ФИНАНСОВАЯ АКАДЕМИЯ
ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
КАФЕДРА ”Математика и финансовые приложения”

Е.С. Волкова

Тексты лекций
«Теория кривых второго порядка»

Москва 2001

Аннотация

Курс лекций содержит изложение теории кривых второго порядка и элементы теории поверхностей второго порядка и может быть использован как учебное пособие для изучения теории кривых и поверхностей второго порядка. Материал лекций содержит определения и свойства кривых и поверхностей второго порядка, их канонические уравнения, классификацию кривых и поверхностей второго порядка, общую теорию кривых второго порядка, классификацию кривых и поверхностей второго порядка по их основным инвариантам. Теоретические вопросы излагаются в доступной форме. Лекции предназначены для студентов всех экономических специальностей Финансовой академии.

Линия порядка k

Линией порядка k на плоскости называется множество точек $M(x, y)$, координаты x и y которых удовлетворяют некоторому алгебраическому уравнению степени k. Как известно, любую прямую на плоскости можно задать уравнением вида $Ax + By + C = 0$, где A и B одновременно не равны нулю. Таким образом, уравнения первой степени представляют собой прямые линии. Далее мы будем рассматривать множества на плоскости, определяемые алгебраическими уравнениями второй степени.

Множество точек плоскости $M(x, y)$, координаты x и y которых удовлетворяют уравнению

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0, \qquad (1)$$

где $a_{11,} a_{12}, a_{22}, a_{10}, a_{20}, a_{00}$ – действительные числа, причем $a_{11,} a_{12}, a_{22}$ одновременно не равны нулю, называется *кривой второго порядка*. Уравнение (1) называется *общим* уравнением линии.

Заметим, что одна и та же линия на плоскости в разных системах координат задается различными уравнениями, поэтому, выбирая должным образом систему координат, уравнение (1) можно упростить. Системы координат, в которых уравнение (1) принимает наиболее простой вид, в дальнейшем будут названы каноническими. Как правило, в канонических системах координат одна из осей координат или обе оси координат являются осями симметрии линии. А если линия имеет центр симметрии, то начало системы координат совпадает с центром симметрии.

Примеры линий второго порядка

1. Эллипс.

Эллипсом γ называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2 равна длине данного отрезка $[PQ]$, причем $PQ > F_1F_2$. Точки F_1 и F_2 называются *фокусами* эллипса, а расстояние между ними – *фокальным расстоянием*.

Если $M \in \gamma$, то отрезки $[F_1M]$ и $[F_2M]$ называются *фокальными радиусами* точки M. Фокальными радиусами называют обычно и длины этих отрезков. Обозначим $F_1F_2 = 2c$, $PQ = 2a$. В силу определения эллипса $a > c$.

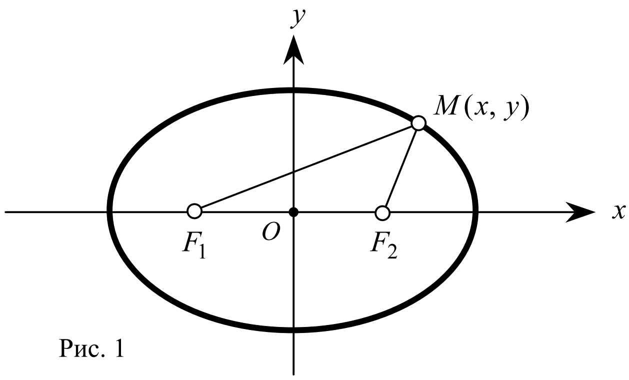

Рис. 1

Выведем уравнение эллипса. Рассмотрим прямоугольную декартову систему координат Oxy, в которой фокусы F_1 и F_2 расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат. Тогда F_1 и F_2 имеют координаты $(-c, 0)$ и $(c, 0)$, соответственно. Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка эллипса γ, тогда фокальные радиусы этой точки равны $F_1M=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$, $F_2M=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$. Из определения эллипса следует равенство $F_1M+F_2M=2a$, поэтому получаем следующее уравнение

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a. \qquad (2)$$

Возведем обе части равенства (2) в квадрат, после несложных преобразований получим

$$\sqrt{x^2-2xc+c^2+y^2}\sqrt{x^2+2xc+c^2+y^2}=2a^2-x^2-c^2-y^2.$$

Обозначим $p=x^2+y^2+c^2$, с учетом введенного обозначения последнее равенство примет вид $\sqrt{p-2xc}\sqrt{p+2xc}=2a^2-p$. Возведем полученное равенство в квадрат, после несложных преобразований с учетом обозначения для p получим следующее равенство

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=(a^2-c^2)a^2. \qquad (3)$$

Выражение $a^2-c^2>0$, так как $a>c$. Поэтому обозначим $a^2-c^2=b^2$. С учетом введенного обозначения равенство (3) примет вид $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$. Разделим обе части этого равенства на a^2b^2, получим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (4)$$

Значит, если точка принадлежит эллипсу, то ее координаты должны удовлетворять уравнению (4). Докажем теперь обратное. Пусть координаты произвольной точки $M(x,y)$ удовлетворяют уравнению (4). Тогда фокальные радиусы этой точки вычисляются по формулам:

$$F_1M^2 = (x+c)^2 + y^2 = (x+c)^2 + b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right),$$

$$F_2M^2 = (x-c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых, найдем: $F_1M = \left|a+\frac{c}{a}x\right|$, $F_2M = \left|a-\frac{c}{a}x\right|$. Из уравнения (4) следует, что $|x| \le a$, и справедливо $0 < \frac{c}{a} < 1$, то $\left|\frac{c}{a}\right| < 1$. Следовательно, $\left|\frac{c}{a}x\right| < a$, т.е. $-a < \frac{c}{a}x < a$. Значит, $a-\frac{c}{a}x > 0$ и $a+\frac{c}{a}x > 0$. Поэтому в выражениях для фокальных радиусов модуль можно убрать: $F_1M = a+\frac{c}{a}x$, $F_2M = a-\frac{c}{a}x$. Следовательно, $F_1M + F_2M = 2a$. Это означает, что точка $M(x,y)$ удовлетворяет уравнению эллипса, а значит принадлежит ему. Итак, уравнение (4) является уравнением эллипса. Оно называется *каноническим уравнением* эллипса. Из канонического уравнения эллипса следует, что если точка с координатами (x_0, y_0) принадлежит эллипсу, т.е. выполняется равенство $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$, то и точки с координатами $(-x_0, y_0)$, $(x_0, -y_0)$, $(-x_0, -y_0)$ также удовлетворяют уравнению эллипса, так как переменные x, y входят в уравнение эллипса во второй степени. Это означает, что эллипс симметричен относительно осей координат и начала координат. Прямая Ox, проходящая через фокусы, называется первой или фокальной осью, а перпендикулярная ей ось

Oy – второй осью симметрии. Точка O является центром симметрии эллипса или просто центром эллипса. Точки $A_1(a,0)$, $A_2(-a,0)$, $B_1(0,b)$, $B_2(0,-b)$ пересечения эллипса с его осями называются вершинами эллипса. Отрезки $[A_1A_2]$ и $[B_1B_2]$ называются соответственно большой и малой осями эллипса. Числа $a = OA_1 = OA_2$, $b = OB_1 = OB_2$ называются соответственно большой и малой полуосями эллипса.

Из канонического уравнения эллипса также следует, что координаты (x,y) точки $M \in \gamma$ удовлетворяют неравенствам $|x| \le a$, $|y| \le b$. Докажем, например, первое соотношение. Из уравнения эллипса следует, что $\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \le 1$, то есть $x^2 \le a^2$, следовательно, $|x| \le a$. Второе неравенство доказывается аналогично. Итак, $-a \le x \le a$, $-b \le y \le b$. Это означает, что все точки эллипса принадлежат прямоугольнику, который определяется системой этих неравенств.

Эксцентриситетом эллипса называется отношение его фокального расстояния к большой полуоси. Для эллипса это число $\varepsilon = \frac{c}{a}$. Так как $a > c$, то $0 \le \varepsilon < 1$. Вычислим отношение $\frac{b}{a}$ через эксцентриситет: $\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{a^2}} = \sqrt{1-\varepsilon^2}$. Отсюда следует, что среди эллипсов, имеющих одну и ту же большую полуось, но разные эксцентриситеты, более продолговатым является тот, у которого эксцентриситет больше.

Замечание. Окружность является частным случаем эллипса, для которого фокусы F_1 и F_2 совпадают. В этом случае $c = 0$, значит, $a = b$, каноническое уравнение приводится к виду $x^2 + y^2 = a^2$. Эксцентриситет окружности равен нулю.

Прямые d_1, d_2, параллельные второй оси эллипса и отстоящие от нее на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$, называются *директрисами* эллипса. В декартовой системе координат директрисы имеют уравнения:

$$d_1 : x - \frac{a}{\varepsilon} = 0, \qquad d_2 : x + \frac{a}{\varepsilon} = 0.$$

Для эллипса (4) число $p = \frac{b^2}{a}$ называется его *фокальным параметром*.

2. Гипербола.

Гиперболой γ называется множество всех точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний от каждой из которых до данных точек F_1 и F_2 равна длине данного отрезка $[PQ]$, причем $PQ < F_1F_2$. Точки F_1 и F_2 называются *фокусами* гиперболы, а расстояние между ними – *фокальным расстоянием*.

Если $M \in \gamma$, то отрезки F_1M и F_2M называются *фокальными радиусами* точки M. Фокальными радиусами обычно называют длины этих отрезков. Обозначим $F_1F_2 = 2c$, $PQ = 2a$. В силу определения $a < c$.

