминологии Минковского состоит из мировых точек. Позже мировые точки стали называть событиями, и они превратились в сущности, подобные точкам в геометрии. Так, решая задачу аксиоматизации специальной теории относительности, А.Д.Александров писал, что событие – «*точечное* явление вроде мгновенной вспышки точечной лампы или, пользуясь наглядными понятиями о пространстве и времени, это явление, протяжением которого в пространстве и во времени можно пренебречь. Словом, событие аналогично точке в геометрии, и, подражая определению точки, данному Евклидом, можно сказать, что *событие – это явление, часть которого есть ничто, оно есть «атомарное» явление* (курсив мой – АГ). Всякое явление, всякий процесс представляется как некоторая связная совокупность событий» [22].

Но Минковский в мировую точку (событие), «чтобы не оставлять зияющей пустоты», помещает **некоторый объект наблюдения**, который он называет, избегая конкретизации в форме материи или электричества, «субстанцией». Таким образом, событие должно рассматриваться как нечто более сложное, чем набор из четырёх чисел (x, y, z, t).

> «Чтобы нигде не оставлять зияющей пустоты, мы представим себе, что в каждом месте и в каждый момент времени имеется некоторый объект наблюдения. Чтобы не говорить о материи или электричестве, я буду пользоваться словом «субстанция» для обозначения этого объекта» (Минковский, [185, с.168]).

Если обозначить событие через x, а возможное наблюдение через ℓA, то *объект наблюдения (осознания)*, помещенный в x, – это морфизм

$$x : \ell A \to \mathcal{M} \tag{14.1}$$

Наблюдение ℓA не обязано быть единственно возможным – наблюдений может быть множество. Более того, совокупность различных наблюдений мы рассмативаем как набор *объектов* некоторой категории **L**. Следовательно, понимание Минковским событий (мировой точки) как вместилища объекта наблюдения получает вполне адекватную формализацию в теории топосов.

Заметим, что событие, мировая точка Минковского, вместилище объекта наблюдения, заполненное субстанцией, – это атомарный факт Витгенштейна [65]:

> 2.01. Атомарный факт есть соединение объектов (вещей, предметов).
>
> 2.01231. Чтобы знать объект, я должен знать не внешние, а все его внутренние качества.
>
> 2.0124. Если даны все объекты, то этим самым даны также и все возможные атомарные факты.
>
> 2.014. Объекты содержат возможность всех положений вещей.
>
> 2.02. Объект прост.
>
> 2.021. Объекты образуют субстанцию мира. Поэтому они не могут быть составными.

> 2.0232. Между прочим: объекты бесцветны.
>
> 2.0251. Пространство, время и цвет (цветность) есть формы объектов.
>
> 2.027. Постоянное, существующее и объект - одно и то же.
>
> 2.0271. Объект есть постоянное, существующее; конфигурация есть изменяющееся, неустойчивое.
>
> 2.0272. Конфигурация объектов образует атомарный факт.
>
> 2.03. В атомарном факте объекты связаны друг с другом подобно звеньям цепи.
>
> 2.031. В атомарном факте объекты сочетаются определенным образом.
>
> 2.032. Тот способ, каким связываются объекты в атомарном факте, есть структура атомарного факта.
>
> 2.04. Совокупность всех существующих атомарных фактов есть мир.

Откуда возьмётся в теории субстанция-объект, о которой говорит Минковский? Чтобы ответить на этот вопрос, посмотрим на пространство-время Минковского не как на теоретико-множественный объект $\mathbb{R}^4$, а как на теоретико-топосный объект

$$R^4 = \ell C^\infty(\mathbb{R}^4) \in \mathbf{Sets}^{\mathbf{L}^{\mathbf{op}}},$$

являющийся уже не простым набором точек, но набором гладких функций. О таком подходе мы говорили в § 11.1 (подробности в [124]).

Формальное пространство-время R^4, как и его классический аналог, статично, т.е. вневременно, не содержит времени.

Событие A в таком пространстве-времени есть «мировая точка» $A = (x^0, x^1, x^2, x^3) \in R^4$, задаваемая в координатах соотношениями:

$$\begin{cases} x^0 = ct, \\ x^1 = lx \\ x^2 = ly \\ x^3 = lz, \end{cases} \tag{14.2}$$

где константа l введена нами на основе простой (но отнюдь не наивной[1]) мысли о необходимости симметричной записи события A временной координаты x^0 и пространственных координат x^α $(\alpha = 1, 2, 3)$.

Предположим, что константы c, l складываются из «классического значения» c_0 и l_0 соответственно и бесконечно малых слагаемых, т.е.

$$c = c_0 + d, \quad l = l_0 + \delta,$$

где $c_0 = 3 \cdot 10^{10}$ *см/сек* и $l_0 = 10^{-33}$ *см*. Тогда при интерпретации в гладком топосе $\mathbf{Sets}^{\mathbf{L}^{op}}$ бесконечно малые слагаемые $d_1 \in D$ в стадии $\ell A = \ell C^\infty(\mathbb{R}^m)$ представляются гладкими функциями $d(a_1, ..., a_m), \delta(a_1, ..., a_m)$, где $a_i \in \mathbb{R}$.

Следовательно,

$$\begin{cases} x^0 = [c_0 + d(a_1, ..., a_m)]t, \\ x^1 = [l_0 + \delta(a_1, ..., a_m)]x \\ x^2 = [l_0 + \delta(a_1, ..., a_m)]y \\ x^3 = [l_0 + \delta(a_1, ..., a_m)]z. \end{cases} \tag{14.3}$$

При изменении параметров «наблюдения» $a_1, ..., a_m$ субстанции-объекта, описываемого как (вне(шне))физическое *поле* с компонентами $d(a_1, ..., a_m), \delta(a_1, ..., a_m)$, событие A размазывается по пространству-времени, теряет свой точечный характер. Это означает *начало движения объекта A, начало течения времени.*

Научный подход к описанию субстанции **требует предъявления уравнений**, которым должны удовлетворять поля $d(a_1, ..., a_m), \delta(a_1, ..., a_m)$. По своему смыслу это уравнения как

[1] Константу l в физике называют фундаментальной константой длины или константой Планка.

для физических костант c и l, так и способа наблюдения объектов, помещаемых в Мир событий, лишенный времени. Следовательно, в равной мере это *уравнения для времени.* Такие уравнения действительно могут быть предъявлены. Как это делается, показано в [124, 125] (см. также Приложение).

14.2. Взаимодействие событий

А.Д.Александров пишет: «Пространство-время и есть множество всех мировых точек. Однако при таком определении пространство-время еще не обладает никакой структурой – оно просто совокупность событий, в которых удерживается лишь один факт их существования как разных событий, в отвлечении от всех прочих свойств и без всяких пока отношений между ними. Можно ввести понятие о непрерывности ряда событий, заимствуя его из наглядного представления или давая ему какое-либо подходящее определение. Тогда пространство-время окажется просто четырёхмерным многообразием в смысле топологии. Мы не останавливаемся на этом и определяем структуру и саму непрерывность пространства-времени, исходя из самого общего и основного отношения событий, какое имеется в мире. Мы имеем в виду движение материи.

Каждое событие так или иначе воздействует на некоторые другие события и само подвержено воздействиям других событий. Физическая природа воздействия может быть весьма разнообразной; мы можем представлять его как распространение света, вылет частицы и т.п. Понятно, что оно не обязано быть непосредственным, а может идти через ряд агентов. Само движение малого тела представляет собой ряд событий, в котором предыдущие события воздействуют на последующие. В понятиях физики воздействие можно определить как передачу импульса и энергии. Эти понятия представляются тогда первоначальными, что отвечает существу дела, так как импульс и энергия есть основные физические характеристики движения и воздействия. Но, отвлекаясь в самих событиях от их конкретных свойств, мы отвлекаемся и в понятии воздействия от его конкретных свойств, кроме того, что оно есть отношение между событиями, обладающее свойствами предшествования (антисимметричностью и транзитивностью). Если мыслить аксиоматическое построение теории пространства-времени, то понятия события – мировой точки и воздействия – предшествования берутся как исходные и неподлежащие определению. Те события, которые подвергаются воздействию данного события a, образуют «область P_a воздействия события a». Такие области определяют во множестве всех событий некоторую структуру. Она равносильна, конечно, той структуре, которая определяется самими отношениями воздействия. Эта структура и есть пространственно-временная структура мира».

Обратим внимание в этой цитате на слова «Каждое событие так или иначе воздействует на некоторые другие события». Эта фраза противоречива, если мыслить пространство-время как абсолютный мир событий. В мире Минковского нет движения, нет взаимодействия.

> «Картина мира, которую задает геометрия Минковского, – это картина «застывшего», неподвижного мира, в котором ничего не происходит, настоящее, прошлое и будущее существуют на равных правах и, по сути, даже не отделимы однозначно друг от друга. Отсутствует также однозначно заданное направление течения времени. То есть, это, по сути, вневременной (в обычном смысле этого слова) мир, мир «пребывающий в Вечности.[2]» (Е.М. Иванов, [130]).

[2]И далее [130]: «Использование здесь термина «Вечность» (Эон) представляется вполне корректным и отражает суть дела. Действительно, Платон называл время «подвижным образом Вечности» и подчеркивал отсутствие в Вечности прошлого и будущего. Фома Аквинский определял Вечность как «остановившееся ныне», т.е. как «замершее», бесконечно «растянутое» настоящее. Отсюда следует, что Вечность – это неподвижный прообраз времени, то есть - та квазивременная протяженность, «вдоль» которой «течёт» чувственное время (причем, для каждого

Таким образом, если в целях построения аксиоматической теории относительности понятие «воздействия» одного события на другое формализуется с помощью понятия порядка, и это позволяет определить псевдоевклидову структуру Мира событий и вычислить группу Лоренца в частности, то для вскрытия физической природы понятия «воздействие» необходимо опуститься до уровня выяснения материального носителя, посредством которого осуществляется воздействие одних событий на другие. Иными словами, следует выяснить, как в теории пространства-времени формализуется материально-физическая природа взаимодействия событий.

Если два события A и B взаимосвязаны, то эта связь материально должна реализоваться через промежуточные мировые точки-события – должна рассматриваться мировая линия, соединяющая A и B и наполненная некоторой субстанцией. Отходя от точечного (атомарного) характера событий, мы должны рассмотреть явления A и B, соединенные пространственно-временной областью X. Наполненность A, B и X субстанцией с точки зрения общей теории относительности означает рассмотрение вместо псевдоевклидовой геометрии псевдоримановой. Иначе говоря, наполнение субстанцией – это наличие кривизны в пространственно-временных областях, которые обозначаются как явления A, B и X.

Однако наша человеческая практика говорит нам о том, что динамично развивающиеся явления не могут быть однозначно, без непредсказуемых отличий, без непредсказуемых отклонений от «нормы», без непредсказуемых «неточностей» описаны в случае их повторных появлений или предъявлений. Повторяемость явлений, в отличие от явлений единичных,– это то, что должно считаться главным и характерным для человеческой реальной жизни[3]. Непредсказуемые отличия, от-

---

наблюдателя течет особым образом). Пространство-время Минковского, как нам представляется, это и есть физическое осуществление такого понятия «Вечности».

