

ВОЕННО-МОРСКАЯ АКАДЕМИЯ
имени Адмирала Флота Советского Союза Н. Г. КУЗНЕЦОВА

Н. С. ВОЛГИН

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Часть 1

*Утвержден Главнокомандующим ВМФ
в качестве учебника
для слушателей Академии*

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
1999

Учебник состоит из двух частей: часть I — раздел I “Теоретические основы использования математического моделирования (исследования операций) при управлении силами”, раздел II “Методы математического моделирования (методы прикладной математики)”, часть 2 — раздел III “Методы математического моделирования применения сил и средств флота (методы исследования операций)”.

В разделе I изложены цель использования математического моделирования при управлении и основы методологии эвристической оптимизации, математического обеспечения управления (МОУ) силами, построения системы МОУ силами.

В разделах II и III рассмотрены методы моделирования, которые наиболее часто употребляются в оперативно-тактической и тактико-специальной областях. Методы используются как строительный материал при моделировании применения сил и средств флота. Некоторые из них могут использоваться при управлении самостоятельно. Приемы такого использования излагаются при описании методов.

При отборе методов, их описании учтены характер и объем подготовки офицеров в военно-морских училищах.

Приводятся многочисленные примеры применения сил, средств, иллюстрирующие содержание, области и особенности применения методов для целей практики.

Учебник предназначен для российских и иностранных слушателей Военно-морской академии, а также может быть использован офицерами ВМФ и РА, курсантами военных училищ, специалистами научно-исследовательских учреждений.

Ответственный редактор контр-адмирал В. А. Рогунов

©

Военно-морская академия имени Адмирала Флота Советского
Союза Н. Г. Кузнецова, 1999 г.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие	9
Введение	13
Раздел I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ (ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ) ПРИ УПРАВЛЕНИИ СИЛАМИ	19
Глава 1. РОЛЬ, МЕСТО, ЦЕЛЬ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ (ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ) ПРИ УПРАВЛЕНИИ	20
§ 1.1. Методы познания закономерностей управляемых процессов и их эволюция. Роль и место математического моделирования среди других методов	20
§ 1.2. Свойства математических моделей применения сил, использования средств. Цель использования математического моделирования при управлении	26
1.2.1. Показатели эффективности вооруженной борьбы	26
1.2.2. Свойства математических моделей вооруженной борьбы. Цель их использования при управлении силами и средствами флота	32
Глава 2. ОРГАНИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ. ЭВРИСТИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ УПРАВЛЕНИЯ СИЛАМИ	36
§ 2.1. Этапы исследования операций	36
§ 2.2. Особенности управления системами оружия и технических средств, кораблями, частями и соединениями, влияющие на организацию использования математического моделирования ..	39
2.2.1. Особенности управления системами оружия и технических средств	39
2.2.2. Особенности управления кораблями, частями и соединениями	42
§ 2.3. Основы методологии эвристической оптимизации с использованием математического моделирования	43
2.3.1. Сочетание творческого и формального в работе командира и офицера штаба	45
2.3.2. Организация творческой деятельности командира, офицера штаба с использованием математического моделирования	48
2.3.3. Методика выработки указаний штабу на выполнение математического моделирования, оперативно-тактической постановки задачи	70
2.3.4. Подготовка органа управления к использованию методов эвристической оптимизации при выполнении свойственных ему задач	74
2.3.5. Использование методов эвристической оптимизации в военно-научной работе	75
§ 2.4. Математическое обеспечение управления силами	78
§ 2.5. Система математического обеспечения управления силами	80
Раздел II. МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ (МЕТОДЫ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ)	86
Глава 3. МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ИХ ЭВОЛЮЦИЯ, КЛАССИФИКАЦИЯ СУЩЕСТВУЮЩИХ МЕТОДОВ, ИХ РОЛЬ И МЕСТО В	86

ИССЛЕДОВАНИИ ОПЕРАЦИЙ

§ 3.1.	Случайные явления и процессы в оперативно-тактической области. Особенности управления ими ..	86
§ 3.2.	Особенности вооруженной борьбы и классификация математических методов, применяемых при управлении силами и средствами	88
	<i>АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ. МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ УПРАВЛЯЕМЫХ ПРОЦЕССОВ</i>	
Глава 4.	МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ ИЗМЕНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ СИЛ И СРЕДСТВ СТОРОН И ОСНОВЫ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ ПРИ УПРАВЛЕНИИ СИЛАМИ. КЛАССИФИКАЦИЯ МЕТОДОВ	91
Глава 5.	МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ДИСКРЕТНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА	С97
§ 5.1.	Особенности применения методов теории дискретных цепей Маркова при управлении силами ...	97
5.1.1.	Область применения методов	97
5.1.2.	Особенности оперативно-тактической постановки задачи	98
5.1.3.	Показатели эффективности, вычисляемые методами теории дискретных цепей Маркова	100
§ 5.2.	Методы разработки математических моделей дискретных цепей Маркова	101
5.2.1.	Матрица вероятностей переходов системы за один шаг и несколько шагов	101
5.2.2.	Определение вероятностей переходов для цепей Маркова с невосстанавливаемым ущербом	104
5.2.3.	Методы учета начального состояния системы	106
5.2.4.	Методы определения показателей эффективности по известным матрицам переходов	108
5.2.5.	Рациональная последовательность подготовки к моделированию процессов боевых действий методами теории дискретных цепей Маркова	114
Глава 6.	МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДОВ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ	С 116
§ 6.1.	Особенности применения методов теории массового обслуживания при управлении	116
6.1.1.	Область применения методов	116
6.1.2.	Особенности оперативно-тактической постановки задачи. Классификация систем массового обслуживания	117
6.1.3.	Показатели эффективности различных систем массового обслуживания	120
§ 6.2.	Вероятностные характеристики потока заявок и времени обслуживания при марковских процессах массового обслуживания	121
§ 6.3.	Общие методы разработки математических моделей СМО	126
6.3.1.	Модели СМО с ограничением на длину очереди и СМО с отказами. Рациональная последовательность разработки процедур для моделирования на ЭВМ систем с марковскими процессами массового обслуживания	126
6.3.2.	Модели СМО с бесконечным (чистым) ожиданием ...	133
§ 6.4.	Методы разработки математических моделей СМО, функционирующих в стационарном режиме ...	136
6.4.1.	Модели СМО с ограничением на длину очереди	137
6.4.2.	Модели СМО с отказами	141

	6.4.3. Модели СМО с бесконечным ожиданием	142
	§ 6.5. Рациональная последовательность подготовки к моделированию марковских процессов массового обслуживания	143
	§ 6.6. Методы разработки математических моделей многофазных СМО	144
	6.6.1. Модели многофазных СМО со случайными траекториями заявок	145
	6.6.2. Модели замкнутых многофазных СМО	147
Глава 7.	МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМЫХ ПРОЦЕССОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДОВ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ	148
	§ 7.1. Особенности применения методов сетевого планирования при управлении	149
	7.1.1. Область применения методов	149
	7.1.2. Показатели эффективности, вычисляемые методами сетевого планирования	150
	7.1.3. Особенности оперативно-тактической постановки задачи	151
	§ 7.2. Разработка сетевой модели	154
	7.2.1. Разработка сети, сетевого графика	154
	7.2.2. Методы расчета временных параметров сети	160
	7.2.3. Методы расчета вероятностных характеристик сети	164
	7.2.4. Включение сетевой модели в состав СМО ЭВМ. Рациональная последовательность подготовки к моделированию с использованием сетевых моделей	168
	§ 7.3. Выполнение математического моделирования на ЭВМ, выработка предложений по совершенствованию плана	169
	§ 7.4. Использование сетевой модели в процессе управления	173
	7.4.1. Управляемые процессы как объекты сетевого моделирования	173
	7.4.2. Использование сетевой модели для обеспечения контроля за ходом управляемого процесса	174
	7.4.3. Методы корректирования исходных планов	175
	СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ УПРАВЛЯЕМЫХ ПРОЦЕССОВ	176
Глава 8.	ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ В ОПЕРАТИВНО-ТАКТИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ И ИССЛЕДОВАНИЯХ	176
	§ 8.1. Область применения методов математической статистики	176
	§ 8.2. Сбор статистических данных на кораблях, в частях, на соединениях флота	177
	§ 8.3. Методы обработки статистических данных для определения статистических оценок вероятностных характеристик	180
	8.3.1. Систематизация статистических данных	180
	8.3.2. Теоретические основы методов определения статистических оценок вероятностных характеристик. Среднее арифметическое и его свойства	183
	8.3.3. Методы определения статистических оценок вероятностных характеристик и требования к ним	188
	8.3.4. Методы определения точности и надежности статистических оценок	193
	§ 8.4. Обоснование законов распределения случайных величин на основании статистических данных (сглаживание статистических рядов)	197

	8.4.1.Подбор теоретического закона распределения случайной величины. Статистические законы распределения. . .	197
	8.4.2.Проверка согласия теоретического закона распределения случайной величины с опытными данными	201
Глава 9.	МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМЫХ ПРОЦЕССОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДА СТАТИСТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ (МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО)	207
	§ 9.1.Особенности применения метода статистических испытаний при управлении силами	207
	9.1.1.Область применения метода	207
	9.1.2.Особенности оперативно-тактической постановки задачи	211
	9.1.3.Показатели эффективности, вычисляемые методом статистических испытаний. Число испытаний, обеспечивающих необходимую точность и надежность статистических оценок	211
	§ 9.2.Способы статистического моделирования случайных событий и случайных величин	212
	9.2.1.Получение случайных чисел	212
	9.2.2.Статистическое моделирование случайных событий	213
	9.2.3.Статистическое моделирование дискретных случайных величин	215
	9.2.4.Статистическое моделирование непрерывных случайных величин	217
	9.2.5.Рациональная последовательность подготовки к моделированию с использованием метода статистических испытаний	220
Глава 10.	ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ОБОСНОВАНИЯ РЕШЕНИЙ	223
	§ 10.1.Особенности применения метода последовательного анализа при управлении силами	223
	10.1.1.Область применения метода	223
	10.1.2.Особенности оперативно-тактической постановки задачи	225
	10.1.3.Показатели эффективности выполнения поставленной задачи, вычисляемые при использовании метода последовательного анализа	228
	§ 10.2.Использование метода последовательного анализа для обоснования решений	228
	МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ	233
Глава 11.	МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ И ОСНОВЫ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ ПРИ УПРАВЛЕНИИ СИЛАМИ. КЛАССИФИКАЦИЯ МЕТОДОВ	233
	§ 11.1.Область применения методов и их классификация	233
	§ 11.2.Особенности применения методов математической оптимизации	237
	11.2.1.Рациональная последовательность разработки моделей оптимизации	237
	11.2.2.Содержание и рациональная последовательность формализованной постановки задачи	240
	11.2.3.Содержание оперативно-тактической постановки задачи, осуществляемой командиром, офицером штаба	243
	11.2.4.Анализ полученного оптимального плана	244
Глава 12.	ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПРИ УПРАВЛЕНИИ	246

	СИЛАМИ	
	§ 12.1. Особенности применения методов линейного программирования при управлении силами	246
	12.1.1. Область применения методов	246
	12.1.2. Особенности оперативно-тактической постановки задачи	248
	12.1.3. Показатели эффективности	249
	§ 12.2. Методы решения задач линейного программирования	250
	12.2.1. Общая математическая формулировка задачи линейного программирования	250
	12.2.2. Алгебраическая и геометрическая интерпретация методов решения задач линейного программирования	254
	12.2.3. Решение задач линейного программирования методами направленного перебора. Симплексный метод (метод последовательного улучшения плана)	258
	§ 12.3. Особенности решения транспортных задач линейного программирования	268
	12.3.1. Транспортные задачи по критерию стоимости	269
	12.3.2. Транспортные задачи по критерию времени	277
	§ 12.4. Двойственная задача линейного программирования	281
Глава 13.	ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПРИ УПРАВЛЕНИИ СИЛАМИ	283
	§ 13.1. Особенности применения методов нелинейного программирования при управлении силами	283
	13.1.1. Область применения методов	283
	13.1.2. Особенности оперативно-тактической постановки задачи	285
	13.1.3. Показатели эффективности	286
	§ 13.2. Методы решения задач нелинейного программирования	286
	13.2.1. Общая математическая формулировка задачи нелинейного программирования	286
	13.2.2. Метод множителей Лагранжа	288
	13.2.3. Выпуклое программирование	289
	§ 13.3. Некоторые рекомендации об оптимальном распределении сил и средств	296
	13.3.1. Оптимальное распределение сил и средств по однотипным объектам	296
	13.3.2. Оптимальное распределение сил и средств по группам, состоящим из однотипных объектов	298
	13.3.3. Оптимальное распределение сил и средств по группам неоднотипных объектов	301
Глава 14.	ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПРИ УПРАВЛЕНИИ СИЛАМИ	304
	§ 14.1. Особенности применения метода динамического программирования при управлении силами	304
	14.1.1. Область применения метода	304
	14.1.2. Особенности оперативно-тактической постановки задачи. Показатели эффективности	306
	§ 14.2. Методы решения задач динамического программирования	309

	14.2.1. Описание процесса и процедуры решения задачи динамического программирования	310
	14.2.2. Математическая формулировка задачи динамического программирования	318
Глава 15.	ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ИГР ПРИ УПРАВЛЕНИИ СИЛАМИ	319
	§ 15.1. Особенности применения методов теории игр при управлении силами	319
	15.1.1. Область применения методов	319
	15.1.2. Классификация игр. Основные понятия теории игр	320
	15.1.3. Особенности оперативно-тактической постановки задачи	333
	15.1.4. Показатели эффективности, вычисляемые методами теории игр	334
	§ 15.2. Методы решения матричных игр	335
	15.2.1. Принцип минимакса в теории игр. Верхняя и нижняя цена игры. Максиминная и минимаксная стратегия игроков	335
	15.2.2. Основные свойства оптимальных смешанных стратегий	338
	15.2.3. Сокращение матрицы игры	339
	15.2.4. Методы решения игр 2×2	342
	15.2.5. Методы решения игр $2 \times n$ и $m \times 2$	344
	15.2.6. Решение матричной игры методами линейного программирования	346
	15.2.7. Решение матричной игры методами итераций	348
	§ 15.3. Решение игры и реальная конфликтная ситуация. Применение методов теории игр в творческой работе командира, офицера штаба	349
Глава 16.	ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ПРИ УПРАВЛЕНИИ СИЛАМИ	353
	§ 16.1. Особенности применения методов теории статистических решений при управлении силами	353
	16.1.1. Область применения методов	353
	16.1.2. Особенности оперативно-тактической постановки задачи	354
	16.1.3. Показатели эффективности, вычисляемые методами теории статистических решений	356
	§ 16.2. Разработка математических моделей с использованием методов теории статистических решений	357
	16.2.1. Разработка модели для определения оптимального способа действий с учетом априорного распределения видов обстановки	358
	16.2.2. Разработка модели для оценки целесообразности проведения доразведки	360
	Л и т е р а т у р а	366

ПРЕДИСЛОВИЕ

Издание учебника обусловлено многими новыми особенностями ведения вооруженной борьбы на море, необходимостью учета накопленного опыта (положительного и отрицательного) в использовании математического моделирования при управлении, развитием методов математического моделирования применения сил и средств флота, совершенствованием электронно-вычислительной техники (ЭВТ) и других средств автоматизации управления, наконец, накопленным в академии опытом подготовки специалистов в области управления силами флота.

По сравнению с ранее изданными пособиями и учебниками по курсу “Исследование операций” в настоящем учебнике в большей степени уделено внимание вопросам использования математического моделирования в работе органов управления соединениями, кораблями, частями. Это потребовало продвижения в малоизученную область творческой деятельности командиров различных уровней. Однако при разработке этой области сохранены объем и степень детализации изложения необходимых математических методов моделирования, позволяющие осуществлять подготовку различных групп специалистов органов управления силами ВМФ, а также преподавателей и специалистов научно-исследовательских учреждений.

Построение учебника и стиль изложения материала избраны такими, чтобы удовлетворить двум принципам. Первый принцип — принцип Аристотеля (4 в. до н. э.) успешности действия: чтобы действие было успешным необходимо правильно определить конечную цель действия и способ достижения конечной цели. Принцип успешно прошел многовековую проверку. Применительно к учебнику речь идет о цели использования математического моделирования при управлении силами и о способах ее достижения. Второй принцип — принцип проблемного обучения. Высокие темпы научно-технического прогресса делают невозможным для руководителя пользоваться при решении практических задач только “рецептами”, полученными при обучении. Проблемное обучение должно привить обучаемому умение по отдельным признакам своевременно выявить факт зарождения проблемы, четко ее сформулировать, а затем решить, т. е. обучаемый должен освоить методику разработки методик решения новых задач.

Народная мудрость уже давно выявила и сформулировала требование к такому обучению: понимание важнее, чем знание, знает тот, кто понимает, а кто знает, но не понимает, тот не знает, тот помнит. По этой причине в учебнике, когда это важно и возможно, положения не постулируются, а обосновываются и излагается методика обоснований.

Цель использования математического моделирования обоснована в гл. 1 части 1 учебника, в гл. 2 этой части обоснованы теоретические основы использования математического моделирования при управлении, и в частности в творческой деятельности командира и специалистов органа управления. Читателям предлагается обратить внимание на методы обоснования, в которых используются результаты обобщения истории военного искусства и логические умозаключения. Учтено требование диалектического метода

познания — рассмотрение явлений во взаимосвязи и взаимозависимости составляющих их элементов (системный подход). В соответствии с этим требованием при обосновании использования математического моделирования одновременно учтены особенности ведения боевых действий на море, свойства математических моделей вооруженной борьбы и возможности существующей ЭВТ.

Математическое моделирование в работе командира, офицера штаба предлагается использовать в организационно-методической форме эвристической оптимизации (гл. 2), при этом творчество должно обоснованно сочетать в себе применение закона единства и борьбы противоположностей и математическое моделирование.

В разделах II и III рассмотрены соответственно математические методы моделирования (их часто называют методами прикладной математики) и методы исследования операций — методы математического моделирования отдельных фрагментов применения сил: поиска ими объектов противника и слежения за ними, применения оружия, систем связи и т. д. Разница между этими группами методов весьма ощутима, во-первых, с точки зрения их освоения. Методы первой группы в принципе можно изучить, и не зная конкретной прикладной области*, методы второй группы требуют определенных знаний прикладной области, например оперативного искусства, тактики, теории управления силами, свойств систем оружия, технических средств и способов их применения. Излагаются методы, наиболее употребимые в оперативно-тактической области. Во-вторых, методы второй группы — по существу методы разработки блоков, из которых состоят модели морских боев, операций, других форм применения сил. Эти блоки могут использоваться командирами, офицерами штабов и как самостоятельные модели (автономно, например, как модели поисковых действий сил, поражения носителями оружия различных объектов и т. д.). Такое их использование рассмотрено в учебнике. Что же касается методов формирования и использования более сложных моделей — математических моделей морских боев и операций, то этим методам посвящено пособие “Математическое моделирование морских боев и операций” (см. [5]).

Предполагается, что в последующих работах будут изложены методы создания и использования математического, информационного и программного обеспечения как взаимосвязанных элементов системы математического обеспечения управления (МОУ) силами.

Учебник предназначен для всех специалистов органа управления: командиров соединений, кораблей, частей, офицеров штабов, корабельных специалистов — пользователей моделей; специалистов по исследованию операций*; специалистов в области создания и использования программного обеспечения**; инженерно-технического персонала; специалистов по оперативно-тактическому применению АСУ.

* * В учебнике методы первой группы излагаются с широкой иллюстрацией примерами из оперативно-тактической области, чем облегчается освоение и применение методов специалистами флота.

* * В отечественной и зарубежной специальной литературе этих специалистов еще называют прикладными математиками, инженерами-математиками, специалистами-алгоритмистами.

Программы, уровень подготовки специалистов различных групп в области исследования операций и использования ЭВТ (АСУ) в учебнике не рассматриваются. Для понимания организации использования математического моделирования при управлении силами необходимо знать, что это использование невозможно, если между командиром (пользователем) и ЭВМ (АСУ) на определенных этапах не будут “стоять” специалисты четырех последних из числа указанных групп. В настоящее время ведется активная работа по совершенствованию ЭВМ, методов математического и программного обеспечения, имеющая одной из целей сокращение числа групп таких специалистов. Следует, однако, ожидать, что необходимость в указанных специалистах при управлении в военной области сохранится в течение более длительного времени, чем при управлении в народнохозяйственной области. Причиной этого являются особенности управления в военной области (см. §2.2). Это обстоятельство следует учитывать при изучении и использовании работ, посвященных применению математических методов и ЭВТ в промышленности, сельском хозяйстве, на транспорте, в медицине, в научно-исследовательской работе.

Учебник ориентирован на офицеров, получивших подготовку в области высшей математики и теории вероятностей в объеме программы высших военно-морских училищ. В ряде случаев, однако, для специалистов по исследованию операций требуются дополнительные сведения из теории вероятностей, изложенные в [6].

Автор считает своим долгом предупредить читателей, что учебник написан с позиций материалистического понимания действительности, признания наличия объективных закономерностей окружающей нас действительности и возможности их познания, отсутствия сверхъестественных сил (бога, дьявола, космического разума и т. д.), к которым можно воззвать, чтобы получить желаемый результат. Следует отметить, что на этих позициях стоят все специалисты в области математического моделирования*. Например: в теории вероятностей считается, что закономерности случайных явлений и их проявления абсолютно одинаковы как для атеистов, так и для приверженцев какой-то религии; в теории игр рассматриваются только стороны A и B с их силами, средствами и в рассмотрение не вводятся сверхъестественные силы; в теории статистических решений учитываются силы и средства, с одной стороны, и познанные объективно существующие закономерности условий обстановки, одинаковые для верующих и атеистов — с другой (сверхъестественные силы в постановке задачи отсутствуют) и т. д.

Такой подход к оценке математических методов моделирования полезно знать всем, кто ими пользуется. Однако каждому читателю следует самостоятельно дать свое мировоззренческое толкование методам математического моделирования.

* ** Часто употребляемые понятия “системные, прикладные программисты” не очень четко определяют особенности квалификации специалистов этой группы органа управления силами.

* Поучителен в этом смысле следующий факт из биографии А. А. Маркова — выдающегося русского математика, автора первого в России учебника по теории вероятностей. В 1912 г. А. А. Марков обратился в Правительствующий Синод с просьбой отлучить его от церкви. По его мнению, написание учебника по теории вероятностей является неопровержимым свидетельством его неверия в бога, православного, иудейского или какого-либо другого. (А. А. Марков. Избранные труды. М.: Изд-во АН СССР, 1951).

В учебнике рассматриваются вопросы исследования операций, связанные с подготовкой и применением сил и средств флота. Их знание необходимо также в работе организаций и учреждений, занятых созданием математического, программного, информационного обеспечения, ЭВТ и других технических средств автоматизации управления как для органов управления соединениями флота, так и для автоматизированных систем оружия и технических средств.

Деление материала на главы, параграфы, пункты осуществлено так, чтобы облегчить читателям различных специализаций поиск необходимого материала. Нумерация глав и параграфов во всех частях сквозная, нумерация формул, рисунков, примеров — в пределах глав с указанием номера глав.

В учебнике не приводятся ссылки на какие-либо конкретные образцы вооружения, технических средств, способы применения сил, используется опыт истории военного искусства, в том числе опыт Великой Отечественной, второй мировой войн.

*Морякам российского и советского
военно-морского флота, отдавшим свои жизни
за свободу и независимость нашей Родины, посвящаю.*

Автор

В В Е Д Е Н И Е

В современных условиях не только эффективность, но и сама возможность управления силами зависит от способности командующих, командиров, специалистов органов управления применять на всех этапах выполнения поставленной задачи математическое моделирование и технические средства автоматизации управления, в первую очередь электронно-вычислительную технику. Причиной тому — совершенствование средств вооруженной борьбы, которое привело к резкому усложнению условий управления. *Во-первых*, усложнились закономерности вооруженной борьбы, знание которых необходимо для объективного обоснования решения и планов, значительно увеличились объемы информации, которую необходимо учесть для их выработки. *Во-вторых*, значительно возросли темпы ведения боевых действий. Все это породило главное диалектическое противоречие при управлении силами сегодня: с одной стороны, потребность увеличивать время для выработки обоснованных решений и планов применения сил и средств и, с другой стороны, необходимость сокращать это время, повышая темпы ведения боевых действий. Влияние этого противоречия усиливается возросшей мощностью применяемого оружия, позволяющего в отдельных операциях, боях и даже ударах добиваться результатов, которые ранее достигались после проведения длительных кампаний. По этой причине резко усилились отрицательные последствия недостатков и промахов управления.

Использование математического моделирования при управлении силами — необходимое условие для разрешения указанного противоречия. Математические модели обладают двумя важными достоинствами. Первое — способность объективно учитывать влияние на величину показателя эффективности выполнения поставленной задачи факторов обстановки в их взаимосвязи. Это свойство математических моделей и делает их чрезвычайно эффективными при раскрытии закономерностей вооруженной борьбы, обосновании решений и планов. Второе достоинство — возможность их алгоритмического представления. Алгоритм

математической модели — это точно определенное правило действий, для которого задано, как и в какой последовательности это правило необходимо применять к исходным данным, чтобы получить значения показателей эффективности. Алгоритмическое представление математических моделей позволяет привлекать для математического моделирования ЭВТ с ее высоким быстродействием, что, в свою очередь, открывает дорогу для автоматизации управления, которой подлежит только то, что можно алгоритмизировать, а для алгоритмизации нужна математическая модель автоматизируемого процесса.

Итак, внедрение в практику управления силами математического моделирования и ЭВТ дает возможность разрешить указанное выше диалектическое противоречие. С одной стороны, математические модели позволяют с высокой степенью научной объективности раскрывать сложные закономерности вооруженной борьбы для выработки обоснованных решений и планов, с другой — представляют возможность повышения темпов управления за счет автоматизации процессов управления силами, процессов функционирования систем оружия и технических средств. Альтернатива этому направлению совершенствования управления отсутствует.

Из сказанного отнюдь не следует, что в современных условиях потерял свое значение сформулированный еще Л. Н. Толстым принцип приоритета морального духа народа и армии в деле разгрома врага. Сейчас стало более значимым и более сложным влияние этого принципа на достижение конечного результата военных действий. Важным проявлением высокого морального духа является, в частности, и стремление командиров совершенствовать методы управления силами.

Невозможно добиться военно-технического, стратегического, оперативно-тактического превосходства над врагом, не добившись превосходства методического, говоря шире, превосходства научного. Наша победа в Великой Отечественной войне обусловлена и нашим научным превосходством, лидирующим положением нашей науки в развитии мировой науки.

Совершенствование методов, технических средств управления — надежный путь также повышения эффективности расходования средств на оборону страны. Необходимо искать рациональное распределение средств. При этом следует иметь в виду и общегосударственные интересы: специалисты, подготовленные к управлению в военной области с использованием современных методов и средств, могут быть эффективно использованы и для управления в других областях жизни страны.

В настоящее время считается общепризнанным, что использование математического моделирования, ЭВТ и других технических средств автоматизации управления как при строительстве (совершенствовании) сил и средств флота, так и при управлении ими в ходе выполнения поставленных задач способно повысить эффективность управления на порядки. Однако реализация этих потенциальных возможностей требует проведения в процессе управления комплекса взаимосвязанных мероприятий методического и организационного планов: выполнения своевременного (в динамике управления) и точного моделирования, обоснованного и своевременного исследования операций, рациональной и своевременной эвристической оптимизации, организации математического обеспечения управления.

Наконец, необходимо создание системы МОУ. Наиболее жесткие требования к своевременности выполнения мероприятий (но не за счет точности и обоснованности их результатов) предъявляет управление силами. Для освоения излагаемого в учебнике материала, следования предлагаемым рекомендациям требуется прежде всего понимание взаимосвязей между мероприятиями указанного комплекса в процессе управления силами.

Исследование операций есть процесс обоснования элементов решений и планов, основанный на использовании математического моделирования. Он включает два процесса — математического моделирования и выявления закономерностей, знание которых необходимо для обоснованного управления. Эти процессы взаимосвязаны. С одной стороны, математическое моделирование является инструментом (методом, приемом) выявления необходимых закономерностей и выработки предложений для количественного обоснования решения и планов по поставленной задаче. С другой стороны, выявление нужных закономерностей, выработка необходимых предложений сопровождают и направляют весь процесс математического моделирования, являются его составной частью как при формировании модели, так и при непосредственной ее реализации (при выполнении оперативно-тактических, тактико-специальных расчетов). Кроме того, существует этап исследования операций, выходящий за рамки собственно математического моделирования, — использование результатов моделирования для обоснования какого-либо элемента решения, плана, предложения командиру. Следует иметь в виду, что на практике принято употреблять выражение “использование результатов математического моделирования для обоснования решения, плана”, а не “исследование операций для обоснования решения, плана”.

Выше шла речь о достижении одной-единственной цели моделирования. При выработке решения (планировании) командир, его подчиненные будут обращаться к математическому моделированию многократно, так как многократно будут возникать ситуации, когда окажется невозможным обосновать те или иные элементы решения, предложения командиру, плана с использованием других методов (качественного анализа, накопленного опыта). Таким образом, методика и логика работы командира* будут определять процесс моделирования: цели моделирования, оперативно-тактические постановки задач на формирование необходимых моделей, структуру моделей. Существует и обратная связь: результаты математического моделирования могут либо подтверждать рациональность избранного командиром направления творчества на каком-либо этапе, либо же указывать на его недостатки, понуждать искать новые направления и зачастую указывать эти направления, помогая командиру определять слабые места в проделанной ранее работе.

Большие возможности математического моделирования в обеспечении творческой деятельности командира делают необходимым организацию эффективного взаимодействия двух процессов — творческого и формального (математического моделирования). Для этого в процессы выработки решения, планирования должны включаться методы эвристической оптимизации: с одной стороны, последовательное определение рационального направления

* Далее для краткости будем говорить только о командире соединения.

творческой деятельности командира и соответствующего этому направлению содержания математического моделирования, с другой — указание порядка использования результатов математического моделирования для организации рационального поступательного продвижения работы командира. Математическое моделирование при этом используется в сочетании с другими методами раскрытия закономерностей боя.

Достигать необходимой точности и своевременности математического моделирования можно только при блочном формировании моделей, модульном построении их машинных программ, создании банков данных и знаний (автоматизации выдачи необходимой для моделирования информации). Образно говоря, создание конструкций моделей и их машинных программ осуществляется из заранее подготовленных блоков; факт наличия в модели того или иного блока определяют подачу из банка данных той или иной информации.

Библиотеки блоков, модулей готовятся и поставляются в органы управления кораблями, частями, соединениями заблаговременно. Они должны быть открытыми, пополняться и модернизироваться по мере надобности. Однако даже при разработанных методах модульного формирования программ моделей, наличии исходных банков данных и знаний точное и своевременное (в процессе управления силами) моделирование возможно лишь при организации математического обеспечения управления силами — проведении комплекса мероприятий на различных этапах управления. Целью мероприятий каждого из этапов является создание условий для моделирования на данном и последующих этапах. О важности МОУ силами говорит накопленный опыт. Например, если не провести необходимые мероприятия при заблаговременной подготовке, не будет возможным математическое моделирование и при заблаговременной, и при непосредственной подготовке, и в ходе боя. Формирование моделей в органе управления осуществляется с использованием базового специального математического (СМОУ), программного (ПОУ) и информационного обеспечения управления. Базовое обеспечение на соединения поставляется. В формировании же моделей участвуют командир соединения или(и) офицеры органа управления — пользователи моделей, специалисты по исследованию операций, программному обеспечению, боевому использованию ЭВТ и средств автоматизации. Упомянутые виды обеспечения, кадры, техника составляют систему МОУ силами. Без какого-либо компонента системы МОУ использование математического моделирования при управлении силами невозможно.

Для создания системы МОУ силами и организации самого математического обеспечения управления требуется разработка методологии МОУ. Составные части общей методологии показаны на рис. В.1. Указанные там частные методологии связаны, во-первых, предметной областью — управлением силами, ради которого они разрабатываются, во-вторых, основным инструментом — математическим моделированием, использование которого рассматривается для повышения эффективности управления. Ведущей из числа указанных частных методологий является первая, поскольку именно эта методология непосредственно связана с той предметной областью, ради которой решается вся проблема в целом. Поэтому результаты решения именно этой проблемы в наибольшей степени определяют требования к

решению других частных проблем. По этой же причине именно в решении этой проблемы в наибольшей степени фокусируются результаты решения других частных проблем.

В учебнике с позиции работы органов управления соединений излагаются те основные положения двух первых из числа перечисленных на рис. В.1 методологий, которые составляют теорию количественного обоснования решений и планов применения сил, систем оружия и технических средств — теорию исследования операций.

<p>Методология использования математического моделирования, средств автоматизации управления в работе органов управления силами на различных этапах выполнения свойственных им задач, внедрения принципов методологии в практику управления</p>	<p>Методология создания, поддержания готовности, боевого использования СМОУ, ПОУ, внедрения принципов методологии в практику управления</p>	<p>Методология подготовки кадров разработчиков и пользователей СМОУ и ПОУ, внедрения принципов методологии в практику управления</p>	<p>Методология создания структуры средств автоматизации управления, в том числе сетей ЭВМ, внедрения принципов методологии в практику управления</p>
---	---	--	--

Рис. В.1

Таким образом, теория исследования операций является составной частью методологии МОУ силами, которая в свою очередь, должна развиваться как часть теории управления силами (везде используется установившаяся к настоящему времени терминология).

Потребности исследования операций во многом инициируют развитие методологии МОУ силами, а его методы являются эффективным инструментом формирования положений и рекомендаций методологии. В связи с этим укажем, что выше излагалось одно из направлений (назовем его первым направлением) использования математического моделирования при управлении силами — обеспечение творческой деятельности командира и офицеров органа управления.

Вторым направлением является информационное обеспечение командира, специалистов органа управления. Математическое моделирование при этом используется для

оценки изменения состояния сил и средств за ненаблюдаемые промежутки времени (например, для оценки состояния своих подводных лодок, уже развернутых в море).

Третье направление — это автоматизация нетворческих процессов в органах управления (например, нетворческая обработка, хранение, выдача, рассылка по запросам информации). Здесь можно указать два аспекта применения исследования операций — при создании необходимых аппаратных и программных средств и на этапе их использования.

Четвертое направление использование математического моделирования — автоматизация применения систем оружия и технических средств. Существуют два аспекта и этой проблемы. Первый — создание автоматизированных комплексов, второй — их применение в ожидаемых условиях обстановки. В первом случае разрабатываются математические модели функционирования комплексов в различных возможных условиях обстановки, а их системы управления снабжаются электронно-вычислительными средствами, которые реализуют разработанные модели в процессе функционирования комплекса и подают команды исполнительным механизмам. Применительно к части подобных систем управления появился термин “системы искусственного интеллекта”. Они позволяют создавать комплексы с улучшенными (например, высокоточное оружие), с совершенно новыми (например, разведывательно-ударные комплексы) свойствами, комплексы, способные действовать в условиях, в которых человек действовать не может (на больших глубинах моря, в космосе, при высоких температурах, чрезмерно высоких темпах реагирования на изменение условий, например, при полете самолета и т. п.). Исследование операций — обязательный инструмент при создании таких комплексов, при обосновании их роли, места, цели, способов использования в боевых действиях, при военно-экономических обоснованиях, обосновании конструкторских решений. Второй аспект — обоснование применения уже существующих автоматизированных комплексов в ходе выполнения задачи. Этот аспект является составной частью проблемы управления силами и средствами соединения.

Итак во втором, третьем и четвертом направлениях можно выделить два этапа — создание исходной системы и ее использование в процессе управления. В каждом из этих этапов присутствует творчество создателей систем и их пользователей. На каждом этапе целесообразно использовать математическое моделирование в соответствии с рекомендациями учебника и с учетом специфики конкретной области.

Теория исследования операций — быстро развивающаяся прикладная область знаний. Ее непосредственное применение в работе командира и штаба приводит к тому, что совершенствование методики этой работы вызывает необходимость совершенствования теории исследования операций. В настоящее время, однако, все острее возникает проблема совершенствования методики работы командира и штаба в связи с возможностями новых методов математического моделирования и ЭВМ.

**РАЗДЕЛ I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ (ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ) ПРИ
УПРАВЛЕНИИ СИЛАМИ**

Глава 1. РОЛЬ, МЕСТО, ЦЕЛЬ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ (ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ) ПРИ УПРАВЛЕНИИ

§ 1.1. МЕТОДЫ ПОЗНАНИЯ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ УПРАВЛЯЕМЫХ ПРОЦЕССОВ И ИХ ЭВОЛЮЦИЯ. РОЛЬ И МЕСТО МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СРЕДИ ДРУГИХ МЕТОДОВ

Чтобы управлять, необходимо предвидеть. При принятии решения на боевые действия любого масштаба (бой, операция) необходимо уметь предвидеть эффективность того или иного способа использования своих сил и средств, способы действий противника, условия обстановки на различных этапах выполнения поставленной задачи.

Военное планирование в мирное время требует умения предвидеть: характер войны, цели, способы ее ведения и последствия; какими будут вооруженные силы сторон, их состав и военная техника, способы использования сил и средств, возможности военной экономики сторон; направление и темпы научно-технического прогресса в своей стране и у вероятного противника, характер и влияние научно-технического прогресса на совершенствование производительных сил и т. д.

Способность предвидеть появляется **только с познанием закономерностей управляемых процессов**. Управление без знания таких закономерностей — это управление наугад, вслепую.

Разработка и внедрение объективных методов исследования закономерностей управляемых процессов — важный путь совершенствования управления, и особенно процесса подготовки и принятия решения. Признание существования объективных закономерностей окружающего нас мира, в том числе закономерностей вооруженной борьбы, а также возможности познания этих объективно существующих закономерностей вытекает из решения основного вопроса философии о первичности материи и вторичности сознания.

Закономерности вооруженной борьбы отображаются в форме принципов и положений военного (военно-морского) искусства. В отношении закономерностей нельзя ставить вопрос об их истинности или ложности. Они объективная реальность. Однако закономерности вооруженной борьбы могут быть познаны правильно или неправильно, и отсюда будут правильными или ложными соответствующие принципы и положения военного искусства.

Как закономерности вооруженной борьбы, так и их отражение — принципы и положения военного искусства — могут касаться боевых действий различного масштаба: тактического, оперативного или стратегического. Они могут быть также различной стабильности: быть справедливыми для исторической эпохи, существовать в период применения какого-то вида оружия или же относиться только лишь к ведению боевых действий данными силами против данного противника в данных условиях обстановки.

Как, с помощью каких методов познаются закономерности вооруженной борьбы, формируются принципы и положения военного искусства? Для ответа на этот вопрос полезно обратиться к истории военного искусства и рассмотреть процесс формирования и совершенствования инструментов раскрытия закономерностей, необходимых для целей управления в военной области. Рассмотрение процессов в исторической ретроспективе позволяет выявить тенденции их развития. Козьма Прутков утверждал: “Отыщи всему начало, и ты многое поймешь.”

Армии прошлого имели сравнительно простую структуру — пехота и кавалерия, вооруженные холодным, а затем и огнестрельным оружием. Позже в составе сухопутных войск появился новый род войск — артиллерия. Простую структуру имели и флоты прошлых времен.

Простой структуре армии и флота соответствовал сравнительно простой характер взаимосвязей и взаимоотношений между различными элементами боевого построения сил. Поэтому закономерности, присущие боевым действиям, которые велись армиями и флотами прошлого, могли быть раскрыты с помощью качественного анализа (логических умозаключений). Неслучайно логика — наука о законах и формах мышления — сформировалась еще в IV—III вв. до н. э. В том случае, когда для исследования закономерностей вооруженной борьбы качественного анализа все же оказывалось недостаточно, на помощь привлекался опыт прошлых войн, прошлых боевых действий. Использование такого опыта оказалось тем более эффективным, что низкие темпы технического прогресса той эпохи обуславливали низкие темпы совершенствования оружия. В связи с этим условия ведения боевых действий даже в войнах, разделенных сравнительно большими временными промежутками, были сходными. Поэтому, например, опыт 1-й Пунической войны мог широко использоваться во 2-й и 3-й Пунических войнах. Весьма примечательно, что все великие полководцы и флотоводцы прошлых веков были всегда прекрасными знатоками военной истории, знали в деталях опыт всех сколько-нибудь значительных кампаний и сражений.

Использование логики, опыта оказывалось достаточным и для планирования строительства вооруженных сил той эпохи.

Развитие производительных сил обусловило совершенствование и усложнение оружия, появление совершенно новых видов боевой техники. Параллельно усложнялась и структура вооруженных сил. Дифференцировались старые виды вооруженных сил, например, появлялись подразделения артиллерии различных калибров и различного предназначения, пулеметные подразделения. Рождались новые виды вооруженных сил: автобронетанковые войска, авиация, а затем войска ПВО, ракетные войска. Боевые действия принимали все больший пространственный размах. Достаточно, например, сравнить боевые действия в русско-японскую войну 1904—1905 гг., в первую и вторую мировые войны. Возросла роль всех видов обеспечения действий сил, в том числе и тылового обеспечения, а также подразделений, обеспечивающих боевые действия.

Следствием всего этого явилось усложнение закономерностей вооруженной борьбы. С помощью качественного анализа зачастую становилось невозможным вскрывать закономерности, присущие различным боевым действиям. Не всегда теперь оказывался полезным и опыт прошлых войн. Ускорение темпов технического прогресса привело к ускорению темпов совершенствования оружия и технических средств, ввиду чего условия ведения боевых действий стали резко различаться даже в войнах, отделенных друг от друга сравнительно небольшими временными промежутками. Некритическое использование опыта прошлых войн для целей управления войсками в последующих войнах все чаще стало приводить к пагубным последствиям. Так, например, причиной многих неудач русских войск в русско-японской войне 1904—1905 гг. было некритическое использование опыта русско-турецкой войны 1877—1878 гг. Становилось все более необходимым критическое осмысление опыта, полученного в прошлых войнах. Однако это опять-таки требовало знания закономерностей, присущих вооруженной борьбе. Все чаще имели место случаи, когда необходимый опыт отсутствовал вообще, как, например, сейчас отсутствует опыт ведения боевых действий с использованием ракетно-ядерного оружия.

Непрерывно усложнялось и решение вопросов военного планирования в мирное время, что также потребовало разработки новых и совершенствования старых инструментов познания закономерностей, необходимых для принятия решений в области строительства и совершенствования вооруженных сил.

Все это привело к появлению нового инструмента исследования — моделирования. Рассмотрим кратко особенности этого метода исследования.

Моделирование используется для познания предметов, явлений, процессов, непосредственное исследование которых по каким-либо причинам невозможно. В различных формах оно применяется во многих областях человеческой деятельности. Вот некоторые примеры.

При проектировании нашими инженерами высотной Асуанской плотины (1960) возник вопрос об ее прочности и долговечности. Для решения этого вопроса был воссоздан в уменьшенном масштабе соответствующий участок реки Нил и сооружена модель плотины. Проведенные исследования, в процессе которых имитировались различные состояния реки (паводки, обмеления), позволили сделать вывод о высокой прочности и долговечности проектируемого сооружения.

В конце XVIII в. было установлено, что орбита планеты Уран отличается от расчетной. Была высказана гипотеза, что причиной этого является некая неизвестная планета. С целью проверки гипотезы была проведена серия расчетов (или, как бы сказали сейчас, разработана математическая модель Солнечной системы) для определения местоположения и массы планеты, способной вызвать обнаруженные аномалии в орбите планеты Уран. Расчеты подтвердились: в предвычисленном месте была обнаружена планета, получившая название планеты Нептун. Позже точно таким же образом была открыта планета Плутон.

Для производства операций на мозге человека необходимо было установить, к каким последствиям способны приводить повреждения различных участков мозга. Были проведены опыты с мозгом обезьян, которые позволили получить необходимые данные.

Общим во всех этих примерах является невозможность исследования самого предмета (явления), а потому необходимость создания его модели, изучения интересующих исследователя свойств предмета (явления) на этой модели. Сходными, в общих чертах, являются и этапы исследования с использованием моделирования.

Необходимо отметить, что всякая модель должна отвечать противоречивым требованиям: с одной стороны, модель должна быть сходной с изучаемым предметом (явлением) в такой степени, чтобы не искажались исследуемые закономерности, с другой — отличаться от него в такой степени, чтобы было возможно исследование его свойств. (Коль скоро предмет по каким-либо причинам не поддается непосредственному исследованию, невозможно будет исследовать и точную его копию. Нельзя в качестве модели Вселенной брать саму Вселенную!) Поэтому первым этапом исследования обязательно является предварительное изучение особенностей предмета (явления). В процессе этого изучения из всего бесчисленного множества элементов, составляющих предмет или явление, и из бесчисленного множества связей и зависимостей между этими элементами выделяются такие элементы и такие связи и зависимости, от которых в наибольшей степени зависят исследуемые свойства предмета (явления). Именно эти элементы, связи и зависимости и должны быть отражены в модели.

Например, в модели для определения местоположения планеты Нептун из всего бесчисленного множества элементов, составляющих Вселенную, были учтены лишь Солнце и ближайшие к планете Уран планеты Солнечной системы, а из всего множества взаимосвязей между ними — силы взаимного притяжения.

В зависимости от возможностей и удобства разработки модели и удобства исследования формы отображения в модели элементов предмета (явления) и взаимосвязей между этими элементами могут быть различными: механическими (пример с моделью плотины), логико-математическими (пример с

моделью Солнечной системы), биологическими (пример с моделью мозга человека), химическими и т. д. Часто модели классифицируют как натурные и математические.

После того как модель разработана, начинается изучение интересующих исследователя свойств и закономерностей предмета (явления). Однако следует учесть, что выявленные при этом свойства и закономерности относятся к модели предмета, а не к самому предмету. Поэтому очень важным последующим этапом исследования является перенесение выявленных на модели свойств и закономерностей на исследуемый предмет или явление. Так, в примере с моделированием повреждений мозга человека необходимо было решить, насколько идентичны (или насколько отличны) обнаруженные результаты повреждения различных участков мозга обезьяны и результаты повреждения тех же участков мозга человека. Как правило, решение подобных проблем требует применения интуиции, логики, здравого смысла, опыта.

Выше были рассмотрены примеры использования моделирования для изучения предметов и явлений природы. Однако моделирование может быть использовано и для исследования социальных процессов, являющихся результатом целенаправленной деятельности людей. Пионерами в этой области явились военные исследователи. Именно они впервые использовали натурное моделирование: боевые действия войск моделировались маневрами, учениями, боевыми упражнениями. Вообще говоря, боевые упражнения и учения проводились в армиях и на флотах с самых древнейших времен. Однако если ранее они были главным образом средством тренировки бойцов и подразделений, то по мере усложнения форм и методов вооруженной борьбы они все чаще начинают становиться инструментом для развития военного искусства, способом проверки рациональности использования новых тактических приемов, новых образцов вооружения, правильности положений, принципов военного искусства, раскрытия закономерностей вооруженной борьбы.

Впервые тактические учения для этих целей были введены в конце XVII в. в русской армии Петром I. О методах организации и проведения тактических учений и маневров того времени можно судить хотя бы по так называемому Кожуховскому походу 1694 г. Целями двухсторонних “кожуховских маневров” были: отработка штурма крепости, форсирование водной преграды, проверка готовности армии к Азовскому походу. Следует заметить, что на западе подобные двухсторонние учения были впервые осуществлены лишь в 1778 г. во французской армии.

Значительный вклад в дело совершенствования методов проведения учений и внедрения учений в практику подготовки войск внесли выдающиеся русские полководцы и флотоводцы П. А. Румянцев, А. В. Суворов, Ф. Ф. Ушаков.

В конце XIX в. в России были проведены военные реформы, коснувшиеся всех сторон устройства и подготовки русских вооруженных сил. Маневры и учения приобретают все большее значение как для поддержания постоянной боевой готовности войск и флота, отработки взаимодействия соединений и частей, так и для исследования организационных и оперативно-тактических вопросов, для проверки теоретических положений.

В Советских и Российских Вооруженных Силах учения и маневры являлись и являются мощным инструментом для изучения закономерностей военных действий, для разработки принципов и положений военного искусства.

Развитие производительных сил, совершенствование и усложнение вооружения, усложнение структуры вооруженных сил и закономерностей ведущихся ими боевых действий вызвали к жизни

еще один вид моделирования — военные игры* . Военные игры, как учения и маневры, имеют давнюю историю и эволюционировали от инструмента, служащего цели отработки командным составом вопросов управления силами, до инструмента исследования закономерностей боевых действий. Необходимость более полного учета динамики боевых действий при оценке различных вариантов использования сил (своих и противника) привела к комбинированному использованию военных игр и учений (военные игры с обозначенными силами, последовательное использование военных игр и учений).

Натурное моделирование (военные игры, учения, маневры) представляет большие возможности для изучения закономерностей боевых действий, однако оно не является универсальным, так как не всегда применимо. Не все виды боевых действий можно моделировать подобным образом. В ряде случаев такое моделирование требует чрезвычайно больших материальных затрат либо же бывает невыполнимым из-за недостатка времени. А как быть, если исследование проводится для обоснования решения о серийном производстве нового оружия? Очень часто ввиду случайного (в вероятностном смысле) характера процесса боевых действий и их моделей — игр, учений и маневров — бывает трудно судить, насколько закономерен полученный результат. Например, на учениях новый тактический прием (новый образец оружия) показал высокую эффективность. Что это — результат закономерности или благоприятного стечения обстоятельств?

Необходимость компенсировать ограниченность рассмотренных методов раскрытия закономерностей вызвала появление еще одного инструмента исследования — математического моделирования. Отличительная особенность этого метода заключается в том, что для исследования процессов вооруженной борьбы разрабатываются их математические модели. Исследование закономерностей вооруженной борьбы (или других целенаправленных действий человека) с использованием математического моделирования получило название *исследования операций*.

Вначале математическое моделирование использовалось для исследования сравнительно простых процессов боевых действий, например, оценки эффективности стрельбы, определения наилучших способов маневрирования корабля при занятии заданной относительно уравнивателя позиции*. При этом для разработки моделей применялся аппарат классической математики и теории вероятностей. Однако в настоящее время исследование операций применяется для изучения самых сложных процессов вооруженной борьбы. Это стало возможным благодаря разработке специальных математических методов моделирования: теории массового обслуживания, метода статистического моделирования, теории надежности, линейного, нелинейного и динамического программирования, теории игр, теории статистических решений и др.

Далее появилась и еще одна причина, которая способствовала более широкому внедрению методов исследования операций в практику управления: острое противоречие между потребностью увеличивать время для выработки обоснованных решений, планов применения сил, использования средств, с одной стороны, и необходимостью сокращать это время, увеличивая темпы ведения боевых действий, — с другой.

Только внедрение в практику управления математического моделирования на базе современной ЭВТ и других технических средств автоматизации управления дает возможность разрешать

* * Военные игры получили активное развитие с начала XIX столетия, а их аналог в области управления экономикой — так называемые деловые игры — с середины XX столетия.

* * Первые такие модели были разработаны выдающимся русским адмиралом Г. И. Бутаковым (1820—1882), положившим, таким образом, начало тактической навигации — науке о способах маневрирования кораблей.

указанное выше противоречие, свойственное управлению силами в современных условиях: с одной стороны, эти методы позволяют с высокой степенью научной объективности раскрывать сложные закономерности вооруженной борьбы для выработки обоснованных решений и планов, с другой — предоставляют возможность повысить темпы управления за счет автоматизации процессов управления.

Разработка новых методов раскрытия закономерностей вооруженной борьбы никогда не означала отказа от старых. Наоборот, они подвергались совершенствованию путем использования аппарата и приемов новых методов. В то же время при формировании новых методов учитываются возможности применения методов, существовавших ранее.

Следует иметь в виду, что при этих условиях никакой из перечисленных выше методов раскрытия закономерностей вооруженной борьбы не является универсальным, каждый из них способен раскрыть определенные закономерности, свойства сил, средств — своих и противника — в тех или иных условиях обстановки. Поскольку командиру для обоснованного управления силами необходимо знание комплекса присущих этому процессу закономерностей (знание качества), то необходимо комплексное использование всех методов их познания. Замечательные примеры комплексного использования различных методов раскрытия закономерностей вооруженной борьбы — результатов накопленного опыта, качественного анализа (логики), натурального моделирования (учений, военных игр), математического моделирования (оперативно-тактических расчетов) — показали Г. К. Жуков, А. М. Василевский и другие полководцы и флотоводцы во время Великой Отечественной войны.

Таким образом, процесс совершенствования методов познания и использования в практике управления закономерностей вооруженной борьбы не остановится на ныне достигнутом уровне, поскольку не исчезли причины, его стимулирующие: совершенствование орудий и средств производства, совершенствование средств ведения вооруженной борьбы и, как результат, усложнение структуры вооруженных сил, усложнение закономерностей вооруженной борьбы и условий ее ведения. Впереди в области военного искусства окажется тот, кто будет обладать арсеналом более эффективных инструментов познания и умением их использовать.

История военного искусства свидетельствует, что полководцы и флотоводцы, отмеченные в истории как “прославленные”, “выдающиеся”, обязательно относились к категории людей, считающих, что они еще недостаточно полно знают механизм боя, боевых действий. Они обязательно отличались от своих противников использованием новых инструментов раскрытия закономерностей вооруженной борьбы. Такими были Петр I, П. А. Румянцев, А. В. Суворов, Ф. Ф. Ушаков, М. И. Кутузов, Г. К. Жуков, А. М. Василевский.



Рис. 1.1

Схематично роль и место исследования операций в настоящее время при выработке решения по поставленной задаче, планов применения сил, использования средств показаны на рис. 1.1. Следует иметь в виду, что на этом рисунке не отражен факт нескончаемости процесса совершенствования методов познания закономерностей управляемых процессов. Аналогичны роль и место исследования операций в научно-исследовательской работе, направленной на совершенствование сил, средств и способов их применения.

Чтобы сформулировать цель исследования операций (цель использования математического моделирования при управлении силами), необходимо рассмотреть свойства математических моделей вооруженной борьбы. Эти свойства, в свою очередь, связаны с проблемой эффективности вооруженной борьбы.

§ 1.2. СВОЙСТВА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПРИМЕНЕНИЯ СИЛ, ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СРЕДСТВ. ЦЕЛЬ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИ УПРАВЛЕНИИ

1.2.1. Показатели эффективности вооруженной борьбы

Боевые действия ведутся с определенной целью, которая достигается выполнением силами поставленной задачи. *Эффективностью боевых действий* называется ожидаемая мера достижения поставленной в боевых действиях цели, а *показателем (критерием) эффективности* — численная мера степени достижения этой цели. Эти основополагающие определения, а также возможные типы показателей эффективности и принцип их выявления в конкретных условиях обстановки

разработаны выдающимся советским математиком академиком А. Н. Колмогоровым. Еще в 1945 г. им была опубликована работа “Число попаданий при нескольких выстрелах и общие принципы оценки эффективности системы стрельбы”. Принцип определения показателя эффективности систем стрельбы оказался настолько общим, что лег в основу теории эффективности самых различных систем. Этот принцип состоит в установлении строгого соответствия между целью, которая должна быть достигнута в результате боевых действий, и избираемым показателем эффективности.

Таким образом, вид показателя эффективности является производной категорией, определяется сформулированной командиром целью действий сил, которая, в свою очередь, определяется командиром в результате уяснения поставленной задачи. Сформулированный принцип устанавливает очень важную зависимость между творческой деятельностью командира в процессе уяснения задачи и математическим моделированием, осуществляемым для обоснования принимаемого решения. Как увидим позже, эта зависимость не единственная.

Существует связь между эффективностью боевых действий и ущербом, который может быть причинен противнику в процессе этих действий, но эти понятия неадекватны. Академиком А. Н. Колмогоровым установлены два типа зависимости эффективности от причиняемого противнику ущерба и соответственно два типа показателей эффективности.

Предварительно следует заметить, что в зависимости от характера выполняемой силами задачи в качестве ущерба, причиняемого противнику, могут выступать:

- пораженные объекты, живая сила, техника противника;
- обнаруженные объекты противника или объекты, с которыми поддерживается контакт;
- продолжительность поддержания разведчиками контакта с объектом противника;
- время, на которое сокращено функционирование объекта противника (аэродрома, порта, корабля, самолета-корректировщика, огневой точки);
- предотвращенный ущерб своим объектам, живой силе, технике и т. д.

Ущерб, который может быть причинен противнику в предстоящих боевых действиях, является случайной величиной, так как этот ущерб зависит от двух групп факторов: случайных (например, факт обнаружения или необнаружения противника силами разведки, момент обнаружения противника, рассеивание снарядов, ракет, торпед, бомб и т. д.) и неслучайных (число огневых установок на кораблях различного типа, удаление баз противника от пунктов базирования своих сил и т. д.). Поэтому в качестве показателей эффективности боевых действий, вообще говоря, выступают вероятностные характеристики.

Первый тип зависимости эффективности \mathcal{E} от ущерба U характеризуется наличием порогового ущерба U^* (рис. 1.2). Если величина причиняемого противнику ущерба не превосходит величины порогового ущерба, цель боевых действий не может считаться достигнутой, если же превосходит — цель боевых действий достигнута*. Показателем эффективности в этом случае является вероятность $P(U \geq U^*)$ того, что в результате боевых действий противнику будет причинен ущерб не меньше порогового ущерба, иначе говоря, вероятность достижения поставленной цели. Например, если ударным силам поставлена цель срыва морских перевозок противника, а для достижения этой цели необходимо уничтожить не менее 50 % транспортов, то показателем эффективности является вероятность уничтожения не менее 50 % транспортов.

* Таким образом, точка U^* есть точка перехода количества в качество.

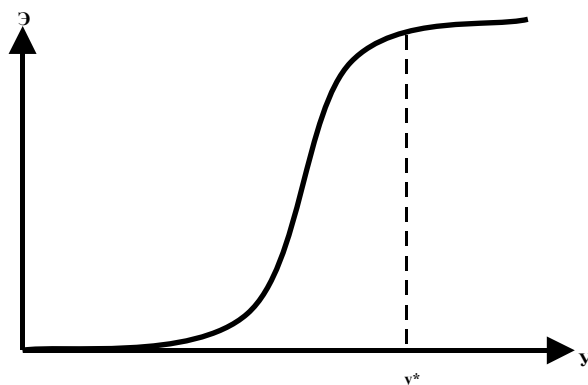


Рис. 1.2

Рассмотрим подробнее случай, когда целью действия сил является поражение одного объекта противника. Поражением называется причинение объекту таких повреждений, при которых дальнейшее функционирование объекта в течение необходимого срока становится невозможным. Показатель эффективности в этом случае — вероятность поражения объекта. Например, если целью действия сил против авианосца противника является срыв ударов авианосной авиации по нашим объектам, то для поражения авианосца необходимо причинить ему такие повреждения, при которых использование авианосной авиации становится невозможным. Показатель эффективности удара по авианосцу при этом — вероятность поражения авианосца до подъема с него авиации.

В ряде случаев в зависимости от особенностей объекта противника, характера выполняемой силами задачи поразить объект — это значит уничтожить его. В некоторых оперативно-тактических ситуациях показателями эффективности в виде вероятности достижения поставленной цели могут являться:

- вероятность обнаружения объекта противника к заданному моменту времени;
 - вероятность слежения за объектом противника на заданный момент времени;
 - вероятность подавления помехами работы радиотехнической системы противника;
 - вероятность срыва помех противника работе нашей радиотехнической системы
- и т. д.

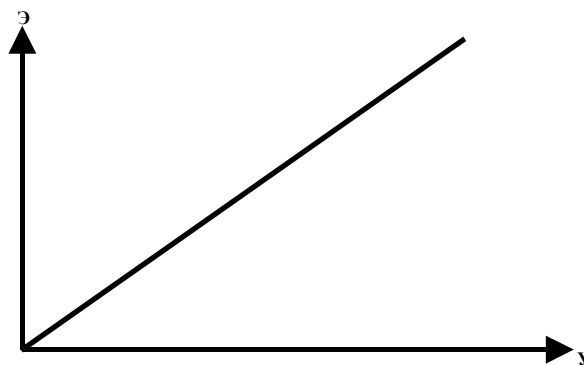


Рис.1.3

Второй тип зависимости эффективности от ущерба имеет место, когда целью действия сил является причинение противнику максимально возможного ущерба (рис. 1.3). Показателем

эффективности при этом является математическое ожидание причиняемого противнику ущерба. Например, если определенная командиром цель действия сил заключается в поражении максимально возможного числа объектов противника, то соответствующим этой цели показателем эффективности является математическое ожидание числа пораженных объектов противника. Если целью действия сил является срыв или максимальное ослабление ударов противника по нашим объектам, то показатель эффективности — математическое ожидание $M(U)$ предотвращенного ущерба U нашим объектам (или математическое ожидание числа неуничтоженных наших объектов). И т. д.

Рассмотренные два типа показателей и используются для оценки эффективности боевых действий. Подчеркнем, что показатель эффективности является объективно существующей категорией. Коль скоро существует цель действий сил, то этой цели соответствует совершенно определенный показатель эффективности. Тип показателя эффективности можно лишь выявить, но его нельзя назначить. Другое дело, что в некоторых случаях при моделировании боевых действий оказывается целесообразным применять вместо показателя эффективности параметр, эквивалентный показателю эффективности, производный от показателя эффективности и являющийся более рациональным с точки зрения упрощения модели либо повышения наглядности представления результатов анализа. Рассмотрим некоторые ситуации, при которых такая замена становится целесообразной.

1. Математическая модель разрабатывается с целью обоснования такого способа применения сил или такого района нанесения силами удара по противнику, при которых наряд сил, необходимый для выполнения задачи с эффективностью не ниже заданной, минимален. В этом случае при моделировании в качестве показателя эффективности принимается наряд сил, который требуется минимизировать, а “истинный” показатель эффективности (будь то вероятность причинения противнику ущерба не ниже заданного или математическое ожидание причиняемого ущерба) выступает в модели в качестве ограничивающего условия. Однако эта задача может быть решена и при использовании “истинного” показателя эффективности.

2. Целью моделирования является определение характера зависимости показателя эффективности $\mathcal{E}(x)$ от параметра x (например, от дистанции нанесения удара по противнику, от наряда сил и т. п.). В ряде случаев может оказаться, что объективно существующий (истинный) показатель эффективности невычислим либо требует для своего вычисления слишком громоздкой модели. Возникает проблема замены показателя эффективности эквивалентным параметром (“понижения уровня показателя эффективности”). Это возможно, если модель имеет структуру вида

$$\mathcal{E}(x) = A + Bg(x)$$

или

$$\mathcal{E}(x) = A + B^{Cg(x)},$$

где A , B , C — рациональные числа, вычисляемые с помощью специальных моделей. Тогда показатель эффективности находится либо в прямой (обратной) зависимости от параметра x , либо является монотонно возрастающей (убывающей) функцией этого параметра. В обоих случаях вместо показателя эффективности $\mathcal{E}(x)$ для исследования может использоваться функция $g(x)$.

3. Моделирование осуществляется с целью совершенствования некоторой системы (или некоторого способа применения сил). При этом в ряде случаев для оценки эффективности планируемых мероприятий целесообразно использовать абсолютное либо относительное приращение показателя эффективности функционирования системы или боевых действий сил:

$$\Delta_a = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1; \Delta_0 = \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_1}$$

где $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ — показатели эффективности функционирования системы (боевых действий сил) соответственно до и после проведения мероприятий по совершенствованию.

Из приведенных примеров следует, что для определения показателя эффективности, используемого при разработке математической модели, необходимо учитывать цель моделирования и особенности моделируемого процесса.

Для более глубокого проникновения в механизм планируемых боевых действий наряду с показателем эффективности боевых действий (основным показателем эффективности) оказывается необходимым использовать некоторые параметры, характеризующие различные стороны и особенности этих действий. Они называются *дополнительными (вспомогательными) показателями эффективности* и по своему предназначению могут быть разделены на группы:

— параметры, характеризующие ограничения, которые должны учитываться при разработке решения по поставленной задаче, планов применения сил и средств. В качестве примера можно привести ограничения на потери своих сил и средств, расход материально-технических средств, выделенное время и т. д.;

— параметры, позволяющие выявить слабые и сильные стороны в способах применения сил и средств, своих и противника: показатели эффективности выполнения силами частных задач, показатели эффективности различных видов обеспечения (разведки, РЭБ и т. д.), системы управления и ее подсистем, потери своих сил и сил противника на различных этапах выполнения поставленной задачи и др.

Только совместный анализ основного и дополнительных показателей эффективности позволяет осуществить сравнительную оценку разработанных альтернативных вариантов применения сил (подвести итог предыдущей творческой деятельности командира и штаба), а также выявить слабые и сильные стороны разработанных вариантов (стимулировать дальнейшую творческую деятельность командира и штаба).

Основной и дополнительные показатели эффективности составляют *систему показателей эффективности* данной командной инстанции. Эта система является подсистемой в системе показателей иерархии командных инстанций. Например, при подготовке боя будут существовать подсистемы показателей эффективности командования соединения; командиров групп, составляющих боевой порядок соединения; начальников служб, руководящих проведением различных видов обеспечения; командиров ударных, поисковых и других единиц, составляющих группы боевого порядка. При этом параметры, которые в системе показателей эффективности старшей командной инстанции являются дополнительными показателями или же используются в математических моделях при вычислении основного и дополнительных показателей, в системе показателей младших командных инстанций могут выступать основными показателями эффективности. Таким образом, при рассмотрении математических моделей можно видеть многоуровневый характер входящих в модели параметров. Число уровней параметров в модели зависит от построения сил и цели моделирования. Существует требование непротиворечивости показателей эффективности низших уровней показателям эффективности более высоких уровней.

Требование непротиворечивости показателей эффективности различных уровней в настоящее время иногда принято называть требованием системного подхода. Следует отметить, что в военном искусстве издревле существует аналогичное требование непротиворечивости целей, которые должны

достигаться различными соединениями, кораблями и частями, участвующими в выполнении поставленной задачи. Выработано и правило, обеспечивающее выполнение этого требования. Заключается оно в следующем. Уясняя поставленную задачу, командир должен прежде всего уяснить цель действий высшего соединения, затем — роль и место своего соединения или корабля в достижении этой цели, а после этого уже определить цель действий своего соединения (корабля). Последовательное и грамотное выполнение этого правила командирами различных инстанций гарантирует строго согласованные действия всех участвующих в выполнении задачи сил — от соединения до отдельного ракетного катера — и полное соответствие целей сил. Но при этом “автоматически” гарантируется и строгое соответствие показателей эффективности для различных сил, участвующих в выполнении поставленной задачи (для различных уровней исследования). Необходимо только правильное и последовательное применение разработанного А. Н. Колмогоровым принципа выбора показателя эффективности.

Итак, для определения показателя эффективности, используемого при математическом моделировании действий сил, необходимо:

1. Определить цель действия сил, для чего предварительно определить цель действий высшего соединения, а также роль и место подчиненных сил в достижении этой цели.

2. Используя принцип Колмогорова, установить соответствующий цели действия сил показатель эффективности. При первом типе показателя эффективности — вероятности $P(Y \geq Y^*)$ того, что причиняемый противнику ущерб Y не будет ниже порогового значения Y^* — установить численное значение порогового ущерба.

3. На основании цели моделирования, особенностей моделируемого процесса оценить целесообразность (необходимость) замены показателя эффективности эквивалентным параметром и определить его.

4. Определить дополнительные показатели эффективности.

Из сказанного выше следует, что показатель (критерий) эффективности выполнения силами поставленной задачи — численная мера степени достижения цели в результате выполнения поставленной задачи — в принципе один, так как силы в бою, операции, сражении, атаке, ударе преследуют всегда одну цель (за двумя зайцами не гоняются). Дополнительные показатели эффективности лишь описывают условия достижения цели действия сил. Однако бывают ситуации многокритериальности, когда для обоснования применения сил используется несколько показателей эффективности. Существует две причины, приводящие к такой ситуации: невозможность обоснованно сформулировать цель действий; невозможность разработать модель для вычисления показателя эффективности, если даже сформулирована цель действий сил.

Например, при обосновании способа радиопередачи в направлении подводные лодки — берег для командира может оказаться затруднительным так сформулировать цель передач, содержащих некоторую текущую информацию (о расходовании ресурсов, состоянии личного состава), чтобы было видно влияние этих передач на эффективность выполнения поставленной подводной лодке задачи. В качестве показателей эффективности связи в этом случае будут выступать все три ее тактических параметра, характеризующих надежность, быстроту и скрытность связи. При удачном (для исследователя) стечении обстоятельств может оказаться, что различные варианты организации передачи сообщения ухудшают или улучшают сразу все три параметра. Чаще же всего улучшение одного свойства связи достигается за счет ухудшения другого. Например, повышение надежности передачи сообщения может достигаться лишь за счет снижения скрытности, или быстроты, или того и другого свойства сразу.

В случае многокритериальной задачи цель моделирования — раскрыть командиру механизм зависимости избранных показателей эффективности от исследуемого фактора (например, тактических параметров связи от различных вариантов организации передачи сообщений), как можно полнее показать характер взаимозависимостей между показателями эффективности. Эти знания помогут командиру глубже оценить обстановку и отобрать лучший вариант действий. Более активно можно использовать количественные методы для обоснования лучшего варианта действий, если командир способен указать допустимые граничные значения всех показателей эффективности. В частном случае это может быть требование оптимизации одного показателя при ограничениях, наложенных на другие показатели (например, добиться максимально возможной надежности передач сообщений при быстроте и скрытности не хуже определенных значений). Количественные методы при этом используются для обоснования варианта, удовлетворяющего заданным ограничениям.