Выведем уравнение гиперболы. Рассмотрим прямоугольную декартову систему координат Oxy, в которой фокусы F_1 и F_2

расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат. Тогда F_1 и F_2 имеют координаты $(-c, 0)$ и $(c, 0)$, соответственно. Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка гиперболы γ, тогда фокальные радиусы этой точки равны $F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Из определения гиперболы следует равенство $|F_1M - F_2M| = 2a$, поэтому получаем следующее уравнение

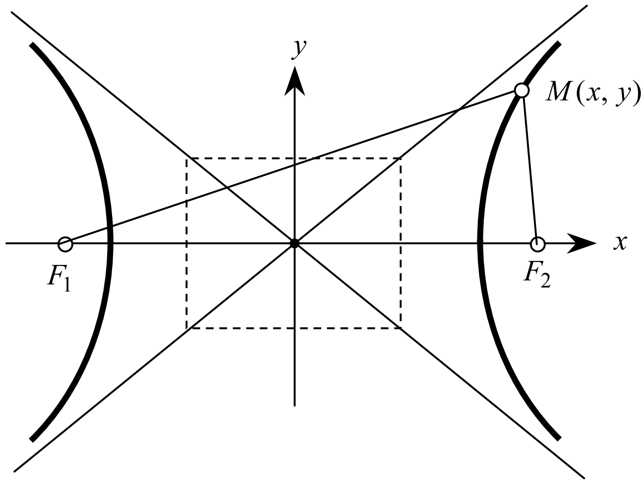

Рис. 2

$$\left|\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right| = 2a.$$

Возводя обе части этого равенства в квадрат и проводя преобразования, аналогичные тем, что проводили при выведении уравнения эллипса, получим

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = (a^2 - c^2)a^2. \tag{5}$$

Выражение $c^2 - a^2 > 0$, так как $a < c$. Поэтому обозначим $c^2 - a^2 = b^2$. С учетом введенного обозначения равенство (5) примет вид $-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2$. Разделим обе части этого равенства на $-a^2b^2$, получим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{6}$$

Тем самым доказано, что координаты любой точки гиперболы удовлетворяют уравнению (6). Докажем обратное: точка, координаты которой удовлетворяют уравнению (6), принадлежит гиперболе. Для этого достаточно показать, что выполняется равенство: $\left|F_1M - F_2M\right| = 2a$. Подставим в формулы F_1M и F_2M значение y^2 из уравнения (6), получим: $F_1M = \left|\frac{c}{a}x + a\right|$, $F_2M = \left|\frac{c}{a}x - a\right|$. Из уравнения (6) следует, что $\frac{x^2}{a^2} \geq 1$, т.е. $x^2 \geq a^2$, т.е. $\left|x\right| \geq a$. И так как $\frac{c}{a} > 1$, следует $\left|\frac{c}{a}x\right| > a$, т.е. $\frac{c}{a}x - a > 0$, если $x > 0$ или $\frac{c}{a}x + a < 0$, если $x < 0$. Тогда $\left|F_1M - F_2M\right| = \left|\frac{c}{a}x + a - \frac{c}{a}x + a\right| = 2a$, если $x > 0$ или $\left|F_1M - F_2M\right| = \left|-\frac{c}{a}x - a + \frac{c}{a}x - a\right| = 2a$, если $x < 0$. Следовательно, $\left|F_1M - F_2M\right| = 2a$, точка $M \in \gamma$. Итак, уравнение (6) является уравнением гиперболы. Оно *называется каноническим уравнением* гиперболы.

Из канонического уравнения гиперболы так же, как и в случае с уравнением эллипса можно вывести геометрические свойства гиперболы. Например, из уравнения (6) следует, что абсцисса любой точки $M \in \gamma$ удовлетворяет неравенству $x \geq a$ или $x \leq -a$ и , значит, внутри полосы, определяемой прямыми $x = a$ и $x = -a$, точек гиперболы нет. Гипербола симметрична относительно осей координат и начала координат. Начало координат является центром гиперболы, заданной уравнением (6). Ось симметрии, которая проходит через фокусы гиперболы, называется *первой* или *фокальной* осью симметрии. Перпендикулярная ей ось, называется *второй* или *мнимой* осью гиперболы. Фокальная ось пересекает гиперболу в точках $A_1(a,0)$ и $A_2(-a,0)$. Точки A_1 и A_2 называются вершинами гиперболы, а отрезок $[A_1A_2]$ – ее действительной осью. Числа a и b называются *соответственно действительной и мнимой полуосями* гиперболы.

Прямые l_1 и l_2, уравнения которых

$$y = \frac{b}{a}x,\; y = -\frac{b}{a}x$$

называются *асимптотами* гиперболы. Гипербола γ лежит внутри тех вертикальных углов, образованных ее асимптотами, которым принадлежат фокусы, а расстояние от точки $M \in \gamma$ до соответствующей асимптоты стремится к нулю, когда точка стремится по гиперболе в бесконечность.

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение ее фокального расстояния к действительной оси. Для гиперболы (6) это число равно $\varepsilon = \frac{c}{a}$. Так как $c > a$, то $\varepsilon > 1$.

Так же, как и в случае с эллипсом прямые d_1, d_2, параллельные мнимой оси гиперболы и отстоящие от нее на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$, называются *директрисами гиперболы*. В декартовой системе координат директрисы имеют уравнения:

$$d_1 : x - \frac{a}{\varepsilon} = 0, \qquad d_2 : x + \frac{a}{\varepsilon} = 0.$$

Для гиперболы (6) число $p = \frac{b^2}{a}$ называется ее *фокальным параметром*.

Замечание. Гипербола, полуоси которой равны $a = b$, называется *равносторонней*. Ее каноническое уравнение имеет вид $x^2 - y^2 = a^2$. Асимптоты равносторонней гиперболы перпендикулярны.

3. Парабола.

Параболой γ называется множество всех точек плоскости, расстояние от каждой из которых до данной точки F равно расстоянию до данной прямой d, не проходящей через точку F. Точка F называется *фокусом* параболы, а прямая d – ее *директрисой*. Расстояние от фокуса до директрисы называется *фокальным параметром* параболы и обозначается через p.

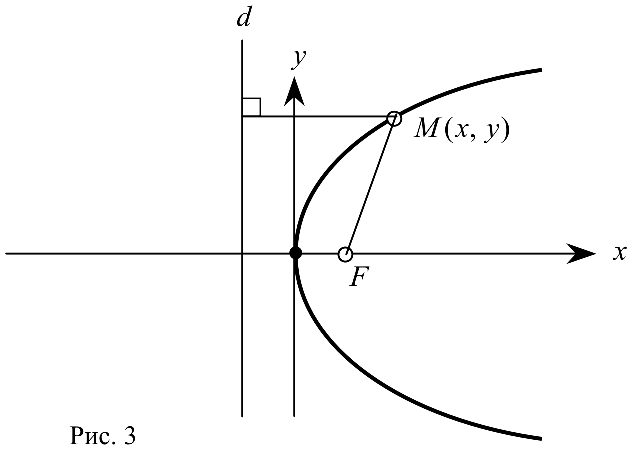

Рис. 3

Найдем уравнение параболы в декартовой системе координат Oxy. Пусть O – середина отрезка FD, где D – ортогональная проекция точки F на прямую d. В этой системе координат фокус F

имеет координаты $F\left(\frac{p}{2},0\right)$, а директриса d – уравнение $x+\frac{p}{2}=0$. Пусть $M(x,y)\in\gamma$ – произвольная точка параболы. Расстояния от точки M до фокуса F и директрисы d вычисляются по формулам: $FM=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$, $\rho(M,d)=\left|x+\frac{p}{2}\right|$. Из определения параболы следует равенство:

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|.$$

Возводя обе части этого равенства в квадрат, получим следующее уравнение

$$y^2=2px. \tag{7}$$

Доказали, что точки параболы удовлетворяют уравнению (7). Как обычно, докажем обратное: точка M, координаты которой удовлетворяют уравнению (7), принадлежит параболе. В самом деле, подставим выражение (7) в формулу расстояния FM, получаем:

$$FM=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{x^2-px+\frac{p^2}{4}+2px}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|$$

Следовательно, $FM=\rho(M,d)$, т.е $M(x,y)\in\gamma$. Уравнение (7) называется *каноническим* уравнением параболы.

Из уравнения (7) следуют следующие свойства параболы. Все точки параболы принадлежат полуплоскости, определяемой неравенством $x\geq 0$. Так как переменная y входит в уравнение (7) во второй степени, то из того, что $M(x_0,y_0)\in\gamma$ следует, что $M(x_0,-y_0)\in\gamma$. Следовательно, парабола симметрична относительно оси OF. Точка O пересечения этой оси с параболой называется *вершиной* параболы.

По определению считают, что эксцентриситет параболы $\varepsilon = 1$.

4. Пара пересекающихся прямых.

Рассмотрим линию второго порядка, заданную уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \tag{8}$$

где $a > 0, b > 0$. Уравнение (8) равносильно совокупности: $y - \frac{b}{a}x = 0$, $y + \frac{b}{a}x = 0$. Значит, кривая, заданная уравнением (8), распадается на пару пересекающихся прямых (рис. 4). Эти прямые проходят через начало координат. Оси координат являются осями симметрии пары прямых, а начало координат – их центром симметрии.

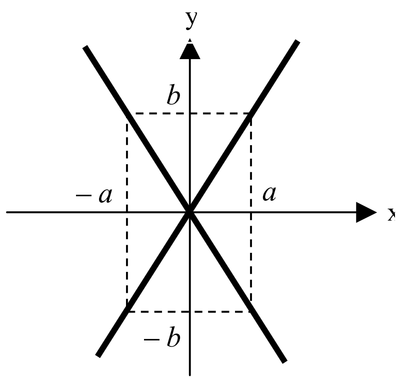

Рис. 4

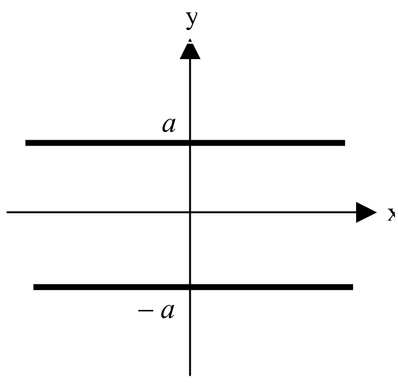

Рис. 5

5. Пара параллельных прямых.

Рассмотрим линию второго порядка, заданную уравнением

$$y^2 - a^2 = 0, \tag{9}$$

где $a > 0$. Уравнение (9) равносильно совокупности: $y - a = 0$, $y + a = 0$. Следовательно, кривая, заданная уравнением (9), распадается на пару параллельных прямых (рис. 5). Эти прямые отстоят на одинаковом расстоянии от оси ox, следовательно, ось ox является их осью симметрии.

6. Пара совпавших прямых.

Рассмотрим линию второго порядка, заданную уравнением

$$y^2 = 0. \tag{10}$$

Уравнение (10) распадается на пару совпавших прямых $y = 0$.