[3]Единичные явления – это или чудеса, или глобальные катастрофы, прекращающие существование человечества. И то и другое не являются объектами, которые лежат в поле зрения науки.

клонения, неточности (повторяемых) явлений в науке характеризуется с помощью понятия *вероятности явления*.

Вероятность явления X – это наличие множества различных вариантов искривлений в пространственно-временной области X. Но с точки зрения теории абсолютного пространства-времени искривленная область X существует только в одном варианте.

Куда деваются остальные варианты? Общепринятым является представление, заключающееся в том, что в ходе развития причины A в следствие B при наличии множества возможных состояний реализуется только одно. Более точно, обычно говорят, что *в ходе развития причины A в следствие B* **в каждый момент времени** *при наличии множества возможных состояний, которые могут быть в следующий момент времени, реализуется только одно.*

Такой прием убивания альтернативных вариантов искривления области X основывается на классическом представлении о пространстве и времени – время порождает изменения в пространстве. Естественно, что категория случайности применительно к превращению A в B получает при этом свою фундаментальную классическую трактовку, приведенную выше.

Но исходным является понятие пространства-времени. Поэтому мы не можем убивать варианты искривления области X тем способом, к которому нас приучили люди, так и не воспринявшие или не понявшие основной мысли Минковского.

Мы должны признать существование всех различных вариантов искривления области X. Иначе мы бы не наблюдали в своей жизни того, что мы называем возможностью вмешательства случая или проявления свободы воли. Но всё это означает существование множества вариантов пространства-времени, каждый из которых содержит конкретный способ искривления области X (см. рис. 14.1). Каждый вариант пространства-времени – это вариант бытия; набор всех вариантов пространства-времени есть вероятностное пространство элементарных исходов бытия.

Сознание, которое попадает в тиски предопределенности в каждом конкретном варианте пространства-времени, получает возможность выбирать тот или иной вариант бытия (вариант пространства-времени).

ffl

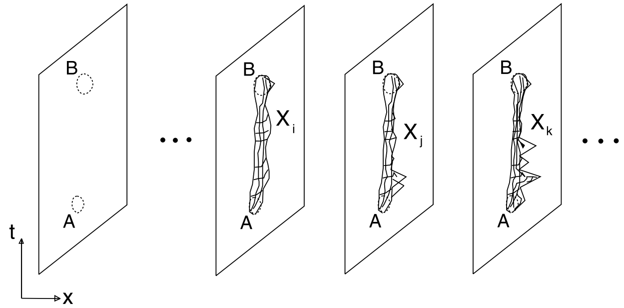


Рис. 14.1: Взаимодействие (неатомарных) событий A и B в плоском Мире Минковского означает наличие материи, соединяющей 4-мерные области A и B в пространстве-времени. Материя – это искривление пространства-времени, изображенное на рисунке в виде горных хребтов X_i, идущих от «горы» A к «горе» B. В действительности мы можем представить себе множество вариантов таких хребтов X_i, X_j, X_k, ..., включающих «вершины» A и B – пространство-время существует в разных вариантах – Мир многовариантен.

14.3. Причинный порядок и временно́й порядок

Сознание [67, с.34]:

1) созидает миры (пространства-времена);

2) наблюдает, воспринимает эти миры.

В первом случае созданный мир – это совокупность событий, которые взаимодействуют, т.е. это мир, наполненный субстанцией. Последнее проявляется в форме искривления пространства-времени. Получаются миры, кривизна которых определяет присущий им причинный порядок. «Созидание мира» – это неизбежное их ветвление, т.е. созидается сразу множество параллельных миров [126].

В квантовой механике существование множества вариантов параллельных и одинаково реальных миров обнаружил Хью Эверетт [265].

Во втором случае мир наблюдается (воспринимается), т.е. имеет место морфизм вида

$$x : \ell A \to \mathcal{M}. \tag{14.4}$$

Это означает наличие процедуры просмотра событий, принадлежащих миру, т.е. наличие временного порядка. Восприятие мира также ведет к наличию многовариантности [124].

14.4. «Божественное» понимание Мира событий

Теория абсолютного Мира событий, предложенная Минковским и развитая в работах Дж.Синга и А.Д.Александрова, есть то, что можно назвать попыткой «божественного понимания Мира». Для того чтобы разъяснить сказанное, «приведу[4] довольно длинную цитату из книги П.Рикёра «Время и рассказ»:

> «В соответствии с теоретическим способом, объекты «понимаются» в качестве случая или примера общей теории: идеальный тип здесь представлен системой Лапласа. В соответствии с категориальным способом, понять объект – значит определить, к какому типу объектов он относится, какая система понятий a priori придает форму опыту, который без неё оставался бы хаотичным. Именно это понимание имел в виду Платон, именно к нему стремились наиболее систематические философы. Конфигурирующему способу свойственно помещать эле-

[4] Цит. по [136].

менты в единый и конкретный комплекс отношений. Этот тип понимания характерен для деятельности повествования. Но у этих трёх способов имеется общая цель... Понимание в широком смысле определяется как «постижение вместе в одном-единственном мыслительном акте вещей, которые не даны или даже не могут быть даны в опыте совместно, ибо они разделены во времени, в пространстве или с логической точки зрения». Идеалом всякого понимания, даже если эта цель нам недоступна, заявил Минк, является постижение мира как целостности. Иначе говоря, эта цель недостижима, поскольку такое понимание было бы божественным, но она осмысленна, ибо человек намерен занять место Бога. Это неожиданное вторжение телеологической темы отнюдь не второстепенно. Такая предельная цель, предполагаемая тремя способами понимания, обусловлена переносом в эпистемологию определения, данного Боэцием: «Знание, которым Бог обладает о мире как totum simul (всё сразу, одновременно), где последовательные моменты всего времени со-присутствуют в единой перцепции, создающей из этих последовательных моментов общую картину событий...

В акте конфигурирующего понимания «действие и событие, хотя и представленные как происходящие в сфере времени, могут быть усмотрены, если так можно сказать, одним взглядом как связанные вместе в сфере значения: это приближение к totum simul, которое мы всегда можем осуществить лишь частично». Возникает вопрос, не ведёт ли эта предполагаемая высшая ступень конфигурирующего понимания скорее к его упразднению. Чтобы избежать этого пагубного для нарративной теории вывода, не следует ли приписать идее totum simul обратную функцию: а именно функ-

> цию чёткого ограничения стремлений понимания упразднить последовательный характер времени. Totum simul следовало бы поэтому признать Идеей в кантианском смысле: скорее идеей-границей, нежели целью или руководством» (стр.184-186)».

14.5. Причинность

Не думаю, что Конструктор, предложив нам абсолютный Мир событий, строил его, подобно людям, поэтапно, во времени, шаг за шагом.

Конструктору присуще «божественное» понимание Мира. Следовательно, он дал Мир сразу, целиком, т.е. как четырёхмерное пространство-время.

Но в таком случае, то, что мы называем причинностью, – это наличие *повторов* в четырёхмерном распределении субстанции-объектов, лежащих в Мире событий Минковского[5]. Человек в акте наблюдения (осознания) выявляет эти повторы и декларирует как объективно существующие причинно-следственные связи.

Вряд ли у Конструктора имеется один вариант Мира. И он не созидал их один за другим. Следовательно, существуют сразу все варианты Мира. Сознанию (типу сознания) дана возможность их наблюдать. Думается, набор типов сознаний и есть Конструктор. В таком случае, топос $\mathbf{Sets}^{\mathbf{L}^{op}}$ – это модель Конструктора.

[5]Чтобы быть более точным, следовало бы говорить об искривленном Мире событий, т.е. иметь дело не со специальной, а с общей теорией относительности.

Заключение

Исследования в области оснований специальной теории относительности и оснований геометрии были главными в деятельности семинара «Хроногеометрия», который действовал в Новосибирском государственном университете с 1971 по 1986 годы.

Было получено большое количество нетривиальных научных результатов, имеющих серьёзное значение для оснований теории пространства-времени.

И хотя теория относительности как бы витала над участниками семинара, но далеко ни каждый замечал её тень. Более того, в первые годы деятельности семинара не было докладов, в которых излагалась бы та или иная система аксиом, описывающая геометрию пространства специальной теории относительности, т.е. геометрию псевдоевклидова пространства. Предполагалось, что это можно сделать, а сейчас следует сконцентрировать внимание на получении сугубо математических результатов по описанию отображений, сохраняющих некоторые семейства множеств. Когда же придёт время построения аксиоматической теории, то в основу достаточно будет положить идеи, изложенные в работах А.Д.Александрова [15, 22]. При этом участники семинара как-то негласно считали, что полное изложение их достижений будет сделано в виде монографии, автором которой, естественно, будет руководитель семинара.

Но время шло, интересы А.Д.Александрова переместились в область написания школьных учебников по геометрии, а книга по хроногеометрии всё не появлялась. В какой-то мере задачу ознакомления математиков, физиков и философов с достижениями новосибирских хроногеометров выполнили обзоры [86] и [115], первый их которых появился на свет при содействии А.Д.Александрова и Николая Владимировича Ефимова.

При всех недостатках этих обзоров они показывают как результаты, полученные участниками семинара «Хроногеометрия», могут быть представлены в виде ряда аксиоматических теорий пространства-времени теории относительности.

В 1997 году А.Д.Александров попросил автора данного текста написать «Хроногеометрию». Данное тогда обещание наконец-то выполнено [6].

Сегодня можно сказать, что программа А.Д.Александрова по построению причинной теории пространства-времени сыграла роль идеалистической цели, во имя которой трудились самые различные математики. В итоге, как всегда, реальные достижения оказались более скромными, чем мечталось. Думается, причина этого в том, что структура окружающего нас мира более сложная, чем использованный хроногеометрами математический аппарат, созданный на сегодня людьми. Так, например, неудачи при построении причинной теории искривленного пространства-времени отчасти объяснились открытием экзотических гладких структур [197]. Но, видимо, на пути хроногеометрической программы, как камень, легла ограниченность теории множеств – основного инструмента и способа мышления математиков двадцатого века [106].

Так или иначе, но история семинара «Хроногеометрия» – это яркий пример деятельности научной организации, созданной одним человеком, имеющей четко сформулированную и философски обоснованную программу исследований, предмет которых более чем грандиозный – структура пространства и времени.

---

[6] Книга имеет массу недостатков. Но на их исправление у автора уже нет времени, нет и того таланта, которым был наделён Александр Данилович.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Математические структуры
и моделирование. 2006. Вып.16.
с.51-55.

Уравнения для физических полей и времени в мультиверсе

А.К. Гуц

Для теоретико-топосной теории мультиверса, т.е. в теории параллельных миров, в которой фундаментальные физические константы являются суммой постоянного вещественного числа и бесконечно малого числа, находятся уравнения физических полей: электромагнитного и гравитационного.

В монографии [A1] была предложена формальная теория мультиверса $\mathcal{T}$, т.е теория параллельных миров, основанная на инфинитозимальном анализе Кока-Ловера [A2]. Переход от классического дифференциального и интегрального исчисления к анализу Кока-Ловера означает переход от классической двузначной логики к интуиционистской логике. Теория множеств не может уже служить способом моделирования объектов такой теории, и приходится использовать теорию топосов [A3].