Граничные значения показателей командир определяет, используя результаты моделирования, качественный анализ, накопленный опыт, интуицию. Если заданным командиром условиям отвечают сразу несколько вариантов, отбор лучшего из них осуществляется также с использованием качественного анализа, опыта, интуиции.

1.2.2. Свойства математических моделей вооруженной борьбы. Цель их использования при управлении силами и средствами флота

а) Модель есть некоторый объект, с помощью которого можно производить эксперименты для выявления необходимых закономерностей функционирования систем*. Модель никогда не является копией исследуемой системы. Модель создается тогда, когда систему по каким-либо причинам невозможно исследовать непосредственно. Поэтому моделям, как уже отмечалось, должны быть присущи два свойства: они должны отличаться от исследуемых систем в такой степени, при которой возможно их изучение и должны быть сходны с исследуемыми системами в такой степени, чтобы не искажались исследуемые закономерности.

Для того чтобы разработать модель, обладающую этими свойствами, необходимо выявить те элементы системы, от которых зависят исследуемые закономерности. Именно эти (и только эти!) элементы и должны быть отражены в модели. Математическая модель боевых действий отражает характер влияния на значение показателя эффективности параметров, характеризующих силы противника, свои силы, военно-географические условия, которые являются важными и существенными для исследуемых закономерностей.

б) Не существует универсальных моделей боевых действий: модели, необходимые для раскрытия различных закономерностей одних и тех же боевых действий будут, как правило, отличаться друг от друга, что следует из п. “а”. Например, модель для оценки влияния радиосвязи на эффективность удара подводных лодок по соединению боевых кораблей будет отличаться от модели для оценки влияния на эффективность такого удара свойств торпедного оружия.

в) Изменение условий ведения боевых действий, состава используемых сил и средств, способов их использования, военно-географических условий вызывает необходимость корректирования или полной переделки модели.

* Термин “объект” здесь используется в широком смысле. Объектами, в частности, являются и маневры, и учения, и военные игры, и математические модели. Можно также говорить о моделях как об условных или мысленных образах.

г) Выявление закономерностей боевых действий с помощью методов математического моделирования осуществляется путем сравнительной оценки показателей эффективности боевых действий. Следует особо подчеркнуть, что математические модели по самой своей природе (см п. “а”) не позволяют, как правило, давать абсолютную оценку величины объективно существующей эффективности. Точной является не та модель, которая дает значения показателя эффективности, более близкие к объективно существующим, а модель, которая более точно отражает характер исследуемых закономерностей.

Поясним сказанное следующим примером. Допустим, исследуется закономерность $\mathcal{E}(d)$ влияния на эффективность выполнения силами боевой задачи дистанции боя d . Пусть объективно существующая зависимость $\mathcal{E}(d)$ характеризуется кривой A на рис. 1.4. Тогда математическая модель, которой соответствует

график B функции $\mathcal{E}_B(d)$, является точной, так как позволяет правильно оценить оптимальную дистанцию $d_{\text{опт}}$ боя. А математическая модель, которой соответствует график A функции $\mathcal{E}_A(d)$, является неточной, так как неверно отражает зависимость от дистанции боя показателя эффективности выполнения силами задачи. Между тем график B всеми своими точками ближе к графику A , чем график A .

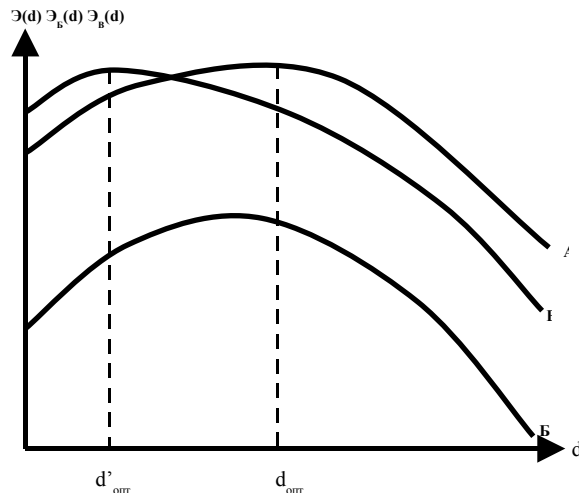


Рис.1.4

Таким образом, при разработке математической модели необходимо добиваться идентичности объективно существующего и воспроизводимого моделью характера зависимости показателя эффективности от исследуемого фактора, а не точности определения показателя эффективности, так как это в принципе (см. п. “а”) невозможно осуществить с помощью одних математических моделей. Для определения “абсолютной” эффективности (кроме некоторых случаев самых простых тактических ситуаций) необходимо комплексное использование опыта, качественного анализа, натурного и математического моделирования.

Пример 1.1. Методами математического моделирования произведена сравнительная оценка эффективности выполнения задачи заданными нарядами сил s_1, s_2, s_3 для некоторых условий обстановки. Полученные значения показателей эффективности представлены на рис. 1.5. в виде сплошных линий.

В результате обработки статистических данных, собранных на учениях (т. е. при натурном моделировании), получена эффективность выполнения в рассматриваемых условиях той же задачи нарядом сил s_4 . Анализом условий проведения учения установлено, что эти условия были весьма близки к боевым.

Произведем для наряда сил s_4 оценку эффективности выполнения задачи с помощью математической модели, которая использовалась для оценки эффективности нарядов s_1, s_2, s_3 , и нанесем на график (см. сплошную линию для s_j).

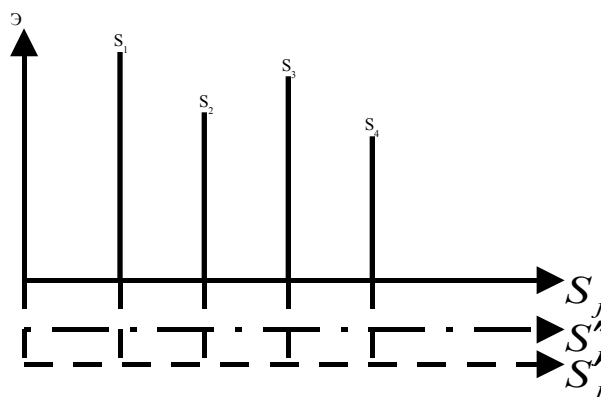


Рис.1.5

Откорректируем теперь показатель эффективности выполнения задачи нарядом сил s_4 по данным результатов натурного моделирования (см. на графике пунктирную линию s'_j). Тем самым будут откорректированы положение оси абсцисс на графике, а значит, и показатели эффективности выполнения задачи нарядами сил s_1, s_2, s_3 . Таким образом, в оценку эффективности нарядов сил s_1, s_2, s_3 внесен опыт натурного моделирования.

Однако учение — всего лишь модель. Полученный на этой модели показатель эффективности отличается от объективно существующего показателя. Допустим, что с помощью экспертов, имеющих опыт боевых действий и знающих особенности проведения учений, оценена степень влияния условностей учения на эффективность действия наряда сил (см. ось абсцисс s''_j на графике). Показатели эффективности нарядов сил s_1, s_2, s_3, s_4 , отсчитываемые от оси абсцисс s''_j , оказываются вычисленными с учетом результатов математического, натурного моделирования, качественных оценок экспертов.

д) Для боевых действий крупного масштаба (бой, операция) в большинстве реальных ситуаций невозможен учет в математической модели всех факторов, влияющих на закономерности, знание которых необходимо командиру. Например, невозможно учесть в математической модели так сильно влияющие на ход и исход боевых действий морально-политические и морально-психологические факторы, многие факторы неопределенности в обстановке, некоторые способы взаимодействия сил и т. д. Разработка математической модели всегда связана с принятием ряда допущений и ограничений, искажающих так или иначе реальный процесс, например с заменой сложных фактических законов распределения случайных величин хорошо изученными теоретическими законами, неучетом факта зависимости между случайными величинами и т. д. Иногда эти допущения и ограничения

объясняются особенностями моделируемой ситуации, иногда — несовершенством математического аппарата, используемого в настоящее время для моделирования конкретного явления, процесса.

Следует считать, что в принципе никогда не будет возможно адекватно точное отражение в математических моделях таких сложнейших социальных процессов, какими являются бои, операции. Поэтому раскрытые с помощью математических моделей закономерности будут справедливы, вообще говоря, только для самих моделей, а не для исследуемых процессов. По этой причине при выработке рекомендаций для принятия решения результаты математического моделирования должны дополняться качественным анализом, результатами натурного моделирования (учений, военных игр), имеющимся опытом.

Однако для некоторых простых процессов боевых действий (обычно в низшем тактическом звене) можно разработать математические модели, настолько полно отражающие необходимые свойства процесса, что результаты моделирования могут быть использованы для выдачи непосредственных управляющих сигналов (команд). К числу таких процессов относятся процессы применения артиллерийских, торпедных, ракетных установок, некоторых систем связи, наблюдения, радиоэлектронного противодействия, энергетических установок.

е) Анализируя свойства математических моделей использования сил и средств флота, нельзя не отметить их сложность. Лишь в незначительном числе случаев эти модели дают возможность выявить необходимые закономерности путем непосредственного анализа полученных формульных зависимостей. Обычно же требуется производить многочисленные и трудоемкие оперативно-тактические расчеты — осуществлять математическое моделирование. Математическое моделирование для целей управления силами требует, за незначительными исключениями, применения электронно-вычислительной техники. Можно даже утверждать, что возможность применения методов исследования операций для управления силами появляется только тогда, когда командир имеет возможность на соответствующем этапе управления использовать ЭВТ.

ж) Выше (см. введение, § 1.1) уже отмечались два замечательных свойства математических моделей:

— способность отражать влияние на величину показателя эффективности комплекса даже противоречиво действующих факторов. Здесь можно добавить, что математическая модель позволяет проследить закономерность влияния на ход и исход боевых действий каждого из факторов в отдельности на фоне фиксированного состояния остальных факторов;

— возможность алгоритмического представления математических моделей, привлечения для их реализации ЭВТ и, как следствие, возможность автоматизации управляемых процессов.

Об использовании этих двух свойств моделей для разрешения главного диалектического противоречия управления уже говорилось во введении.

Все сказанное выше (пп. “а” — “ж”) о свойствах математических моделей боевых действий позволяет сформулировать цель использования математического моделирования при управлении: повышение эффективности вырабатываемых решений и планов, повышение оперативности их разработки и проведения в жизнь. Для достижения этой цели необходимы соответствующие организация и методы использования математического моделирования (методов исследования операций). При их разработке требуется учесть в комплексе три фактора: свойства математических моделей боевых действий сил; природу современных боевых действий на море и условия управления силами и средствами; возможности современной ЭВТ и других технических средств автоматизации управления.

Свойства математических моделей боевых действий рассмотрены ранее (см. § 1.2), возможности современной ЭВТ и других технических средств автоматизации управления изучаются в специальных курсах. Условия управления силами и средствами (с точки зрения использования математического моделирования) будут изложены в гл. 2.

Глава 2. ОРГАНИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ. ЭВРИСТИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ УПРАВЛЕНИЯ СИЛАМИ

Под *организацией математического моделирования* понимается вся последовательность мероприятий (их этапы) от момента времени, когда потребовалось осуществить математическое моделирование с определенной целью, и до момента времени, когда командиром, офицером штаба, исполнительным механизмом будут получены непосредственные результаты моделирования. Организация математического моделирования в управляемых системах различного типа изложена в § 2.1, 2.2.

Под *использованием математического моделирования* при управлении силами понимается более широкий процесс, включающий выявление необходимости моделирования, его целей, организацию математического моделирования с учетом динамики управления, использование его результатов командиром при управлении силами. Творческая форма использования математического моделирования — эвристическая оптимизация — рассматривается в § 2.3, организационная — математическое обеспечение управления — § 2.4, 2.5.

§ 2.1. ЭТАПЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

Деление процесса исследования операций на этапы определяется свойствами математических моделей вооруженной борьбы. Содержание и условия выполнения этапов оказывают влияние на организацию использования математического моделирования при управлении, определяют состав специалистов, участвующих в математическом моделировании для целей управления (в исследовании операций).

Первый этап — оперативно-тактическая (тактико-специальная) постановка задачи для разработки математической модели. Содержанием этого этапа является:

- а) определение цели применения сил, использования средств (цели действий сил);
- б) определение цели моделирования, т. е. указание, что именно должно быть обосновано и какие именно закономерности с помощью модели должны быть выявлены; указание факторов обстановки, характеристики которых (дополнительные показатели эффективности) необходимы командиру для выявления сильных и слабых сторон (узких мест) разрабатываемого способа применения сил, использования средств;
- в) оперативно-тактическое описание исследуемой ситуации, т. е. определение тех элементов обстановки, касающихся сил противника, своих сил, военно-географических условий, фактора времени, от которых зависят исследуемые закономерности и которые должны быть отражены в модели. Постановку задачи осуществляет командир, офицер штаба, т. е. лицо, в интересах которого

осуществляется математическое моделирование. Командир может осуществить не всю постановку задачи, а лишь ее основную часть, возложив детализацию на соответствующих офицеров штаба.

Второй этап — разработка математической модели. Математическая модель должна в логико-математической форме отражать влияние на величину показателя эффективности тех элементов обстановки, которые указаны командиром в оперативно-тактической постановке задачи. Второй этап осуществляется на основании уяснения оперативно-тактической постановки задачи и включает:

а) определение основного и дополнительных показателей эффективности (системы показателей эффективности);

б) формализованную постановку задачи — описание ситуации (изложенной в оперативно-тактической постановке задачи) с использованием понятийного аппарата исследования операций, чтобы составить суждение о структуре математической модели;

в) разработку замысла моделирования: определение частных целей моделирования, достижение которых позволяет достичь общей цели; определение необходимых вариантов расчетов, рациональной последовательности их выполнения и управляющих параметров для каждого варианта; определение перечня данных (основных и дополнительных показателей эффективности), которые должны быть получены в результате моделирования на различных его этапах; определение формы выдачи результатов. В целом выполнение пп. “а”, “б”, “в” должно позволить специалисту по исследованию операций выявить математический аппарат, необходимый для моделирования;

г) математическую формулировку задачи;

д) определение численных методов реализации модели (например, методов интегрирования систем дифференциальных уравнений и т. п.);

е) определение численных значений параметров, необходимых для проведения математического моделирования;

ж) разработку перечня допущений и ограничений, принятых в модели, с указанием о характере искажения ими исследуемых закономерностей.

Второй этап выполняется специалистами по исследованию операций. Обязанностями командира, офицера штаба (пользователя модели) на этом этапе являются утверждение показателей эффективности, допущений и ограничений модели, определение требований к времени разработки (формирования) модели, выполнения оперативно-тактических расчетов.

Третий этап — включение математической модели в состав математического обеспечения* электронно-вычислительного комплекса (ЭВК) корабля или соединения кораблей.

Математическим обеспечением ЭВК называется совокупность программ ЭВК, процедур и правил вместе со всей связанной с этими компонентами документацией, позволяющая использовать ЭВК для решения различных задач*.

Для включения математической модели в состав математического обеспечения ЭВК предварительно необходимо:

— разработать алгоритм реализации модели на ЭВК;

— разработать программу реализации алгоритма модели на ЭВК;

* Более подробно вопросы математического обеспечения ЭВК рассматриваются в специальных курсах.

* Наряду с термином “математическое обеспечение” зачастую в том же значении используется термин “специальное математическое обеспечение”.

— отладить разработанную программу с целью исключения ошибок, возможных как при разработке постановки задачи, самой модели, так и ее программы; оформить в соответствии с существующими правилами методик решения задачи на ЭВК.

Наиболее эффективным является следующий способ отладки. Задается такая оперативно-тактическая (тактико-специальная) ситуация, при которой очевиден оперативно-тактический (тактико-специальный) результат. Например, задаются такие условия боя (см. рис. 1.4), при которых оптимальными являются минимально или максимально возможные дистанции применения оружия. Далее задаются значения параметров модели, соответствующие заданным ситуациям. После этого выполняются расчеты. Если они не соответствуют ожидаемому результату, то выявляется и устраняется ошибка. Помимо своего прямого предназначения результатом отладки является психологическая уверенность в модели и программе.

Третий этап выполняет системный (прикладной) программист. В отладке участвуют командир (или назначенный им офицер штаба) и специалист по исследованию операций, формировавший модель.

Первый, второй и третий этапы являются этапами разработки математического и программного обеспечения ЭВК.

Четвертый этап — исследование необходимых закономерностей, разработка предложений командиру. Этот этап включает:

а) непосредственное моделирование на ЭВК применения сил, использования средств (оперативно-тактические расчеты), выработку предложений командиру;

б) доклад предложений командиру, документирование результатов моделирования.

В ряде случаев результаты моделирования на ЭВК могут быть использованы для выдачи непосредственных управляющих сигналов (команд) управляемым объектам (см. п. 1.2.2).

Рекомендации, вырабатываемые командиру, должны включать оценки лучшего варианта из заданных командиром, сильных и слабых сторон (“узких мест”) вариантов, предложения по дальнейшему совершенствованию решения или плана, предложения по математическому обеспечению управления на последующих циклах управления.

Процесс исследования может быть многошаговым. Например, на каком-либо этапе исследования операций может оказаться необходимым уточнить, изменить постановку задачи, модель.

Из числа изложенных выше этапов обязательными во всех случаях являются первый и четвертый этапы. Этапы второй и третий иногда могут отсутствовать либо же выполняться не в полном объеме. Четвертый этап в ряде случаев может выполняться без использования ЭВК.

Поясним сказанное. Анализ оперативно-тактической постановки задачи может показать, что требуется модель, ранее уже разработанная и включенная в состав математического обеспечения ЭВК. Тогда второй этап может отсутствовать, а на третьем потребуются лишь корректирование ранее разработанного информационного обеспечения (например, изменение исходной информации, состава или формы представления дополнительных показателей эффективности и т. д.). Часто для моделирования используются заблаговременно рассчитанные на ЭВК таблицы, графики, номограммы. В некоторых случаях будет возможно использование для моделирования простейших вычислительных устройств — клавишных, перфорационных и т. д.

Правильным и современным является следующее представление о содержании четвертого этапа. С разработкой математического обеспечения ЭВК командир получает в свое распоряжение высокоэффективный оперативно-тактический полигон — тренажер, на котором он может “проигрывать” фрагменты процесса выполнения поставленной задачи, обосновывать решение.

Важным, хотя и трудно оцениваемым, результатом моделирования является развитие интуиции командира. Мать интуиции — информация. Интуиция командира может формироваться в результате боевых действий, натурного моделирования (учений, маневров, КШУ). В настоящее время большие возможности в этом смысле представляет математическое моделирование на ЭВК.

Из сказанного следует, что в выполнении четвертого этапа участвуют командир (или назначенный им офицер штаба) и специалист по исследованию операций.

Уточним теперь понятия “исследование операций”, “математическое моделирование”, “оперативно-тактические расчеты”.

Исследование операций как процесс объективного количественного обоснования решения и планов включает два процесса: процесс математического моделирования (формально первый, второй, третий и частично четвертый этапы исследования операций) и процесс выработки предложений на основе результатов моделирования (на четвертом этапе исследования операций).

Термин “оперативно-тактические расчеты” достался нам от прошлого. В настоящее время процессом оперативно-тактических расчетов называют непосредственное использование уже подготовленных математических моделей для достижения каких-то целей моделирования с использованием тех или иных вычислительных средств (ЭВТ, счетно-клавишных машин, таблиц, графиков, номограмм), т. е. выполнение четвертого этапа исследования операций.

Необходимость выполнения четырех указанных этапов исследования операций — объективная реальность. При существующей и даже перспективной ЭВТ последовательное выполнение всего содержания всех этапов — длительный и трудоемкий процесс, время которого заведомо превышает время циклов управления. Поэтому использование математического моделирования при управлении возможно лишь в условиях должной организации. Эта организация различна при управлении системами оружия и технических средств и при управлении кораблями, частями и соединениями*. При этом организация управления системами оружия и технических средств является частью организации управления кораблями и соединениями.

§ 2.2. ОСОБЕННОСТИ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ ОРУЖИЯ И ТЕХНИЧЕСКИХ СРЕДСТВ, КОРАБЛЯМИ, ЧАСТЯМИ И СОЕДИНЕНИЯМИ, ВЛИЯЮЩИЕ НА ОРГАНИЗАЦИЮ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

2.2.1. Особенности управления системами оружия и технических средств

Управление в таких системах обладает рядом характерных особенностей, которые необходимо учитывать при разработке организации применения методов исследования операций:

— во-первых, ограниченное (с точки зрения числа моделей, потребных для управления) число ситуаций, которые могут возникнуть в процессе управления;

— во-вторых, сравнительная простота тактических ситуаций, позволяющая разработать математические модели, настолько точно отражающие необходимые свойства процессов, что имеется возможность использовать результаты моделирования для непосредственной выдачи сигналов управления исполнительным механизмам (например, моделирование на ЭВК для выдачи

* Далее для краткости речь будет идти о соединении, командире соединения, начальнике штаба и офицерах штаба соединения. Однако все сказанное будет справедливо и для корабля, командира корабля, его старшего помощника и офицеров корабля.

углов наведения механизмам наведения орудийных установок по данным измерения координат цели и точек падения снарядов предыдущего залпа).

Из отмеченных свойств систем управления (СУ) первого типа вытекают следующие особенности использования математических моделей и ЭВК для управления этими системами:

1) разработка всего необходимого для управления математического обеспечения (первый—третий этапы исследования операций) может осуществляться *з а б л а г о в р е м е н н о*, еще до начала процесса управления (при создании или модернизации систем управления). В процессе же управления выполняется лишь моделирование на ЭВК с целью выдачи команд управления исполнительным механизмам (четвертый этап);

2) для разработки математических моделей имеется возможность использовать математический аппарат, хотя и увеличивающий время разработки математического обеспечения, но позволяющий сокращать время моделирования на ЭВК и осуществлять четвертый этап исследования операций за имеющееся время цикла управления. Например, если в состав модели входит громоздкая система дифференциальных уравнений, можно, проведя специальное исследование, заменить эту систему набором аппроксимирующих функций и сократить тем самым время моделирования на несколько порядков при сохранении необходимой точности.

В § 1.2. был рассмотрен вопрос о принципе обоснования показателя эффективности. В соответствии с этим принципом показателем эффективности математического обеспечения СУ первого типа является вероятность того, что исполнительный механизм системы получит необходимую команду управления в заданное время.

Полезно отметить, что все сказанное выше справедливо и в отношении автоматизации многих систем управления технологическими процессами (в доменных печах, на хлебозаводах, на химических предприятиях и т. д.).

Особенности систем управления первого типа, уровень развития методов исследования операций, ЭВТ и других технических средств автоматизации управления сделали целесообразным и возможным разработку систем искусственного интеллекта*. *Система искусственного интеллекта* представляет собой один из классов автоматизированных систем управления. АСУ этого класса для выполнения своих функций снабжены специальным математическим обеспечением, представляющим следующие возможности:

1. Идентифицировать обстановку, определить ее соответствие тому или иному варианту обстановки из конечного числа вариантов, признаки которых заданы. Определяются заблаговременно также и источники информации, содержание и порядок поступления от них информации.

2. В соответствии с результатами идентификации выбирать по заданному правилу соответствующие алгоритмы и формировать сигналы управления.

3. Передавать сигналы управления управляющим устройствам систем оружия и технических средств (в том числе и устройствам отображения информации, соответствующим устройствам ЭВК и т. д.).

4. Организовать функционирование управляющих устройств в соответствии с правилами, заложенными в алгоритме.

5. Контролировать состояние управляемого объекта в соответствии с правилами, заложенными в управляющем алгоритме, для чего многократно выполнять пп. 1—4.

* * Существует также термин “ситуационное управление” — управление с использованием системы искусственного интеллекта.

Математическое моделирование в системах искусственного интеллекта используется, во-первых, для обоснования построения и функционирования системы, в частности для обоснования способов (правил) действий в тех или иных условиях обстановки. При разработке этих правил применяется изложенная в § 2.3 методология творческой деятельности командира, офицера штаба, предусматривающая комплексное использование математического моделирования результатов, накопленного опыта, качественного анализа, натурного моделирования.

Во-вторых, математическое моделирование используется в динамике управления — функционирования системы искусственного интеллекта с целью выбора необходимого правила действий и следования ему в процессе управления. Именно эта математическая модель и формализуется далее алгоритмом (см. п. 2).

Необходимость в создании систем искусственного интеллекта возникает, если человек не может участвовать в процессе управления объектом (например, в управлении полетами ракеты, выставленным минным комплексом и т. д.); если требования к управлению превышают физические возможности человека по скорости и точности реагирования на изменения обстановки, продолжительности процесса управления, преодолению стрессовых ситуаций и т. д.; если при использовании таких систем снижаются потери в личном составе, затраты средств.

Возможность создания рассматриваемых систем определяется возможностью разработать необходимые математические модели, программные и аппаратные средства. С этой точки зрения управляемые объекты (системы) рационально разделять на простые и сложные. *Простая* — это такая управляемая система, весь процесс функционирования которой можно описать формально (разработать математическую модель ее функционирования). Например, простой системой обычно является стратегического назначения многоступенчатая с разделяющимися головными частями и с астрокоррекцией баллистическая ракета после старта. *Сложной* называется управляемая система, если описать ее только математическими методами невозможно, так как при управлении присутствует неформализуемое творчество человека*. Например, взвод морской пехоты в наступательном (оборонительном) бою обычно является сложной системой.

Одна и та же управляемая система может быть простой или сложной в различных условиях обстановки или на различных этапах управления. Например, уже упоминавшийся взвод морской пехоты на марше после сигнала “Воздух” является простой системой: из-за дефицита времени весь личный состав взвода будет действовать только заранее предписанным способом. Простые системы могут быть подсистемами сложных систем (кораблей, частей и соединений).

Системы искусственного интеллекта могут создаваться только для простых управляемых объектов (систем).

Рациональность создания системы искусственного интеллекта измеряется повышением эффективности выполнения поставленных задач, снижением потерь. При этом сравниваются и экономические затраты при различных вариантах построения систем.

Необходимо учитывать недостатки, органически свойственные системам искусственного интеллекта:

— система не может функционировать, если реальная обстановка не будет соответствовать ни одному из предусмотренных вариантов* ;

* Такую классификацию управляемых систем предложил профессор Военно-морской академии В. И. Соловьев.

* Это свидетельствует о том, насколько условно понятие “искусственный интеллект”.

— функционированию таких управляемых систем органически свойствен шаблон, который может быть выявлен или спрогнозирован противником;

— знакомство противника с управляющими алгоритмами, а иногда и с общими принципами построения СМО системы искусственного интеллекта позволяет ему организовать и провести мероприятия для противодействия этим системам. Это требует, чтобы командир, офицер штаба имели возможность активно вмешиваться в функционирование систем.

Системы управления оружием и техническими средствами входят в системы управления кораблями, частями, соединениями.

2.2.2. Особенности управления кораблями, частями и соединениями

Основной особенностью процесса управления кораблями, частями и соединениями является его творческий характер. Существенное влияние оказывает также условия, в которых протекает этот творческий процесс: наличие активного противника с его творчеством, высокая динамика процесса управления, дефицит времени при управлении, стрессовая обстановка, в которой, как правило, выполняет свои обязанности командир и его штаб (огневое воздействие противника, потери личного состава, выход из строя технических средств управления). Типичным для управления кораблями, частями и соединениями является:

— во-первых, стремление командиров каждой из противоборствующих сторон внезапно поставить своего противника перед фактом применения новых сил и средств, новых способов их использования. “Удивил — победил”, — гласит суворовский принцип. Командиры будут стремиться к этому сознательно, активно и скрытно. Тот из командиров, который допускает в своих действиях шаблон, потерпит поражение;

— во-вторых, многообразие случайных событий и случайных величин, от которых зависит ход выполнения боевой задачи и которые в процессе боевых действий могут принимать различное значение.

По этим причинам выработка решения может начаться лишь с постановкой силам задач, а в ходе выполнения задачи будет систематически возникать необходимость в корректировании ранее принятого решения или даже в выработке нового решения. Поэтому и необходимость в раскрытии различных закономерностей боевых действий, а значит, и необходимость в тех или иных моделях, в том или ином математическом обеспечении будет также возникать в процессе творческой работы командира и штаба как при выработке решения, так и в ходе его реализации, т. е. уже после получения задачи. Темпы подготовки математического обеспечения должны соответствовать темпам этой творческой работы.

Было бы, однако, неверным считать, что, приступив к выработке решения, командир и его штаб будут вынуждены раскрывать все необходимые закономерности боевых действий, разрабатывать все необходимые принципы и положения военно-морского искусства. Командиром или офицером штаба можно стать, только овладев необходимыми знаниями теории военно-морского искусства, принципы и положения которого являются методологическим фундаментом при выработке решения. Эти знания командный состав флота систематически совершенствует в процессе боевой подготовки. Однако изменение задач, стоящих перед соединением, активный противник, изменчивая среда, собственное стремление командира и офицеров штаба к совершенствованию способов применения сил и средств потребуют творческой деятельности командира и широкого применения им количественных методов. А это, в свою очередь, потребует использования новых, ранее

отсутствующих в составе математического обеспечения моделей (см. § 1.2). Одно из требований военного искусства гласит, что использование при выработке решений одного и того же набора моделей есть признак шаблонности в мышлении командира: каждое решение командира должно быть неповторимым*.

Таким образом, из самой природы вооруженной борьбы на море следует невозможность заблаговременной, до постановки силам задачи, разработки исчерпывающе полного комплекса моделей, который бы полностью удовлетворил потребности командира. Это особенно очевидно для кораблей и соединений, уходящих в море на большие сроки.

В соответствии с принципом Колмогорова показателем эффективности математического обеспечения в системах управления второго типа является вероятность того, что все четыре этапа исследования операций будут осуществлены и командиру (пользователю) будут разработаны рекомендации в срок не позже заданного.

Следует учитывать, что рассмотренные особенности управления соединениями существенно отличают организацию использования математического моделирования при управлении силами и при управлении коллективами людей в народнохозяйственной области.

Особенности творческой деятельности командира и штаба требуют достаточной оперативности при подготовке необходимого командиру математического обеспечения, а также высокой степени конкретности рекомендаций командиру, позволяющих использовать математическое моделирование в сложных условиях ведения боевых действий и при длительных отрывах от пунктов базирования.

Выполнить указанные требования можно при наличии двух взаимосвязанных условий:

— рациональных методов творческой работы командира и штаба на различных фазах управления с использованием в этой работе математического моделирования;

— рациональных методов разработки математического обеспечения ЭВМ, обеспечивающих его своевременную подготовку в процессе творческой работы командира и штаба.

Рассмотрим эти условия.

§ 2.3. ОСНОВЫ МЕТОДОЛОГИИ ЭВРИСТИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Разработка замысла, решения по поставленной задаче, планов применения сил, средств, их корректирование — результат творчества командира соединения, офицеров штаба. Использование в этом творчестве математического моделирования на базе современной ЭВМ (совместно с другими методами раскрытия закономерностей вооруженной борьбы)* позволяет повысить его эффективность. Однако такая возможность — потенциальная. Чтобы реализовать эту возможность, необходима научно обоснованная методология творческой деятельности командира, офицера штаба с использованием математического моделирования.

Сформулируем требования к этой методологии. Целью ее использования должно быть обеспечение разработки достаточно эффективных, рациональных (в пределе — оптимальных)

* * Из лекций, читанных профессором Военно-морской академии В. С. Лисютиным.

* * Везде далее, когда это не будет приводить к недоразумениям, говоря об использовании математического моделирования, будем иметь в виду его совместное использование с другими методами раскрытия закономерностей вооруженной борьбы.

решений и планов в ограниченные условиями обстановки сроки. Основным инструментом при этой работе является, как уже указывалось, творчество командира и офицеров штаба, вооруженных знанием основных базовых закономерностей боя, применения сил, использования должны быть расширены за счет использования математического моделирования. Сложные условия деятельности органа управления (стрессовые ситуации, дефицит времени, противодействие активного противника, наличие случайностей и неопределенностей) требуют, чтобы методология была достаточно детальной и конкретной. Дополнительное, но важное условие — возможность развивать методологию способом ее систематического совершенствования и наращивания, но никак не способом “до основанья, а затем”.

Методология, отвечающая указанным требованиям, должна быть по содержанию методологией эвристической оптимизации. *Эвристика* — совокупность логических приемов и методических правил теоретического исследования и отыскания некоторой истины (решения задачи). Это также и организация процесса продуктивного творческого мышления, порождающая процедуры, направленные на решение творческих задач. Использование эвристических методов сокращает время решения задачи по сравнению с методом полного ненаправленного перебора возможных альтернатив; получаемые результаты не являются, как правило, наилучшими, а относятся лишь к множеству допустимых решений.

Методология есть совокупность общих мировоззренческих принципов применительно к решению частных научных и практических задач. Вместе с тем это и учение о методе, теоретическое обоснование как самих принципов, так и способов их использования, порядка, средств, методов познания.

Основой методологии эвристической оптимизации является принцип сочетания творческого и формального (математического моделирования) в работе командира, а также принцип рациональной организации творческой деятельности командира с использованием математического моделирования. Как будет показано ниже, разработка этих принципов (и методологии в целом) возможна лишь при активном использовании закона диалектического метода о единстве и борьбе противоположностей. Впервые подобная методология была разработана и успешно применялась в области проектно-конструкторских работ советским авиаконструктором Р. Л. Бартини^{*}. Он вызывал удивление и восхищение современников способностью обгонять в творчестве большие коллективы.

Ниже излагаются основы методологии эвристической оптимизации в работе командира, офицера штаба (руководителя). Изложены также рекомендации по внедрению методологии в конкретную область деятельности командира, офицера штаба с учетом специфики соединения, свойственных ему задач.

Из методических соображений обратим внимание читателей: необходимость разработки методологии была выявлена, требования к ней сформулированы после того, как были выявлены роль и место математического моделирования при управлении, свойства математических моделей вооруженной борьбы, особенности управления силами и реально достижимая цель использования математического моделирования при этом управлении. Полученные ранее (см. гл. 1, § 2.1, 2.2) результаты потребуются далее для обоснования методологии.

* Р. Л. Бартини (1887—1973) — советский авиаконструктор, итальянец по происхождению. Ему принадлежит много оригинальных и важных научных открытий, идей, а также проектно-конструкторских работ. Стиль своей творческой деятельности был им описан в “Методике И — И” [24].

2.3.1. Сочетание творческого и формального в работе командира и офицера штаба

Изложить принципы сочетания творческого и формального в работе командира удобно на примере формирования некоторой системы, так как читателю при этом будет удобнее видеть свою предметную область.

Системой называется совокупность некоторых элементов и связей между ними. Система организуется и функционирует для достижения определенной цели. Естественно при этом стремление оптимизировать ее структуру и функционирование так, чтобы степень достижения цели создания системы (эффективность системы) была максимальной. Рассмотрим примеры систем.

Пример 2.1. Выработку командиром соединения замысла можно интерпретировать как формирование системы, элементами которой являются свои силы, силы противника, военно-географические элементы. Связями между ними выступают все виды обеспечения сил, организация их взаимодействия, влияние элементов военно-географической обстановки на применение сил и средств, противодействие сил противника. При этом командир будет учитывать аналогичные связи между элементами системы, составляющими силы противника. Формируя эту систему и организуя ее функционирование, т. е. вырабатывая замысел, командир стремится повысить эффективность выполнения поставленной задачи. Естественно, что командир воздействует на те элементы системы и связи между ними, которые ему подвластны*.

Пример 2.2. Выработку плана связи на боевые действия также можно представить как формирование некоторой системы. Ее элементы — приемные и передающие устройства на берегу, на кораблях, самолетах, т. е. элементы системы связи соединения, приданных и поддерживающих сил, а также противодействующие силы и средства противника (поисковые, ударные, радиоэлектронной борьбы), элементы военно-географической обстановки. Связи между элементами этой системы определяются организацией радиосвязи, организацией противодействия противника, влиянием военно-географических элементов обстановки. Целью функционирования формируемой системы является обеспечение управления силами в боевых действиях.

При разработке плана связи офицеры штаба будут стремиться обеспечить повышение эффективности связи, эффективности управления и выполнения поставленной задачи.

Пример 2.3. Проектирование нового корабля можно представить как формирование системы, элементами которой являются корабль с его системами оружия и технических средств, взаимодействующие с ним силы соединения, в составе которого корабль будет выполнять свою задачу (свои задачи), система управления соединением, силы и средства боевого и других видов обеспечения корабля и соединения; объекты, силы и средства противника, против которого будет действовать корабль и соединение; элементы военно-географической обстановки. Кроме того, элементами этой системы будут являться проектно-конструкторские, судостроительные и другие (свои и противника) организации, участвующие в проектировании и создании корабля и его оружия, технических средств, других своих сил и средств, противостоящих сил и средств противника. Многочисленные связи между элементами этой системы можно разбить на группы: производственные связи между нашими проектными и строительными организациями; способы выполнения кораблем и соединением свойственных им задач в условиях противодействия противника, в том числе и прогнозируемого; связи, определяемые условиями подготовки личного состава корабля и соединения, базирования корабля, его эксплуатации; связи, определяемые

* Таковую систему для краткости будем далее называть “бой соединения”.

влиянием элементов военно-географической обстановки. Целью функционирования такой системы является эффективное выполнение кораблем свойственной ему задачи.

Командир, офицер штаба, конструктор создают систему дважды: один раз мысленно — при разработке замысла, плана, конструкции; второй раз реально — при организации боя, при строительстве корабля и т. д. Далее, в соответствии с направленностью курса, рассматривается мысленное создание системы на стадии выработки замысла, решения, плана при подготовке боя, операции, их корректировке в ходе дальнейшего выполнения поставленной задачи.

Изменить систему (структуру системы) — это значит изменить состав ее элементов или(и) связи между ними. Например, при разработке замысла можно говорить о переходе к новой системе, если командир изменяет состав своих сил и средств, рассматривает другой состав сил и средств противника, другие элементы военно-географической обстановки, разрабатывает новые способы применения своих сил, использования средств, боевой порядок своих сил, порядок огневого поражения противника, изменяет организацию взаимодействия сил, каких-либо видов их обеспечения.

Оптимизировать систему можно одним из трех способов:

- изменением структуры системы (например, разработкой нового замысла);
- оптимизацией функционирования системы данной структуры (например, оптимизацией применения сил и средств в рамках разработанного замысла);
- комбинированным использованием первого и второго способов оптимизации.

При создании и совершенствовании системы (разработке замысла, решения, плана, инженерной конструкции) существует следующее сочетание творческого и формального.

Создание системы той или иной структуры — результат творчества, основанного на знании закономерностей соответствующего процесса. Формализовать, алгоритмизировать процесс создания системы невозможно. Только творчески одаренные люди могли разработать замысел штурма, казалось, неприступной крепости Измаил (1790), план зимней кампании против Наполеона в 1812 г., замысел Брусиловского прорыва (1916), Сталинградской наступательной операции (1942), наступательной операции “Багратион” (1944) и т. д.

В гл. 1 были рассмотрены роль и место исследования операций при раскрытии закономерностей вооруженной борьбы, формировании принципов и положений военного искусства, которыми командир, офицер штаба пользуются изначально при выработке замысла, решения, плана. При сравнительной оценке разработанных вариантов построения системы (ее элементов) и при оптимизации функционирования системы для каждого варианта ее построения возможно использование математического моделирования в сочетании с другими методами раскрытия закономерностей вооруженной борьбы. Однако выявление путей, направлений оптимизации системы (т. е. замысла, решения, плана, инженерной конструкции, каких-то их элементов) есть результат творческой деятельности командира, конструктора. Например, А. В. Суворов при выработке замысла на штурм Измаила разработал направление его оптимизации — осуществить штурм крепости одновременно на нескольких участках. После этого он поставил и решил (в связи с другими задачами) задачу о числе участков штурма. Брусилов при выработке замысла наступательной операции фронта повторил в новых условиях идею этого замысла А. В. Суворова, решив осуществить прорыв фронта противника одновременно на нескольких участках. Далее он также решил задачу об оптимальном числе участков прорыва, распределении сил и т. д.

Конструктор М. И. Кошкин* нашел направление повышения эффективности танка — оптимальное сочетание скорости, защищенности, вооружения танка, технологичности строительства танков на заводах страны; далее он решил задачу этой оптимизации и в итоге создал шедевр танкостроения мира — танк Т-34.

Конструктор А. И. Судаев** решил задачу повышения эффективности пулемета-пистолета за счет уменьшения его скорострельности (по сравнению со всеми существовавшими образцами пулеметов-пистолетов), нашел оптимальную скорострельность и создал лучший в мире автомат второй мировой войны (ППС).

Алгоритмизировать выявление направлений оптимизации, а значит, и определение целей математического моделирования невозможно. Однако целесообразно и можно регламентировать этот процесс.

Творческими будут являться также процессы разработки других элементов оперативно-тактической постановки задачи на математическое моделирование, анализа результатов моделирования — сравнительной оценки альтернативных вариантов, выявления их слабых и сильных сторон. Следующий творческий процесс — дальнейшее совершенствование системы на основании результатов такого анализа или заключение об окончании работы. Указанные процессы (этапы работы командира) тоже нельзя алгоритмизировать, но целесообразно регламентировать.

Итак, при разработке системы (замысла, решения, плана, инженерной конструкции) математическое моделирование используется для достижения следующих частных целей:

1) оптимизации функционирования каждого из альтернативных вариантов систем на основании выработанных (указанных) направлений оптимизации. При этом используется основной показатель эффективности системы;

2) обоснования сравнительной оценки альтернативных вариантов систем. При этом используется основной показатель эффективности системы;

3) выявления сильных и слабых сторон (узких мест) разработанных вариантов, для чего используются основной и дополнительные показатели эффективности.

Достижение всех трех частных целей — единый, “слитный” процесс. Методически удобно считать, что достижением первой частной цели завершается формирование вариантов системы, достижение второй частной цели позволяет подвести итог ранее проделанной творческой работы, а третьей частной цели — инициировать и направить последующую творческую работу командира.

Кроме того, результатом выполнения всех трех частных целей может быть заключение об окончании формирования системы (замысла, решения, плана).

Использование математического моделирования в творческой деятельности командира способно привести к резкому повышению его качества, эффективности именно из-за возможности достижения трех указанных частных целей. Необходима лишь рациональная организация творческой деятельности командира, офицера штаба с использованием математического моделирования.

2.3.2. Организация творческой деятельности командира, офицера штаба с использованием математического моделирования

* М. И. Кошкин (1898—1940) — выдающийся советский конструктор в области танкостроения.

** А. И. Судаев (1912—1946) — советский конструктор стрелкового вооружения.

Творческая деятельность командира при выработке замысла, решения и офицера штаба при выработке предложений командир, при планировании предстает как многошаговый творческий процесс.

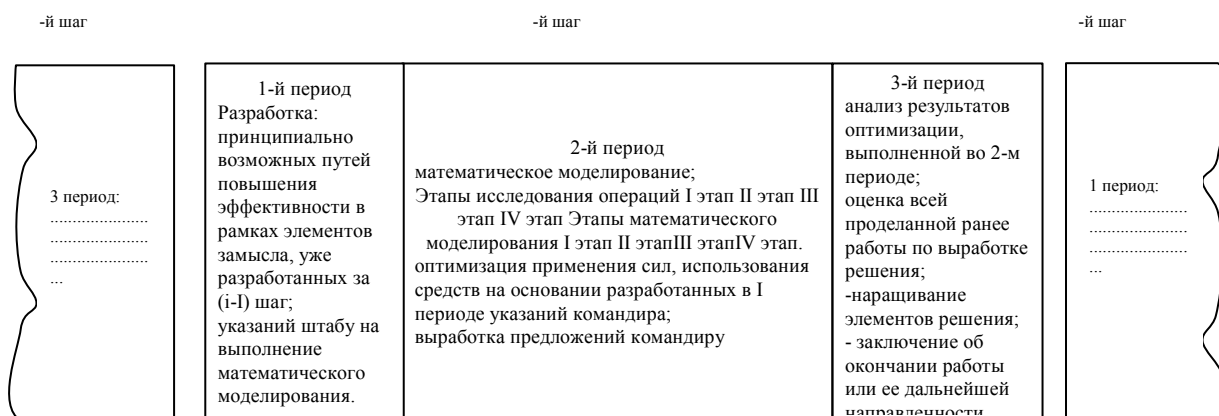


Рис.2.1

Каждый шаг этого процесса имеет целью дальнейшее повышение эффективности замысла, решения, плана. Шаги делятся на периоды с определенным их содержанием (рис. 2.1).

Выполнением всех трех периодов достигаются частные цели моделирования на данном творческом шаге разработки системы; завершение творческих шагов, т. е. завершение формирования системы, знаменует достижение цели использования математического моделирования вообще при формировании системы (замысла, решения, плана). Система (замысел, решение, план) может быть сформирована и за один шаг.

Принципы выполнения каждого из периодов творческих шагов работы командира также входят в содержание методологии эвристической оптимизации.



Рис.2.2

Этапы процесса использования командиром, офицером штаба математического моделирования на каждом творческом шаге показаны на рис. 2.2. На этом же рисунке показаны этапы, выполнение которых есть функциональная обязанность командира, офицера штаба, в интересах которых выполняется математическое моделирование. На остальных этапах командир, офицер штаба лично выполняют определенные функции и общее руководство.

Следует иметь в виду, что содержание этапов, показанных на рис. 2.2, составляет лишь часть содержания периодов, показанных на рис. 2.1, так как в каждом периоде используется не только математическое моделирование, но и весь арсенал методов раскрытия закономерностей вооруженной борьбы (см. гл. 1).

Содержанием первого периода творческого шага является разработка направлений, путей повышения эффективности (см. 1-й период на рис. 2.1) функционирования системы данной структуры (разработанных элементов замысла, решения, плана). В этом же периоде вырабатываются и указания штабу на выполнение математического моделирования. Практически при этом может осуществляться совершенствование и самой структуры системы. Однако методически целесообразно представить такое совершенствование содержанием 3-го периода.

Возможны два способа разработки направлений повышения эффективности.

Первый способ — непосредственное использование командиром (офицером штаба) результатов накопленного опыта, интуиции. Первый способ — первый исторически. Им пользовались и пользуются командиры различных командных инстанций. Он эффективен при наличии у командира большого боевого опыта, развитой интуиции. Однако при этом способе трудно регламентировать эвристическую деятельность командира, с чем связаны трудность подготовки и самоподготовки командиров, а также выполнения командиром своих функций в стрессовых ситуациях, при дефиците времени; велика возможность оставить без внимания эффективные пути совершенствования системы; требуется большой опыт и искусство командира для разработки системы взаимосвязанных мероприятий, повышающих эффективность действий сил в рамках данного замысла и выработки требований к необходимой системе математических моделей для оптимизации замысла, решения.

Этих недостатков в значительной степени лишен второй способ, в котором опыт, интуиция командира направляются законом о единстве и борьбе противоположностей. То, что в терминах военного искусства называется повышением эффективности использования сил и средств, а в терминах исследования операций — оптимизацией функционирования системы, в терминах диалектического метода познания является нахождением такого тождества диалектических противоположностей, свойственных данной системе (замыслу, решению, плану), когда показатель эффективности принимает оптимальное значение. Напомним, что противоположности — это одновременно существующие в предметах и явлениях стороны или тенденции, которые взаимообуславливают и взаимоисключают друг друга. Противоречием называется взаимоотношение и взаимосвязь между противоположностями с точки зрения эффективности функционирования системы. Из двух элементов противоположностей один влияет на достижение цели боя непосредственно, а другой опосредованно, косвенно.

Повышать эффективность выполнения поставленной задачи, оптимизировать, в том числе с использованием математического моделирования, применение сил и средств можно в принципе только в тех “точках”, элементах замысла, плана, где существуют диалектические противоположности. Значит, работа командира, офицера штаба по выявлению в рамках некоторого замысла, решения, плана принципиально возможных путей повышения эффективности использования сил сводится к выявлению системы диалектических противоположностей и свойственных им противоречий. Противоречия должны выявляться с точки зрения цели действий сил.

Использование закона единства и борьбы противоположностей позволяет существенно регламентировать процесс выработки командиром направлений повышения эффективности действий сил, указаний штабу на выполнение математического моделирования. Изложим с необходимыми пояснениями методику, рациональную последовательность этой творческой работы командира применительно к процессу выработки им способа действий сил в условиях некоторого замысла.

1. Определить вероятный замысел (варианты замысла) противника, уяснить цель боя. Сформулировать основную идею своего замысла*, а также те уже разработанные его элементы, дальнейшим развитием которых будет являться разрабатываемый способ действий сил. При наличии нескольких вариантов замысла противника дальнейшая работа проводится для каждого из них.

2. Выявить факторы обстановки, непосредственно влияющие на эффективность действий сил, степень достижения ими цели боя. Факторы выявляются в результате оценки обстановки, являются

* Основной идеей замысла называют ту его центральную часть, с которой командир приступает к оценке обстановки и выработке замысла. Часто она касается выбора основного направления действий, разгрома противника.

выводами из нее, определяющими процесс оптимизации действий сил. Факторы есть объективно существующие категории. Это полезно подчеркивать их формулировками: “боеспособность сил при развертывании”, “своевременное получение данных целеуказания”, “своевременное занятие носителями огневых позиций”, “преодоление ракетами ПРО противника” и т. д. Способность выявить, описать факторы определяется профессиональной подготовленностью и творческими способностями командира. Выявлять факторы целесообразно в хронологической последовательности эпизодов предстоящего боя. Факторы могут подразделяться на подфакторы. Например, фактор “боеспособность сил при развертывании” может потребовать (в соответствии с рассматриваемым замыслом) рассмотрения подфакторов: “скрытность развертывания сил”, “все виды обороны” и т. д. Не обязательно все эпизоды предстоящего боя от первого до последнего должны быть учтены при разработке факторов. Это зависит от особенностей боя и замысла (его основной идеи и других элементов), уже разработанных ранее путей повышения эффективности, предусматриваемых командиром дальнейших направлений совершенствования замысла. Полезно иметь в виду, что факторы описывают так называемую основную диалектическую противоположность системы, которая характеризует бой в целом, определяет его развитие до завершения, обуславливает все остальные противоположности и противоречия в данной системе.

Все факторы можно объединить в две группы. Одна группа факторов, являясь элементом противоположности, влияет на достижение цели боя непосредственно (например, “поражение корабля ядра соединения противника”), другая — опосредованно (например, “боеспособность сил при развертывании”). Два этих элемента противоположности порождают диалектическое противоречие, которое командир при работе над п. 2 должен увидеть в основном, с чем связана возможность сформулировать факторы. Рассмотрим пример.

Пример 2.4*. Командир соединения торпедных катеров принимает решение на нанесение удара по конвою противника. К уяснению задачи и оценке обстановки командир приступает при следующей первоначальной основной идее замысла: “Усилия всех торпедных катеров сосредоточить на поражении транспортов конвоя одним ударом с одного направления. Для обеспечивающих действий катера не выделять”. При уяснении задачи и оценке обстановки командиром, в частности, установлено следующее*. В данном районе противник не может использовать авиацию для обеспечения обороны конвоя. Конвой будет следовать в сомкнутом походном порядке с круговым построением корабельного охранения, вооруженного артиллерией. Возможные варианты состава кораблей охранения: охранение слабое, усиленное, сильное. Эффективность артиллерийского огня эскорта зависит от дистанции стрельбы, состоянии моря и видимости. Конвой будет стеснен в маневрировании. Цель удара торпедных катеров — поражение максимально возможного числа транспортов противника.

Командир полагает, что дальнейшее развитие и совершенствование первоначальной основной идеи замысла зависит прежде всего от детализации способа действий катеров с момента обнаружения ими противника и до применения оружия по транспортам конвоя из занятой катерами позиции (т. е. выхода катеров в атаку) и требует сравнительной оценки способов (оценки боевых возможностей катеров) для различных вариантов обстановки, в первую очередь для различного состава кораблей охранения. Для детализации способа действий катеров на рассматриваемом этапе выполнения поставленной задачи командир разрабатывает принципиально возможные пути

* Пример разработан с использованием опыта боевых действий торпедных катеров во время Великой Отечественной войны.

* * Возможные результаты оценки обстановки описаны лишь в такой степени, в какой это необходимо для раскрытия темы.

повышения эффективности. На основании оценки обстановки он приходит к выводу, что эффективность выполнения поставленной катерам задачи зависит от сохранения катерами боеспособности до выхода в позицию залпа и эффективности применения ими торпедного оружия в занятой позиции. В соответствии с этим командир формулирует факторы, от которых зависит эффективность удара (рис. 2.3). Эти факторы составляют основную противоположность системы “удар торпедных катеров по конвою противника”, так как они определяют структуру системы мероприятий, путей повышения эффективности атаки катеров.

С точки зрения диалектического метода в данном примере “боеспособность торпедных катеров ...” — это элемент противоположности, влияющий на достижение цели опосредованно; фактор “эффективность применения торпедного оружия ...” — элемент противоположности, влияющий на достижение цели непосредственно. Результаты такого анализа потребуются командиру далее при совершенствовании замысла.

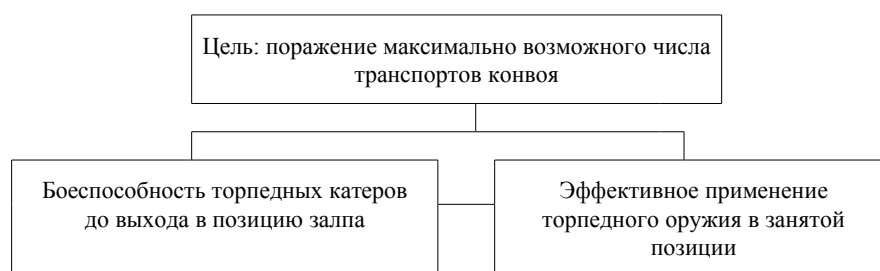


Рис. 2.3

3. Разработать мероприятия, повышающие влияние каждого из факторов в отдельности без учета других факторов, на эффективность выполнения поставленной задачи (мероприятия ИЛИ — ИЛИ). Мероприятия для каждого из факторов могут разрабатываться в хронологической последовательности действий сил, по степени их важности, в порядке методики работы командира.

Способность командира разработать эффективные мероприятия определяется профессиональной подготовленностью и творческими способностями командира. Соответствие мероприятий условиям, их оригинальность, нешаблонность, взаимообусловленность — решающие условия успешной оптимизации применения сил.

Пример 2.5. В условиях примера 2.4 командир продолжал оценивать обстановку с учетом основной идеи первоначального замысла, возможных вариантов обстановки для разработки принципиально возможных путей повышения эффективности атаки. Допустим, командир пришел к выводу, что в рамках основной идеи замысла повышение эффективности зависит от правильного выбора позиции залпа катеров, сокращения времени выхода в избранную позицию, правильного распределения времени на использование средств РЭБ и РЭС обеспечения торпедной стрельбы (если необходимо учитывать электромагнитную совместимость). В соответствии с этими выводами командир выработал систему мероприятий ИЛИ — ИЛИ, повышающих эффективность через каждый из факторов* (рис. 2.4). Заметим, что в данном примере разработка командиром мероприятий шла по схеме: главное мероприятие (выбор позиции залпа), затем мероприятия, связанные с главным, обеспечивающие главное.

* * Описание процесса в примерах 2.4, 2.5 носит иллюстративный характер: система мероприятий и система противоположностей и противоречий не раскрыты полностью.

4. Выявить систему диалектических противоположностей: мероприятия п. 3 разбить на группы. Каждая группа состоит из двух подгрупп. Мероприятия каждой подгруппы строго идентичны, а мероприятия этих двух подгрупп составляют диалектическую противоположность. Подгруппа может состоять и из одного мероприятия.



Рис. 2.4

Возможен случай, когда какому-либо разработанному мероприятию не будет соответствовать строго противоположное мероприятие. Это означает, что командир не выявил, каким именно образом, через какой фактор разработанное мероприятие способно оказать отрицательное влияние на эффективность выполнения поставленной задачи, что допущена ошибка в выявлении факторов, влияющих на эффективность **. В этом случае целесообразно возвратиться к п. 2, а затем к пп. 3, 4.

Пример 2.6. Группирование в противоположности мероприятий, разработанных в примере 2.5, показано стрелками на рис. 2.4. На этом рисунке для мероприятия “выход в позицию залпа прямым курсом” нет противоположного — “выход в позицию залпа зигзагом”. Иначе говоря, не выявлено, в

* ** Не существует мероприятий, влияющих на эффективность только положительно или только отрицательно. Исключение могут составлять мероприятия, связанные с привлечением дополнительных сил и средств, случаи нечетких, слишком общим образом сформулированных мероприятий, например “повысить эффективность радиосвязи” и т. д.

силу какого фактора не целесообразно движение прямым курсом, а целесообразно движение зигзагом. Командиру следует выявить этот фактор. Ясно, что движение катеров зигзагом снижает эффективность артиллерийского огня противника. Указанные обстоятельства вынуждают откорректировать систему факторов и мероприятий, показанных на рис. 2.4, в частности ввести подфакторы “время выхода в позицию залпа” и “эффективность огня кораблей эскорта” (рис. 2.5). Выше при изложении п.2, уже указывалось, что диалектические противоположности состоят из двух элементов: один элемент влияет на достижение цели действий сил непосредственно, а другой — опосредованно. Так, в примере 2.6 элементами противоположностей, которые (элементы) влияют на достижение цели непосредственно, являются мероприятия, повышающие эффективность применения торпедного оружия в занятой позиции, а опосредованно — мероприятия, повышающие вероятность сохранения катерами боеспособности при выходе в позицию залпа.



Рис. 2.5

Мероприятия, влияющие на эффективность опосредованно и непосредственно, соответствуют факторам обстановки, влияющим на эту эффективность также опосредованно или непосредственно.

5. Выявить систему диалектических противоречий — оценить влияние каждого мероприятия пары противоположных мероприятий на эффективность действий. В данном случае имеется в виду качественная оценка влияния противоположных мероприятий и в достаточно общем виде.

Пример 2.7. Системе противоположностей примера 2.6. (см. рис. 2.5) соответствует система противоречий:

— при большой дистанции залпа уменьшается время пребывания катеров под огнем противника, но уменьшается и эффективность применения торпедного оружия в занятой позиции; при малой же дистанции залпа, наоборот, увеличивается время пребывания катеров под огнем противника, но увеличивается и эффективность применения торпедного оружия;

— при выборе позиции залпа на острых (тупых) курсовых углах цели, если цель обнаружена на ее острых (тупых) курсовых углах, сокращается время выхода катеров в позицию, но уменьшается эффективность применения торпедного оружия в занятой позиции; при выборе позиции залпа на траверзных курсовых углах увеличивается время выхода в позицию залпа, но повышается эффективность применения торпедного оружия;

— при следовании в позицию залпа прямым курсом сокращается время пребывания катеров под огнем противника, но повышается точность стрельбы кораблей противника; при следовании зигзагом время пребывания катеров под огнем увеличивается, а точность стрельбы кораблей снижается;

— увеличение времени работы средств РЭБ снижает эффективность огня противника по катерам, но снижает (с учетом электромагнитной совместимости) и эффективность использования радиоэлектронных средств обеспечения торпедной стрельбы катеров; при сокращении времени работы средств РЭБ повышается эффективность огня противника по катерам, но зато повышается эффективность обеспечения применения торпедного оружия катеров.

С оперативно-тактической точки зрения диалектические противоположности — форма отображения сильных и слабых сторон своих и противника с учетом условий района. Такая форма отображения сильных и слабых сторон позволяет обозревать их в единстве, во взаимосвязи, т. е. с учетом основного принципа материалистической диалектики. Кроме того, эта форма упорядочивает и облегчает дальнейшую работу по оптимизации применения сил, использованию для этой цели математического моделирования.

Окончание формулирования системы диалектических противоположностей и противоречий означает формирование системы “бой соединения”: оказываются выявленными с точки зрения цели боя те элементы обстановки, связи между ними, которые составляют систему “бой соединения” и которые требуют оптимизации.

Следует только помнить, что разработанная система противоположностей и противоречий соответствует лишь разработанным элементам замысла, например его основной идее. Так, именно для основной идеи замысла сформирована система в примере 2.7. Необходимость совершенствования замысла (системы “бой соединения”) вызовет необходимость совершенствования системы противоположностей и противоречий.

Система диалектических противоположностей и противоречий и система “бой соединения” отражают как объективно существующие условия обстановки, так и субъективные взгляды командира на закономерности боя, принципы и положения военного искусства. Кроме того, степень совершенства, полнота системы определяются творческими способностями командира. Оптимизировать применение сил в условиях сформированного замысла, решения (системы) — это разрешить выявленные командиром противоположности, найти оптимальные значения необходимых параметров.

В примере 2.5 необходимо найти оптимальную дистанцию и курсовой угол залпа (позицию залпа), угол зигзага, распределение времени на работу средств РЭБ и РЭС. Причем оптимизировать эти параметры необходимо в их взаимосвязи: оптимальный курсовой угол залпа будет различным

для различной дистанции залпа и наоборот; оптимальный угол зигзага будет меняться с изменением позиции залпа. И т. д.

Итак, направления оптимизации выявлены. Далее командиру надлежит организовать работу штаба для конкретной оптимизации, в том числе с использованием математического моделирования. Рациональна следующая последовательность дальнейшей работы командира: оценка характера связей между всеми парами противоположных мероприятий; классификация системы противоположностей.

Знание характера таких связей командиру необходимо при разработке оперативно-тактических постановок задач для формирования математических моделей, при организации взаимодействия между подразделениями штаба, на которые будет возложено обоснование тех или иных предложений командиру, при выявлении главной противоположности системы.

Пример 2.8. Продолжим рассмотрение примеров 2.6, 2.7 (см. рис. 2.5). Командир должен указать: эффективность удара непосредственно зависит от эффективности применения торпедного оружия, а последняя — от выбора позиции залпа. От остальных мероприятий зависит вероятность занятия позиции залпа.

Классификацию системы противоположностей (мероприятий) рационально производить в следующей последовательности:

а) выявить главную противоположность системы. Главной называется противоположность, которая имеет решающее значение на данном этапе функционирования. Возможно существование нескольких главных противоположностей системы. Так, в примере 2.6 (см. рис. 2.5) главными являются противоположности, касающиеся дистанции залпа и залпового курсового угла цели (т. е. позиции залпа). При математическом моделировании знание главной противоположности определит, какая модель (модели) из всей необходимой системы моделей будет главной, центральной при оптимизации использования сил, а какие модели явятся обеспечивающими. Знание главной противоположности необходимо также командиру при дальнейшем совершенствовании способа действий, замысла, при разработке мероприятий военной хитрости, дезинформации, маскировки. Главной противоположности обычно соответствует в замысле основное направление действия сил.

б) для всех противоположностей выявить мероприятия, которые влияют на степень достижения цели боя непосредственно и опосредованно*;

в) выявить противоположности (противоположные мероприятия), которые командир может раскрыть (т. е. выявить рациональные мероприятия), не прибегая к математическому моделированию, а используя опыт, качественный анализ, интуицию;

г) выделить противоположности, для разрешения которых (для оптимизации либо для выявления рациональных мероприятий) командир считает необходимым использовать математическое моделирование.

Затем вырабатываются указания штабу на выполнение математического моделирования. Методика их подготовки рассматривается в п. 2.3.3.

Изложенный второй способ разработки направлений повышения эффективности замысла, решения, плана во многом лишен недостатков первого способа.

Неверно думать, что между двумя способами работы командира существует принципиальная разница. Анализ истории военного искусства показывает, что командующие и командиры различных уровней во все эпохи были вынуждены выявлять факторы обстановки, от которых зависело

* Указанная в пп. “а”, “б” классификация мероприятий потребует командиру в дальнейшем, при совершенствовании способа действий, замысла, при разработке мероприятий военной хитрости, дезинформации, маскировки.

достижение цели предстоящего боя, сражения или операции; находить систему диалектических противоположностей и противоречий, выделять главные из них; разрешать главные и все остальные выявленные противоречия системы в интересах повышения эффективности выполнения поставленной задачи в условиях конкретной обстановки. От эффективности этой работы, органически включающей разработку военной хитрости, дезинформации, маскировки, всегда зависил успех или неуспех боя, операции.

Некоторые примеры, иллюстрирующие сказанное, приведены ниже, а также в [5].

Содержанием второго периода творческого шага является конкретная оптимизация функционирования системы (применения сил, использования средств) в соответствии с указаниями командира, сформулированными им в первом периоде. При использовании математического моделирования в этом периоде выполняются четыре его этапа (см. рис. 2.1) для каждой из указанных командиром в первом периоде цели моделирования. Функциональными обязанностями командира при этом являются:

- общее руководство моделированием непосредственно или через назначенное лицо;
- оперативно-тактическая постановка задачи для каждой из целей моделирования.

Общее руководство математическим моделированием осуществляется в результате выполнения командиром своих функциональных обязанностей на каждом из его четырех этапов (см. § 2.1). Методика разработки оперативно-тактической постановки задачи рассмотрена в п. 2.3.3. Здесь же укажем только, что цель действия сил (п. “а”) командир формулирует при уяснении поставленной соединению задачи, цели моделирования (п. “б”) — при выполнении первого периода творческого шага. Что же касается п. “в” постановки задачи, то его основой является выявленная система диалектических противоречий, связей между ними (см. пп. 3—6). Их отражение в модели потребует соответствующей, логично вытекающей из характера противоречий детализации постановки задачи. При постановке задачи необходимо также четко вычлнить альтернативные (конкурирующие) варианты способа действий. Будем далее называть их способами ИЛИ — ИЛИ, так как каждый из них ориентирован на достижение цели с учетом (через) один из факторов обстановки. Содержанием каждого из способов ИЛИ — ИЛИ являются мероприятия, соответствующие тому или другому фактору обстановки и разработанные к *i*-му шагу. Если пара противоположных мероприятий отражает подфакторы, которые соответствуют только одному фактору обстановки, то может оказаться необходимым включать эти мероприятия во все другие способы ИЛИ — ИЛИ действий сил.

Пример 2.9. В условиях примеров 2.4—2.7 элементами первого способа действий ИЛИ — ИЛИ являются мероприятия, указанные в двух левых колонках на рис. 2.5. Этот способ действий ориентирован на 1-й фактор обстановки — достижение цели удара за счет максимально возможного сохранения боеспособности торпедных катеров до применения оружия. Обратим внимание: при разработке этого варианта командир должен оптимизировать угол зигзага с учетом выхода катеров на максимально возможную дистанцию залпа и ближайший залповый курсовой угол цели.

Элементами второго способа действий ИЛИ — ИЛИ являются мероприятия, указанные в правой колонке рис. 2.5. К ним должен быть добавлен также угол зигзага, оптимальный с точки зрения боеспособности катеров, но с учетом выхода их на минимально возможную дистанцию залпа и траверзный курсовой угол цели.

Главное отличие двух этих способов заключается в выборе позиции залпа: при первом способе позиция оптимальна с точки зрения сохранения боеспособности катеров до момента залпа; при

втором — с точки зрения эффективности залпа в уже занятой позиции. Остальные элементы каждого способа подчинены его главному элементу.

Необходимо сравнить эти способы по основному показателю эффективности, выявить их достоинства и недостатки, чтобы составить обоснованное суждение о направлении дальнейшего совершенствования способа действий либо о признании рациональным одного из разработанных способов.

Далее, во втором периоде осуществляется формирование необходимых математических моделей. При этом возможны два случая. В первом случае имеется возможность разработать математическую конструкцию (систему взаимосвязанных моделей), обеспечивающую непосредственно обоснование способа И — И из способов ИЛИ — ИЛИ для различных вариантов обстановки. Во втором, более сложном и чаще встречающемся в оперативно-тактической области, случае разработать такую систему моделей не удастся и более рациональным является следующий способ, сочетающий эвристические приемы и математическое моделирование. Разрабатываются равноточные (см. § 1.2) модели, позволяющие оценить эффективность и особенности способов действий ИЛИ — ИЛИ для всех вариантов обстановки. В третьем периоде, забегая вперед, скажем, что производится анализ результатов моделирования для всех способов ИЛИ — ИЛИ, выявляются их сильные и слабые места в различных условиях обстановки и командир осуществляет синтез : разрабатывает способ действий И — И. Этот способ должен учесть требования всех факторов обстановки: и 1-го, и 2-го, и ..., k -го.

Пример 2.10. В условиях примеров 2.5—2.8 (см. также рис. 2.5) потребуется сформировать две математические модели. Первую модель — для оценки эффективности удара по конвою, когда способ действий разработан с учетом требований 1-го фактора обстановки “Боеспособность торпедных катеров при выходе в позицию залпа”, вторую модель — для способа, учитывающего требования 2-го фактора обстановки “Эффективность применения торпедного оружия в занятой позиции”. Обе модели должны позволить равноточно оценивать значение показателя эффективности удара торпедных катеров для различных вариантов обстановки — состава охранения конвоя; возможных типов гидрометеоусловий, вариантов взаимного обнаружения противниками друг друга и т. д.

В обеих моделях, кроме того, должна осуществляться равноточная оптимизация угла зигзага с учетом избранной в этом варианте позиции залпа.

Методам формирования математических моделей, необходимых в динамике управления силами, посвящены разделы II и III учебника.

Содержание третьего периода творческого шага — анализ результатов, полученных в первом и втором периодах, в том числе результатов математического моделирования, выполненного во втором периоде*. Этот анализ, как уже указывалось, осуществляется с комплексным использованием всего арсенала методов познания закономерностей.