7. Мнимый эллипс.

Кривая второго порядка, которая задается уравнением вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1, \tag{11}$$

где $a > 0, b > 0$, не имеет ни одной вещественной точки и называется *мнимым эллипсом*. Этому уравнению удовлетворяют лишь точки с комплексными координатами.

8. Пара мнимых пересекающихся прямых.

Кривая второго порядка, заданная уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0, \tag{12}$$

где $a>0, b>0$, имеет только одну вещественную точку $(0,0)$ – начало координат. Линия (12) распадается на *пару мнимых пересекающихся прямых*: $\frac{x}{a}+i\frac{y}{b}=0$, $\frac{x}{a}-i\frac{y}{b}=0$.

9. Пара мнимых параллельных прямых.

Кривая, заданная уравнением

$$y^2+a^2=0, \tag{13}$$

где $a>0$, не имеет ни одной вещественной точки. Говорят, что она распадается на *пару мнимых параллельных прямых*: $y=ai$, $y=-ai$.

Теорема о классификации кривых второго порядка

Выше были рассмотрены 9 типов кривых второго порядка. Докажем, что ими исчерпываются все возможные кривые второго порядка, т.е. что уравнение (1) может представлять только кривую одного из указанных типов. Наша задача состоит в том, чтобы путем преобразования координат найти такую систему координат, в которой уравнение (1) имеет более простой (канонический) вид. Для этого будем использовать следующие преобразования системы координат: поворота на угол α и параллельного переноса на вектор (x_0, y_0). Формулы поворота на угол α имеют вид

$$\begin{cases} x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha \\ y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \end{cases}, \tag{14}$$

а формулы параллельного переноса на вектор (x_0, y_0):

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}, \tag{15}$$

где (x, y) и (x', y') – координаты точки в старой и новой системах координат соответственно.

Теорема. *Существует только девять типов кривых второго порядка, примеры которых представлены выше.*

Доказательство. Доказательство разобьем на следующие этапы.

Пусть уравнение кривой имеет вид (1). Докажем сначала, что всегда можно повернуть систему координат так, что в уравнении (1) член с произведением xy исчезнет. Допустим, что $a_{12} \neq 0$. Введем координаты x', y', повернув систему координат на угол α. Тогда подставляя выражения (14) в уравнение (1), найдем коэффициент $2a_{12}'$ при произведении $x'y'$. Он будет иметь вид:

$$2a_{12}' = 2a_{22}\sin\alpha\cos\alpha - 2a_{11}\sin\alpha\cos\alpha + 2a_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) =$$

$$= (a_{22} - a_{11})\sin 2\alpha + 2a_{12}\cos 2\alpha.$$

Так как по предположению $a_{12} \neq 0$, то взяв α так, что

$$\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = ctg 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}},$$

получим $2a_{12}' = 0$. Таким образом, уравнение (1) принимает вид

$$a_{11}'(x')^2 + a_{22}'(y')^2 + 2a_{10}'x' + 2a_{20}'y' + a_{00} = 0. \qquad (16)$$

Докажем теперь, что если в уравнении (16) $a_{11}' \neq 0$ и $a_{22}' \neq 0$, то члены с x' и y' можно исключить переносом начала координат. В самом деле, преобразуем уравнение (16):

$$a_{11}'\left((x')^2 + 2\frac{a_{10}'}{a_{11}'}x' + \left(\frac{a_{10}'}{a_{11}'}\right)^2\right) - \frac{(a_{10}')^2}{a_{11}'} +$$

$$+ a_{22}'\left((y')^2 + 2\frac{a_{20}'}{a_{22}'}y' + \left(\frac{a_{20}'}{a_{22}'}\right)^2\right) - \frac{(a_{20}')^2}{a_{22}'} + a_{00} = 0,$$ следовательно,

$$a_{11}'\left(x' + \frac{a_{10}'}{a_{11}'}\right)^2 + a_{22}'\left(y' + \frac{a_{20}'}{a_{22}'}\right)^2 + \left(a_{00} - \frac{(a_{10}')^2}{a_{11}'} - \frac{(a_{20}')^2}{a_{22}'}\right) = 0.$$

Совершим параллельный перенос системы координат на вектор $\left(-\frac{a_{10}'}{a_{11}'}, -\frac{a_{20}'}{a_{22}'}\right)$ по формулам (15). Предыдущее уравнение примет вид

$$a_{11}'X^2 + a_{22}'Y^2 + a_{00}' = 0, \qquad (17)$$

где

$$X = x' + \frac{a_{10}'}{a_{11}'},\ a_{00}' = a_{00} - \frac{(a_{10}')^2}{a_{11}} - \frac{(a_{20}')^2}{a_{22}},$$

$$a_{11}'\left(x' + \frac{a_{10}'}{a_{11}'}\right)^2 + a_{22}'\left(y' + \frac{a_{20}'}{a_{22}'}\right)^2 + \left(a_{00} - \frac{(a_{10}')^2}{a_{11}} - \frac{(a_{20}')^2}{a_{22}}\right) = 0.$$

Если $a_{11}' \neq 0$, то член с x' можно исключить переносом начала координат по формулам: $x' = X - \frac{a_{10}'}{a_{11}'}$, $y' = Y$. Получим

$$a_{11}'X^2 + a_{22}'Y^2 + 2a_{20}'Y + a_{00}' = 0. \qquad (18)$$

Замечание. Из уравнения (18) следует, что ось oy является осью симметрии кривой второго порядка. Тем самым мы доказали, что любая кривая второго порядка имеет ось симметрии.

Аналогичные рассуждения можно провести в случае, когда $a_{22}' \neq 0$.

Теперь рассмотрим уравнение (17), записав его для простоты в виде: $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{00} = 0$.

I. Пусть $a_{00} \neq 0$. Тогда уравнение (17) можно записать в виде

$$Ax^2 + By^2 = 1, \text{ где } A = -\frac{a_{11}}{a_{00}},\ B = -\frac{a_{22}}{a_{00}}. \qquad (19)$$

Здесь есть следующие возможности:

1) Пусть $A > 0, B > 0$. Тогда полагая, $A = \frac{1}{a^2}$, $B = \frac{1}{b^2}$, уравнение (19) приведем к виду $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, т.е. кривая – эллипс.

2) Пусть $A < 0, B < 0$. Тогда равенство (19) невозможно. Линия не имеет ни одной вещественной точки. Полагая $A = -\frac{1}{a^2}$, $B = -\frac{1}{b^2}$,

уравнение (19) приведем к виду $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$, т.е. кривая – мнимый эллипс.

3) Пусть A и B разных знаков. Например, $A>0, B<0$. Тогда обозначим $A=\frac{1}{a^2}$, $B=-\frac{1}{b^2}$. Уравнение (19) примет вид $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. В этом случае общее уравнение определяет гиперболу. (В случае, когда $A<0, B>0$ поступаем аналогично).

II. Пусть $a_{00}=0$. Тогда уравнение (17) сводится к уравнению

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2=0. \qquad (20)$$

Возможны два случая.

1) Пусть a_{11}, a_{22} разных знаков. Например, $a_{11}>0, a_{22}<0$. Тогда, полагая $a_{11}=\frac{1}{a^2}$, $a_{22}=-\frac{1}{b^2}$, уравнение (20) принимает вид $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$, т.е. $\left(\frac{b}{a}x-y\right)\left(\frac{b}{a}x+y\right)=0$. Таким образом, кривая распадается на пару пересекающихся прямых.

2) Пусть теперь a_{11}, a_{22} одного знака. Тогда так же полагая $a_{11}=\frac{1}{a^2}$, $a_{22}=\frac{1}{b^2}$, уравнение (20) преобразуется в уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$. Эта кривая представляет собой пару мнимых пересекающихся прямых.

Рассмотрим теперь уравнение (18) в случае, когда $a_{22}{}' \neq 0$, $a_{11}{}'X^2+a_{22}{}'Y^2+2a_{10}{}'X+a_{00}{}'=0$. Пусть $a_{11}{}'=0$. Разделим обе части уравнения на $a_{22}{}' \neq 0$, получаем:

$$Y^2+2\frac{a_{10}'}{a_{22}'}X+\frac{a_{00}'}{a_{22}'}=0. \qquad (21)$$

I. Пусть $a_{10}'\neq 0$. Запишем уравнение (21) в виде $Y^2+2\frac{a_{10}'}{a_{22}'}\left(X+\frac{a_{00}'}{2a_{10}'}\right)=0$. Совершим преобразование параллельного переноса системы координат по формулам: $X=x-\frac{a_{00}'}{2a_{10}'}$, $Y=y$ и обозначим $p=-\frac{a_{10}'}{a_{22}'}$. В новой системе координат уравнение кривой будет записано в виде $y^2=2px$, то есть в этом случае кривая является параболой с осью симметрии Ox.

II. Пусть $a_{10}'=0$. Тогда уравнение (21) принимает вид

$Y^2+\frac{a_{00}'}{a_{22}'}=0$. Запишем его для простоты следующим образом

$$y^2+q=0. \qquad (22)$$

Рассмотрим следующие случаи:

1) $q<0$. Полагая, что $q=-a^2$, получаем из уравнения (22) следующее уравнение $y^2-a^2=0$, которое определяет пару параллельных прямых с осью симметрии Ox.

2) $q=0$. Уравнение (22) принимает вид $y^2=0$, что определяет пару совпавших прямых.

3) $q>0$. Положим $q=a^2$. Тогда равенство (22) невозможно, и уравнение $y^2+a^2=0$ определяет пару мнимых параллельных прямых.

Все возможные случаи нами разобраны. Итак, существует девять типов кривых второго порядка.

Теорема доказана.

Вопросы для самоконтроля

1. Что понимается под линией порядка k?
2. Сформулируйте определение линии второго порядка.
3. Дайте определения эллипса, фокального расстояния эллипса, фокальных радиусов эллипса.
4. Какое уравнение эллипса называется каноническим? Выведите его.
5. Какие свойства эллипса следуют из его канонического уравнения?
6. Дайте определения гиперболы, фокального расстояния гиперболы, фокальных радиусов гиперболы.
7. Какое уравнение гиперболы называется каноническим? Выведите его.
8. Какие свойства гиперболы следуют из ее канонического уравнения?
9. Какая гипербола называется равносторонней?
10. Дайте определения параболы.
11. Какое уравнение параболы называется каноническим? Выведите его.
12. Какие свойства параболы следуют из ее канонического уравнения?
13. Чему равен эксцентриситет эллипса, гиперболы, параболы?
14. Приведите примеры линий второго порядка, отличные от эллипса, гиперболы и параболы.