В исчислении Кока-Ловера «множество вещественных чисел» является коммутативным кольцом R, содержащим «подмножество» инфинитозималов $D \subset R$, состоящее из элементов $d \in R$ таких, что $d^2 = 0$.

При интерпретации i теории $\mathcal{T}$ в гладкой теоретико-топосной модели $\mathfrak{M}$ – топосе $\mathbf{Sets}^{\mathbf{L}^{op}}$ объекты $\ell A = \ell C^\infty(\mathbb{R}^m)/I$ которого являются конечно порожденными C^∞-кольцами вида $C^\infty(\mathbb{R}^m)/I$, где I идеал вида $(f_1, f_2, ..., f_k)$[7], вещественные числа r представляют-

[7] Через $(f_1, ..., f_k)$ обозначается идеал кольца $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, порожденный функциями $f_1, ..., f_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, т.е. имеющий вид $\sum_{i=1}^k g_i f_i$, где $g_1, ..., g_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ – произвольные гладкие функции.

ся гладкими функциями $f(a)$ действительной переменной $a \in \mathbb{R}^m$, а инфинитозималы $d \in D$ классом гладких функций $d(a)(mod\ I)$ действительной переменной $a \in \mathbb{R}^m$ таким, что $d^2(a) \in I$ [A4].

Важно отметить, что при интерпретации i отношения $r \in R$, $d \in D$ и другие размножаются, т.е. появляются в разных многочисленных вариантах в зависимости от выбора объекта ℓA. Это следствие неклассичной логики, используемой в теории $\mathcal{T}$. «Размножение» отношений $r \in R$, $d \in D$ в интерпретации $\mathfrak{M}$ записываем в виде

$$i(r) \in_{\ell A} i(R), \quad i(d \in_{\ell A} i(D),$$

где

$$i(R) = C^\infty(\mathbb{R}), \quad i(D) = C^\infty(\mathbb{R})/(x^2).$$

Размножение, как показало подробное исследование [A1], происходит за счет того, что фундаментальные физические константы не являются в действительности тем, что называется вещественным числом, т.е. неизменяемым объектом. Экспериментально это проявляется в том, что физические константы никогда не могут быть точно измеренными: всегда присутствует то, что физики называют погрешностью измерения.

Физическая константа – это функция, измеряемое значение которой соответствует конкретной физической вселенной, конкретному миру. Варьирование физической константы – это варьирование, перебор миров. Согласно антропному принципу, впервые сформулированному Г.М.Идлисом, тот или иной набор значений физических констант, реализующийся в некоторой вселенной, соответствует форме сознания/осознания, наблюдающему данную вселенную, данный мир. Форма осознания есть не что иное, как форма времени. Следовательно, варьирование физических констант – это варьирование, перебор типов времен, типов восприятия, осознания миров.

15.1. Уравнения Максвелла

Рассматриваем лагранжиан для электромагнитного поля в плоском пространстве-времени Минковского [A5,с.103]

$$S_{em} = -\frac{1}{16\pi c} \int\limits_{\mathbb{R}^4} F_{ik}F^{ik} dx - \frac{1}{c^2} \int\limits_{\mathbb{R}^4} A_i j^i dx. \tag{15.1}$$

Начнем варьирование физических констант. В случае кольца R примем, что скорость света, например, есть сумма константы $c_0 \in \mathbb{R}$ (классическая физическая константа – скорость света $3 \cdot 10^{10} cm/sec$) и инфинитозимала $d \in D$, т.е.

$$c = c_0 + d.$$

Надо уточнить, что понимается под «числами» $1/c$ и $1/c^2$. Примем, что

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_0}\left(1 - \frac{d}{c_0}\right), \quad \frac{1}{c^2} = \frac{1}{c_0^2}\left(1 - \frac{2d}{c_0}\right).$$

Очевидно, что с учетом $d^2 = 0$ получаются нужные соотношения:

$$c \cdot \frac{1}{c} = 1 \text{ и } c^2 \cdot \frac{1}{c^2} = 1.$$

Лагранжиан (15.1) в стадии $\ell A = \ell C^\infty(\mathbb{R}^m|/I$ берем, следовательно, в виде

$$S_{em} = \int\limits_{\mathbb{R}^m} da \left[-\frac{1}{16\pi c_0}\left(1 - \frac{d(a)}{c_0}\right) \int\limits_{\mathbb{R}^4} F_{ik}F^{ik}dx - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{c_0^2}\left(1 - \frac{2d(a)}{c_0}\right) \int\limits_{\mathbb{R}^4} A_i j^i dx \right] \ (mod\ I). \tag{15.2}$$

Здесь инфинитозимал $d \in S$ представляется функцией $d(a)$ такой, что $d^2(a) \in I$.

С целью получения полевых уравнений варьируем функционал (15.2) по A_i и по $d(a)$. Соответственно получаем

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c_0}\left(1 - \frac{d(a)}{c_0}\right) j^i \ (mod\ I) \tag{15.3}$$

– аналог уравнений Максвелла и

$$\frac{1}{16\pi c_0^2} \int\limits_{\mathbb{R}^4} F_{ik}F^{ik}dx + \frac{2}{c_0^3} \int\limits_{\mathbb{R}^4} A_i j^i dx = 0 \ (mod\ I) \tag{15.4}$$

– дополнительное уравнение времени в мультиверсе.

15.2. Уравнение для гравитационного поля в пустом пространстве

Рассматриваем лагранжиан для гравитационного поля в пустом пространстве для теории $\mathcal{T}$

$$S_g = -\frac{c^3}{16\pi G}\int\limits_{\mathbb{R}^4} R\sqrt{-g}dx. \qquad (15.5)$$

Имеем для $d, d_1 \in D$

$$c^3 = (c_0+d)^3 = c_0^3 + 3c_0^2 d, \quad \frac{1}{G} = \frac{1}{G_0}\left(1 - \frac{d_1}{G_0}\right)$$

и

$$\frac{c^3}{G} = \frac{c_0^3}{G_0} - \frac{c_0^3}{G_0^2}d_1 + \frac{3c_0^2}{G_0}d - \frac{3c_0^2}{G_0^2}dd_1.$$

Тогда, варьируя лагранжиан

$$S_g = -\frac{1}{16\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^m} da\left[\frac{c_0^3}{G_0} - \frac{c_0^3}{G_0^2}d_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{3c_0^2}{G_0}d - \frac{3c_0^2}{G_0^2}dd_1\right]\int\limits_{\mathbb{R}^4} R\sqrt{-g}dx \qquad (15.6)$$

по g_{ik}, d_1 и d, получаем соответственно:

$$\left[1 - \frac{d_1}{G_0} + \frac{3d}{c_0} - \frac{3}{c_0 G_0}dd_1\right]R_{ik} = 0\ (mod\ I) \qquad (15.7)$$

– уравнения гравитационного поля в пустом пространстве и

$$(c_0 + 3d)\int\limits_{\mathbb{R}^4} R\sqrt{-g}dx = 0\ (mod\ I), \qquad (15.8)$$

$$(G_0 - d_1)\int\limits_{\mathbb{R}^4} R\sqrt{-g}dx = 0\ (mod\ I) \qquad (15.9)$$

– дополнительные уравнения времени в мультиверсе.

Заметим, что классические решения Эйнштейна для пустого пространства удовлетворяют уравнениям (15.7)-(15.9).

Заметим, что в случае, когда $dd_1 \in I$, вместо (15.7)-(15.8) имеем:

$$\left[1 - \frac{d_1}{G_0} + \frac{3d}{c_0}\right] R_{ik} = 0 \ (mod\ I), \tag{15.10}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^4} R\sqrt{-g}dx = 0 \ (mod\ I). \tag{15.11}$$

В любом случае классические решения $R_{ik} = 0$ с постоянными константами c, G (т.е. $d(a) = d_1(a) = 0$) удовлетворяют уравнениям поля (15.7)-(15.9) или (15.10), (15.11).

15.3. Уравнение для гравитационного поля

Рассматриваем лагранжиан для гравитационного поля в пространстве, заполненном материей:

$$S_{gm} = -\frac{c^3}{16\pi G}\int\limits_{\mathbb{R}^4} R\sqrt{-g}dx + \frac{1}{c}\int\limits_{\mathbb{R}^4} \Lambda\sqrt{-g}dx. \tag{15.12}$$

Тогда варьируя лагранжиан для теории $\mathcal{T}$

$$S_{gm} = -\frac{1}{16\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^m} da \left\{\left[\frac{c_0^3}{G_0} - \frac{c_0^3}{G_0^2}d_1 + \frac{3c_0^2}{G_0}d - \frac{3c_0^2}{G_0^2}dd_1\right]\int\limits_{\mathbb{R}^4} R\sqrt{-g}dx + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{c_0}\left(1 - \frac{d}{c_0}\right)\int\limits_{\mathbb{R}^4} \Lambda\sqrt{-g}dx\right\} \tag{15.13}$$

по g_{ik}, d и d_1, получаем

$$\left[1 - \frac{d_1}{G_0} + \frac{3d}{c_0} - \frac{3}{c_0 G_0}dd_1\right]\left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R\right) =$$

$$= \frac{8\pi G_0}{c_0^4}\left(1 - \frac{d}{c_0}\right)T_{ik} \ (mod\ I) \tag{15.14}$$

– уравнения гравитационного поля и

$$(c_0+3d)\int\limits_{\mathbb{R}^4} R\sqrt{-g}dx = 0\ (mod\ I), \tag{15.15}$$

$$\frac{3c_0^2}{G_0^2}(G_0-d_1)\int\limits_{\mathbb{R}^4} R\sqrt{-g}dx = \frac{1}{c_0^2}\int\limits_{\mathbb{R}^4}\Lambda\sqrt{-g}dx\ (mod\ I) \tag{15.16}$$

– дополнительные уравнения времени в мультиверсе.

Заметим, что в случае, когда $dd_1 \in I$, вместо (15.17)-(15.19) имеем:

$$\left[1-\frac{d_1}{G_0}+\frac{3d}{c_0}\right]\left(R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R\right)=$$

$$=\frac{8\pi G_0}{c_0^4}\left(1-\frac{d}{c_0}\right)T_{ik}\ (mod\ I), \tag{15.17}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^4} R\sqrt{-g}dx = 0\ (mod\ I), \tag{15.18}$$

$$\frac{3c_0^2}{G_0}\int\limits_{\mathbb{R}^4} R\sqrt{-g}dx = \frac{1}{c_0^2}\int\limits_{\mathbb{R}^4}\Lambda\sqrt{-g}dx\ (mod\ I). \tag{15.19}$$

ЛИТЕРАТУРА

A1. Гуц А.К. *Элементы теории времени.* Омск: Издательство Наследие. Диалог-Сибирь, 2004. 364 с.

A2. Kock A. *Synthetic Differential Geometry.* Cambridge University Press, 1981.

A3. Гольдблатт Р. *Теория топосов.* М.: Мир, 1983.

A4. Moerdijk I., Reyes G.E. *Models for Smooth Infinitesimal Analysis.* Springer-Verlag, 1991.

A5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теория поля.* М.: Наука, 1973.

Литература

[1] Абдрахимова Н.Р., Гуц А.К., Шаламова Н.Л. Синтетическая теория аффинных лоренцевых многообразий и упорядоченных группы Ли // Докл. АН СССР. 1988. Т.303, N.4. С.777-781.