Итогом анализа может быть заключение либо об окончании разработки способа действий, либо о необходимости его дальнейшего совершенствования. Разработка способа действий (любой системы вообще) может считаться завершенной, если выполнены два условия.

Первое условие — результаты работы должны содержать сведения о всех необходимых элементах способа действий (о структуре системы). Например, если разрабатывается способ действий в бою соединения кораблей, то выполненная после i -го шага работа должна позволить: сформулировать цели его действий; поставить ему задачу; организовать взаимодействие внутри

* Так как в первом периоде i -го шага учитывается вся проделанная ранее командиром работа, то правильно считать, что в третьем периоде анализируются ее результаты.

соединения, с приданными, поддерживающими силами, соседями; определить состав системы управления и организацию ее функционирования; организовать обеспечение. В связи с требованиями этого условия очевидно, что в каждой предметной области, где творчеством руководителя формируется система, должна быть определена и ее структура (или требования к ней), например структура замысла, решения, плана, тактико-технического задания на проектирование корабля и т. д. Кроме того, должна быть регламентирована рациональная последовательность разработки системы с использованием математического моделирования, например регламентирована последовательность разработки замысла, решения по поставленной задаче.

Вторым условием завершенности разработки способа действий (системы) является его эффективность. Как известно (см. § 1.2), одними математическими методами невозможно получить абсолютную оценку величины показателя эффективности действий сил. Для этого необходимо комплексное использование различных инструментов раскрытия закономерностей вооруженной борьбы. Существуют лишь косвенные признаки, которые позволяют на основании анализа результатов математического моделирования, составить суждение о несовершенстве способа действий либо тех или иных его вариантов:

- моделирование показывает снижение эффективности разработанного варианта (вариантов) способа действий для некоторых условий обстановки;
- различные варианты разработанных способов действий имеют существенные различия в эффективности для одного и того же варианта обстановки;
- анализ результатов моделирования выявил наличие узких мест в разработанном способе и возможность его дальнейшего совершенствования.

Отсутствие таких признаков может свидетельствовать в пользу окончания работы над совершенствованием способа действий (системы “бой соединения”).

При выполнении третьего периода творческого шага полезно также учитывать следующее.

Во-первых, способ действий ИЛИ — ИЛИ является рациональным как исключение, обычно таким является способ И — И — тождество противоположностей, учитывающий влияние на эффективность всех факторов обстановки. Это, как уже указывалось, требует сравнительного анализа разработанных вариантов ИЛИ — ИЛИ способов действий в различных условиях обстановки.

Во-вторых, анализ сильных и слабых мест должен осуществляться не только для высокоэффективных вариантов замысла. Едва ли не большую информацию командиру способен дать анализ результатов математического моделирования малоэффективных вариантов. Известно изречение Л. Н. Толстого: “Все счастливые семьи счастливы одинаково, каждая несчастливая семья несчастлива по-своему” (“Анна Каренина”). В несчастливых особенных условиях проявляются такие потенциально заложенные в людях свойства, которые иначе, будь все благополучно, не проявились бы, остались бы незамеченными*. Поэтому, раскрывая человеческие свойства, классики литературы всегда помещали своих героев либо в экстремальные условия (“Война и мир”, “Тихий Дон”, “Преступление и наказание”), либо в условия бессмысленного, противного человеческой природе, но реально возможного существования (“Евгений Онегин”, “Мертвые души”), когда с наибольшей полнотой формируются или проявляются свойственные тем или другим условиям положительные и отрицательные свойства людей. Командир соединения кораблей также с особым вниманием должен проанализировать “неблагополучные” варианты, что позволит ему с наибольшей полнотой выявить сильные и слабые свойства сил — своих и противника — в различных условиях обстановки. Причем

* Вспомним также народную мудрость: человек познается в беде.

эти условия обстановки сформированы самим же командиром для ситуаций ИЛИ — ИЛИ, составляющих систему диалектических противоположностей.

В-третьих, личное участие командира в анализе результатов моделирования способно на порядки сократить время и повысить эффективность его выполнения. Поэтому у командира должны быть развиты навыки в выполнении такой работы.

Анализ осуществляется с совместным использованием основного и системы дополнительных показателей эффективности. Основной показатель указывает, какой вариант способа лучше (хуже), дополнительные показатели позволяют выявить причину этого.

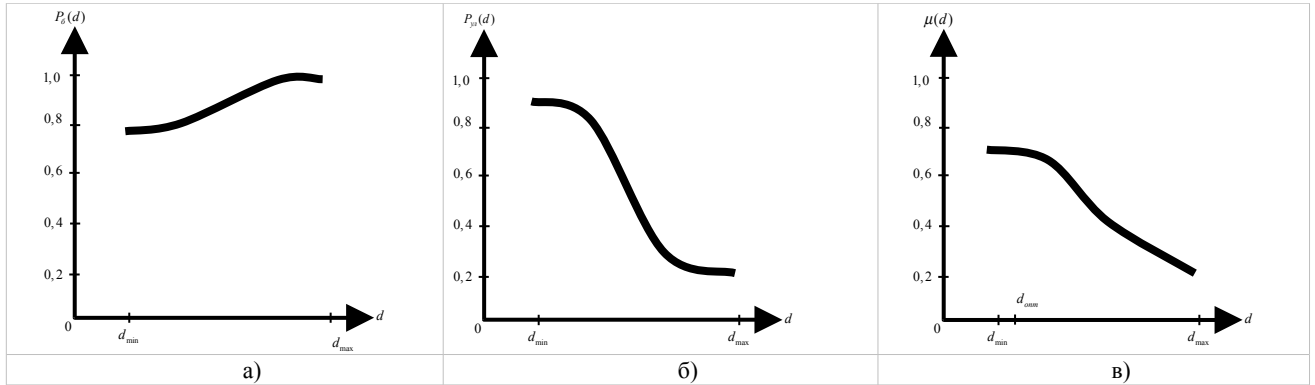


Рис.2.6

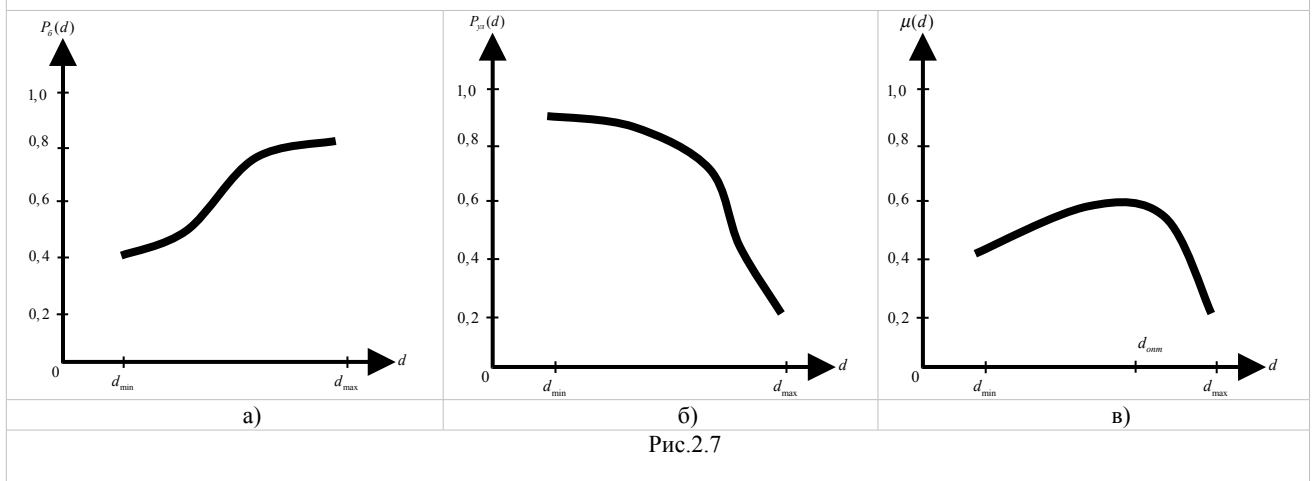


Рис.2.7

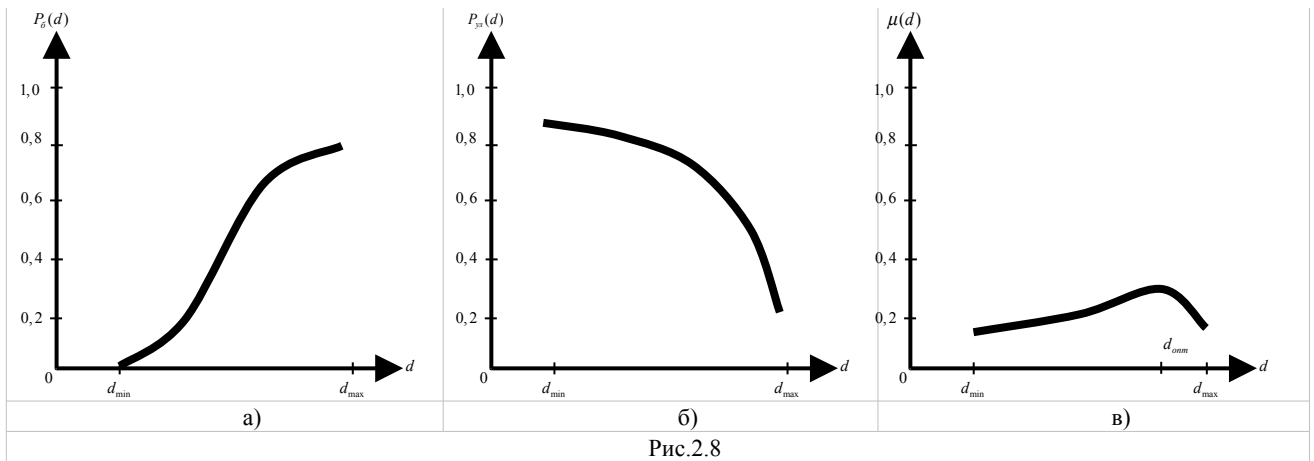


Рис.2.8

В первую очередь требуется оценить дополнительные показатели, которые характеризуют факторы обстановки, понять их влияние на основной показатель. При этом может потребоваться дополнительное моделирование (гл. 17—22).

Моделирование на базе современной ЭВТ позволяет достаточно быстро и наглядно продемонстрировать характер изменения показателя эффективности в зависимости от изменения в заданных пределах одних параметров обстановки при фиксированных или оптимизируемых значениях других параметров.

Пример 2.11. В условиях примеров 2.5—2.10 для некоторой обстановки вычислены и показаны на рис. 2.6—2.8 (а, б) значения числовых характеристик факторов обстановки в зависимости от дистанции торпедного залпа: вероятности $P_p(d)$ сохранения торпедным катером боеспособности, условной вероятности $P_{у.п}(d)$ поражения транспорта торпедным катером, занявшим позицию залпа. На рис. 2.6—2.8 (в) показано совместное влияние обоих факторов обстановки на величину показателя эффективности $\mu(d)$ выполнения поставленной задачи — математического ожидания числа (доли) пораженных транспортов конвоя со слабым, усиленным и сильным охранением (рис. 2.6, в, 2.7, в, 2.8, в соответственно). Позиция залпа зафиксирована на траверзных курсовых углах цели, при моделировании учтены условия начального обнаружения противниками друг друга, а угол зигзага, время использования средств РЭБ и РЭС оптимизированы для каждой из дистанций d залпа.

Заметим, что кривые $\mu(d)$ есть графическое отображение “борьбы” двух противоположностей (боеспособности катера и эффективности применения им своего оружия), а $d_{\text{опт}}$ — точка тождества этих противоположностей, оптимальная дистанция залпа; способы ИЛИ — ИЛИ соответствуют граничным значениям позиции залпа.

Анализ приведенных рисунков позволит командиру не только сравнить эффективность способов ИЛИ — ИЛИ, но и сделать другие выводы, например: оптимальная дистанция залпа $d_{\text{опт}}$ в данных условиях увеличивается с увеличением состава охранения конвоя, при этом эффективность $\mu(d)$ падает. Кроме того, можно выявить причины и характер этого явления.

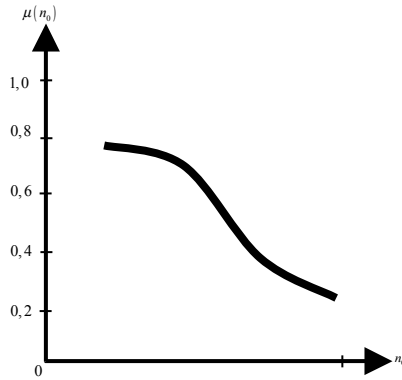


Рис.2.9

По приказанию командира эти данные обобщены и на рис. 2.9 показана зависимость показателя эффективности $\mu(n_0)$ от состава n_0 охраны конвоя (все результаты на рис. 2.6—2.9 соответствуют некоторым условиям обстановки). Современная ЭВТ позволяет достаточно оперативно получать подобную информацию на дисплеях или печатающих устройствах.

Большое значение при анализе результатов разработки способа действий имеет обычно оценка эффективности системы управления силами и подсистем; мероприятий обеспечения боя, отдельных его видов; организации взаимодействия сил.

На основании принципа Колмогорова в гл. 19—22 будет обосновано, что для командира соединения показателем эффективности во всех этих случаях является показатель эффективности выполнения поставленной задачи.

Часто полезным при выполнении командиром анализа разработанного способа действий является использование дополнительного показателя эффективности вида

$$k = \frac{\mathfrak{E}_p}{\mathfrak{E}_\Pi^{(r)}},$$

где \mathfrak{E}_p — значение показателя эффективности при “реальных” (предусмотренных в разработанном способе) системе управления, ее отдельных подсистемах, мероприятиях обеспечения боя, организации взаимодействия; $\mathfrak{E}_\Pi^{(r)}$ — значение показателя эффективности при r -м предельно возможном в данных условиях (но не фантастическом!) совершенствовании системы управления, ее отдельных подсистем и(или) мероприятий обеспечения (отдельных или всех сразу), или(и) организации взаимодействия*.

Таким образом, коэффициент k характеризует степень совершенства какого-то элемента способа действий в определенных условиях обстановки. Чем меньше значение коэффициента k , тем больше необходимость совершенствования этого r -го элемента способа действий. При этом, однако, необходимо учитывать следующие обстоятельства. Для определенности рассмотрим их на примере оценки разработанной на бой системы связи. Причиной малой величины коэффициента k могут быть: потенциально низкие возможности существующей системы связи; несоответствие организации ее

* Более подробно подобные дополнительные показатели эффективности k рассматриваются в гл. 19—22.

использования и (или) разработанного способа применения сил в рассматриваемых условиях обстановки.

Пример 2.12. Подводные лодки должны применить оружие в течение малого промежутка времени Δt . Однако для получения необходимой информации им назначены всплытия на связь через весьма большие промежутки времени T_c . Допустим, $\Delta t = 1$ ч, $T_c = 24$ ч. Ясно, что эффективность выполнения задачи подводными лодками будет мала при любом составе системы связи. Потребуется совершенствовать организацию связи.

Необходим дополнительный анализ и в случае большой величины коэффициента k , так как причинами этого могут быть не только соответствие потенциальных возможностей системы связи, способа действий и условий обстановки, но и заниженные требования, которые предъявляются к системе связи данного состава при разработанном способе действий в данных условиях.

Пример 2.13. Во время 2-й мировой войны система связи, организация ее использования, относительно “благополучные” при позиционном применении подводных лодок на коммуникациях противника и в условиях слабой противолодочной обороны коммуникаций, оказывались неэффективными при необходимости перехода к маневренному применению подводных лодок в условиях сильной противолодочной обороны коммуникаций.

Таким образом, при любом значении указанного дополнительного показателя эффективности k необходим дополнительный анализ. Использование математического моделирования для анализа и обоснования путей и способов совершенствования организации использования системы связи, системы управления в целом, мероприятий обеспечения рассмотрены в гл. 19—22.

Кроме указанных направлений анализа результатов моделирования могут потребоваться и другие.

Дальнейшая работа командира в третьем периоде после окончания анализа ранее проделанной работы зависит от результатов анализа.

Если командир счел разработку способа действий законченной, он должен оформить полученные результаты в установленной форме. В противном случае результаты анализа используются командиром для выявления направления дальнейшей творческой работы по совершенствованию замысла. Естественно при этом в первую очередь совершенствовать мероприятия, непосредственно влияющие на достижение цели боя и входящие в главную противоположность. Однако результаты анализа могут показать целесообразность совершенствовать и мероприятия, влияющие на достижение цели боя косвенно. Во всех случаях такая работа связана с формированием новой системы диалектических противоположностей или даже с учетом новых факторов обстановки. Могут измениться и главные противоположности системы.

Пример 2.14. В условиях примера 2.11 (см. также рис. 2.6—2.8, 2.9) командир использовал результаты анализа и счел необходимым совершенствовать способ действий торпедных катеров за счет повышения эффективности применения торпедного оружия в занятой позиции.

Командир предусматривает:

а) при малой дистанции залпа самостоятельные атаки каждым катером отдельного транспорта; при больших дистанциях залпа — совместную стрельбу подразделениями из нескольких катеров в секторе. Число катеров и размеры сектора зависят от дистанции залпа, состава конвоя. В процессе боевой подготовки такой способ стрельбы отработан;

б) атаку конвоя группами с различных направлений. Это повышает эффективность применения торпедного оружия, так как затрудняет уклонение транспортов от торпедных залпов. Однако существуют и преимущества при атаке с одного направления: ухудшаются условия ведения огня

частью кораблей эскорта противника, условия обнаружения противником атакующих катеров, упрощается управление катерами и в итоге сокращается время пребывания катеров под огнем противника.

В первом периоде следующего, $(i + 1)$ -го шага командир разрабатывает новые указания штабу на выполнение математического моделирования. Опустим подробности этой работы и покажем только особенности новой системы диалектических противоположностей (т. е. выводы из оценки обстановки), которая необходима командиру, чтобы выявить направления оптимизации действий сил в рамках нового способа (рис. 2.10). Обратим внимание, что теперь требуется оптимизировать состав подразделений катеров, стреляющих в секторе и размеры сектора, число направлений атаки. Если командир не сможет решить эти вопросы, используя свой опыт и качественный анализ, он включит их обоснование в цели моделирования.

Во втором периоде $(i + 1)$ -го шага будет осуществляться математическое моделирование. Теперь для каждой позиции залпа потребуется оптимизировать состав подразделений катеров, выполняющих стрельбу в секторе, число групп и направлений атаки катеров.

В третьем периоде $(i + 1)$ -го шага командир осуществит анализ всей работы, проделанной в первом и втором периодах.





Рис. 2.10

Допустим, что результаты анализа привели его к выводу: новый способ действий не повышает эффективность удара при усиленном и сильном охранении конвоя; торпедное оружие можно эффективно применять только с малых дистанций залпа на траверзных курсовых углах цели, поэтому необходимо обеспечить катерам возможность выходить в эту позицию; возможности совершенствования способа действий для принятой основной идеи замысла исчерпаны; следует исходить из новой основной идеи: основные усилия катеров сосредоточить на поражении транспортов конвоя; частью катеров предварительно ослабить охранение. Далее все в том же периоде $(i + 1)$ -го шага командир приступит к разработке способа действий с учетом этого нового замысла, а в первом периоде $(i + 2)$ -го шага будет разрабатывать пути оптимизации действий сил при этом новом способе, указания на выполнение для этого математического моделирования.

Закончим на этом этапе рассмотрение примера 2.14. Укажем лишь, что методической основой всей работы командира на новом $(i + 2)$ -м шаге явится вскрытая им в первом периоде система диалектических противоположностей. Для способа действий сил при новой основной идее замысла эта система может иметь вид, в целом похожий на систему на рис. 2.11. Здесь главными диалектическими противоположностями системы являются противоположности между распределением катеров по направлениям и между позициями применения ими оружия.

Командиру, однако, следует знать и недостаток применения в оперативно-тактической области изложенной выше

Сделаем некоторые замечания о предлагаемой методологии эвристической оптимизации. В наибольшем объеме она может быть применена при заблаговременной подготовке. Опытный командир, использующий результаты заблаговременной подготовки, способен сразу же разработать способ действий, названный выше способом И — И. Математическое моделирование тогда может ему потребоваться для обоснования отдельных элементов этого способа в связи со спецификой обстановки. Но всегда знание системы диалектических противоположностей есть необходимое условие разработки эффективного способа действий сил. Применение этого закона позволяет также регламентировать (и тем облегчить) процесс выработки способа действий, решения командира в целом.

методологии оптимизации. Активный и умный противник, используя данные разведки, способен повторить значительную часть проделанной командиром работы, включая и математическое моделирование, спрогнозировать планируемые действия, решение командира и избрать неблагоприятный для командира способ действий, захватив инициативу.

Логичность, обоснованность работы командира при выработке способа действий, решения могут обернуться своей отрицательной стороной — предсказуемостью результата. Таким образом, здесь тоже имеет место проявление закона единства и борьбы противоположностей. Об этом

свидетельствует история военного искусства. Она же указывает и путь борьбы с таким недостатком — разработка оригинальных способов и решений, мероприятий военной хитрости, дезинформации, маскировки. Не может быть эффективным решение командира, если оно не содержит таких мероприятий.

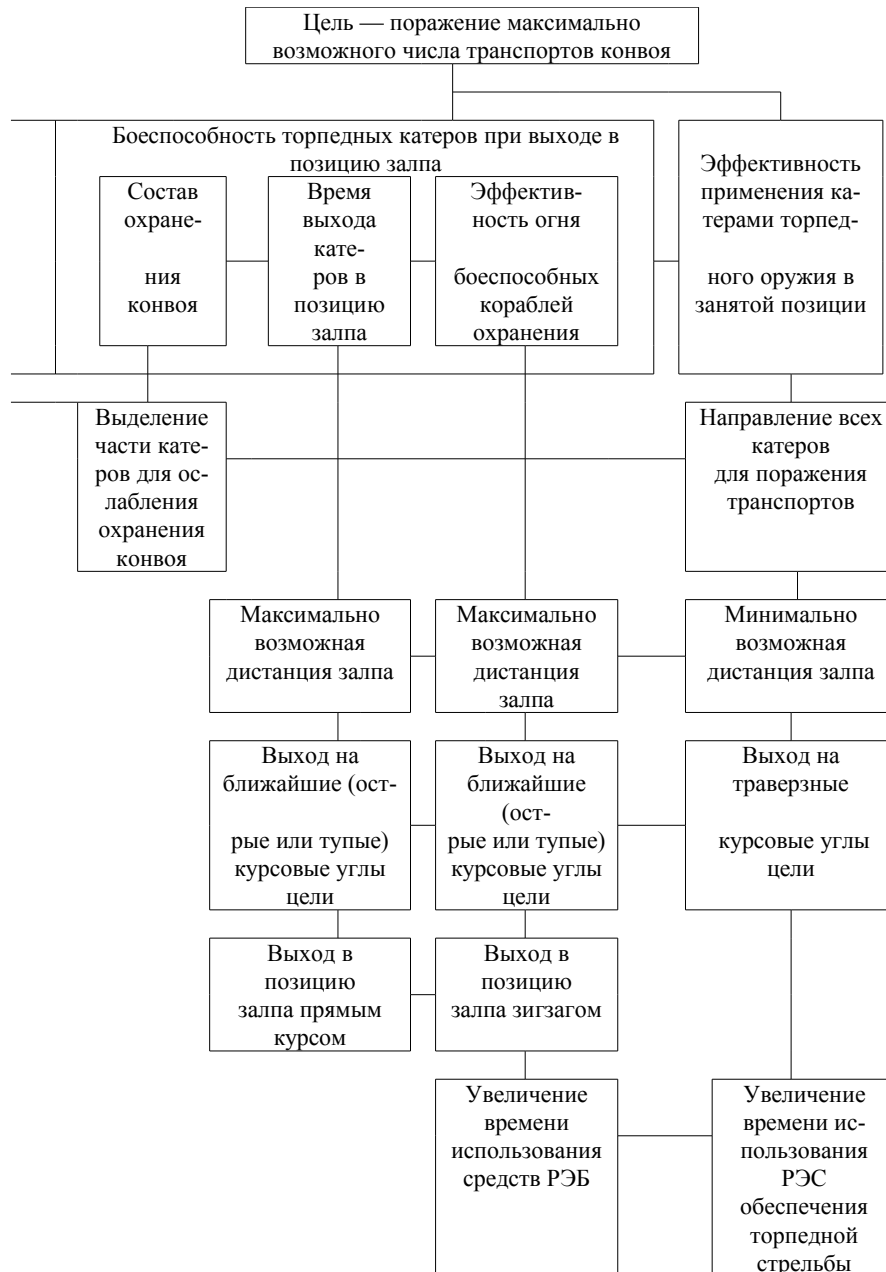


Рис. 2.11

В связи с этим следует отметить еще одну, ранее не упоминавшуюся, сторону применения закона единства и борьбы противоположностей: знание системы диалектических противоположностей, свойственных управляемому процессу (разрабатываемой системе), стимулирует творчество командира (разработчика системы) и позволяет ему находить оригинальные, нестандартные решения.

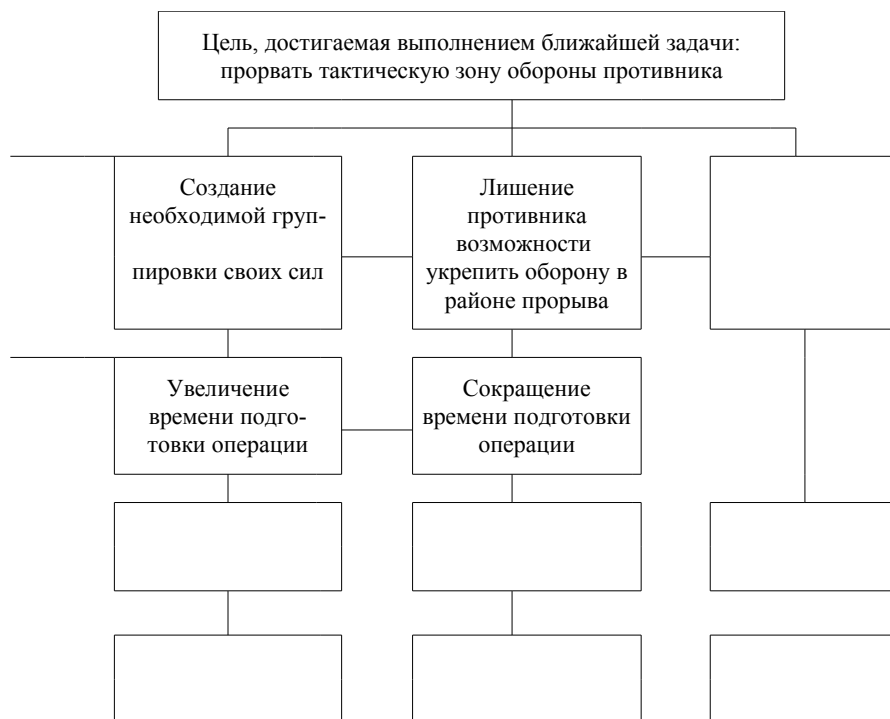


Рис. 2.12

Пример 2.15. Брусиловский прорыв (1916)*. Одним из главных диалектических противоречий при проведении наступательных операций в условиях позиционного характера первой мировой войны было противоречие между необходимостью увеличивать время подготовки операции для создания нужной группировки сил на направлении удара и стремлением сократить это время, чтобы не дать противнику возможность вскрыть факт подготовки удара, его направление и усилить оборону (рис. 2.12). Брусилов знал, что для русской армии это противоречие усугублялось разрухой на транспорте и наличием прогермански настроенных лиц в высших эшелонах власти и в экономике. Тем не менее его замысел предусматривал максимальную подготовку сил к операции. А чтобы исключить отрицательные последствия такого разрешения диалектического противоречия, он предусмотрел мероприятия военной хитрости и дезинформации противника: вопреки существовавшим канонам назначил не один, а несколько участков прорыва в полосе фронта шириной 450 км и никому (даже в Ставке) не сообщал, какой из них главный. При этом он обосновал рациональное число участков прорыва. В результате оборонительные усилия противника были распылены, противник не мог усилить оборону “неблагополучных” участков за счет

* Такое название наступательной операции войск русского юго-западного фронта дал народ по имени командующего фронтом генерала от кавалерии А. А. Брусилова (1853—1926).

“благополучных”. Операция увенчалась большим успехом, хотя общее соотношение сил сторон практически составляло 1:1. За три месяца боев русские войска продвинулись на 80—120 км. Потери противника составили 1,5 млн чел. (потери русских войск 450 тыс. чел.), было захвачено 600 орудий и много другой техники. В очередной раз были спасены союзники России — Англия, Франция, Италия. Австро-венгерская армия была разгромлена и более не оправилась от поражения. Обратим также внимание: среднемесячные темпы продвижения фронта составили 25—40 км, потери — 3750—5600 чел. за километр продвижения на фронте шириной 450 км.

Пример 2.16. Наступательная операция советских войск “Багратион” (1944). Одним из главных диалектических противоречий при проведении наступательных операций в условиях маневренного характера второй мировой войны явилось противоречие между стремлением сосредоточить максимум усилий на направлении удара для прорыва обороны противника и необходимостью выделять достаточные силы и средства на фланги, чтобы не дать противнику возможность ударом подвижных соединений отсечь наступающую группировку. Неудачное разрешение этого противоречия всегда означало срыв операции.

Замыслом нашего Верховного Главнокомандования на операцию “Багратион” предусматривалась решительная концентрация усилий на основном направлении (район Белоруссии). Для исключения ударов противника по флангам были спланированы и проведены мероприятия по дезинформации противника. В их результате были “убиты два зайца”: противник вывел часть своих сил с направления нашего удара, а на опасных для нас направлениях не отважился на наступательные действия и перешел к обороне (копируя наши действия на Курской дуге в 1943 г.).

Поучительно, что при планировании операции “Багратион” советское командование широко использовало командно-штабные учения (разновидность натурального моделирования), оперативно-тактические расчеты, результаты накопленного опыта. В частности, на основном направлении (ширина фронта 500 км) планировались 6 участков прорыва.

Пример 2.17. Во время Великой Отечественной войны советским катерникам все время приходилось разрешать диалектическую противоположность между различными способами действий, систематически при этом меняя их (в основе примеров 2.4—2.9, рис. 2.3—2.11 лежит опыт прошлой войны). Помимо оптимизации позиции залпа и способа маневрирования для выхода в нее применялись также различные способы обеспечения занятия катерами позиции, мероприятия военной хитрости: прикрытие ударных групп катеров дымзавесами; атаки катерами конвоев со стороны берега и на малом ходу, чтобы ликвидировать бурун за кормой катера, уменьшить заметность катеров, до-стичь внезапности удара; использование отвлекающих групп катеров; нанесение ударов по конвоям совместно с авиацией и т. д.

Для обоснования способов действий широко применялись оперативно-тактические расчеты, накопленный опыт.

Пример 2.18. Советский авиаконструктор Р. Л. Бартини при проектировании самолетов был вынужден разрешать диалектическую противоположность между мощностью мотора и габаритами самолета: увеличение мощности мотора увеличивает скорость самолета, но при этом возрастают габариты самолета, что уменьшает скорость и дальность его полета. Р. Л. Бартини не ограничивался нахождением оптимального сочетания мощность мотора — габариты самолета, но искал и другие решения: применил (впервые) убирающиеся шасси; новую систему охлаждения мотора, при которой уменьшалось его лобовое сопротивление (часть элементов системы охлаждения размещалась в плоскостях самолета); применил специальные сорта стали и новые способы электросварки; нашел такие обводы некоторых деталей самолета, при которых встречный поток воздуха не только

затруднял поступательное движение самолета, но и способствовал ему, увеличивая тем самым скорость полета (аналогия — движение парусного судна крутой бейдевинд)*; разработал треугольную форму крыла и т. д. Все свои решения он обосновывал математическим моделированием. В результате в начале 30-х годов он создал истребитель, впервые преодолевший рубеж скорости в 450 км/ч, тогда же спроектировал истребитель с невиданной по тому времени скоростью свыше 630 км/ч, а в начале 40-х годов — со сверхзвуковой скоростью 2М.

Рассмотрим теперь примеры пагубных последствий неумелой эвристической оптимизации, в частности неумение увидеть, обоснованно разрешить главную диалектическую противоположность, игнорирование мероприятий военной хитрости, обеспечения скрытности.

Пример 2.19. Наступление германских войск под Верденом в феврале 1916 г. (сравнить с Брусиловским прорывом). Шаблонно было избрано одно направление удара на узком участке шириной 15 км, проведена длительная подготовка, позволившая достичь трехкратного превосходства в личном составе, пятикратного в артиллерии. Противник вскрыл направление и время удара, провел подготовку к оборонительной операции. Итог: за 6 месяцев боев немцы продвинулись на 6—7 км (около 1 километра продвижения за месяц), потеряли 600 тыс. чел. (около 100 тыс. чел. убитых на километр продвижения). Цель наступательной операции немцами не была достигнута. Внезапное применение отравляющих веществ дало лишь частный успех.

Пример 2.20. Наступление англо-французских войск на р. Сомма в июле 1916 г. Избрано одно направление удара, проведена огромная длительная подготовка наступления. На участке прорыва шириной 40 км достигнуто пятикратное превосходство в личном составе, трехкратное — в артиллерии. Впервые применялись танки. Была проведена 7-дневная артиллерийская подготовка. Конечно, противник подготовился к отражению наступления. Итоги: за 4,5 месяца наступления англо-французские войска продвинулись на 10 км (около 2 км продвижения за каждый месяц боев), их потери составили 800 тыс. чел. (в среднем 80 тыс. убитых на каждый километр продвижения). Потери германских войск — 500 тыс. чел. Цель наступления не была достигнута. В результате кровавых потерь во французской армии начались революционные выступления, жестоко подавленные командованием. Командирам при оценке порогового значения ущерба U^* (см. § 1.2) полезно знать, что с той поры страх перед последствиями кровавых потерь в несправедливых войнах влияет на командование и руководителей государств.

Читатель может убедиться, что потери войск генерала А. А. Брусилова на километр продвижения вперед (с учетом ширины участка прорыва) были меньше в 600—800 раз, чем потери немцев под Верденом и в 180—240 раз — чем потери англичан и французов на р. Сомма. Если к этому добавить результаты, достигнутые в каждой из указанных операций, то будет особенно очевидно, как много способна дать умелая эвристическая оптимизация, и в частности умение вскрыть и нестандартно разрешить диалектические противоречия, свойственные управляемому процессу, провести мероприятия военной хитрости.

Итак, командующим, командирам, разработчикам систем во все времена приходилось целеустремленно или интуитивно выявлять и разрешать системы диалектических противоположностей — “точки”, где можно повысить или потерять эффективность.

О применявшихся (применяющихся) способах разрешения выявленных противоположностей можно образно сказать следующее. Поиски тождества (оптимизация) найденных противоположностей — это способ развязать гордиев узел, а снятие противоположности (его

* Обратим внимание читателей на этот прием талантливых людей: сделать из недостатка преимущество.

отрицательной стороны) — способ его разубить. Лучшим является сочетание этих двух способов. Сложные условия работы командира в настоящее время требуют применение изложенной методологии не интуитивно, а целеустремленно. Это требует от командиров умения, навыка мыслить диалектически.

Изложенные выше основы методологии эвристической оптимизации были ориентированы главным образом на условия работы командира при заблаговременной подготовке. При непосредственной подготовке, в ходе дальнейшего управления силами решающую роль будет играть возможность (и способность) командира использовать результаты заблаговременной подготовки: выявленные системы противоположностей, закономерности, результаты проведенного моделирования, подготовленные модели. Заблаговременная подготовка выполнена качественно, если непосредственная подготовка проводится методом корректировки ее результатов.

2.3.3. Методика выработки указаний штабу на выполнение математического моделирования, оперативно-тактической постановки задачи

Постановка задачи — начальный этап исследования операций (см. п. 2.1.1). Ее разработка является исходной основой для разработки указаний штабу на выполнение математического моделирования при выработке решения по поставленной задаче, каких-либо его элементов (т. е. в процессе эвристической оптимизации).

Общее содержание постановки задачи было указано в п. 2.1.1. Теперь, используя результаты п. 2.3.1 и 2.3.2, можно конкретизировать содержание постановки задачи, а также изложить методику ее разработки. Для большей наглядности, но без нарушения общности, рассмотрим эти вопросы на примере разработки командиром соединения (в ходе выработки решения) способа действий сил, обращаясь при необходимости к уже известным читателю примерам п. 2.3.2.

Итак, постановка задачи описывает: а) цель действий сил соединения; б) цель моделирования; в) элементы обстановки, касающиеся сил противника, своих сил, военно-географических условий, фактора времени, которые должны быть отражены в модели для достижения цели моделирования.

Выявление цели действий соединения, т. е. цели, которая должна быть достигнута в результате выполнения соединением поставленной задачи, осуществляется командиром в ходе выяснения поставленной соединению задачи. Способ применения сил, любой другой элемент замысла, решения в целом, плана будет разрабатываться с учетом этой цели. Иногда цель может быть прямо указана старшим начальником. В противном случае используется следующая схема выявления цели действий соединения: необходимо понять замысел старшего начальника, затем роль и место своего соединения в этом замысле, что и дает возможность сформулировать далее цель действий своего соединения. Такая схема обеспечивает единство (непротиворечивость) целей различных командных инстанций. Формулировка цели должна быть далее уточнена так, чтобы имелась возможность на основании принципа Колмогорова выявить показатель эффективности выполнения поставленной задачи (“выйти” на число). Пусть, например, выявлена цель действий соединения: сорвать высадку десанта противника, для чего поразить не менее такой-то доли кораблей десанта (или максимально возможное число кораблей десанта).

Затем должны быть сформулированы ограничения (условия, требования)* достижения цели: состав и состояние своего соединения, приданных и поддерживающих сил и средств, установленные сроки, район выполнения поставленной задачи, допустимый расход различных ресурсов и т. д. Надо

* * Термин “ограничения” применительно к указанному ниже соответствует понятийному аппарату теории исследования операций.

иметь в виду, что состав учитываемых при моделировании ограничений зависит от целей моделирования.

Цель математического моделирования органически связана с возникающими в ходе эвристической оптимизации потребностями. В общем случае целями моделирования являются:

— сравнительная оценка вариантов способа применения сил (см. примеры 2.4—2.14, а также рис. 2.5—2.11);

— выявление сильных и слабых мест каждого из вариантов для суждения о дальнейшей направленности работы либо об ее окончании.

Анализ таких результатов моделирования потребует дальнейшего выявления закономерностей, знание которых окажется необходимым для продолжения творческой работы командира. Командир должен указать, влияние каких элементов обстановки на эффективность должно быть оценено. Соответствующие параметры обстановки составят систему дополнительных показателей эффективности.

Конечно, указанные общие цели моделирования должны быть конкретизированы с учетом решаемой командиром творческой задачи и рассматриваемых условий обстановки.

Указание элементов обстановки, которые должны быть отражены в модели — едва ли не наиболее трудно регламентируемая часть постановки. Дело в том, что этих элементов, связей между ними бесчисленное множество. Из этого бесчисленного множества требуется указать только то, что необходимо для достижения конкретной цели моделирования.

Надо помнить: если в постановке задачи отсутствуют существенно важные элементы обстановки, это ведет к искаженному представлению реальных закономерностей; если указываются ненужные элементы, то во-первых, при моделировании “за кустарником бывает не видно леса” и, во-вторых, возрастают трудности и время моделирования, из-за чего моделирование может быть сорвано. Единственный реальный и научно обоснованный путь регламентации п. “в” постановки задачи — разработка и использование системы диалектических противоположностей и противоречий, свойственных способу применения сил в ожидаемых условиях обстановки.

Начать изложение метода разработки (и описание содержания) п. “в” постановки задачи целесообразно с напоминания принципа Аристотеля: чтобы действие было успешным, необходимы два условия: первое — правильное определение конечной цели действия, второе — правильное определение способа достижения конечной цели.

Целью командира является разработка рационального (в пределе оптимального) способа применения сил или же замысла, решения в целом. В основе способа достижения этой цели лежит вскрытие системы диалектических противоположностей и противоречий, свойственных поставленной задаче, способу применения сил и условиям обстановки. Как было показано в п. 2.3.2, именно точки диалектических противоположностей и есть те точки, где можно добиться повышения эффективности действий сил.

В п. 2.3.2 указывалось также, что некоторые из противоположностей командир разрешит (или, иначе говоря, обоснует соответствующие мероприятия, способы действий) на основании либо опыта, либо качественного анализа (логических заключений), стремясь к нестандартным, оригинальным способам, а также к разработке мероприятий военной хитрости, дезинформации, маскировки (см. примеры 2.15—2.17). После этого командир сформулирует систему диалектических противоположностей, которую он считает необходимым разрешить с использованием математического моделирования, т. е. оптимизировать методами математического моделирования систему необходимых мероприятий.

В качестве примера можно рассмотреть рис. 2.5., где присутствуют цель действия сил, факторы обстановки, от которых объективно зависит эффективность выполнения поставленной задачи, а также мероприятия, подлежащие оптимизации. На рисунке, однако, не показаны диалектические противоречия, характеристики мероприятий как элементов системы противоположностей, а также цель моделирования. Впрочем, цель математического моделирования присутствует незримо уже при разработке системы диалектических противоположностей*.

Система диалектических противоположностей и разработанных на ее основе диалектических противоречий (с описанием особенностей их элементов) и составляет основу (1-й уровень) п. «в» постановки задачи. Методы разработки этой основы изложены в п. 2.3.2.

Продолжение разработки постановки задачи осуществляется с ориентацией на разработанные системы диалектических противоположностей и противоречий. Общая схема продолжения постановки задачи: необходимо указать сведения для моделирования (и оптимизации) мероприятий каждой из диалектических противоположностей, затем сведения для моделирования взаимосвязей этой противоположности с другими противоположностями системы.

Обратимся к условиям примеров 2.4—2.10 (см. рис. 2.5). При разработке способа атаки катерами конвоя выявлена система диалектических противоположностей и далее система диалектических противоречий, связи между ними.

Вначале командир излагает сведения, необходимые для разрешения главных диалектических противоположностей системы — обоснования дистанции и курсового угла залпа (позиции залпа). Часто оказывается целесообразным начинать с основного направления действий сил, в рассматриваемом случае — с поражения транспортов конвоя катерами, занявшими позицию залпа. Командир должен описать: транспорты конвоя как объекты атаки, торпедные катера как носители торпедного оружия; влияние дистанции залпа и курсового угла цели (угла встречи торпед) на эффективность применения торпедного оружия; военно-географические условия, способные повлиять на эффективность применения катерами оружия в занятой позиции.

Далее командир излагает необходимые для моделирования процесса поражения катеров противником при занятии ими позиций залпа сведения*: о кораблях охранения как носителях артиллерийского оружия, о торпедных катерах как объектах поражения артиллерийским огнем; о влиянии на эффективность огня противника дистанции стрельбы, угла зигзага катеров при сближении с противником, продолжительности ведения противником огня; о влиянии на эффективность огня военно-географических условий (состояния моря, видимости). Состав сведений, необходимых для математического моделирования применения носителей оружия, и сами методы моделирования приводятся в гл. 18.

После этого излагаются сведения для оценки генеральной скорости катеров при различных углах зигзага и состоянии моря. Это позволит оценить время, необходимое катерам для занятия различных позиций залпа с учетом указываемых командиром условий первичного обнаружения противниками друг друга. Все это, вместе взятое, составит комплекс сведений, необходимых для расчета времени пребывания катеров под огнем противника при выходе в конкретную позицию залпа.

Затем командир должен изложить сведения о характере влияния на эффективность огня противника использования средств РЭБ соединения на различных этапах атаки, о влиянии на

* Это не значит, что она не должна быть сформулирована четко (см. пример 2.7).

* В общем случае это сведения о направлениях других действий сил (см. содержание замысла, например, в [12]).

эффективность поражения противника способов использования РЭС обеспечения торпедной стрельбы и атаки в целом, о характере их взаимных помех.

Все указанные выше сведения (с необходимой степенью их детализации) составят 2-й уровень постановки задачи. Возможна и дальнейшая детализация постановки задачи относительно использования систем оружия и технических средств своих катеров и кораблей противника (3-й уровень постановки задачи). Однако в общем случае состав сведений 3-го уровня постановки задачи должен обеспечить получение нужных для моделирования параметров обстановки (например, скорострельности, вероятности попаданий в катер на залп артиллерийских систем противника на различных дистанциях стрельбы, при различном маневрировании катеров и различном состоянии моря).

Таким образом, необходимость описать детально систему диалектических противоречий, чтобы оптимизировать соответствующие мероприятия, будет естественным образом направлять работу командира над постановкой задачи (на 2-м и 3-м ее уровнях).

Разработанные системы диалектических противоположностей и противоречий позволяют обоснованно указать и систему дополнительных показателей эффективности. Прежде всего это будут параметры, характеризующие факторы обстановки, а также определяющие их влияние. Так, в условиях, которым соответствует рис. 2.5, в число дополнительных показателей эффективности войдут вероятности поражения катером транспорта в различных позициях залпа, вероятность сохранения катером боеспособности, математическое ожидание времени пребывания катера под огнем, эффективность огня кораблей охранения для различных позиций залпа и условий атаки и, возможно, для разных этапов атаки. Кроме того, может потребоваться выявить степень влияния средств РЭБ и РЭС на эффективность удара. Может потребоваться и знание других параметров, характеризующих ход и исход удара (см. п. 2.3.2, описание анализа результатов моделирования).

С окончанием постановки задачи разрабатываются указания штабу на организацию выполнения математического моделирования:

1. Назначить руководителя, ответственного за выполнение в срок моделирования и выработку предложений (если командир не предполагает сам руководить моделированием).
2. Назначить подразделения штаба (состав исполнителей), непосредственно выполняющие моделирование с указанными целями.
3. Назначить подразделения (специалистов) штаба, которые должны осуществлять детализацию, уточнение постановки задачи на всех этапах моделирования.
4. Указать подразделения штаба, выполняющие фрагменты моделирования с тем, чтобы в основной модели (оптимизирующей главные противоположности) использовались результаты этих фрагментов.
5. Указать подразделения штаба, которые должны предоставить в распоряжение основного подразделения имеющиеся у них модули моделей, пакеты прикладных программ, базы данных.
6. Выделить технические средства, которые должны быть использованы для моделирования.

Изложенные выше методология эвристической оптимизации, методика постановки задачи и выработки указаний штабу на выполнение математического моделирования не требуют от командира специальной профессиональной подготовки. Во всех этих случаях речь идет лишь об упорядочении, регламентации обычно выполняемой командиром работы.

2.3.4. Подготовка органа управления к использованию методов эвристической оптимизации при выполнении свойственных ему задач

В пп. 2.3.1—2.3.3 методология эвристической оптимизации была изложена в общем виде. Ее применение в конкретных условиях (при выработке командиром замысла, решения по поставленной задаче; офицером штаба — плана применения сил, использования средств по кругу его обязанностей) требует подготовительной работы. Работа эта должна проводиться с учетом свойственных соединению задач для некоторого диапазона условий обстановки.

Прежде всего необходимо очертить содержание замысла, решения, плана (облик структуры системы). Например, замысел должен содержать определение основного направления, других действий сил, последовательность и способы разгрома противника и т. д. Источниками для выполнения этой работы являются требования руководящих методических документов (где запечатлен накопленный на флоте опыт), собственный опыт командира, его здравый смысл.

Далее следует регламентировать процесс творческой работы, определить шаги этой работы, содержание каждого i -го шага на пути к цели — разработке замысла, решения, плана (системы). Например, часто выработку замысла рационально выполнять в порядке установленных пунктов замысла*. Источники, используемые при этой работе те же, что и указанные выше, но с большей долей субъективного в работе командира (не путать с субъективизмом). Состав, содержание шагов могут быть различными для условий заблаговременной и непосредственной подготовки, для командиров с различным опытом**. Целесообразно, однако, при любом опыте командира регламентировать свою работу детально, чтобы, во-первых, дать себе отчет в содержании, организации, методике работы, выполняемой им часто интуитивно, а во-вторых, обеспечить дальнейшую работу по обоснованию системы МОУ силами и организации МОУ (см. § 2.4, 2.5). При этом для каждого i -го творческого шага следует выявить возможные цели математического моделирования, что потребует выполнения работы, описанной в пп. 2.3.1—2.3.3 для диапазона условий.

Целям обоснования структуры СМО и регламентации работы командира служит также выявление i -го шага его творческой деятельности, на котором целесообразно использовать математическое моделирование для сравнительной оценки вариантов ИЛИ — ИЛИ, выявления сильных и слабых мест каждого варианта и затем закономерностей, знание которых необходимо для совершенствования способа применения сил. Например, при выработке командиром замысла таким шагом является обычно обоснование порядка огневого поражения противника*. Подготовка к использованию математического моделирования должна проводиться с учетом особенностей различных фаз управления: заблаговременной и непосредственной подготовки, организации боя, операции, в ходе выполнения силами решения командира.

Вся указанная выше работа является важной составной частью оперативной подготовки командира и его штаба (любого органа управления).

Читателям предлагается для какого-либо известного управляемого процесса (системы) разработать системы диалектических противоположностей и противоречий. Выводы обычно такие: эта работа требует высоких профессиональных знаний, навыков выполнения и позволяет глубже

* Такая последовательность выработки замысла предложена профессором Военно-морской академии Ф. А. Матвейчуком, обобщившим практику работы органов управления соединений флотов.

** Нужно быть, однако, готовым к тому, что уже в процессе выполнения работы условия обстановки могут вынудить откорректировать общее содержание решения, плана (облик системы), а значит, и число, содержание творческих шагов. Особенно это типично для начального периода войны, новых для соединения задач, конструирования новых технических систем.

* Это положение было выдвинуто и обосновано доцентом Военно-морской академии С. К. Колиевым.

понять механизм управляемого процесса (условия функционирования системы). Едва ли не самым сложным и важным для командира является умение и навык мыслить системно, диалектически.

Изложенная выше методология эвристической оптимизации справедлива для различных этапов управления силами: при подготовке боя, операции, в ходе их ведения, при повседневном управлении силами. Кроме того, ее можно использовать при управлении в любой народнохозяйственной области и в творческой деятельности проектантов, конструкторов. Методология может быть положена в основу создания систем автоматизации проектно-конструкторских работ, систем искусственного интеллекта.

2.3.5. Использование методов эвристической оптимизации в военно-научной работе

С методической точки зрения процесс развития какой-либо области военной науки, разработки научных положений сродни процессу выработки командиром решения по поставленной задаче. Пусть, для определенности, речь идет о разработке способов применения каких-либо сил флота (существующих или проектируемых). Первоначально должна быть сформулирована цель действий сил, осуществлена оценка обстановки и выработан замысел применения сил для различных вариантов обстановки. Далее замысел должен быть оформлен в рекомендации (положения) относительно способов применения сил при различных вариантах обстановки. И пусть этапы дальнейшей работы научного специалиста или коллектива таких специалистов не называются “завершением выработки решения”, “планированием штабом применения сил, использования средств в рамках решения командира”, а имеют другие, специфичные для данной научной области, названия, содержание творческой работы научного коллектива будет с точки зрения методологии эвристической оптимизации аналогичным содержанию творческой работы коллектива органа управления. Аналогичными будут и методы эвристической оптимизации, и использование при этом математического моделирования (возможно, что менее напряженной будет динамика работы коллектива).

В связи со сказанным заинтересованному читателю предлагается просмотреть данный параграф (а также последующие параграфы этой главы) с позиций научного специалиста. Учитывая характер примеров 2.4—2.14, может оказаться полезным поставить вначале себя в положение научного специалиста, разрабатывающего положения о способах действий торпедных катеров на коммуникациях противника в условиях какого-либо флота во время Великой Отечественной войны, а уже после этого транспонировать понятия положения для научной области, используя рекомендации п. 2.3.4.

Аналогичным образом можно использовать положения изложенной методологии эвристической оптимизации в различных невоенных областях управления, в области проектно-конструкторских работ.

Следует специально остановиться на ключевом вопросе использования в научной работе диалектических методов познания, в частности основного принципа метода — рассмотрение явлений в единстве и взаимосвязи составляющих его элементов (так называемый системный подход), а также закона о единстве и борьбе противоположностей. Как было показано в параграфе, использование этого закона, при обязательном следовании основному принципу диалектического метода, позволяет:

- очертить границы исследуемой системы (проблемы);
- выявить взаимосвязанную систему направлений оптимизации функционирования разработанной системы, главное и обеспечивающие направления оптимизации;

— целенаправленно избрать метод оптимизации каждого из отдельных направлений оптимизации системы (метод “развязать узел” — найти тождество противоположностей, т. е. экстремум какой-то функции, функционала, применив математическое моделирование; “разрубить узел” — остановиться на каком-либо элементе противоположности, нейтрализовав его отрицательное влияние способом использования новых и нестандартных приемов: мероприятий военной хитрости, маскировки, новых конструкторских решений);

— целенаправленно осуществить совершенствование системы — переход к новой системе;

— осуществить сравнительную оценку различных вариантов построения системы, так как оценка возможна только в случае, если системы сравниваются для оптимальной организации функционирования каждой из них, а такая оптимизация требует в первую очередь выявления систем диалектических противоположностей, т. е. направлений оптимизации;

— методически стройно и полно осуществить оперативно-тактическую (тактико-специальную, инженерно-специальную) постановку задачи для формирования необходимых математических моделей, используя для этого в полной мере профессиональные знания руководителя и затрачивая минимальное время на его методическую подготовку в области разработки постановки задачи.

Использование закона единства и борьбы противоположностей — эффективный способ обобщения, систематизации и структуризации исторического опыта, используемого для научных целей, например для совершенствования управления силами и средствами. Так, приведенные на рис. 2.5, 2.10, 2.11 системы диалектических противоположностей есть наглядное, краткое, систематизированное обобщение многостраничного (многотомного) изложения различных факторов творческой деятельности командиров и штабов соединений и подразделений торпедных катеров во время Великой Отечественной войны, направленной на повышение эффективности действий катеров на коммуникациях противника*. Такое систематизированное обобщение опыта истории — эффективный исходный плацдарм для дальнейшей научной работы не только в области применения торпедных (теперь и ракетных) катеров на коммуникациях противника, но и других областях военного искусства.

Пример 2.21. Допустим, разрабатывается метод распределения сил (войск) на основном (или каком-либо другом) направлении приложения их усилий. С этой целью рассмотрен опыт распределения сил при штурме Измаила, Брусиловском прорыве (пример 2.15), в операции “Багратион” (пример 2.16), при наступлении немецких войск под Верденом (пример 2.19), наступлении англо-французских войск на р. Сомма (пример 2.20), а также при срыве наступления немецких войск на Ленинград осенью 1941 г., контрнаступления советских войск под Москвой зимой 1941—1942 гг., в Сталинградской наступательной операции советских войск. Описания этих операций — набор фактов, непосредственное использование которых не помогает достижению цели исследования. Положение меняется, если этот исторический опыт проанализировать с позиций закона единства и борьбы противоположностей: открываются основополагающие с точки зрения

* * Из методических соображений решаемые при этом проблемы описаны в сокращенном виде. Следует также подчеркнуть, что излагаемый метод систематизации исторических фактов в сочетании с математическим моделированием позволяет давать объективные (числовые) оценки историческим эпизодам. Использование математического моделирования при этом упрощается ввиду того, что известны условия обстановки, способы действий сторон, значения параметров. В качестве примера можно привести математическое моделирование Синопского боя. Моделирование позволило сделать следующий вывод: турецкий флот был обречен на поражение исходной диспозицией адмирала П. С. Нахимова, который действовал практически оптимально. Турецкое командование могло лишь уменьшить свои потери, немедленно выйдя из боя [19].

цели научного исследования закономерности, тенденции. Можно выявить наличие следующих диалектических противоположностей и противоречий при распределении сил:

а) Сосредоточение основных усилий на узком участке фронта. Это позволяет добиться превосходства в силах на данном участке, но требует соблюдения скрытности подготовки и внезапности действий. Тогда действия сил отличаются высокой эффективностью (Сталинградская наступательная операция). Если скрытности и внезапности достичь не удастся, действия сил даже при большом их превосходстве над противником будут малоэффективны или сорваны (наступление под Верденом, на р. Сомма).

б) Рассредоточение основных усилий на многих участках широкого фронта, чтобы распылить оборонительные усилия противника и не дать ему возможности усиливать “неблагополучные” участки за счет “благополучных”. Способ применяется при отсутствии превосходства в силах, невозможности сохранить скрытность распределения сил.

Общий состав сил наступающей стороны должен позволить ей создать полноценные группы (группировки), способные самостоятельно действовать на нескольких участках. Однако высокой эффективности при этом можно достичь, если противник не в состоянии наращивать свои силы извне (штурм Измаила). В противном случае противник может снизить эффективность выполнения задачи (Брусиловский прорыв, когда противник наращивал свои силы, снимая части с итальянского, западного фронтов, и наступление заглохло).

Между этими противоположностями широкий спектр решений, учитывающих конкретные условия обстановки и несущих отпечаток творческих особенностей командования. Примеры:

1. План Г. К. Жукова срыва немецкого наступления на Ленинград осенью 1941 г., который включал контратаки противника на широком фронте.

2. Наступательная операция советских войск “Багратион”, где скрытное сосредоточение сил на белорусском направлении, дезинформация противника сочетались с последовательным нанесением ударов на нескольких участках широкого (450 км) фронта наступления.

Как можно убедиться, выявленные закономерности способны обеспечить дальнейшую конструктивную работу для выполнения объявленной темы научного исследования. В частности, сразу же можно сделать вывод, что оценка соотношения сил сторон, выполненная без учета фактора скрытности и внезапности, малоэффективна.

Читателям предлагается оценить:

— справедливость сформулированных положений (относительно распределения сил на каком-либо направлении) не только для оперативно-стратегического, но и для оперативно-тактического уровня;

— возможность использования законов диалектического метода познания для обобщения, структуризации информации, выявления закономерностей, оптимизации систем не только на основании исторического опыта, но и опыта натурального (учения, маневры, военные и деловые игры), математического моделирования, результатов логических построений, а также комплексного использования источников получения информации.

Читателям полезно, кроме того, использовать свой служебный опыт и увидеть там области, цели и приемы использования диалектического метода познания.

§ 2.4. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ УПРАВЛЕНИЯ СИЛАМИ

Изложенная в § 2.3 методология использования математического моделирования в творческой деятельности командира соединения, офицера штаба не имеет альтернативы, однако ее реализация требует разрешения весьма сложного противоречия. С одной стороны, необходимо осуществлять (пп. 2.2.2, 2.3.2) математическое моделирование в быстроменяющейся обстановке творческой деятельности командира. Это требует подготовки новых математических моделей и их реализации после того, как вдруг у командира возникнет в них необходимость. С другой стороны, трудоемкий процесс последовательного исследования операций требует столько времени, сколько не будет иметь командир после постановки ему задачи.

Существует лишь один способ разрешения указанного противоречия — формировать необходимые модели и их машинные программы из заблаговременно подготовленных блоков моделей и модулей программ. При этом время выполнения математического моделирования сокращается на несколько порядков. Однако для этого требуется:

- планирование и проведение комплекса мероприятий — математического обеспечения управления силами;

- создание и поддержание готовности материальной основы МОУ силами (системы МОУ силами).

В настоящем параграфе рассматриваются вопросы МОУ силами, а в § 2.5 — его материальная основа.

МОУ силами называется комплекс взаимосвязанных мероприятий, выполняемых командованием и штабом соединения на различных этапах управления и имеющий своей целью повышение эффективности выполнения поставленных задач за счет использования математического моделирования и технических средств автоматизации управления.

Частными целями МОУ силами являются:

- количественное обоснование решения по поставленной задаче, планов применения сил и средств, обеспечение выполнения решения и планов в ходе боя (операции), а также их корректирование;

- количественное обоснование управления системами оружия и технических средств, автоматизация управления этими системами;

- автоматизация процессов в системе управления силами;

- обеспечение подготовки командования, штаба, всего остального личного состава соединения на тренажерах к применению сил и средств в предстоящем бою (операции);

- обеспечение анализа результатов боя (операции).

Подчеркнем: невозможно использовать математическое моделирование при непосредственной подготовке, если не проведены необходимые мероприятия при заблаговременной подготовке; использование математического моделирования в ходе боя возможно только в случае, если проведены соответствующие мероприятия при заблаговременной и непосредственной подготовках.

МОУ силами осуществляется как при наличии на соединении электронно-вычислительной техники (автономной либо входящей в состав АСУ соединениями), так и при ее отсутствии. Наиболее эффективным является МОУ силами при наличии на соединении ЭВТ в составе АСУ, однако и в этом случае МОУ силами должно организовываться с учетом возможности выхода из строя ЭВТ или других технических средств автоматизации управления на тех или иных этапах управления, в том числе в результате воздействия противника.

Как видно из определения, использование математического моделирования для повышения эффективности решений по поставленным задачам, планов применения сил, использование средств является частью более общей проблемы — математического обеспечения управления.

Существуют четыре направления использования математического моделирования в процессе математического обеспечения управления силами:

Первое направление — обеспечение творческой деятельности офицеров штаба и командира на различных стадиях управления. Именно это направление использования математического моделирования рассматривается в учебнике.

Второе направление — информационное обеспечение деятельности командира и офицеров штаба в процессе управления силами, системами оружия и технических средств. Математическое моделирование при этом необходимо для оценки изменений в состоянии сил, средств за ненаблюдаемые промежутки времени. Например, командира в ходе ведущихся боевых действий будет интересовать состояние соединения подводных лодок, скрытно действующих в некотором районе. При этом потребуются математическое моделирование для обоснования распределения (математического ожидания) числа боеспособных подводных лодок, вероятности сохранения боеспособности каждой из подводных лодок, вероятного их местоположения, израсходованного и имеющегося боезапаса, средств материально-технического обеспечения и т. д. Необходимо видеть разницу в целях двух изложенных направлений моделирования. В первом случае модель должна обеспечить прогнозирование состояния системы (соединения, корабля, части) в заданном будущем, для сравнительной оценки альтернативных вариантов, выявления сильных и слабых сторон этих вариантов, во втором случае — для обеспечения оценки состояния системы в заданном настоящем при фактическом варианте своих действий.

Третье направление — обеспечение автоматизации нетворческих процессов в системе управления. Ее частными целями являются:

а) создание благоприятных условий для творческой деятельности командования и офицеров штабов. Достигается это за счет максимального освобождения всего состава органа управления от выполнения нетворческих функций, повышения эффективности всех этапов прохождения и улучшения форм представления информации в органе управления и т. д.;

б) увеличение темпов управления, оперативности* управления в целом за счет сокращения времени прохождения информации в контуре управления;

в) повышение живучести, надежности функционирования систем управления заменой труда человека в неблагоприятных для него условиях.

Четвертое направление — обеспечение автоматизации применения систем оружия, использования систем технических средств. Частные цели этого направления автоматизации во многом аналогичны целям, приведенным в пп. “а”, “б”, “в”.

В основе функционирования любых систем и средств автоматизации лежит математическое моделирование, так как автоматизировать можно только те процессы управления, которые можно алгоритмизировать. В свою очередь, чтобы разработать алгоритм, необходимо предварительно разработать математическую модель. Порядок формирования моделей для автоматизированных систем аналогичен излагаемому в учебнике. Разница заключается в том, что формирование таких моделей осуществляется при создании автоматизированных систем, а приведение в действие этих систем в соответствии с тем или другим алгоритмом осуществляется по заранее определенным признакам или сигналам. Современное состояние технических средств автоматизации сделало

* Оперативность — способность своевременно и правильно реагировать на изменения обстановки.

возможным создание систем искусственного интеллекта. При этом управляемые объекты (например, разведывательно-ударные комплексы, ракеты и т. д.) способны выполнять весьма сложные действия без непосредственного участия человека на стадии выполнения задачи.

§ 2.5. СИСТЕМА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ УПРАВЛЕНИЯ СИЛАМИ

Математическое обеспечение управления силами возможно, если сформирована система этого обеспечения. Любую систему составляют элементы системы и связи между ними. Элементами системы (материальной основой МОУ силами) являются специальное математическое обеспечение соединения, системы программного и информационного обеспечения ЭВТ (АСУ) соединения; подготовленные кадры — командование и специалисты штаба; ЭВТ и другие технические средства автоматизации управления с их специализированным обеспечением. Связи между элементами системы определяются организацией МОУ силами в ходе достижения целей обеспечения (см. § 2.4). Рассмотрим элементы системы МОУ силами.

Специальное математическое обеспечение соединения включает:

— СМО АСУ (ЭВМ) — совокупность программ, процедур, правил вместе со всей связанной с этими компонентами документацией, позволяющая использовать АСУ и ЭВМ для математического моделирования в интересах управления;

— расчетно-справочные комплексы (совокупности программ и алгоритмов для счетно-клавишных машин, а также таблицы, графики, номограммы), позволяющие осуществлять математическое моделирование в интересах управления при отсутствии ЭВМ, при их выходе из строя либо при нецелесообразности их использования.

Существенным с точки зрения структуры СМО является блочно-модульный принцип формирования в штабе соединения математических моделей и их машинных программ (2-й, 3-й этапы исследования операций — см. § 2.1), необходимых для обеспечения творческой деятельности командира и офицеров штаба.

Математические модели применения сил и средств содержат повторяющиеся элементы — блоки. *Блок* есть математическая модель какого-то этапа боевых действий корабля и соединения при выполнении свойственных им задач или же математическая модель какого-то этапа противодействия противника.

Модулем называется машинная программ блока модели*. При блочном методе моделирования программа модели формируется вычислительной машиной по заданному правилу из модулей с помощью управляющей программы. Способ задания правила зависит от используемых вычислительных средств: диалог с ЭВМ с дисплея, графическое изображение моделируемой ситуации на дисплее, задание правила с помощью перфокарт и т. д. Совокупность модулей и управляющих программ, целенаправленно подготовленных для формирования и реализации на ЭВМ моделей в интересах управления каким-либо процессом, обоснования какого-либо элемента решения, плана называется *проблемно-ориентированным пакетом прикладных программ* (ППП). Каждому ППП соответствует база данных, в которой хранится необходимая информация, и система управления базой данных (СУБД) — алгоритмы и правила преобразования исходной информации базы в информацию, необходимую при моделировании.

* * Для оперативного формирования модулей разрабатываются системы стандартных процедур. Например, для моделирования многих процессов поиска используются стандартные процедуры составления уравнений Колмогорова, их численного интегрирования в соответствии с заданной процедурой и др.

Состав ППП чаще всего определяется целью, условиями действий сил соединения, его составом и целями моделирования. Именно от этого, главным образом, зависит использование того или иного математического аппарата для построения модулей, состав, структура модулей и управляющей программы, базы данных.

Состав пакетов должен обеспечить командиру и всем подразделениям штаба возможность осуществлять необходимое математическое моделирование на различных стадиях управления силами. Между различными пакетами должна быть обеспечена связь.

Многие ППП, необходимые для МОУ соединением, имеют один и тот же математический аппарат, много одинаковых исходных параметров в составе своих баз данных. Например, во многих случаях и для обоснования применения артиллерийских систем, и для обоснования организации связи с силами, и для обоснования действия сил при поиске противника (уклонения от поисковых сил противника) требуется использование уравнений Колмогорова. В двух последних случаях при моделировании могут потребоваться одни и те же параметры и модели для определения интенсивностей поиска объектов, потерь и восстановления контакта с ними (см. гл. 17). Это обстоятельство делает целесообразным и возможным переход от совокупностей автономных ППП к созданию системы программного и информационного обеспечения АСУ (ЭВМ) соединения, когда пакеты не имеют “собственного” математического аппарата, индивидуальных баз данных, а используют математический аппарат из библиотеки системы, и информационное обеспечение моделирования из общего банка данных*.

Методика разработки первой компоненты системы МОУ (СМО, информационного, программного обеспечения моделирования), необходимой командиру и штабу соединения при управлении соединением в ходе выполнения свойственных задач, включает:

а) обоснование структуры частной системы ППП, необходимой для управления соединением на одной из стадий выполнения одной из свойственных ему задач. Такие частные системы должны быть разработаны для всех стадий управления всех свойственных ему задач;

б) обоснование структуры каждого из ППП всех частных систем: блоков, модулей, баз данных, управляющей программы, их взаимосвязей;

в) разработку каждого из ППП: блоков, модулей, базы данных, управляющей программы;

г) разработку структуры СМО АСУ (ЭВМ) соединения: обоснование библиотеки методов математического моделирования, которые (методы) используются в этих ППП; обоснование процедур использования библиотеки для формирования блоков моделей, модулей, моделей; обоснование содержания баз данных, системы управления банком данных для информационного обеспечения моделирования;

д) разработку системы программного обеспечения АСУ (ЭВМ) соединения, т. е. системы программной реализации на ЭВМ заданной структуры СМО. Система должна позволить с должной оперативностью формировать и реализовывать необходимые модели на имеющейся ЭВТ.

Дадим пояснения к изложенной последовательности разработки СМО. Для обоснования структуры частной системы ППП целесообразно разработать сетевой график работы штаба*. Он позволит выявить потребность в использовании моделирования различными должностными лицами и подразделениями штаба и общую связь между моделями и, далее, состав пакетов (без детализации), связь между ними.

* Целесообразно, однако, чтобы предусматривалось и автономное использование пакетов.

* Сетевые модели рассматриваются в гл. 7.