15. Сколько типов кривых второго порядка существует? Докажите это.

16. Можно ли сказать, что любая кривая второго порядка имеет ось симметрии? Почему?

Параметрические уравнения эллипса, гиперболы и параболы

а) В декартовой система координат эллипс определяется уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. В силу этого равенства можем обозначить $\frac{x}{a}=\cos t$, $\frac{y}{b}=\sin t$. Тогда уравнения

$$x=a\cos t,\ y=b\sin t,\ \text{где}\ -\pi<t\le\pi,$$

называются *параметрическими уравнениями эллипса*.

б) *Параметрические уравнения гиперболы* в декартовой системе координат имеют вид

$$x=\varepsilon\, a\, ch t,\ y=b\, sh t,\ \text{где}\ \varepsilon=\pm 1,\ -\infty<t<+\infty.$$

Здесь $ch\, t=\frac{1}{2}\left(e^t+e^{-t}\right)$, $sh\, t=\frac{1}{2}\left(e^t-e^{-t}\right)$ – гиперболические косинус и синус соответственно.

в) Парабола в декартовой системе координат задается следующими уравнениями $x=2pt^2$, $y=2pt$, $-\infty<t<+\infty$. Эти уравнения называются *параметрическими уравнениями параболы*.

Общая теория кривых второго порядка

Пусть линия второго порядка γ в декартовой системе координат задана общим уравнением (1).

1. Пересечение линии второго порядка с прямой.

Пусть в декартовой системе координат прямая l задана параметрическими уравнениями

$$x = x_0 + p_1 t,\ y = y_0 + p_2 t. \tag{23}$$

Прямая l проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно вектору $\overline{p}(p_1, p_2)$. Чтобы найти координаты точек пересечения прямой l с линией γ, надо выражения для x и y из уравнений (23) подставить в уравнение (1). При этом после приведения подобных членов получим:

$$Pt^2 + 2Qt + R = 0, \tag{24}$$

где

$$P = a_{11}p_1^{\ 2} + 2a_{12}p_1p_2 + a_{22}p_2^{\ 2}, \tag{25}$$

$$Q = a_{11}p_1x_0 + a_{12}(p_1 + p_2) + a_{22}p_2y_0 + a_{10}p_1 + a_{20}p_2, \qquad 26)$$

$$R = a_{11}x_0^{\ 2} + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^{\ 2} + 2a_{10}x_0 + 2a_{20}y_0 + a_{00}. \tag{27}$$

Каждому корню уравнения (24) соответствует точка пересечения. Обозначим через D дискриминант уравнения (24): $D = 4(Q^2 - PR)$.

Если $P \neq 0$ в зависимости от значения дискриминанта δ возможны следующие три случая взаимного расположения кривой второго порядка и прямой:

а) если $D > 0$ – две различные действительные точки пересечения, б) если $D = 0$ – пара совпавших действительных точек,

в) если $D < 0$ – две мнимые комплексно-сопряженные точки.

Если $P = 0$, то уравнение (24) принимает вид $2Qt + R = 0$. В этом случае возможны следующие случаи взаимного расположения прямой и кривой второго порядка:

а) если $Q \neq 0$ – единственная точка пересечения,

б) если $Q = 0, R \neq 0$ – точек пересечения нет,

в) если $Q = 0, R = 0$ – прямая $l \subset \gamma$.

В силу (25), коэффициент P в уравнении (24) зависит только от направления прямой l. Значит, если для некоторого вектора $\overline{p}(p_1, p_2)$: $P \neq 0$, то все прямые, параллельные вектору $\overline{p}$, пересекают линию в двух точках (вещественных различных, мнимых комплексно-сопряженных, двух совпавших). Если $P = 0$, то либо $l \subset \gamma$, либо прямая l пересекает линию γ не более чем в одной точке.

2. Асимптотические направления.

Направление, определяемое ненулевым вектором $\overline{p}$, называется *асимптотическим направлением* относительно линии второго порядка γ, если прямая, параллельная вектору $\overline{p}$, либо имеет с линией не более одной общей точки, либо содержится в линии γ. Можно доказать (см., например, кн. [2]), что ненулевой вектор $\overline{p}(p_1, p_2)$ определяет асимптотическое направление тогда и только тогда, когда

$$a_{11}p_1^2 + 2a_{12}p_1p_2 + a_{22}p_2^2 = 0. \qquad (28)$$

Несмотря на то, что нулевой вектор удовлетворяет соотношению (28), он не определяет асимптотического направления, так как нулевой вектор вообще не определяет никакого направления. Поэтому в определении асимптотического направления предполагается, что $\overline{p} \neq 0$.

Можно доказать, что если линия γ задана общим уравнением (1) и $\delta = a_{11}a_{22} - a_{12}{}^{2}$, то:

а) если $\delta > 0$, не существует асимптотических направлений относительно линии. Линия γ в этом случае называется линией *эллиптического типа*. Легко проверить, что к линиям эллиптического типа относятся эллипс, мнимый эллипс и пара мнимых пересекающихся прямых.

б) если $\delta < 0$, существует два асимптотических направления, угловые коэффициенты которых находятся следующим образом: $k_{1,2} = \dfrac{-a_{12} \pm \sqrt{-\delta}}{a_{22}}$, линия γ в этом случае называется линией *гиперболического типа*. К линиям гиперболического типа относятся гипербола и пара пересекающихся прямых.

в) $\delta = 0$, существует одно асимптотическое направление. В этом случае линия γ называется линией *параболического типа*. Линиям параболического типа являются парабола, пара параллельных прямых, пара совпавших прямых, пара мнимых параллельных прямых.

3. Центр линии второго порядка.

Точка C называется *центром* линии второго порядка, если она является центром симметрии этой линии.

Для того, чтобы точка $C(x_0, y_0)$ была центром симметрии линии второго порядка, заданной уравнением (1), необходимо и достаточно, чтобы пара чисел x_0, y_0 была решением системы:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{10} = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{20} = 0 \end{cases}. \tag{29}$$

Существование и число центров линии γ зависит от наличия и числа решений этой системы. Пусть r и R – ранги матриц

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \end{pmatrix}$$

соответственно. Возможны следующие случаи:

1. $r = R = 2$ – система (29) имеет единственное решение. Значит, линия γ имеет один и только один центр. Такие линии называются *центральными*. К относятся эллипс, гипербола, пара пересекающихся прямых, мнимый эллипс, пара мнимых пересекающихся прямых.
2. $r = R = 1$. Система (29) имеет бесконечное множество решений, а линия γ – прямую центров. Эта прямая задается любым из уравнений системы (29). Такими линиями будут пара параллельных прямых, пара мнимых параллельных прямых, пара совпавших.
3. $r = 1, R = 2$. Система несовместна, линия γ центров не имеет, например, парабола.

Линии, не имеющие прямую центров или имеющие прямую центров, называются нецентральными. Центральными линиями являются линии эллиптического и гиперболического типа (для них $\delta \neq 0$, а, значит, $r = 2$). Линии параболического типа являются нецентральными.

Для того, чтобы начало координат было центром линии второго порядка, необходимо и достаточно, чтобы

$$a_{10} = 0,\ a_{20} = 0.$$

4. Касательная к линии второго порядка.

Точка M_0 линии второго порядка γ называется *особой*, если она является центром линии. Точка $M_0 \in \gamma$, отличная от особой, называется *обыкновенной*.

Прямая, проходящая через обыкновенную точку M_0 линии второго порядка γ, называется *касательной* к этой линии в точке M_0, если она пересекает линию γ в двух совпавших точках либо принадлежит ей.

В каждой обыкновенной точке линии второго порядка существует одна и только одна касательная. Уравнение касательной в точке M_0 линии, заданной уравнением (1), имеет вид

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10})x + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20})y +$$
$$+ (a_{10}x_0 + a_{20}y_0 + a_{00}) = 0 .(30)$$

Найдем уравнение касательной, проведенной к эллипсу γ: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ через точку $M_0(x_0, y_0)$. Из уравнения эллипса следует, что $a_{11} = \dfrac{1}{a^2}$, $a_{22} = \dfrac{1}{b^2}$, $a_{00} = -1$, все остальные коэффициенты равны нулю. Подставим значения коэффициентов в уравнение касательной (30), получим уравнение касательной в точке (x_0, y_0) к эллипсу, заданному каноническим уравнением

$$\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y = 1 .$$

Аналогично, подставляя в уравнение (30) соответствующие значения коэффициентов, легко найти уравнения касательных в точке (x_0, y_0) к гиперболе и параболе, заданных каноническими уравнениями. Уравнения записываются соответственно так:

$$\frac{x_0}{a^2}x - \frac{y_0}{b^2}y = 1,$$

$$y_0 y = p(x_0 + x).$$

5. Диаметры линии второго порядка.

Хордой линии второго порядка γ называется отрезок, концы которого принадлежат этой линии. Если вектор $\overline{p} = (p_1, p_2)$ – вектор неасимптотического направления относительно линии γ, заданной уравнением (1), то точка $M_0(x_0, y_0)$ является серединой некоторой хорды, параллельной вектору $\overline{p}$, тогда и только тогда когда

$$\left(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10}\right)p_1 + \left(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20}\right)p_2 = 0. \qquad (31)$$

В силу (31) , множество середин всех хорд линии (1), параллельных вектору $\overline{p} = (p_1, p_2)$ неасимптотического направления, есть прямая, заданная уравнением

$$\left(a_{11}p_1 + a_{12}p_2\right)x + \left(a_{21}p_1 + a_{22}p_2\right)y + a_{10}p_1 + a_{20}p_2 = 0. \qquad (32)$$

Эта прямая называется *диаметром, сопряженным вектору* $\overline{p} = (p_1, p_2)$.

Диаметры линии второго порядка удовлетворяют следующим свойствам:

- если линия второго порядка имеет центры, то каждый центр принадлежит любому диаметру линии,
- любая прямая, проходящая через центр центральной линии второго порядка, является диаметром,
- если нецентральная линия второго порядка имеет прямую центров, то эта прямая является ее единственным диаметром,
- любой диаметр нецентральной линии второго порядка имеет асимптотическое направление.