[2] Абдрахимова Н.Р. Классификация аффинных порядков на трехмерных связных односвязных разрешимых группах Ли // IX Всесоюзная геометрическая конференция. Кишенев, 1988. С.3.

[3] Абдрахимова Н.Р., Гуц А.К., Грибанова И.А. Описание аффинных конических порядков на трехмерных разрешимых группах Ли // Ученый совет мат. фак. ОмГУ. – Деп. в ВИНИТИ 15.06.94, N.1467-В94. 35 с.

[4] Академик Александр Данилович Александров. Воспоминания. Публикации. Материалы / Под ред. Г.М.Идлиса и О.А.Ладыженской. М.: Наука, 2002.

[5] Александров А.Д. О преобразованиях Лоренца // УМН. 1950. Т.5, N.3. С.187.

[6] Александров А.Д., Овчинникова В.В. Замечания к основам теории относительности // Вестник ЛГУ, сер. мат. 1953. N.4. С.95-110.

[7] Александров А.Д. О сущности теории относительности // Вестник ЛГУ, сер. физ. 1953. N.3. С.103-128.

[8] Александров А.Д. По поводу некоторых взглядов на теорию относительности // Вопр. философии. 1953. N.5. С.225-245.

[9] Alexandrov A.D. The space-time of the theory of relativity // Fünfzig Jahre Relativitätstheorie. Bern, 1955. Basel, 1956. P.44-45.

[10] Alexandrov A.D. The space-time of the theory of relativity // Helvetica Physica Acta. 1955. N.4 suppl. P.44-45.

[11] Александров А.Д. Относительности теория (теоретико-познавательное значение) // БСЭ (2-е изд.). 1955. Т.31. С.411-413.

[12] Александров А.Д. О философской трактовке теории относительности // Вестник АН СССР. 1956. N.10. С.96-97.

[13] Александров А.Д. Философское содержание и значение теории относительности // Материалы к Всесоюзному совещ. по филос. вопр. естествознания. 1958. 35с.

[14] Александров А.Д. Философское содержание и значение теории относительности // Философские проблемы современного естествознания: Тр. Всесоюз. совещ. по филос. вопр. естествознания. Материалы к Всесоюзному совещ. по филос. вопр. естествознания. М., 1959. С.93-136.

[15] Александров А.Д. Теория относительности как теория абсолютного пространства-времени // Философские вопросы современной физики. М., 1959. С.269-323.

[16] Alexandrov A.D. Conţinutul filozofic şi insemnatatea teoriei relativitatii // An. Rom.-Sov. Ser. Mat.-Fiz. (рум.) 1959. V.13, N.3. P.125-152.

[17] Александров А.Д. Философское содержание и значение теории относительности // Вопросы философии. 1959. N.1. С.67-84.

[18] Alexandrov A.D. Examen de la theoria relatividad restingida. Mexico, 1959. P.353-89.

[19] Alexandrov A.D. Contribution to chronogeometry // Canad. J. Math. 1967. V.19, N.6. P.1119-1128.

[20] Александров А.Д. Конусы с транзитивной группой // 3 Всесоюз. симп. по геометрии в целом: Программа заседаний и крат. содерж. докл. Петрозаводск, 1969. С.7-8.

[21] Александров А.Д. Конусы с транзитивной группой // Докл. АН СССР. 1969. Т.189, N.4. С.695-698.

[22] Александов А.Д. Пространство и время в современной физике в свете философских идей Ленина // Ленин и современное естествознание. М.: Мысль, 1969. С.202-229.

[23] Александров А.Д. Об одном обобщении функционального уравнения $f(x+y) = f(x) + f(y)$ // Сиб. мат. журн. 1970. Т.11, N.2. С.243-263.

[24] Александров А.Д. Отображения семейств множеств // Докл. АН СССР. 1970. Т.190, N.3. С.502-505.

[25] Александров А.Д. Отображения семейств множеcтвв // Докл. АН СССР. 1970. Т.191, N.3. С.503-506.

[26] Александров А.Д. Отображения семейств конусов // Докл. АН СССР. 1971. Т.197, N.5. С.991-994.

[27] Александов А.Д. Пространство и время в современной физике в свете философских идей Ленина // Вопр. философии. 1971. N.3. С.49-52.

[28] Александров А.Д. Отображения аффинных пространств с системами конусов // Зап. науч. семин. ЛОМИ. 1972. Т.27. С.7-16.

[29] Александров А.Д. Отображения упорядоченных пространств // Тр. Математ. ин-та АН СССР. 1972. Т.128. С.3-21.

[30] Александров А.Д. Об отображениях, сохраняющих конгруэнтность // Докл. АН СССР. 1973. Т.211, N.6. С.1257-1260.

[31] Александров А.Д. К основаниям геометрии пространства-времени // Докл. АН СССР. 1974. Т.219, N.1. С.11-14.

[32] Александров А.Д. К основаниям геометрии пространства-времени // Докл. АН СССР. 1974. Т.219, N.2. С.265-267.

[33] Александров А.Д. Характеризация эвклидовых движений // Докл. АН СССР. 1974. Т.214, N.1. С.11-14.

[34] Alexandrov A.D. Mappings of spaces with families of cones and space-time transformations // Annali di Mathematica, Pure ed Applicata, ser.IV. 1975. V.53. O.29-257.

[35] Александров А.Д. О основам теории относительности // Вестник ЛГУ, сер. мат. 1976. N.19. С.5-28.

[36] Александров А.Д., Копылов А.П., Кузьминых А.В., Шайденко А.В. Отображения семейств конусов // Сиб. мат. жур. 1976. Т.17, N.4. С.932-935.

[37] Александров А.Д., Борисов Ю.Ф. О хроногеометрии // Фундаментальные исследования: Физ.-мат. и тех. науки. Новосибирск, 1977. С.20-22.

[38] Александров А.Д. Отображения областей псевдоевклидовых пространств // Докл. АН СССР. 1977. Т.233, N.2. С.265-268.

[39] Александров А.Д. О философском содержании теории относительности // Эйнштейн и философские проблемы физики XX века. М., 1979. С.117-137.

[40] Александров А.Д. Проблемы науки и позиция ученого. Ленинград: Наука, 1988.

[41] Александров А.Д. Теория относительности // Математика в школе. 1991. N.4, С.4-8.

[42] Аксенов М. О времени. Трансцендентально-кинетическая теория времени. Харьков, 1896.

[43] Аксенов М. Опыт метагеометрической философии. М.: изд. Т-ва И.Н.Кушнеревъ и К., 1912, 100с.

[44] Аксенов М. Нет времени. Популярное изложение основных начал метагеометрической философии. М., 1913.

[45] Асанов Г.С. Наблюдаемые в общей теории относительности. II. Финслеров подход // Вестник МГУ. Физика. 1976. N.7. С.84-88.

[46] Асанов Г.С. О финслеровом обобщении теории относительности / Добавление второе к книге Х Рунд. Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М.: Наука, 1981. С.439-471.

[47] Астраков С.Н. Об отображениях, сохраняющих псевдоевклидов объем // Сиб. мат. жур. 1985. Т.1. С.4-11.

[48] Астраков С.Н. Об отображениях, сохраняющих аффинный объем. - Деп. в ВИНИТИ, N.4874-83 ДЕП.

[49] Астраков С.Н. О слабой характеризации преобразования Лоренца. - Деп. в ВИНИТИ, N.3131-85 ДЕП.

[50] Астраков С.Н. Об отображениях псевдоевклидовых пространств: Дис.: канд. физ.-мат. наук. – Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1985. 102 с.

[51] Богословский Г.Ю. О специальной релятивистской теории анизотропного пространства-времени // Докл. АН СССР. 1978. Т.213. С.1055-1058.

[52] Bogoslovsky G.Y. A special-relativistic theory of the locally anisotropic spacetime // Nuovo Cimento. 1977. V.40, N.1. P.99-115.

[53] Bogoslovsky G.Y. A generalization of Einstein's relativity theory for the anisotropic spacetime // Hadronic Journal. 1984. V.7, N.6. P.1361-1408.

[54] Болтянский В.Г. Анизотропный релятивизм // Дифференц. уравнения. 1974. Т.10, С.2101-2110.

[55] Болтянский В.Г. Принцип максимума, черные дыры и квазары // Дифференц. уравнения. 1979. Т.15. С.1368-1390.

[56] Борисов Ю.Ф. О преобразования псевдоевклидова пространства // Известия вузов. Математика. 1960. N.6. С.31-39.

[57] Борисов Ю.Ф. Об аксиоматическом определении групп Галилея и Лоренца // Сиб. мат. жур. 1978. Т.19, N.6. С.1237-1253.

[58] Вейль Г. Относительность / Эйнштейновский сборник. 1978-1979. М.: Наука, 1983. С.108.

[59] Вейль Г. Геметрия и физика / Математическое мышление. М.: Наука, 1989.

[60] Weyl H. Raum, Zeit, Materie. Berlin, 1923.

[61] Вернадский В.И. Философские мысли натуралиста. М.: Наука, 1988.

[62] Винберг Э.Б. Теория однородных выпуклых конусов // Труды ММО. 1963. Т.12. С.303-358.

[63] Винберг Э.Б. Теория однородных конусов // Труды ММО. 1965. Т.13. С.56-83.

[64] Винберг Э.Б. Инвариантные выпуклые конусы и упорядочения в группах Ли // Функц. анализ. 1980. Т.14, N.1. С.1-13.

[65] Витгенштейн Л. Логико-Философский Трактат, М.,1954.

[66] Вольф Дж. Пространства постоянной кривизны. М.: Наука, 1982.

[67] Воробьев О.Ю. Эвентология. Красноярск: Сиб. фед. ун-т, 2007.

[68] Гаврилов С.П. Левоинвариантные метрики на разрешимых односвязных 3-мерных группах Ли // Теория относительности и гравитация. Казань: КГУ. 1985. N.22. С.31-64.

[69] Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. М.:Наука, 1979.

[70] Горелик Г.Е. Размерность пространства. М.: МГУ, 1983.

[71] Гольдблатт Р. Теория топосов. М.: Мир, 1983.

[72] Громов Н., Крейнович В.Я., Пименов Р.И. Кривые в кинематиках и смежные вопросы физики и космологии. Сыктывкар: Препринт N.22. Коми филиал АН СССР, 1976.

[73] Гуревич В.Л. Кинематики ограниченной кривизны // Сибирский мат. ж. 1979. Т.20. С.37-48.

[74] Гуц А.К. Об отображениях семейств множеств // Докл. АН С С С Р. 1973. Т.209, N.4. С.773-774.

[75] Гуц А.К. Об отображениях, сохраняющих конусы в пространстве Лобачевского // Матем. заметки. 1973. Т.13, N.5. С.687-694.

[76] Гуц А.К. Об отображениях семейств орициклов в пространстве Лобачевского // Матем. сборник. 1973. Т.90, N.1. С.131-138.

[77] Гуц А.К. Об отображениях семейств множеств в гильбертовом пространстве // Известия вузов. Математика. 1975. N.3. С.23-29.

[78] Гуц А.К. Об отображениях семейств множеств в пространстве Лобачевского // Известия вузов. Математика. 1975. N.4. С.24-32.