При обосновании структуры каждого из ППП необходимо сформулировать общую цель использования данного пакета с учетом функциональных обязанностей должностного лица, подразделения штаба на данной стадии управления (оптимизация замысла, решения, их элементов; оптимизация предложений командиру, плана, их элементов и т. д.). Далее следует сформулировать возможные цели действий сил при выполнении свойственной им задачи и для каждой из них возможные цели моделирования (см. п. 2.3.3, пп. “а”, “б” оперативно-тактической постановки задачи), определить элементы обстановки, которые потребуется учесть в моделях для достижения цели моделирования (п. “в” постановки задачи). При решении этих вопросов целесообразно разработать систему диалектических противоположностей и противоречий (как это было показано в п. 2.3.2) для различных вариантов обстановки, широких спектров возможных замыслов, решений, планов. В процессе этой работы следует фиксировать необходимые дополнительные показатели эффективности (см. п. “б” постановки задачи). В их число будут входить вероятностные характеристики факторов обстановки, исходов планируемых мероприятий (см. примеры 2.4—2.14).

Разработка каждого из ППП включает следующие этапы:

1 - й этап — разработка оперативно-тактической (тактико-специальной) постановки задачи на разработку ППП:

а) выявление возможных целей применения сил при выполнении соединением свойственной ему задачи;

б) выявление возможных целей моделирования с использованием разрабатываемого ППП;

в) описание элементов обстановки, которые должны отражаться моделями для достижения различных целей моделирования;

г) выявление факторов обстановки, вероятностные характеристики которых (дополнительные показатели эффективности) позволят выявлять особенности управляемого процесса, стимулировать творчество командира, офицера штаба *.

2 - й этап — разработка блоков моделей:

— выявление показателей эффективности (основных и дополнительных), которые должны вычисляться с использованием разрабатываемого ППП;

— выявление блоков тех моделей, которые будут разрабатываться с помощью ППП; установление связей между блоками, а также взаимосвязей блоков с другими ППП;

— разработка оперативно-тактических постановок задач для формирования всех блоков;

— разработка блоков, т. е. математических моделей этапов действий своих сил, сил противника;

— разработка способов реализации различных математических моделей с помощью имеющихся вычислительных средств;

— разработка содержания базы данных, правил (моделей, алгоритмов) преобразования информации;

— определение требований к управляющей программе;

— формулирование допущений и ограничений моделей, разрабатываемых с использованием ППП, характера искажения выявляемых закономерностей.

3 - й этап — разработка программного обеспечения ППП:

— разработка модулей, т. е. программ блоков;

— разработка базы данных и программ для преобразования информации;

— разработка управляющей программы;

* Как можно видеть, многие вопросы 1-го этапа решаются при обосновании структуры ППП. Здесь они формируются в том окончательном виде, который необходим для выполнения последующих этапов.

- отладка программного обеспечения ППП;
- документирование ППП, подготовка инструкций для всех специалистов, участвующих в использовании ППП.

Основой разработки структуры СМО АСУ (ЭВМ) соединения является анализ разработанных частных систем ППП с целью выделить методы математического моделирования, которые используются в пакетах прикладных программ при формировании необходимых блоков моделей и должны быть помещены в библиотеку математических методов. Свойства, возможности основных математических методов, особенности их использования для формирования блоков и модулей рассмотрены в разделе II. В разделе III описаны некоторые основные методы исследования операций, методы моделирования различных эпизодов применения сил и средств. Изучение материала раздела III позволит ознакомиться с методами формирования блоков моделей, в том числе необходимых и при разработке системы управления базами данных. В [5] рассмотрены вопросы формирования моделей морских боев и операций.

Методы разработки программного, информационного обеспечения в учебнике не рассматриваются.

Система ППП, необходимая для управления соединением при выполнении всех свойственных ему задач, а также в повседневных условиях, является одним из компонентов *базового (вложенного) СМО*. Если ППП используются не автономно, а в составе системы СМО АСУ (ЭВМ) соединения, то из них “изымаются” и помещаются в библиотеку методы математического моделирования, а содержание их “индивидуальных” баз данных включается в банк данных. Управляющая программа обеспечивает использование методов библиотеки, содержания банка данных для формирования необходимых моделей и выполнения оперативно-тактических расчетов.

Компоненты базового СМО показаны на рис. 2.13. Все компоненты базового СМО готовятся и поставляются на соединения централизованно*.

Базовое СМО используется в штабах соединений для формирования моделей, необходимых при подготовке боя (операции), управления силами уже в ходе выполнения поставленной задачи, при анализе результатов боя (операции). Формируемое СМО для всех стадий управления готовится с использованием системы программного обеспечения, как правило, в ходе заблаговременной подготовки (кроме СМО, необходимого для анализа результатов боя, операции). Разница в структуре СМО, подготавливаемого и используемого на различных стадиях управления, определяется главным образом, временем, которым будет располагать командование и штаб на каждой из стадий. Поэтому при заблаговременной подготовке большой удельный вес принадлежит использованию самих моделей, а на остальных стадиях — использованию результатов ранее выполненного моделирования.

Рассмотрим теперь вторую компоненту материальной основы МОУ силами — кадры, необходимые для использования математического обеспечения при управлении.

Эффективное использование в штабе соединения базового СМО для формирования СМО, необходимого при выполнении поставленной задачи, требует согласованной работы следующих групп специалистов:

- 1-я группа — командование и операторы штаба — пользователи математических моделей;
- 2-я группа — специалисты по исследованию операций;
- 3-я группа — системные и прикладные программисты (специалисты по программному обеспечению);

* Самостоятельная разработка на соединении элементов базового СМО должна санкционироваться вышестоящим штабом. Это необходимо для равнозначности моделирования управляемых процессов на различных соединениях.

4-я группа — специалисты по эксплуатации ЭВТ и других средств автоматизации управления;
5-я группа — специалисты, ответственные за специальные вопросы организации использования математического моделирования и средств автоматизации управления на соединении, за специальную подготовку специалистов 1—4-й групп*.

Обязанности специалистов 1—4-й групп в процессе использования математического моделирования при управлении изложены в § 2.1.

Что касается компонента материальной основы МОУ силами, который выше назван структурой ЭВТ и других средств автоматизации управления, то детально эти вопросы изучаются в специальных пособиях.

При этом в единстве рассматриваются структура комплекса технических средств автоматизации управления и всех необходимых видов обеспечения.

Техническое обеспечение АСУ — комплекс технических средств, применяемых для функционирования автоматизированной системы управления. Основой технического обеспечения являются ЭВТ (вычислительная техника)*.

Математическое обеспечение АСУ — совокупность математических методов, моделей и алгоритмов обработки информации, использованная при создании АСУ.

Информационное обеспечение АСУ — совокупность реализованных решений по объемам, размещению и формам организации информации, циркулирующей в АСУ при ее функционировании.

Лингвистическое обеспечение АСУ — совокупность языковых средств для формализации естественного языка.

Общее программное обеспечение АСУ (ОПО АСУ) — часть программного обеспечения АСУ, представляющая собой совокупность программ, предназначенных для организации вычислительного процесса и(или) решения часто встречающихся задач обработки информации.

Введение в рассмотрение понятие “система МОУ силами” позволяет ставить и решать важные для практики оптимизационные задачи. Дело в том, что целый ряд функций в процессе МОУ может выполняться различными элементами системы. Например, часть рутинной работы при формировании моделей может быть возложена на ЭВМ. Однако, это потребует усложнения (и удорожания) программного обеспечения, дополнительной подготовки специалистов по программному обеспечению и исследованию операций. Если же эту часть работы возложить на специалиста по исследованию операций, то возрастет время выполнения обеспечения. По таким причинам на практике возникают две группы оптимизационных задач:

1) сформировать систему МОУ, которая позволяет выполнять задачи обеспечения в сроки, не превышающие заданных, при минимальных затратах средств на создание и поддержание готовности системы;

2) сформировать систему МОУ, которая позволяет выполнять задачи обеспечения в минимальные сроки при условии, что затраты средств на создание и поддержание готовности системы не превысят заданных.

Задачи обоих типов требуют для своего решения использования методов эвристической оптимизации, математического моделирования, делают необходимый сбор статистических данных

* Организационно-штатные вопросы, структура штаба соединения с точки зрения проблемы использования при управлении математического моделирования здесь не рассматриваются.

* Существуют также понятия локальные ЭВМ, локальные сети ЭВМ.

для получения статистических оценок нужных параметров. Задачи должны решаться для органов управления различных командных инстанций с учетом связей между ними. В настоящем учебнике методы решения таких задач не приводятся.

РАЗДЕЛ II. МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ (МЕТОДЫ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ)

Глава 3. МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ИХ ЭВОЛЮЦИЯ, КЛАССИФИКАЦИЯ СУЩЕСТВУЮЩИХ МЕТОДОВ, ИХ РОЛЬ И МЕСТО В ИССЛЕДОВАНИИ ОПЕРАЦИЙ

§ 3.1. СЛУЧАЙНЫЕ ЯВЛЕНИЯ И ПРОЦЕССЫ В ОПЕРАТИВНО-ТАКТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ. ОСОБЕННОСТИ УПРАВЛЕНИЯ ИМИ

Известна глубокая, образно и четко сформулированная мысль А. С. Пушкина о важной особенности окружающей нас действительности: “Ум человеческий, по престолярному выражению, не пророк, а угадчик, он видит общий ход вещей и может выводить из одного глубокие предположения, часто оправданные временем, но невозможно ему предвидеть *случая* — мощного, мгновенного орудия провидения”*. Командирам кораблей, частей и соединений флота, других видов Вооруженных Сил приходится непрерывно учитывать эту особенность в своей практической деятельности. Неучет возможности случайностей или неверное реагирование на их проявление зачастую влекут за собой срыв выполнения поставленной задачи.

Бои, операции, все другие формы применения сил, различные способы использования систем оружия и технических средств имеют характер случайных явлений и процессов.

Случайными называются такие явления и процессы, исход которых заранее предсказать нельзя, потому что даже в, казалось бы, одинаковых условиях они протекают по-разному. Например, нельзя предсказать заранее факт попадания или промаха при выстреле ракетой по объекту, координаты точки падения (пролета) ракеты относительно объекта, ход и исход поиска подводной лодки

* * Пушкин А. С. Второй том “Истории русского народа” Полевого. — Полн. собр. соч.: В 15-ти т. М.—Л.: Госметиздат, 1949, т. 7.

противолодочным комплексом. Опыт истории военного искусства учит, что случайные явления и процессы являются частью содержания боев, операций. Они во многом определяют их ход и исход при тех или иных решениях командиров противоборствующих сторон.

Человечество с давних пор интересовал вопрос: как управлять случайными явлениями, если их исход заранее предсказать нельзя. Для ответа на этот вопрос были выявлены причина, по которой явления становятся случайными, и основное их свойство.

Причиной является наличие двух групп факторов, от которых зависит исход случайного явления, — детерминированных (неслучайных) и случайных. Например, исход боя при фиксированных времени окончания и качестве подготовки к нему соединений противников будет зависеть от детерминированных факторов (состава сил и средств сторон, их тактико-технических характеристик, количества и уровня подготовленности личного состава, начального взаимного расположения сил сторон и т. д.) и случайных факторов (числа выявленных разведкой объектов противника, своевременности и полноты целеуказания ударным группам, числа попаданий снарядов, ракет, торпед в объекты противника и результатов этих попаданий, числа пораженных при ударе объектов противника и т. д.).

Многие случайные явления приходится рассматривать как сложные (составные), учитывать, что их конечный результат зависит от исходов других случайных явлений. Например, достижение цели боя, операции зависит от исходов ударов, атак, контратак и т. д.

Основное свойство случайных явлений заключается в наличии закономерностей их проявления. Нельзя предсказать точно момент появления, исход каждого отдельного случайного явления, но в массе своей случайные явления обладают объективными закономерностями, которые можно изучить и использовать для прогнозирования шансов на успех, для оценки шансов на тот или иной исход случайного явления. Это и открывает возможность обоснования управления случайными явлениями и процессами. Нельзя, например, предсказать исход отдельного выстрела по объекту, но можно выявить закономерности, определяющие попадание в объект, вероятности тех или иных отклонений точки падения снаряда от точки прицеливания. Это позволяет определить шансы на успех (вероятность поражения объекта) при различных способах действий и дает возможность обосновывать способы предстоящих действий. Если, допустим, шансы на успех при некотором варианте № 1 применения оружия выше, чем при варианте № 2, то, следовательно, необходимо избрать вариант № 1. При этом реализация варианта № 1 в конкретном бою может и не привести к успеху в силу случайного характера процесса применения оружия. Однако в среднем действиям по варианту № 1 успех будет сопутствовать чаще, чем при действиях по варианту № 2.

Потребности управления в условиях наличия в управляемом процессе случайных явлений сделали необходимыми разработку и использование теории вероятностей — науки о закономерностях случайных явлений. Ее аппарат составляют логика и математика. Методы теории вероятностей позволяют с помощью одних известных вероятностных характеристик (исходных данных) получать нужные другие вероятностные характеристики. Своими корнями теория вероятностей уходит в практику, опыт, эксперимент. Для получения вероятностных характеристик, необходимых при расчетах, используются методы математической статистики — науки о правилах сбора и обработки опытных, экспериментальных данных с целью получения нужных вероятностных характеристик. Теория вероятностей и математическая статистика развивались и развиваются параллельно.

Первоначально теория вероятностей использовалась для сравнительной оценки шансов на успех в достаточно простых случаях обоснования способов применения оружия, кораблевождения, оценки

надежности функционирования некоторых технических устройств и т. д. При этом с использованием методов теории вероятностей разрабатывались математические модели случайных явлений. Усложнение процессов вооруженной борьбы поставило более сложную цель — выявление закономерностей, механизма планируемых действий, умение объяснить, почему тот или иной вариант действий более или менее эффективен, обосновать мероприятия для повышения эффективности.

Для разработки нужных математических моделей стало необходимым привлекать не только методы теории вероятностей, но и разнообразный математический аппарат (строительный материал) и разрабатывать методологию формирования математических моделей различных целенаправленных действий. Вначале для математического моделирования использовались уже известные в то время классические методы математического анализа, затем потребовалось разрабатывать и специальный математический аппарат (например, метод статистических испытаний, метод сетевого планирования, разнообразные методы математического программирования, теории игр и т. д.). Необходимость комплексного использования при моделировании различных математических методов определяется тем, что каждый из них способен отражать только те или иные свойства реальных явлений и процессов, обладает своими возможностями (степенью) адекватного отражения в модели различных свойств явлений, а для управления необходимо знать и учитывать комплекс свойств (качество) явления. Очень важно также, что различные методы представляют различные возможности оперативного использования электронно-вычислительной техники. Так зародилась и начала быстро развиваться новая область знаний — исследование операций, основным аппаратом которого является логика и математическое моделирование.

Математические модели численно отражают закономерности хода и исхода управляемых процессов в будущем (в информационных задачах за ненаблюдаемый промежуток времени — см. § 2.4). Показателями эффективности выполнения поставленной задачи выступают вероятностные параметры (вероятности случайных событий, математические ожидания случайных величин — см. гл. 1), поэтому основой математических моделей служат методы теории вероятностей, а другие методы математического моделирования являются различными формами их использования.

Важно понимать, что математическое моделирование способно отразить влияние на действия сил только тех случайностей, возможность появления которых сумеет предусмотреть командир. Способность командира указать характер влияния случайностей на управляемый процесс есть результат его опыта, интуиции, понимания закономерностей процесса.

Итак, предостережение великого поэта сохраняет актуальность. Военное искусство требует, чтобы возможность парирования случайностей — при выявленных и невыявленных командиром их особенностях — предусматривалась при разработке способов применения сил и средств, боевого построения сил, назначении резерва сил, средств, времени и обосновывалась объективными методами.

§ 3.2. ОСОБЕННОСТИ ВООРУЖЕННОЙ БОРЬБЫ И КЛАССИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ, ПРИМЕНЯЕМЫХ ПРИ УПРАВЛЕНИИ СИЛАМИ И СРЕДСТВАМИ

Рассмотрим содержание понятий “методы математического моделирования”, “методы исследований операций”, “математическая модель”, а также связь между этими группами методов и математическими моделями. Для этого необходимо рассмотреть характер случайных явлений, которые имеют место при ведении боевых действий. Их можно разделить на следующие группы.

1-я группа — случайные явления, вызываемые объективными закономерностями, не зависящими от воли и сознания людей. Примерами случайных явлений и процессов этой группы являются время и скрытность развертывания сил в заданные районы, результат действий сил разведки и применения оружия (своими силами и силами противника) заданными способами и т. д. Закономерности явлений этой группы можно раскрывать с помощью моделей, разработанных на основе методов теории вероятностей, привлекая и другие методы математического моделирования.

2-я группа — случайные явления, относящиеся к сфере творческой деятельности людей, например выработка командиром того или иного решения, момент времени его принятия, факт опережения противника в принятии решения и т. д. В математических моделях явления этой группы считаются неслучайными, зафиксированными, выступают как фон, на котором проявляется и от которого зависит действие явлений первой группы. Оценить численно, с помощью математических моделей, исход творческой деятельности командира, офицера штаба невозможно. Можно выявить последствия, влияние того или иного результата этой творческой деятельности на эффективность выполнения силами поставленной задачи. Например, нельзя определить вероятности того, что решение командира будет иметь то или иное содержание и будет принято в такой-то момент времени. В модели можно исходить из факта выработки командиром на определенном этапе управления (в определенный момент времени) определенного решения, принятия им того или иного способа действий. Способность математических моделей учитывать влияние этого “фона” на ход и исход выполнения поставленной задачи и есть предпосылка применения математических методов с целью обоснования решений по поставленным задачам, способов применения систем оружия и технических средств.

3-я группа — случайные явления морально-политического, морально-психологического характера, касающиеся деятельности людей и коллективов, которые вообще нельзя оценить количественно. Например, нельзя измерить количественно возможность проявления личным составом корабля, соединения на том или ином этапе боя, операции героизма, патриотизма или учесть их влияние на величину показателя эффективности выполнения поставленной задачи. Подобные факторы при выработке решений по поставленным задачам, планировании оцениваются с помощью качественного анализа, использования результатов накопленного опыта.

Подчеркнем, что исход боев, операций зависит также от факторов детерминированных (неслучайных): числа кораблей, самолетов и т. д. у противников, состава их вооружения, средств связи, наблюдения, РЭБ, — которые влияют совместно и во взаимодействии с влиянием случайных явлений.

Уточним теперь понятия “методы математического моделирования”, “методы исследования операций”, “математические модели”.

Методы математического моделирования* — это различные виды математического аппарата (методы теории вероятностей, классические методы математического анализа, специальные методы — теория игр, теория статистических решений, метод статистических испытаний и т. д.), которые изучаются и используются как строительный материал для формирования методов исследования операций — математических моделей применения сил и оружия, использования технических средств в “типовых” ситуациях. Указанные же модели выступают как фрагменты (блоки) при разработке математических моделей применения сил, использования средств, необходимых при подготовке сил и средств соединения к выполнению конкретных задач в бою, операции для конкретной обстановки. Такое деление математических методов в ряде случаев условно, но удобно из методических и

* Часто их называют методами прикладной математики.

организационных соображений. Например, часто приходится учитывать, что методы математического моделирования можно изучать и не зная условий реальных управляемых процессов. Так, методами теории вероятностей изучаются свойства случайных событий, величин, процессов безотносительно к их роли в конкретных явлениях и процессах. Для изучения же методов исследования операций необходимо знать в определенном объеме оперативное искусство, тактику, технику и ее использование.

В учебнике принята следующая классификация методов математического моделирования

1. Аналитические методы. К ним относятся классические методы математического анализа, теории вероятностей, известные с давних пор, а также методы, разработанные сравнительно недавно, зачастую специально для нужд исследования операций.

2. Статистические методы. В исследовании операций при разработке и использовании математических моделей широко используются как непосредственно методы математической статистики, так и основанные на них методы, например метод статистических испытаний (метод Монте-Карло), последовательный анализ.

3. Методы численной оптимизации (математического программирования). К их числу относятся различные классы линейного, нелинейного, динамического программирования, случайный поиск, методы, основанные на принципе максимума Понтрягина*. Они были разработаны для нужд исследования операций, так как известные в классической математике методы нахождения экстремумов функций одной и нескольких переменных, вариационное исчисление не во всех случаях обеспечивают математическую оптимизацию для нужд управления.

4. Метод оптимизации в условиях неопределенности. К ним относятся различные классы методов теории игр (“игра с человеком”), теории статистических решений (“игра с природой”).

Приведенная классификация методов математического моделирования условна, некоторые методы можно отнести сразу к нескольким классам, но такое деление бывает методически удобным для обоснования состава подлежащих изучению методов и последовательности их изучения.

Количество методов математического моделирования различных классов неизбежно велико и продолжает расти. В учебнике рассмотрены методы, которые наиболее часто используются в настоящее время для математического моделирования применения сил, средств и наиболее перспективны в будущем, являются основой для разработки других классов методов математического моделирования. Кроме того, учитывается, что читатели знакомы с курсами высшей математики и теории вероятностей в объеме, изучаемом в высших военно-морских училищах. Поэтому в учебнике рассмотрены области и особенности применения, содержание следующих методов математического моделирования** :

1) из числа аналитических методов — методы моделирования динамики управляемых процессов: оценки изменения состояния сил и средств сторон со временем; расчета, оценки, обоснования времени выполнения управляемых процессов. Помимо основных принципов моделирования динамики управляемых процессов рассмотрены методы моделирования дискретных цепей Маркова, процессов массового обслуживания, метод сетевого планирования;

2) из числа статистических методов — методы математической статистики в оперативно-тактической области, метод статистических испытаний, последовательный анализ;

* * Л. С. Понтрягин — выдающийся советский математик, академик.

* ** Применение методов теории вероятностей в оперативно-тактической области изложено в [6].

3) из числа методов математического программирования — методы линейного, нелинейного, динамического программирования;

4) из числа методов оптимизации в условиях неопределенности — методы теории игр, матричные игры, теория статистических решений.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ. МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ УПРАВЛЯЕМЫХ ПРОЦЕССОВ

Глава 4. МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ ИЗМЕНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ СИЛ И СРЕДСТВ СТОРОН И ОСНОВЫ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ ПРИ УПРАВЛЕНИИ СИЛАМИ. КЛАССИФИКАЦИЯ МЕТОДОВ

В большом числе случаев применение сил и средств в ходе выполнения поставленных задач, а также в повседневных условиях предстает перед командиром как случайный процесс изменения их состояний, длящийся во времени.

Пример 4.1. По конвою на его переходе морем будут нанесены последовательные удары разнородными группами — подводными лодками различных типов, авиацией, ракетными и торпедными катерами. Очевидно, что если одними и теми же силами и в той же последовательности наносить удары по нескольким конвоям, пусть даже одинакового состава и следующим в одном и том же районе моря, то каждый раз будут достигаться различные результаты: число транспортов и кораблей охранения, пораженных одними и теми же группами, потери этих групп будут различными. Различным будет и общее число транспортов и кораблей охранения, поражаемых при действиях сил против разных конвоев. Планируя действия сил против конвоя, придется рассматривать эти действия как случайный процесс.

Пример 4.2. Противолодочному комплексу поставлена задача в течение времени t осуществить поиск подводной лодки в некотором районе. В данном случае также имеет место случайный процесс: известно, что поисковые действия в одних и тех же условиях будут приводить к различным результатам (обнаружение или необнаружение подводной лодки, момент ее обнаружения).

Процессы являются случайными, если их ход и исход зависит от двух групп факторов — детерминированных, не меняющихся от процесса к процессу, и случайно складывающихся в каждом процессе. В примере 4.2 к числу детерминированных факторов относятся размеры района поиска, тактико-технические характеристики подводной лодки и противолодочного комплекса и ряд других,

к числу случайных — взаимное расположение подводной лодки и противолодочного комплекса в процессе каждого поиска, изменение от поиска к поиску тактико-технических характеристик средств поиска объектов в связи с изменением метеорологических, гидрологических условий, а также по техническим причинам и т. д.

Для случайного процесса характерно, и это следует особо подчеркнуть, что соответствующие вероятностные характеристики — показатели эффективности процесса — зависят от времени, т. е. меняются со временем. Так, в примере 4.1 функцией времени являются случайные величины $X(t)$, $Y(t)$, $Z_j(t)$ — число пораженных транспортов, кораблей охранения конвоя, число подводных лодок, кораблей, самолетов j -й группы боевого порядка соединения соответственно. Поэтому функцией времени будут математическое ожидание $x(t)$ числа пораженных транспортов, вероятность $P_s(t)$ поражения не менее заданной доли транспортов и т. д.

Каждый случайный процесс обладает присущими ему закономерностями. Знание этих закономерностей есть необходимое условие обоснованного управления силами. Сложный характер таких закономерностей делает в большом числе случаев невозможными и их раскрытие, объективное обоснование решений по поставленным задачам, планов без использования математического моделирования.

Важным направлением использования методов математического моделирования динамики изменения состояния сил и средств является обоснование мероприятий при управлении силами в повседневных условиях: поддержание необходимой готовности сил и средств, организация процесса их оперативной и боевой подготовки, рационального циклического их использования, организация всех видов обслуживания личного состава, процессов материально-технического снабжения, ремонта техники и т. д.

В основе математического моделирования динамики изменения состояния сил и средств сторон лежат методы моделирования случайных процессов. При этом модель случайного процесса может либо явиться основой той модели, которая необходима для управления или в научно-исследовательской работе, либо быть ее элементом. Случайные процессы различных классов имеют модели различной структуры, построенные зачастую с использованием различного математического аппарата. Однако существует общий принцип, подход к разработке таких моделей, разработанный А. А. Марковым* в 1907 г. применительно к одному из классов случайных процессов, названному по имени автора дискретными цепями Маркова (см. гл. 5).

Предложенный принцип лег в основу методов разработки математических моделей случайных процессов различных классов. Смысл принципа сводится к тому, что рассмотрение реального случайного процесса заменяется рассмотрением системы, которая в некоторые моменты случайным образом может переходить в одно из присущих ей состояний. Математическая модель, вообще говоря, описывает функционирование такой системы — схематизированного аналога реального случайного процесса. Состав системы, ее возможные состояния, моменты времени и вероятности или интенсивности перехода** из состояния в состояние определяются с учетом особенностей процесса. Кроме того, состав системы и ее возможные состояния зависят также от целей моделирования, закономерностей процесса, которые должны быть выявлены. Поэтому для выявления различных закономерностей (для обоснования различных элементов решения, плана)

* А. А. Марков (1856—1922) — выдающийся русский математик, специалист по теории чисел, теории вероятностей и математическому анализу. Учебник А. А. Маркова “Исчисление вероятностей” (1900) оказал большое влияние на развитие этой науки, а по точности получаемых простыми средствами результатов представляет интерес до сих пор.

** Об интенсивностях перехода см. гл. 6, а также гл. 17.

одного и того же процесса потребуются в общем случае различные модели. Различные модели потребуются также и для выявления одних и тех же закономерностей различных процессов.

Пример 4.3. Авиационная ударная группа для нанесения удара по объекту должна преодолеть n рубежей ПВО противника.

Требуется обосновать число N самолетов группы для достижения заданного ущерба объекту противника с учетом потерь самолетов при преодолении ПВО противника.

В данном примере системой является авиационная группа. Состояния системы будут определяться числом сохранивших боеспособность самолетов группы:

A_1 — все самолеты группы боеспособны;

A_2 — поражен один самолет;

⋮

A_i — поражено $(i - 1)$ самолетов;

⋮

A_{N+1} — поражено N самолетов.

Переходы системы из состояний в состояния осуществляются в моменты времени t_1, t_2, \dots, t_n преодоления группой соответствующих зон ПВО. При определении вероятностей перехода системы из состояния в состояние потребуется учесть состав сил и средств зон ПВО противника, способы их применения, состав, тактико-технические характеристики самолетов группы и способы преодоления ими различных зон ПВО, военно-географические элементы, влияющие на эффективность применения сил и средств зон ПВО.

Разработанная таким образом модель позволит оценить зависимость потерь группы от построения ПВО противника и состава группы. Полученные с помощью такой модели результаты будут далее использованы в модели для оценки эффективности удара по объекту противника самолетами, сохранившими боеспособность, что позволит перейти к обоснованию состава группы.

Пример 4.4. Допустим, что в результате моделирования преодоления авиационной группой ПВО противника (пример 4.3) установлен факт высоких потерь группы. Поэтому замыслом командира предусмотрено выделение второй группы самолетов, обеспечивающей преодоление ударной группой обороны противника.

Требуется обосновать состав обеих групп.

В условиях этого примера систему составят самолеты ударной и обеспечивающей группы. Состояния такой системы, в отличие от состояний системы в примере 4.3, будут характеризоваться числом боеспособных самолетов в той и другой группах. При вычислении вероятностей перехода системы в различные состояния теперь потребуется учесть и действия обеспечивающей группы.

Пример 4.5. В условиях примера 4.2 обосновать время, необходимое для обнаружения подводной лодки противника. В качестве системы в этом случае будет выступать подводная лодка. Состояниями системы будут: A_1 — подводная лодка не обнаружена; A_2 — подводная лодка обнаружена.

При вычислении интенсивности перехода системы учитываются тактико-технические характеристики подводной лодки и противолодочного комплекса, размеры района поиска, гидрологические условия в районе.

Пример 4.6. В условиях примера 4.2 и 4.5 следует учесть возможность того, что подводная лодка способна первой обнаружить противолодочный комплекс и покинуть район. В этом случае систему будут составлять подводная лодка и противолодочный комплекс. Потребуется рассмотреть следующие состояния системы: A_1 — осуществляется поиск подводной лодки противолодочным

комплексом; A_2 — подводная лодка обнаружена (комплекс выполнил свою задачу); A_3 — подводная лодка осуществила упреждающее обнаружение противолодочного комплекса и покинула район (выполнение комплексом поставленной задачи сорвано).

Для моделирования такой системы потребуется вычислять интенсивность упреждающих обнаружений подводной лодкой комплекса и комплексом — подводной лодки.

Таким образом, из элементов реального случайного процесса выделяются две группы элементов: 1) элементы, составляющие систему; 2) элементы, необходимые для вычисления вероятностей (интенсивностей) переходов системы в свойственные ей состояния. Выявление таких элементов требует искусства и опыта. Можно дать следующие общие рекомендации.

Систему составляют те элементы реального процесса (см. примеры 4.3—4.6), которые с течением времени способны изменять свои состояния и тем самым непосредственно влиять на степень достижения цели управляемого процесса. Обратим внимание, что способность элементов менять свои состояния — необходимое условие их принадлежности к первой группе. Элементы второй группы влияют на степень достижения цели управляемого процесса косвенно: от них зависит значение вероятности (интенсивности) перехода системы из состояния в состояние. Элементы могут менять, но могут и не менять со временем свои характеристики. Это не принципиально. Правда, во втором случае математическое моделирование упрощается.

Критерий истины — практика. Более чем полувековой опыт использования разработанного А. А. Марковым принципа схематизации случайного процесса показал его эффективность, способность с высокой степенью научной объективности выявлять закономерности процессов. Важным для целей практики достоинством рассматриваемого принципа является также возможность достаточно подробной регламентации процесса разработки необходимых для управления моделей, что, во-первых, облегчает подготовку кадров, а во-вторых, сокращает время моделирования. Возможность такой регламентации объясняется еще и тем, что разработан математический аппарат математического описания различных классов случайных процессов. Необходима лишь правильная классификация реального процесса. В большинстве случаев для этого требуется знание особенностей процесса, которые могут быть известны только профессионалу, т. е. командиру. Командир должен знать это обстоятельство при руководстве математическим моделированием, и в частности при оперативно-тактической (тактико-специальной) постановке задачи (см. гл. 2).

Целесообразна следующая классификация случайных процессов с точки зрения разработки математических моделей.

1. *Случайные процессы со счетным и несчетным числом состояний системы.* В первом случае число состояний системы можно пересчитать, во втором случае пересчитать состояния системы невозможно, так как они непрерывно заполняют некоторый промежуток.

В примерах 4.1—4.6 рассмотрены случайные процессы со счетным числом состояний системы. Рассмотрим примеры случайных процессов с несчетным числом состояний систем.

Пример 4.7. Качка корабля при волнении моря является случайным процессом. В качестве системы при этом выступает корабль, в качестве состояний системы — углы крена и дифферента. Обе характеристики состояний системы несчетны, так как эти величины непрерывно заполняют интервалы от максимально до минимально возможных их значений.

Пример 4.8. Для разработчика системы управления зенитной управляемой ракетой полет ракеты к цели — случайный процесс. Системой является ракета; состояния системы на каждый момент времени характеризуются расстоянием до цели и направлением на нее. Состояния системы могут принимать значения, непрерывно заполняющие некоторые интервалы.

В оперативно-тактической области наибольшее прикладное значение имеют математические модели случайных процессов со счетным числом состояний.

Случайные процессы с несчетным числом состояний изучаются теорией случайных функций, методы которой наряду с другими методами используются в теории автоматического управления в разделе технической кибернетики, исследующей системы автоматического управления. Системой автоматического управления называется комплекс устройств, обеспечивающих автоматическое изменение ряда координат объекта управления с целью установления желаемого режима работы объекта. В качестве примеров можно привести устройства самонаведения ракет на объекты поражения, устройства для поддержания заданного режима работы энергетических установок, автопилоты, авторулевые и др.

2. Случайные процессы с дискретным и непрерывным временем переходов системы в различные состояния. В первом случае переходы системы в различные ее состояния возможны только в определенные моменты времени, которые заранее можно указать (см. примеры 4.1, 4.3, 4.4). Во втором случае возможные моменты времени переходов системы непрерывно заполняют некоторый временной промежуток. Так, в примерах 4.2, 4.5, 4.6 переходы системы из состояния в состояние возможны в любой момент времени из промежутка $[0, t]$, отведенного для поиска подводной лодки противника. Для случайных процессов этого класса указать заранее моменты времени переходов системы нельзя. В оперативно-тактической области имеют место случайные процессы обоих этих классов.

3. Стационарные и нестационарные случайные процессы. У стационарных процессов все их вероятностные характеристики не меняются со временем, у нестационарных — меняются.

Пример 4.9. Динамика прохождения сообщений в штабе соединения есть случайный процесс, так как случайными будут число поступающих в единицу времени сообщений (донесений, приказаний, оповещений), моменты времени их поступления, время, необходимое для их обработки операторами штаба. Вероятностные характеристики этого процесса на каждый момент времени t — это математические ожидания числа сообщений, поступающих в единицу времени, времени ожидания сообщением обработки, времени обработки сообщения и всего времени пребывания сообщения в штабе до полной его обработки; математическое ожидание числа сообщений, ожидающих обработки; вероятность того, что определенное число операторов штаба будет занято обработкой сообщений, а остальные будут свободны.

При некоторых режимах работы штаба все эти параметры могут не меняться со временем, т. е. будет иметь место стационарный режим. В других условиях эти параметры с течением времени изменяются. С точки зрения динамики прохождения сообщений такой процесс функционирования штаба является нестационарным.

Пример 4.10. Динамика судоремонта, ремонта оружия, механизмов и устройств на ремонтных предприятиях имеет характер случайного процесса, который с точки зрения математического моделирования аналогичен процессу, описанному в примере 4.9. Процесс ремонта техники также может быть стационарным или нестационарным.

В оперативно-тактической области могут иметь место как стационарные, так и нестационарные случайные процессы. При классификации случайных процессов необходимо учесть, что существуют процессы, которые не могут быть стационарными в принципе. Так, если в условиях примера 4.9 математическое ожидание числа сообщений, поступающих в штаб в единицу времени, превышает математическое ожидание числа сообщений, которые операторы штаба способны обработать в

единицу времени, то очередь сообщений, ожидающих обработки, будет со временем непрерывно возрастать. Такой режим прохождения сообщений в штабе интерпретируется как нестационарный.

В большом числе случаев приходится учитывать, что случайные процессы могут иметь нестационарный начальный и стационарный последующий режим функционирования. В таком случае говорят об установившемся и неуставившемся (переходном) режиме работы системы.

Так, например, выглядит процесс поступления в порт и обработки у причалов судов с началом навигации: со временем среднее число поступающих, ожидающих обработки и обрабатываемых судов стабилизируется (переходный режим) и принимает некоторое постоянное среднее значение (установившийся режим).

В ряде случаев у процессов могут чередоваться периоды стационарной и нестационарной работы. Такими, например, часто бывают процессы прохождения сообщений в штабах и ремонта техники на ремонтных предприятиях в связи с началом, прохождением и окончанием учений, боевых действий или каких-либо мероприятий.

Иногда бывает возможным нестационарный процесс считать стационарным, если это не грозит существенным искажением исследуемых закономерностей. Для этого осредняются соответствующие исходные параметры. В других случаях оказывается целесообразным разделить время функционирования системы на периоды, где процесс может считаться стационарным, и изучить эти периоды отдельно. В ряде же ситуаций необходимо изучить нестационарный процесс таким, какой он есть, — нестационарным.

4. *Марковские и немарковские случайные процессы.* Случайный процесс называется *марковским*, если способность системы в будущем переходить в различные ее возможные состояния зависит только от состояния системы в настоящем и не зависит от того, какие переходы совершила система в прошлом, и как именно перешла в свое настоящее состояние.

Процесс является немарковским, если его ход и исход в будущем зависит не только от состояния системы в настоящем, но и от предыстории процесса, т. е. если имеет место последствие.

Важно понимать, что “марковость” или “немарковость” случайного процесса не есть его “врожденное” свойство. Марковское представление реального процесса зависит от искусства исследователя, его умения включить в состав системы (изучение которой осуществляется для изучения реального процесса) такие элементы этого процесса и связи между ними, которые позволяют рассматривать процесс функционирования системы как марковский.

В принципе любой процесс может быть представлен как марковский. В ряде случаев это связано с выбором, увеличением состава состояний системы (см. примеры 5.3, 5.5), иногда приходится прибегать к разработке специальных приемов математического описания процесса (например, п. 17.3.2 — моделирование поиска объекта с возрастающей интенсивностью), наконец, может оказаться необходимым принятие допущений и ограничений, которые, с одной стороны, позволяют интерпретировать процесс как марковский, с другой — не мешают достичь целей моделирования (см. п. 17.1.2).

Когда же марковское описание процесса громоздко или приводит к искажению исследуемых закономерностей, этот процесс моделируется как немарковский. Математический аппарат для описания немарковских процессов может быть самым различным, в зависимости от особенностей процессов. Весьма часто используется метод статистических испытаний (см. гл. 9).

Выше рассмотрены основные классы случайных процессов. Они, в свою очередь, делятся на подклассы, группы и подгруппы. Например, среди марковских случайных процессов со счетным числом состояний и непрерывным временем переходов выделяется подкласс марковских случайных

процессов массового обслуживания. Этот подкласс составляют группы процессов в одно- и многофазных системах массового обслуживания. Каждая из этих групп делится на ряд подгрупп в соответствии с особенностями протекающих в системах процессов. Порядок дальнейшей классификации случайных процессов излагается в соответствующих пособиях по теории вероятностей и теории исследования операций.

Детальная классификация случайного процесса необходима для выбора математического аппарата — строительного материала для разработки математической модели. В оперативно-тактической области наиболее часто возникает необходимость в математических моделях случайных процессов со счетным числом состояний и дискретным или непрерывным временем переходов системы. Что касается случайных процессов с дискретным временем переходов, то наиболее разработанными в настоящее время являются методы моделирования дискретных цепей Маркова.

Методы математического моделирования многих случайных процессов со счетным числом состояний и непрерывным временем переходов системы (стационарных и нестационарных, марковских и немарковских) рассматриваются в теории массового обслуживания.

Методы моделирования дискретных цепей Маркова и марковских процессов массового обслуживания — один из исторически первых методов моделирования случайных процессов. Именно они рассматриваются в учебнике. Причиной внимания к этим методам является следующее. Во-первых, указанные методы находят широкое применение в оперативно-тактической области, так как соответствующие случайные процессы часто имеют место в практике применения сил и средств, и для их математического моделирования разработан эффективный математический аппарат. Во-вторых, знание этих методов — необходимое условие для изучения ряда других методов (например, методов моделирования некоторых немарковских процессов). В-третьих, указанные методы широко применяются при разработке методов моделирования марковских случайных процессов различных классов, не являющихся в точности дискретными цепями Маркова или марковскими процессами массового обслуживания: ракетных и артиллерийских ударов и дуэлей, процессов поиска объектов в районе и слежения за ними и др.

Глава 5. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМЫХ ПРОЦЕССОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ДИСКРЕТНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

§ 5.1. ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ДИСКРЕТНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА ПРИ УПРАВЛЕНИИ СИЛАМИ

5.1.1. Область применения методов

Область возможного применения рассматриваемых методов чрезвычайно широка. В большом числе случаев эти методы являются единственным эффективным инструментом объективного обоснования решений, когда осуществляется управление некоторой системой, способной изменять свои состояния во времени. Термин “система” здесь употреблен в широком смысле. Такими системами могут быть технические средства, оружие, корабли, соединения кораблей.

Вот некоторые примеры оперативно-тактических ситуаций, когда для эффективного управления необходимо математическое моделирование с использованием методов теории дискретных цепей Маркова.

1. Артиллерийские и ракетные дуэли кораблей и групп кораблей. Целями моделирования при этом могут быть обоснование лучших способов маневрирования при выходе в позицию применения оружия и в процессе применения оружия, лучших способов ведения огня, прогнозирование возможных тактических приемов противника.

2. Применение по противнику оружия несколькими ударными группами. Возможная цель моделирования — обоснование рациональных способов взаимодействия групп, последовательности ударов, прогнозирования организации противником обороны своих объектов.

3. Организация связи с управляемыми силами, связи взаимодействия между силами. Цель моделирования — обоснование рациональной организации связи, прогнозирование мероприятий противника по срыву связи.

4. Ведение разведки корабельных соединений и конвоев противника с целью наведения на них ударных сил. Математическое моделирование при этом может быть использовано для обоснования рациональных способов ведения разведки, способов использования разведчиками средств связи, прогнозирования способов противодействия противника ведению разведки и наведению ударных сил.

При моделировании процессов боевых действий методы теории дискретных цепей Маркова могут применяться как самостоятельно, так и использоваться для разработки блоков моделей.

Умение применять рассматриваемые методы связано, прежде всего, с умением увидеть в изучаемом процессе черты, присущие дискретным цепям Маркова, и с умением поставить задачу для разработки модели.

5.1.2. Особенности оперативно-тактической постановки задачи

Исследуемый процесс является дискретной цепью Маркова, если этому процессу может быть дано следующее формальное описание. Имеется система, которая в каждый момент времени может находиться в одном из m состояний. Смена системой состояния (шаг процесса) осуществляется только в фиксированные моменты времени. Известны или могут быть вычислены вероятности того, что система, которая до очередного шага была в состоянии A_i ($i = 1, 2, \dots, m$), в результате этого шага перейдет в состояние A_j ($j = 1, 2, \dots, m$). Вероятность, что система окажется в любом состоянии за очередной шаг процесса, зависит только от состояния системы до очередного шага и не зависит от того, как именно система оказалась в этом состоянии. Переходы системы в возможные состояния составляют полную группу несовместных событий*.

Если исследуемый процесс может быть описан подобным образом, то для его моделирования можно использовать методы теории дискретных цепей Маркова. Для использования указанных методов оперативно-тактическая постановка задачи должна содержать сведения, позволяющие выявить:

- а) что является системой;
- б) каковы возможные состояния системы;
- в) что является шагом процесса и в какие моменты времени осуществляются шаги;
- г) какие переходы системы из состояния в состояние возможны за один шаг.

* При этом число состояний m может быть в принципе и бесконечным, однако далее рассматривается только случай конечного числа m .

Описание процесса должно также дать возможность определить вероятности переходов системы на каждом шаге. Для определения состава системы необходимо выявить:

— элементы обстановки, вероятностные характеристики которых необходимы для вычисления показателей эффективности;

— элементы обстановки, которые способны изменять свои состояния от шага к шагу процесса, влияя на значение показателя эффективности. Набор состояний системы, учитываемых в модели, определяется, в первую очередь, особенностями процесса. При этом в зависимости от целей действий сил и целей моделирования некоторые состояния можно объединить в одно и тем самым упростить модель. И наоборот, чтобы добиться “марковости” процесса, т. е. возможности учитывать при определении вероятностей переходов системы только ее состояние до очередного шага, часто оказывается необходимым “дробить”, увеличивать число возможных состояний системы (см. гл. 4). Рассмотрим некоторые примеры дискретных цепей Маркова, систем, их состояний, шагов.

Пример 5.1. По группе кораблей противника, состоящей из корабля ядра и двух кораблей охранения, планируется нанесение нескольких последовательных ударов группами кораблей, применяющих различное оружие. Вероятность поражения корабля ядра и кораблей охранения этим оружием различна и меняется в зависимости от числа боеспособных кораблей охранения.

Цель удара — поражение корабля ядра, цель моделирования — обоснование рациональной последовательности ударов. В рассматриваемом случае показателем эффективности является вероятность поражения корабля ядра. Имеем:

а) система — группа кораблей противника в составе корабля ядра и двух кораблей охранения;

б) состояние системы: A_1 — корабль ядра и корабли охранения не поражены; A_2 — корабль ядра не поражен, один корабль охранения поражен; A_3 — корабль ядра не поражен, оба корабля охранения поражены; A_4 — корабль ядра поражен;

в) шаг процесса — нанесение удара очередной ударной группой; момент шага — момент нанесения удара;

г) система за один шаг способна переходить из состояния с меньшим номером в одно из состояний с большим номером. Обратные переходы невозможны. Кроме того, система за один шаг способна оставаться в прежнем состоянии.

Пример 5.2. В отличие от условий примера 5.1 целью ударов является поражение всех кораблей противника. В этом случае учитываемыми в модели состояниями системы являются: A_1, A_2, A_3 — корабль ядра не поражен, поражены соответственно ноль, один, два корабля охранения; A_4, A_5, A_6 — корабль ядра поражен, поражены соответственно ноль, один, два корабля охранения.

Пример 5.3. В условиях примера 5.1 считать, что вероятность поражения корабля ядра при очередном ударе существенно зависит от такого элемента “предыстории” процесса, как повреждения, полученные этим кораблем при предыдущих ударах, когда эти повреждения требуют снижения скорости движения группы ниже определенного предела. В этом случае в модели требуется учесть следующие состояния системы: A_1, A_2, A_3 — корабль ядра не поврежден, поражены соответственно ноль, один, два корабля охранения; A_4, A_5, A_6 — корабль ядра поврежден, поражены соответственно ноль, один, два корабля охранения; A_7 — корабль ядра поражен.

В примере 5.1 по сравнению с примером 5.2 состояния A_4, A_5, A_6 объединены в одно. Различие в числе учитываемых состояний определяется различием в целях действий сил. В примере 5.3 для сохранения “марковости” процесса введена группа состояний, учитывающих повреждение корабля ядра.

Пример 5.4. Подводная лодка передает сообщения на командный пункт (КП), осуществляя для повышения надежности передачи сообщения несколько повторных передач радиogramм (РДО) с одним и тем же сообщением. В процессе передачи сообщения подводная лодка может быть обнаружена и атакована противолодочными силами противника. В этом случае выполнить запланированное число передач РДО подводная лодка может, только оторвавшись от преследования.

Цель использования средств связи подводной лодки — передача на КП сообщения. Цель моделирования — обоснование лучшего по надежности способа передачи подводной лодкой сообщения в условиях противодействия противолодочных сил противника.

В данном случае показателем эффективности использования средств связи подводной лодки является вероятность получения на КП сообщения. Имеем:

а) система — подводная лодка и КП;

б) состояния системы: A_1 — сообщение на КП не получено, подводная лодка противолодочными силами не поражена; A_2 — сообщение на КП получено; A_3 — сообщение на КП не получено, подводная лодка поражена противолодочными силами;

в) шаг системы — передача подводной лодкой РДО. Шаг системы имеет продолжительность, равную математическому ожиданию промежутка времени между началами двух смежных передач РДО. При этом математическое ожидание времени уклонения подводной лодки от преследования включается в продолжительность шага;

г) система способна из состояния A_1 переходить в состояние A_2 . Из состояний A_2 и A_3 переход ни в какие другие состояния не возможен, так как на этом моделируемый процесс заканчивается в первом случае ввиду достижения цели действий, во втором — из-за поражения подводной лодки. Возможно также, что в результате очередного шага система останется в прежнем состоянии.

Пример 5.5. Дополнительно к условиям примера 5.4 следует учесть, что возможность осуществления дальнейших передач РДО непораженной подводной лодкой существенно зависит от того, как подводная лодка пришла в состояние A_1 . Если подводная лодка хотя бы один раз была обнаружена ранее, противник усиливает противолодочную оборону в данном районе, отчего вероятность обнаружения подводной лодки возрастает. В этом случае следует считать:

а) система — подводная лодка, КП, противолодочные силы противника;

б) состояния системы: A_1 — сообщение на КП не получено, подводная лодка не поражена и ранее противником не обнаруживалась, противолодочная оборона в районе не усилена; A_2 — сообщение на КП не получено, подводная лодка не поражена, но обнаружена противником, противник усилил противолодочную оборону в районе; A_3 — сообщение на КП получено; A_4 — сообщение на КП не получено, подводная лодка поражена противником;

в) шаг системы — передача подводной лодкой РДО;

г) система способна переходить из состояния A_1 или A_2 в состояния с большим номером. Из состояний A_3 и A_4 переход ни в какие другие состояния не возможен.

Заметим, что в приведенных выше примерах не рассматривались способы определения необходимых вероятностей: поражения объектов противника, обнаружения подводной лодки и т. д. Эти вопросы излагаются в последующих главах. Сейчас же будем считать все необходимые вероятности событий известными.

Оперативно-тактическую постановку задачи дает командир (см. § 2.1). Интерпретацию процесса как дискретной цели Маркова осуществляет специалист по исследованию операций на основании уяснения постановки задачи. В ряде случаев ему может потребоваться уточнить у командира отдельные детали ситуации.

5.1.3. Показатели эффективности, вычисляемые методами теории дискретных цепей Маркова

Рассматриваемые методы позволяют находить распределение вероятностей состояний системы на различных шагах процесса. А это открывает возможность с помощью методов теории вероятностей находить различные вероятностные характеристики, используемые в качестве показателей эффективности. Чаще всего рассматриваемые методы применяются для определения следующих вероятностных характеристик:

- вероятности того, что цель действий сил (своих или противника) будет достигнута за заданное число шагов или за заданное время процесса;
- вероятности того, что цель действий сил будет достигнута именно на заданном шаге или именно в заданный момент;
- математического ожидания числа шагов, необходимых для достижения цели действий;
- математического ожидания времени, необходимого для достижения цели действий;
- математического ожидания ущерба, причиняемого противнику, или ущерба, причиняемого противником нашим силам, за заданное число шагов процесса.

§ 5.2. МЕТОДЫ РАЗРАБОТКИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДИСКРЕТНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

5.2.1. Матрицы вероятностей переходов системы за один шаг и несколько шагов

Основу математической модели цепи Маркова составляют матрицы вероятностей переходов системы в возможные состояния за каждый из шагов. В дальнейшем для краткости будем называть их просто матрицами переходов. Рассмотрим свойства матрицы перехода за один шаг. Обозначим через $p_{ij}^{(k)}$ вероятности того, что система, которая перед очередным (k -м) шагом была в состоянии A_i , в результате k -го шага перейдет в состояние A_j ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, m$). Если вероятности переходов $p_{ij}^{(k)}$ меняются от шага к шагу, цепь Маркова называется неоднородной. Если же вероятности $p_{ij}^{(k)}$ одинаковы для всех шагов, цепь Маркова называется однородной. В этом случае вероятности перехода принято обозначать через P_{ij} .

Матрица перехода за один шаг имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} P_{11}^{(k)} & & & & \\ P_{21}^{(k)} & & & & \\ \dots & & & & \\ P_{i1}^{(k)} & & & & \\ \dots & & & & \\ P_j^{(k)} & & & & \\ \dots & & & & \\ P_{m1}^{(k)} & & & & \end{pmatrix}$$

Как видно, матрица перехода квадратная, т. е. число строк равняется числу столбцов. Каждый элемент i -й строки матрицы ($i = 1, 2, \dots, m$) есть вероятность того, что система, которая до k -го шага была в состоянии A_i , после k -го шага перейдет в состояние, номер которого соответствует номеру столбца матрицы. Например:

$p_{i1}^{(k)}$ — вероятность перехода системы из состояния A_i в результате k -го шага в состояние A_1 ;

$p_{i2}^{(k)}$ — вероятность перехода системы из состояния A_i в результате k -го шага в состояние A_2 ;

$p_{ii}^{(k)}$ — вероятность перехода системы из состояния A_i в результате k -го шага в состояние A_i (т. е. вероятность того, что система останется в состоянии A_i);

$p_{im}^{(k)}$ — вероятность перехода системы из состояния A_i в результате k -го шага в состояние A_m .

Так как система в результате k -го шага обязательно должна оказаться в одном из m состояний, то сумма вероятностей каждой из строк равняется единице:

$$\sum_{j=1}^m p_{ij}^{(k)} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Это свойство часто используется для проверки правильности заполнения матрицы переходов.

Элементы j -го столбца матрицы переходов ($j = 1, 2, \dots, m$) представляют собой условные вероятности перехода системы в результате k -го шага в состояние A_j , вычисленные при условии, что перед k -м шагом система находилась в состоянии A_i (номер состояния равняется номеру соответствующей строки матрицы). В зависимости от особенностей процесса некоторые из вероятностей $p_{ij}^{(k)}$ могут быть равны нулю, что означает невозможность перехода системы на k -м шаге из состояния A_i в состояние A_j .

Знание матрицы перехода за каждый шаг позволяет определить элементы $p_{ij}(n)$ матрицы переходов за n шагов. Через $p_{ij}(n)$ обозначается вероятность того, что система, бывшая перед первым шагом в состоянии A_i , в результате n шагов (т. е. после n шагов) процесса перейдет в состояние A_j .

Матрица переходов за n шагов определяется в результате последовательного матричного перемножения n матриц. Обозначим через π_k или $\|p_{ij}^{(k)}\|$ матрицу перехода для k -го шага, а через $\pi(n)$ или $\|p_{ij}(n)\|$ — матрицу перехода в результате n шагов.

Символически матричное произведение для неоднородной цепи записывается следующим образом:

$$\pi(n) = \pi_1 \pi_2 \dots \pi_k \dots \pi_n \quad (5.2.1)$$

или

$$\|p_{ij}(n)\| = \|p_{ij}^{(1)}\| \|p_{ij}^{(2)}\| \dots \|p_{ij}^{(k)}\| \dots \|p_{ij}^{(n)}\|,$$

а для однородной цепи

$$\pi(n) = \pi_1^{(n)} \quad (5.2.2)$$

или

$$\|p_{ij}(n)\| = \left(\|p_{ij}\| \right)^n.$$

Смысл матричного перемножения матриц перехода рассмотрим на следующем примере.
 П р и м е р 5.6. Пусть заданы матрицы перехода на первом и втором шагах:

$$\pi_1 = \begin{vmatrix} p_{11}^{(1)} & p_{12}^{(1)} & p_{13}^{(1)} \\ p_{21}^{(1)} & p_{22}^{(1)} & p_{23}^{(1)} \\ p_{31}^{(1)} & p_{32}^{(1)} & p_{33}^{(1)} \end{vmatrix}; \quad \pi_2 = \begin{vmatrix} p_{11}^{(2)} & p_{12}^{(2)} & p_{13}^{(2)} \\ p_{21}^{(2)} & p_{22}^{(2)} & p_{23}^{(2)} \\ p_{31}^{(2)} & p_{32}^{(2)} & p_{33}^{(2)} \end{vmatrix}.$$

Требуется определить матрицу перехода за два шага:

$$\pi(2) = \begin{vmatrix} p_{11}^{(1)} & p_{12}^{(1)} & p_{13}^{(1)} \\ p_{21}^{(1)} & p_{22}^{(1)} & p_{23}^{(1)} \\ p_{31}^{(1)} & p_{32}^{(1)} & p_{33}^{(1)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_{11}^{(2)} & p_{12}^{(2)} & p_{13}^{(2)} \\ p_{21}^{(2)} & p_{22}^{(2)} & p_{23}^{(2)} \\ p_{31}^{(2)} & p_{32}^{(2)} & p_{33}^{(2)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_{11}(2) & p_{12}(2) & p_{13}(2) \\ p_{21}(2) & p_{22}(2) & p_{23}(2) \\ p_{31}(2) & p_{32}(2) & p_{33}(2) \end{vmatrix}.$$

Определим в качестве примера вероятность $p_{23}(2)$ перехода системы за два шага из второго состояния в третье.

Относительно исходов первого шага системы можно только строить гипотезы. Известно, что после первого шага система может оказаться или в состоянии A_1 , или в состоянии A_2 , или в состоянии A_3 . Вероятностями этих гипотез являются соответственно вероятности $p_{21}^{(1)}, p_{22}^{(1)}, p_{23}^{(1)}$. Если реализуется гипотеза A_1 , то искомое событие — переход системы в состояние A_3 — произойдет на втором шаге с условной вероятностью $p_{13}^{(2)}$, при гипотезе A_2 — с условной вероятностью $p_{23}^{(2)}$ и т. д.

Таким образом, можно использовать формулу полной вероятности

$$p_{23}(2) = \sum_{j=1}^3 p_{2j}^{(1)} p_{j3}^{(2)}.$$

Обратим внимание, что процесс вычисления вероятности $p_{23}(2)$ выглядит следующим образом: элементы второй строки матрицы π_1 умножаются почленно на элементы третьего столбца матрицы π_2 , затем суммируются найденные произведения.

Аналогичным образом определяются и остальные вероятности матрицы перехода $\pi(2)$.

В общем виде формула для определения вероятностей переходов системы за два шага имеет вид

$$p_{ij}(2) = \sum_{s=1}^m p_{is}^{(1)} p_{sj}^{(2)},$$

а для n шагов —

$$p_{ij}(n) = \sum_{s=1}^m p_{is}(n-1) p_{sj}^{(n)}, \quad (5.2.3)$$

где $p_{is}(n-1)$ — вероятность перехода системы из состояния A_i в состояние A_s в результате шагов от первого до $(n-1)$ -го, или

$$p_{ij}(n) = \sum_{s=1}^m p_{is}^{(1)} p_{sj}(n-1), \quad (5.2.4)$$

где $p_{sj}(n-1)$ — вероятность перехода системы из состояния A_s в состояние A_j в результате шагов от второго до n -го.

Соответственно выражениям (5.2.3), (5.2.4) для матрицы $\pi(n)$ перехода за n шагов справедливы выражения

$$\pi(n) = \pi(n-1)\pi_n \quad (5.2.5)$$

или

$$\pi(n) = \pi_1\pi(n-1). \quad (5.2.6)$$

Матрица перехода за n шагов обладает теми же свойствами, что и матрица перехода за один шаг.

Для перемножения матриц переходов на ЭВМ могут быть легко разработаны стандартные процедуры.

Произведение матриц переходов не обладает переместительным свойством. В общем случае $\pi_1\pi_2 \neq \pi_2\pi_1$. Это обстоятельство позволяет использовать цепи Маркова для обоснования важного элемента решений командира по поставленным задачам — определения оптимальной последовательности ударов или, шире, оптимальной последовательности действий.

5.2.2. Определение вероятностей переходов для цепей Маркова с невозстанавливаемым ущербом

Для некоторых частных видов матрицы перехода можно разработать более простые способы определения вероятностей перехода $p_{ij}(n)$ и тем сократить время моделирования.

Рассмотрим одну цепь Маркова, обладающую следующими свойствами: система за очередной шаг может из состояния A_i перейти в какие-либо другие состояния, но обратный переход системы из этих состояний в состояние A_i невозможен.

Пронумеруем состояния подобной системы таким образом, чтобы переход системы из состояния с меньшим номером в состояние с большим номером был возможен, а обратный — невозможен. При этом будем иметь $p_{ij} > 0$, если $i \leq j$; $p_{ij} = 0$, если $i > j$. Матрица переходов для такой цепи называется верхней треугольной: все ее элементы, расположенные ниже главной диагонали, равны нулю.

Так, для примера 5.1 при нанесении каждого удара одним и тем же оружием матрица переходов будет иметь вид

$$\pi_1 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ 0 & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ 0 & 0 & p_{33} & p_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Состояние A_4 называется поглощающим, так как, оказавшись в этом состоянии, система уже не может из него перейти ни в какие другие состояния ни за какое число шагов.

Обратим внимание на следующие обстоятельства, с которыми придется встречаться в дальнейшем. Во-первых, дискретная цепь может иметь несколько поглощающих состояний. Так, в условиях примера 5.4 имеются два поглощающих состояния: A_2 (сообщение на КП получено) и A_3 (подводная лодка поражена противником до получения на КП сообщения). Перейдя в одно из этих состояний, система более из них уже не выйдет. Матрица перехода при этом имеет вид

$$\pi_1 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Во-вторых, в качестве поглощающего может выступать группа состояний. Так, если в примере 5.2 нас будет интересовать вероятность поражения корабля ядра, то группа состояний A_4 — A_6 может быть объединена в одно состояние — корабль ядра поражен, — являющееся поглощающим.

Возвратимся к вопросу определения вероятностей $p_{ij}(n)$ перехода системы за n шагов для верхней треугольной матрицы. Непосредственно из свойств верхней треугольной матрицы следует, что

$$\begin{aligned} p_{ij}(n) &= 0, \quad \text{если } i > j; \\ p_{ii}(n) &= p_{ii}^{(n)}, \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

так как, выйдя из состояния A_i , система в него уже никогда не вернется.

Можно показать [8], что зависимости для определения вероятностей переходов из состояния A_i в состояния A_{i+1} , A_{i+2} имеют вид:

$$p_{i,i+1}(n) = p_{i,i+1} \frac{p_{i+1,i+1}^n - p_{ii}^n}{p_{i+1,i+1} - p_{ii}}; \quad (5.2.8)$$

$$\begin{aligned} p_{i,i+2}(n) &= \frac{1}{p_{i+2,i+2} - p_{ii}} \left[p_{i,i+2} \left(p_{i+2,i+2}^n - p_{ii}^n \right) + p_{i,i+1} p_{i+1,i+2}(n) - \right. \\ &\quad \left. - p_{i,i+1}(n) p_{i+1,i+2} \right]. \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

В выражении (5.2.9) вероятности $p_{i,i+1}(n)$ и $p_{i+1,i+2}(n)$ определяются с помощью (5.2.8). Подобным образом можно определить все вероятности $p_{ij}(n)$ при $j > i$, если $p_{ii} \neq p_{jj}$.

Пример 5.7. Определим вероятности $p_{ij}(n)$ переходов для систем с невосстанавливаемым ущербом.

а) Планируется поражение объекта противника залповым огнем корабля. Вероятность поражения объекта на залп равняется p . Залпы осуществляются в независимых условиях.

Математическая модель должна позволить обосновать число залпов, необходимых для поражения объекта. Показателем эффективности является вероятность поражения объекта.

Описанный процесс поражения объекта может быть интерпретирован как дискретная цепь с невосстанавливаемым ущербом. Системой является поражаемый объект, способный находиться в двух состояниях: A_1 — не поражен, A_2 — поражен. Шаги процесса — залпы корабля, моментами шагов являются моменты падения снарядов залпа. Система способна переходить из состояния A_1 в состояние A_2 , обратный переход невозможен. Матрица перехода имеет вид

$$\pi_1 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

где $p_{11} = 1 - p$; $p_{12} = p$.

Используя (5.2.7) и свойства матрицы перехода, будем иметь

$$p_{11}(n) = p_{11}^n; p_{12}(n) = 1 - p_{11}(n) = 1 - p_{11}^n = 1 - (1 - p)^n.$$

Вероятность поражения объекта в условиях примера составит

$$W(n) = p_{12}(n) = 1 - (1 - p)^n.$$

б) В условиях данного примера следует учесть, что обстреливаемый объект может не только поражаться, но и повреждаться очередными залпами. Вероятность поражения одним залпом неповрежденного корабля равняется p' , поврежденного — p'' , вероятность повреждения корабля равна p'' .

Объект противника как система может находиться в одном из трех состояний: A_1 — не поврежден, A_2 — поврежден, A_3 — поражен. Система способна переходить из состояния с меньшим номером в состояние с большим номером. Обратные переходы невозможны. Матрица перехода имеет вид

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ 0 & p_{22} & p_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $p_{11} = 1 - p' - p''$; $p_{12} = p''$; $p_{13} = p'$; $p_{22} = 1 - p''$; $p_{23} = p''$.

Используя (5.2.7), получим:

$$p_{11}(n) = p_{11}^n; p_{22}(n) = p_{22}^n. \quad (5.2.10)$$

На основании (5.2.8) можем записать

$$p_{12}(n) = p_{12} \frac{p_{22}^n - p_{11}^n}{p_{22} - p_{11}}. \quad (5.2.11)$$

Для определения $p_{13}(n)$, $p_{23}(n)$ используем свойства матрицы перехода

$$p_{13}(n) = 1 - p_{11}(n) - p_{12}(n); p_{23}(n) = 1 - p_{22}(n). \quad (5.2.12)$$

Показатель эффективности в рассматриваемом примере равен

$$W(n) = p_{13}(n) = 1 - (1 - p' - p'')^n - p'' \frac{(1 - p''')^n - (1 - p' - p'')^n}{p' + p'' - p'''}.$$

если процесс начинается из состояния A_1^* . Разумеется, что и для систем с невозстанавливаемым ущербом вероятности переходов $p_{ij}(n)$ могут быть получены путем перемножения матриц.

5.2.3. Методы учета начального состояния системы

* Методам определения показателей эффективности на основании матриц переходов посвящен п. 5.2.4.

Для того чтобы определить вероятность нахождения системы в том или ином состоянии за один или несколько шагов, необходимо знать, в каком состоянии находится система перед первым шагом, т. е. ее начальное состояние.

Начальное состояние системы задается распределением вероятностей ее состояния $p_i^{(0)}$ ($i = 1, 2, \dots, m$), которое определяется на основании результатов уяснения задачи и оценки обстановки. Так, в примере 5.1 для моделирования необходимо знать, в каком из состояний A_1 — A_4 будет находиться система перед первым ударом. Если из оценки обстановки станет известно, что противник до начала моделируемых ударов потерь понести не может, то принимается $p_1(0) = 1$; $p_i(0) = 0$, $i = 2, 3, 4$. Если же будет установлено, что противник такие потери может понести (например, в результате прохождения минных заграждений, ударов других сил), то необходима модель для нахождения вероятностей $p_i^{(0)}$.

В рамках собственно модели дискретной цепи распределение вероятностей $p_i^{(0)}$ является исходной информацией. Это распределение задается в виде вектор-строки или же матрицы, у которой элементы одной строки являются распределением $p_i^{(0)}$, а элементы всех других строк равны нулю.

Условимся вектор-строку или матрицу начальных состояний обозначить через $\|p_i^{(0)}\|$ или π_0 . Для того чтобы учесть начальное состояние системы, необходимо вектор-строку начальных состояний $\|p_i^{(0)}\|$ умножить на матрицу $\|p_{ij}(n)\|$ перехода за n шагов. Результатом перемножения будет вектор-строка распределения состояний системы за n шагов процесса с учетом начального состояния системы. Введем для нее обозначение $\|R_j(n)\|$. Элементы вектор-строки $\|R_j(n)\|$ находятся по формуле

$$R_j(n) = \sum_{i=1}^n p_i^{(0)} p_{ij}(n), \quad (5.2.13)$$

а вся вектор-строка — по правилу

$$\|R_j(n)\| = \|p_i^{(0)}\| \times \|p_{ij}(n)\|. \quad (5.2.14)$$

Пример 5.8. Разработать модель для определения вероятности получения на КП сообщения от подводной лодки при его повторных передачах, если обнаружение подводной лодки не ведет к усилению противолодочной обороны противника в районе (см. пример 5.4).

Обозначим: v — вероятность приема сообщения на КП при однократной передаче его подводной лодкой; p — вероятность поражения подводной лодки, обнаруженной между очередными передачами сообщения; p_0 — вероятность поражения подводной лодки до начала передач.

Матрицы перехода за один шаг и n шагов имеют вид

$$\|p_{ij}\| = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \|p_{ij}(n)\| = \begin{vmatrix} p_{11}(n) & p_{12}(n) & p_{13}(n) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}
p_{11} &= (1-v)(1-p); \quad p_{12} = v; \quad p_{13} = p(1-v); \\
p_{11}(n) &= p_{11}^n = [(1-v)(1-p)]^n; \\
p_{12}(n) &= p_{12} \frac{p_{22}^n - p_{11}^n}{p_{22} - p_{11}} = v \frac{1 - [(1-v)(1-p)]^n}{1 - (1-v)(1-p)}; \\
p_{13}(n) &= 1 - p_{11}(n) - p_{12}(n) = 1 - p_{11}^n - p_{12} \frac{p_{22}^n - p_{11}^n}{p_{22} - p_{11}} = \\
&= 1 - [(1-v)(1-p)]^n - v \frac{1 - [(1-v)(1-p)]^n}{1 - (1-v)(1-p)}.
\end{aligned}$$

Вектор-строка начальных состояний будет равна

$$\|p_i^{(0)}\| = \|p_1^{(0)} \quad p_2^{(0)} \quad p_3^{(0)}\| = \|(1-p_0) \quad 0 \quad p_0\|.$$

Теперь определим вектор-строку распределения вероятностей конечных состояний системы:

$$\begin{aligned}
\|R_j(n)\| &= \|p_1^{(0)} \quad p_2^{(0)} \quad p_3^{(0)}\| \times \begin{vmatrix} p_{11}(n) & p_{12}(n) & p_{13}(n) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\
&= \|R_1(n) \quad R_2(n) \quad R_3(n)\|.
\end{aligned}$$

Таким образом, вероятность получения на КП сообщения от подводной лодки равна

$$W(n) = R_2(n) = (1-p_0)v \frac{1 - [(1-v)(1-p)]^n}{1 - (1-v)(1-p)}.$$

5.2.4. Методы определения показателей эффективности по известным матрицам переходов

Знание матриц переходов системы за один и несколько шагов открывает возможность определения многих числовых характеристик, используемых в качестве показателей эффективности процессов боевых действий (см. п. 1.2.1).