Из последних двух свойств следует, что любые два диаметра нецентральной линии второго порядка, не имеющей центров, параллельны.

6. Сопряженные диаметры. Сопряженные направления.

Оказывается, если диаметр d_1 центральной линии второго порядка является множеством середин хорд, параллельных диаметру d_2, то диаметр d_2 является множеством середин хорд, параллельных диаметру d_1.

Два диаметра центральной линии второго порядка называются *сопряженными*, если каждый из них делит пополам хорды, параллельные другому диаметру.

Направления ненулевых векторов $\overline{p}=(p_1,p_2)$ и $\overline{q}=(q_1,q_2)$ называются *сопряженными* относительно линии второго порядка γ, заданной уравнением (1), если выполняется равенство

$$a_{11}p_1q_1+a_{12}p_1q_2+a_{21}p_2q_1+a_{22}p_2q_2=0. \qquad (33)$$

Понятие сопряженности направлений обладает следующими свойствами:

- для любого вектора $\overline{p}$ неасимптотического направления существует одно и только одно сопряженное с ним направление,
- сопряженные диаметры линии второго порядка имеют сопряженные направления,
- вектор $\overline{p}$ асимптотического направления является самосопряженным, при этом для центральной линии второго порядка $(\delta\neq 0)$, кроме направления вектора $\overline{p}$, нет других направлений, сопряженных с $\overline{p}$; в случае нецентральной линии $(\delta=0)$ любое направление плоскости сопряжено с направлением вектора $\overline{p}$.

Из этих свойств следует, что понятие сопряженности относительно линии второго порядка не зависит от выбора системы координат.

7. Главные направления.

Направление называется *главным* относительно линии второго порядка, если оно сопряжено с перпендикулярным ему направлением.

Пусть в прямоугольной системе координат линия второго порядка γ задана общим уравнением (1). Если направление, определяемое вектором $\overline{p}(p_1, p_2)$, является главным относительно γ, то оно сопряжено перпендикулярному ему направлению $\overline{q}(-p_2, p_1)$. Условие сопряженности (33) направлений можно записать так: $\begin{vmatrix} -(a_{21}p_1 + a_{22}p_2) & a_{11}p_1 + a_{12}p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} = 0$, и это условие должно удовлетворяться при $q_1 = -p_2$, $q_2 = p_1$. Поэтому

$$a_{11}p_1 + a_{12}p_2 = \lambda p_1,$$

$$a_{21}p_1 + a_{22}p_2 = \lambda p_2,$$

где $\lambda \in \Re$. Полученные равенства можно записать в виде однородной системы уравнений

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)p_1 + a_{12}p_2 = 0 \\ a_{21}p_1 + (a_{22} - \lambda)p_2 = 0 \end{cases}.$$

Эта система, позволяющая найти главные направления, имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель этой системы равен нулю. Значит, λ удовлетворяет условию

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2 = 0. \qquad (34)$$

Дискриминант уравнения (34), которое называется *характеристическим*, имеет значение

$$(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}{}^2 \geq 0.$$

В случае, когда дискриминант отличен от нуля, уравнение (34) имеет два различных действительных корня – λ_1, λ_2. В этом случае существует единственная пара главных направлений. λ_1, λ_2 являются собственными значениями матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, а векторы главных направлений являются собственными векторами этой матрицы.

В случае, когда определитель уравнения (34) равен нулю, имеем: $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = 0$. Уравнение (34) имеет равные корни $\lambda_1 = \lambda_2 = a_{11} = a_{22}$. Условие сопряженности направлений $\overline{p}, \overline{q}$ совпадает с условием их перпендикулярности. Поэтому в этом случае любое направление является главным. С помощью переноса начала координат уравнение линии можно привести к виду $x^2 + y^2 = a^2$. Значит, линия γ, относительно которой любое направление является главным, будет окружностью действительного $(a > 0)$, мнимого $(a < 0)$ или нулевого $(a = 0)$ радиуса.

8. Главные диаметры.

Диаметр линии второго порядка γ называется *главным*, если он перпендикулярен сопряженным хордам. Из определения следует, что главный диаметр линии γ является осью симметрии, поэтому его также называют ее осью этой линии. Поскольку направление диаметра всегда сопряжено направлению соответствующих ему хорд, то направление главного диаметра – главное.

Центральная линия второго порядка, отличная от окружности имеет два и только два главных диаметра, для окружности любой диаметр является главным.

Нецентральная линия второго порядка имеет только один главный диаметр.

Точки пересечения линии второго порядка с главными диаметрами называются *вершинами* этой линии.

Классификация линий второго порядка, основанная на инвариантах

Пусть линия второго порядка определяется общим уравнением (1). Рассмотрим следующие функции от ее коэффициентов:

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ S = a_{11} + a_{22}, \ \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \\ a_{01} & a_{02} & a_{00} \end{vmatrix},$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{10} \\ a_{01} & a_{00} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{20} \\ a_{02} & a_{00} \end{vmatrix}.$$

Непосредственными вычислениями можно доказать, что значения S, δ, Δ не меняются при параллельном переносе и повороте осей координат. Поэтому S, δ, Δ называются основными *инвариантами* линии второго порядка. Значение Δ' не меняется при повороте осей координат, Δ' называется *полуинвариантом*. Выше были определены типы линий в зависимости от значения инварианта δ. Напомним, что в случае, когда $\delta > 0$, линия второго порядка является линией эллиптического типа, если $\delta < 0$ – гиперболического типа, если $\delta = 0$ – параболического типа.

Линия второго порядка γ, заданная общим уравнением (1), называется *невырожденной* (*нераспадающейся*), если $\Delta \neq 0$, и *вырожденной* (*распадающейся*) в противном случае. Нетрудно проверить, что невырожденными являются такие линии второго порядка, как действительный и мнимый эллипс, гипербола и парабола. Остальные линии второго порядка являются вырожденными.

Инвариантные признаки линий второго порядка

№	Тип линии	Признак линии			
1	Эллипс	$\Delta \neq 0$	$\delta > 0$	$\Delta \cdot S < 0$	
2	Мнимый эллипс	$\Delta \neq 0$	$\delta > 0$	$\Delta \cdot S > 0$	
3	Гипербола	$\Delta \neq 0$	$\delta < 0$		
4	Парабола	$\Delta \neq 0$	$\delta = 0$		
5	Пара пересекающихся прямых	$\Delta = 0$	$\delta < 0$		
6	Пара мнимых пересекающихся прямых	$\Delta = 0$	$\delta > 0$		
7	Пара параллельных прямых	$\Delta = 0$	$\delta = 0$		$\Delta' < 0$
8	Пара совпавших прямых	$\Delta = 0$	$\delta = 0$		$\Delta' = 0$
9	Пара мнимых параллельных прямых	$\Delta = 0$	$\delta = 0$		$\Delta' > 0$

Известно [4], что инварианты S, δ, Δ невырожденных линии характеризуют ее с точностью до расположения на плоскости.

При помощи предложенной таблицы можно определить тип линии второго порядка. Для того, чтобы записать теперь каноническое уравнение линии, нужно провести дополнительные исследования. Пусть λ_1, λ_2 – корни характеристического уравнения (34). Тогда существует некоторая (каноническая) система координат $O'XY$, в которой уравнение кривых второго порядка записывается в виде:

1. Для линий непараболического типа (эллипс и мнимый эллипс, гипербола, пара пересекающихся прямых, пара мнимых пересекающихся прямых):

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0 .$$

Заметим, что сравнивая это уравнение с каноническим уравнением соответствующей линии, легко найти связь между числами a и b, входящими в канонические уравнения, и инвариантами. Например, для эллипса полуоси a и b имеют следующие выражения

$$a = \sqrt{\frac{-\Delta}{\delta\,\lambda_1}}\ ,\ b = \sqrt{\frac{-\Delta}{\delta\,\lambda_2}} .$$

2. Для линий параболического уравнения (парабола, пара параллельных прямых, пара мнимых параллельных прямых, пара совпавших прямых):

$$\lambda_1 X^2 \pm 2\sqrt{\frac{-\Delta}{S}} Y = 0 .$$

Заметим, что если кроме поворота и параллельного переноса использовать осевую симметрию, то можем поменять направление оси $O'Y$ (рассмотрели осевую симметрию относительно оси $O'X$). Используя при необходимости это преобразование, уравнение линии параболического типа можно записать в виде

$$\lambda_1 X^2 - 2\sqrt{\frac{-\Delta}{S}} Y = 0 .$$

Итак, теория инвариантов позволяет определить тип линии и записать ее каноническое уравнение. Но, используя инварианты, мы не можем описать взаимное расположение исходной системы координат Oxy и канонической $O'XY$. Но это является скорее достоинством, нежели недостатком метода инвариантов, так как инвариант – это величина, не зависящая от выбора системы координат. Если все же требуется определить взаимное расположение систем координат Oxy и $O'XY$, т.е. если мы хотим построить линию в исходной системе координат Oxy, то нам потребуется определить угол поворота α и вектор переноса γ. Угол α определяется из уравнения $ctg2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}$. Если $a_{12} = 0$, то поворот не требуется. В качестве координат (x_0, y_0) вектора $\overrightarrow{OO'}$ надо выбрать:

а) для центральных линий – координаты центра, т.е. единственное решение системы (29);

б) для нецентральных линий, имеющих прямую центров, – координаты одного из центров, т.е. любое частное решение системы (29);

в) для параболы – вершину, т.е. точку пересечения параболы с ее единственным главным диаметром, который является ее осью симметрии.

Вопросы для самоконтроля

1. Какое уравнение называется общим уравнением линии второго порядка?
2. Какое направление относительно линии второго порядка называется асимптотическим? Запишите условие, при котором вектор $\overline{p}$ определяет асимптотическое направление относительно линии второго порядка.

3. Какие линии второго порядка называются линиями эллиптического, гиперболического и параболического типа? приведите их примеры.
4. Дайте определение центра линии второго порядка. Как найти центр линии второго порядка?
5. Какие линии второго порядка называются центральными? Приведите примеры центральных и нецентральных линий второго порядка.
6. Сформулируйте условия, необходимые и достаточные для того, чтобы начало координат было центром линии второго порядка. Докажите.
7. Какая точка линии второго порядка называется особой, обыкновенной?
8. Дайте определение и напишите уравнение касательной к линии второго порядка.
9. Напишите уравнение касательной к эллипсу, гиперболе и параболе, которые заданы каноническими уравнениями.
10. Дайте определение хорды, диаметра линии второго порядка. Какие диаметры называются сопряженными? Какими свойствами обладают диаметры?
11. Можно ли сказать, что понятие сопряженности не зависит от выбора координат?
12. Какие направления относительно линии второго порядка называются главными?
13. Какой диаметр линии второго порядка называется главным?
14. Сколько главных диаметров имеет окружность?