[79] Гуц А.К. Об отображениях семейств множеств в гильбертовом и гиперболическом пространствах: Дис.: канд. физ.-мат. наук. – Новосибирск: НГУ, 1973. 140 с.

[80] Гуц А.К. Отображения упорядоченного пространства Лобачевского // Докл. АН СССР. 1974. Т.215, N.1. С.35-37.

[81] Гуц А.К. Инвариантные порядки на трехмерных группах Ли // Сиб. мат.ж. 1976. Т.17, N.5. С.986-992.

[82] Гуц А.К. Изотонные отбражения несвязно упорядоченного евклидова пространства // Сиб. мат. ж. 1980. Т.21, N.3. С.80-88.

[83] Гуц А.К. Хроногеометрия многообразий Геделя и де Ситтера // Сиб. мат. ж. 1980. Т.21, N.4. С.38-44.

[84] Гуц А.К. К основаниям геометрии пространства-времени // Докл. АН СССР. 1980. Т.253, N.2. С.268-271.

[85] Гуц А.К., Савченко Е.И. Хроногеометрия пространств Эйнштейна максимальной подвижности // Сиб. мат. ж. 1981. Т.22, N.5. С.31-39.

[86] Гуц А.К. Аксиоматическая теория относительности // Успехи матем. наук. 1982. Т.37, N.2. С.37-79.

[87] Guts A.K. Axiomatic Theory of Relativity // Russian Math. Surveys. 1982. V.37. P.41-80.

[88] Гуц А.К. Аксиоматическое описание стационарной вселенной де Ситтера // Тезисы Всесоюзного симпозиума по геометрии в целом и основаниям теории относительности. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1982. С.37.

[89] Гуц А.К., Левичев А.В. К основаниям теории относительности // Докл. АН СССР. 1984. Т.277, N.6. С.1299-1303.

[90] Гуц А.К. Группы порядковых автоморфизмов и их разрывные расширения // Докл. АН СССР. 1985. Т.284, N.5. С.1057-1061.

[91] Гуц А.К. Аксиоматизация лоренцевой геометрии и структуры порядка // Вестник МГУ, сер.мат. 1986. N.5. С.93.

[92] Гуц А.К. Лиевость плотных полугрупп групп Ли // Тезисы докладов X Всесоюзного симпозиума по теории групп. Минск: ИМ АН БССР, 1986. С.70.

[93] Гуц А.К., Шаламова Н.Л. Порядковые автоморфизмы лиевых групп // Тезисы докладов X Всесоюзного симпозиума по теории групп. Минск: ИМ АН БССР, 1986. С.71.

[94] Гуц А.К. Отображения упорядоченного пространства Лобачевского // Сиб. мат. ж. 1986. Т.27, N.3. С.51-67.

[95] Гуц А.К. Порядковые и пространственно-временные структуры на однородных многообразиях: Дис.: док. физ.-мат. наук. – Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1987. 204 с.

[96] Гуц А.К. Автоморфизмы локальных структур порядка в гиперболических многообразиях // Сиб. мат. ж. 1987. Т.28, N.5. С.61-63.

[97] Гуц А.К. Порядковые автоморфизмы основной аффинной группы Ли //X1X Всесоюзная алгебраическая конференция. Тезисы сообщений. Львов: Ин-т прикл. пробл. механики и мат., 1987. С.79-80.

[98] Гуц А.К. Порядковая теории трехмерных однородных лоренцевых многообразий // Всесоюзная конференция по геометрии «в целом». Тезисы докладов. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1987. С.35.

[99] Гуц А.К. Хроногеометрия и экзотические $\mathbb{R}^4$ // Всесоюзная конференция по геометрии «в целом». Тезисы докладов. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1987. С.36.

[100] Гуц А.К. Плотный порядок в пространстве Лобачевского //Сиб. мат. ж. 1988. Т.29, N.4. С.205-207.

[101] Гуц А.К. Идеальные полугруппы в векторном пространстве // 3 Всесоюзный симпозиум по теории полугрупп. Тезисы сообщений. Свердловск: УрГУ, 1988. С.23.

[102] Гуц А.К. Структуры порядка на разрешимых группах Ли. Методические указания. Омск: ОмГУ, 1988. 23 с.

[103] Гуц А.К. Аффинные объекты в топосах // Всесоюзная конференция по геометрии и анализу. Тезисы докладов. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1989. С.26.

[104] Гуц А.К., Ермакова Е.В. Однородные аффинные причинные порядки на трехмерных разрешимых группах Ли // III Всесоюзная школа. Понтрягинские чтения. Тезисы докладов. Кемерово, КГУ, 1990. С.22.

[105] Гуц А.К. Аффинно однородные несвязные полугруппы на трехмерных разрешимых группах Ли // III Международная конференция по алгебре. Тезисы докладов. Барнаул: АлтГУ. 1991. С.50.

[106] Гуц А.К. Теоретико-топосный подход к основаниям теории относительности // Докл. АН СССР. 1991. Т.318, N.6. С.1294-1297.

[107] Гуц А.К. Несвязный порядок в аффинном пространстве и его автоморфизмы. – Деп. в ВИНИТИ N.3427-В92. 32с.

[108] Гуц А.К. Полугруппы и их автоморфизмы основной аффинной группы Ли // Сиб. мат. ж. 1992. Т.33, N.4. С.59-64.

[109] Гуц А.К., Ермакова Е.В. Однородные аффинные причинные порядки на трехмерных разрешимых группах Ли. – Деп. в ВИНИТИ N.1841-В93. 42с.

[110] Гуц А.К. Единственность абелевой аффинной хроногеометрии. // Сиб. мат. ж. 1993. Т.34, N.4. С.84-86.

[111] Гуц А.К. Плотная аффинная полугруппа, не являющаяся лучевой // III Международная конференция по алгебре. Сборник тезисов. Красноярск: КГУ, 1993. С.104.

[112] Гуц А.К., Демидов В.В. *Пространство-время как топос Гротендика* // VIII Российская гравитационная конференция. Тезисы докладов. Москва: РГА. 1993. С.40.

[113] Гуц А.К., Шаламова Н.Л. Аффинно упорядоченные группы Ли и аксиоматизация псевдоевклидовой геометрии // Докл. РАН. 1993. Т.332, N.4. С.283-285.

[114] Гуц А.К. Семинар «Хроногеометрия» в Новосибирском университете в 70-е годы и исследования по основам теории относительности // Ученый совет мат. фак. ОмГУ. – Деп. в ВИНИТИ 06.07.94, N.1690-В94. 18с.

[115] Guts A. K. Semigroups in foundations of geometry and axiomatic theory of space-time // Semigroups in Algebra, Geometry and Analysis / ed. K.H.Hofmann, J.D.Lawson, E.B.Vinberg. de Gruyter Expositions in Mathematics, Berlin, 1995. 368 pp. P.57-76.

[116] Гуц А.К. Проблема построения причинной теории пространства-времени // 1-я Ионовская школа-семинар по основаниям физического пространства-времени. Тезисы докла дов. М.: МГУ, 1995. С.19-21.

[117] Guts A.K. Axiomatic causal theory of space-time // Gravitation and cosmology. 1995. V.1, N.3. P.301-305.

[118] Гуц А.К. Причинность в микролинейной теории пространства-времени // Группы в алгебре и анализе. Тезисы докладов международной конференции, Омск: ОмГУ, 1995. С.33-35.

[119] Гуц А.К. Об однородности порядка в пространстве Лобачевского // VI Всероссийская школа. Понтрягинские чтения: Тезисы докладов. - Воронеж: ВГУ, 1995. С.32.

[120] Гуц А.К. Определение преобразований Лоренца в классе $L_{1,loc}$ // Понтрягинские чтения-VII. Современные методы в теории краевых задач.Тезисы докладов. Воронеж: ВГУ, 1996. С.63.

[121] Гуц А.К. Несвязные однородные упорядочивания в пространстве Лобачевского // Понтрягинские чтения-VIII. Современные методы в теории краевых задач. Тезисы докладов. Воронеж, ВГУ, 1998.

[122] Гуц А.К., Шаламова Н.Л. К теории несвязных однородных порядков // Доклады РАН. 1999. Т.60, N.2. С.151-154.

[123] Гуц А.К. Семинар «Хроногеометрия» в Новосибирском уни верситете в 70-е годы и исследования по основам теории относительности / Академик Александр Данилович Александров. Воспоминания. Публикации. Материалы. М.: Наука, 2002. С.106-119.

[124] Гуц А.К. Элементы теории времени. Омск: Издательство Диалог-Сибирь, 2004.

[125] Гуц А.К. Уравнения для физических полей и времени в мультиверсе // Математические структуры и моделирование. 2006. Вып.16. С.51-55.

[126] Гуц А.К. Квантовое рождение физической реальности и математическое описание осознания // Математические структуры и моделирование. 2007. Вып.17. С.38-43.

[127] Джонстон П.Т. Теория топосов. М.: Наука, 1986.

[128] Еганова И.А. Аналитический обзор идей и экспериментов современной хроногеометрии // Деп. в ВИНИТИ. 1984. N.6423-84.

[129] Еганова И.А. Природа пространства-времени. Новосибирск: Изд-во СО РАН. Филиал «ГЕО», 2005.

[130] Иванов Е.М. Материя и субъективность. Саратов: Изд-во СГУ,1998. 168 с. Часть 8.
– http://filosof.historic.ru/books/item/f00/s00/z0000705/index.shtml

[131] Ионин В.К. Один способ определения аффинной структуры // Геометрич. сб. (Томск). 1982. Т.23. С.3-16.

[132] Ионин В.К. Аксиомы пространства-времени // Докл. АН СССР. 1978. Т.240, N.3. С.522-525.

[133] Ионин В.К. Характеристические свойства преобразований Лоренца // Сиб. мат. жур. 1977. Т.18, N.5. С.1027-1031.

[134] Ionin V.K. Algebraic Principles of Building Mathematical Structures // Amer. Math. Soc. Transl.(2) 1995. V.163. P.61-75.

[135] Кант И. Критика чистого разума. СПб.: Изд-во «Тайм-аут», 1993.

[136] Клеопов Д.А. Время и структура.
– http://www.chronos.msu.ru/TERMS/kleopov_vremya.htm

[137] Козырев Н.А., Насонов В.В. Новый метод определения тригонометрических параллаксов на основе измерения разности между истинным и видимым положением звезд // Астрометрия и небесная механика. М.-Л., 1978. С.168-179. (Проблемы исследования Вселенной. Вып.7).

[138] Козырев Н.А., Насонов В.В. О некоторых свойствах времени, обнаруженных астрономическими наблюдениями // Проявление космических факторов на Земле и звездах. М.-Л., 1980. С.76-84. (Проблемы исследования Вселенной. Вып.9).

[139] Козырев Н.А. Астрономическое доказательство реальности четырехмерной геометрии Минковского / В кн.: Проявление космических факторов на Земле и звездах. М.-Л., 1980. С.85-93.

[140] Кошелева О.М. Аксиоматизация объема в элементарной геометрии // Сиб. мат. жур. 1980. Т.21, N.1. С.106-114;

[141] Кошелева О.М., Крейнович В.Я., Финкельштейн А.М. Теоретико-групповой подход к основаниям теории пространства-времени // Тр. симпозиума по геометрии в целом и основаниям теории относительности. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1982. С.76-78.