Вероятность достижения цели действий сил за заданное число шагов (за заданное время) определяется как вероятность того, что система за n шагов перейдет в некоторые состояния.

Обозначим через $[A_r]$ множество состояний системы, переход в которые означает достижение цели действий. В частном случае это может быть и одно состояние. Показатель эффективности $\mathcal{E}(n)$ будет равен

$$\mathcal{E}(n) = \sum_{j \in [A_r]} R_j(n), \quad (5.2.15)$$

где $j \in [A_r]$ — номера состояний системы из множества $[A_r]$. Для условий примера 5.8 будем иметь $\mathcal{E}(n) = R_2(n)$.

Допустим, что в условиях примера 5.2 дополнительным показателем эффективности является вероятность поражения всех кораблей охранения. Этот показатель будет равен

$$\mathcal{E}_d(n) = \sum_{j \in [A_r]} R_j(n) = R_3(n) + R_6(n).$$

Вероятность того, что цель действий сил будет достигнута именно на n -м шаге, определим для случая, когда множество состояний $[A_r]$, означающих достижение цели действий, является поглощающим. При этом функция $\mathcal{E}(n)$ (см. формулу (5.2.15)) является неубывающей функцией аргумента n . Искомая вероятность

$$\mathcal{E}'(n) = \mathcal{E}(n) - \mathcal{E}(n-1). \quad (5.2.16)$$

Так, в примере 5.8 вероятность получения на КП сообщения именно при n -й его передаче с подводной лодки будет равна

$$\mathcal{E}'(n) = W(n) - W(n-1) = R_2(n) - R_2(n-1).$$

Математическое ожидание числа шагов, необходимых для достижения цели действий, определим для случая дискретной цепи с невозстанавливаемым ущербом, когда матрица перехода имеет одно поглощающее состояние или одну группу поглощающих состояний.

Поставим следующую задачу. Система начинает функционировать из состояния A_i . Функционирование системы прекращается или при первом достижении системой множества поглощающих состояний $[A_r]$, или же, если необходимые состояния не достигнуты, после осуществления заданного числа шагов процесса N .

Необходимо определить математическое ожидание $\bar{n}_i(N)$ числа шагов до прекращения функционирования системы.

Обозначим через $W_i(k)$ вероятность того, что искомые состояния будут достигнуты после k шагов процесса при условии, что процесс начат из состояния A_i :

$$W_i(k) = \begin{cases} 0 & \text{при } k = 0; \\ \sum_{j \in [A_r]} p_{ij}(k) & \text{при } k > 0. \end{cases}$$

Вероятность того, что система прекратит функционирование именно на n -м шаге процесса (при $n = 1, 2, \dots, N-1$), равна вероятности достижения системой состояний $[A_r]$ именно на n -м шаге (см. формулу (5.2.16)), т. е.

$$z_i(n) = W_i(n) - W_i(n-1).$$

Система осуществит все N шагов в том случае, если за предыдущие $N-1$ шагов необходимые состояния не будут достигнуты. Вероятность этого события

$$z_i(N) = 1 - W_i(N-1).$$

Поэтому искомое математическое ожидание числа шагов будет равно

$$\begin{aligned} \bar{n}_i(N) &= \sum_{n=1}^{N-1} n z_i(n) + N z_i(N) = \sum_{n=1}^{N-1} n [W_i(n) - W_i(n-1)] + \\ &+ N [1 - W_i(N-1)]. \end{aligned}$$

Перегруппировав члены суммы, приведя подобные, будем иметь

$$\begin{aligned} \bar{n}_i(N) &= W_i(1) - W_i(0) + 2W_i(2) - 2W_i(1) + 3W_i(3) - 3W_i(2) + \dots + nW_i(n) - \\ &- nW_i(n-1) + \dots + (N-1)W_i(N-1) - (N-1)W_i(N-2) + N - \\ &- NW_i(N-1) = - \underbrace{W_i(0) - W_i(1) - W_i(2) - \dots - W_i(n) - \dots - W_i(N-1)}_{\text{Нвычитаемых}} + N. \end{aligned}$$

Еще раз перегруппируем члены, окончательно получим

$$\bar{n}_i(N) = \sum_{n=0}^N [1 - W_i(n)]. \quad (5.2.17)$$

Для того чтобы определить математическое ожидание числа шагов до достижения поставленной цели (т. е. одного из состояний $[A_r]$), необходимо в формуле (5.2.17) снять ограничение по N , т. е. положить $N = \infty$. Тогда*

$$\bar{n}_i = \sum_{n=0}^{\infty} [1 - W_i(n)]. \quad (5.2.18)$$

При однородной цепи часто оказывается возможным получить конечные выражения для \bar{n}_i . В общем же случае процедура вычисления \bar{n}_i на ЭВМ предусматривает прекращение суммирования при выполнении условия

$$\bar{n}_i(N) - n_i(N-1) \leq \varepsilon, \quad (5.2.19)$$

где ε — малое положительное число, характеризующее требуемую точность расчетов.

Рассмотрим пример.

Пример 5.9. В условиях примера 5.7, a и b определить математическое ожидание числа шагов до достижения конечного состояния A_m из состояния A_1 (пример 5.7, a) и из состояния A_1 и A_2 (пример 5.7, b).

а) Предварительно найдем $W_1(n)$ — вероятность достижения состояния A_2 из состояния A_1 за n шагов:

$$W_1(n) = \begin{cases} 0 & \text{при } n = 0; \\ p_{12}(n) & \text{при } n > 0, \end{cases}$$

где $p_{12}(n) = 1 - p_{11}^n$.

Тогда

$$\bar{n}_1 = \sum_{n=0}^{\infty} [1 - W_1(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} p_{11}^n,$$

т. е. \bar{n}_1 есть сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Поэтому

* Для определения \bar{n}_i использована разработанная академиком А. Н. Колмогоровым методика расчета математического ожидания числа попаданий, необходимого для поражения цели.

$$\bar{n}_1 = \frac{1}{1 - p_{11}}. \quad (5.2.20)$$

В условиях примера 5.7, *a* математическое ожидание числа шагов равно

$$\bar{n}_1 = 1/p. \quad (5.2.21)$$

б) Вначале определим вероятности $W_1(n)$ и $W_2(n)$ достижения состояния A_3 за n шагов из состояний A_1 и A_2 соответственно:

$$W_1(n) = \begin{cases} 0 & \text{при } n = 0; \\ p_{13}(n) & \text{при } n > 0; \end{cases}$$

$$W_2(n) = \begin{cases} 0 & \text{при } n = 0; \\ p_{23}(n) & \text{при } n > 0, \end{cases}$$

где

$$p_{13}(n) = 1 - p_{11}^n - p_{12} \frac{p_{22}^n - p_{11}^n}{p_{22} - p_{11}};$$

$$p_{23}(n) = 1 - p_{22}^n; \quad p_{11} = 1 - p' - p''; \quad p_{12} = p''; \quad p_{22} = 1 - p'''; \quad p_{23} = p'''.$$

После этого для определения \bar{n}_1 и \bar{n}_2 могут быть получены следующие выражения:

$$\begin{aligned} \bar{n}_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} [1 - W_1(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} p_{11}^n + \frac{p_{12}}{p_{22} - p_{11}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_{22}^n - \sum_{n=0}^{\infty} p_{11}^n \right) = \\ &= \frac{1}{1 - p_{11}} + \frac{p_{12}}{p_{22} - p_{11}} \left(\frac{1}{1 - p_{22}} - \frac{1}{1 - p_{11}} \right); \end{aligned} \quad (5.2.22)$$

$$\bar{n}_2 = \sum_{n=0}^{\infty} [1 - W_2(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} p_{22}^n = \frac{1}{1 - p_{22}}. \quad (5.2.23)$$

Подставив в выражения (5.2.22), (5.2.23) исходные данные из примера 5.7, *б*, получим

$$\begin{aligned} \bar{n}_1 &= \frac{1}{p' + p''} + \frac{p''}{p' + p'' - p'''} \left(\frac{1}{p'''} - \frac{1}{p' + p''} \right); \\ \bar{n}_2 &= \frac{1}{p'''} \end{aligned}$$

Во всех рассмотренных выше случаях предполагалось, что моделируемый процесс достоверно начинается из состояния A_i . В том же случае, когда задано распределение начальных состояний, будем иметь

$$\bar{n} = \sum_{i=0}^m p_i^{(0)} \bar{n}_i. \quad (5.2.24)$$

Математическое ожидание времени, необходимого для достижения цели действий, определяется из выражения

$$\bar{t}_i = \bar{t}_{ш} \bar{n}_i, \quad (5.2.25)$$

если известно состояние A_i системы, при котором начинается процесс, или

$$\bar{t} = \sum_{i=1}^m p_i^{(0)} \bar{t}_i, \quad (5.2.26)$$

если задано распределение начальных состояний системы. В этих выражениях $\bar{t}_{ш}$ — математическое ожидание промежутка времени между очередными шагами процесса.

Математическое ожидание ущерба, причиняемого противнику или своим силам за заданное число шагов процесса, определяется по-разному для двух различных случаев: 1) оценивается ущерб, причиняемый каким-то элементом системы; 2) оценивается ущерб, причиняемый элементам, не входящим непосредственно в состав системы.

Метод вычислений рассмотрим на примерах.

Пример 5.10. Планируется ряд последовательных ударов авиации по конвою, состоящему из m транспортов и эскорта. В каждом ударе принимает участие одинаковое число самолетов, использующих одно и то же оружие. До удара авиации конвой подвергнется удару подводных лодок; распределение числа пораженных ими транспортов задано.

Цель ударов авиации — поражение максимально возможного числа транспортов. Цель моделирования — определение зависимости причиняемого противнику ущерба от числа ударов для обоснования потребного ресурса авиации.

Показатель эффективности ударов — математическое ожидание числа пораженных транспортов. Моделируемый процесс представляет собой дискретную цепь Маркова. Системой является конвой, который в результате каждого удара может находиться в одном из $m + 1$ состояний: $A_0, A_1, \dots, A_i, \dots, A_m$, чему соответствует $0, 1, \dots, m$ потерянных транспортов*. Шаг процесса — очередной удар авиации, момент шага — время нанесения удара.

Рассматриваемая цепь является цепью с невозстанавливаемым ущербом. Матрица перехода такой цепи имеет уже рассмотренный выше вид верхней треугольной матрицы:

$$\|p_{ij}\| = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \dots & p_{0j} & \dots & p_{0m} \\ 0 & p_{11} & \dots & p_{1j} & \dots & p_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_{jj} & \dots & p_{jm} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.2.27)$$

Задана вектор-строка начальных состояний

$$\|p_i^{(0)}\| = \|p_0^{(0)} \quad p_1^{(0)} \quad \dots \quad p_i^{(0)} \quad \dots \quad p_m^{(0)}\|.$$

Найдем способ определения показателя эффективности — математического ожидания числа пораженных транспортов — с помощью известных матрицы $\|p_{ij}\|$ и вектор-строки $\|p_i^{(0)}\|$.

* Для упрощения этого примера принимается, что каждому из состояний конвой соответствует некоторое среднее число пораженных кораблей эскорта.

Обратим внимание, что ущерб, причиняемый противнику — это пораженные транспорты конвоя. Они являются элементом моделируемой системы. Таким образом, имеет место первый из рассматриваемых случаев.

Используем методы, изложенные в пп. 5.2.1 или 5.2.2, и определим матрицу перехода за n шагов

$$\|p_{ij}(n)\| = (\|p_{ij}\|)^n,$$

а затем учтем начальное состояние системы и получим вектор-строку (см. п. 5.2.3)

$$\|R_j(n)\| = \|p_i^{(0)}\| \times \|p_{ij}(n)\|.$$

Искомое математическое ожидание числа пораженных транспортов будет равно

$$\bar{M}(n) = \sum_{j=0}^m jR_j(n).$$

Пример 5.11. В условиях примера 5.10 требуется определить математическое ожидание числа своих самолетов, поражаемых ПВО конвоя. В данном случае оценивается ущерб, наносимый элементам, не входящим непосредственно в систему, т. е. имеет место второй из рассматриваемых случаев.

Сопоставим матрицу перехода (5.2.27) и матрицу ущерба

$$\|a_{ij}\| = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0j} & \dots & a_{0m} \\ 0 & a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jm} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}. \quad (5.2.28)$$

Параметр a_{ij} есть математическое ожидание числа своих самолетов, потеря которых сопутствует переходу системы из состояния A_i в состояние A_j . Иначе говоря, с вероятностью p_{ij} математическое ожидание числа потерянных при очередном ударе самолетов равно a_{ij} , если только очередной удар начат из состояния A_i и система перешла в состояние A_j . Параметры a_{ij} определяются с помощью моделей, порядок разработки которых рассматривается в гл. 18.

Математическое ожидание ущерба (в данном случае числа потерянных самолетов) будет равно

$$\bar{u}(n) = \sum_{i=0}^m \gamma_i(n) p_i^{(0)}, \quad (5.2.29)$$

где $\gamma_i(n)$ — математическое ожидание ущерба за n шагов процесса, если процесс начат из состояния A_i . Параметр $\gamma_i(n)$ определяется из рекуррентного соотношения

$$\gamma_i(n) = \sum_{j=0}^m p_{ij} [a_{ij} + \gamma_j(n-1)]. \quad (5.2.30)$$

Смысл полученного выражения следующий: если система свой n -й шаг начала из состояния A_i , то с вероятностью p_{ij} она перейдет в состояние A_j ($j = 0, 1, 2, \dots, m$). При этом ущерб будет равен

сумме ущерба на n -м шаге (т. е. a_{ij}) и ущерба за $(n - 1)$ шагов, начинаемых из состояния A_j (т. е. $\gamma_j(n - 1)$).

Формула (5.2.29) может использоваться не только для определения своего ущерба, но и ущерба, причиняемого противнику. Так, в рассмотренном примере по этой формуле можно оценить потери истребительной авиации ПВО конвоя. Для этого при расчетах по формуле (5.2.29) вместо матрицы $\|a_{ij}\|$ своих потерь должна использоваться матрица $\|a'_{ij}\|$ математического ожидания числа истребителей, теряемых противником при переходе системы из состояния A_i в состояние A_j .

В области экономики рассмотренный метод используется для оценки дохода или ущерба предприятий, отраслей хозяйства.

В заключение рассмотрения вопроса о методах определения показателей эффективности дискретных цепей Маркова отметим, что рассмотренные выше показатели являются лишь наиболее употребимыми в оперативно-тактической области, но отнюдь не единственными. Методы определения ряда других показателей можно найти в специальной литературе, например [8].

5.2.5. Рациональная последовательность подготовки к моделированию процессов боевых действий методами теории дискретных цепей Маркова

Специфической особенностью методов теории дискретных цепей Маркова является сравнительная простота разработки стандартных процедур для вычисления показателей эффективности на ЭВМ. Если определены матрицы переходов $\|p_{ij}^{(k)}\|$, вектор-строка начальных состояний $\|p_i^{(0)}\|$, матрица ущерба $\|a_{ij}\|$, то вычисление показателей эффективности может быть осуществлено с помощью заранее подготовленных процедур.

Подготовка к моделированию процессов боевых действий — дискретных цепей Маркова — производится на основании оперативно-тактической постановки задачи. Целесообразна следующая последовательность операций при подготовке к моделированию.

1. Определить основной и дополнительный показатели эффективности.
2. Разработать замысел моделирования: определить потребные варианты расчетов; управляющие параметры для каждого из вариантов; рациональную последовательность смены вариантов.
3. Дать формализованное описание моделируемого процесса с целью определить: что есть система; каковы возможные состояния системы; что есть шаг процесса и в какие моменты времени осуществляются шаги; в какие состояния способна переходить система за один шаг из каждого своего состояния.

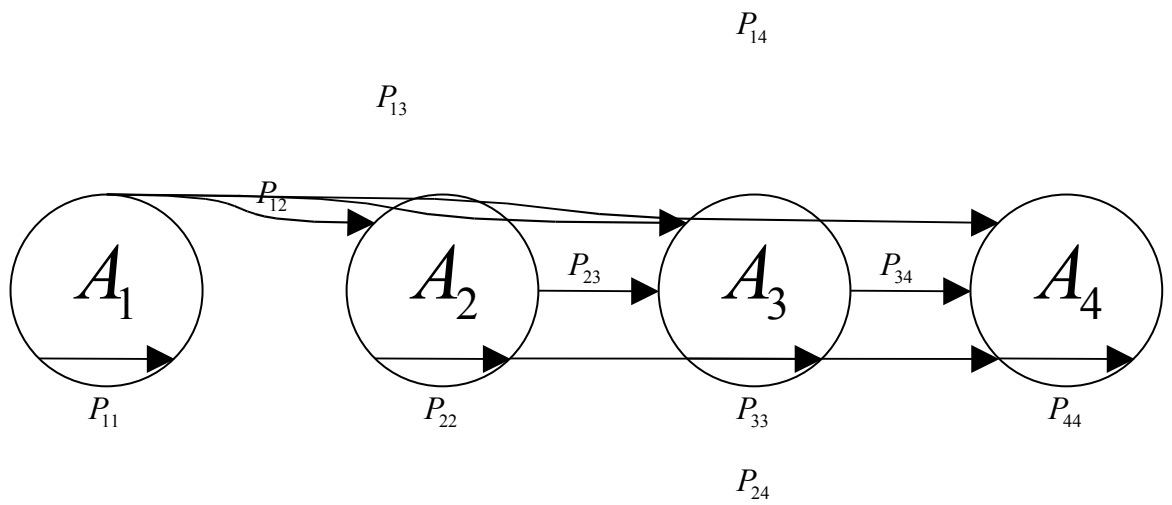


Рис. 5.1

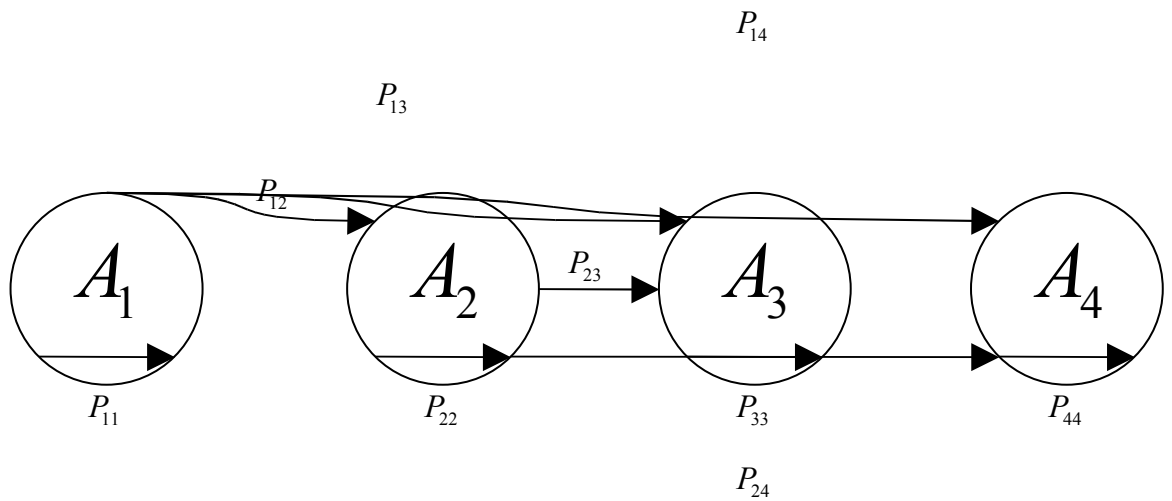


Рис. 5.2

Если окажется, что в рамках поставленной задачи имеет место последствие — зависимость исхода очередного шага от предыстории процесса, следует откорректировать постановку задачи, увеличить число состояний так, чтобы добиться “марковости” процесса.

Завершить формализованное описание задачи полезно разработкой графа переходов цепи Маркова за один шаг. Всякий граф состоит из вершин и дуг. Вершины обозначают состояния

системы, дуги — все возможные направления переходов из каждого состояния системы за один шаг. Вершины обозначают кружками, дуги — стрелками. Если система в результате одного шага способна оставаться в данном состоянии, это обозначается стрелкой, выходящей из соответствующего кружка и входящей в него же. Рядом со стрелками записываются вероятности соответствующих переходов системы.

В качестве примера на рис. 5.1, 5.2 показаны графы переходов цепи Маркова для примера 5.1, 5.5 соответственно.

4. Разработать матрицы перехода $\|P_{ij}^{(k)}\|$ для всех n шагов и, при необходимости, матрицы ущерба $\|a_{ij}\|$. Заполнять эти матрицы целесообразно, используя граф перехода.

В зависимости от сложности процесса, целей, замысла моделирования для определения численных значений параметров могут потребоваться специальные блоки.

5. Определить значения исходных данных.

Моделирование осуществляется на ЭВМ. Моделирование однородных цепей Маркова с невозстанавливаемым ущербом для системы с двумя-четырьмя состояниями может осуществляться с использованием средств малой механизации расчетов.

Глава 6. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМЫХ ПРОЦЕССОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДОВ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

§ 6.1. ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДОВ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ПРИ УПРАВЛЕНИИ

6.1.1. Область применения методов

В оперативно-тактической (тактико-специальной) области многие управляемые процессы являются процессами массового обслуживания — случайными процессами со счетным числом состояний и непрерывным временем переходов, которые совершаются в системах массового обслуживания.

Каждая система массового обслуживания (СМО) состоит из одного или нескольких каналов (механизмов, устройств, комплексов) обслуживания. В качестве таких каналов могут выступать зенитные установки кораблей, противолодочные комплексы, доки, операторы штабов, хирурги госпиталей и т. д. В систему поступает поток заявок на обслуживание. Заявками могут быть средства воздушного нападения, подводные лодки противника, корабли, нуждающиеся в ремонте, донесения от сил в море, раненые, нуждающиеся в лечении, и т. д. Третьим обязательным элементом системы массового обслуживания является очередь заявок на обслуживания с ее дисциплиной ожидания заявками обслуживания (дисциплиной очереди^{*}). Невозможно перечислить все случаи, когда объективное обоснование принимаемых решений можно осуществить, только применяя методы теории массового обслуживания. Представление о многообразии таких ситуаций дают следующие примеры.

1. Отражение ударов средств воздушного нападения противника. Целями моделирования при этом могут быть обоснование построения сил и средств ПВО, их распределения по атакующим

* Дисциплина ожидания может предусматривать отсутствие очереди (см. п. 6.1.2).

объектам, организации взаимодействия сил и средств ПВО, прогнозирования способов действий противника.

2. Поиск и поражение подводных лодок противника при их выходе из баз, прохождении рубежей, маневрировании в районе. Целями моделирования могут быть обоснование способов действий противолодочных сил, прогнозирования способов действий противника.

3. Функционирование подразделений органа управления на различных этапах выполнения поставленной задачи. Целями моделирования могут быть обоснование состава подразделений органа управления, обеспечения их техническими средствами управления, методов работы при управлении силами с точки зрения динамики прохождения информации состояния и управления в органе управления.

4. Связь в направлениях море—берег и берег—море. Возможные цели моделирования — обоснование структуры систем связи, способов связи, влияния связи на эффективность действия сил, прогнозирования мероприятий противника, направленных на нарушение связи или(и) получение разведывательной информации.

5. Функционирование пунктов базирования корабельных авиационных и других соединений. Математическое моделирование используется для обоснования структуры и организации функционирования различных элементов таких пунктов: причалов, взлетно-посадочных полос, различных систем восстановления боеспособности кораблей, самолетов, их оружия и технических средств, обслуживания личного состава.

6. Циклическое использование сил в течение заданного времени (переходы кораблей в заданные районы, выполнение задач в районах, возвращение в пункты базирования, восстановление боеспособности, новый переход в заданный район и т. д.). Математическое моделирование может использоваться для обоснования организации применения сил в заданных условиях обстановки (с учетом состава сил, возможностей пунктов базирования, расположения районов), рациональных коэффициентов оперативного напряжения и использования сил.

Возможная область применения рассматриваемых методов как при подготовке и в ходе боев, операций, управления повседневными действиями сил, так и в научно-исследовательской работе, направленной на совершенствование сил, средств флота, способов их применения, очень широка.

Идеи и приемы моделирования процессов массового обслуживания используются для моделирования многих других классов случайных процессов со счетным числом состояний и непрерывным временем переходов: поиска объектов в районе, слежения за ними и их поражения; применения носителей (групп носителей) артиллерийского оружия; функционирования технических систем для оценки их надежности и т. д.

6.1.2. Особенности опертивно-тактической постановки задачи. Классификация систем массового обслуживания

Существует много классов систем массового обслуживания. СМО каждого класса обладает свойствами как общими для всех СМО (см. п. 6.1.1), так и присущими только данному классу. Методы математического моделирования СМО различных классов обладают особенностями. Поэтому опертивно-тактическая постановка задачи для разработки математической модели должна содержать сведения, позволяющие выявить факт наличия случайного процесса массового обслуживания* и определить класс СМО. С точки зрения математического моделирования СМО

* Существуют и регулярные (неслучайные) процессы массового обслуживания, которые здесь не рассматриваются.

различаются по особенностям трех их элементов: потока заявок, каналов обслуживания, очереди с ее дисциплиной.

По потоку заявок СМО отличаются друг от друга законами распределения числа заявок, поступающих в систему за заданное время t , законами распределения промежутка времени между поступлениями в систему очередных заявок.

Поток заявок в СМО может быть стационарным и нестационарным*. В СМО со стационарным потоком заявок интенсивность (плотность) этого потока не меняется со временем, а в нестационарных является функцией времени. Интенсивность потока заявок измеряется математическим ожиданием числа заявок, поступающих в единицу времени.

В замкнутых СМО обслуживается ограниченное число потребителей. Обслуженная заявка через некоторое время вновь возвращается на обслуживание. В разомкнутых СМО поток поступающих на обслуживание заявок практически нескончаем. Например, если судоремонтный завод обслуживает только корабли одного соединения, имеет место замкнутая СМО. Если же на этот завод могут направляться для ремонта корабли многих соединений и суда различных ведомств, такая СМО будет близка к разомкнутой.

По каналам обслуживания различают СМО одно- и многоканальные, СМО с каналами одинаковой и различной производительности. Характеристикой каналов, как уже указывалось ранее, является закон распределения времени обслуживания каналами заявок.

Существуют также системы, у которых каналы могут выходить из строя. В этом случае СМО еще подразделяются на системы с восстановлением и без восстановления вышедших из строя каналов, т. е. на системы с теми или другими законами распределения времени непрерывной (до выхода из строя) работы каналов и времени их восстановления. Например, вычислительные механизмы вычислительного бюро могут выходить из строя и ремонтироваться (восстанавливаться). Зенитные установки системы ПВО могут прекращать огонь ввиду израсходования боезапаса. При этом, если боезапас может быть пополнен еще во время удара противника, имеет место СМО с выходом каналов из строя и их восстановлением. Если же пополнение боезапаса возможно только после окончания удара противника, система ПВО выступает как система с выходом каналов из строя без их восстановления.

По дисциплине ожидания заявками обслуживания различают следующие виды СМО:

Системы с отказами. В таких системах заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, получает “отказ” и покидает систему необслуженной. Примером подобной СМО может служить система ПВО, вооруженная такими зенитными установками, у которых время, необходимое для переноса огня, больше, чем время пролета воздушной цели через зону обстрела установки.

Системы с бесконечным (неограниченным) ожиданием. Заявка, нашедшая все каналы занятыми, становится в очередь и будет сколь угодно долго ожидать освобождения одного из каналов. Примером такой СМО является система судоремонта. Подлежащие ремонту корабли будут обязательно ожидать ремонта.

Системы смешанного типа. В системах смешанного типа накладываются ограничения либо на длину очереди, либо на время пребывания заявки в очереди, либо на время пребывания заявки в системе.

* Следует различать стационарный поток заявок и стационарный (установившийся) режим функционирования СМО (см. § 6.4).

В качестве примера СМО с ограничением на длину очереди можно привести порт с ограниченным числом мест, где прибывающие для разгрузки суда могут ожидать начала разгрузки. Если все причалы для обработки судов и все места ожидания судами начала обработки будут заняты, очередное судно потребуется направить в другой порт (в данном порту оно получит “отказ”).

Если поступающие на штабной пост донесения имеют ограниченный срок годности (например, прибытие нового донесения разведчика о противнике исключает необходимость обработки донесений, поступивших от этого разведчика ранее и ожидавших обработки), то такой штабной пост может интерпретироваться как СМО с ограничением на время пребывания заявки в очереди.

Станция пеленгования радиопередач противника является примером СМО с ограничением на время пребывания заявки в системе: обслуживание заявки (пеленгование радиопередачи противника) может быть прервано ввиду ухода заявки из системы до окончания ее обслуживания (окончания ведения противником радиопередачи до завершения пеленгования).

Системы с приоритетом. В СМО с абсолютным приоритетом при поступлении заявки более высокого ранга немедленно освобождается один из каналов, занятых обслуживанием заявок более низких рангов (если обслуживанием были заняты все каналы). Например, с поступлением на штабной пост донесения высокой степени срочности обработки может быть прервана обработка одного из донесений меньшей степени срочности. Выход из строя канала обслуживания и последующий ввод его в строй могут интерпретироваться как поступление в СМО заявки более высокого ранга и ее обслуживание.

В СМО с относительным приоритетом поступившая в систему заявка более высокого ранга ожидает освобождения одного из каналов (если все каналы были заняты), после чего вне очереди поступает на обслуживание. Например, вне очереди (с освобождением одного из доков) могут ставиться на докование корабли некоторых классов (типов) или аварийные корабли.

С точки зрения приоритета в обслуживании заявки могут делиться на ранги. Заявки первого ранга имеют преимущество в обслуживании перед заявками второго и всех последующих рангов; заявки второго ранга — перед заявками третьего и последующих рангов и т. д.

Выше рассматривались случаи, когда заявка все необходимое ей обслуживание получает в одной СМО. Между тем в очень большом числе реальных ситуаций заявка, чтобы быть обслуженной, должна последовательно пройти несколько систем массового обслуживания. В этом случае говорят о многофазных системах.

Для того, кто изучает закономерности динамики прохождения информации в органе управления, он предстает как многофазная СМО. Поступающие в орган управления донесения превращаются в команды управления, как правило, после последовательного прохождения нескольких отделов органа.

Другим примером многофазной СМО является система ПВО, состоящая из нескольких зон, которые должны последовательно преодолевать средства воздушного нападения.

Существует много классов многофазных СМО. Ниже будут рассмотрены методы разработки математических моделей некоторых из них, наиболее часто встречающихся в оперативно-тактической области и типичных с точки зрения методов их математического моделирования — системы со случайными “траекториями” заявок, замкнутые многофазные системы.

Условимся в дальнейшем, что в соответствии со сложившейся традицией, когда это не будет приводить к недоразумениям, однофазные системы называть просто системами массового обслуживания в отличие от многофазных систем, для которых определение “многофазные” будем сохранять обязательно.

Таковы особенности основных классов СМО. Чтобы разработать математическую модель функционирования СМО, необходимо определить, к какому классу она принадлежит. Поэтому оперативно-тактическая постановка задачи должна помимо указаний о цели функционирования СМО и цели моделирования содержать сведения, позволяющие классифицировать СМО.

Отнесение реального процесса к тому или другому классу процессов массового обслуживания связано, как правило, с необходимостью принятия ряда допущений. Например, интерпретация системы ПВО как системы массового обслуживания с отказами требует допущения о невозможности переноса зенитным комплексом огня с пораженной цели на другую, если цель уже проходит сектор обстрела комплекса и т. д.

В процессе постановки задачи и ее уяснения специалист по исследованию операций должен активно выявлять факторы, позволяющие классифицировать процесс массового обслуживания и оценить возможность раскрытия необходимых закономерностей функционирования реальной системы с учетом принимаемых допущений.

Следует также иметь в виду, что оперативно-тактическая постановка задачи, осуществленная командиром (офицером-оператором), не будет содержать указания о законах распределения случайных величин (числе поступающих заявок, времени обслуживания и др.) и, тем более, о численном значении соответствующих параметров. Как правило, эта информация будет черпаться специалистом по исследованию операций из статистических данных (см. гл. 8). Однако в большом числе случаев при постановке задачи могут быть даны косвенные сведения для определения вида необходимых законов распределения случайных величин [6].

В заключение отметим следующее существенное обстоятельство. В отличие от дискретных цепей Маркова разработка моделей функционирования однофазных СМО не требует каждый раз определять, что есть система. Системой в данном случае всегда являются каналы обслуживания и поступившие на обслуживание заявки. Различные состояния системы всегда отличаются числом каналов, занятых обслуживанием, и числом заявок, ожидающих обслуживания (когда все каналы заняты, а система допускает наличие очереди заявок).

Что же касается многофазных СМО, то постановка задачи должна содержать сведения, позволяющие определить: что есть система; каковы состояния системы (фазы); возможные направления переходов системы за время dt ; класс каждой из фаз как системы массового обслуживания.

6.1.3. Показатели эффективности различных систем массового обслуживания

Показатели эффективности различных СМО зависят от целей их функционирования. Выбор того или иного показателя эффективности зависит также от целей моделирования. Однако в очень большом числе случаев в качестве показателей эффективности выступают либо же для вычисления показателей эффективности действия сил используются следующие параметры:

а) для однофазных систем

— СМО с отказами — вероятность того, что очередная заявка будет обслужена (пропускная способность системы);

— СМО с ожиданием — математическое ожидание времени пребывания заявки в системе, математическое ожидание длины очереди или времени ожидания заявкой обслуживания;

— СМО смешанного типа — вероятность того, что поступившая заявка будет обслужена, математическое ожидание длины очереди или времени ожидания заявкой обслуживания.

Дополнительными показателями эффективности СМО могут быть:

— математическое ожидание числа занятых или простаивающих каналов;
— математическое ожидание числа заявок, находящихся в системе;
— вероятность того, что очередная поступившая заявка будет обслужена без очереди либо же встретит в очереди не более заданного числа заявок

и т. д.

б) для многофазных систем:

— вероятность обслуживания заявки;
— математическое ожидание времени пребывания заявки в системе;
— вероятность того, что время пребывания заявки в системе не превысит заданного;
— математическое ожидание числа заявок, находящихся в некоторых фазах системы.

В качестве дополнительных показателей эффективности многофазных систем часто выступают параметры, характеризующие каждую из фаз как систему массового обслуживания.

Процессы массового обслуживания протекают во времени. Поэтому и показатели эффективности СМО вычисляются для некоторых моментов времени.

§ 6.2. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОТОКА ЗАЯВОК И ВРЕМЕНИ ОБСЛУЖИВАНИЯ ПРИ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССАХ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Обширным классом систем массового обслуживания, математические модели которых имеют важное прикладное значение в оперативно-тактической области, являются системы с марковским характером протекающих в них случайных процессов. Ниже будут изложены методы математического моделирования именно таких процессов. Предварительно, однако, рассмотрим вероятностные характеристики потоков заявок и времени обслуживания в системах этого класса.

Допустим, что в СМО поступает поток заявок, обладающий свойствами стационарности, ординарности и отсутствия последействия. Поток заявок называется *стационарным*, если математическое ожидание числа заявок, поступающих в систему за некоторый промежуток времени, зависит только от величины промежутка и не зависит от того, как далеко от начала процесса отстоит этот промежуток. Поток заявок называется *ординарным*, если вероятность поступления за бесконечно малый промежуток времени dt двух и более заявок является бесконечно малой величиной высшего порядка малости по сравнению с dt : $R_2(t, t + dt) = O(dt)$. Поток заявок называется *поток без последействия*, если для любых непересекающихся промежутков времени число заявок, поступающих за один из них, не зависит от того, сколько заявок поступило за другие промежутки времени.

Определим для этих условий вероятность P_m того, что за время t в систему поступит ровно m заявок.

Обозначим через λ математическое ожидание числа заявок, поступающих в систему за единицу времени. Параметр λ называют характеристикой интенсивности (плотности) потока заявок.

Разобьем промежуток времени t на n элементарных промежутков времени $dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta t = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t}{n}$.

При ординарном потоке и n , стремящемся к бесконечности, можно с точностью до бесконечно малых высших порядков малости считать, что за время dt в систему поступит одна заявка или не поступит ни одной. Если обозначить вероятности этих событий через p_1 и p_0 , получим, что $p_1 + p_0 = 1$.

При стационарном потоке математическое ожидание числа заявок, поступающих за время dt , равно $\bar{m}_{dt} = \lambda dt$. С другой стороны, математическое ожидание случайной величины — числа заявок, поступающих за время dt , — определяется по формуле

$$\bar{m}_{dt} = 1 \cdot p_1 + 0p_0.$$

Отсюда

$$p_1 = \lambda dt, \quad (6.2.1)$$

т. е. вероятность поступления в систему заявки за элементарный промежуток времени dt численно равна математическому ожиданию числа заявок, поступающих в систему за этот промежуток. Соответственно

$$p_0 = 1 - p_1 = 1 - \lambda dt. \quad (6.2.2)$$

Формулы (6.2.1) и (6.2.2) часто используются в дальнейшем, поэтому их следует запомнить.

Так как рассматривается поток без последствия, то поступления заявок в различные элементарные промежутки времени есть события независимые. Поэтому вероятность поступления m заявок за n элементарных промежутков времени определится по формуле биномиального закона

$$C_n^m p_1^m (1 - p_1)^{n-m} = C_n^m p_1^m p_0^{n-m} = C_n^m \left(\lambda \frac{t}{n} \right)^m \left(1 - \lambda \frac{t}{n} \right)^{n-m}.$$

Искомая вероятность P_m поступления равно m заявок найдется из условия $n \rightarrow \infty$:

$$P_m = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n^m \left(\frac{\lambda t}{n} \right)^m \left(1 - \frac{\lambda t}{n} \right)^{n-m}.$$

Преобразовав это выражение, получим

$$P_m = \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t} = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \quad (6.2.3)$$

где a — математическое ожидание числа заявок, поступающих в систему за время t .

Таким образом, если поток заявок обладает свойствами стационарности, ординарности и отсутствия последствия, то число поступающих в систему заявок подчиняется закону Пуассона. Поток, обладающий тремя указанными выше свойствами, называется *простейшим*.

Если поток заявок ординарен, не обладает последствием, но не стационарен, то говорят о нестационарном пуассоновском потоке. Для такого потока

$$a = \int_{\tau}^{\tau+t} \lambda(t) dt, \quad (6.2.4)$$

где $\lambda(t)$ — интенсивность потока заявок на момент времени t .

Обратимся вновь к простейшему потоку. Определим для такого потока закон распределения случайной величины — промежутка времени T между поступлениями в СМО очередных заявок.

Вначале найдем функцию распределения этой случайной величины

$$F(t) = P(T < t),$$

т. е. вероятность того, что за время t в систему поступит хотя бы одна заявка. Для этого найдем вероятность противоположного события — непоступления в СМО за время t ни одной заявки. При пуассоновском потоке заявок эта вероятность равна

$$\frac{a^0}{0!} e^{-a} = e^{-a} = e^{-\lambda t}.$$

Поэтому функция распределения величины T равна

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad (6.2.5)$$

а плотность распределения —

$$f(t) = F'(t) = \lambda e^{-\lambda t}. \quad (6.2.6)$$

Математическое ожидание промежутка времени между поступлениями соседних заявок определится из выражения

$$\bar{t}_{\Pi} = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \int_0^{\infty} t \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}. \quad (6.2.7)$$

Полученный закон распределения называется показательным и обладает следующим отличительным свойством: как бы долго ни длился промежуток времени, распределенный по показательному закону, закон распределения оставшейся части промежутка является также показательным. Например, при показательном законе вероятность поступления в СМО за время t хотя бы одной заявки равна $P(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ вне зависимости от того, когда в систему поступила предыдущая заявка*.

Итак, при простейшем потоке заявок число поступающих за время t заявок подчиняется закону Пуассона, а распределение промежутка времени между поступлениями очередных заявок — показательному закону.

Рассмотрим вероятностные характеристики потока обслуживания заявок. Обозначим через μ интенсивность (плотность) потока обслуживаний заявок одним каналом — математическое ожидание числа заявок, обслуживаемых одним каналом в единицу времени при условии, что канал не будет простаивать.

При простейшем потоке обслуживаний вероятностные характеристики времени обслуживания заявок одним каналом могут быть определены с помощью приемов, использованных для нахождения вероятностных характеристик промежутков времени между поступлениями в СМО соседних заявок. Функция распределения времени обслуживания при этом будет равна

$$F_{\text{обсл}}(t) = 1 - e^{-\mu t}, \quad (6.2.8)$$

плотность распределения —

$$f_{\text{обсл}}(t) = \mu e^{-\mu t}, \quad (6.2.9)$$

математическое ожидание времени обслуживания —

* Подробно о свойствах показательного закона с учетом особенностей оперативно-тактической области см. в [6].

$$\bar{\tau}_{\text{обсл}} = \frac{1}{\mu}. \quad (6.2.10)$$

Вероятность окончания обслуживания заявки одним каналом (вероятность освобождения канала) за бесконечно малый промежуток времени dt с точностью до бесконечно малых высшего порядка малости численно равна

$$p_{\text{обсл}} = \mu dt, \quad (6.2.11)$$

а вероятность того, что обслуживание за время dt не будет закончено, составит

$$p_{\text{обсл}0} = 1 - \mu dt.$$

Вероятность того, что за время dt будет обслужена хотя бы одна заявка (освободится хотя бы один канал из k занятых обслуживанием), находится из выражения

$$R_{\text{обсл}} = 1 - (1 - \mu dt)^k.$$

Разлагая $(1 - \mu dt)^k$ в ряд по степеням k и пренебрегая величинами высшего порядка малости, получим

$$R_{\text{обсл}} = k\mu dt.$$

Таким образом, искомая вероятность есть вероятность суммы несовместных событий. Это обстоятельство означает: за время dt может освободиться один либо не освободиться ни одного из k каналов. Вероятность освобождения хотя бы одного канала равна вероятности освобождения ровно одного канала (с точностью до бесконечно малых высшего порядка). Вероятность того, что за время dt не будет обслужено ни одной заявки (не освободится ни один канал) равна

$$R_{\text{обсл}0} = 1 - R_{\text{обсл}} = 1 - k\mu dt.$$

Подчеркнем, что все полученные выше результаты касаются простейших потоков. Своим названием эти потоки обязаны тому обстоятельству, что при простейших потоках заявок и обслуживаний модели СМО имеют наиболее простую структуру. Однако простейшие потоки имеют важное прикладное значение не только по этой причине, а в силу ряда их свойств. Так, при суперпозиции (взаимном наложении) достаточно большого числа потоков, обладающих последствием (но стационарных и ординарных), получается суммарный поток, близкий к простейшему. Необходимо лишь, чтобы складываемые потоки были сравнимы по интенсивности.

Сходимость суммарного потока к простейшему осуществляется очень быстро. Практически сложение четырех-пяти ординарных стационарных независимых потоков дает поток, близкий к простейшему. При суммировании слабо зависимых потоков суммарный поток будет также близок к простейшему (при достаточно большом числе складываемых потоков). В случае же сложения простейших потоков суммарный поток является тоже простейшим.

При сложении N потоков интенсивность суммарного потока равна

$$\lambda = \sum_{i=1}^N \lambda_i,$$

где λ_i — интенсивность i -го потока событий. При этом λ является единственной исходной характеристикой суммарного потока, необходимой для получения его других (вероятностных) характеристик.

На практике потоки событий могут не только складываться, но и в силу различных случайных причин разрежаться. Например, таким “разреженным” является поток самолетов, преодолевших систему ПВО, поток радиопередач, не искаженных помехами противника, и т. д.

Пусть каждое событие с вероятностью p исключается из потока вне зависимости от того, исключены из потока другие события или нет. Тогда интенсивность разреженного потока равна $\lambda_p = \lambda p$, где λ — интенсивность исходного потока. При этом, если исходный поток простейший, то и разреженный поток будет простейшим. Если же исходный поток непростейший, то уже четырех-пятикратное разрежение (при $p < 0,8$) дает поток, близкий к простейшему.

По указанным причинам в оперативно-тактической области в большом числе случаев исследуемые потоки событий могут быть либо простейшими, либо близкими к простейшим. В качестве примера можно привести поток целей, пересекающих позицию подводной лодки (рис. 6.1), поток донесений, поступающих в штаб от сил, действующих на различных направлениях в условиях радиопомех противника, поток кораблей различных типов и “возрастов”, поступающих на ремонт, и т. д.

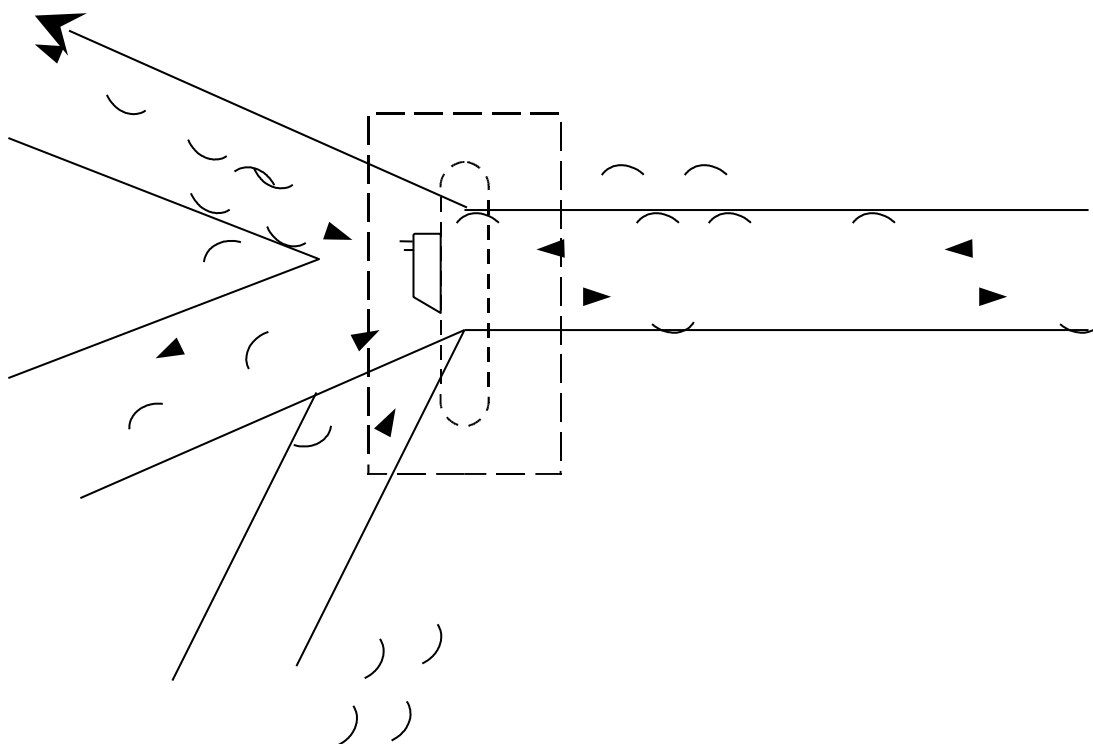


Рис. 6.1

В заключение заметим, что при пуассоновских потоках заявок и обслуживаний процесс массового обслуживания является марковским.

§ 6.3. ОБЩИЕ МЕТОДЫ РАЗРАБОТКИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СМО

Общими названы достаточно универсальные методы моделирования классов СМО с марковским характером протекающих в них процессов, функционирующие как в стационарном, так и в нестационарном режимах. Эти методы предполагают обязательное использование ЭВМ для моделирования и дают возможность с высокой оперативностью готовить необходимое командире математическое обеспечение. К числу частных отнесены методы, позволяющие моделировать функционирование “марковских” СМО лишь в стационарном режиме (см. § 6.4). Во всех случаях для определения показателей эффективности СМО необходимо знать распределение вероятностей состояний системы. Это обстоятельство определяет порядок разработки моделей СМО и процедуры их реализации.

6.3.1. Модели СМО с ограничением на длину очереди и СМО с отказами. Рациональная последовательность разработки процедур для моделирования на ЭВМ систем с марковскими процессами массового обслуживания. СМО с ограничением на длину очереди

Постановка задачи*. Система массового обслуживания имеет n однотипных каналов. В систему поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ . Поток обслуживания заявок также простейший с интенсивностью μ . Заявка, нашедшая все каналы занятыми, становится в очередь и ожидает обслуживания. Однако если в очереди уже имеется m заявок, то вновь поступившая в СМО заявка получит немедленный отказ. Заявки из очереди поступают на обслуживание в порядке их поступления в СМО.

Цели функционирования СМО могут быть различными:

- обслужить заявку, которая в потоке других заявок поступит в систему в момент времени t ;
 - обслужить максимальное число заявок, поступающих в систему в промежутке времени $[0, t]$
- и т. д.

Цель моделирования — определить зависимость эффективности системы от числа каналов и от интенсивности потока заявок и обслуживаний (для обоснования рационального режима функционирования или рациональной структуры СМО).

Разработка математической модели. Показатель эффективности функционирования СМО определяется в соответствии с принципом Колмогорова.

Для первой из рассмотренных выше целей функционирования СМО показателем эффективности является вероятность обслуживания поступившей в момент времени t заявки:

$$\mathcal{E}(t) = P_{\text{обсл}}(t).$$

Во втором случае показателем эффективности является математическое ожидание числа заявок, обслуживаемых за промежуток времени $[0, t]$:

* По методическим соображениям здесь и далее даются не оперативно-тактические описания каких-либо конкретных процессов массового обслуживания, а общие постановки задач для разработки моделей некоторых классов СМО. Оперативно-тактические описания ряда реальных процессов массового обслуживания приводятся в [4, 6].

$$\Xi(t) = \lambda \int_0^t P_{\text{обсл.}}(t) dt.$$

Можно показать, что и во многих других случаях основным показателем эффективности рассматриваемого класса СМО является (либо для вычисления показателя используется) вероятность $P_{\text{обсл.}}(t)$. Примем эту вероятность в качестве основного показателя эффективности. В качестве дополнительных показателей эффективности выступают математическое ожидание числа заявок, ожидающих обслуживания (находящихся в очереди)*, математическое ожидание времени пребывания заявки в очереди, математическое ожидание числа каналов, занятых обслуживанием (или простаивающих) в заданный момент времени t .

Обозначим:

$A_k (k = 0, 1, 2, \dots, n)$ — состояния системы, при которых n каналов заняты обслуживанием, а очередь заявок отсутствует; $A_{n+s} (s = 1, 2, \dots, m)$ — состояния системы, при которых все n каналов заняты обслуживанием и в очереди находятся s заявок; $P_k(t), P_{n+s}(t)$ — вероятности нахождения СМО в состояниях A_k или A_{n+s} соответственно на момент времени t .

Так как нахождение системы в одном из состояний $A_k (k = 0, 1, 2, \dots, n), A_{n+s} (s = 1, 2, \dots, m)$ составляет полную группу событий, то

$$\sum_{k=0}^n P_k(t) + \sum_{s=1}^m P_{n+s}(t) = 1.$$

Поступившая в СМО заявка получает отказ, если система находится в состоянии A_{n+m} , т. е. заняты все n каналов и все m мест для ожидания в очереди. Поэтому показатель эффективности СМО равен

$$P_{\text{обсл.}}(t) = 1 - P_{n+m}(t). \quad (6.3.1)$$

Найдем выражение для дополнительных показателей эффективности. Математическое ожидание числа заявок в очереди (числа заявок, ожидающих обслуживания) равно

$$\bar{s}(t) = \sum_{s=1}^m s P_{n+s}(t). \quad (6.3.2)$$

Заметим, что заявки в очереди отделены друг от друга средними временными интервалами их поступления в систему, равными $\bar{\tau}_n = 1/\lambda$. Поэтому при длине очереди $\bar{s}(t)$ математическое ожидание времени пребывания заявки в очереди находится из выражения

$$\bar{\tau}_{\text{ож.}}(t) = \bar{s}(t) \bar{\tau}_n = \frac{\bar{s}(t)}{\lambda}. \quad (6.3.3)$$

Отсюда можно получить

$$\bar{s}(t) = \lambda \bar{\tau}_{\text{ож.}}(t). \quad (6.3.4)$$

Математическое ожидание числа каналов, занятых обслуживанием заявок, равно

* Этот показатель часто называют также математическим ожиданием длины очереди.

$$\bar{k}_{\text{обсл}}(t) = \sum_{k=0}^n kP_k(t) + n \sum_{s=1}^m P_{n+s}(t), \quad (6.3.5)$$

а числа простаивающих каналов

$$\bar{k}_{\text{пр}}(t) = k - k_{\text{обсл}}(t). \quad (6.3.6)$$

Как видно, определение показателей эффективности требует умения находить распределение вероятностей $P_k(t), P_{n+s}(t)$ системы.

Пусть на момент времени t распределение вероятностей равно $P_0(t), P_1(t), \dots, P_k(t), \dots, P_n(t), \dots, P_{n+s}(t), \dots, P_{n+m}(t)$, а условная вероятность перехода системы из состояния A_i в состояние A_k за время τ составляет $w_{ik}(\tau)$. Тогда вероятность нахождения системы на момент времени $t + \tau$ в состоянии A_k может быть найдена по формуле полной вероятности

$$P_k(t + \tau) = \sum_{i=1}^n P_i(t)w_{ik}(\tau) + \sum_{s=1}^m P_{n+s}(t)w_{n+s,k}(\tau). \quad (6.3.7)$$

Это выражение называется формулой Колмогорова.

Рассмотрим случай бесконечно малого τ , т. е. $\tau = dt$. За время dt (при $dt \rightarrow 0$) в силу ординарности процесса система может или перейти в одно из смежных состояний, или остаться в прежнем состоянии. Поэтому оказаться на момент времени $t + dt$ в состоянии A_k система может только при одном из следующих условий:

— ИЛИ на момент времени t система находилась в состоянии A_{k-1} , И за время dt в систему поступила заявка;

— ИЛИ на момент времени t система находилась в состоянии A_{k+1} , И за время dt освободился канал;

— ИЛИ на момент времени t система находилась в состоянии A_k , И за время dt в систему не поступила заявка И не освободился канал.

Вероятность поступления в систему заявки за время dt равняется λdt , вероятность освобождения одного из каналов равна μdt (см. п. 6.3.1). Вероятность того, что в систему не поступит заявка и не освободится канал равна

$$(1 - \lambda dt)(1 - \mu dt) = 1 - \lambda dt - \mu dt + \lambda \mu (dt)^2$$

или, с точностью до бесконечно малых высших порядков,

$$1 - \lambda dt - \mu dt.$$

Отсюда вероятность нахождения системы в момент времени $t + dt$ в состоянии A_k может быть определена по формуле полной вероятности

$$P_k(t + dt) = P_{k-1}(t)\lambda dt + P_k(t)[1 - \lambda dt - \mu dt] + \\ + P_{k+1}(t)(k + 1)\mu dt, 1 \leq k < n.$$

Преобразуем полученное выражение:

$= 1, 2, \dots, m$) состояний системы на момент времени $t = 0$ начала процесса обслуживания, выявляются при оценке обстановки.

Современное состояние ЭВТ исключает необходимость ручной разработки системы дифференциальных уравнений. Однако, прежде чем дать описание стандартной процедуры составления и решения системы дифференциальных уравнений на ЭВМ, рассмотрим формализованный способ составления системы по ее графу — графическому изображению возможных состояний системы и ее возможных переходов из состояния в состояние.

Граф СМО с ограничением на длину очереди приведен на рис. 6.2. Кружками на этом графе показаны возможные состояния системы, а стрелками — возможные переходы системы из состояния в состояние за бесконечно малый промежуток времени dt . Рядом со стрелками приведены интенсивности переходов.

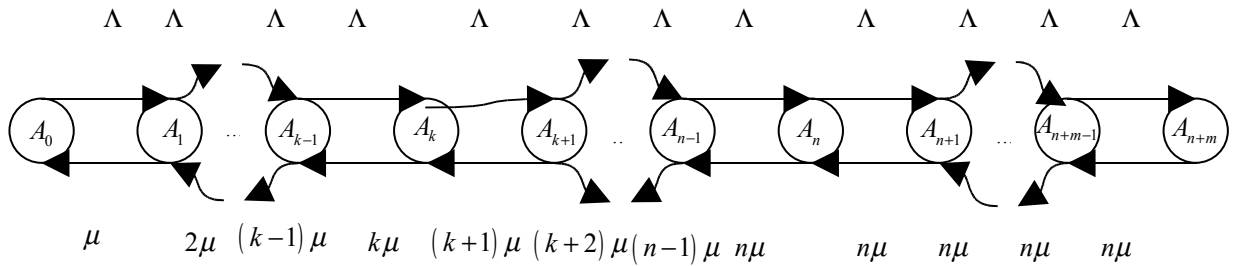


Рис. 6.2

Правило составления уравнения для производной вероятности перехода по времени (т. е. составления правых частей дифференциальных уравнений системы) заключается в следующем. Правая часть имеет столько членов, сколько стрелок связано с данным кружком. Для нахождения этих членов необходимо составить произведения интенсивностей переходов на вероятность состояния до перехода для всех стрелок, входящих и выходящих из кружка. Если стрелка направлена в данный кружок, соответствующему произведению приписывается знак “плюс”, если стрелка направлена из кружка — знак “минус”.

$A \backslash A$	A_0	A_1	...	A_{k-1}	A_k	A_{k+1}	...	A_{n-1}	A_n	A_{n+1}	...	A_{n+m-1}	A_{n+m}
A_0	0	λ	...	0	0	0	...	0	0	0	...	0	0
A_1	μ	0	...	0	0	0	...	0	0	0	...	0	0
...
A_{k-1}	0	0	...	0	λ	0	...	0	0	0	...	0	0
A_k	0	0	...	$k\mu$	0	λ	...	0	0	0	...	0	0
A_{k+1}	0	0	...	0	$(k+1)\mu$	0	...	0	0	0	...	0	0
...
A_{n-1}	0	0	...	0	0	0	...	0	λ	0	...	0	0
A_n	0	0	...	0	0	0	...	$n\mu$	0	λ	...	0	0

A_{n+1}	0	0	...	0	0	0	...	0	$n\mu$	0	...	0	0
...
A_{n+m-1}	0	0	...	0	0	0	...	0	0	0	...	0	λ
A_{n+m}	0	0	...	0	0	0	...	0	0	0	...	$n\mu$	0

Матрица 6.1

Однако для ЭВМ более рациональна процедура составления системы дифференциальных уравнений с помощью матрицы интенсивностей переходов системы, заполняемой предварительно на основании графа переходов* (см. матрицу 6.1 интенсивностей переходов системы из состояния в состояние за время dt для СМО с ограничением на длину очереди).

Алгоритм составления правых частей дифференциальных уравнений системы с помощью матрицы выглядит следующим образом. Чтобы составить k -е уравнение системы, вначале просматривается k -й столбец матрицы. Положительные интенсивности d_{ik} столбца умножаются на вероятности $P_i(t)$ соответствующих состояний системы. Этим произведениям приписывается знак “плюс”. Затем просматривается k -я строка. Каждая положительная интенсивность этой строки умножается на вероятность $P_k(t)$. Этим произведениям приписывается знак “минус”. Полученные произведения с их знаками и составляют правую часть уравнения.

Стандартная процедура предусматривает далее интегрирование полученной системы уравнений одним из численных методов (например, Рунге-Кутты) для заданных начальных условий.

Для вычисления показателей эффективности также разрабатываются стандартные процедуры. Наличие таких процедур исключает необходимость каждый раз составлять и программировать систему дифференциальных уравнений — модель функционирования СМО и формульных зависимостей для определения показателей эффективности.

СМО с отказами

Постановка задачи. Система массового обслуживания имеет n однотипных каналов. В систему поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ . Поток обслуживаний простейший с интенсивностью μ . Заявка, нашедшая все каналы занятыми, получает отказ и покидает систему необслуженной.

Рассмотрим часто встречающиеся на практике цели функционирования СМО рассматриваемого класса: обслуживание заявки, поступившей в систему в момент времени t ; обслуживание максимального числа заявок на момент времени t функционирования системы; обслуживание максимального числа заявок, поступающих в систему за промежуток времени $[0, t]$.

Цель моделирования — определить зависимость эффективности функционирования системы от числа каналов и от интенсивностей потоков заявок и обслуживаний (для обоснования рационального режима функционирования или рациональной структуры СМО).

* Для большого класса процессов массового обслуживания, называемых процессами “гибели и размножения”, заполнение матрицы интенсивностей переходов может быть поручено ЭВМ. Граф процесса “гибели и размножения” имеет вид, показанный на рис. 6.2: все состояния вытянуты в одну цепочку, каждое из средних состояний связано прямой и обратной связью с каждым из соседних состояний, а крайние состояния — только с одним состоянием.

Разработка математической модели. Читателю предлагается убедиться, что применение принципа Колмогорова для достижения сформулированных целей функционирования СМО приводит к выводу: показателем эффективности является (либо для его вычисления используется) вероятность того, что поступившая в систему в момент времени t заявка будет обслужена.

Что же касается дополнительных показателей, то для более полного суждения об особенностях исследуемого процесса (с учетом цели моделирования) целесообразно использовать математическое ожидание числа каналов, занятых обслуживанием заявок (простаивающих каналов) на момент времени t .

Модель функционирования данной СМО разрабатывается аналогично тому, как выше была разработана модель функционирования СМО с ограничением на длину очереди. Для определения показателей эффективности могут быть использованы выражения (6.3.1), (6.3.5), (6.3.6). Следует лишь в этих выражениях положить $m = 0$.

Читателю рекомендуется, пользуясь материалами по разработке модели функционирования СМО с ограничением на длину очереди, самому разработать модель функционирования СМО с отказами. Граф функционирования СМО с отказами показан на рис. 6.3.

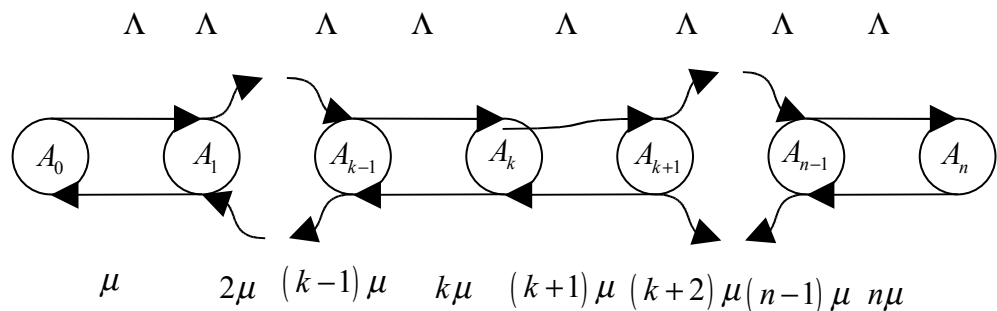


Рис. 6.3

Используя рассмотренные выше примеры разработки моделей функционирования СМО, сформулируем общие рекомендации относительно рациональной последовательности разработки таких моделей и стандартных процедур, включаемых в состав специального математического обеспечения ЭВМ. При этом будем полагать, что постановка задачи для разработки модели осуществлена в соответствии с рекомендациями п. 6.1.2.

Рекомендуемая последовательность разработки моделей и стандартных процедур:

1. Определить основной и дополнительный показатели эффективности.
2. Определить возможные состояния СМО, возможные направления переходов за бесконечно малый промежуток времени dt , интенсивности всех переходов системы.
3. Разработать граф функционирования СМО, матрицу интенсивностей переходов системы. Заметим, что разработка графа может быть отнесена к формализованному продолжению постановки задачи.
4. Разработать формульные зависимости для определения основного и дополнительного показателей эффективности.
5. Определить особенности реализации модели на ЭВМ.
6. Разработать алгоритм реализации модели на ЭВМ, разработать и отладить машинную программу. Будучи включенной в состав специального математического обеспечения, программа

позволит осуществлять моделирование процессов функционирования СМО данного вида каждый раз, как в этом возникает необходимость.

Дальнейшее описание методов разработки моделей и процедур их реализации на ЭВМ рассмотрим в изложенной выше последовательности, за исключением п. 6, так как он излагается в специальном курсе.

6.3.2. Модели СМО с бесконечным (чистым) ожиданием

Постановка задачи. Система массового обслуживания состоит из n однотипных каналов. В систему поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ . Поток обслуживания заявок также простейший с интенсивностью μ . Заявка, встретившая все каналы занятыми, становится в очередь и ожидает обслуживания. Заявки из очереди поступают на обслуживание в порядке их поступления в систему.

Цель функционирования СМО — обслужить поступающие заявки, сократив до минимума время их пребывания в системе.

Целью моделирования является определение зависимости эффективности функционирования СМО от числа каналов и от интенсивностей потоков заявок и обслуживаний для обоснования рациональной структуры и рационального режима функционирования СМО.

Разработка математической модели. 1. В соответствии с принципом Колмогорова показателем эффективности рассматриваемой СМО с бесконечным ожиданием является математическое ожидание времени пребывания заявок в системе

$$\bar{\tau}_c(t) = \bar{\tau}_{ож}(t) + \bar{\tau}_{обсл}(t),$$

где $\bar{\tau}_c(t)$, $\bar{\tau}_{ож}(t)$, $\bar{\tau}_{обсл}(t)$ — математическое ожидание соответственно времени пребывания заявки в системе, времени ожидания обслуживания (времени пребывания в очереди) и времени обслуживания заявок на момент времени t .

Если сравниваются варианты построения СМО с одинаковыми значениями $\bar{\tau}_{обсл}(t) = 1/\mu$, то в качестве показателя эффективности может быть принято математическое ожидание времени пребывания заявки в очереди $\bar{\tau}_{ож}(t)$.

В качестве дополнительных показателей эффективности рассматриваемой СМО выступают: математическое ожидание $\bar{s}(t)$ числа заявок в очереди (математическое ожидание длины очереди), а также математическое ожидание $\bar{k}_{обсл}(t)$ числа функционирующих и $\bar{k}_{пр}(t)$ — простаивающих на момент времени t каналов*.

2. Возможными состояниями системы являются: состояния $A_0, A_1, \dots, A_k, \dots, A_n$, когда $0, 1, 2, \dots, k, \dots, n$ каналов заняты обслуживанием, а очередь заявок отсутствует; состояния $A_{n+1}, A_{n+2}, \dots, A_{n+s}, \dots$, когда все n каналов заняты обслуживанием и, кроме того, соответственно $1, 2, \dots, s, \dots$ заявок ожидают обслуживания.

* Следует учитывать, что в зависимости от цели функционирования СМО $\bar{s}(t)$ может быть основным, а $\bar{\tau}_c(t)$ дополнительным показателем эффективности. Так будет, например, обстоять дело, если целью функционирования СМО является обслуживание поступающих заявок с минимальной длиной очереди.

За бесконечно малый промежуток времени dt система может перейти лишь в смежные состояния или остаться в прежнем состоянии. Интенсивность перехода из состояния с меньшим номером в состояние с большим номером (из состояния A_k в состояние A_{k+1} , из состояния A_{n+s} в состояние A_{n+s+1}) равна интенсивности поступления заявок, т. е. λ . Интенсивность переходов из состояния с большим номером в состояние с меньшим номером равняется $k\mu$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$).

3. Граф функционирования СМО с бесконечным ожиданием показан на рис. 6.4. Читателю рекомендуется с помощью графа разработать матрицу интенсивностей переходов и систему дифференциальных уравнений.

4. Разработку формульных зависимостей, необходимых для вычисления показателей эффективности, удобно осуществить с помощью графа процесса.

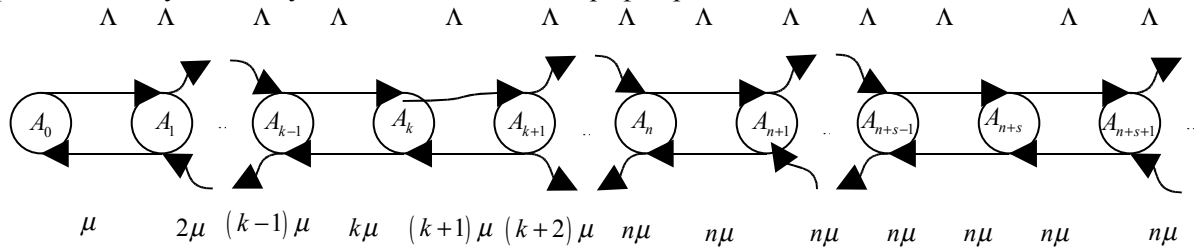


Рис. 6.4

Прежде всего определим математическое ожидание длины очереди заявок

$$\bar{s}(t) = \sum_{s=1}^{\infty} sP_{n+s}(t). \quad (6.3.9)$$

После этого математическое ожидание времени пребывания заявки в очереди будет равно

$$\bar{\tau}_{\text{ож}}(t) = \frac{\bar{s}(t)}{\lambda} = \bar{\tau} \cdot \bar{s}(t). \quad (6.3.10)$$

Отсюда можно получить

$$\bar{s}(t) = \lambda \bar{\tau}_{\text{ож}}(t).$$

Математическое ожидание времени пребывания заявки в системе составит

$$\bar{\tau}_c(t) = \frac{\bar{s}(t)}{\lambda} + \frac{1}{\mu}. \quad (6.3.11)$$

Математическое ожидание числа каналов, занятых на момент времени t обслуживанием заявок,

$$\bar{k}_{\text{обсл}}(t) = \sum_{k=0}^n kP_k(t) + n \sum_{s=1}^{\infty} P_{n+s}, \quad (6.3.12)$$

а число простаивающих каналов

$$\bar{k}_{\text{пр}}(t) = k - \bar{k}_{\text{обсл}}(t). \quad (6.3.13)$$

5. Для определения основного и дополнительных показателей эффективности разрабатываются стандартные процедуры для ЭВМ. В их основе лежит процедура составления и решения системы дифференциальных уравнений для нахождения распределения состояний системы $P_k(t), P_{n+s}(t)$.