15. Сколько главных диаметров имеет центральная линия второго порядка, отличная от окружности?
16. Сколько главных диаметров имеет нецентральная линия второго порядка?
17. Что является инвариантами линии второго порядка?
18. Какие линии второго порядка называются невырожденными, вырожденными? Приведите примеры.
19. Сформулируйте инвариантные признаки линий второго порядка.

Примеры. В качестве примера рассмотрим следующее задание: определить вид линии второго порядка, заданной общим уравнением. Дать полную характеристику линии. Для эллипса и гиперболы: а) длины осей, б) эксцентриситет, в) фокальный параметр, г) координаты центра, фокусов вершин, д) уравнения осей, директрис, асимптот (для гиперболы) в канонической системе координат. Для параболы: а) эксцентриситет и фокальный параметр, б) координаты вершин и фокуса, в) уравнение оси и директрисы.

1. $\gamma : 5x^2 + 26xy + 5y^2 - 10\sqrt{2}x - 26\sqrt{2}y + 82 = 0$.

Используя инвариантные признаки линии второго порядка, определим тип линии. Вычислим главные инварианты линии γ:

$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 13 & -5\sqrt{2} \\ 13 & 5 & -13\sqrt{2} \\ -5\sqrt{2} & -13\sqrt{2} & 82 \end{vmatrix} = -10368 \neq 0$. Отсюда следует, что линия γ – невырожденная. $\delta = \begin{vmatrix} 5 & 13 \\ 13 & 5 \end{vmatrix} = -144 < 0$, т.е. линия γ – линия гиперболического типа. По инвариантным признакам находим, что линия γ является гиперболой.

Найдем ее каноническое уравнение. Для этого необходимо решить ее характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 5-\lambda & 13 \\ 13 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$. Это уравнение имеет корни: $\lambda_1 = -8, \lambda_2 = 18$. Тогда в новой системе координат $O'XY$ уравнение линии имеет вид: $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0$, с учетом полученных значений получим: $-8X^2 + 18Y^2 + 72 = 0$, т.е.

$$\gamma : \frac{X^2}{9} - \frac{Y^2}{4} = 1.$$

Из этого уравнения следует, что γ – это гипербола с действительной осью, $O'X$ $a = 3, b = 2$. Дадим характеристику линии.

а) вещественная ось равна 6, мнимая ось – 4.

б) Эксцентриситет гиперболы равен $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3}$.

в) Фокальный параметр $p = \frac{b^2}{a} = \frac{4}{3}$.

г) В канонической системе координат координаты центра, фокусов, вершин имеют вид: центр $O' = (0,0)$; координаты фокусов $F_1 = (\sqrt{13},0)$, $F_2 = (-\sqrt{13},0)$; координаты вершин $A_1 = (3,0)$, $A_2 = (-3,0)$.

д) Уравнение действительной оси: $Y = 0$, уравнение мнимой оси: $X = 0$. Уравнения директрис: $X - \frac{9}{\sqrt{13}} = 0$, $X + \frac{9}{\sqrt{13}} = 0$.

Уравнения асимптот в канонической системе координат: $Y = \frac{2}{3}X$, $Y = -\frac{2}{3}X$.

Если требуется определить взаимное расположение систем координат Oxy и $O'XY$, то направления осей $O'X$ и $O'Y$ определяются векторами главных направлений, а вектор переноса $\overrightarrow{OO'} = (x_0, y_0)$, где (x_0, y_0) – координаты центра линии.

ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Подобно кривой второго порядка, *поверхностью второго порядка* называется множество точек поверхности $M(x, y, z)$, координаты x, y и z которых удовлетворяют уравнению

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z + a_{00} = 0, \qquad (1)$$

где $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{10}, a_{20}, a_{30}, a_{00}$ – действительные числа, причем $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ одновременно не равны нулю.

Задача, как и в случае кривых второго порядка, состоит в том, чтобы выяснить, какие есть типы поверхностей второго порядка, как они различаются геометрически. Методом изучения поверхностей второго порядка является метод сечения. Суть этого метода состоит в том, что рассматриваются сечения поверхности плоскостями, параллельными координатным, либо самими координатными плоскостями. Затем по виду сечений делается вывод о форме самой поверхности. Оказывается, существует 17 разных типов поверхностей второго порядка. Перечислим их, указав уравнения, которыми они задаются в подходящих (канонических) координатах. Эти уравнения называются *каноническими*.

1. Эллипсоид.

Эллипсоидом (рис.1) называется поверхность второго порядка, которая в подходящей системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (2)$$

В частности, если $a=b=c$, получаем сферу $x^2+y^2+z^2=a^2$ с центром в начале координат и радиусом a. Из уравнения (2) следует, что $|x|\le a$, $|y|\le b$, $|z|\le c$. Это означает, что эллипсоид содержится в прямоугольном параллелепипеде, задаваемом данными неравенствами. Числа a,b,c называются полуосями эллипсоида. Если все они различны, то эллипсоид называется трехосным. Точки пересечения эллипсоида с осями координат: $A_1(a,0,0)$, $A_2(-a,0,0)$, $B_1(0,b,0)$, $B_2(0,-b,0)$, $C_1(0,0,c)$, $C_2(0,0,-c)$ называются вершинами. Из уравнения (2) следует, что оси канонической системы координат являются осями симметрии эллипсоида, начало координат – его центром симметрии, а координатные плоскости – плоскостями симметрии.

Сечение эллипсоида (2) плоскостью $z=0$ представляет эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

То же верно для сечений плоскостями $x=0$, $y=0$. Эллипсоид ограничен, поэтому пересечение эллипсоида с плоскостью, если он вообще имеет с ней общие точки, будет либо эллипс, либо одна точка. В последнем случае плоскость – касательная к эллипсоиду.

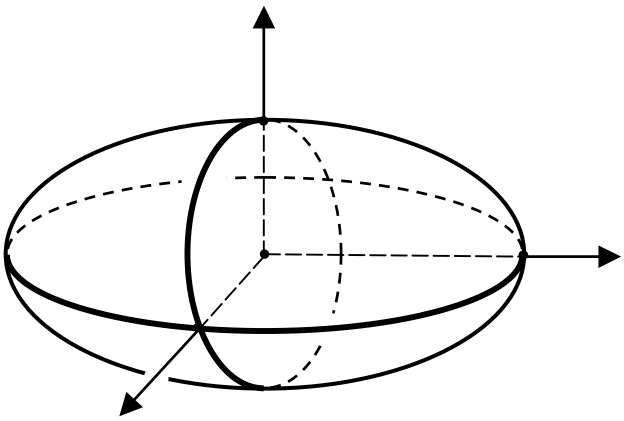

Рис.1

2. Однополостный гиперболоид.

Однополостным гиперболоидом (рис.2) называется поверхность второго порядка, которая в подходящих координатах определяется каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (3)$$

Так как x, y, z входят в уравнение в квадратах, то координатные плоскости являются плоскостями симметрии, оси координат – осями симметрии, а начало координат – центром симметрии однополостного гиперболоида. При этом оси $ox\ (y=0, z=0)$, $oy\ (x=0, z=0)$ пересекают однополостный гиперболоид соответственно в точках $A_1(a,0,0)$, $A_2(-a,0,0)$, $B_1(0,b,0)$, $B_2(0,-b,0)$. Ось $oz\ (y=0, x=0)$ однополостного гиперболоида не пересекает.

Если рассмотреть сечение однополостного гиперболоида плоскость $XOY(z=0)$ и плоскостями, параллельными ей $z=h$, то в сечении получается эллипс. Эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ называется горловым. Если рассмотреть сечение однополостного гиперболоида плоскостью $XOZ(y=0)$ и плоскостями, параллельными ей $y=h, (h \neq \pm b)$, то в сечении получается гипербола.

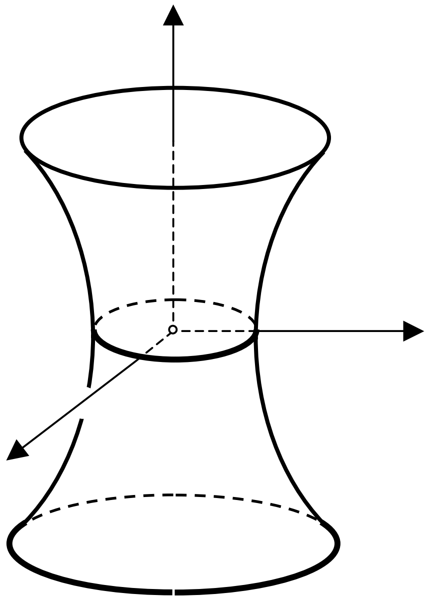

Рис.2

При $h=\pm b$ плоскость $y=h$ пересекает однополостный гиперболоид по паре пересекающихся прямых $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$. Заметим, что если $|h|<b$, то гипербола, получающаяся в сечении, будет иметь действительную ось ox, а при $|h|>b$ – ось oz.

3. Двуполостный гиперболоид.

Двуполостным гиперболоидом (рис.3) называется поверхность второго порядка, которая в подходящих координатах определяется каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \qquad (4)$$

Так как переменные x, y, z входят в уравнение (4) в квадратах, то координатные плоскости – это плоскости симметрии, координатные оси – оси симметрии, начало координат – центр симметрии, причем ось $Oz: x=0, y=0$ пересекает двуполостный гиперболоид в точках $C_1(0,0,c), C_2(0,0,-c)$. Точки C_1, C_2 – вершины двуполостного гиперболоида (4). Оси Ox, Oy не пересекают двуполостного гиперболоида (4) и называются мнимыми.

Рассмотрим сечение двуполостного гиперболоида (4) плоскостями $z=h$. Имеем: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1$. Если $|h|<c$, то плоскости $z=h$ с двуполостным гиперболоидом (4) общих вещественных точек не имеют. При $h=\pm c$ – касаются двуполостного гиперболоида в его вершинах. При $|h|>c$ – пересекают по эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)}=1.$$

В сечении плоскостями $y=h$ получаются гиперболы.