[142] Крейнович В.Я. О пространственно-временных структурах, допускающих просто транзитивную группу изоморфизмов // Тр. VI Коми респ. конф. молод. ученых. Сыктывкар, 1974. С.101-102.

[143] Крейнович В.Я. К проблеме метризации пространств кинематического типа // Докл. АН СССР. 1974. Т.218, N.6. С.1271-1275.

[144] Крейнович В.Я. К вопросу о выводе Гуптой уравнений Эйнштейна // Докл. АН СССР. 1975, Т.222, N.2. С.319-321.

[145] Крейнович В.Я. Категории пространственно-временных моделей: Дис.: канд. физ.-мат. наук. – Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1979.

[146] Kreinovich V.Ja. Spacetime isomorphism problem is intractable (NP-hard) // Inter. J. Theor. Phys. 1991. V.30, N.9. P.1249-1257.

[147] Kreinovich V.Ja. Approximately measured causality implies the Lorentz group: Alexandrov-Zeeman result made more realistic // Inter. J. Theor. Phys. 1994. V.33, N.8. P.1733-1747.

[148] Kreinovich V.Ja., Morgenstein M. Which algorithms are feasible and which are not depends on the geometry of space-time // Geombinatorics. 1995. V.4, N.3. P.80-97.

[149] Kreinovich V.Ja. Space-time is 'square times' more difficult to approximate than Euclidean space // Geombinatorics. 1996. V.6, N.1. P.19-29.

[150] Kreinovich V.Ja. Causality explains why spatial and temporal translations commute: a remark // Inter. J. Theor. Phys. 1996. V.35, N.3. P.693-695.

[151] Kreinovich V.Ja. Symmetry characterization of Pimenov's spacetime: a reformulation of causality axioms // Inter. J. Theor. Phys. 1996. V.35, N.2. P.341-346.

[152] Крейнович В.Я., Запатрин Р.Р. Операционалистская переформулировка принципа эквивалентности Эйнштейна // Гравитация. 1997. Т.3, N.2. С.51-59.

[153] Кузьминых А.В. Изопроекционное свойство сферы // Докл. АН СССР. 1973. Т.210, N.6. С.1280-1283.

[154] Кузьминых А.В. Об отображениях, сохраняющих расстояние 1. // 6-я Всесоюз.геометрическая конференция. Тезисы докл. - Вильнюс, 1975. С.132.

[155] Кузьминых А.В. Об одном характеристическом свойстве изометрических отображений // Докл. АН СССР. 1976. Т.226, N.1. С.45-50.

[156] Кузьминых А.В. Характеризация преобразований Лоренца // Докл. АН СССР. 1975. Т.225, N.6. С.1269-1263.

[157] Кузьминых А.В. Об одном минимальном условии, определяющем преобразования Лоренца // Сиб. мат. жур. 1976. Т.17, N.6. С.1321-1326.

[158] Кузьминых А.В. Об отображениях, сохраняющих выпуклость // Сиб. мат. жур. 1976. Т.17, N.6. С.1408-1411.

[159] Кузьминых А.В. Аффинность выпукло – инвариантных отображений // Сиб. мат. жур. 1975. Т.16, N.6. С.1198-1204.

[160] Кузьминых А.В. Обобщение теоремы Дарбу // Сиб. мат. жур. 1979. Т.20, N.4. С.917-921.

[161] Кузьминых А.В. Характеризация некоторых классических отображений: Дис.: канд. физ.-мат. наук. – Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1978. 127 с.

[162] Кушманцева В.А., Левичев А.В. Причинная структура антимаховской метрики // Сиб. мат. ж. 1990. Т.31, N.6. С.90-95.

[163] Лаврентьев М.М., Еганова И.А., Луцет М.К., Фоминых С.Ф. О дистанционном воздействии звезд на резистор // Докл. АН СССР. 1990. Т.314, N.2. С.352-355.

[164] Лаврентьев М.М., Еганова И.А., Луцет М.К., Фоминых С.Ф. О регистрации истинного положения Солнца // Докл. АН СССР. 1990. Т.315, N.2. С.368-370.

[165] Лаврентьев М.М., Еганова И.А. Физические явления, предсказанные и обнаруженные Н.А.Козыревым, в свете адекватности пространства-времени физической реальности. 1997. http://www.philosophy.nsc.ru/journals/philscience/3_97/04_lavren.htm

[166] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1973.

[167] Левичев А.В. О связном предпорядке // Докл. АН СССР. 1977. Т.235, N.6. С.1256-1259.

[168] Левичев А.В. Связность пересечений и выпуклая оболочка // Сиб. мат. жур. 1977. Т.17, N.3. С.712.

[169] Левичев А.В. Связность пересечений и выпуклая оболочка. – Деп. в ВИНИТИ, N.237-78.

[170] Левичев А.В. Связность пересечений и выпуклая оболочка: Дис.: канд. физ.-мат. наук. – Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1978. 83 с.

[171] Левичев А.В. Некоторые условия, при которых предпорядок задается конусом // Сиб. мат. жур. 1981. Т.22, N.5. С.116-126.

[172] Левичев А.В. Об ε-связном предпорядке // Сиб. мат. журн. 1983. Т. 24, N.4. С.217-219.

[173] Левичев А.В. Хроногеометрия электромагнитной волны, задаваемой биинвариантной метрикой на группе осциллятора // Сиб. мат. журн. 1986. Т.27, N.2. С.117-126.

[174] Левичев А.В. Алгебры Ли, допускающие эллиптические полуалгебры // Функ. анализ и прил. 1986. Т.20, N.2. С.72-73.

[175] Левичев А.В. Методы исследования причинной структуры однородных лоренцевых многообразий // Сиб. мат. жур. 1990. Т.31, N.3. С.39-54.

[176] Левичев А.В. Левоинвариантный лоренцев порядок на основной аффинной группе // Сиб. мат. журн. 1987. Т.28, N.3. С.152-156.

[177] Левичев А.В. Задание конформной геометрии лоренцевого многообразия его причинной структурой // Докл. АН СССР. 1987. Т.293, N.6. С.1301-1305.

[178] Левичев А.В. Причинные конусы в алгебрах Ли малых размерностей // Сиб. мат. журн. 1985. Т.26, N.5. С.192-195.

[179] Левичев А.В. Достаточное условие отсутствия замкнутой причинной кривой в однородном пространстве-времени // Известия вузов. Физика. 1985. N.10. С.118-119.

[180] Левичев А.В. Однородные многообразия с согласованными групповой, метрической и причинной структурами: Дис.: док. физ.-мат. наук. – Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1988.

[181] Левичев А.В. О математических основах хронометрии // Вестн. Моск. ун-та. сер. 1, матем. механ. 1994. N.3. С.3-6.

[182] Levichev A.V., Kosheleva O.M. Intervals in Space-Time // Reliable Computing. 1998. V.4, N.1. P.109-112.

[183] Мальцев А.И. Об одном классе однородных пространств // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1949. Т.13, N.1. С.9-32.

[184] Мах Э. Познание и заблуждение. Очерки по психологии исследования / Э.Мах. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2003. 456 с.

[185] Минковский Г. Пространство и время / В кн.: Принцип относительности. М.: Атомиздат, 1979.

[186] Minkowski H. Die Grundlangen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern // Nachr. König. Ges. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl. 1907. S.53-111. Русск. перевод: Эйнштейновский сб. 1978-79.

[187] Мостепаненко А.М., Мостепаненко М.В. Четырехмерность пространства и времени. М., 1966.

[188] Мостепаненко А.М. Пространство и время в макро-, мега- и микромире. М.: Политиздат, 1974. 240с.

[189] Пименов Р.И. Полуриманова геометрия // Труды семин. по векторному и тензорному анализу. Вып.14. М.,1968. С.154-173.

[190] Пименов Р.И. Пространства кинематического типа // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1968. Т.6. С.3-496.

[191] Пименов Р.И. Теория пространства-времени как теория упорядоченных пространств // Тез. докл. V междунар. конф. по гравитации и теории относительности. Тбилиси, 1968. С.47-50.

[192] Пименов Р.И. Необходимые и достаточные условия линейности преобразований, сохраняющих конусы // Математ. заметки. 1969. Т.6, N.4. С.361-369.

[193] Пименов Р.И. К основаниям теории дифференцируемого пространства-времени // Докл. АН СССР. 1975. Т.222, N.1. С.36-38.

[194] Пименов Р.И. Теория кривых в гладких кинематиках // Сиб. мат. журн. 1978. Т.19, N.2. С.370-384.

[195] Pimenov R.I. A non-smooth approach to the physical content of General Relativily // 9th Intern. conf. on General Relativity and Gravitation. Abstracts. Jena. 1980. V.3. P.663-664.

[196] Пименов Р.И. Финслеровы кинематики // Сиб. мат. журн. 1981. Т.22, N.3. С.136-146.

[197] Пименов Р.И. Хроногеометрия: достижения, препятствия, структуры. – Препринт / Сыктывкар: Коми филиал АН СССР, 1987.

[198] Пименов Р.И. Анизотропное финслерово обобщение теории относительности как структуры порядка. Сыктывкар, 1987. 182 с.

[199] Пименов Р.И. Хроногеометрическая аксиоматика общей теории относительности // Всесоюзн. конф. по геометрии в целом: Тез. докл. Новосибирск, 1987. С.96.

[200] Пименов Р.И. Каузальная аксиоматика общей теории относительности // Тез. докл. IX Всесоюзн. геометрической конф., 20-22 сентября 1988. Кишенев. 1988. С.244-246.

[201] Пименов Р.И. Аксиоматика общерелятивисткого и финслерова пространства-времени посредством причинности // Сиб. мат. журн. 1988. Т.29. N.2. С.133-143.

[202] Пименов Р.И. Финслерово пространство-время позволяет обойтись без черных дыр. Сыктывкар, 1989. 8 с. (Сер. препринтов «Науч. докл.» / АН СССР, Коми фил.; вып.136).

[203] Пименов Р.И. Основы темпорального универсума. Сыктывкар, 1991. 196 с.

[204] Пуанкаре А. Измерение времени / В кн.: Принцип относительности. М.:Атомиздат, 1979. С.12-21.

[205] Пуанкаре А. О динамике электрона / В кн.: Принцип относительности. М.: Атомиздат, 1979.

[206] Розенфльд Б.А. Неевклидовы пространства. М.: Наука, 1969.

[207] Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. М.: Наука, 1973.

[208] Умов Н.А. Единообразный вывод преобразований, совместных с принципом относительности / Избранные сочинения. М.: Гостехиздат, 1950.

[209] Федотов В.П. Некоторые замечания о дискретной хроногеометрии // Сиб. мат. жур. 1978. Т.19, N.1. С.186-192.

[210] Флоренский П.А. Сочинения в 4 т. Т 4: Письма с Дальнего Востока и Соловков / сост. и общ. ред. игумена Андроника (А.С.Трубачева), П.В.Флоренского, М.С.Трубачевой. М.: Мысль, 1998.

[211] Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. М., 1955.

[212] Фок В.А. Квантовая физика и строение материи. Л., 1965

[213] Фридман А.А. Мир как пространство и время. М./ Ижевск: РХД, 2001.

[214] Шайденко А.В. К вопросу об отображениях семейств конусов // Сиб. мат. жур. 1978. Т.20, N.1. С.164-174.