Эти процедуры учитывают такую особенность модели, как наличие сумм с бесконечным числом слагаемых [см. формулы (6.3.9), (6.3.12)]. При определении показателей эффективности бесконечные суммы вида

$$\sum_{s=1}^{\infty} P_{n+s}(t), \sum_{s=1}^{\infty} sP_{n+s}(t)$$

заменяются на суммы вида

$$\sum_{s=1}^{m_L} P_{n+s}(t), \sum_{s=1}^{m_L} sP_{n+s}(t),$$

где m_L — номер последнего состояния системы, при котором выполняется заданная точность вычислений; L — число шагов интегрирования в заданном интервале времени $[0, t]$.

Читателю предлагается самостоятельно разработать модель СМО с ограничением на время пребывания заявок в системе и в очереди. В частности, следует доказать, что вероятность обслуживания заявки, поступившей в момент времени t , равна

$$P_{\text{обсл}}(t) = 1 - \frac{\bar{s}_{\text{отб}}(t)}{\lambda}, \quad (6.3.14)$$

где $\bar{s}_{\text{отб}}(t)$ — плотность потока заявок, покидающих систему в момент времени t ,

$$\bar{s}_{\text{поок}}(t) = \sum_{k=0}^n kv_1 P_k(t) + \sum_{s=1}^{\infty} [nv_1 + sv_2] P_{n+s}(t); \quad (6.3.15)$$

v_1, v_2 — интенсивность покидания системы обслуживаемыми заявками и заявками, ожидающими обслуживания соответственно.

Граф СМО показан на рис. 6.5.

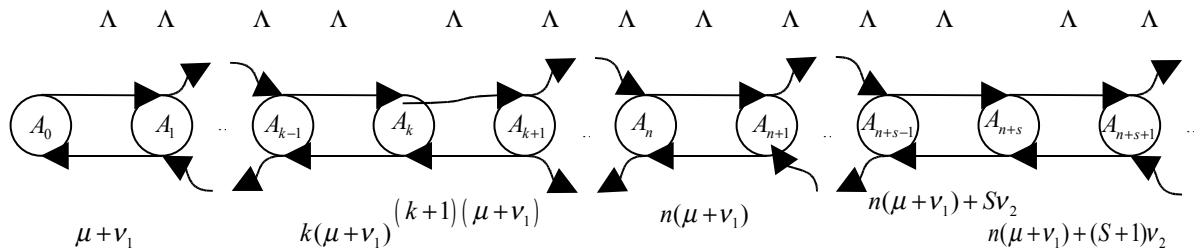


Рис. 6.5

Закончим на этом рассмотрение общих методов разработки моделей марковских процессов массового обслуживания. Знание этих методов позволит учесть и многие особенности функционирования СМО, которые ранее не учитывались ради простоты изложения. Следует также подчеркнуть, что знание распределения вероятностей $P_k(t), P_{n+s}(t)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n; s = 1, 2, \dots$) дает

возможность вычислять помимо рассмотренных выше показателей эффективности и целый ряд других вероятностных характеристик, определяющих те или иные свойства процесса.

§ 6.4. МЕТОДЫ РАЗРАБОТКИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СМО, ФУНКЦИОНИРУЮЩИХ В СТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ

Как было сказано выше, стационарным называется такой режим функционирования СМО, при котором вероятности состояний системы с течением времени не меняется. Иначе говоря, для стационарного режима должно выполняться условие

$$\left. \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} P_k(t) &= P_k = \text{const}; \\ \lim_{t \rightarrow \infty} P_{n+s}(t) &= P_{n+s} = \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (6.4.1)$$

Не все классы СМО могут иметь стационарный режим функционирования. Определяющей в этом смысле является дисциплина очереди. Стационарный режим функционирования характерен для СМО с отказами, с ограничением на длину очереди, на время пребывания заявки в очереди или в системе.

У СМО с бесконечным ожиданием стационарный режим возможен лишь в случае, если $\mu > \lambda$, т. е. если средняя интенсивность обслуживания заявок системой превышает среднюю интенсивность их поступления в систему, в противном случае очередь заявок будет с течением времени бесконечно нарастать.

У СМО, способных функционировать в стационарном режиме, этот режим наступает после некоторого времени функционирования, называемого временем переходного режима. Факт наступления стационарного режима (если он существует) не зависит от того, в каком состоянии находилась система в начальный момент времени. Однако продолжительность переходного режима (момент времени, когда режим функционирования СМО можно считать стационарным) в общем случае зависит от начального состояния и определяется двумя способами: на основании накопленного опыта функционирования соответствующих реальных СМО; на основании математического моделирования на ЭВМ функционирования данной СМО.

Во втором случае интегрируют систему дифференциальных уравнений (СДУ) — модель соответствующей СМО — и через последовательные промежутки времени проверяют условие

$$|P_k(t) - P_k(t + \tau)| < \varepsilon, k = 0, 1, 2, \dots, n, \dots, n + s, \dots, n + m_L,$$

где величины ε , τ характеризуют точность определения переходного режима и задаются исследователем.

Если процесс массового обслуживания является стационарным, то для определения показателей эффективности многих классов СМО могут быть получены сравнительно простые алгебраические зависимости. Можно считать, что при отсутствии ЭВТ моделирование СМО с большим числом каналов ($n \geq 3$) практически возможно лишь для стационарного режима*. При наличии ЭВТ, как было показано выше, возможно моделирование СМО с любым числом каналов и в переходном и в стационарном режимах. Однако и при наличии ЭВТ часто оказывается целесообразным

* Об этом свидетельствует и опыт. На раннем этапе своего существования (20—40-е годы) из-за отсутствия ЭВТ теория массового обслуживания применялась главным образом для изучения стационарного режима функционирования СМО.

использование специальных моделей функционирования СМО в стационарном режиме, так как при этом может сокращаться время расчетов.

Методы разработки моделей СМО, функционирующих в стационарном режиме, рассмотрим на примере СМО с ограничением на длину очереди. Для краткости условимся постановку задачи не повторять.

Изложение разработки методов моделирования СМО других классов, функционирующих в стационарном режиме, можно найти в многочисленной литературе.

6.4.1. Модели СМО с ограничением на длину очереди

Напомним, что стационарный режим имеет место, когда выполняется условие

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_k(t) = p_k, k = 0, 1, 2, \dots, n, \dots, n + s, \dots, n + m.$$

Но при этом $\frac{dP_k(t)}{dt} = 0$, и вместо системы дифференциальных уравнений (6.3.8) будем иметь систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} 0 &= -p_0\lambda + p_1\mu; \\ 0 &= p_0\lambda - p_1(\lambda + \mu) + p_2\mu; \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ 0 &= p_{k-1}\lambda - p_k(\lambda + \mu) + p_{k+1}\mu; \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ 0 &= p_{n-1}\lambda - p_n(\lambda + n\mu) + p_{n+1}\mu; \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ 0 &= p_{n+s-1}\lambda - p_{n+s}(\lambda + n\mu) + p_{n+s+1}\mu; \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ 0 &= p_{n+m-1}\lambda - p_{n+m}\mu, \end{aligned} \tag{6.4.2}$$

которая дополняется условием

$$\sum_{k=0}^n p_k + \sum_{s=1}^m p_{n+s} = 1.$$

Система уравнений (6.4.2) решается методом последовательной подстановки. Из первого уравнения системы найдем

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0.$$

Подставив значения p_1 во второе уравнение, получим

$$p_2 = \frac{\lambda\lambda}{\mu^2} p_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^2 p_0.$$

Аналогичным образом из третьего уравнения будем иметь

$$p_3 = \frac{1}{6} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^3 p_0.$$

В общем случае для всех $k \leq n$

$$p_k = \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k p_0 = \frac{\alpha^k}{k!} p_0, \quad (6.4.3)$$

где $\alpha = \lambda/\mu = \lambda \bar{t}_{\text{ж.з.}}$ — среднее число заявок, поступающих в систему за время обслуживания одной заявки.

При $k > n$

$$p_{n+1} = \frac{\alpha^n}{n!} \frac{\alpha}{n} p_0 = \frac{\alpha^{n+1}}{n!n} p_0; \quad (6.4.4)$$

$$p_{n+2} = \frac{\alpha^{n+1}}{n!n} \frac{\alpha}{n} p_0 = \frac{\alpha^{n+2}}{n!n^2} p_0; \quad (6.4.5)$$

.....

$$p_{n+s} = \frac{\alpha^{n+s-1}}{n!n^{s-1}} \frac{\alpha}{n} p_0 = \frac{\alpha^{n+s}}{n!n^s} p_0, 1 \leq s \leq m. \quad (6.4.6)$$

Вероятность p_0 найдем из условия

$$\sum_{k=0}^n p_k + \sum_{s=1}^m p_{n+s} = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} p_0 + \sum_{s=1}^m \frac{\alpha^{n+s}}{n!n^s} p_0 = 1, \quad (6.4.7)$$

откуда

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \sum_{s=1}^m \frac{\alpha^{n+s}}{n!n^s}} = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!n} \left(\frac{1 - \frac{\alpha^m}{n^m}}{1 - \frac{\alpha}{n}} \right)}, \quad (6.4.8)$$

так как

$$\sum_{i=1}^N aq^i = aq \frac{1 - q^N}{1 - q}.$$

С учетом (6.4.8) для определения вероятностей p_k, p_{n+s} будем иметь следующие выражения

$$p_k = \frac{\frac{\alpha^k}{k!}}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!n} \left(\frac{1 - \frac{\alpha^m}{n^m}}{1 - \frac{\alpha}{n}} \right)}, k \leq n; \quad (6.4.9)$$

$$p_{n+s} = \frac{\frac{\alpha^{n+s}}{n!n^s}}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!n} \left(\frac{1 - \frac{\alpha^m}{n^m}}{1 - \frac{\alpha}{n}} \right)}; (1 \leq s \leq m). \quad (6.4.10)$$

Знание вероятностей p_k, p_{n+s} позволяет определить показатели эффективности СМО. Вероятность обслуживания заявки

$$P_{\text{обсл}} = 1 - p_{n+m} = 1 - \frac{\frac{\alpha^{n+m}}{n!n^m}}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!n} \left(\frac{1 - \frac{\alpha^m}{n^m}}{1 - \frac{\alpha}{n}} \right)}, \quad (6.4.11)$$

а вероятность получения отказа

$$P_{\text{отк}} = p_{n+m} = \frac{\frac{\alpha^{n+m}}{n!n^m}}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!n} \left(\frac{1 - \frac{\alpha^m}{n^m}}{1 - \frac{\alpha}{n}} \right)}. \quad (6.4.12)$$

Математическое ожидание числа заявок в очереди составит

$$\bar{s} = \sum_{s=1}^m s p_{n+s} = \frac{\sum_{s=1}^m s \frac{\alpha^{n+s}}{n! n^s}}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n! n} \left(\frac{1 - \frac{\alpha^m}{n^m}}{1 - \frac{\alpha}{n}} \right)}, \quad (6.4.13)$$

а математическое ожидание времени пребывания заявки в очереди —

$$\bar{\tau}_{oc} = \frac{\bar{s}}{\lambda}. \quad (6.4.14)$$

Математическое ожидание числа функционирующих каналов определится из выражения

$$\bar{k}_{обсл} = \sum_{k=0}^n k p_k + n \sum_{s=1}^m p_{n+s} = \frac{\alpha \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!} \left(\frac{1 - \frac{\alpha^m}{n^m}}{1 - \frac{\alpha}{n}} \right)}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n! n} \left(\frac{1 - \frac{\alpha^m}{n^m}}{1 - \frac{\alpha}{n}} \right)}, \quad (6.4.15)$$

а математическое ожидание числа простаивающих каналов — по формуле

$$\bar{k}_{пр} = n - \bar{k}_{обсл}. \quad (6.4.16)$$

Разработаем теперь общую схему действий при моделировании процессов массового обслуживания в стационарном режиме. Предварительно выведем правило составления формул для определения вероятностей p_k, p_{n+s} .

Запишем формулу (6.4.3) в следующем виде:

$$p_k = \frac{\overbrace{\lambda \lambda \lambda \dots \lambda}^{k\text{-сомножителей}}}{\underbrace{\mu \cdot 2\mu \cdot 3\mu \dots k\mu}_{k\text{-сомножителей}}} p_0. \quad (6.4.17)$$

Рассмотрение структуры этой формулы и структуры графа СМО (см. рис. 6.2) позволяет сформулировать следующее правило. Формула для определения вероятности p_k состоит из двух сомножителей. Одним из них является вероятность p_0 , а другим — дробь. В числителе этой дроби помещается произведение всех интенсивностей переходов, стоящих у стрелок, направленных слева направо от стрелки, ведущей из состояния A_0 , и до стрелки, ведущей в состояние A_k ; в знаменателе — произведение всех интенсивностей переходов, стоящих у стрелок, направленных справа налево от стрелки, ведущей в состояние A_0 , до стрелки, ведущей из состояния A_k .

По аналогичному правилу составляется и выражение для определения вероятностей P_{n+s} ($s = 1, 2, \dots, m$).

Можно показать, что изложенное правило общее для всего класса процессов массового обслуживания, являющихся процессами “гибели и размножения” (см. п. 6.3.1).

При использовании ЭВТ разрабатываются стандартные процедуры для получения как вероятностей состояний систем, так и показателей их эффективности. Исходной информацией для таких процедур служат матрицы интенсивностей переходов.

Для разработки математических моделей СМО, функционирующих в стационарном режиме, а также процедур реализации этих моделей на ЭВМ можно рекомендовать последовательность действий, изложенную в п. 6.3.1.

6.4.2. Модели СМО с отказами

Все полученные выше результаты для СМО с ограничением на длину очереди справедливы и для СМО с отказами, если положить $m = 0$. При этом для определения вероятности p_k нахождения системы в состоянии A_k получим выражение

$$p_k = \frac{\frac{\alpha^k}{k!}}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!}}. \quad (6.4.18)$$

Отсюда для определения показателей эффективности СМО с отказами могут быть получены следующие выражения:

$$P_{\text{обсл}} = 1 - p_n = 1 - \frac{\frac{\alpha^n}{n!}}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!}}; \quad (6.4.19)$$

$$P_{\text{отк}} = p_n = \frac{\frac{\alpha^n}{n!}}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!}}; \quad (6.4.20)$$

$$\bar{k}_{\text{обсл}} = \sum_{k=0}^n k p_k = \sum_{k=0}^n \frac{k \frac{\alpha^k}{k!}}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!}} = \alpha \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha^k}{k!}}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!}}; \quad (6.4.21)$$

$$\bar{k}_{\text{пр}} = n - \bar{k}_{\text{обсл}}. \quad (6.4.22)$$

6.4.3. Модели СМО с бесконечным ожиданием

Используя сформулированное в п. 6.4.1 правило составления выражений для вероятностей P_k, P_{n+s} , можем получить:

$$P_k = \frac{\lambda^k}{\mu \cdot 2\mu \cdot 3\mu \dots k\mu} P_0 = \frac{\alpha^k}{k!} P_0 \quad (k \leq n); \quad (6.4.23)$$

$$P_{n+s} = \frac{\lambda^n \lambda^s}{\mu \cdot 2\mu \dots k\mu \dots n\mu (n\mu)^s} P_0 = \frac{\alpha^{n+s}}{n! n^s} P_0 \quad (s \geq 1). \quad (6.4.24)$$

Вероятность P_0 определим из выражения

$$\sum_{k=0}^n P_k + \sum_{s=1}^{\infty} P_{n+s} = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} P_0 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\alpha^{n+s}}{n! n^s} P_0 = 1.$$

Так как СМО функционирует в стационарном режиме, то $\lambda < n\mu$; $\frac{\lambda}{\mu} < n$; $\frac{\alpha}{n} < 1$. Предел суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем α/n равен

$$\sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^s = \frac{\alpha}{n - \alpha}.$$

Поэтому будем иметь

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \frac{\alpha}{n - \alpha}}. \quad (6.4.25)$$

Определим, используя (6.4.23), (6.4.24) и (6.4.25),

$$P_k = \frac{\frac{\alpha^k}{k!}}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \frac{\alpha}{n - \alpha}}; \quad (6.4.26)$$

$$P_{n+s} = \frac{\frac{\alpha^{n+s}}{n! n^s}}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \frac{\alpha}{n - \alpha}}. \quad (6.4.27)$$

Найдем теперь выражения для определения показателей эффективности СМО:

— математическое ожидание числа заявок в очереди (длины очереди)

$$\bar{s} = \sum_{s=1}^{\infty} s p_{n+s} = \frac{\frac{\alpha^n}{n!} \frac{\alpha n}{(n-\alpha)^2}}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \frac{\alpha}{n-\alpha}}; \quad (6.4.28)$$

— математическое ожидание времени пребывания заявки в очереди

$$\bar{\tau}_{\text{ож.}} = \frac{\bar{s}}{\lambda}; \quad (6.4.29)$$

— математическое ожидание времени пребывания заявки в системе

$$\bar{\tau}_c = \bar{\tau}_{\text{ож.}} + \frac{1}{\mu} = \frac{\bar{s}}{\lambda} + \frac{1}{\mu}; \quad (6.4.30)$$

— математическое ожидание числа каналов, занятых обслуживанием заявок,

$$\bar{k}_{\text{обсл.}} = \sum_{k=0}^n k p_k + n \sum_{s=1}^{\infty} p_{n+s} = \sum_{k=0}^n k p_k + n \left(1 - \sum_{k=0}^n p_k \right)$$

после подстановки значений p_k и p_{n+s} и некоторых преобразований получим

$$\bar{k}_{\text{обсл.}} = \alpha; \quad (6.4.31)$$

— математическое ожидание числа простаивающих каналов

$$\bar{k}_{\text{пр.}} = n - \bar{k}_{\text{обсл.}} = n - \alpha. \quad (6.4.32)$$

Читателю предлагается самостоятельно разработать модели функционирования в стационарном режиме СМО с ограничением на время пребывания заявок в системе и в очереди (см. рис. 6.5).

§ 6.5. РАЦИОНАЛЬНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ПОДГОТОВКИ К МОДЕЛИРОВАНИЮ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Как следует из описания моделей массового обслуживания, они весьма громоздки. Для их реализации в процессе управления силами, как правило, требуется использование ЭВМ. Специфические особенности марковских процессов массового обслуживания позволяют разрабатывать достаточно простые стандартные процедуры, которые могут использоваться как при формировании моделей для исследования собственно процессов массового обслуживания, так и для разработки блоков моделей таких действий сил, в которых процессы массового обслуживания являются одним из эпизодов.

Подготовку к моделированию на ЭВМ процесса массового обслуживания рекомендуется начинать с уяснения оперативно-тактической постановки задачи. Затем рациональной обычно является следующая последовательность действий:

1. Определить основной и дополнительные показатели эффективности СМО.

2. Разработать замысел моделирования: определить потребные варианты расчетов, параметры управления для каждого из вариантов, рациональную последовательность смены вариантов.

3. Классифицировать СМО с точки зрения особенностей: потока заявок, структуры каналов обслуживания, дисциплины ожидания заявками обслуживания.

4. Разработать граф процесса массового обслуживания.

5. Определить интенсивность переходов системы, интервал времени функционирования СМО $[0, t]$, начальное состояние системы (начальные условия для интегрирования системы дифференциальных уравнений), шаг интегрирования.

6. Заполнить матрицу интенсивностей переходов.

7. Выбрать стандартную процедуру, соответствующую классу моделируемой СМО и режиму функционирования СМО (переходному, стационарному).

8. Ввести в ЭВМ необходимые исходные данные: матрицу интенсивностей переходов, интервал интегрирования $[0, t]$, начальные условия для интегрирования и шаг интегрирования системы дифференциальных уравнений.

На этом подготовка заканчивается, и может быть начато моделирование процесса в соответствии с замыслом моделирования.

К сказанному выше добавим:

— для моделирования процессов массового обслуживания, являющихся процессами “гибели и размножения”, целесообразно разрабатывать стандартные процедуры, которые предусматривают составление самой ЭВМ матрицы интенсивностей переходов на основании заданных числа каналов, числа мест в очереди, интенсивностей потоков заявок, обслуживания, ухода заявок из системы и очереди;

— при моделировании стационарных режимов функционирования СМО этого типа можно использовать средства малой механизации расчетов. Их применение особенно эффективно при наличии таблиц, позволяющих вычислять некоторые показатели эффективности либо элементы необходимых для их вычисления формульных зависимостей;

— если исследуемые процессы массового обслуживания являются немарковскими, то либо делают допущение об их “марковости”, либо же при разработке модели таких процессов используют метод статистических испытаний (см. гл. 9).

§ 6.6. МЕТОДЫ РАЗРАБОТКИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МНОГОФАЗНЫХ СМО

При разработке моделей функционирования многофазных СМО возможны в принципе два метода подхода. При одном из них для нахождения показателя эффективности системы находится распределение состояний каждой из фаз (как это делалось для однофазных СМО). В этом случае принято говорить об использовании случайной схемы построения модели. При втором методе состояние каждой фазы определяется математическим ожиданием числа заявок, находящихся в фазе. Это так называемый метод динамики средних.

Использование метода динамики средних значительно упрощает структуру модели и сокращает время моделирования. Зато использование случайной схемы оказывается предпочтительней из-за возможности определить большее число параметров, характеризующих процесс и, следовательно, более полно выявить его закономерности.

Необходимо, кроме того, иметь в виду следующее обстоятельство. Применение метода динамики средних связано с допущением о том, что число заявок в фазе не случайно, а равно математическому

ожиданию этого числа. Характер искажения процесса в результате такого допущения можно показать на следующем примере. Пусть сравниваются между собой две многофазные СМО, отличающиеся друг от друга числом каналов в фазах или же числом фаз. При этом величина разности показателей эффективности этих двух систем будет зависеть не только от различия объективных закономерностей процесса, которые вызываются различной структурой сравниваемых систем, но и от различных искажений процесса моделью при различной ее структуре. Правда, знак разности сохраняется, что предопределяет возможность выявления лучшей структуры.

Установлено, что искажение процесса моделью, построенной с использованием метода динамики средних, при прочих равных условиях, тем меньше, чем больше число каналов в фазах и чем меньше число фаз.

Модели, построенные двумя указанными методами, разноточны.

Ниже будут рассмотрены примеры обоих методов построения моделей СМО.

6.6.1. Модели многофазных СМО со случайными траекториями заявок

Постановка задачи. Многофазная система состоит из M фаз массового обслуживания. Каждая i -я фаза является системой массового обслуживания с n_i однотипными каналами. Интенсивность обслуживания заявки каналом i -й фазы равна μ_i .

Из внешнего источника в систему поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ . Внешний источник, из которого поступают заявки, а также выход системы, куда поступают обслуженные заявки, примем за нулевую фазу. Если фактически некоторые заявки на обслуживание поступают не извне, а возникают в какой-либо фазе (например, в случае, когда некоторые отделы органа управления подают в другие отделы отчеты, заявки на материальное обеспечение и т. д.), то без нарушения общности всех последующих выкладок можно считать такие заявки поступающими также из нулевой фазы.

Заявка не может обслуживаться в нескольких фазах одновременно и не может покинуть фазу необслуженной. Известна матрица вероятностей переходов заявок между фазами:

$$(w_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & w_{01} & \dots & w_{0j} & \dots & w_{0M} \\ w_{10} & 0 & \dots & w_{1j} & \dots & w_{1M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{i0} & w_{i1} & \dots & w_{ij} & \dots & w_{iM} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{M0} & w_{M1} & \dots & w_{Mj} & \dots & w_{M0} \end{pmatrix}.$$

При составлении матрицы учтено, что заявка, обслуженная в i -й фазе, не может немедленно возвратиться на обслуживание в эту же фазу, т. е., что $w_{ii} = 0$, $i = 0, 1, 2, \dots, M$.

Матрица (w_{ij}) обладает свойствами, аналогичными свойствам матрицы перехода цепи Маркова $\|p_{ij}\|$. Именно элемент w_{ij} i -й строки есть вероятность того, что заявка из i -й фазы перейдет в j -ю фазу. Сумма элементов каждой строки равна единице. Элемент w_{ij} j -го столбца есть условная вероятность перехода заявки в j -ю фазу, вычисленная при условии, что заявка обслуживалась ранее в i -й фазе.

Следует, однако, четко представлять различие процессов, описываемых матрицами (w_{ij}) и $\|p_{ij}\|$. Первый из них — процесс с непрерывным, а второй — с дискретным временем переходов системы.

Подчеркнем также, что “траектория” движения каждой заявки в системе, как правило, не случайна, например, характер поступившего в орган управления донесения может однозначно определить, какие именно отделы органа управления это донесение пройдет. Случайным же здесь является то, что поступившая в момент времени t из внешнего источника заявка будет иметь ту или иную “траекторию”, что заявка, обслуживание которой будет закончено в i -й фазе в момент времени t , окажется заявкой, нуждающейся в дальнейшем обслуживании в j -й фазе, и т. д.

Целью функционирования описанной многофазной системы будем считать обслуживание поступающих заявок в минимальное время.

Математическая модель должна позволить оценить зависимость эффективности функционирования системы от ее структуры с целью оптимизации динамики прохождения заявок в системе.

Рассмотрим стационарный режим функционирования системы.

Разработка модели. Используем случайную схему моделирования. В соответствии с принципом Колмогорова показателем эффективности описанной системы является математическое ожидание T_c времени прохождения заявкой системы.

В качестве дополнительных показателей эффективности выступают математические ожидания времени пребывания заявки в i -й фазе $\bar{\tau}_{ci}$ и в очереди i -й фазы $\bar{\tau}_{ож,i}$ при каждом посещении заявкой фазы, длина очереди заявок в i -й фазе \bar{s}_i , число функционирующих и простаивающих каналов i -й фазы $\bar{k}_{обсл,i}$ и $\bar{k}_{пр,i}$ соответственно.

Введем следующие обозначения:

λ_i — поток заявок в i -ю фазу, определяемый решением системы линейных уравнений

$$\lambda_i = \sum_{j=0}^M w_{ji} \lambda_j, i = 0, 1, 2, \dots, M; \quad (6.6.1)$$

$$\lambda_0 = \lambda;$$

\bar{i}_i — математическое ожидание числа “посещений” каждой заявкой i -й фазы до полного окончания ее обслуживания в системе,

$$\bar{i}_i = \lambda_i / \lambda. \quad (6.6.2)$$

Тогда показатель эффективности будет равен

$$T_c = \sum_{i=0}^M \bar{i}_i \bar{\tau}_{ci},$$

где $\bar{\tau}_{ci}$ определяется по формуле (6.4.30).

Остальные показатели эффективности системы определяются по формулам (6.4.26)—(6.4.32).

Поток заявок из i -й фазы в j -ю равен $\lambda_{ij} = \lambda_i w_{ij}$.

Граф трехфазной СМО со случайными “траекториями” заявок показан на рис. 6.6.

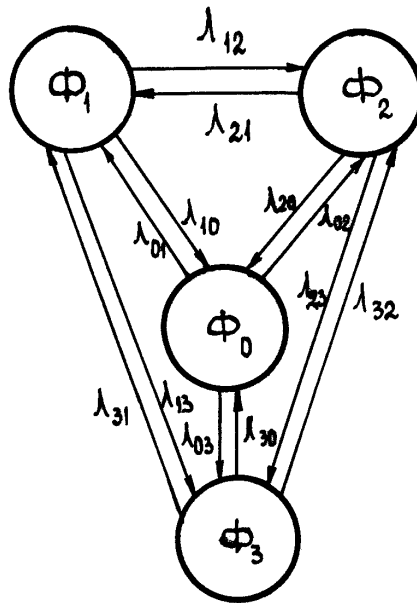


Рис. 6.6

6.6.2. Модели замкнутых многофазных СМО

Постановка задачи. Многофазная система состоит из M фаз — систем массового обслуживания. Каждая i -я фаза имеет n_i однотипных каналов обслуживания. Интенсивность обслуживания заявок одним каналом i -й фазы равна μ_i . Поток обслуживаний во всех фазах системы простейший.

В системе постоянно находится N объектов, являющихся заявками на обслуживание в различных фазах системы. При этом каждая заявка последовательно проходит все фазы системы от первой до M -й, затем вновь возвращается в первую фазу и т. д. Интенсивность поступления одной заявки в $(i + 1)$ -ю фазу равняется интенсивности покидания этой заявкой i -й фазы. Поскольку поток обслуживания заявок в i -й фазе является простейшим, то простейшим является и поток заявок в $(i + 1)$ -ю фазу.

Цель функционирования такой многофазной системы, как правило, обеспечение оптимального режима функционирования одной из фаз. В частности, в большом числе случаев это будет требование обеспечения максимального (или не менее заданного) числа заявок в одной из фаз систем. Цель моделирования — определение характера зависимости показателя эффективности системы от параметров n_i, μ_i для обоснования оптимального (рационального) режима функционирования системы.

В качестве примера можно привести уже рассматривавшийся процесс циклического использования кораблей. Ремонт кораблей, пополнение ими запасов, боевая подготовка, выполнение задач в море, возвращение для очередного ремонта и т. д. могут интерпретироваться как процесс последовательного и циклического прохождения заявками соответствующих фаз замкнутой многофазной системы. В качестве каналов фаз выступают доки, пункты приема кораблями запасов, районы боевой подготовки, районы выполнения задач и т. д. Интенсивностями обслуживаний в фазах

являются определенные для одной единицы времени математические ожидания числа кораблей, ремонтируемых одним доком, числа кораблей, пополняющих запасы в одном пункте, числа кораблей, заканчивающих боевую подготовку в одном районе, и числа кораблей, выполняющих в одном районе задачу. Показателем эффективности при этом может быть либо математическое ожидание числа кораблей, способных на заданный момент времени выполнять задачу, либо вероятность иметь в море не менее заданного числа кораблей. Целью моделирования может являться обоснование числа доков, пунктов приемки запасов и т. д., времени ремонта кораблей, пополнения ими запасов и т. д., обеспечивающих нахождение в море необходимого числа кораблей.

Для примера рассмотрим случай, когда показателем эффективности является математическое ожидание числа заявок, находящихся на заданный момент времени t в заданном состоянии. Для разработки математической модели рассматриваемой многофазной системы целесообразно использовать метод динамики средних.

Заметим, что процесс функционирования описанной системы является случайным процессом с дискретным числом состояний и непрерывным временем переходов: каждая заявка в случайный момент времени может перейти в одно из M фиксированных состояний.

Разработка модели. В качестве характеристики системы примем совокупность чисел $N_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, M$), где $N_i(t)$ — математическое ожидание числа заявок, находящихся на момент времени t в i -й фазе. Очевидно, что $\sum_{i=1}^M N_i(t) = N$. Для нахождения значений $N_i(t)$ может быть использована система

дифференциальных уравнений. Составление системы дифференциальных уравнений целесообразно осуществлять с помощью графа. Пример графа переходов системы, состоящей из четырех фаз, показан на рис. 6.7. Используя правило составления систем дифференциальных уравнений, изложенное в п. 6.3.1, для графа на рис. 6.7 получим следующую систему уравнений:

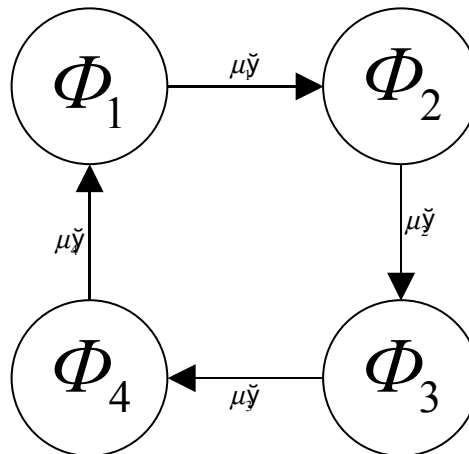


Рис.6.7

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN_1(t)}{dt} &= N_4(t)\mu'_4(t) - N_1(t)\mu'_1(t); \\ \frac{dN_2(t)}{dt} &= N_1(t)\mu'_1(t) - N_2(t)\mu'_2(t); \\ \frac{dN_3(t)}{dt} &= N_2(t)\mu'_2(t) - N_3(t)\mu'_3(t); \\ \frac{dN_4(t)}{dt} &= N_3(t)\mu'_3(t) - N_4(t)\mu'_4(t). \end{aligned} \right\} \quad (6.6.3)$$

Эта система должна быть дополнена условием

$$\sum_{i=1}^4 N_i(t) = N.$$

Интенсивность переходов $\mu'_i(t)$ определяется по правилу

$$\mu'_i(t) = \begin{cases} \mu_i, & \text{если } N_i(t) \leq n_i; \\ \frac{\mu_i n_i}{N_i(t)}, & \text{если } N_i(t) > n_i, \end{cases} \quad (6.6.4)$$

где $\frac{\mu_i n_i}{N_i(t)}$ — математическое ожидание интенсивности обслуживания, приходящееся на одну заявку, если число заявок в фазе превосходит число имеющихся каналов.

В целом же при подобном способе определения интенсивностей $\mu'_i(t)$ суммарная интенсивность обслуживания $N_i(t)\mu'_i(t)$ никогда не может превосходить максимально возможной интенсивности обслуживания $n_i\mu_i$.

Интегрируя систему уравнений (6.6.3) в интервале времени $[0, t]$ для начальных условий $N_i(0)$ ($i = 1, 2, \dots, M$), получим значения математических ожиданий чисел заявок на заданный момент времени t . Начальные условия определяются на основании оценки обстановки.

Составление систем уравнений типа (6.6.3) может осуществлять ЭВМ на основании заданной матрицы интенсивностей переходов μ_i .

В заключение еще раз напомним, что методами теории массового обслуживания можно изучать лишь закономерности динамики процессов массового обслуживания. Многие другие важные свойства этих процессов (в первую очередь касающиеся качества обслуживания заявок) методами теории массового обслуживания можно оценить лишь в той степени, в какой от них зависят временные параметры обслуживания, число каналов, фаз системы.

Глава 7. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМЫХ ПРОЦЕССОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДОВ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

§ 7.1. ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДОВ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ ПРИ УПРАВЛЕНИИ

7.1.1. Область применения методов

Важнейшим элементом содержания работы командира при управлении силами в бою, при ведении боевых действий и т. д. является организация взаимодействия: его планирование, практическая подготовка, контроль за ходом выполнения, при необходимости корректировка плана.

Организация взаимодействия начинается сразу же с получением боевого приказа, распоряжения. При подготовке боя встает задача согласованной подготовки подчиненных, приданных, поддерживающих сил с их органами управления. При этом организуется и взаимодействие подразделений органа управления данного соединения, как правило, с учетом взаимодействия между всеми органами управления участвующих в подготовке сил; выбирается форма подготовки боя (последовательная, параллельная, смешанная) с учетом назначенных старшим начальником сроков; производится расчет времени подготовки соединения к бою (математического ожидания времени подготовки, вероятности подготовки в срок не позже заданного T_3). Проведение практической подготовки соединения к бою (постановка задач силам, согласование вопросов взаимодействия сил при приведении в необходимые степени готовности, дооборудование района, развертывание сил и т. д.) также осуществляется по плану и требует организации взаимодействия сил и их органов управления. Например, весьма сложным и требующим организации взаимодействия может быть процесс приведения сил в повышенную готовность.

При подготовке боя разрабатывается план взаимодействия сил в бою, проводится работа по его согласованию с участниками. Время выполнения этого плана в бою входит в оценку времени, которая (оценка времени) является основным элементом оценки командиром обстановки.

Планы взаимодействия сил на любом этапе выполнения ими поставленной задачи имеют своей целью повышение эффективности их действий. По этой причине прежде всего осуществляется сравнительная оценка вариантов взаимодействия с помощью моделей и методов, позволяющих оценивать варианты взаимодействия по основному показателю эффективности. Важное значение при этом имеет согласование плана по времени и в первую очередь выполнение плана в установленный срок, согласование по времени мероприятий плана, обеспечивающее необходимые своевременность и последовательность их выполнения и исключающее взаимные помехи.

Сложный характер взаимодействия сил и его влияния на эффективность их действий, высокие темпы управления потребовали использования на базе ЭВТ математического метода обоснования планов взаимодействия — метода сетевого планирования*. Используемые при этом сетевые модели открывают новые возможности повышения эффективности управляемых процессов. Для определенности рассмотрим сетевые модели работы органа управления. Эти модели позволяют не только наглядно представить взаимосвязь между функционированием подразделений органа управления, оптимизировать его работу, но и после утверждения плана использовать ЭВМ:

— для оперативной разработки и рассылки календарных планов совместной деятельности всех участвующих в ней органов управления и сил, календарного плана деятельности подразделений данного органа управления соединением, отдельных операторов;

* Метод сетевого планирования явился одним из практических приложений теории графов.

— для обеспечения автоматизированного (в том числе по схеме искусственного интеллекта) контроля за ходом управляемого процесса с выдачей рекомендаций соответствующим должностным лицам о необходимости корректирования плана.

В ходе ведения боя, как и при подготовке, может потребоваться неоднократно корректировать планы функционирования органа управления, планы взаимодействия сил. Причинами могут быть изменение условий выполнения задачи заданным составом сил, изменение состава привлекаемых сил и средств, личного состава органа управления (например, из-за потерь, переподчинения соединений, выделения операторов органа управления для комплектования запасных, выносных пунктов управления и т. д.). Своевременно и обоснованно корректировать планы, доводить их до исполнителей можно только при использовании сетевого моделирования на базе ЭВТ.

Аналогичным образом рассматриваемые методы могут использоваться при управлении силами в повседневных условиях — при планировании оперативной и боевой подготовки соединений, кораблей и частей, планировании различных процессов поддержания должной боеготовности их сил и средств. Методы сетевого планирования в этом случае также позволяют обосновывать планы по времени выполнения управляемых процессов. Оценка же планов с точки зрения качества (эффективности) выполнения соответствующих задач осуществляется с помощью установленных правил (содержащихся, например, в курсах боевой подготовки, документах, регламентирующих ремонтные работы и т. д.).

В военно-экономической области сетевое моделирование необходимо для обоснования функционирования и обоснования контроля за функционированием военно-экономических комплексов (строительных, ремонтных и др.), когда приходится координировать работы коллективов основных исполнителей, подрядчиков, субподрядчиков.

Выявлены целесообразность и эффективность использования сетевых моделей для планирования и организации сложных военно-научных работ.

Практически всем руководителям-практикам приходилось сталкиваться с ситуациями, когда в ходе выполнения решения, плана неожиданно появлялась угроза срыва по времени какого-либо комплекса мероприятий, входящих в управляемый процесс, который мог сорвать выполнение процесса в целом. Методы сетевого планирования в большом числе случаев позволяют еще на этапе подготовки к выполнению поставленной задачи выявить “узкие” места плана и принять обоснованные контрмеры.

7.1.2. Показатели эффективности, вычисляемые методами сетевого планирования

Как уже указывалось, в оперативно-тактической области методы сетевого планирования позволяют оценивать временные параметры — математическое ожидание времени выполнения управляемого процесса, вероятность его завершения в заданный срок или в заданный период времени. При подготовке сил к бою, операции эти параметры выступают в качестве дополнительных показателей эффективности, но с точки зрения целей некоторых частных задач такие параметры могут являться и основными показателями эффективности.

Метод сетевого планирования среди всех других методов математического моделирования обладает двумя редкими особенностями. Во-первых, вычисляемые с его помощью временные параметры управляемого процесса (математическое ожидание времени выполнения всего процесса или какого-то его этапа, вероятность завершения управляемого процесса в срок не позже заданного и т. д.) отражают их объективно существующие в природе значения, их точность и надежность могут

быть объективно оценены методами теории вероятностей. Поэтому, например, точность расчета времени, оценки времени, выполняемых при выработке командиром решения, зависит лишь от точности знания исходных параметров и правильного представления взаимосвязи выполняемых мероприятий (о проблеме точности моделирования см. § 1.2). Во-вторых, применяемые в рассматриваемом методе процедуры экспертных оценок имеют строгое научное обоснование, основанное на изучении соответствующих свойств человека.

В военно-экономической области сетевые графики позволяют либо вычислять упомянутые выше показатели эффективности с учетом ограничений, накладываемых на стоимость (расход ресурсов) при выполнении управляемого процесса, либо же определять математическое ожидание расхода средств (ресурсов) или вероятность того, что расходы не превысят заданного уровня при ограничениях, накладываемых на время выполнения процесса.

7.1.3. Особенности оперативно-тактической постановки задачи

Как и при использовании любых других методов математического моделирования, процесс разработки сетевой модели и ее использования для практических целей включает четыре этапа: оперативно-тактическую постановку задачи (ее особенности рассматриваются в п. 7.1.3), разработку сетевой модели, ее включение в состав СМО ЭВК (см. § 7.2), непосредственное моделирование (оперативно-тактические расчеты) и выработку предложений (§ 7.3).

Для описания содержания постановки задачи целесообразно предварительно указать элементы сетевой модели, а для этого требуется ввести ряд понятий и определений. Условимся, что все дальнейшее описание методов сетевого планирования будет осуществляться с точки зрения их применения в оперативно-тактической области*.

Сетевая модель управляемого процесса включает два элемента. *Сеть* — логико-математическое описание комплекса мероприятий (работ) и событий в их взаимосвязи, с выполнением которого связано достижение цели процесса. Графическое изображение сети называется *сетевым графиком***.

При большом числе мероприятий (несколько тысяч или сотен) и использовании ЭВМ графическое изображение сетевого графика может и не осуществляться или же осуществляться в укрупненном виде. Сетевой график обладает высокой степенью наглядности при анализе командиром взаимосвязей между мероприятиями (см. рис. 7.5)

Второй элемент — *методы вычисления параметров сети*, являющихся показателями эффективности управляемого процесса. В оперативно-тактической области это чаще всего временные оценки мероприятий (работ), ранние и поздние сроки наступления событий, критическое время процесса, свободные и полные резервы времени мероприятий, вероятности выполнения всего процесса, его этапов в заданные сроки. Знание этих параметров позволяет судить о степени совершенства плана (только с точки зрения временных факторов!), выявить пути его совершенствования. Уточним теперь понятия “событие”, “мероприятие” и некоторые другие.

Событие — это то, что должно быть достигнуто в результате целесообразной деятельности, выполнения одного или нескольких мероприятий. Оно не имеет длительности по времени и

* Все сказанное, однако, будет справедливо и для других областей применения излагаемых методов, если только они будут использоваться для оценки временных параметров управляемых процессов.

** Сеть есть частный случай графа — множества точек (вершин) и множества ориентированных дуг (ребер), соединяющих некоторые пары этих точек. У сети имеется лишь одна точка, не имеющая входящих дуг, и одна точка, не имеющая дуг выходящих.

формулируется как свершившийся факт: “противник силами разведки выявлен”; “на КП данные о противнике получены”; “развертывание сил завершено” и т. д. На сетевом графике события изображаются, как правило, кружками и называются вершинами графика.

Наступление события означает завершение какого-то этапа управляемого процесса или же всего процесса в целом, если речь идет о последнем событии. Событие считается наступившим, если завершены все мероприятия, от которых оно зависит. Исключением является первое, начальное событие, которое не имеет предшествующих мероприятий. Наступление события знаменует возможность перехода к другим мероприятиям. Исключение — последнее, завершающее событие, после наступления которого не проводятся никакие мероприятия.

Мероприятие (работа) — это процесс достижения какого-либо события. Оно требует затрат времени или(и) средств. На сетевом графике мероприятие изображается стрелкой, соединяющей две вершины графика. Размеры и направление стрелки относительно листа бумаги, планшета роли не играют (кроме случая, когда сетевой график составляется в масштабе времени). Не принято, чтобы стрелки имели изломы, пересекались с другими стрелками.

Фиктивное мероприятие (работа) указывает на “технологическую” зависимость между различными мероприятиями. Фиктивное мероприятие не требует затрат времени, средств. Оно изображается пунктирной стрелкой.

Путь — непрерывная последовательность мероприятий между теми событиями, которые интересуют исполнителя. От одного к другому событию может вести и несколько путей. Пути от начального до завершающего события называются полными, остальные — неполными. *Длина пути* — сумма временных оценок мероприятий, составляющих путь.

Оперативно-тактическая постановка задачи должна содержать сведения, необходимые для разработки сетевой модели (сети, методов вычисления параметров сети) и ее реализации, указания о цели действия сил, цели моделирования, а также о мероприятиях, которые должны быть выполнены для достижения цели действия сил. Указываются также взаимосвязи, последовательность выполнения мероприятий. Цель действия сил целесообразно указывать даже в том случае, когда цель моделирования связана с оценкой только временных параметров, являющихся в условиях поставленной силам задачи дополнительными показателями эффективности. Исключение составляют случаи, когда из соображений скрытности подготовки сил командир на данном ее этапе не желает сообщать подчиненным цель действий.

Приведем некоторые примеры формулировок целей моделирования.

1. Осуществить сравнительную оценку указанных методов подготовки соединения к выполнению поставленной задачи (последовательного, параллельного, заданных смешанных методов) в заданный срок, выявить их сильные стороны и стороны слабые, способные сорвать своевременную подготовку.

2. Осуществить сравнительную оценку заданных вариантов взаимодействия сил по времени выполнения поставленной задачи, выявить возможность взаимных помех (для указанных объектов, групп боевого порядка соединения).

3. Осуществить сравнительную оценку заданных вариантов взаимодействия сил при выполнении поставленной задачи в срок не позже заданного, выявить возможность взаимных помех (для указанных объектов, групп боевого порядка соединения)*.

* Читателю предлагается доказать, что в п. 2. показателем эффективности является математическое ожидание времени выполнения поставленной задачи, а в п. 3 — вероятность выполнения задачи в срок не позже заданного.

4. Обосновать время подготовки соединения к выполнению поставленной задачи указанным методом (такая цель моделирования возникает при расчете времени в ходе уяснения командиром поставленной задачи).

5. Обосновать время выполнения поставленной соединению задачи при указанной организации взаимодействия сил (эта цель моделирования возникает при оценке командиром времени в ходе оценки обстановки).

6. Осуществить сравнительную оценку вариантов плана перевода сил в другие степени готовности, выявить слабые и сильные места планов и т. д.

Основанием при формулировке цели действия сил, цели моделирования являются результаты уяснения командиром поставленной задачи, оценки обстановки, разработки указаний штабу на выполнение математического моделирования (см. п. 2.3.3).

Самостоятельной целью математического моделирования может быть обеспечение контроля за ходом спланированного процесса и обоснования внесения необходимых коррективов в решение (план). Однако в общем случае любая сетевая модель должна представлять такую возможность, если эта модель была использована для обоснования решения (плана).

Следующий элемент постановки задачи — описание управляемого процесса как случайного процесса выполнения комплекса мероприятий, находящихся во взаимной связи и взаимной обусловленности. Для этого необходимо составить полный перечень мероприятий и указать для каждого из них, какие мероприятия начинают выполняться после его завершения. В ряде случаев может оказаться полезным и составление перечня событий с указанием их последовательности. Основанием для разработки комплекса мероприятий, последовательности их выполнения являются замысел, решение командира на порядок применения сил, использования средств, в частности разработанные им последовательность и способы разгрома противника, организация взаимодействия и т. д. Кроме того, используются рекомендации, положения, изложенные в руководящих документах.

Специалисту по исследованию операций целесообразно свести в таблицу перечень мероприятий и последовательность их выполнения (иногда оказывается полезным составление и таблицы перечня событий). Нумерация мероприятий и событий в таких таблицах произвольная.

Время выполнения мероприятий процесса в общем случае является случайной величиной со своими законами распределения и числовыми характеристиками — математическими ожиданиями и средними квадратическими отклонениями. Вычисление всех параметров сетевого графика требует знания этих числовых характеристик мероприятий. Источниками их получения могут являться, во-первых, статистические данные (в том числе сведенные в нормативы) и, во-вторых, экспертные оценки (см. § 7.2). Некоторые известные командиру нормативы он может указать в постановке задачи. Кроме того, по рекомендации специалиста по исследованию операций он даст указания о сборе необходимых статистических данных и (или) формировании группы экспертов*.

* При непосредственной подготовке, в ходе ведения боя, операции, как правило, должны использоваться исходные данные из банка данных.

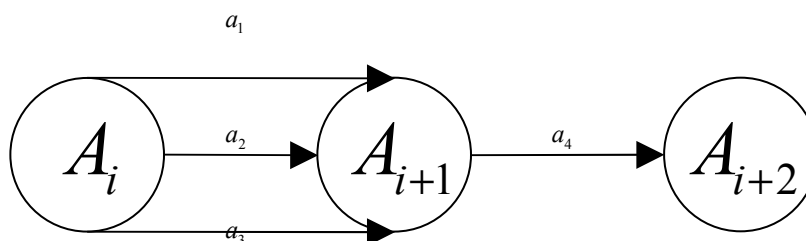


Рис.7.1

Рассмотрим пример оперативно-тактической постановки задачи. Целью примера является показ того, как на основании постановки задачи разрабатывается таблица перечня мероприятий. Далее эта таблица будет использована при иллюстрации процесса разработки сетевой модели.

Пример 7.1. Планируется нанесение совместного удара по конвою (Кон) противника соединением надводных кораблей и авиацией. Время для подготовки и нанесения удара 10 ч. Подготовка сил к выполнению поставленной задачи начинается с получением данных о Кон от сил разведки. Необходимые мероприятия штаб выполняет в соответствии с существующей методикой работы. Отдача предварительных распоряжений силам осуществляется в установленном порядке. Постановка задач силам выполняется в пунктах их постоянного базирования.

КП соединения надводных кораблей с выходом соединения в огневые позиции (ОП) устанавливает связь с КП авиации. Особенности условий применения оружия соединением авиации и сохранение боевой устойчивости соединением надводных кораблей требуют, чтобы авиация заняла ОП не ранее времени t_1 и не позже чем через время t_2 относительно момента времени t занятия ОП кораблями. Цель действий сил — поражение максимально возможного числа транспортов Кон. Цель моделирования — оценка времени выполнения задачи, вероятности выполнения задачи в срок не позже заданного $T_3 = 10$ ч, своевременного занятия ОП авиацией и надводными кораблями ($t_1 \leq t \leq t_2$).

Для определения временных параметров, необходимых при моделировании, следует использовать оценки специалистов штаба (экспертные оценки).

Соответствующие этой постановке задачи мероприятия, последовательность их выполнения приведена в табл. 7.1.

§ 7.2. РАЗРАБОТКА СЕТЕВОЙ МОДЕЛИ

Для достижения любых целей моделирования необходимо уметь разрабатывать сетевую модель — сеть (сетевой график) и методы вычисления параметров сети. Это умение, а также умение выявлять и формулировать показатели эффективности позволит специалисту по исследованию операций выполнить все мероприятия 2-го этапа исследования операций (см. § 2.1) и, кроме того, является необходимым условием эффективного выполнения содержания 3-го и 4-го этапов.

7.2.1. Разработка сети, сетевого графика

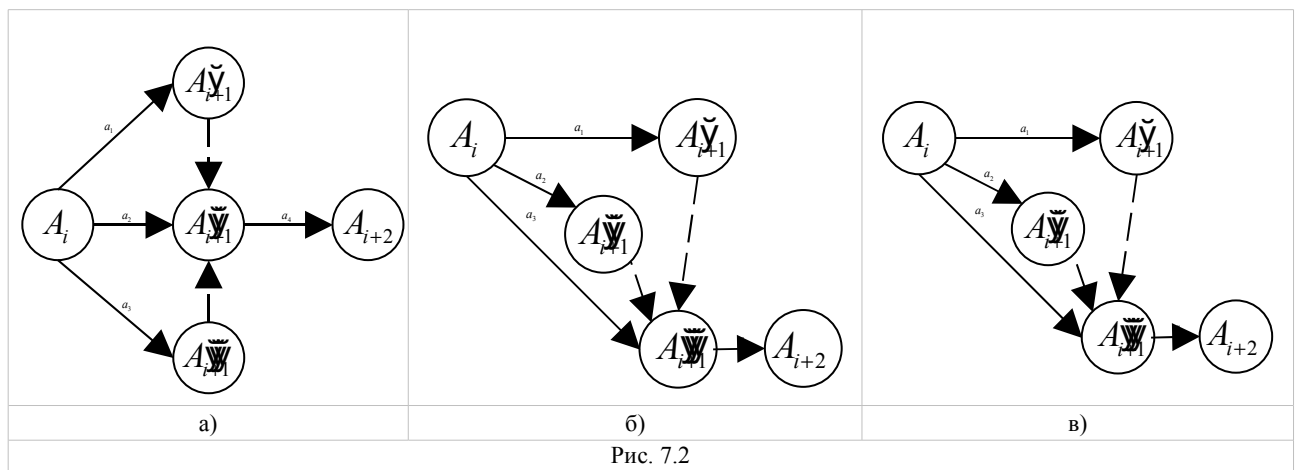
Более наглядным и доступным для понимания является изложение метода разработки сетевого графика. Если же из этого метода исключить способы графических построений, то оставшаяся часть составит метод построения сети. Предварительно целесообразно на некоторых примерах показать

способы использования фиктивных мероприятий для отражения в сети “технологических” особенностей процесса.

Пример 7.2. По замыслу командира удар по противнику должны нанести КУГ № 1, 2, 3 только после того, как все они будут развернуты в назначенные им районы. Развертывание групп начинается одновременно. Необходимо отразить на сетевом графике эту часть замысла командира.

Обозначим через a_1, a_2, a_3 мероприятия “развертывание в назначенные районы КУГ № 1, 2 и 3” соответственно, через a_4 — мероприятие “нанесение группами ударов по противнику”, через A_i — событие “закончена подготовка всех групп к развертыванию”, а через A_{i+1}, A_{i+2} — событие “закончено развертывание всех групп” и событие “закончено нанесение группами ударов по противнику” соответственно.

Проще всего было бы вычертить эту часть сетевого графика так, как показано на рис. 7.1. Однако на сетевом графике не используются ломаные или изогнутые стрелки. Причиной этого является не только и не столько снижение наглядности сетевого графика, сколько трудности расчета параметров сети при таком способе ее построения. Для исключения этих трудностей вводятся фиктивные работы и дополнительные события (вершины). Обозначим через $A'_{i+1}, A''_{i+1}, A'''_{i+1}$ события “завершено развертывание КУГ № 1, 2, 3” соответственно. На рис. 7.2, а, б, в графически отражено требование командира о нанесении ударов только после окончания развертывания всех трех групп, так как при всех трех изображениях процесса мероприятие a_4 считается возможным лишь после выполнения всех трех мероприятий $a_1, a_2,$



a_3 . Не всегда, однако, направления пунктирных стрелок на графике могут выбираться так свободно: это зависит от особенностей процесса.

Пример 7.3. Планируется высадка десанта. Предусматривается сосредоточение десантных кораблей и подразделений десанта в одном из пунктов базирования. С прибытием в этот пункт десантных кораблей будет организована их дозаправка топливом, а после прибытия туда же и подразделений десанта будет проведена тренировка в их погрузке на корабли. Требуется отразить этот эпизод на соответствующем участке сетевого графика.

Обозначим: A'_i, A''_i — события “начато сосредоточение десантных кораблей в пункте базирования” и “начато сосредоточение десантных подразделений в пункте базирования”

соответственно; A'_{i+1} , A''_{i+1} — события “окончено сосредоточение десантных кораблей в пункте базирования”, “окончено сосредоточение десантных подразделений в пункте базирования” соответственно; a_1 , a_2 — мероприятия “выполнение сосредоточения десантных кораблей в пункте базирования”, “выполнение сосредоточения десантных подразделений в пункте базирования” соответственно; a_3 — мероприятие “дозаправка кораблей топливом”; a_4 — мероприятие “тренировка подразделений десанта в посадке на корабли”.

На сетевом графике этот эпизод будет изображен так, как показано на рис. 7.3. Читатель может убедиться, что всякое иное направление пунктирной стрелки искаженно отразит на графике планируемые действия.

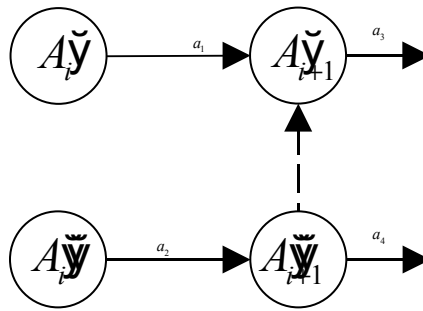


Рис. 7.3

Итак, необходимость использования фиктивных мероприятий при разработке сети возникает в следующих ситуациях (рис. 7.1—7.3): одному из последующих мероприятий непосредственно предшествуют сразу несколько предыдущих; между тем по условиям исполнения сетевого графика стрелка “последующее мероприятие” непосредственно следует только после одной стрелки “предыдущее мероприятие” (из числа указанных). Тогда окончания других стрелок “предыдущее мероприятие” из числа указанных соединяются пунктирной стрелкой “фиктивное мероприятие” с началом стрелки “последующее мероприятие”.

Таблица 7.1

Номер мероприятия	Наименование мероприятий	Последующие мероприятия	Продолжительность выполнения мероприятий, ч			
			наименьш. (оптимистич.)	наибольш. (пессимистич.)	наиболее вероят.	средняя
1	2	3	4	5	6	7
1	Получение данных о Кон от сил разведки	2	0,2	0,6	0,4	0,4
2	Уяснение задачи, оценка обстановки	3, 4, 5	0,5	0,8	0,62	0,63
3	Отдача предварительных распоряжений соединению надводных кораблей	6	0,1	0,5	0,3	0,3
4	Принятие командующим решения на уничтожение Кон	7, 8	0,4	0,6	0,5	0,5

5	Отдача предварительных распоряжений авиационному соединению	9	0,1	0,6	0,4	0,38
6	Выполнение предварительных распоряжений соединением надводных кораблей	10	0,5	2,5	1,3	1,37
7	Постановка боевой задачи соединению надводных кораблей	10	0,1	0,4	0,2	0,22
8	Постановка боевой задачи авиационному соединению	11	0,1	0,5	0,3	0,3
9	Выполнение предварительных распоряжений авиационным соединением	11	2,0	3,0	2,5	2,5
10	Переход соединения надводных кораблей в район боя	12	5,0	8,0	6,0	6,17
11	Взлет и построение самолетов	13	0,1	0,3	0,2	0,2
12	Установление связи между соединением надводных кораблей и авиационным соединением перед ударом по Кон	14	0,1	0,2	0,15	0,15
13	Перелет самолетов в район	12	4	6	5	5,0
14	Нанесение совместного удара по Кон	—	0,3	0,5	0,4	0,4

Сетевой график может составляться двумя способами — с учетом известных особенностей процесса и сугубо формально. Рассмотрим второй способ, используемый при разработке программного обеспечения ЭВМ.

Из комплекса мероприятий необходимо выбрать такие (такое), у которых нет предшествующих мероприятий. Они изображаются стрелками, исходящими из первого события “начало процесса”, и заканчиваются кружочками, изображающими наступление соответствующих событий. Наступление этих событий дает возможность перейти к последующим мероприятиям. Они выбираются из перечня мероприятий. Так поступают до тех пор, пока не будет изображено завершающее событие. Фиктивные мероприятия при этом используются в соответствии с правилом, изложенным выше. Подобным образом разработаны алгоритмы, необходимые для того, чтобы ЭВМ сформировала сеть. Эта сеть хранится в памяти ЭВМ, но многие машинные программы дают возможность изобразить сеть (полученный сетевой график) с помощью ЭВМ на бумаге.

Рассмотрим процесс составления сетевого графика на примере постановки задачи, данной в табл. 7.1. Мероприятия, необходимые для достижения цели действий сил, приведены в табл. 7.1 (столбцы 1—3).

Начальным является событие “конвой обнаружен”. Изобразим его кружком. Это — первая вершина сети (рис. 7.4). Далее

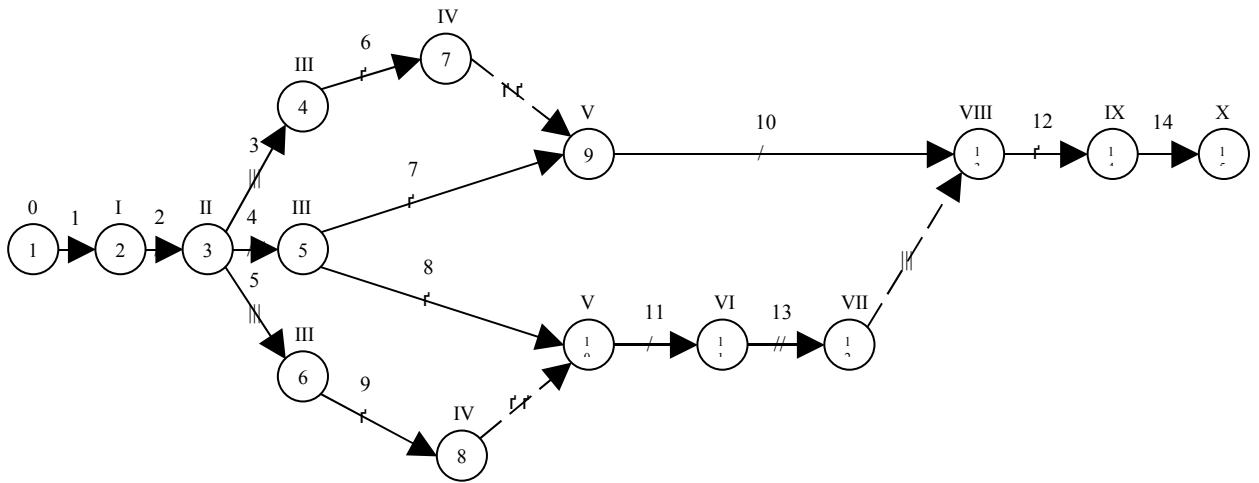


Рис. 7.4

находим в табл. 7.1 мероприятие 1 — “получение данных о Кон от сил разведки”, которое не имеет предшествующих событий. Изображаем его стрелкой, исходящей из первой вершины и завершаем кружком, изображающим второе событие — “данные о Кон от сил разведки получены” (вторая вершина сети). В соответствии с перечнем мероприятий табл. 7.1 последующим является мероприятие “уяснение задачи, оценка обстановки”. На графике из второй вершины сети проводим вторую стрелку, которая завершается третьим событием — “командир уяснил задачу и оценил обстановку”. Завершение второго мероприятия открывает возможность выполнения сразу трех мероприятий. (3, 4, 5). Они изображаются тремя стрелками, исходящими из второй вершины. Действуя аналогично, изображают на графике все мероприятия и события процесса (ребра и вершины сети). Необходимость в фиктивных работах при этом возникает трижды — перед мероприятиями 10, 11, 12. Как видно, они отражают связь между путями сети. Может оказаться, что некоторые стрелки на сетевом графике пересекаются, снижая наглядность графика. Чтобы избежать этого, следует изменить взаимное расположение путей.

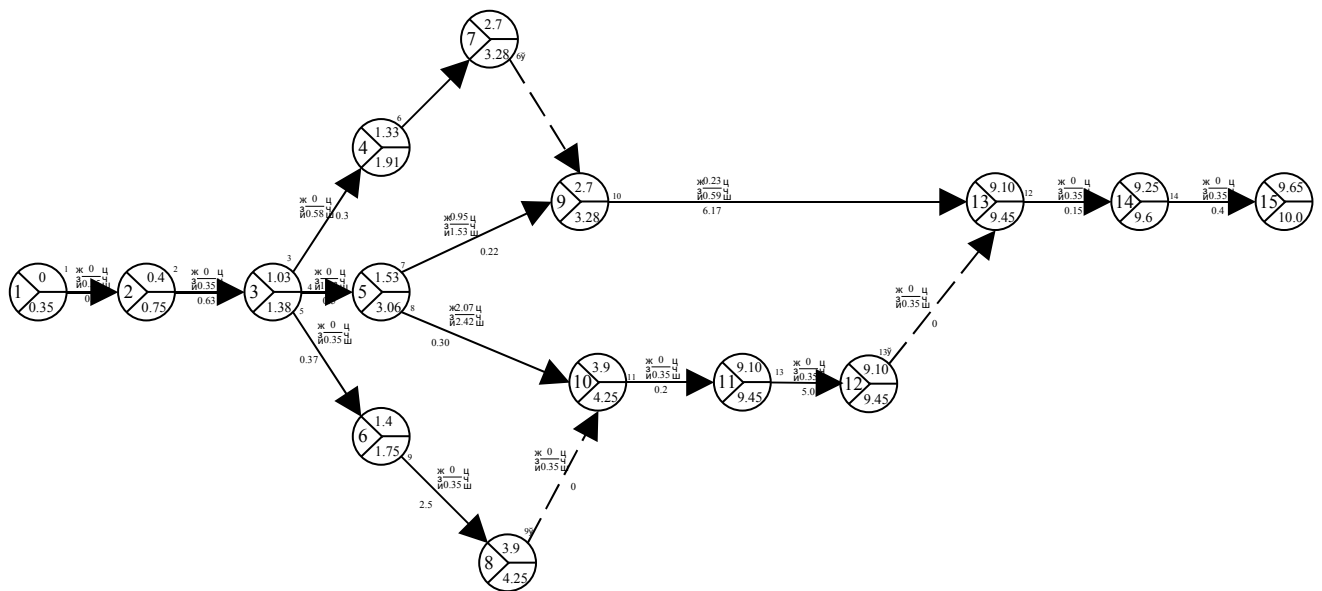
При составлении сетевого графика не должно быть циклов стрелок, образующих замкнутый контур. Его наличие свидетельствует об ошибке в определении последовательности мероприятий.

При использовании ЭВМ для формирования сети и вычисления ее параметров целесообразно пронумеровать вершины сети (события) по определенному правилу, в основе которого лежит распределение вершин по рангам. Графически это выглядит следующим образом. Начальной вершине соответствует нулевой ранг. Все стрелки, выходящие из вершины нулевого ранга, вычеркиваются. Всем вершинам, оставшимся после этого без входящих стрелок, присваивается первый ранг. Далее вычеркиваются все стрелки, исходящие из вершин первого ранга, и оставшимся без входящих стрелок вершинам присваивается второй ранг. И т. д. до завершающего события.

После этого вершины пронумеровываются следующим образом: вершине нулевого ранга присваивается первый номер, затем порядковые номера присваиваются вершинам первого, второго и т. д. рангов. Вершины одного ранга нумеруются в какой-то установленной последовательности

(допустим, сверху вниз на сетевом графике). На рис. 7.4 номера рангов вершин показаны римскими цифрами над кружками, а новые номера вершин — арабскими цифрами внутри соответствующих кружков. Над стрелками проставлены номера мероприятий из их перечня (см. табл. 7.1). Новой нумерации вершин соответствует новая нумерация мероприятий. Номер мероприятия состоит из двух цифр (двух групп цифр). Первая цифра (группа цифр) — номер исходного для данного мероприятия события, вторая — номер последующего события. Например, мероприятие с прежним номером 10 теперь будет иметь номер A_9, A_{13} , где A_9 и A_{13} — номера исходного и последующего событий соответственно.

Часто сетевой график изображают так, как показано на рис. 7.5. Здесь каждый кружок разбит на три сектора: в левом секторе показан номер A_i вершины, в верхнем — раннее $T_i^{(0)}$ время наступления соответствующего события, в нижнем — позднее $T_i^{(1)}$ время наступления этого события. Над стрелками в скобках показаны свободные τ_{ij} (в числителе) и полные τ'_{ij} (в знаменателе) резервы времени мероприятий. Внизу под стрелками помещены временные оценки t_{ij} мероприятий (математические ожидания времени их выполнения). Методы вычисления этих и других параметров сети изложены ниже.



Номера вершин

L_{KP} : 1→2→3→6→8→10→11→12→13→14→15

L_2 : 1→2→3→4→7→9→13→14→15

L_3 : 1→2→3→5→10→13→14→15

L_4 : 1→2→3→5→10→11→12→13→14→15

Рис.7.5

7.2.2. Методы расчета временных параметров сети

Параметры сети с точки зрения методов их расчета можно разделить на две группы. Методы расчета параметров первой группы разработаны для допущения, что времена выполнения мероприятий сети являются не случайными, а детерминированными* величинами, равными их математическим ожиданиям (средним значениям t_{ij}). В оперативно-тактической области из параметров первой группы чаще всего используются: временные оценки t_{ij} мероприятий, ранние $T_i^{(0)}$ и поздние $T_i^{(1)}$ сроки наступления событий, критическое время $T_{кр}$ процесса, свободные τ_{ij} и полные τ'_{ij} резервы времени мероприятий, длины $t(L_i)$ i -х путей. Методы расчета параметров второй группы — вероятностных характеристик моделируемого процесса — разработаны с учетом того, что времена выполнения мероприятий есть непрерывные случайные величины, а управляемый процесс является случайным процессом (см. п. 7.2.3). Параметры второй группы несут объективно более полную информацию об управляемом процессе, чем параметры первой группы.

Временная оценка t_{ij} мероприятия A_iA_j есть математическое ожидание (среднее значение) времени выполнения мероприятия. Она может быть получена одним из трех методов:

- на основании статистических данных, в том числе нормативов;
- на основании расчетов методами теории вероятностей;
- по данным экспертных оценок.