4. Конус.

Уравнение *конуса* (рис.4) в прямоугольной декартовой канонической системе координат имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \qquad (5)$$

Эта поверхность состоит из прямых, пересекающихся в одной точке – вершине конуса. Действительно, если x_0, y_0, z_0 удовлетворяют уравнению (5), то ему удовлетворяют также $x = x_0 t$, $y = y_0 t$, $z = z_0 t$ при любом t. Эти равенства с параметром t представляют прямую (если x_0, y_0, z_0 одновременно не равны нулю), проходящую через начало координат и точку (x_0, y_0, z_0). Значит, вместе с любой своей точкой (x_0, y_0, z_0) конус содержит и всю такую прямую. Он состоит из таких прямых – образующих конуса.

Можно показать, что плоскость, проходящая через вершину конуса, либо не пересекает его в другой точке, либо пересекает по двум образующим, либо касается вдоль образующей. Любая плоскость, параллельная этим плоскостям, в первом случае пересекает конус по эллипсу, во втором случае – пересекает по гиперболе, в третьем случае – по параболе. Сказанное объясняет тот факт, что часто эллипс, гиперболу, параболу называют коническими сечениями.

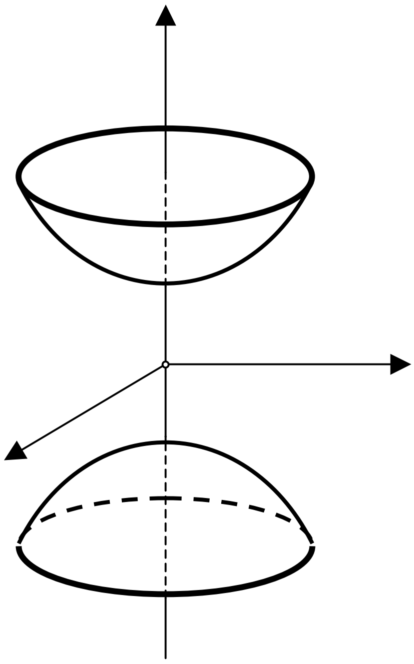

Рис.3

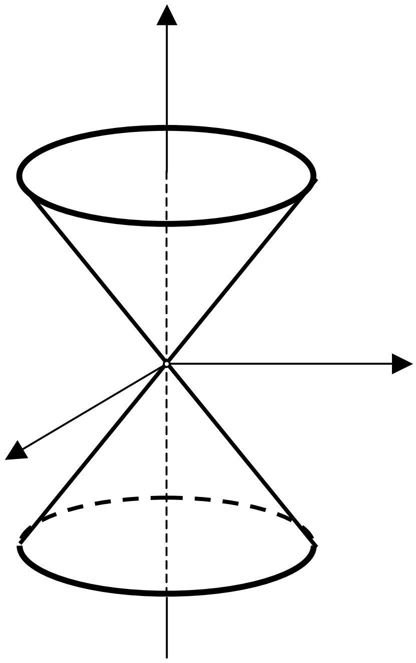

Рис.4

5. Эллиптический параболоид.

Эллиптическим параболоидом (рис.5) называется поверхность второго порядка, которая в канонической системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z. \qquad (6)$$

Из уравнения (6) следует, что осями симметрии эллиптического параболоида (6) являются плоскости xOz и yOz. Ось Oz – единственная ось симметрии. Ее называют осью эллиптического параболоида. Эта ось пересекает эллиптический параболоид (6) в точке $(0,0,0)$, которая называется вершиной эллиптического параболоида. В сечении эллиптического параболоида (6) плоскостями $z = h$, 1) если $h > 0$, получаются эллипсы $\frac{x^2}{2ha^2} + \frac{y^2}{2hb^2} = 1$, 2) если $h = 0$, то уравнение $z = 0$ определяет плоскость xOy, которая касается эллиптического параболоида в его вершине, 3) если $h < 0$, эллиптический параболоид не пересекается с плоскостями $z = h$.

Сечения плоскостями $y = h$ представляют собой параболы $x^2 = 2a^2 z - \frac{a^2 h}{b^2}$, которые лежат в параллельных плоскостях, отличаются лишь положением в пространстве. Оси всех этих парабол лежат в плоскости xOz. Аналогично, в сечении плоскостями $x = h$ получим параболы $y^2 = 2b^2 z - \frac{b^2 h}{a^2}$.

6. Гиперболический параболоид.

Гиперболическим параболоидом (рис.6) называется поверхность второго порядка, которая в канонической системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z. \qquad (7)$$

Из уравнения (7) следует, что плоскости xOz, yOz являются плоскостями симметрии гиперболического параболоида (7), ось Oz – его осью симметрии, ее просто называют осью гиперболического параболоида. Начало координат является точкой пересечения гиперболического параболоида (7) с его осью, называется вершиной гиперболического параболоида (7).

Рассмотрим сечение гиперболического параболоида (7) плоскостями, параллельными координатным. Плоскость $z = h$, параллельная плоскости xOy, пересекает гиперболический параболоид (7) по линии $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2h$. Если $h > 0$, то линия пересечения представляет собой гиперболу с действительной осью Ox. Если $h < 0$, то линия пересечения является гиперболой с действительной осью Oy. Если $h = 0$, то линия пересечения распадается на пару пересекающихся прямых. Плоскости $y = h$ пересекают гиперболический параболоид по параболам: $x^2 = 2a^2 z + \frac{a^2 h^2}{b^2}$. Аналогично, в сечении плоскостями $x = h$ получаются параболы: $y^2 = -2b^2 z + \frac{b^2 h^2}{a^2}$.

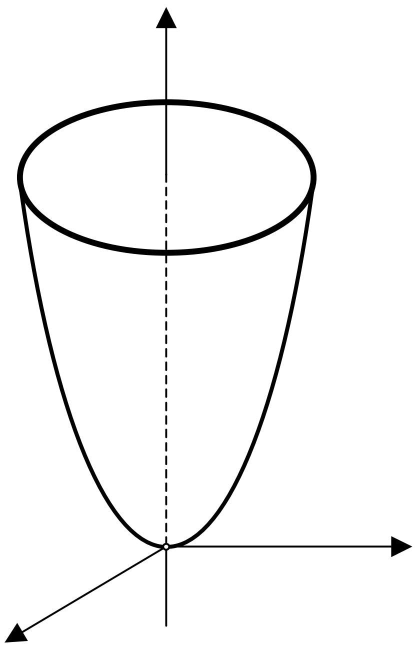

Рис.5

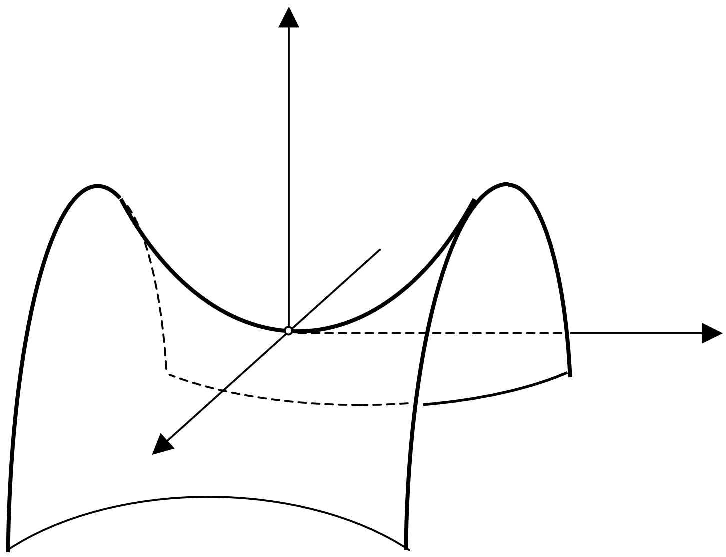

Рис.6

Цилиндры.

Далее рассмотрим поверхности, представляющие собой цилиндры. Цилиндрическая поверхность может быть получена следующим образом. Возьмем некоторую линию γ, и через точку $M \in \gamma$ проведем прямую l, параллельную вектору $\vec{p}$. При перемещении прямой l по линии γ, параллельно вектору $\vec{p}$, эта линия опишет цилиндрическую поверхность. В этом случае линию γ называют *направляющей*, а прямые параллельные вектору $\vec{p}$ – *образующими*. Цилиндрическая поверхность, направляющей которой является кривая второго порядка называется цилиндром второго порядка. Из сказанного выше следует, что существуют следующие цилиндры второго порядка с образующими, параллельными оси Oz:

7. Эллиптический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{8}$$

8. Гиперболические цилиндры

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1. \tag{9}$$

9. Параболические цилиндры

$$x^2 = \pm 2py, \; y^2 = \pm 2qx. \tag{10}$$

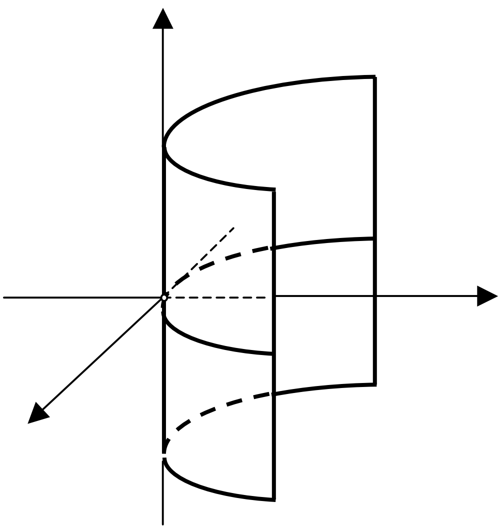

Рис.8

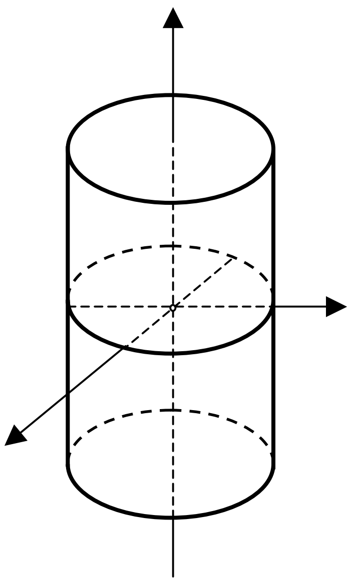

Рис.7

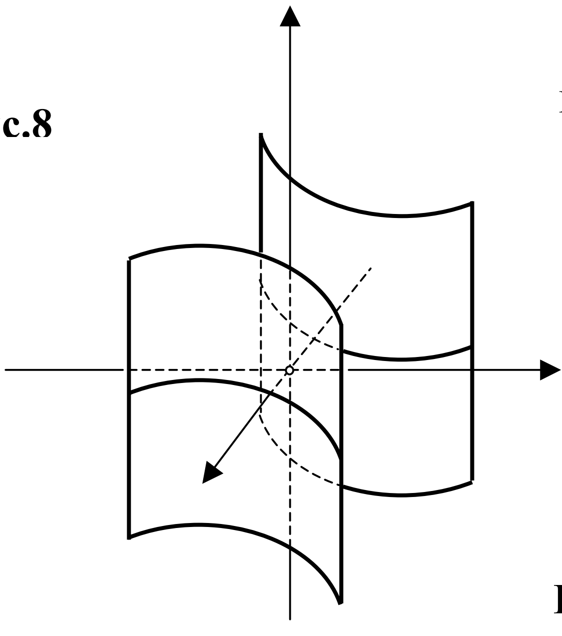

Рис.9

10. Пара пересекающихся плоскостей

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0. \tag{11}$$

11. Пара параллельных плоскостей

$$x^2 - a^2 = 0. \tag{12}$$

12. Пара совпавших плоскостей

$$x^2 = 0. \tag{13}$$

Мнимые поверхности.