[215] Шайденко А.В. Отображения, сохраняющие объем // Сиб. мат. жур. 1980. Т.21, N.2. С.209-214.

[216] Шайденко А.В. Об отображениях, сохраняющих единичный объем // Сиб. мат. жур. 1982. Т.4. С.180-186.

[217] Шайденко А.В. Характеризация аффинных отображений. – Препринт Института математики СО АН СССР, 1982, N.13. 35 с.

[218] Шайденко А.В. : Дис.: канд. физ.-мат. наук. – Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1983. 100с.

[219] Шайденко А.В. Отображения, почти сохраняющие конусы // Тр. ин-та мат. СО РАН. 1987. Т.9. С.151-153.

[220] Шайденко А.В. Mappings with condition on distortion of cones // Всесоюзная конференция по геометрии «в целом». Новосибирск: ИМ СО РАН, 1988. С.132.

[221] Shaidenko-Kunzi A.V. On mappings preserving convexity // Third Siberian School: Algebra and Analysis / Eds. by L.A. Bokut', M. Hazewinkel, and Yu. G. Reshetnyak, AMS Translations - Series 2. N.163, 1995.

[222] Шаламова Н.Л. Хроногеометрия разрешимых групп Ли. – Деп. в ВИНИТИ. М., 1989. N.4196-B89.

[223] Шаламова Н.Л. Внешне транзитивный порядок в аффинном пространстве // Всесоюзная конференция по геометрии и анализу. Тезисы докладов. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1989. С.94.

[224] Шаламова Н.Л. Однородные аффинные левоинвариантные порядки на разрешимых группах Ли. – Деп. в ВИНИТИ. N.1925-B91.

[225] Шаламова Н.Л. Внешне однородный порядок в аффинном пространстве. – Деп. в ВИНИТИ, М., 1991. N.1926-B91.

[226] Шаламова Н.Л. Порядки и порядковые автоморфизмы в однородных аффинных многообразиях: Дис.: канд. физ.-мат. наук. – Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1992.

[227] Шаламова Н.Л. К вопросу о внешне однородных порядках в аффинном пространстве // сб. Фундаментальная и прикладная математика. – Омск: ОмГУ. 1994. С.25-29.

[228] Шаламова Н.Л. Хроногеометрия несвязных гранично однородных порядков в аффинном пространстве // Вестник Омского университета. 1996. Вып.1. С.12-14.

[229] Шаламова Н.Л. Порядковые автоморфизмы внешне неоднородных несвязных порядков в аффинном пространстве // Математические структуры и моделирование. 1998. Вып.1. С.33-36.

[230] Шаламова Н.Л. Внешне однородные порядки в аффинном пространстве с трансверсальным пересечением // Математические структуры и моделирование. 1998. Вып.2. С.51-59.

[231] Шаламова Н.Л. Асимптотически линейчатый порядок // Математическое структуры и моделирование. Вып.7. С.56-60.

[232] Эйнштейн А. К электродинамике движущегося тела / В кн.: Принцип относительности. М.: Атомиздат, 1979. С.97.

[233] Эйнштейн А. Собрание сочинений. Т.2. М.: Наука, 1966.

[234] Alonso J., Yudurain F. On the continuity of causal automorphisms of space-time // Commun. Math. Phys. 1967. T.4, N.5. P.349-351.

[235] The Axiomatic Method. Amsterdam: North-Holland, 1959.

[236] Auguston M., Koshelev M., Kosheleva O. Even for non-point events, causality implies the Lorentz group // Inter. J. Theor. Phys. 1998. V.37, N.11. P.2851-2856.

[237] Auslander L., Tolimieri R. Splitting theorems and the structure of solvmanifolds // Ann. Math. 1970. V.92, N.1. P.164-173.

[238] Auslander L. Simply transitive groups of affine motions // American J. Math. 1977. V.99, N.4. P.809-826.

[239] Barucchi G., Teppati G. The causality group // Nuovo cimento. 1967. V.52A, N.1. P.50-61.

[240] Beem J.K Indefinite Finsler spaces and timelike spaces // Canadian J. Math. 1970. V.22, N.5. P.1035-1039.

[241] Benz W. Zur charakterisierung der Lorentz-transformationen // J. Geometry. 1977. B.9, N.1-2, S.29-37.

[242] Benz W. Kennzeichnungen von Lorentz-transformationen // Beitrage zur geometrischen Algebra. Proc. Symp. Duisburg, 1976.

[243] Benz W. A characterization of plane Lorentz transformations // J. Geometry. 1977. V.10, N.1-2. P.45-56.

[244] Benz W. Kennzeichnungen von Lorentztransformationen // Beitr. Geom. Alg. 1977. S.41-42 (Birkh. Verl).

[245] Benz W. A Beckman-Quarles-Type Theorem for Plane Lorentz Transformations // C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada II. 1980. N.1. P.21-22.

[246] Benz W. Die Lorentzgruppe in der Geometrie // Math. Unterr. 1980. B.26, Heft 4. S.5-17.

[247] Benz W. Eine Beckman-Quarles-Charakterisierung der Lorentztransformationen des R^n // Archiv d. Math. 1980. B.34. S.550-559.

[248] Benz W. A Beckman-Quarles-Type Theorem for Plane Lorentz Transformations // Math. Zeitschr. 1981. B.177. S.101-106.

[249] Benz W. On mappings preserving a single Lorentz-Minkowski-distance. II // Journal of Geom. 1981. V.17. P.193-201.

[250] Benz W. On mappings preserving a single Lorentz-Minkowski-distance. III // Journal of Geom. 1982. V.18. P.70-77.

[251] Benz W. On mappings preserving a single Lorentz-Minkowski-distance. I // Annals of Discrete Math. 1983. V.18. P.61-76.

[252] Benz W. Geometrische Transformationen unter besonderer Berucksichtigung der Lorentztransformationen. Mannheim-Leipzig-Wien-Zurich: BI Wissenschaftsverlag, 1992. 322 S.

[253] Benz W. On Lorentz Transformations in Geometry // Giornate di Geometrie Combinatorie, Univ. di Perugia. 1993. P.81-86.

[254] Berger G. Temporally symmetric causal relations in Minkowski space-time // Synthese. 1972. V.24. P.58-73.

[255] Berzi V. On a condition characterizing the Lorentz and Galilei groups // Repts. Math. Phys. 1977. V.11, N.3. P.297-310.

[256] Beckman F.S., Quarles D.A. On isometries of Euclidean space // Proceedings of AMS. 1953. V.4. P.810-815.

[257] Borchers H.J., Hegerfeldt G.C. Uber ein Problem der Relativitatstheorie: Wann sind Punktabbildungen des R^n linear? // Nachr. der Akad. der Wissenschaf-ten in Gottingen. II. Math.-phys. Klasse, Jahrgang. 1972. N.10.

[258] Borchers H.J., Hegerfeldt G.C. The structure of space-time transformations // Commun. Math. Phys. 1972. V.28, N.3. P.259-266.

[259] Briginshaw A.J. The axiomatic geometry of space-time: an assessment of the work of A. A. Robb // Centaurus. 1978/79. V.22, N.4. P.315-323.

[260] Busemann H. Time-like spaces // Dissertationes mathematicae, 1967. N.53. P.5-50.

[261] Cacciafesta F. An observation about a theorem of A.D.Alexandrov conserving Lorentz transformations // J. Geom. 1982. V.18, N.1. P.5-8.

[262] Catteneo C. Sui postulati comuni della cinematica classica e della cinematica relativistica // Atti Ace. Naz. Lincei Rendiconti. 1958. V.24, N.5. P.526-532.

[263] Edelen D.G.B. The structure of fieldfspace. Berkeley and Los Angeles: University of California Press, 1962.

[264] Ellis R. Locally compact transformation groups // Duke Math. J. 1957. V.24. P.119-125.

[265] Everett H. "Relative state" formulation of quantum mechanics // Reviews of Modern Physics. 1957. V.29. P.454-462.

[266] Flato M.. Sternheimer D. Remarques sur les automorphismes causals de Tespaces-temps // Comptes Rendues Acad. Sci. 1966. V.263, N.25. P.935-938.

[267] Freedman M. Topology of 4-dimensional manifolds // J. Diff. Geom. 1982. V.17, N.3. P.357-453.

[268] Fried D., Goldman M., Hirsch M. Affine manifolds with nilpotent hokonomy // Comment. Math. Helv. 1981. V.56, N.4. P.487-523.

[269] Gareth W. The relation "closer than" in Minkowski space // Amer. J. Phys. 1973. V.41, N.7. P.871-873.

[270] Gheorghe C., Mihul E. Causal groups of space-time // Commun. Math. Phys. 1969. V.14. N.2. P.165-170.

[271] Gladysz S. Convex topology in groups and Euclidean spaces // Bull. Polonaise acad. sci., ser. mat., astron., phys. 1964. V.12, N.1. P.1-4.

[272] Gödel K. An Example of a New Type of Cosmological Solutions of Einstein's Field Equtions of Gravitation // Rev. Mod. Phys. 1949. V.21, N.3. P.447-450.

[273] Goldblatt R. Orthogonality and spacetime geometry. New York: Springer, 1987.

[274] Hawking S.W., King A.R., McCarthy P.J. A new topology for curved space-time which incorporates the causal, differential, and conformal structures // J. Math. Phys. 1976. V.17, N.2. P.174-181.

[275] Hegerfeldt G.C. The Lorentz transformations: derivation of linearity and scale factor // Nuovo Cimento. 1972. V.A10. P.257-267.

[276] Hilbert D. Die Grundlagen der Physik // Math. Annalen. 1924. B.92, N.1,2. S.1-32.

[277] Hilgert J., Hofmann K.H. Loretzian cones in real Lie algebras // Monatsh. Math. 1985. V.100. P.183-210.

[278] Hilgert J., Hofmann K.H. On the causal structure of homogeneous manifolds // Mathematica Scandinavica. 1990. V.67. P.119-144.

[279] Hilgert J. Invariant Lorentzian orders on simply connected Lie groups // Arkiv för Mat. 1988. B.26. S.107-115.

[280] Hofmann K.H., Lawson J. The local theory of semigroups in nilpotent Lie groups // Semigroup Forum. 1981. V.23. P.343-357.

[281] Hofmann K.H. Lawson J. Foundations of Lie semigroups / In: Recent Developments in the Angebraic, Analytical, and Topological Theory of Semigroups. – Lect. Notes in Math. 1983. N.998. P.128-201.

[282] Huang W.L. Transformations of strongly causal space-times preserving null geodesics // J. Math. Phys. 1998. V.39, N.3. P.1637-1641.

[283] Huang W.L. Null line preserving bijections of Schwarzschild spacetime // Commun. Math. Phys. 1999. V.201, N.2. P.471-491.

[284] Isikawa H. Note on Finsler relativity // Journ. of Math. Phys. 1981. V.22, N.5. P.995-1004.

[285] Klotz A.H. A note on a kinematical derivation of Lorentz transformations // J. and Proc. Roy. Soc. N.S.W. 1969. V.102, N.2. P.123-124.

[286] Kronheimer T.H., Penrose R. On the structure of causal spaces // Proc. Cambr. Phil. Soc. 1967. V.63. P.481-501.