Методы нахождения статистических оценок вероятностных характеристик рассматриваются в гл. 8 учебника. Методы теории вероятностей изложены в многочисленных пособиях по теории вероятностей (см., например [6]). Эти методы требуют знания закона распределения случайной величины — времени выполнения конкретного мероприятия. В том случае, если эти два метода применить невозможно, прибегают к экспертным оценкам. Исследования показали способность специалистов (экспертов) оценивать следующие три параметра:

- наименьшую продолжительность выполнения мероприятия (оптимистическую оценку времени);
- наибольшую продолжительность выполнения мероприятия (пессимистическую оценку времени);
- наиболее вероятную продолжительность выполнения мероприятия (моду распределения).

Установлено, что в качестве закона распределения случайной величины — времени выполнения мероприятия — при использовании указанных экспертных оценок, может быть принято так называемое β -распределение.

Для расчета математического ожидания t_{ij} времени выполнения мероприятия A_iA_j применяется следующая формула, полученная на основе β -распределения:

$$t_{ij} = \frac{a_{ij} + b_{ij} + 4m_{ij}}{6}, \quad (7.2.1)$$

где a_{ij} , b_{ij} , m_{ij} — экспертные оценки наименьшего, наибольшего, наиболее вероятного времени выполнения мероприятия. Этому времени соответствует средняя квадратическая ошибка

* Неучет при использовании сетевой модели этого обстоятельства приводит к недоразумениям: руководители, обнаружив, что параметры реального процесса отличаются от предвычисленных, считают либо ошибочными выполненные расчеты, либо даже весь метод в целом.

$$\sigma_{ij} = \frac{b_{ij} - a_{ij}}{6}. \quad (7.2.2)$$

Если эксперт способен указать лишь оценки a_{ij} и b_{ij} , то

$$t_{ij} = \frac{3a_{ij} + 2b_{ij}}{5}; \quad (7.2.3)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{b_{ij} - a_{ij}}{5}. \quad (7.2.4)$$

Обратим внимание, что вычисленный по формуле (7.2.2) или (7.2.4) на основании экспертных оценок параметр σ_{ij} оценивает рассеивание случайной величины — время выполнения мероприятия $A_i A_j$ процесса — относительно его математического ожидания t_{ij} в результате совместного влияния двух причин: объективно существующих условий и субъективного мнения эксперта об этих условиях.

Раннее время $T_j^{(0)}$ наступления события A_j равно длине пути (наибольшей из длин, если их несколько), ведущего из начального события A_1 в рассматриваемое событие A_j .

Обратимся к рис. 7.5. Из начального события A_1 к событию A_9 ведут два пути. Их длины равны

$$L_1(A_1 - A_9) = 0,4 + 0,63 + 0,3 + 1,37 + 0,0 = 2,7 \text{ ч};$$

$$L_2(A_1 - A_9) = 0,4 + 0,63 + 0,5 + 0,22 = 1,75 \text{ ч}.$$

Событие не может наступить, если не выполнены все мероприятия, ведущие к этому событию. Поэтому ранним временем наступления события A_9 является $T_9^{(0)} = 2,7 \text{ ч}$.

Ранние времена наступления всех событий вычисляются последовательно с первого до конечного события по формуле

$$T_j^{(0)} = \max_i \{ T_i^{(0)} + t_{ij} \}, \quad (7.2.5)$$

где $T_i^{(0)}$ — раннее время наступления предыдущего (относительно рассматриваемого события A_j) события $A_i (i < j)$; t_{ij} — среднее время выполнения мероприятия $A_i A_j$.

Раннее время наступления события A_9 по формуле (7.2.5) будет равно

$$\begin{aligned} T_9^{(0)} &= \max \{ T_7^{(0)} + t_{79}; T_5^{(0)} + t_{59} \} = \max \{ 2,7 + 0; 1,53 + 0,22 \} = \\ &= \max \{ 2,7; 1,75 \} = 2,7 \text{ ч}. \end{aligned}$$

Раннее время наступления завершающего события получило специальное название *критическое время* $T_{кр}$ процесса. Из анализа способа получения критического времени следует, что этот параметр является математическим ожиданием (средним значением) времени выполнения управляемого процесса. Путь наибольшей длины от начального до конечного события называется *критическим путем*. Критических путей может быть несколько.

Критический путь (пути) может выявляться после вычисления ранних времен наступления событий. Необходимо последовательно, начиная с заключительного события, использовать ранее выполненные вычисления времен $T_j^{(0)}$ по формуле (7.2.5), чтобы для каждого события A_j определить

то из предыдущих событий A_i , раннее время $T_i^{(0)}$ наступления которого учтено при вычислении раннего времени $T_j^{(0)}$ наступления данного события A_j . Выявленная таким образом вершина A_i является одной из вершин критического пути*.

Читателю предлагается самостоятельно рассчитать временные оценки t_{ij} мероприятий $A_i A_j$ и ранние времена $T_j^{(0)}$ событий для условий примера 7.1 и оценок экспертов, приведенных в табл. 7.1 (графы 4, 5, 6). Полученные результаты сравнить с данными, помещенными в графе 7 (временные оценки мероприятий) и в верхних секторах кружков рис. 7.5 (ранние времена наступления событий).

Командиру может быть задано либо им самим указано время T_3 , не позже которого должен быть завершен управляемый процесс. В общем случае времена T_3 и $T_{кр}$ будут разными. При этом возникает необходимость нахождения поздних времен наступления событий. Далее принимается, что $T_3 \geq T_{кр}$.

Поздним временем $T_j^{(1)}$ наступления события A_j называется такое время, которое обеспечивает выполнение всех последующих мероприятий в заданный срок T_3 . Расчет поздних времен наступления событий начинается с завершающего события, для которого оно равно заданному. Далее последовательно от конца к началу осуществляют расчет $T_j^{(1)}$, вычитая из позднего времени $T_k^{(1)}$ наступления последующего события A_k время t_{jk} выполнения мероприятия $A_j A_k$:

$$T_j^{(1)} = T_k^{(1)} - t_{jk}. \quad (7.2.6)$$

Пусть для сетевого графика на рис. 7.5 задано $T_{15}^{(1)} = T_3 = 10$ ч. Тогда

$$T_{14}^{(1)} = T_{15}^{(1)} - t_{14,15} = 10 - 0,4 = 9,6 \text{ ч};$$

$$T_{13}^{(1)} = T_{14}^{(1)} - t_{13,14} = 9,6 - 0,15 = 9,45 \text{ ч}$$

и т. д.

В случае, если к какой-либо вершине сетевого графика из конечного события ведут несколько путей, расчет позднего времени осуществляется по всем этим путям и принимается наименьшее время. Условно это правило записывается так:

$$T_j^{(1)} = \min_k \{ T_k^{(1)} - t_{jk} \}. \quad (7.2.7)$$

Например, к событию A_5 , на рис. 7.5 ведут два пути из события A_{15} — через события A_9 и A_{10} . Поздние времена наступления этих событий, рассчитанные по формуле (7.2.6), составляют соответственно $T_9^{(1)} = 3,28$ ч, $T_{10}^{(1)} = 4,25$ ч. Тогда по формуле (7.2.7) получим

$$\begin{aligned} T_5^{(1)} &= \min_k \{ T_9^{(1)} - t_{5,9}; T_{10}^{(1)} - t_{5,10} \} = \\ &= \min_k \{ 3,28 - 0,22; 4,25 - 0,30 \} = 3,06 \text{ ч.} \end{aligned}$$

Читателю предлагается самостоятельно вычислить поздние времена наступления событий для сетевого графика на рис. 7.5, считая $T_3 = 10$ ч, и результаты сравнить с временами $T_j^{(1)}$, помещенными в нижних секторах кружков.

* Аналогичным образом вершины критического пути могут регистрироваться и непосредственно в процессе вычисления ранних времен наступления событий с использованием формулы (7.2.5).

Знание параметров $T_j^{(0)}$, $T_j^{(1)}$ позволяет определить другие важные параметры управляемого процесса — резервы времени мероприятий.

Свободным резервом τ_{ij} времени выполнения мероприятия $A_i A_j$ называется такой промежуток времени, на который может быть задержано начало или увеличена продолжительность выполнения этого мероприятия без изменения раннего времени $T_j^{(0)}$ наступления последующего события A_j , если предыдущее событие A_i наступит в раннее время $T_i^{(0)}$. Свободные резервы времени мероприятий равны

$$\tau_{ij} = (T_j^{(0)} - T_i^{(0)}) - t_{ij}. \quad (7.2.8)$$

Рассмотрим мероприятие $A_5 A_9$ сетевого графика на рис. 7.5. Свободный его резерв составит

$$\tau_{5,9} = (2,7 - 1,53) - 0,22 = 1,17 - 0,22 = 0,95.$$

Обратим внимание, что величина $T_5^{(0)} - T_9^{(0)} = 1,17$ ч есть значение всего промежутка времени между ранними временами наступления смежных событий A_5 и A_9 ; $t_{59} = 0,22$ — время (среднее), необходимое для выполнения мероприятия $A_5 A_9$, разница этих величин и есть свободный резерв времени мероприятия.

Ни одно из мероприятий критического пути не имеет свободных резервов времени. Такая особенность следует из способа вычисления ранних времен наступления событий и может использоваться для нахождения критического пути.

Если израсходовать свободный резерв времени у какого-либо мероприятия не критического пути, это не приведет к изменению ранних времен наступления каких-либо событий, к появлению нового критического пути (если только этот свободный резерв не является единственным на данном пути), к изменению критического времени процесса. Новый критический путь появится, если израсходовать свободные резервы времени всех мероприятий этого пути. Про это свойство еще можно сказать, что длина любого полного пути, сложенная со свободными резервами времени всех мероприятий пути, равна критическому времени. Указанное свойство используется для проверки правильности вычислений ранних времен наступления событий и свободных резервов времени.

Читателю предлагается вычислить по формуле (7.2.8) свободные резервы времени всех мероприятий сетевого графика на рис. 7.5, сравнить полученные результаты с приведенными на этом рисунке (см. цифры над чертой в скобках, помещенные над стрелками, изображающими мероприятия), пронаблюдать указанные выше свойства свободных резервов времени для данного сетевого графика.

Полным резервом τ'_j времени выполнения мероприятия $A_i A_j$ называется промежуток времени, на который можно задержать начало выполнения мероприятия или увеличить продолжительность его выполнения и завершить последующее событие A_j в позднее время $T_j^{(1)}$, если предыдущее событие A_i наступило в раннее время $T_i^{(0)}$.

Полные резервы времени вычисляются по формуле

$$\tau'_{ij} = (T_j^{(1)} - T_i^{(0)}) - t_{ij}. \quad (7.2.9)$$

С учетом выражения (7.2.8) получим

$$\tau'_{ij} = T_j^{(1)} - T_j^{(0)} + \tau_{ij}. \quad (7.2.10)$$

Для примера вычислим полный резерв времени мероприятия $A_4 A_7$ сетевого графика на рис. 7.5. Воспользовавшись формулой (7.2.9), будем иметь

$$\tau'_{ij} = (3,28 - 1,33) - 1,37 = 0,58.$$

Если заданное время T_3 больше критического времени или равно ему, то полные резервы τ'_{ij} не меньше свободных резервов ($\tau'_{ij} \geq \tau_{ij}$). При $T_3 > T_{кр}$ мероприятия критического пути имеют полные резервы, причем одинаковые для всех мероприятий (см. рис. 7.5, цифры под чертой, помещенные в скобках под стрелками). Одинаковые полные резервы времени имеют и участки не критического пути, опирающиеся на события критического пути (в том числе и тогда, когда такой путь опирается только на первое и последнее события сети). Если израсходовать полный резерв времени одного из мероприятий критического пути, то все остальные мероприятия пути останутся без резервов времени. Это правило справедливо и для не критических путей: израсходование полного резерва времени одного из мероприятий приводит к тому, что полных резервов будут лишены все последующие мероприятия одного из участков или всего пути. В результате этот участок пути станет “узким” местом процесса. По этой причине можно рекомендовать осмотрительность при расходовании полных резервов.

Читателю предлагается вычислить полные резервы времени мероприятий сетевого графика на рис. 7.5, сравнить полученные результаты с приведенными на рисунке, пронаблюдать указанные выше свойства полных резервов, а также доказать, что вычисленные изложенными методами свободные и полные резервы времени мероприятий суть математические ожидания этих параметров.

7.2.3. Методы расчета вероятностных характеристик сети

Математическое моделирование с использованием методов сетевого планирования (сетевое планирование) позволяет командиру последовательно, этап за этапом, переходить к более глубокому познанию закономерностей управляемого процесса.

Первый его этап — оперативно-тактическая постановка задачи — требует от командира четко сформулировать цель моделирования и полный перечень мероприятий, выполнение которых в определенной последовательности (командир должен их указать) ведет к достижению цели действий сил.

Второй этап познания связан с разработкой сети и ее графического отображения — сетевого графика, что дает возможность более полно оценить взаимосвязь между мероприятиями и событиями управляемого процесса.

Третий этап познания связан с определением временных параметров сети. Их знание позволяет составить суждение о возможных сроках выполнения всего управляемого процесса, его этапов, о соответствии планируемых сроков заданным и наличию резервов. Знание этих параметров необходимо для сравнительной оценки альтернативных планов, для разработки замысла совершенствования плана, для организации выполнения намеченного плана, контроля за ходом его выполнения, корректирования плана.

Однако, как уже указывалось, времена выполнения различных мероприятий плана, его путей, процесса в целом являются случайными величинами; при расчете временных параметров сети в качестве времени выполнения мероприятий, длин путей; критического времени процесса выступают математические ожидания соответствующих случайных величин. В связи с этим для наиболее полного суждения о закономерностях управляемого процесса в дополнение к указанной выше информации необходимо знание ряда вероятностных характеристик*. Наиболее важными из них являются:

— вероятность $P(T \leq T_3)$ выполнения всего комплекса мероприятий (поставленной задачи) в срок не позже заданного T_3 ;

— вероятность $P(T_1 \leq T \leq T_2)$ выполнение всего комплекса мероприятий в интервале времени $[T_1, T_2]$;

— вероятность $P(t(L_i) \leq T_{кр})$ того, что полный не критический путь L_i не превысит по длине критический путь (потенциально не является “узким” местом плана);

— вероятность $P(t(L_i) \leq T_3)$ того, что процесс выполнения мероприятий полного не критического пути L_i не приведет к срыву выполнения всего комплекса мероприятий (поставленной задачи) в заданный срок T_3 ;

— вероятность $P(t_1 \leq t(L_i) \leq t_2)$ того, что мероприятия пути L_i будут завершены в интервале времени $[t_1, t_2]$;

— вероятность $P(t_1 \leq (T_j - T_i) \leq t_2)$ того, что значения промежутка времени между наступлениями событий A_j одного пути и события A_i другого пути будут лежать в интервале $[t_1, t_2]$.

Знание этих вероятностей позволит составить окончательное суждение о возможности выполнения комплекса мероприятий в заданный срок, о напряженности всего процесса и отдельных его путей, заблаговременно выявить не критические пути, которые несут потенциальную угрозу срыва завершения намеченного плана в заданный срок, оценить возможность взаимных помех друг другу различных элементов боевого порядка соединения или возможность угрозы какого-либо воздействия со стороны противника и т. д.

В основе методов вычисления вероятностных характеристик сетевого плана лежит использование центральной предельной теоремы Ляпунова. Случайная величина — длина пути — является суммой большого числа (десятки, сотни) независимых случайных величин — времен выполнения различных мероприятий. По этой причине в соответствии с центральной предельной теоремой Ляпунова является правдоподобным допущение о нормальном законе распределения этой случайной величины. Тогда искомые вероятности определяются по известным формулам:

$$P(T \leq T_3) = \frac{1}{2} \left[1 + \Phi \left(\frac{T_3 - T_{кр}}{\sigma_{кр}} \right) \right]; \quad (7.2.11)$$

$$P(T_1 \leq T \leq T_2) = \frac{1}{2} \left[\Phi \left(\frac{T_2 - T_{кр}}{\sigma_{кр}} \right) - \Phi \left(\frac{T_1 - T_{кр}}{\sigma_{кр}} \right) \right]; \quad (7.2.12)$$

* Можно утверждать, что командир, не использующий в своей работе эти характеристики, теряет важнейшую информацию о закономерностях процесса, которую позволяют выявлять сетевые модели.

$$P(t(L_i) \leq T_{\text{кр}}) = \frac{1}{2} \left[1 + \Phi \left(\frac{T_{\text{кр}} - t(L_i)}{\sigma(L_i)} \right) \right]; \quad (7.2.13)$$

$$P(t(L_i) \leq T_s) = \frac{1}{2} \left[1 + \Phi \left(\frac{T_s - t(L_i)}{\sigma(L_i)} \right) \right]; \quad (7.2.14)$$

$$P(t_1 \leq T_j - T_i \leq t_2) = \frac{1}{2} \left[\Phi \left(\frac{t_2 - (T_j^{(0)} - T_i^{(0)})}{\sqrt{\sigma_{0j}^2 + \sigma_{0i}^2}} \right) - \Phi \left(\frac{t_1 - (T_j^{(0)} - T_i^{(0)})}{\sqrt{\sigma_{0j}^2 + \sigma_{0i}^2}} \right) \right], \quad (7.2.15)$$

где $\sigma_{\text{кр}}$, $\sigma(L_i)$ — средние квадратические отклонения времени выполнения мероприятий критического пути и пути L_i соответственно:

$$\sigma_{\text{кр}} = \sqrt{\sum_{(\text{кр})} \sigma_{ij}^2}; \quad \sigma(L_i) = \sqrt{\sum_{(L_i)} \sigma_{ij}^2}; \quad (7.2.16)$$

σ_{0j} , σ_{0i} — средние квадратические отклонения ранних времен $T_j^{(0)}$, $T_i^{(0)}$ наступления событий A_j и A_i соответственно:

$$\sigma_{0j} = \sqrt{\sum_{(L_{0j})} \sigma_{ij}^2}; \quad \sigma_{0i} = \sqrt{\sum_{(L_{0i})} \sigma_{ij}^2}. \quad (7.2.17)$$

Индекс (кр), (L_i) , (L_{0j}) и (L_{0i}) у знаков сумм показывают, что суммируются средние квадратические отклонения времени выполнения всех мероприятий, которые расположены на критическом пути, на пути L_i , на путях L_{0j} или L_{0i} наибольшей длины, ведущих из начального события к событию A_j и A_i соответственно.

Получение формул (7.2.11)—(7.2.14) достаточно очевидно, а формула (7.2.15) требует пояснений. Величина $X = (T_j - T_i)$ — промежуток времени между наступлениями событий A_j и A_i — есть случайная величина, композиция двух независимых случайных величин T_j и T_i , распределенных по нормальному закону*. Ее математическим ожиданием является величина $\bar{x} = (T_j^{(0)} - T_i^{(0)})$ — разность ранних времен наступления рассматриваемых событий (напомним, что раннее время наступления события равняется математическому ожиданию длины наибольшего пути, который ведет из начального в данное событие). Среднее квадратическое отклонение композиции $X = (T_j - T_i)$ двух случайных величин T_j и T_i определится по известной в теории вероятностей формуле $\sigma = \sqrt{\sigma_{0j}^2 + \sigma_{0i}^2}$.

Учитывая, что случайная величина X распределена по нормальному закону, можем написать

* Допущение о независимости случайных величин T_j , T_i может быть сделано ввиду их принадлежности к различным путям сети.

$$P(t_1 < X < t_2) = \frac{1}{2} \left[\Phi \left(\frac{t_2 - \bar{x}}{\sigma} \right) - \Phi \left(\frac{t_1 - \bar{x}}{\sigma} \right) \right],$$

а подставив значения X , \bar{x} , σ , получим выражение (7.2.15)*.

На практике могут потребоваться вероятности наступления многих других событий, реализации необходимых значений многих других случайных величин сети. Все они смогут быть получены методами, аналогичными нахождению вероятностей событий по формулам (7.2.11)—(7.2.15).

На основании опыта сетевого планирования считается, что приемлемые значения указанных выше вероятностей равны 0,3—0,65 (при условии энергичной организаторской деятельности командира, руководителя). Если вероятность меньше чем 0,3, то велик риск невыполнения мероприятий в заданный срок. Величина вероятности более 0,65 дает основания предполагать, что путь содержит избыточные резервы (что заданный срок T_3 , например, может быть уменьшен без опасения срыва выполнения поставленной задачи).

Читатель может убедиться, что для условий примера 7.1 и табл. 7.1 (см. также рис. 7.5) будем иметь:

1) вероятность выполнения поставленной задачи в срок не позже заданного $T_3 = 10$ ч:

$$P(T < T_3) = \frac{1}{2} \left[1 + \Phi \left(\frac{T_3 - T_{кр}}{\sigma_{кр}} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[1 + \Phi \left(\frac{10 - 9,65}{0,39} \right) \right] = 0,82;$$

2) вероятность того, что i -й некритический путь останется некритическим:

$$P(t_{L_2} < T_{кр}) = P(t_{L_2} < 9,65) = \frac{1}{2} \left[1 + \Phi \left(\frac{9,65 - 9,42}{0,52} \right) \right] = 0,67;$$

$$P(t_{L_3} < T_{кр}) = P(t_{L_3} < 9,65) = \frac{1}{2} \left[1 + \Phi \left(\frac{9,65 - 8,47}{0,51} \right) \right] = 0,99;$$

$$P(t_{L_4} < T_{кр}) = P(t_{L_4} < 9,65) = \frac{1}{2} \left[1 + \Phi \left(\frac{9,65 - 7,58}{0,36} \right) \right] = 0,99;$$

3) вероятность того, что интервал времени между прибытием в район надводных кораблей и авиации будет [0,5; 1,0 ч], составит

$$P \left(0,5 < \underbrace{L_{1,9,13} - L_{1,10,12}}_{\Delta t} < 1,0 \right) = \frac{1}{2} \left[\Phi \left(\frac{1,0 - \Delta t}{\sigma_c} \right) - \Phi \left(\frac{0,5 - \Delta t}{\sigma_c} \right) \right],$$

где $L_{1,9,13}$ — ранний срок прибытия в район надводных кораблей, равный длине наибольшего пути $L_{1,9,13}$; $L_{1,10,12}$ — ранний срок прибытия в район авиации, равный длине наибольшего пути $L_{1,10,12}$; $\Delta t = L_{1,9,13} - L_{1,10,12} = -0,23$; $\sigma_c = \sqrt{\sigma_n^2 + \sigma_a^2}$; σ_n , σ_a — средние квадратические отклонения длин путей $L_{1,9,13}$, $L_{1,10,12}$ соответственно.

* О композиции случайных величин, нормальном законе распределения см., например, в [6].

Подставив исходные данные, получим

$$P(0,5 < L_{1,9,13} - L_{1,10,12} < 1,0) = \frac{1}{2} \left[\Phi \left(\frac{1,0 + 0,23}{0,72} \right) - \Phi \left(\frac{0,5 + 0,23}{0,72} \right) \right] = 0,12.$$

Вычисленные вероятностные характеристики свидетельствуют: рассмотренный план не является напряженным, пути “узкие места” отсутствуют, однако порядок развертывания сил в район необходимо пересмотреть.

7.2.4. Включение сетевой модели в состав СМО ЭВМ. Рациональная последовательность подготовки к моделированию с использованием сетевых моделей

Особенностью сетевых моделей является возможность разработки системы стандартных процедур для включения разработанных моделей в состав СМО ЭВМ и выполнения затем оперативно-тактических расчетов.

Элементами системы процедур являются:

1. Процедура формирования модели системы по заданным: а) перечню мероприятий; б) последовательности их выполнения.

2. Процедура для вычисления временных параметров сети.

3. Процедура для вычисления заданных вероятностных характеристик сети.

4. Процедура для отображения результатов оперативно-тактических расчетов на ЭВМ в заданной форме, в том числе для отображения (выдачи на печать) сетевого графика. Отображение сетевого графика требует его укрупнения, если управляемый процесс включает большое число мероприятий. В этом случае какой-то участок (участки) сети изображаются на сетевом графике одним (несколькими) мероприятиями. Командир должен указать такие участки при постановке задачи. Например, он может потребовать, чтобы все мероприятия, выполняемые им лично, его заместителями, специалистами и подразделениями штаба в процессе уяснения поставленной задачи были учтены в сетевой модели, а на сетевом графике отражались одним мероприятием “уяснение командиром поставленной задачи”. Существует стандартная процедура для выполнения такого укрупнения и отображения укрупненной сети.

5. Процедура отображения календарного плана выполнения мероприятий соответствующего сетевого плана. Мероприятия этого плана ориентируются относительно ранних (поздних) сроков наступления событий или указанных моментов времени. Календарный план может выполняться в различной форме, в том числе в форме ориентированного относительно временной оси сетевого графика. Процедура позволяет также выделять из общего плана его фрагменты по различным заданным признакам: для мероприятий, выполняемых одними и теми же исполнителями; для мероприятий, выполняемых в некотором интервале времени и т. д.

6. Процедура документирования результатов сетевого планирования в установленной форме.

Существенным элементом СМО ЭВМ должны быть базы данных, ориентированные на различные цели моделирования в штабе данного соединения: расчет времени, оценка времени, обоснование взаимодействия групп боевого порядка — при подготовке соединения к выполнению поставленной задачи; обоснование взаимодействия кораблей, служб соединения — в процессе повседневного управления, при переводе соединения в различные степени готовности и т. д.

Все элементы оперативно-тактической постановки задачи могут задаваться с дисплея в процессе диалога с ЭВМ.

§ 7.3. ВЫПОЛНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НА ЭВМ, ВЫРАБОТКА ПРЕДЛОЖЕНИЙ ПО СОВЕРШЕНСТВОВАНИЮ ПЛАНА

Как уже указывалось, сетевая модель может использоваться автономно, но может являться блоком более общей модели. Например, она может потребоваться для вычисления каких-то вероятностно-временных характеристик, которые затем будут использованы в качестве параметров в модели более высокого уровня. Здесь рассмотрим автономное использование сетевой модели вначале для совершенствования плана*, а затем при его реализации.

Напомним особенности применения методов сетевого планирования в оперативно-тактической области: работа по совершенствованию сетевого плана проводится с точки зрения дополнительного показателя эффективности — вероятности выполнения управляемого процесса в заданный срок (математического ожидания времени выполнения процесса) — и с “оглядкой” на основной показатель эффективности, характеризующий степень достижения цели действий сил; стиль работы командира, специалиста штаба подобен изложенному в § 2.3 — сочетание творческого и формального при определяющей роли творческой деятельности командира, офицера штаба.

Сравнительная оценка альтернативных вариантов плана осуществляется сравнением вероятностей выполнения процесса в заданный срок или математических ожиданий времени выполнения процесса (в зависимости от избранного показателя эффективности). Из числа альтернативных вариантов исключаются те, которые содержат некритические пути, способные вызвать срыв выполнения процесса в заданный срок.

Более сложным и важным является совершенствование плана. Если план является неудовлетворительным по избранному показателю эффективности, то анализ сети, ее параметров должен указать направления совершенствования. Рекомендации по разработке таких направлений сводятся к следующему.

В первую очередь необходимо совершенствовать выполнение мероприятий критического пути (или путей, если их нес-колько), так как именно они определяют значение показателя эффективности. Возможны три способа совершенствования критического пути: выполнять какие-то мероприятия критического пути не последовательно, а параллельно; уменьшить время выполнения мероприятий этого пути; комбинированно использовать оба указанных способа.

Для организации параллельного выполнения мероприятий часто оказывается необходимым некоторые мероприятия рассматривать состоящими из нескольких мероприятий и предусматривать параллельное выполнение части составляющих мероприятий.

Сокращать время выполнения мероприятий можно главным образом за счет использования свободных или полных резервов времени мероприятий, не лежащих на критическом пути. Например, можно перераспределить личный состав соответствующих подразделений органа управления (если это допускает их численность и подготовленность). При этом следует учитывать указанную выше опасность, связанную с использованием полного резерва времени мероприятия, — возможность появления нового критического пути, новых узких мест.

В ряде случаев может оказаться целесообразным уточнение экспертных оценок времени выполнения мероприятий, повышение степени объективности их определения и за счет этого уменьшение средних квадратических ошибок временных оценок.

* Такую работу часто называют оптимизацией сетевого плана.

В том случае, когда принятые меры не дали желаемого результата, целесообразна разработка новых “технологий” выполнения отдельных мероприятий и плана в целом.

Рациональным примером повышения эффективности плана предстоящих действий и эффективности его реализации является разработка, анализ и оптимизация календарного плана выполнения участниками запланированных мероприятий (см. п. 7.2.4).

Целесообразно вначале разработать и оптимизировать общий календарный план (при большом числе мероприятий — фрагментарно), а затем на основании полученных результатов составить календарные планы участников его выполнения (подразделений штаба, кораблей, частей, групп боевого порядка, подразделений ремонтно-восстановительных и строительных организаций и частей и т. д.).

Перед составлением плана необходимо выявить те мероприятия, которые выполняются одними и теми же исполнителями (подразделениями, организациями и т. д.), и в особенности те из них, которые на сетевом графике выступают как выполняемые параллельно.

На общем календарном плане вначале определяются календарные сроки выполнения мероприятий критического пути, затем — некритических путей.

При разработке календарных сроков выполнения мероприятий подкритических путей необходимо придерживаться следующих правил.

1. Любое мероприятие не может оканчиваться позже позднего срока наступления следующего за ним события, чтобы сохранить отношения следования.

2. Если предыдущее мероприятие начинается в ранний срок и имеет резервы, то может оказаться возможным календарные сроки последующего мероприятия выбрать между ранним сроком окончания предыдущего и поздним сроком окончания рассматриваемого последующего события. Если же срок начала предыдущего мероприятия задерживается по времени относительно расчетного раннего срока, то раннее начало последующего мероприятия должно быть сдвинуто по крайней мере на ту же величину. Подвижки на календарном плане параллельно выполняемых мероприятий сетевого графика могут потребоваться в том случае, если они выполняются одним подразделением, организацией и т. д. и требуется сохранить их численный состав.

На рис. 7.6 показан вариант календарного плана выполнения мероприятий, полученный на основании сетевого графика, рассмотренного в примере 7.1 и изображенного на рис. 7.5. На этом календарном плане в верхней части помещена шкала масштаба времени. Ниже шкалы отрезками изображены мероприятия различных путей сетевого графика — сначала критического, затем подкритического (сверху вниз сетевого графика). Длины отрезков пропорциональны среднему времени выполнения мероприятий и исполнены в масштабе шкалы времени. Среднее время выполнения мероприятий изображено над отрезками. Номера мероприятий состояются из цифр, помещенных в начале и в конце отрезков. Эти цифры — номера соответствующих событий. Начало каждого отрезка привязано к ранним срокам наступления событий.

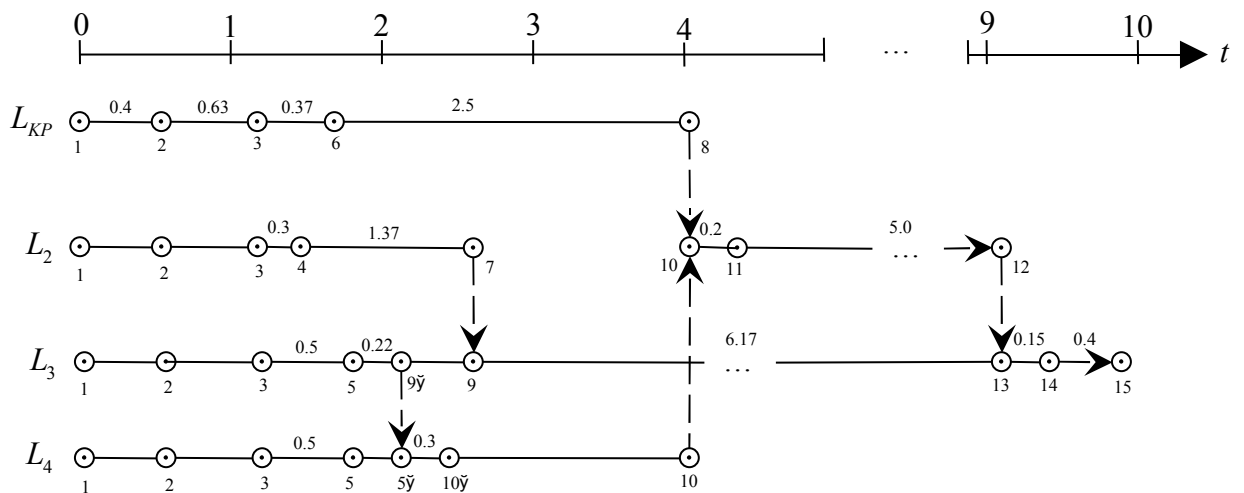


Рис. 7.6

Сетевой план, рассмотренный в примере 7.1 (см. табл. 7.1, рис. 7.5), предусматривает мероприятия A_5A_9 и A_5A_{10} — постановку задач корабельному и авиационному соединениям соответственно. На сетевом графике эти мероприятия изображены как выполняемые параллельно. Следует, однако, учесть, что постановка задач будет выполняться одним лицом — командиром. Поэтому на календарном плане рассматриваемые мероприятия должны быть разнесены по времени, что можно осуществить, если у мероприятий имеются свободные или полные резервы времени. В данном примере разнесение мероприятий по времени за счет их резервов возможно (см. рис. 7.5, мероприятия A_5A_9 ; A_5A_{10}). Если же резервы времени у таких мероприятий отсутствуют (либо недостаточны), а увеличивать число исполнителей невозможно или нецелесообразно, потребуется откорректировать как постановку задачи на разработку сетевой модели, так и сетевую модель, предусмотрев последовательное выполнение необходимых мероприятий, что повлечет увеличение длины соответствующего пути. Конечно, последовательное выполнение таких мероприятий может быть предусмотрено в сетевом плане с самого начала. Возможно также, что анализ календарного плана позволит выявить и целесообразность параллельного проведения некоторых мероприятий за счет увеличения числа исполнителей, изменения порядка (технологии) выполнения мероприятий.

Таким образом, анализ календарного плана должен позволить: 1) выявить необходимость и способы последовательного выполнения мероприятий, которые сетевым планом предусмотрено выполнять параллельно; 2) выявить возможность параллельного выполнения мероприятий, которые сетевым планом предусмотрено выполнять последовательно.

Такой анализ и такое совершенствование (уточнение) сетевого плана не поддается формализации и может быть результатом только творческой работы. Математическое и программное обеспечение ЭВМ должны обеспечить этот творческий процесс: позволить строить календарный план на основании сетевого плана, выделять и наглядно представлять на сетевом или (и) календарном плане мероприятия по заданным признакам (например, выполняемые одними и теми же подразделениями, выполняемые в заданном интервале времени и т. д.), вносить заданные корректировки в календарный план, исправлять календарный план на основании изменения сетевого плана и т. д.

После каждой корректировки плана необходимо уточнять (разрабатывать новую) сетевую модель, вычислять и анализировать ее временные параметры, вероятностные характеристики. Кроме

того, каждый раз следует убеждаться, что результаты корректировки не скажутся на основном показателе эффективности выполнения поставленной задачи — степени достижения поставленной цели. В противном случае необходимо использовать соответствующую модель применения сил и оценивать степень изменения основного показателя эффективности.

Может оказаться, что все разработанные способы совершенствования сетевого плана не привели к достаточной вероятности выполнения поставленной задачи в срок не позже заданного T , или к исключению взаимных помех и т. д., т. е. к выполнению требований по временным факторам. Тогда практикой сетевого планирования рекомендуется пересмотреть план полностью. С оперативно-тактической точки зрения это означает разработку нового замысла, решения, плана взаимодействия сил и т. д. Методика такой многошаговой творческой деятельности с использованием математического моделирования рассмотрена в § 2.3. Сетевое планирование в такой деятельности командира, офицера штаба потребует для обоснования вырабатываемых решений, планов с точки зрения их временных характеристик.

Сказанное выше справедливо также и для планирования в военно-экономической области, когда какой-либо из вероятностно-временных параметров сети будет выступать основным показателем эффективности.

Выше были изложены общие методы оптимизации управляемых процессов с помощью сетевых моделей. Однако в каждой предметной области при оптимизации требуется учет особенностей области. Для иллюстрации сказанного приведем примеры.

Пример 7.4. При заблаговременной подготовке боя оптимизируется процесс функционирования органа управления в ходе планирования, которое будет выполняться при непосредственной подготовке. Сетевая модель позволила выявить, что некоторые подразделения органа управления будут обладать значительными резервами времени, другие — будут перегружены работой и могут сорвать выполнение планирования в заданный срок.

Использовать полученные сведения (чтобы перераспределить при непосредственной подготовке личный состав между подразделениями органа управления) будет возможно, если некоторые конкретные специалисты обладают должной подготовкой (взаимозаменяемы). В противном случае командиру будет рекомендована организация соответствующей подготовки личного состава подразделений. Возможно, что окажется целесообразным изменить методику работы органа управления при планировании. Отработка новой методики также может потребовать организации соответствующей оперативной подготовки.

Пример 7.5. В условиях примера 7.4 считать, что оптимизация функционирования органа управления осуществляется при непосредственной подготовке боя. В этом случае перераспределение личного состава между “благополучными” и “неблагополучными” подразделениями, изменение формы подготовки боя будут возможны лишь в той степени, в какой будет подготовлен личный состав органа управления.

Пример 7.6. При оценке времени (с учетом установленного командиром взаимодействия сил) оказалось, что вероятность выполнения задачи в заданный срок мала. Анализ сетевой модели позволил выявить группы боевого порядка, обладающие резервами времени, и группы, являющиеся в этом смысле “узкими местами”.

В такой ситуации командир прежде всего использует результаты анализа сетевой модели, чтобы, не изменяя плана взаимодействия сил (в первую очередь установленной последовательности действий групп боевого порядка и целей, достигаемых при этом), добиться выполнения задачи в установленный срок. Для этого он будет прибегать к различным организационно-тактическим

приемам: изменять для некоторых групп районы ожидания, позиции применения оружия, порядок развертывания, маршруты, скорости движения, готовности сил к определенным моментам времени, изменять район выполнения поставленной задачи в целом (если это допустимо).

Если корректировка разработанного плана взаимодействия не дает необходимых результатов, то, как уже указывалось, план взаимодействия разрабатывается заново с учетом закономерностей, выявленных при корректировках предыдущего плана.

Пример 7.7. Сетевая модель решения военно-экономической задачи (допустим, строительства некоторого объекта) выявила необходимость сокращения времени выполнения задачи при неизменных ассигнованиях, т. е. за счет имеющихся резервов. Известны зависимости время выполнения мероприятий — стоимость выполнения мероприятий. В этом случае для оптимизации плана могут быть использованы методы математической оптимизации — линейное, нелинейное программирование [3, 4, 10, 11].

§ 7.4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СЕТЕВОЙ МОДЕЛИ В ПРОЦЕССЕ УПРАВЛЕНИЯ

7.4.1. Управляемые процессы как объекты сетевого моделирования

Утверждение командиром или другим руководителем результатов сетевого моделирования означает утверждение соответствующего плана взаимодействия в ходе управляемого процесса. Далее начинается этап реализации разработанного плана. На этом этапе помимо разработки календарных планов (см. выше) подготовленная сетевая модель используется для обеспечения объективного контроля за ходом управляемого процесса, корректирования исходного или разработки нового плана.

С точки зрения особенностей использования сетевого моделирования в процессе реализации плана управляемые процессы можно разделить на три группы.

Первая группа — процессы большой продолжительности (месяцы, годы). Имеется возможность систематически (еженедельно, ежеквартально и т. д.) подводить итоги работы, корректировать (разрабатывать новый) сетевой план, оптимизировать его, рассылать участникам откорректированные календарные планы и продолжать процесс. Примерами таких процессов являются процессы строительства, модернизации объектов, крупные организационные мероприятия (например, формирование, передислокация объединений), научно-конструкторские работы и т. д.

Вторая группа — процессы средней продолжительности (многие часы, сутки). Имеется возможность эпизодически, в связи с изменениями обстановки, корректировать сетевой план по результатам контроля за его исполнением, доводить результаты корректирования плана в нужном объеме до исполнителей. В качестве примера можно привести функционирование органов управления соединения и подчиненных, приданных сил (самых сил) в ходе подготовки к бою, боевым действиям, в процессе ведения боя, боевых действий.

Третья группа — процессы малой продолжительности (минуты, часы), когда корректирование сетевого плана невозможно. Сетевой план используется для первоначальной оптимизации процесса и для контроля за ходом управления, оценки целесообразности корректирования действий сил (участников). Примером таких процессов является подъем соединения по боевой тревоге, взаимодействие сил и средств при отражении воздушного удара, взаимодействие личного состава, обслуживающего систему оружия при его применении.

Отнесение управляемых процессов к тем или иным группам зависит не только от содержания этих процессов, но и от состояния системы МОУ (см. § 2.5), а также от качества заблаговременной подготовки и организации контроля за ходом процесса. Методы сетевого моделирования позволяют организовать контроль за ходом управления в масштабах реального времени.

7.4.2. Использование сетевой модели для обеспечения контроля за ходом управляемого процесса

Использование сетевых моделей на базе ЭВТ позволяет на любой момент времени:

а) знать фактические времена $T_j^{(\Phi)}$ совершения событий A_j и результаты сравнения их с расчетными ранними $T_j^{(0)}$ и поздними $T_j^{(1)}$ сроками наступления событий:

$$\Delta_j = T_j^{(0)} - T_j^{(\Phi)}; \quad \Delta'_j = T_j^{(1)} - T_j^{(\Phi)}.$$

Положительные значения Δ_j, Δ'_j свидетельствуют об отсутствии опоздания наступления соответствующих событий относительно расчетных ранних и поздних сроков соответственно;

б) прогнозировать дальнейшее протекание управляемого процесса, вырабатывать рекомендации относительно целесообразности (нецелесообразности) корректирования плана.

Прогнозирование и выдача рекомендаций осуществляются с точки зрения задаваемых командиром основного и системы дополнительных временных показателей эффективности: вероятности $P_3(T \leq T_3)$ выполнения задания в срок не позже заданного; математического ожидания $T_{кр}$ времени выполнения задания (критического времени процесса); вероятности $P(T_L \leq T_{кр})$ того, что подкритические пути не станут критическими; вероятности $P(T_i \leq T_j)$ наступления некоторого события A_i ранее наступления события A_j ($i \neq j$); вероятности $P[(T_i - T_j) \geq \Delta_{ij}]$ того, что событие A_j наступит ранее события A_i на время не меньшее, чем Δ_{ij} и т. д. Большое значение для командира будет иметь также знание величины изменения свободных и полных резервов времени событий.

Для вычисления всех этих показателей эффективности необходимо знать текущие (т. е. на момент времени t) значения ранних сроков наступления событий в будущем. При этом будем полагать, что заданное время T_3 завершения управляемого процесса осталось прежним, поэтому прежними останутся и поздние сроки $T_j^{(1)}$ наступления всех последующих (после момента времени t) событий.

Итак, допустим, что рассматривается момент времени t управляемого процесса. Найдем ранние сроки $T_j^{(0)}(t)$ наступления последующих событий. Для этого необходимо зафиксировать фактические времена $T_j^{(\Phi)}$ наступления событий в интервале времени $[0, t]$, фактические времена $t_{ij}^{(\Phi)}$ выполнения мероприятий $A_i A_j$ в этом временном интервале. Затем следует в процедуре (7.2.5) вычисления ранних сроков $T_j^{(0)}$ наступления событий заменить ранее вычисленные для интервала времени $[0, t]$ параметры $T_j^{(0)}, t_{ij}$ на их фактические значения $T_j^{(\Phi)}, t_{ij}^{(\Phi)}$. После этого процедура (7.2.5) используется уже для вычисления ранних сроков $T_j^{(0)}(t)$ с учетом результатов, полученных к моменту времени t . Знание параметров $T_j^{(0)}(t)$ позволит использовать процедуры п. 7.2.2 для выявления новых критических и подкритических путей, вычисления критического времени $T_{кр}(t)$ процесса, других параметров сетевого графика (свободных $\tau_{ij}(t)$ и полных $\tau'_{ij}(t)$ резервов времени), а также вероятностных показателей эффективности (см. (7.2.11)—(7.2.15)). Подобные вычисления

производятся каждый раз после наступления очередного события. И каждый раз командиру выдаются текущие значения указанных им показателей эффективности. В случае, когда какие-либо из показателей эффективности становятся хуже заданных предельных значений, командиру выдается рекомендация о целесообразности корректирования плана. Например, ранее уже указывалось, что не рекомендуется иметь вероятность выполнения задачи к заданному сроку менее 0,3.

Если в какой-либо момент времени t изменено заданное время T_j выполнения процесса, то наряду с описанным выше порядком вычисления ранних сроков $T_j^{(0)}(t)$ по правилу (7.2.7) вычисляются поздние сроки наступления событий, а затем — все зависящие от него показатели эффективности (см. пп. 7.2.2, 7.2.3).

Выше были изложены методы контроля за ходом выполнения управляемого процесса, когда времена наступления событий определялись случайным характером процесса, не изменяющим временные оценки t_{ij} . Причины изменения этих оценок могут быть различными, например: изменение скорости (и, значит, времени) развертывания сил из-за изменения гидрометеорологических условий; обнаружения мин и необходимости двигаться за тралами; из-за полученных повреждений; изменение времени выполнения подразделением органа управления мероприятий из-за потерь, выделения части личного состава на запасные КП и т. д. В подобных случаях прежде всего корректируются оценки t_{ij} времени выполнения мероприятий, а затем вычисляются необходимые показатели эффективности. Для организации контроля выполнения плана взаимодействия с учетом подобных обстоятельств лица, ответственные за математическое обеспечение контроля, должны иметь необходимую оперативно-тактическую подготовку. Она должна позволить им выделять те изменения в обстановке, которые влияют на ход взаимодействия и могут быть учтены сетевой моделью. В структурах СМО, программного обеспечения ЭВМ должны быть разработаны разделы, обеспечивающие автоматизацию контроля. Потребуется и решения в области аппаратных средств (ввод данных обстановки, вывод и представление необходимых показателей эффективности, рекомендаций). Иначе говоря, должна быть разработана и внедрена система математического обеспечения контроля за выполнением планов в рамках разработки системы МОУ. Только тогда и возможен эффективный автоматизированный контроль за управляемым процессом в масштабах реального времени.

7.4.3. Методы корректирования исходных планов

Причины и объемы корректирования (изменения) исходных планов столь разнообразны, что относительно методов корректирования можно дать лишь самые общие рекомендации. Возможность и степень изменения исходного плана будет определяться как степенью несоответствия исходного плана сложившейся обстановке, так и степенью совершенства системы МОУ силами и качеством заблаговременной подготовки, в ходе которой должны быть разработаны способы возможного корректирования планов взаимодействия. При этом командир должен учитывать, что нарушение разработанного плана (сетевого графика) будет вызываться двумя причинами: объективно случайным характером управляемого процесса и наличием активного противника*. В самих планах взаимодействия должны быть обоснованно предусмотрены резервы времени. Не должны быть забыты и требования военного искусства — создание резерва сил и средств для противостояния случайностям и неожиданным действиям противника. Командир не потерпел поражения, пока у него есть резерв.

* Эта вторая причина, а также высокие темпы управления делают резко отличными условия применения сетевых моделей в военной области (даже при управлении силами в повседневных условиях) и в экономике.

СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ УПРАВЛЯЕМЫХ ПРОЦЕССОВ

Глава 8. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ В ОПЕРАТИВНО-ТАКТИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ И ИССЛЕДОВАНИЯХ

§ 8.1. ОБЛАСТЬ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Математическая статистика — это наука о правилах сбора и обработки опытных, экспериментальных данных с целью получения вероятностных характеристик, оценки их точности и надежности. Направлениями применения методов математической статистики в оперативно-тактической области являются:

1. Определение приближенных значений вероятностных характеристик (их статистических оценок), знание которых необходимо для математического моделирования с целью обоснования применения сил, использования средств в операциях, боях, боевых действиях, при повседневной деятельности. Такими характеристиками являются вероятности случайных событий (например, вероятности попадания снарядов, ракет в различные объекты в различных условиях обстановки); законы распределения и числовые характеристики случайных величин, систем случайных величин (например, математические ожидания, средние квадратические отклонения таких случайных величин, как дальности действия различных средств и систем наблюдения), параметры, характеризующие случайные процессы (например, плотности потоков обнаружения объектов, потерь с ними контакта и его восстановления, плотности потоков выхода из строя механизмов и систем, их восстановления, наступления того или другого типа гидрометеорологических условий).

2. Определение вероятностных характеристик (их статистических оценок), выступающих в качестве основных и (или) дополнительных показателей эффективности применения сил, использования средств для непосредственного раскрытия закономерностей управляемых процессов, их обоснования и совершенствования.

3. Оценка точности и надежности полученных вероятностных характеристик либо определение требований к порядку сбора и обработки опытных, экспериментальных данных, объему этих данных для достижения необходимых точности и надежности определяемых вероятностных характеристик.

Методы математической статистики используются как в интересах управления силами и средствами флота, так и в интересах научно-исследовательской работы, направленной на совершенствование сил и средств. Сбор и обработка опытных, экспериментальных данных — трудоемкий процесс. Поэтому вдруг возникшая потребность в получении вероятностных характеристик для целей управления может быть удовлетворена, как правило, если будет организован планомерный и систематический сбор статистических данных на всех циклах управления: в ходе повседневного управления силами, при заблаговременной и непосредственной подготовке, в ходе ведения операций, боевых действий, боев, а также при анализе их результатов.

Хочется подчеркнуть, что в процессе выполнения поставленных задач должен быть организован сбор статистических данных и для анализа достигнутых результатов с целью дальнейшего совершенствования сил, средств, способов действий, а также для прогнозирования развития противником сил, средств, способов действий.

Великая Отечественная война показала, что наибольших успехов достигали командующие, командиры, штабы, которые систематически анализировали накопленный опыт, в том числе

количественные статистические данные. В настоящее время имеется возможность анализировать результаты применения сил, средств, используя и математическое моделирование (см., например, [19]).

Использование ЭВМ, автоматизированных систем управления значительно облегчает сбор, обработку статистических данных, весь процесс статистических исследований.

Говоря об области применения методов математической статистики, важно отметить, что они явились основой для разработки ряда широко используемых методов математического моделирования: метода статистических испытаний, метода статистических решений, метода последовательного анализа и др.

§ 8.2. СБОР СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ НА КОРАБЛЯХ, В ЧАСТЯХ, НА СОЕДИНЕНИЯХ ФЛОТА

Процесс достижения целей статистических исследований требует умения выполнять сбор статистических данных и их обработку (см. § 8.3).

Сбор статистических данных на соединении* включает подготовку к сбору и работу по сбору статистического материала. Подготовка к сбору заключается в определении перечня вероятностных характеристик**, которые должны быть определены статистическими методами, и условий обстановки, для которых они должны быть определены, в обосновании требований к их точности и надежности и, наконец, в разработке организации сбора необходимого статистического материала.

Перечень необходимых вероятностных характеристик может быть определен на основании анализа условий математического обеспечения. Напомним, что математическое моделирование при МОУ силами выполняется для достижения следующих частных задач МОУ (см. § 2.4): количественного обоснования решения, планов, их корректирования в процессе творческой деятельности командира, офицеров штаба; информационного обеспечения этой деятельности; автоматизации нетворческих процессов в системе управления силами; автоматизации управления системами оружия и технических средств. Наиболее сложной и динамичной является обеспечение статистическими данными первой из числа перечисленных частных задач МОУ силами. Поэтому тема данного параграфа будет изложена применительно к этой задаче, а для остальных укажем особенности.

Обеспечение творческой деятельности командира и офицеров штаба требует оперативного формирования математических моделей с использованием проблемно-ориентированных ППП (пакетов прикладных программ — см. § 2.5). Перечень необходимых вероятностных характеристик может быть получен в результате анализа модулей пакетов, при разработке (совершенствовании) баз данных пакетов на этапе создания (совершенствования) базового СМОУ соединения либо при формировании моделей в процессе заблаговременной подготовки. Важной проблемой при этом является рациональное соотношение между уровнем исходной информации в базах и алгоритмами системы управления базами (банком) данных (СУБД). Например, для моделирования процессов поиска необходимо знание поисковых производительностей, участвующих в поиске кораблей, самолетов, вертолетов и т. д., их групп. Можно поставить задачу сбора статистических данных для

* Все сказанное ниже справедливо также для корабля, части.

** Методами математической статистики, во-первых, определяются статистические оценки — параметры, которые используются в качестве вероятностных характеристик (числовых значений случайных величин, вероятностей случайных событий), а во-вторых, обосновываются виды законов распределения случайных величин, систем случайных величин. Условимся для краткости применять обобщающее понятие “вероятностные характеристики, определяемые методами математической статистики”, когда это не будет приводить к недоразумениям.

получения вероятностных характеристик самих поисковых производительностей всех возможных поисковых единиц, групп поисковых единиц с различной организацией их взаимодействия при поиске. Но можно потребовать собрать статистические данные для определения тех вероятностных характеристик, от которых зависят необходимые поисковые производительности, а для их вычисления с учетом различных ситуаций разработать библиотеку алгоритмов (модулей) СУБД, наращивая и модернизируя ее состав по мере изменения условий поиска, совершенствования методов математического моделирования и ЭВТ.

Условия обстановки для которых собираются статистические данные, должны соответствовать условиям применения сил, использования средств. Они выявляются при уяснении задачи, оценке обстановки для всех возможных вариантов условий выполнения свойственных соединению задач. Например, статистические данные, необходимые для моделирования процессов поиска, должны быть определены для всех возможных гидрологических условий (районов, сезонов, состояний моря и т. п.), объектов поиска и т. д.

Обоснование требований к точности и надежности вычисляемых вероятностных характеристик начинается с обоснования требований к точности основных и дополнительных показателей эффективности, получаемых в результате математического моделирования с использованием имеющихся вычислительных средств либо при непосредственных статистических исследованиях (см. § 8.1, пп. 1, 2). Эти требования определяются оперативно-тактическими, тактико-специальными соображениями с учетом опыта МОУ силами. Точность вероятностных характеристик должна быть выше точности определяемых показателей эффективности. Методы обоснования требований к точности исходных параметров при производстве вычислений рассматриваются в пособиях по вычислительной математике. Большую роль при этом играет и опыт моделирования тех или иных процессов.

Что касается требований к точности определения видов законов распределения случайных величин, то во многом они определяются практикой статистических исследований (см. § 8.4).

При обосновании требований к точности и надежности вероятностных характеристик, определяемых методами математической статистики, необходимо учитывать противоречие: для повышения точности и надежности следует увеличивать объем исходных статистических данных (т. е. увеличивать число опытов, экспериментов), а также добиваться повышения точности проведения опытов, экспериментов, но при этом будет возрастать расход средств, времени. Это противоречие разрешается при разработке организации сбора статистического материала. При этом используются методы математической статистики, позволяющие определить точность и надежность вероятностных характеристик с учетом числа опытов.

В целом же, организация сбора статистического материала должна обеспечить, с одной стороны, соответствие условий, при которых собираются статистические данные, моделируемым условиям, а также достижение необходимых точности и надежности вероятностных характеристик, а с другой — экономное расходование ресурсов (сил, средств, времени), затрачиваемых на сбор данных.

О степени соответствия условий судят по результатам оценок обстановки, той которая будет моделироваться, и той, при которой собираются статистические данные. Расхождения должны четко оговариваться.

Пример 8.1. Собираются статистические данные для получения статистической оценки математического ожидания числа попаданий снарядов некоторого типа в транспорты заданного проекта (см. гл. 18), при котором они поражаются. При этом потребуются указать факт учета (неучета) в собираемых статистических данных борьбы личного состава за живучесть корабля.

Достижение необходимых точности и надежности статистических оценок зависит не только от числа опытов, но и от точности регистрации их результатов, а также от такой организации проведения опытов и сбора данных, при которых опыты проводятся в одинаковых условиях, могут считаться независимыми, обеспечивающими одинаковые возможности проявления исследуемых свойств случайных явлений, исключается влияние постоянных факторов и ошибок, искажающих исследуемые закономерности и свойства.

Пример 8.2. Производятся замеры скорости корабля на мерной линии. Время движения корабля между секущими створами фиксируется несколькими наблюдателями. Если факт пересечения створа определяется одним из них, то его ошибка будет постоянной, входящей в результаты работы каждого наблюдателя. Необходимо, чтобы каждый наблюдатель фиксировал момент пересечения створов независимо от других. Кроме того, характер маневрирования должен исключить ошибки, возникающие из-за дрейфа корабля, сноса его течением за время выполнения галса.

Пример 8.3. Производится сбор данных для оценки вероятностных характеристик искажения радиogramм при их приеме на кораблях в море. При этом должны исключаться те искажения радиogramм, которые допускались при их передаче передающими устройствами, в частности при учете результатов циркулярных передач.

Работа по сбору данных о противнике, своих силах, районе может производиться:

- а) на основании анализа уже имеющегося опыта выполнения силами поставленных боевых задач, задач оперативной и боевой подготовки;
- б) в ходе действий сил по выполнению поставленных задач;
- в) в ходе специально проводимых учений, военных игр, испытаний и сбора данных о районах предстоящих действий;
- г) комбинированным использованием пп. “а”, “б”, “в”^{*}.

В случае “а” производится выписка значений исследуемых параметров из документов первичного учета (вахтенного, навигационного журналов, журнала технической эксплуатации и т. д.). Основная трудность при этом заключается в том, что цели, стоящие перед исследователем, будут, как правило, отличаться от целей, при достижении которых ведутся документы первичного учета. Это потребует специальных усилий для выделения нужных параметров (см. пример 8.3). В случаях “б” и “в” должны быть подготовлены группы наблюдателей, созданы условия для фиксации нужных параметров. В случае “в”, кроме того, необходима разработка организации учения, военной игры, испытания для сбора данных в соответствующих условиях и с минимальными затратами сил, средств, времени.

Изложена организация сбора статистических данных как в интересах командира соединения, так и в интересах всех специалистов штаба соединения, использующих математическое моделирование для обеспечения творческой деятельности.

Организация сбора статистических данных для решения информационных задач может отличаться от изложенного выше только составом потребных вероятностных характеристик.

Особенность в организации сбора статистических данных для математического моделирования в интересах автоматизации нетворческих процессов в системе управления, для управления системами оружия и технических средств определяется в значительной степени тем, что потребность в знании

^{*} Существуют еще методы сбора статистических данных на специально разработанных математических моделях — методы статистических испытаний. Они рассматриваются в гл. 9.

тех или иных вероятностных характеристик выявляется при создании систем автоматизации или их модернизации.

В заключение обратим внимание, что в процессе деятельности соединения будет систематически возникать необходимость в получении новых, корректировке ранее полученных вероятностных характеристик. Причинами этого будут изменение условий выполнения силами свойственных задач (изменение составов сил, средств, способов действий своих и противника), совершенствование методики работы командира и штаба и возникновение новых целей моделирования, совершенствование математических моделей применения сил и средств и банка данных. Сбор статистических данных должен быть результатом планомерной и систематической работы, учитывающей потребности командования и всех специалистов штаба. МОУ силами без организации такой работы невозможно.

§ 8.3. МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ ОЦЕНОК ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

8.3.1. Систематизация статистических данных

Предварительно введем некоторые понятия математической статистики. Сбор данных об объектах исследования (случайных событиях, случайных величинах, системах случайных величин, случайных процессах) называется *наблюдением* или *опытом*, а материалы, полученные в результате наблюдений (опытов), — *наблюдёнными результатами* или *статистическим материалом*. Множество результатов, полученных при проведении наблюдений, называются *выборкой* или *простой статистической совокупностью*. Число наблюдённых результатов, составляющих выборку, носит название *объёма выборки* (n). Выборка, представленная в виде таблицы, в которой указаны номера наблюдений и численные значения измеряемого параметра, получила название *простого статистического ряда*. Множество объектов или признаков, из которых производится выборка, называется *генеральной совокупностью*. Генеральная совокупность может быть конечной или бесконечной, выборка же всегда имеет конечное число результатов наблюдений. Например, генеральная совокупность может быть непрерывной случайной величиной: отклонением снаряда от цели, дальностью обнаружения объекта данной аппаратурой наблюдения и т. д., распределёнными по тому или иному закону. Такие генеральные совокупности бесконечны. Примером конечной генеральной совокупности является число кораблей соединения, проходящих ремонт на судоремонтном заводе в различные сезоны года или какие-то другие периоды.

В ряде случаев наблюдения могут производиться с целью получения суждения о нескольких признаках или свойствах, характеризующих данный предмет или явление. В качестве примера можно привести наблюдения над отклонениями снаряда от цели для различных углов относительно плоскости стрельбы. В этом случае выборка называется *многомерной*.

Для удобства обработки статистического материала производится систематизация статистических данных. Элементы выборки, записанные в порядке их возрастания (убывания), образуют упорядоченную выборку, называемую *упорядоченным статистическим рядом* или *статистическим рядом*. Он является простейшей формой *статистического распределения*.

При большом объёме выборки ($n \geq 25$) производится объединение элементов выборки в группы (разряды), состоящее в

- определении числа разрядов k ;
- нахождении размаха выборки R ;
- определении величины разряда (или интервала) h ;

- определении границ разрядов;
- подсчете числа наблюдений, попавших в каждый разряд;
- составлении итоговой таблицы, характеризующей частоту попадания данных наблюдений в каждый из разрядов.

Рассмотрим более подробно процесс группирования.

Число разрядов k зависит от числа наблюдений и может выбираться в пределах от 6 до 20. Для приближенного определения числа разрядов применяется формула

$$k = 1 + 3,32 \lg n = 1 + 1,41 \ln n. \quad (8.1.1)$$

Размах выборки R (разность между наибольшим и наименьшим значением числовых характеристик наблюдений) определяется по формуле

$$R = x_{\max} - x_{\min}. \quad (8.1.2)$$

Величина разряда h (интервал) в зависимости от конкретной выборки и целей исследования может быть одинаковой или различной. Для машинной обработки статистического материала удобнее брать постоянную величину разряда. В этом случае величина разряда определяется по формуле

$$h = \frac{R}{k - 1}.$$

Для удобства проведения дальнейших исследований полученное по этой формуле значение разряда округляют до ближайшего целого или ближайшей десятичной дроби (если измеряемая величина и размах по абсолютному значению малы).

После определения величины разряда определяют границы разрядов, начиная с начальной границы

$$x_0 = x_{\min} - \frac{h}{2}.$$

Все промежуточные и конечные границы разрядов могут быть найдены по формуле

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

В ряде случаев при ручной обработке соседние разряды, содержащие мало наблюдений, могут объединяться.

После нахождения границ разрядов производится распределение статистического материала по разрядам, подсчет числа наблюдений в разряде и составляется итоговая таблица.

Пример 8.4. Произведено 336 замеров времени между приходами в порт судов. Минимальный интервал равен 4 ч, максимальный — 79,5 ч.

В связи с большим числом наблюдений в данной выборке целесообразно произвести первичную обработку статистического материала. Число разрядов составит

$$k = 1 + 3,32 \lg 336 \cong 10.$$

Размах выборки для данного случая равен

$$R = 79,5 - 4 = 75,5 \text{ ч.}$$

Учитывая полученные результаты, можно определить величину разряда

$$h = \frac{75,5}{9} \cong 8.$$

Границы разрядов для данной выборки равны

$$t_0 = t_{\min} - \frac{h}{2} = 4 - 4 = 0;$$

$$t_i = t_0 + ih, \quad i = 1, 2, \dots, 10.$$

Допустим, что после нахождения границы разрядов и распределения результатов наблюдений по разрядам получаем статистический ряд, приведенный в табл. 8.1.

Т а б л и ц а 8.1

Границы разрядов	0—8	8—16	16—24	24—32	32—40	40—48	48—56	56—64	64—72	72—80
Число наблюдений	151	75	53	27	14	9	3	2	1	1

Число наблюдений, попавших в данный разряд, называется *частотой разряда*.

Представленный в таком виде статистический материал позволяет сделать некоторые выводы о характере исследуемой величины и удобен для дальнейшей обработки. Если же группировка материала по разрядам производится в период наблюдений или экспериментов, то в зависимости от требуемой точности и цели исследования число разрядов и величина разряда определяются заранее на основании имеющегося опыта и особенностей исследуемого процесса или величины.

Содержание процесса систематизации данных наблюдения над дискретной случайной величиной аналогично рассмотренному. Отличие состоит только в том, что число разрядов определяется числом возможных значений исследуемой величины, а систематизация заключается в подсчете частот появления каждого из возможных значений. Если же число значений велико (больше 25), то число разрядов и величина разряда определяются исходя из тех же соображений, что и при обработке наблюдений над непрерывной случайной величиной.

Пример 8.5. За 43 суток собран статистический материал, характеризующий количество судов, прибывающих в порт в течение суток. Наибольшее число судов, прибывающих в порт за сутки, равнялось 4. Полученный после систематизации ряд распределения приведен в табл. 8.2.

Т а б л и ц а 8.2

Число судов, прибывающих за сутки	0	1	2	3	4
Число наблюдений	16	13	10	3	1

При наблюдении за двумя и более признаками исследуемого объекта систематизация статистического материала заключается в составлении таблиц распределения, книг таблиц распределения (при трехмерной выборке), баз распределения в ЭВМ и т. д.

Сбор и систематизация статистических данных являются очень трудоемкой работой. При массовом сборе статистических данных сбор и первичную их обработку необходимо производить с широким применением электронно-вычислительной техники и формализованных документов первичного учета.

8.3.2. Теоретические основы методов определения статистических оценок вероятностных характеристик. Среднее арифметическое и его свойства

Методами математической статистики определяются не сами вероятностные характеристики (вероятности событий, числовые характеристики случайных величин, систем случайных величин), а их приближенные значения — *статистические оценки*, которые и используются в качестве самих вероятностных характеристик при оперативно-тактических расчетах и исследованиях. Степень приближения статистических оценок к вероятностным характеристикам, которые они представляют, зависит (при правильной организации сбора статистического материала и его обработки) от числа опытов n , т. е. от величины выборки. В основу методов получения статистических оценок, определения их точности и надежности положены свойства среднего арифметического наблюдаемых результатов опытов. Человечество с давних времен эмпирически использует в своей деятельности свойства среднего арифметического. Научное изучение этих свойств обусловило разработку научно обоснованных методов их использования в практической деятельности людей. В основе теории статистических методов лежат и труды многих наших соотечественников-математиков: А. М. Ляпунова, П. Л. Чебышева и др.*

Пусть производится n независимых наблюдений над появлением случайной величины X , подчиненной закону распределения с функцией распределения $F(x)$ и плотностью вероятности $f(x)$.

Средним арифметическим \tilde{x}_n из наблюдаемых результатов называется величина, которая определяется по правилу

$$\tilde{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (8.3.1)$$

где x_i — наблюдаемое значение случайной величины X в i -м опыте. Так как среднее арифметическое находится по конечному числу опытов, дающих случайный результат, оно является случайной величиной.

Рассмотрим это важное обстоятельство подробнее. Априорно (до опытов) среднее арифметическое \tilde{X}_n является результатом сложения n случайных величин:

$$\tilde{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad (8.3.2)$$

* А. М. Ляпунов (1857—1918), П. Л. Чебышев (1821—1894) — выдающиеся русские математики. П. Л. Чебышев является основателем петербургской школы математиков, представители которой в конце 19 — начале 20 в. сделали множество открытий в различных областях математики, теории вероятностей и смежных областях знаний. Замечательной особенностью их деятельности является строгое обоснование научных результатов для получения важных и простых методов практической деятельности людей.

где X_i — случайная величина (ожидаемое значение) результата i -го опыта при наблюдении случайной величины X .

Допустим, организуется k серий независимых опытов из n опытов в каждой серии над появлением одной и той же случайной величины X . Допустим для определенности, что речь идет о k сериях стрельб для оценки рассеивания снарядов. В каждой серии стрельб планируется n выстрелов. Очевидно, что в каждой j -й серии опытов результаты наблюдения случайной величины при i -м опыте (например, величины отклонения от цели снаряда при шестом выстреле) будут принимать различные значения. Указать заранее их значения $X_i^{(j)}$ невозможно, т. е. априорно это — случайные величины (см. табл. 8.3). Ясно только, что возможные значения $X_i^{(j)}$ будут определяться свойствами случайной величины X и условиями проведения опытов. Поэтому среднее арифметическое $\tilde{X}_n^{(j)}$, определенное на основании n наблюдений в j -й серии опытов, является случайной величиной

$$\tilde{X}_n^{(j)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^{(j)}.$$

Т а б л и ц а 8.3

Серии опытов	Номера опытов					
	1	2	...	i	...	n
1	$X_1^{(1)}$	$X_2^{(1)}$...	$X_i^{(1)}$...	$X_n^{(1)}$
2	$X_1^{(2)}$	$X_2^{(2)}$...	$X_i^{(2)}$...	$X_n^{(2)}$
...
j	$X_1^{(j)}$	$X_2^{(j)}$...	$X_i^{(j)}$...	$X_n^{(j)}$
...
k	$X_1^{(k)}$	$X_2^{(k)}$...	$X_i^{(k)}$...	$X_n^{(k)}$

Заметим, что средними арифметическими случайной величины в табл. 8.3 будут и величины

$$\tilde{X}_k^{(i)} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k X_i^{(j)}; \quad \tilde{X}_{kn} = \frac{1}{kn} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n X_i^{(j)}.$$

Необходимо только, чтобы условия проведения опытов в различных сериях были одинаковы.