Точка $M(x, y, z)$ называется *действительной*, если x, y, z – действительные числа, и *мнимой*, если хотя бы одно не является действительным. К мнимым поверхностям второго порядка относятся следующие:

13. Мнимый эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1. \tag{14}$$

14. Мнимый эллиптический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1. \tag{15}$$

15. Мнимый конус

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0. \tag{16}$$

16. Пара мнимых пересекающихся плоскостей

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0. \tag{17}$$

17. Пара мнимых параллельных плоскостей

$$x^2 = -a^2. \tag{18}$$

Классификация поверхностей второго порядка по инвариантам.

Исследование вида поверхности второго порядка может быть проведено с помощью инвариантов поверхностей второго порядка, составленных из коэффициентов уравнения (1). *Основные* инварианты:

$$S = a_{11} + a_{22} + a_{33},\ T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},\ \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{10} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{20} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{30} \\ a_{10} & a_{20} & a_{30} & a_{00} \end{vmatrix}.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что их значения не меняются при параллельном переносе и повороте осей координат.

Семиинварианты (полуинварианты) Δ' и Δ'', которые являются инвариантами относительно поворота системы координат:

$$\Delta' = \Delta_{11} + \Delta_{22} + \Delta_{33},$$

где Δ_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} в Δ,

$$\Delta'' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{10} \\ a_{10} & a_{00} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{20} \\ a_{20} & a_{00} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{30} \\ a_{30} & a_{00} \end{vmatrix}.$$

Их значения не меняются при повороте осей координат.

Поверхность второго порядка, заданная общим уравнением (1), называется *невырождающейся*, если $\Delta \neq 0$, и *вырождающейся* в противном случае. Нетрудно проверить, что к невырождающимся поверхностям относятся эллипсоид, однополостный и двуполостный гиперболоиды, гиперболический и эллиптические параболоиды. К вырождающимся поверхностям относятся цилиндрические поверхности.

Центром поверхности второго порядка (1) называется ее центр симметрии. Можно доказать (смотри, например, [6]), что центр поверхности второго порядка (1) определяется системой уравнений:

$$
\begin{gathered}
a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{10} = 0, \\
a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{20} = 0, \\
a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{30} = 0.
\end{gathered} \tag{19}
$$

Наличие центра у поверхности второго порядка связано с разрешимостью уравнений центра (19). Если система уравнений (19) имеет единственное решение, то поверхность второго порядка называется *центральной*. Отметим, что центральными являются лишь те поверхности, для которых инвариант $\delta \neq 0$, так как этот инвариант равен определителю системы уравнений (19). Если система уравнений (19) совместна, но имеет не единственное решение, то говорят, что она имеет прямую или плоскость центров. Если система уравнений (19) несовместна, то поверхность второго порядка не имеет ни одного центра. В двух последних случаях поверхность называется *нецентральной*.

Инвариантные признаки поверхностей второго порядка

№	Тип поверхности	Признак поверхности	
1	Эллипсоид	$\Delta < 0$, $\delta \neq 0$	$T > 0$, $\delta \cdot S > 0$
2	Мнимый эллипсоид	$\Delta > 0$, $\delta \neq 0$	$T > 0$, $\delta \cdot S > 0$
3	Однополостный гиперболоид	$\Delta > 0$, $\delta \neq 0$	$\delta \cdot S \leq 0$,и (или) $T \leq 0$
4	Двуполостный гиперболоид	$\Delta < 0$, $\delta \neq 0$	$\delta \cdot S \leq 0$,и (или) $T \leq 0$
5	Эллиптический параболоид	$\Delta < 0$, $\delta = 0$	
6	Гиперболический параболоид	$\Delta > 0$, $\delta = 0$	
7	Эллиптический цилиндр	$\Delta = 0$, $\delta = 0$	$T > 0$, $\Delta' \neq 0$, $\Delta' \cdot S < 0$
8	Мнимый цилиндр	$\Delta = 0$, $\delta = 0$	$T > 0$, $\Delta' \neq 0$, $\Delta' \cdot S > 0$
9	Гиперболический цилиндр	$\Delta = 0$, $\delta = 0$	$T < 0$, $\Delta' \neq 0$
10	Параболический цилиндр	$\Delta = 0$, $\delta = 0$	$T = 0$, $\Delta' \neq 0$
11	Конус	$\Delta = 0$, $\delta \neq 0$	$\delta \cdot S \leq 0$,и (или) $T \leq 0$
12	Мнимый конус	$\Delta = 0$, $\delta \neq 0$	$T > 0$, $\delta \cdot S > 0$
13	Пара пересекающихся плоскостей	$\Delta = 0$, $\delta = 0$	$T < 0$, $\Delta' = 0$
14	Пара мнимых пересекающихся Плоскостей	$\Delta = 0$, $\delta = 0$	$T > 0$, $\Delta' = 0$
15	Пара параллельных плоскостей	$\Delta = 0$, $\delta = 0$	$T = 0$, $\Delta' = 0$, $\Delta'' > 0$
16	Пара мнимых параллельных Плоскостей	$\Delta = 0$, $\delta = 0$	$T = 0$, $\Delta' = 0$, $\Delta'' > 0$
17	Пара совпадающих плоскостей	$\Delta = 0$, $\delta = 0$	$T = 0$, $\Delta' = 0$, $\Delta'' = 0$

Приведение уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду.

Поверхности второго порядка, заданной уравнением (1) в системе координат $Oxyz$ евклидова пространства

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz +$$
$$2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z + a_{00} = 0,$$

сопоставим квадратичную форму $\varphi(\vec{x})$ на векторном пространстве по правилу:

$$\varphi(\vec{x}) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3.$$

Для квадратичной формы с действительными коэффициентами, заданной в евклидовом пространстве, справедлива теорема о приведении к главным осям: от любого ортонормированного базиса можно перейти к другому ортонормированному базису такому, что квадратичная форма в нем будет иметь канонический вид. Поэтому в системе координат $Ox'y'z'$ уравнение поверхности второго порядка примет вид, в котором коэффициенты $a_{12}', a_{13}', a_{23}'$ будут равны нулю. Далее путем надлежащего выбора нового начала координат добиваемся того, чтобы все коэффициенты $a_{10}', a_{20}', a_{30}'$ были равны нулю (если квадрика имеет хотя бы один центр), либо все коэффициенты, кроме одного, были равны нулю (если квадрика не имеет центров).

Пример1. Привести к каноническому уравнению и определить вид поверхности, заданной уравнением

$$4x^2 + y^2 - z^2 - 24x - 4y + 2z + 35 = 0.$$

Данной поверхности соответствует квадратичная форма

$$\phi(\vec{x}) = 4x^2 + y^2 - z^2.$$

Квадратичная форма $\phi(x)$ уже имеет канонический вид. Заметим, что инвариант δ данной поверхности отличен от нуля, $\delta = -4$. Следовательно, поверхность является центральной. Найдем координаты центра этой поверхности. С помощью формул (19) легко находим, что $x_0 = 3, y_0 = 2, z_0 = 1$. Совершим параллельный перенос по формулам: $x = x' + x_0$, $y = y' + y_0$, $z = z' + z_0$, то есть $x = x' + 3$, $y = y' + 2$, $z = z' + 1$. Тогда уравнение поверхности примет вид:

$$4(x-3)^2 + (y-2)^2 - (z-1)^2 = 4.$$

Разделим обе части уравнения на 4 и сделаем замену по формулам параллельного переноса, получим

$$(x')^2 + \frac{(y')^2}{4} - \frac{(z')^2}{4} = 1 -$$

уравнение однополостного гиперболоида.

Замечание. Для линии второго порядка процесс приведения ее к каноническому виду основан на той же алгебраической конструкции. По существу, ход доказательства “основной” теоремы о классификации линий второго порядка был основан именно на таком алгоритме. Сначала поворотом системы координат приводили квадратичную форму $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ линии $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0$ к нормальному виду (избавляясь от члена $2a_{12}xy$). Затем, осуществляя параллельный перенос системы координат либо в центр линии, либо в вершину (для параболы), мы получали каноническое уравнение линии второго порядка. Получаемые при этом всевозможные частные случаи дали нам 9 типов линий. Подробнее о приведении линии второго порядка и поверхности второго порядка к каноническому виду смотри, например, в [6].

Литература

1. Александров А.Д., Нецветаев Н.Ю. Геометрия. – М., Наука, 1990.
2. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия. В 2-х ч. Ч. I. – М.: Просвещение, 1986.
3. Постников М.М. Лекции по геометрии. Аналитическая геометрия. I семестр. – М.: Наука, 1986.
4. Моденов П.С. Аналитическая геометрия. Издательство Московского Университета. 1969.
5. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. М., Наука, 1968.
6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия: Учеб.: Для вузов. – 5-ое. Изд. – М.: Наука. Физматлит, 1999.