[287] Larmor J. Alfred Arthur Robb. 1873-1936 // Obituary Notices of Fellows of the Royal Society. 1938. V.2, N.6. P.315-321.

[288] Lenard A. A characterization of Lorentz transformations // J. Math. Phys. 1978. V.19, N.1. P.157.

[289] Lester J.A. Cone preserving mappings for quadratic cones over arbitrara fields // Canad. J. Math. 1977. V.29, N.6. P.1247-1253.

[290] Lester J.A., McKiernan M.A. On null preserving mappings // Math. Proc. Cambr. Phil. Soc. 1977. V.81, N.3. P.455-462.

[291] Lester J.A. Transformations of rc-space which preserve a fixed square-distance // Canad. J. Math. 1979. V.31, N.2. P.392-395.

[292] Lester J.A. Conformal spaces // J.Geometry. 1980. V.14. P.108-117.

[293] Lester J.A. The Beckman-Quarles Theorem in Minkowski Space for a Spacelike Square-Distance // Arch. Math. (Basel). 1981. V.37. P.561-568.

[294] Lester J.A. Alexandrov-type Transformations on Einstein's Cylinder Universe // C.R. Math.Rep. Acad. Sci. Canada. 1982. V.4. P.175-178.

[295] Lester J.A. Transformations of Robertson-Walker spacetimes preserving separation zero // Aequations Math. 1982. V.25. P.26-232.

[296] Lester J.A. Conformal Minkowski Spacetime I: Relative Infinity and Proper Time. Il // Nuovo Cimento. 1982. V.72B. P.261-272.

[297] Lester J.A. Conformal Minkowski Spacetime II: A Cosmological Model. Il // Nuovo Cimento. 1983. V.73B. P.139-149.

[298] Lester J.A. A Physical Characterization of Conformal Transformations of Minkowski Spacetime // Ann. Discrete Math. 1983. V.18. P.567-574.

[299] Lester J.A. The causal automorphism of de Sitter and Einstein cylinder spacetimes // J. Math. Phys. 1984. V.25, N.1. P.113-116.

[300] Lester J.A. Transformations preserving null line sections of domain: the arbitrary signature case // Results in Math. 1986. V.9. P.107-118.

[301] Lester J.A. Zeeman's Lemma on Robertson-Walker Spacetimes // J. Math. Phys. 1989. V.30. P.1296-1300.

[302] Lester J.A. Distance preserving transformations / Handbook of Incidence Geometry (Amsterdam) (Buekenhout, Francis, ed.). Amsterdam: Elsevier, 1995.

[303] Malament D.B. The class of continuous timelike curves determines the topology of space-time // J. Math. Phys. 1977. V.18, N.7. P.1399-1404.

[304] Markov A.A. Ueber die Ableitbarkeit der Weltmetrik aus der "Fruher-albBeziehung // Physicalische Zeitsehrift der Sovjetunion. 1932. V.1, N.3. S.387-406.

[305] McKiernan V.F. A functional equation in the characterization of null cone preserving maps // Topics in diff. geom. (in memory of Evan Tom Davies). – New York: Academic Press, 1976. P.99-109.

[306] Milnor J. On fundamental groups of complete affinely flat manifold // Advances in Math. 1977. V.25, N.2. P.178-187.

[307] Moerdijk I., Reyes G.E. Models for Smooth Infinitesimal Analysis. Springer-Verlag, 1991.

[308] Nanda S. A geometrical proof that causality implies the Lorentz group // Math. Proc. Cambr. Phil. Soc. 1976. V.79, N.3. P.533.

[309] Nanda S., Panda H.K. Compact topologies on Minkowski space // Internat. J. Theoret. Phys. 1974. V.10. P.159-163.

[310] Neeb K.-H. Conal orders on homogeneous spaces // Inventiones Math. 1991. V.104. P.467-496.

[311] Noll W. Euclidean geometry and Minkowskian chronometry // The Amer. math. monthly. 1964. V.71, N.2. P.129-143.

[312] Palagyi M. Neue Theorie des Raumes und der Zeit. Leipzig, 1901.

[313] Quinn F. Ends of maps // J. Diff. Geom. 1982. V.17, N.3. P.503-521.

[314] Raptis I. A Non-classical Linear Xenomorph as a Model of Quantum Causal Space. – arXiv:gr-qc/9909056 v1 (1999).

[315] Ratz J. Zur Defenition der Lorentz transformationen // Math.-phys. Semesterber. 1970. B.17, N.2. S.163-167.

[316] Reichenbach H. Axiomatik der relativistischen Raum-Zeit Lehre. Braunschweig: Fr. Wieweg und Sohn, 1924.

[317] Reichenbach H. Axiomatization of the theory of relativity. Berkeley: University of California Press, 1969.

[318] Robb A.A. Solution of question 10865 / Ed. Times LV. 61, 1891.

[319] Robb A.A. Beitrlge zur Theorie des Zeeman effektes // Ann. der Phys. B.(4) 15. S.107-145; Diss. Göttigen. 67 S.

[320] Robb A.A. On the conduction of electricity through gases between parallel plates // Phil. Mag. 1905. V.(6) 10. P.237-242, 664-676.

[321] Robb A.A. On the determination of the rational factors of a quantic having integer coefficients // Messenger. 1908. V.(2) 37. P.187-190.

[322] Robb A.A. Optical Geometry of Motion: A New View of the Theory of Relativity. Cambridge: W. Heffer and Sons, Ltd./ London: Simpkin Marshall and Co., Ltd., 1911.

[323] Robb A.A. A theory of time and space. Cambridge: Heffer, 1912.

[324] Robb A.A. Proof of one of Peano's axioms of the straight line // Messenger. 1912. V.(2) 42. P.121-123.

[325] Robb A.A. Note on the proof of one of Peano's axioms of the straight line // Messenger. 1913. V.(2) 42. P.134.

[326] Robb A.A. A theory of time and space. Cambridge: Cambridge: University Press, 1914. 373p.

[327] Robb A.A. The straight path // Nature. 1920. N.104. P.599.

[328] Robb A.A. The Absolute Relations of Time and Space. Cambridge: University press, 1921.

[329] Robb A.A. On a curious optical theorem and its geometrical basis // Philos. Magazine. 1928. V.(7) 5. P.1114-1125. 1928

[330] Robb A.A. Partial failure of Euclid in time-space theory // Math. Gazette. 1929. V.14. P.473-476.

[331] Robb A.A. Euclid and time-space theory. A reply to Mr. E.T.Dixon. // Math. Gazette. 1930. V.15. P.68-70.

[332] Robb A.A. On a symmetrical analysis of conical order and its relation to timespace theory // Proceedings Royal Soc. London. 1930. V.129. P.549-579.

[333] Robb A.A. Geometry of Time and Space. Cambridge: University press, 1936.

[334] Rothaus O.S. Order isomorphisms of cones // Proc. Amer. Math. Soc. 1966. V.17, N.6. P.1284.

[335] Seier W. Kollineationen von Translationsstrukturen // J. Geometry. 1971. B.1. S.183-195.

[336] Segal I. Covariant chronogeometry and extreme distances // J. Astron. and Astrophys. 1972. V.18. P143-148.

[337] Schröder E.M. Zur Kennzeichnung der Lorentz-Transformationen // Aequationen Mathematicae. 1979. B.19, N.2/3. S.134-144.

[338] Schröder E.M. Ein einfacher Beweis des Satzes von Alexandroff-Lester // J. Geom. 1990. V.37. P.153-158.

[339] Schutz J.W. Foundations of Special Relativity: Kinematic Axioms for Minkowski Space-Time // Lect. Notes in Math. Berlin: Springer. V.361. 1973.

[340] Schutz J.W. An axiomatic system for Minkowski space-time // J. Math. Phys. 1981. V.22, N.2. P.293-302.

[341] Schwartz H.M. Axiomatic deduction of the general Lorentz transformations // Amer. J. Phys. 1962. V.30, N.10. P.697-707.

[342] Scott W. The non-Euclidean style of Minkowskian relativity / The Symbolic Universe, J. Gray (ed.). Oxford University Press, 1999. P.91-127.

[343] Shaidenko-Kunzi A.V. On mappings preserving convexity // Third Siberian School: Algebra and Analysis / Eds. by L.A.Bokut', M.Hazewinkel, and Yu.G. Reshetnyak, AMS Translations - Series 2. N.163, 1995.

[344] Smille J. An abstruction on the existence of affine structures // Invent. Math. 1981. V.64, N.3. P.411-415.

[345] Stout L.N. Topological properties of the real numbers object in a topos // Cahiers de topol. et geom. diff. 1976. V.17. P.295-326.

[346] Teppati G. An algebraic analogue of Zeeman's theorem // Nuovo cimento. 1968. V.54A, N.3. P.800-804.

[347] Törnebohn H. The Lorentz-formulae and the metrical principle // Philos. Sci. 1962. V.29, N.3. P.269-278.

[348] Tolimieri R. Structure of solvable Lie groups // J. Algebra. 1970. V.16, N.4. P.597-625.

[349] Trifonov V. A Linear Solution of the Four-Dimensional Problem // Europhysics Letters. 1995. V.28 (8). P.621-626.

[350] Vroegindewey P.G., Kreinovic V.Ja., Kosheleva O.M. An extension of a theorem of A.D. Alexandrov to a class of partially ordered fields // Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math. 1979. V.41, N.3. P.363-376.

[351] Vroegindewey P.G., Kreinovic V.Ja., Kosheleva O.M. Note on a physical application of the main theorem of chronogeometry. Eindhoven: Technological University, Netherlands, 1979. 7 p.

[352] Vroegindewey P.G., Kreinovic V.Ja., Kosheleva O.M. From a connected, partially ordered set of events to a field of time intervals // Foundations of Physics. 1980. V.10, N.5/6. P.469-484.

[353] Vroegindewey P.G. An extension of a theorem of Yu.F. Borisov // Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch. Math. 1982. V.1. P.91-95.

[354] Wo1ff H. Minkowskische und absolute Geometrie. II // Math. Ann. 1967. B.171, N.3. S.165-193.

[355] Wheeler J.A., Feynman R.P. Interaction with the Absorber as the Mechanism of Radiation // Reviews of Modern Physics. 1945. V.17, P.157.

[356] Wheeler J.A., Feynman R.P. Classical Electrodynamics in Terms of Direct Interparticle Action // Reviews of Modern Physics. 1949. V.21, N.3. P.425-433.

[357] Yamaguchi S. On complete affinely flat structures of some solvable Lie groups // Mem. of Faculty of Science Kyuchu Univ. 1979. V.A33. P.209-218.

[358] Zeeman E.C. Causality implies the Lorentz group // J.Math. Phys. 1964. V.5, N.4. P.490-493.

Научное издание

Александр Константинович Гуц

ХРОНОГЕОМЕТРИЯ

Аксиоматическая теория относительности

Научное издание

Санитарно-гигиенический сертификат
№77.99.60.953 Д000323.01.07 от 18.01.07

Редактор Е.В. Брусницына

Подписано в печать 30.03.08. Формат бумаги 60 × 84 1/16.
Печ.л. 22,4. Уч.-изд.л. 22,2. Тираж 200 экз. Заказ

Издательство Омского государственного университета
644077, Омск-77, пр. Мира, 55а, госуниверситет