Итак, среднее арифметическое — случайная величина. Как у всякой случайной величины, у нее существует закон распределения и числовые характеристики.

Законом распределения среднего арифметического является нормальный закон. Это следует из центральной предельной теоремы Ляпунова. Содержание этой строго доказанной теоремы сводится к следующему: в результате сложения нескольких независимых случайных величин X_i закон

распределения их суммы $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ неограниченно приближается к нормальному с увеличением

числа слагаемых. При этом каждая случайная величина может быть распределена по любому закону. Необходимо только, чтобы они были одного порядка малости. Практически уже при сложении десяти (а иногда и меньшего числа) случайных величин имеет место достаточно большое приближение распределения их суммы к нормальному закону. Если складываются нормально распределенные случайные величины, их сумма распределена также по нормальному закону.

Среднее арифметическое является суммой большого числа независимых случайных величин одного порядка малости (см. (8.3.2)), что дает основание считать его распределенным по нормальному закону. Плотность вероятности и функция распределения для среднего арифметического имеют вид

$$f(\tilde{x}_n) = \frac{1}{\sigma_{\tilde{x}_n} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\tilde{x}_n - \bar{x})^2}{2\sigma_{\tilde{x}_n}^2}}; \quad (8.3.3)$$

$$F(\tilde{x}_n) = \frac{1}{2} \left[1 + \Phi \left(\frac{\tilde{x}_n - \bar{x}}{\sigma_{\tilde{x}_n}} \right) \right], \quad (8.3.4)$$

где $\sigma_{\tilde{x}_n}$ — среднее квадратическое отклонение среднего арифметического; \bar{x} — математическое ожидание (центр рассеивания) исследуемой случайной величины X .

Рассмотрим некоторые числовые характеристики среднего арифметического: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Согласно определению математического ожидания случайной величины и его свойств (см., например, [6]) имеем

$$M(\tilde{X}) = M \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(X) = \frac{1}{n} n \bar{x} = \bar{x}. \quad (8.3.5)$$

Учитывая независимость опытов и, следовательно, их результатов, а также свойства дисперсии, получим

$$\begin{aligned} D(\tilde{X}_n) &= D \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(X_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(X) = \\ &= \frac{1}{n^2} n D(X) = \frac{D(X)}{n}. \end{aligned} \quad (8.3.6)$$

Следовательно, дисперсия среднего квадратического в n раз меньше дисперсии самой случайной величины X .

Для среднего квадратического отклонения $\sigma_{\tilde{x}_n}$ среднего арифметического будем иметь

$$\sigma_{\tilde{x}_n} = \sqrt{D(\tilde{X}_n)} = \sqrt{\frac{D(X)}{n}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}. \quad (8.3.7)$$

Практически это значит, что возможное отклонение среднего арифметического \tilde{x}_n от центра рассеивания исследуемой случайной величины X — от ее математического ожидания \bar{x} — потенциально в \sqrt{n} раз меньше, чем возможное отклонение каждого отдельного наблюдения X_i . Например, точность измерения высоты светила при определении места корабля в море по среднему арифметическому из четырех измерений будет иметь среднюю квадратическую ошибку в два раза меньшую ($\sqrt{4} = 2$), чем по одному измерению. Необходимо, однако, чтобы измерения были

независимые и равноточные. В рассматриваемом примере должны быть исключены такие постоянные ошибки, как ошибка во времени выполнения каждого наблюдения (постоянная ошибка хронометра), постоянная ошибка измерительного устройства (секстана) и т. д.

Формула (8.3.7) также показывает, что величина $\sigma_{\tilde{x}_n}$ изменяется с изменением числа опытов n . В пределе при $n \rightarrow \infty$ (но только в пределе!) $\sigma_{\tilde{x}_n}$ становится равной нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\tilde{x}_n} = 0,$$

и среднее арифметическое перестает быть случайной величиной.

Зная закон распределения среднего арифметического и его числовые характеристики, можно использовать функцию распределения для определения вероятности того, что среднее арифметическое \tilde{X}_n примет значение в интервале $[\alpha, \beta]$:

$$\begin{aligned} P(\alpha < \tilde{X}_n < \beta) &= \frac{1}{2} \left[\Phi \left(\frac{\beta - \bar{x}}{\sigma_{\tilde{x}_n}} \right) - \Phi \left(\frac{\alpha - \bar{x}}{\sigma_{\tilde{x}_n}} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\Phi \left(\frac{(\beta - \bar{x})\sqrt{n}}{\sigma_x} \right) - \Phi \left(\frac{(\alpha - \bar{x})\sqrt{n}}{\sigma_x} \right) \right]. \end{aligned} \quad (8.3.8)$$

Формула (8.3.8) получила название формулы Ляпунова—Лапласа.

Вероятность попадания среднего арифметического в симметричные относительно математического ожидания пределы найдется по формуле

$$P(\bar{x} - \varepsilon < \tilde{X}_n < \bar{x} + \varepsilon) = P(|\bar{x} - \tilde{X}_n| \leq \varepsilon) = \Phi \left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma_x} \right). \quad (8.3.9)$$

Формулы (8.3.8), (8.3.9) дают приближенные значения вероятностей, так как зависят от числа опытов n .

Методы определения среднего арифметического, его свойства одинаковы для всех случайных величин, как непрерывных, так и дискретных.

Пусть теперь опыты проводятся не над появлением случайной величины X , а над появлением случайного события. Случайное событие можно интерпретировать как дискретную случайную величину X , принимающую два значения:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{если исследуемое событие произошло;} \\ 0, & \text{если исследуемое событие не произошло.} \end{cases} \quad (8.3.10)$$

Аналогом среднего арифметического при этом является частота p_n^* появления события:

$$p_n^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{m}{n}, \quad (8.3.11)$$

где m — число опытов, давших положительный результат (когда событие произошло, т. е. когда $X_i = 1$).

Случайная величина p_n^* распределена по нормальному закону. Обозначим через p вероятность появления случайного события. Тогда, используя формулы (8.3.3), (8.3.4), получим:

$$f(p_n^*) = \frac{1}{\sigma_{p_n^*} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(p_n^* - p)^2}{2\sigma_{p_n^*}^2}}; \quad (8.3.12)$$

$$F(p_n^*) = \frac{1}{2} \left[1 + \Phi \left(\frac{p_n^* - p}{\sigma_{p_n^*}} \right) \right]. \quad (8.3.13)$$

Используя выражение (8.3.10), свойства среднего арифметического и методы теории вероятностей, найдем выражения для числовых характеристик частоты. Математическое ожидание частоты

$$M(p_n^*) = M(X) = 0(1-p) + 1 \cdot p = p. \quad (8.3.14)$$

Дисперсия частоты

$$D(p_n^*) = \frac{1}{n} D(X) = \frac{1}{n} \{ (0-p)^2(1-p) + (1-p)^2 p \} = \frac{1}{n} p(1-p) = \frac{pq}{n}. \quad (8.3.15)$$

Среднее квадратическое отклонение частоты

$$\sigma_{p_n^*} = \sqrt{D(p_n^*)} = \sqrt{\frac{pq}{n}}. \quad (8.3.16)$$

Вероятность того, что частота примет значение в интервале $[\alpha, \beta]$ или $\pm \varepsilon$, симметричном относительно p , найдется из выражений

$$P(\alpha < p_n^* < \beta) = \frac{1}{2} \left\{ \left[\Phi \left(\frac{(\beta - p)\sqrt{n}}{\sqrt{pq}} \right) \right] - \left[\Phi \left(\frac{(\alpha - p)\sqrt{n}}{\sqrt{pq}} \right) \right] \right\}; \quad (8.3.17)$$

$$P[(p - \varepsilon) < p_n^* < (p + \varepsilon)] = \Phi \left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}} \right). \quad (8.3.18)$$

Формула (8.3.17) была получена Лапласом в XVIII в. и носит его имя. Существенную информацию о свойствах среднего арифметического, необходимую для обоснования методов определения статистических оценок, несет группа теорем, известная под названием закона больших чисел — закона устойчивости средних результатов при многократном наблюдении случайного явления в одних и тех же условиях. Это основной закон математической статистики. Важнейшей из теорем этого закона является теорема Чебышева, которая гласит: при неограниченном увеличении числа наблюдений случайной величины вероятность того, что абсолютная величина $|\tilde{X}_n - \bar{x}|$ отклонения среднего арифметического \tilde{X} от ее математического ожидания \bar{x} будет меньше любого заданного положительного числа ε , стремится к единице:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\tilde{X}_n - \bar{x}| < \varepsilon\} = 1. \quad (8.3.19)$$

Теорема Чебышева доказывает, что среднее арифметическое из наблюдаемых результатов опытов над появлением одного из возможных значений случайной величины сходится по вероятности к ее математическому ожиданию. Специфика сходимости по вероятности состоит в том, что хотя и не исключено нарушение этого неравенства при конечном n , вероятность его выполнения с увеличением n стремится к единице.

Применяя теорему Чебышева при опытах над появлением случайного события, получим частный случай теоремы Чебышева — теорему Бернулли:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|p_n^* - p| < \varepsilon\} = 1,$$

т. е. частота события сходится по вероятности к вероятности этого события.

8.3.3. Методы определения статистических оценок вероятностных характеристик и требования к ним

Метод обработки статистических данных считается корректным, если полученная с его помощью статистическая оценка удовлетворяет трем требованиям.

1. Статистическая оценка должна быть состоятельной. Условием этого является ее сходимость по вероятности к искомой величине.

Пусть A_n — статистическая оценка вероятностной характеристики a (например, математического ожидания, дисперсии и т. д.). Статистическая оценка A_n состоятельна, если выполняется условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|A_n - a| \leq \varepsilon\} = 1. \quad (8.3.20)$$

Графически это можно представить как требование, чтобы определяемые в различных сериях опытов значения A_n рассеивались в пределах заданного интервала $\pm \varepsilon$ относительно искомого параметра с вероятностью, стремящейся к единице при числе n , стремящемся к бесконечности (рис. 8.1).

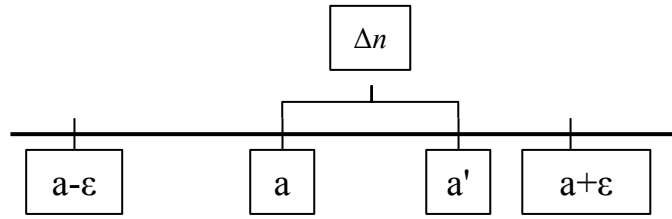


Рис. 8.1

2. Статистическая оценка должна быть несмещенной. Ее математическое ожидание должно быть равно искомой вероятностной характеристике:

$$M(A_n) = a. \quad (8.3.21)$$

Иначе говоря, центром рассеивания статистической оценки A_n должна быть сама случайная величина a . Если же центром рассеивания будет некоторый параметр a' , статистическая оценка A_n будет содержать постоянную ошибку Δ_n .

3. Статистическая оценка A_n должна быть эффективной, т. е. для выборок одинакового объема избирается метод вычисления A_n , обеспечивающий минимальный разброс, минимальную дисперсию $D(A_n)$. Сравнение по дисперсии производится для методов вычисления статистических оценок A'_n, A''_n , удовлетворяющих двум первым требованиям:

$$D(A'_n) < D(A''_n). \quad (8.3.22)$$

По требованиям, математически сформулированным в формулах (8.3.20)—(8.3.22), проверяются методы (формульные зависимости), разработанные для вычисления различных статистических оценок.

Подчеркнем, что удовлетворение этим требованиям гарантирует лишь корректность методов обработки статистического материала, их способность не вносить при этом ошибки в получаемые статистические оценки. Однако методы обработки, удовлетворяющие этим требованиям, не позволят ни обнаружить, ни тем более исключить ошибки, допущенные при организации сбора и в процессе сбора статистического материала (см. примеры 8.2, 8.3). Выявить подобные ошибки позволят лишь анализ условий сбора статистического материала либо опыт использования статистических оценок.

Рассмотрим теперь методы нахождения некоторых статистических оценок, наиболее часто используемых в оперативно-тактических расчетах и исследованиях.

Статистической оценкой математического ожидания выступает среднее арифметическое \tilde{x}_n из наблюдаемых результатов:

$$\tilde{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Согласно теореме Чебышева среднее арифметическое сходится по вероятности к математическому ожиданию случайной величины, т. е. эта оценка состоятельная. Согласно (8.3.5) математическое ожидание среднего арифметического равно математическому ожиданию случайной величины, т. е. эта оценка несмещенная. А. А. Марков, кроме того, доказал, что эта оценка эффективная (доказательство здесь не приводится).

Если число наблюдений велико, то для нахождения статистической оценки \tilde{x}_n математического ожидания использование формулы (8.3.1) без применения ЭВМ приводит к громоздким вычислениям. В этом случае используют формулу

$$\tilde{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k m_j x_j^{(c)} = \sum_{j=1}^k p_j^* x_j^{(c)},$$

где $x_j^{(c)}$ — среднее значение j -го разряда; p_j^* — частота попаданий в j -й разряд.

Применение этого выражения для нахождения статистической оценки математического ожидания дает некоторую погрешность. Однако при выполнении условий, изложенных в п. 8.3.1, погрешность мала.

Пример 8.6. В условиях примера 8.4 найдем статистическую оценку математического ожидания интервала времени между приходами судов. Для этого целесообразно применить схему расчетов, приведенную в табл. 8.4.

Т а б л и ц а 8.4

Номер разряда	Границы разряда $t_{j-1} - t_j$	Среднее значение $t_j^{(c)}$	Число наблюдений m_j	Частота $p_j^* = \frac{m_j}{n}$	$p_j^* t_j^{(c)}$
1	0—8	4	151	0,449	1,796
2	8—16	12	75	0,223	2,676
3	16—24	20	53	0,158	3,160
4	24—32	28	27	0,080	2,160
5	32—40	36	14	0,042	1,510
6	40—48	44	9	0,027	1,188
7	48—56	52	3	0,009	0,468
8	56—64	60	2	0,006	0,360
9	64—72	68	1	0,003	0,204
10	72—80	76	1	0,003	0,228

Суммируя результаты последнего столбца, получаем

$$\tilde{t}_{336} = \sum_{j=1}^{10} p_j^* t_j^{(c)} = 13,75 \text{ ч.}$$

Статистической оценкой вероятности случайного события выступает его частота $p_n^* = m/n$. Согласно теореме Бернулли частота сходится по вероятности к вероятности появления случайного события и, следовательно, является состоятельной оценкой. Из (8.3.14) следует, что эта оценка также и несмещенная.

Пример 8.7. Продолжим рассмотрение примера 8.5 и найдем распределение частоты прихода определенного числа судов за сутки. Расчеты сведем в схему, приведенную в табл. 8.5.

Т а б л и ц а 8.5

Число судов m_j	0	1	2	3	4

Число наблюдений m_j	16	13	10	3	1
Частость $p_j^* = \frac{m_j}{n}$	0,372	0,302	0,233	0,070	0,023

Частость прихода за сутки хотя бы одного судна составит

$$R_{1,4}^* = \sum_{j=1}^4 p_j^* = 1 - p_0^* = 0,628.$$

Статистическая оценка дисперсии вычисляется по-разному в зависимости от того, известно или не известно математическое ожидание случайной величины.

В первом случае состоятельной и несмещенной статистической оценкой дисперсии является величина

$$\tilde{D}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (8.3.23)$$

Ее состоятельность, т. е. соответствие требованию (8.3.20), следует из того, что \tilde{D}_n является средним арифметическим параметров $(x_i - \bar{x})^2$ и, значит, сходится по вероятности к дисперсии D_x случайной величины X (см. теорему Чебышева).

Для доказательства несмещенности оценки \tilde{D}_n подставим выражение (8.3.23) в условие (8.3.21), учитывая при этом независимость испытаний:

$$\begin{aligned} M(\tilde{D}_n) &= M\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right] = \frac{1}{n} M\left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right] = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M[(x_i - \bar{x})^2] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D(X) = D(X). \end{aligned}$$

Таким образом, условие несмещенности выполняется.

При неизвестном математическом ожидании \bar{x} случайной величины X вместо параметра \bar{x} используется среднее арифметическое \tilde{x}_n .

Можно доказать [22], используя требования (8.3.20) и (8.3.21), что в этом случае состоятельной и несмещенной оценкой дисперсии является величина

$$\tilde{D}_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{x}_n)^2. \quad (8.3.24)$$

Величина D_n является не единственной из состоятельных и несмещенных оценок дисперсии, а дисперсия величины \tilde{D}_n не минимальна, однако из-за простоты эта оценка наиболее часто применяется в качестве статистической оценки дисперсии.

Статистическая оценка среднего квадратического отклонения вычисляется по формуле

$$\tilde{\sigma}_n = \sqrt{\tilde{D}_n}. \quad (8.3.25)$$

Пример 8.8. В условиях примеров 8.4, 8.6 найдем статистические оценки дисперсии и среднего квадратического отклонения. Расчеты сведем в схему, показанную в табл. 8.6.

Таблица 8.6

Номер разряда	Частость p_j^*	Среднее значение $t_j^{(c)}$	Статистич. оценка МО \tilde{t}_n	$ t_j^{(c)} - \tilde{t}_n $	$(t_j^{(c)} - \tilde{t}_n)^2$	$p_j^*(t_j^{(c)} - \tilde{t}_n)^2$
1	0,449	4	13,75	9,75	95,06	42,68
2	0,223	12	13,75	1,75	3,06	0,68
3	0,158	20	13,75	6,25	39,06	6,17
4	0,080	28	13,75	14,25	203,07	16,25
5	0,042	36	13,75	22,25	495,06	20,79
6	0,027	44	13,75	30,25	915,06	24,71
7	0,009	52	13,75	38,25	1463,07	13,17
8	0,006	60	13,75	46,25	2139,06	12,83
9	0,003	68	13,75	54,25	2943,06	8,63
10	0,003	76	13,75	62,25	3875,06	11,63

Суммируя результаты последнего столбца и умножая на $\frac{n}{n-1}$, получаем:

$$\tilde{D}_n = \frac{n}{n-1} D_n^* = \frac{336}{335} 157,74 = 158,21;$$

$$\tilde{\sigma}_n = \sqrt{158,21} = 12,58 \text{ ч.}$$

Для системы двух случайных величин X и Y серия из n независимых опытов дает n пар значений $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, обработка которых приводит к статистическим оценкам математических ожиданий

$$\tilde{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \tilde{y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i, \quad (8.3.26)$$

а также к оценкам дисперсий и момента связи, которые вычисляются по формулам, аналогичным (8.3.24):

$$\left. \begin{aligned} \tilde{D}_{n,x} &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{x}_n)^2; \\ \tilde{D}_{n,y} &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \tilde{y}_n)^2; \\ K_{n,x,y} &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{x}_n)(y_i - \tilde{y}_n). \end{aligned} \right\} \quad (8.3.27)$$

Итак, статистические оценки должны быть состоятельными, несмещенными и, по возможности, эффективными. Чтобы удовлетворить этим требованиям, необходимы:

1. Должная организация сбора статистических данных, обеспечивающая независимость опытов и качественное выполнение наблюдений. Организация сбора статистических данных требует профессионально глубоких знаний структуры баз данных, используемых для математического моделирования, и свойств случайных явлений.

2. Использование должных методов обработки статистического материала, что требует знания теории математической статистики.

Для нахождения рассмотренных и ряда других статистических оценок вероятностных характеристик могут быть использованы ЭВМ (автономные или в составе АСУ). Это позволяет на несколько порядков сократить время получения оценок. Однако при этом в полной мере сохраняются перечисленные выше требования к сбору, обработке статистических данных и подготовленности специалистов органа управления соединения (см. пп. 1, 2). К ним добавляется третье требование: хорошее знание персоналом, обслуживающим ЭВМ (АСУ), соответствующего СМО и порядка его использования.

8.3.4. Методы определения точности и надежности статистических оценок

Выше уже возникала потребность и возможность показать, что статистические оценки вероятностных характеристик, полученные в результате обработки ограниченного числа результатов наблюдений, являются случайными величинами. Они заведомо содержат ошибки, которые скажутся на результатах математического моделирования при обосновании решений и планов по поставленным задачам. Поэтому обязательна оценка их точности и надежности.

Введем ряд понятий. Пусть a — некоторая вероятностная характеристика, а A_n — ее статистическая оценка. Вероятность

$$P(|A_n - a| \leq \varepsilon) = \beta \quad (8.3.28)$$

называется *доверительной вероятностью* и характеризует надежность статистической оценки. Интервал $[A_n - \varepsilon, A_n + \varepsilon]$, в пределах которого с вероятностью β лежит истинное значение вероятностной характеристики, называется *доверительным интервалом*. Доверительный интервал характеризует точность статистической оценки. Доверительная вероятность β есть вероятность того, что искомая вероятностная характеристика a находится в пределах доверительного интервала $[A_n \pm \varepsilon]$, т. е. что доверительный интервал “накроет” искомую, но неизвестную вероятностную характеристику a (рис. 8.2).

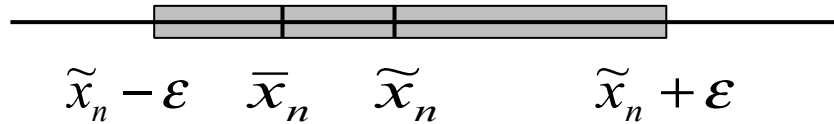


Рис. 8.2

Требуемые значения доверительного интервала и доверительной вероятности устанавливаются на основании оперативно-тактических (тактико-специальных) соображений. Доверительная вероятность и доверительный интервал взаимосвязаны и однозначно определяются числом наблюдений. При заданном числе наблюдений каждому доверительному интервалу соответствует определенная вероятность. В зависимости от целей исследования один из этих параметров должен задаваться, а другой — вычисляться. Одновременное повышение точности (уменьшение доверительного интервала) и надежности (увеличение доверительной вероятности) возможны только путем увеличения числа наблюдений.

Для аналитического выражения зависимости между числом наблюдений и доверительной вероятностью необходимо знать закон распределения статистической оценки A_n искомого параметра a . Так как закон распределения статистической оценки обычно неизвестен, для нахождения доверительных вероятности и интервала применяются приближенные методы. Их теоретической основой является уже упоминавшаяся центральная предельная теорема теории вероятности (теорема Ляпунова — см. п. 8.3.2), согласно которой при достаточно большом числе наблюдений закон распределения статистических оценок приближается к нормальному закону распределения вероятностей. Для определенности изложим вначале способы определения точности и надежности статистической оценки математического ожидания непрерывной случайной величины — среднего арифметического.

Для нахождения доверительной вероятности при заданном доверительном интервале используем формулу Ляпунова — Лапласа.

$$\beta = P(|\tilde{x}_n - \bar{x}| \leq \varepsilon) \cong \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma_x}\right) \cong \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_{\tilde{x}_n}}\right). \quad (8.3.29)$$

Обратная задача — нахождение доверительного интервала, соответствующего заданной доверительной вероятности, может быть решена по формуле

$$\varepsilon \cong \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \Phi^{(-1)}(\beta) \cong \sigma_{\tilde{x}_n} \Phi^{(-1)}(\beta). \quad (8.3.30)$$

Для определения числа n опытов, обеспечивающих заданные точность и надежность, используется выражение

$$n \cong \left[\frac{\sigma_x}{\varepsilon} \Phi^{(-1)}(\beta) \right]^2 \cong \left[\frac{\tilde{\sigma}_n}{\varepsilon} \Phi^{(-1)}(\beta) \right]^2, \quad (8.3.31)$$

где $\Phi^{(-1)}(\beta)$ — функция, обратная функции Лапласа. Она может быть определена по табл. 7, 9 или 6, 8 [4]* “обратным входом”; $\sigma_{\bar{x}_n} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$ — среднее квадратическое отклонение среднего арифметического [см. (8.3.7)]; σ_x — среднее квадратическое отклонение исследуемой случайной величины X .

Формулы (8.3.29)—(8.3.31) приближенные не только из-за конечного числа n опытов, но и в случае, если исследуемая случайная величина X распределена по закону, отличному от нормального. Тогда на результат расчетов повлияет степень сходимости закона распределения среднего арифметического к нормальному закону при данном n . Важно также подчеркнуть, что в формулах (8.3.29)—(8.3.31) среднее квадратическое отклонение σ_x случайной величины X считается (является) известным.

При неизвестном σ_x вместо него в расчетах используется статистическая оценка $\tilde{\sigma}_n$. При малом числе наблюдений ($n < 60 \div 10$) замена теоретического среднего квадратического отклонения σ_x его статистической оценкой $\tilde{\sigma}_n$ приводит к погрешностям. В этом случае для нахождения достоверных вероятности и интервала вводится случайная величина

$$t_\beta = \frac{(\tilde{x}_n - \bar{x})\sqrt{n}}{\tilde{\sigma}_n}, \quad (8.3.32)$$

имеющая распределение Стьюдента. При увеличении числа наблюдений это распределение асимптотически приближается к нормальному. Используя это распределение, можно найти все интересующие нас величины по формулам:

$$t_\beta = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\tilde{\sigma}_n}; \quad (8.3.33)$$

$$\varepsilon \cong \frac{\tilde{\sigma}_n}{\sqrt{n}} t_\beta; \quad (8.3.34)$$

$$n \cong \left(\frac{\tilde{\sigma}_n}{\varepsilon} t_\beta \right)^2. \quad (8.3.35)$$

Величина t_β определяется числом средних квадратических отклонений, которое нужно отложить вправо и влево от центра рассеивания для того, чтобы вероятность попадания в интервал $\left[\tilde{x}_n - t_\beta \frac{\tilde{\sigma}_n}{\sqrt{n}}; \tilde{x}_n + t_\beta \frac{\tilde{\sigma}_n}{\sqrt{n}} \right]$ была равна β .

При числе наблюдений $n > 100$ величина t_β практически совпадает с обратной функцией Лапласа:

$$t_\beta \cong \Phi^{(-1)}(\beta).$$

* Подобные таблицы имеются в большинстве пособий по теории вероятностей.

Зависимость между β , t_β , n представлена в табл. 8.7. Для нахождения t_β и β могут быть использованы также табл. 25 и 26 [4]*.

Т а б л и ц а 8.7

$\beta \backslash n$	5	10	20	40	100	∞
0,1	0,132	0,129	0,127	0,126	0,126	0,126
0,2	0,267	0,260	0,257	0,255	0,254	0,253
0,4	0,559	0,542	0,533	0,529	0,526	0,524
0,6	0,920	0,879	0,860	0,851	0,845	0,842
0,8	1,476	1,372	1,325	1,303	1,289	1,282
0,99	4,032	3,169	1,845	2,701	2,620	2,576

Подобным же образом могут быть определены надежность и точность статистической оценки вероятности появления случайного события и число наблюдений, обеспечивающих заданную точность и надежность:

$$\beta \cong \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right); \quad (8.3.36)$$

$$\varepsilon \cong \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}} \Phi^{(-1)}(\beta); \quad (8.3.37)$$

$$n \cong \left[\frac{\sqrt{pq}}{\varepsilon} \Phi^{(-1)}(\beta) \right]^2; \quad (8.3.38)$$

$$t_\beta \cong \varepsilon \sqrt{\frac{n}{p_n^* q_n^*}}; \quad (8.3.39)$$

$$\varepsilon \cong \sqrt{\frac{p_n^* q_n^*}{n}} t_\beta; \quad (8.3.40)$$

$$n \cong \left(\frac{\sqrt{p_n^* q_n^*}}{\varepsilon} t_\beta \right)^2. \quad (8.3.41)$$

Пример 8.9. Найдем в условиях примеров 8.4, 8.6, 8.8 доверительную вероятность статистической оценки математического ожидания при доверительном интервале $2\varepsilon = 2$. Так как число наблюдений $n = 336$ велико, для нахождения доверительной вероятности воспользуемся формулой (8.3.29):

$$\beta = \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\tilde{\sigma}_n}\right) = \Phi\left(\frac{1\sqrt{336}}{12,58}\right) = 0,856.$$

* Подобные таблицы имеются во всех пособиях по математической статистике.

Таким образом, искомое значение математического ожидания временного интервала прихода судов с вероятностью 0,856 лежит в пределах от 12,75 до 14,75 ч.

Пример 8.10. В условиях примера 8.5 частота прихода в порт за сутки хотя бы одного судна составляет $p_{43}^* = 0,628$ (см. статистический ряд распределения — табл. 8.5). Определим доверительную вероятность для доверительного интервала $\varepsilon = \pm 0,050$. Так как число наблюдений $n < 100$, воспользуемся формулой (8.3.39) и табл. 8.7. Получим $t_\beta = 0,678$, $\beta = 0,445$.

Читатель может использовать данные примеров 8.9, 8.10 и убедиться, что с ужесточением требований к точности \tilde{x}_n, p_n^* (т. е. при уменьшении ε) доверительная вероятность β будет уменьшаться, при снижении требований (при увеличении ε) — увеличиваться.

Методически аналогичные способы определения точности и надежности разработаны для всех статистических оценок. При этом всегда мерой точности служит величина доверительного интервала $\pm \varepsilon$, а мерой надежности — величина доверительной вероятности β .

§ 8.4. ОБОСНОВАНИЕ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН НА ОСНОВАНИИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ (СГЛАЖИВАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ РЯДОВ)

В § 8.1 отмечалось, что одной из задач, стоящих перед математической статистикой, является использование статистических данных для обоснования законов распределения случайных величин, знание которых необходимо при оперативно-тактических расчетах и исследованиях. Обосновать закон распределения наблюдаемой случайной величины — это значит обосновать вид этого закона (нормальный, биномиальный, показательный и т. д.) и значения соответствующих числовых характеристик случайной величины (например, математического ожидания и среднего квадратического отклонения для нормального закона). Для этого вначале подбирается вид закона распределения (часто говорят “теоретического закона”), а затем методами математической статистики определяются статистические оценки необходимых числовых характеристик, проверяется степень согласия выбранного теоретического закона распределения с опытными данными и принимается решение — считать гипотезу о законе распределения случайной величины правдоподобной или же ее отвергнуть. В последнем случае процесс обоснования закона распределения повторяется.

8.4.1. Подбор теоретического закона распределения случайной величины. Статистические законы распределения

Подбор теоретического закона распределения случайной величины может осуществляться тремя способами: на основании анализа свойств случайной величины, в результате анализа статистических оценок вероятностных характеристик, полученных после обработки статистических данных, на основании сравнительной оценки вида статистического закона распределения наблюдаемой случайной величины и известных теоретических законов распределения случайных величин. Возможны также комбинации этих способов.

Первый способ основан на сопоставлении свойств наблюдаемой случайной величины и особенностей различных видов распределения [6].

Пример 8.11. Требуется определить вид теоретического закона распределения случайной величины — ошибки в месте корабля при плавании его по счислению. Ошибка в месте корабля

вызывается совместным действием многих факторов. По этой причине исследуемая случайная величина есть сумма большого числа случайных величин. Если среди них нет ошибки, значительно большей по величине, чем другие ошибки, и с законом распределения, отличным от нормального, то на основании центральной предельной теоремы Ляпунова можно выдвинуть гипотезу о нормальном законе распределения величины ошибки в месте корабля.

Пример 8.12. Обосновывается вид теоретических законов распределения случайных величин — числа поражающих попаданий в различные участки траншеи противника и расстояния между смежными попаданиями — после артподготовки атаки. Установлено, что собранный статистический материал соответствует ситуации активного противодействия противника артподготовке — поражения им ряда наблюдательных и командных пунктов, линий связи, батарей. Поэтому перенос огня с пораженных участков на непораженные участки траншеи не всегда осуществлялся или был малоэффективен. На основании этого реалистично допущение об ординарности, отсутствии последствия и стационарности распределения числа поражающих попаданий по длине траншеи, что, в свою очередь, дает основания для гипотез:

— число попаданий снарядов в различные участки траншеи — случайная величина, распределенная по закону Пуассона;

— расстояние между очередными попаданиями снарядов в траншею — случайная величина, распределенная по показательному закону.

Пример 8.13. В отличие от условий примера 8.12 считать установленным, что противодействие противника артподготовке, а также нарушение связи управления отсутствовало, планом артподготовки предусматривался перенос огня для равномерного поражения всех участков траншеи. В этом случае дополнительно к гипотезам, указанным в примере 8.12, целесообразно также рассмотреть гипотезы о равномерном законе распределения рассматриваемых случайных величин.

Пример 8.14. Обрабатывается статистический материал о длительности поддержания разведчиком контакта с обнаруженным объектом противника. Контакт поддерживается периодическим использованием технических средств наблюдения (постановкой гидроакустических буев, выходом разведчика на радиолокационный, гидроакустический контакт и т. п.). При каждой из таких попыток контакт с противником мог быть потерян в силу различных тактических, технических причин, гидрометеорологических условий, влияние которых независимо в различные моменты времени выполнения разведчиком задачи. В таком случае требовалась организация вторичного поиска объекта.

Необходимо обосновать вид теоретического закона распределения случайной величины — числа использования технических средств для поддержания контакта до его потери, когда требуется организация вторичного поиска.

В рассматриваемых условиях реальна гипотеза о законе распределения Паскаля рассматриваемой случайной величины [6].

Второй способ подбора вида теоретического закона распределения основан на анализе статистических оценок основных вероятностных характеристик. При этом используются некоторые характерные свойства отдельных теоретических законов (равенство математического ожидания и дисперсии для закона Пуассона, равенство математического ожидания и среднего квадратического отклонения для показательного закона, равенство нулю мер косости и крутости для нормального закона и т. д.).

Пример 8.15. В условиях примера 8.4 обосновать вид теоретического закона распределения случайной величины — промежутка времени между приходами в порт судов. Обратим внимание, что

статистическая оценка математического ожидания этой случайной величины $\tilde{\tau} = 13,75$ ч (пример 8.6) близка по своему значению к статистической оценке ее среднего квадратического отклонения $\tilde{\sigma} = 12,58$ ч (см. пример 8.8). Это дает основание выдвинуть гипотезу о показательном законе распределения исследуемой случайной величины.

Третий способ подбора вида теоретического закона распределения заключается в сравнительной оценке графиков плотности вероятности, функции распределения различных теоретических законов распределения и графического изображения их статистических аналогов — полигона, гистограммы, статистической функции распределения. В качестве теоретических законов часто применяются законы, описываемые кривыми распределения Пирсона*.

Рассмотрим подробнее статистические законы распределения. Систематизированные результаты наблюдений, записанные в виде статистического ряда (см. п. 8.3.1), являются одной из форм статистического закона распределения. Статистический ряд может быть изображен графически в виде полигона для дискретных случайных величин или гистограммы — для непрерывных случайных величин. Полигон и гистограмма являются статистическим аналогом плотности вероятности и могут строиться как по числу попаданий в разряд, так и по частотам.

В условиях примера 8.5 табличное и графическое изображение статистического ряда в виде полигона представлено в табл. 8.8 и на рис. 8.3.

Т а б л и ц а 8.8

x_i	0	1	2	3	4
m_i	16	13	10	3	1
$p_i^* = \frac{m_i}{n}$	0,372	0,302	0,233	0,070	0,023

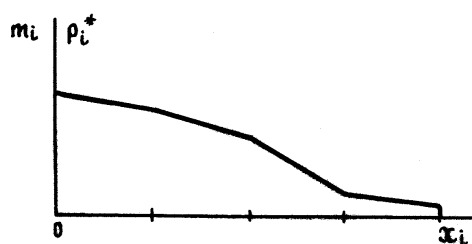


Рис. 8.3

Табличное и графическое изображение статистического ряда в виде гистограммы в условиях примера 8.4 приведено в табл. 8.9 и на рис. 8.4.

Т а б л и ц а 8.9

Границы разрядов	0—8	8—16	16—24	24—32	32—40	40—48	48—56	56—64	64—72	72—80
m_j	151	75	53	27	14	9	3	2	1	

* См., например, А. К. Митропольский. Техника статистических вычислений. М., Наука, 1971.

$$p_j^* = \frac{m_j}{n} \quad \left| \begin{array}{c} 0,449 \\ 0,223 \\ 0,158 \\ 0,080 \\ 0,042 \\ 0,027 \\ 0,009 \\ 0,006 \\ 0,003 \\ 0,003 \end{array} \right.$$

Для построения гистограммы необходимо на оси абсцисс отложить значения границ разрядов и на каждом интервале, соответствующем данному разряду, построить прямоугольник, равный по площади частоте или числу попаданий в данный разряд. Высота ординаты r_i каждого разряда равна числу или частоте, деленной на величину разряда (интервал). При увеличении числа наблюдений и соответственно числа разрядов гистограмма будет все более приближаться к некоторой кривой, ограничивающей площадь, равную единице. Эта кривая получила название огибающей. Таким образом, при неограниченном увеличении числа наблюдений гистограмма будет приближаться к кривой плотности вероятности исследуемой случайной величины.

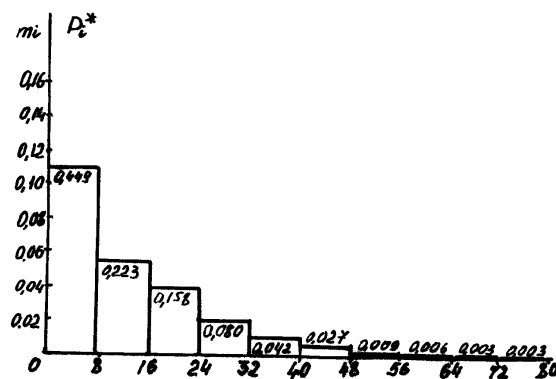


Рис. 8.4

Другой формой статистического закона распределения является статистическая функция распределения $F_n^*(x)$, которая описывает частоту случайного события $X < x$:

$$F_n^*(x) = p^*(X < x) = \begin{cases} 0 & \text{при } X < x_{\min}; \\ \frac{m_x}{n} & \text{при } x_{\min} < X < x_{\max}; \\ 1 & \text{при } X > x_{\max}. \end{cases} \quad (8.4.1)$$

Для нахождения статистической функции распределения достаточно подсчитать число значений случайной величины m_x , оказавшихся меньше заданного, и разделить на число наблюдений.

Статистические функции для примеров 8.4 и 8.5 приведены в табл. 8.10 и 8.11, а их графическое изображение — на рис. 8.5 и 8.6.

Т а б л и ц а 8.10

t	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
$F_n^*(t)$	0,449	0,672	0,830	0,910	0,952	0,979	0,988	0,994	0,997	1,0

x	0	1	2	3	4	Более 4
$F_n^*(x)$	0	0,372	0,674	0,907	0,977	1,0

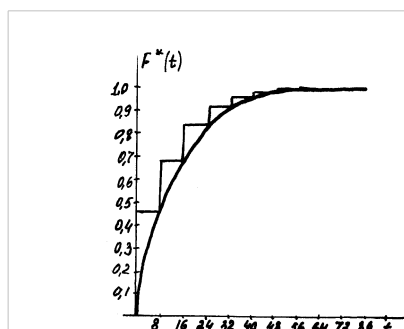


Рис. 8.5

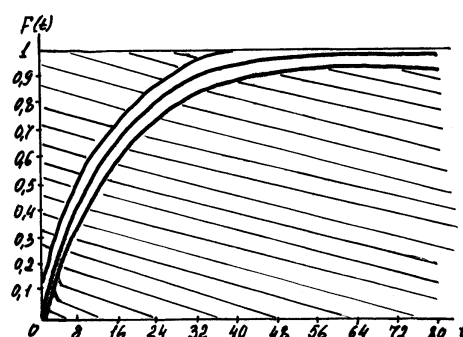


Рис. 8.6

Статистическая функция распределения обладает следующими свойствами:

- а) определена в замкнутом промежутке $[x_{\min}, x_{\max}]$;
- б) принимает значение от 0 до 1, при этом $F_n^*(x_{\min}) = 0$; $F_n^*(x_{\max}) = 1$;
- в) является неубывающей функцией, т. е. если $x_1 < x_2$, то $F_n^*(x_1) \leq F_n^*(x_2)$.

Правило нахождения статистической функции распределения и ее свойства позволяют сделать вывод о том, что она является статистическим аналогом функции распределения.

Для удобства сравнения статистических рядов и статистических функций и наглядности ломаные линии на графиках заменяют плавными кривыми.

Напомним, что статистические законы распределения находятся в зависимости от числа наблюдений n и являются случайными.

8.4.2. Проверка согласия теоретического закона распределения случайной величины с опытными данными

С математической точки зрения проверить согласие теоретического закона с опытными данными, это значит проверить способность формульных зависимостей, описывающих закон распределения (функцию распределения, плотность вероятности) при принятых значениях соответствующих числовых характеристик достаточно полно описывать свойства случайной величины. Считается, что эти свойства “заложены” в собранных опытных данных.

Проверка согласия начинается с определения числовых характеристик теоретического закона распределения случайной величины. В качестве таких характеристик выступают их статистические оценки, вычисленные с использованием собранных статистических данных. Например, для нормального закона в качестве числовых характеристик берут статистические оценки математического ожидания \tilde{x}_n и среднего квадратического отклонения $\tilde{\sigma}_n$, для показательного закона — величину, обратную статистической оценке математического ожидания ($\mu = 1/x_n^2$), и т. д.

После этого приступают собственно к проверке согласия. Существует много способов проверки, названных по имени их авторов: Пирсона, Колмогорова, Романовского и др. Они сходны с точки зрения общих принципов проверки согласия и отличаются частностями (для предоставления больших удобств при тех или иных особенностях проверки или свойствах случайных величин).

Общие принципы проверки согласия заключаются в следующем. Проверка осуществляется путем сравнения теоретической $F(x)$ и статистической $F^*(x)$ функций распределения. С использованием той или иной меры (разной у различных способов) замеряется расхождение между теоретической и статистической функциями распределения. Мерами расхождения могут служить:

— максимум абсолютного значения разности между частотой и вероятностью

$$\Delta = \max_j |p_j^* - p_j|;$$

— максимум абсолютного значения разности между статистической и теоретической функциями распределения

$$\Delta = \max_x |F^*(x) - F(x)|;$$

— максимум квадрата отклонения частоты от вероятности

$$\Delta = \max_j (p_j^* - p_j)^2;$$

— сумма квадратов отклонения частоты от вероятности

$$\Delta = \sum_{j=1}^n (p_j^* - p_j)^2$$

и т. д.

В самом общем случае мера расхождения является случайной величиной, так как в большой степени зависит от элементов статистической совокупности. Для избранной меры расхождения разрабатывается закон ее распределения.

Какой бы ни была избранная мера расхождения, факт расхождения и его величина могут быть следствием двух причин. Первая состоит в том, что статистический закон распределения определен по конечному числу наблюдения, что может вызвать случайные отклонения частоты от вероятности и статистической функции распределения от теоретической функции распределения. Эта причина существует всегда при любом теоретическом распределении. Уменьшение ее влияния может быть достигнуто только путем увеличения числа наблюдений. Вторая причина расхождения — неправильный подбор теоретического закона распределения. Влияние второй причины на расхождение статистического и теоретического законов распределения существенно и при достаточно большом числе наблюдений, в то время как влияние первой причины в этом случае несущественно.

Наличие этих двух причин не дает возможности при ограниченном числе наблюдений категорически утверждать, что теоретический закон подобран правильно или неправильно. Можно

оценить лишь вероятность правдоподобия — *критерий согласия**. Далее по величине критерия согласия принимается решение — согласиться с избранным теоретическим законом или же его отвергнуть.

Обозначим через Δ_q замеренное расхождение между теоретической и статистической функциями распределения. Критерием согласия называется вероятность β того, что при данном числе опытов за счет чисто случайных причин расхождение Δ могло бы быть и еще больше (не меньше) замеренного расхождения

$$\beta = P(\Delta \geq \Delta_q).$$

Пусть эта вероятность мала. Это значит, что замеренное расхождение между теоретическим и статистическим законами слишком велико и, вероятнее всего, вызвано не случайными причинами, а неверным выбором теоретического закона. В этом случае говорят, что теоретический закон не согласуется с опытными данными (с вероятностью $1 - \beta$). Если же вероятность β велика, это значит, что при избранном теоретическом законе с большой вероятностью расхождение могло бы быть и больше (не меньше) замеренного. Это позволяет считать, что замеренные расхождения несущественны, вызваны действием чисто случайных причин, а выбранный теоретический закон не противоречит опытным данным (с вероятностью β).

На практике часто пользуются следующим правилом: при $P(\Delta \geq \Delta_q) \geq 0,10$ считается, что теоретический закон согласуется с опытными данными; при $P(\Delta \geq \Delta_q) \leq 0,01$ — что согласия нет и теоретический закон подобран неверно; при $0,01 < P(\Delta \geq \Delta_q) < 0,10$ — для суждения о согласии или несогласии закона с опытными данными необходимо увеличить число наблюдений.

Следовательно, суждение о правильном или неправильном подборе теоретического закона распределения может быть высказано только с некоторой вероятностью.

Рассмотрим некоторые, наиболее часто встречающиеся на практике критерии согласия.

Критерий согласия Пирсона (критерий χ^2). В качестве меры расхождения между теоретическим и статистическим законами Пирсон предложил величину

$$\chi_q^2 = \sum_{j=1}^k \frac{(m_j - np_j)^2}{np_j} = n \sum_{j=1}^k \frac{(p_j^* - p_j)^2}{p_j}, \quad (8.4.2)$$

где χ_q^2 — наблюдаемая мера расхождения.

Пирсон доказал, что при возрастании объема статистического материала предложенная мера расхождения стремится к распределению χ^2 с r степенями свободы:

$$r = k - S - 1, \quad (8.4.3)$$

где S — число параметров теоретического закона, определенных по данному статистическому материалу и использованных при определении вероятностей p_j ; k — число разрядов, в которых сгруппирован статистический материал.

Число степеней свободы в формуле (8.4.3) уменьшено на единицу потому, что при любом теоретическом законе учитывается, что $\sum_{i=1}^k p_i^* = 1$.

* “Доброкачественность” статистических данных сомнению не подвергается и не проверяется. Именно статистические данные, отражающие действительность, а не сама действительность являются объектом проверки.

Закон распределения меры расхождения χ^2 не зависит от закона распределения исследуемой величины, что дает возможность применять критерий согласия Пирсона для проверки любых теоретических законов. Единственным ограничивающим условием применения критерия согласия Пирсона является требование, чтобы частоты попадания в разряд были достаточно велики. Это условие может быть выполнено, если в каждом разряде будет не менее 5—10 наблюдений. В том случае, когда при первичной обработке это условие не выполнено, производится объединение рядом лежащих разрядов.

В примере 8.4 для применения критерия согласия Пирсона целесообразно объединить последние четыре разряда в один (табл. 8.12).

Т а б л и ц а 8.12

Границы разрядов	0—8	8—16	16—24	24—32	32—40	40—48	48—80
m_j	151	75	53	27	14	9	7
p_j^*	0,449	0,223	0,158	0,080	0,042	0,027	0,021

Зная закон распределения меры расхождения, можно вычислить вероятность

$$P(\chi^2 \geq \chi_q^2)$$

и в зависимости от уровня значимости критерия или в соответствии с вышеизложенным правилом определить согласие теоретического закона с опытными данными.

Для вычисления вероятности $P(\chi^2 \geq \chi_q^2)$ могут быть использованы табл. 28 и 29 [4]. Входом в таблицы служат величины χ_q^2 и r . При отсутствии таблиц можно проверить согласие теоретического закона с опытными данными, используя правило “трех сигм”*: если

$$\frac{|\chi_q^2 - r|}{\sqrt{2r}} < 3;$$

то расхождение несущественно и согласие есть; если же

$$\frac{|\chi_q^2 - r|}{\sqrt{2r}} \geq 3,$$

то расхождение существенно и согласие отсутствует.

Проверка согласия теоретического закона с опытными данными при использовании критерия согласия Пирсона осуществляется в такой последовательности:

- производится распределение по разрядам таким образом, чтобы в каждом разряде было не менее 5—10 наблюдений;
- вычисляется мера расхождения χ_q^2 ;
- определяется число степеней свободы r ;
- находится вероятность $P(\chi^2 \geq \chi_q^2)$;
- проверяется согласие теоретического закона с опытными данными.

* См.: В. А. Унковский. Теория вероятностей. М., Военмориздат, 1953.

Проверим согласие показательного закона распределения интервалов прихода судов со статистическими данными примера 8.4.

В табл. 8.12 приведены результаты наблюдений с учетом требований применения критерия согласия Пирсона. Для нахождения меры расхождения χ_q^2 целесообразна последовательность расчетов, приведенная в табл. 8.13.

Т а б л и ц а 8.13

Номер разряда	Границы разряда	p_j^*	p_j	$ p_j^* - p_j $	$(p_j^* - p_j)^2$	$\frac{(p_j^* - p_j)^2}{p_j}$
1	0—8	0,449	0,442	0,007	$49 \cdot 10^{-6}$	$0,11 \cdot 10^{-3}$
2	8—16	0,223	0,247	0,021	$576 \cdot 10^{-6}$	$2,33 \cdot 10^{-3}$
3	16—24	0,158	0,137	0,021	$441 \cdot 10^{-6}$	$3,22 \cdot 10^{-3}$
4	24—32	0,080	0,077	0,003	$9 \cdot 10^{-6}$	$0,12 \cdot 10^{-3}$
5	32—40	0,042	0,043	0,001	$1 \cdot 10^{-5}$	$0,02 \cdot 10^{-3}$
6	40—48	0,027	0,024	0,003	$9 \cdot 10^{-6}$	$0,38 \cdot 10^{-3}$
7	48—80	0,021	0,027	0,006	$36 \cdot 10^{-6}$	$1,33 \cdot 10^{-3}$
						$\Sigma = 7,51 \cdot 10^{-3}$

Получим $\chi_q^2 = 336 \cdot 7,51 \cdot 10^{-3} = 2,52$ [см. (8.4.2)].

Так как для показательного закона только один параметр $\mu = 1/t_n$ определяется по статистическим данным, то число степеней свободы $r = 7 - 1 - 1 = 5$. По $\chi_q^2 = 2,52$ и $r = 5$ из табл. 29 [4] получаем

$$P(\chi^2 \geq \chi_q^2) \cong 0,78.$$

Следовательно, показательный закон с параметром $\mu = \frac{1}{13,75} = 0,073$ согласуется с опытными данными.

Применение критерия Пирсона к малым по объему выборкам рискованно, так как в этом случае он становится ненадежным, что особенно проявляется при исследовании непрерывных случайных величин. Причиной того могут быть произвольность выбора интервалов разрядов, выбор нижней границы первого интервала и способ объединения разрядов с малыми частотами.

Для дискретных теоретических законов все это определено однозначно и не приводит к ошибкам.

Критерий согласия Колмогорова (критерий $K(\lambda)$). Другим широко распространенным критерием согласия является критерий согласия Колмогорова. В качестве меры расхождения между теоретическим и статистическим законами А. Н. Колмогоров взял величину

$$\Delta = \max_x |F^*(x) - F(x)|. \quad (8.4.4)$$

При неограниченном увеличении числа наблюдений величина $\Delta\sqrt{n}$ независимо от вида закона распределения исследуемой величины стремится к закону распределения Колмогорова. Вероятность $P(\Delta\sqrt{n} \geq \lambda)$ в этом случае может быть вычислена по формуле

$$P(\Delta\sqrt{n} \geq \lambda) = 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k\lambda^2} \quad \text{при } \lambda > 0. \quad (8.4.5)$$

Эту вероятность А. Н. Колмогоров и взял в качестве критерия согласия.

Для нахождения вероятности по формуле (8.4.5) может быть использована табл. 30 [4], входом в таблицу служит величина

$$\lambda = \Delta_q \sqrt{n}, \quad (8.4.6)$$

где Δ_q — опытная мера расхождения.

Для практического применения критериев согласия Колмогорова целесообразно использовать следующий прием. Задаются некоторым уровнем значимости

$$P(\Delta\sqrt{n} \geq \lambda) = \alpha, \quad (8.4.7)$$

по вероятности α из таблиц находят значение параметра λ и строят наряду со статистической функцией распределения $F^*(x)$ две вспомогательные функции:

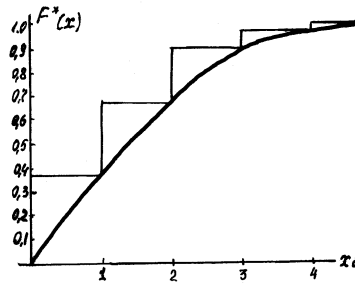


Рис. 8.7

$$F_1(x) = \begin{cases} F^*(x) + \frac{\lambda}{\sqrt{n}} & \text{при } F^*(x) \leq 1 - \frac{\lambda}{\sqrt{n}}; \\ 1 & \text{при } F^*(x) > 1 - \frac{\lambda}{\sqrt{n}}; \end{cases} \quad (8.4.8)$$

$$F_2(x) = \begin{cases} F^*(x) - \frac{\lambda}{\sqrt{n}} & \text{при } F^*(x) \geq \frac{\lambda}{\sqrt{n}}; \\ 0 & \text{при } F^*(x) < \frac{\lambda}{\sqrt{n}}. \end{cases}$$

Каждое теоретическое распределение, которое всеми своими точками не выходит за пределы области согласия, ограниченной кривыми $F_1(x)$ и $F_2(x)$, не противоречит результатам наблюдений.

Для условий примеров (8.4, 8.6) статистическая и вспомогательные функции распределения показаны на рис. 8.7. При построении вспомогательных функций $\alpha = 0,2$; $\lambda = 1,05$; $n = 336$;

$\lambda/\sqrt{n} = 0,06$. Показательный закон распределения с параметром $\mu = \frac{1}{13,75} = 0,073$ всеми своими

точками лежит в пределах полосы согласия и, следовательно, не противоречит опытными данным.

Критерий согласия Колмогорова может быть применен для проверки корректности выборки, если известны теоретическое распределение и его параметры. Если же теоретическое распределение лишь предполагается в том или ином виде и его параметры определены по той же выборке, то критерий согласия Колмогорова может дать согласие лучшее, чем оно есть на самом деле. Это возникает в результате того, что критерий согласия Колмогорова не учитывает влияния степеней свободы. Однако при большом числе наблюдений и исследовании непрерывных случайных величин критерий согласия Колмогорова дает достаточно надежные результаты.

Описание других способов проверки согласия, свойства этих способов можно найти во всех пособиях по математической статистике и во многих пособиях по исследованию операций (см., например, [22]).

Проверка согласия теоретических законов распределения с опытными данными может быть осуществлена на ЭВМ с помощью стандартных процедур.

Глава 9. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМЫХ ПРОЦЕССОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДА СТАТИСТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ (МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО)

§ 9.1. ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА СТАТИСТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ ПРИ УПРАВЛЕНИИ СИЛАМИ

9.1.1. Область применения метода

Использование методов математической статистики для обработки опытных (экспериментальных) данных дает возможность получать статистические оценки различных вероятностных характеристик, выступающих в качестве исходных данных при аналитическом моделировании или же показателей эффективности управляемых процессов. Однако далеко не всегда представляется возможным собрать необходимый статистический материал в процессе фактического управления силами и средствами или же провести для этих целей достаточное число натуральных испытаний (военных игр, боевых упражнений, учений, маневров). Часто оказывается невозможной и разработка для исследуемых ситуаций аналитических моделей (см. гл. 4—7, 11—20) применения сил или средств. Причины этого могут быть и объективные и субъективные, например:

— необходимость принятия допущений и ограничений, существенно искажающих исследуемые закономерности;

— чрезмерная громоздкость модели, делающая невозможной ее реализацию с помощью существующих вычислительных средств;

— отсутствие у специалиста по исследованию операций знаний или навыков, необходимых для разработки аналитических моделей.

Все это приводит к необходимости применения метода статистических испытаний, в котором сочетаются методы математической статистики и математического моделирования. Метод статистических испытаний — это метод сбора исходных данных, необходимых для вычисления

статистических оценок, с помощью специально разработанных математических моделей. Статистические оценки затем вычисляются методами математической статистики.

Для понимания особенностей метода статистических испытаний рассмотрим следующий пример.

Пример 9.1. Требуется обосновать оптимальное удаление линии выявления разведкой конвоя от рубежа развертывания подводных лодок. Для простоты положим, что развертывается всего одна подводная лодка. Схема управления наведением показана на рис. 9.1. Конвой осуществляет переход зигзагом. Угол отворота от генерального курса на i -м частном курсе зигзага α_i принимает значения в интервале от α' до α'' , продолжительность лежания на i -м частном курсе t_i — в интервале от t' до t'' .

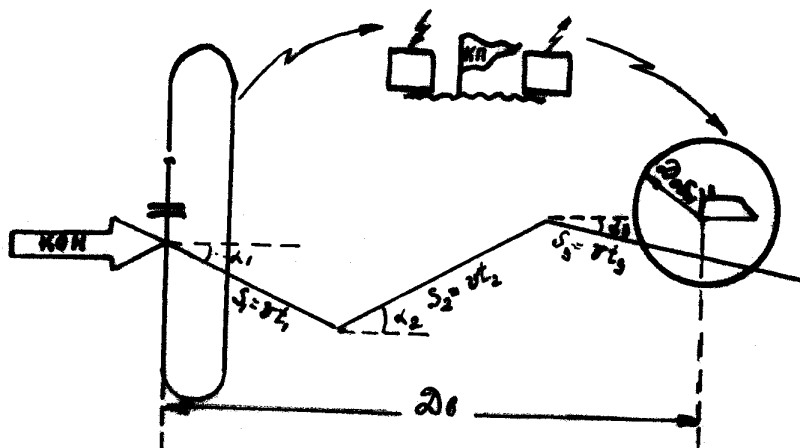


Рис. 9.1

Возможны ошибки в определении разведчиком места конвоя, его генерального курса и скорости, а также ошибка в знании своего места подводной лодкой. Следует учитывать возможность поражения подводной лодки противолодочными силами противника, а также случайный характер факта обнаружения конвоя разведчиком, передачи им донесения на командный пункт, приема подводной лодки сигналов управления.

В результате наведения подводная лодка должна установить контакт с конвоем собственными средствами наблюдения. Таким образом, показателем эффективности наведения в данном случае является вероятность обнаружения конвоя. Для определения этого показателя методами математической статистики требуется провести в заданном районе моря серии учений, в которых бы использовались силы, имитирующие конвой и противолодочные силы противника, а также подводная лодка и система управления ею. Каждая серия учений должна соответствовать определенной дистанции выявления, а число учений в серии должно обеспечить необходимые точность и надежность статистической оценки вероятности обнаружения конвоя (см. гл. 8). Число серий должно позволить построить кривую зависимости показателя эффективности от дистанции выявления. Совершенно очевидна практическая трудность подобного решения задачи.

Что касается разработки аналитических методов описанного процесса наведения, то она может оказаться невозможной при некоторых часто встречающихся предположениях о характере процесса (например, о характере случайных величин α , t и т. п.). Между тем разработка модели описанного процесса методом статистических испытаний не представит больших творческих и технических трудностей.

В основе метода статистических испытаний лежит искусственное воспроизведение реализации случайного явления по заданным вероятностным характеристикам явления. Допустим, что вероятность обнаружения разведчиком конвоя в рассмотренном примере равняется 0,8. Это значит, что если в заданных условиях проводить эксперименты по обнаружению разведчиком конвоя, то будет получена статистическая оценка вероятности (частость) обнаружения, близкая к 0,8.

Осуществим теперь статистическое моделирование поиска. Возьмем 100 одинаковых шаров с номерами от 1 до 100 и поместим их в урну. Будем извлекать по одному шару с последующим его возвращением в урну и тщательным перемешиванием шаров. При регистрации результатов моделирования будем полагать, что если номер z извлеченного шара не больше 80 (т. е. при $z < 80$), обнаружение конвоя состоялось, а если больше ($z > 80$) — не состоялось. Очевидно, что при большом числе испытаний получим статистическую оценку вероятности извлечь шар с номером $z < 80$, близкую к 0,8.

При заданных условиях событие “обнаружение конвоя разведчиком” и событие “извлечение из урны шара с номером $z < 80$ ” с вероятностной точки зрения равносильны. Поэтому статистическую оценку вероятности, полученную при таком статистическом моделировании, можно принимать в качестве статистической оценки вероятности обнаружения конвоя, а для моделирования заменять результат опыта по поиску разведкой конвоя результатом опыта по извлечению из урны шара с номером $z < 80$.

Существуют столь же простые, также основанные на жеребьевке способы моделирования многих других случайных явлений: зависимых событий; реализации различных гипотез, составляющих полную группу; появления случайных величин, распределенных по различным законам; систем случайных величин с различной зависимостью между ними и т. п. Многие из них будут рассмотрены ниже. Знание этих простых способов позволяет разрабатывать статистические модели сложных случайных процессов.

Продолжим рассмотрение приведенного выше примера. Разобьем процесс наведения на ряд этапов:

- 1) обнаружение разведчиком конвоя;
- 2) передача разведчиком на КП донесения об обнаружении конвоя;
- 3) прием на подводной лодке приказа об изменении района действий (смещении);
- 4) преодоление подводной лодкой противодействия противолодочных сил противника;
- 5) движение конвоя зигзагом от линии обнаружения до рубежа развертывания подводной лодки с учетом ошибки разведчика в определении параметров движения цели;
- 6) занятие непораженной подводной лодкой заданной позиции с учетом ошибки разведчика в определении места цели и ошибки подводной лодки в знании своего места, а также имеющегося в распоряжении подводной лодки времени;
- 7) обнаружение конвоя подводной лодкой, занявшей позицию.

Допустим, что известны те вероятностные характеристики этапов, которые необходимы для их статистического моделирования. Используя метод жеребьевки, проведем элементарный опыт: последовательно, этап за этапом, будем воспроизводить их реализации, регистрируя конечный результат — пересечение (или непересечение) конвоем зоны действия средств обнаружения подводной лодки, т. е. факт обнаружения (необнаружения) конвоя. При этом может случиться, что элементарный опыт будет включать моделирование не всех, а части этапов. Например, он может быть закончен на четвертом этапе, если результатом его моделирования окажется поражение

подводной лодки. В этом случае в качестве результата всего элементарного опыта будет зарегистрировано необнаружение конвоя.

Проведя достаточное число элементарных опытов, обработаем их результаты с помощью методов математической статистики и вычислим статистическую оценку показателя эффективности — частоту обнаружения конвоя. Если провести несколько серий таких элементарных опытов, можно построить график зависимости вероятности обнаружения конвоя от дистанции выявления и определить оптимальную (в условиях поставленной задачи) дистанцию.

Подчеркнем, что статистическое моделирование возможно лишь в случае, когда известны все необходимые вероятностные характеристики всех этапов процесса. Для определения таких характеристик должен быть собран соответствующий статистический материал. Совершенно очевидно, что сбор статистического материала об отдельных этапах процесса — проблема несравненно более простая, чем сбор статистического материала о результатах всего процесса в целом. Очень часто для вычисления характеристик этапов процесса используются аналитические модели.

Дадим сравнительную оценку методам статистического и аналитического моделирования. К числу достоинств метода статистических испытаний можно отнести его сравнительную простоту. Знание весьма несложных правил моделирования случайных событий и случайных величин, а также особенностей процесса гарантирует разработку модели.

Чрезвычайно важным достоинством метода является возможность обойтись без многих допущений и ограничений, необходимых при аналитических методах моделирования. Например, при разработке моделей функционирования систем массового обслуживания можно учитывать любые, а не только пуассоновские потоки заявок и обслуживаний и т. д. Однако иногда встречающиеся утверждения, что метод статистических испытаний позволяет вообще обойтись без допущений и ограничений, неверны: никакие методы моделирования никаких процессов в принципе невозможны без введения системы допущений и ограничений (см. гл. 1). Это тем более справедливо для таких сложных социальных процессов, какими являются бои и операции.

Особенность метода, заключающаяся в многократном воспроизведении случайного явления, позволяет использовать его для организации имитационного моделирования. Смысл имитационного моделирования заключается в том, что некоторые заключения об исследуемом явлении могут быть сделаны еще в процессе моделирования в соответствии с замыслом моделирования. Например, может быть выявлена ошибка в постановке задачи и (или) в модели, сделано заключение о необходимости изменения наряда сил, средств, способов действий, учета дополнительных факторов (например, элементов системы управления, мероприятий обеспечения, военно-географических условий и т. д.), необходимости изменения представлений о составе сил, способах действий противника. В конечном счете все такие заключения потребуют корректирования постановки задачи, структурного и параметрического корректирования модели. Метод статистических испытаний позволяет и организовать контроль за результатами моделирования, и оперативно осуществить структурную, параметрическую адаптацию модели к новым условиям, задаваемым командиром. Однако при этом требуется: непосредственное участие командира (офицера штаба) в математическом моделировании, его взаимодействие со специалистом по исследованию операций и программистом, наличие программного обеспечения необходимой структуры.

Укажем теперь на недостатки метода. Наиболее важным из них является большая длительность реализации модели даже на ЭВМ с высоким быстродействием. С этим обстоятельством связано не только возрастание экономических затрат на проведение моделирования, но и, главное,

невозможность в ряде случаев использовать соответствующие модели в процессе управления. В связи с этим очень часто модели, разработанные методом статистических испытаний, применяются для заблаговременного вычисления значений параметров, которые затем, в процессе управления, используются в моделях, разработанных аналитическими методами; заблаговременного выявления необходимых закономерностей; обоснования необходимых рекомендаций, которые затем будут включены в базу знаний.

Существенный недостаток метода — сложность оптимизации моделируемых процессов.

Подведем итог сказанному выше, чтобы оценить область применения метода. Метод статистических испытаний в принципе может быть использован для разработки любых моделей использования сил и средств. Однако применение этого метода становится особенно оправданным в случаях, когда:

- аналитические методы требуют допущений и ограничений, существенно искажающих исследуемые закономерности;
- требуется проверить возможность тех или иных допущений и ограничений;
- высокая степень творческих усилий, необходимых для разработки математической модели аналитическими методами, делает неопределенным срок окончания разработки модели;
- целесообразно и возможно имитационное моделирование.

Во всех случаях, принимая решение о применении метода статистических испытаний, следует особенно тщательно оценить время, имеющееся в распоряжении для осуществления моделирования. Наибольшего эффекта, как правило, можно добиться при комбинированном использовании аналитических и статистических блоков моделей. При этом статистическими методами на этапе заблаговременной подготовки вычисляются статистические оценки параметров, используемые далее для аналитического моделирования.

9.1.2. Особенности оперативно-тактической постановки задачи

Строго говоря, командир (офицер-оператор) при постановке задачи, как правило, не знает о математическом аппарате, который будет применен для разработки модели. Командир излагает вопросы, составляющие постановку задачи (см. § 2.1). Специалист по исследованию операций на этапе постановки задачи должен выявить факторы, необходимые для организации проведения элементарного статистического опыта и моделирования в целом:

- расчленения исследуемого явления на этапы, определения способа статистического моделирования этапов;
- нахождения способов вычисления необходимых вероятностных характеристик этапов;
- определения необходимых вариантов расчетов;
- нахождения способов вычисления статистических оценок показателей эффективности;
- определения потребной точности и надежности статистических оценок, числа испытаний;
- оценки времени, имеющегося в распоряжении, и времени, необходимого для моделирования.

9.1.3. Показатели эффективности, вычисляемые методом статистических испытаний. Число испытаний, обеспечивающих необходимую точность и надежность статистических оценок

Метод статистических испытаний позволяет вычислить любые вероятностные характеристики, которые могут выступать в качестве основных и дополнительных показателей эффективности: вероятности событий, математические ожидания случайных величин, их распределения вероятностей, меры рассеивания и т. д.

Следует, однако, иметь в виду, что вычисляются не сами вероятностные характеристики, а их статистические оценки. Поэтому при интерпретации результатов моделирования следует учитывать две причины искажения “истинного” показателя эффективности: допущения и ограничения, принятые при разработке модели и, кроме того, ограниченное число испытаний. Что касается первой из причин, то способ ее учета при интерпретации результатов моделирования излагался в гл. 1 и рассматривается в гл. 11. Точность же и надежность статистических оценок (в зависимости от числа испытаний) определяются методами математической статистики (см. гл. 8). При разработке плана моделирования обязательным является решение другой задачи — определения числа испытаний n , обеспечивающего необходимую точность и надежность вероятностных характеристик.

Из формул (8.3.35) и (8.3.41) имеем:

— для статистической оценки вероятности события (частоты)

$$n = \left[\frac{t_\beta}{\varepsilon} \sqrt{p_n^*(1-p_n^*)} \right]^2; \quad (9.1.1)$$

— для статистической оценки математического ожидания

$$n = \left[\frac{t_\beta \tilde{\sigma}_n}{\varepsilon} \right]^2. \quad (9.1.2)$$

Так как до испытаний параметры $\tilde{\sigma}_n$ и p_n^* не известны, то поступают следующим образом. Проводят ограниченное число испытаний ($n_0 = 20 \div 50$), после чего определяют $\tilde{\sigma}_n$, t_β или p_n^* , t_β , а затем по этим данным находят n . Если $n_0 < n$, проводят дополнительные испытания. Можно уточнять n рядом последовательных приближений, что особенно актуально при сложных моделях, когда проведение элементарного опыта требует большого времени работы ЭВМ. При достаточно простых моделях, связанных с вычислением частоты события, можно вместо $p_n^*(1-p_n^*)$ взять максимальное значение этого произведения, равное 0,25, а вместо t_β — величину $\Phi^{(-1)}(\beta)$. Тогда

$$n = \frac{1}{4\varepsilon^2} \left[\Phi^{(-1)}(\beta) \right]^2,$$

что соответствует большему числу испытаний.

§ 9.2. СПОСОБЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ И СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

9.2.1. Получение случайных чисел

Для статистического моделирования случайных событий и случайных величин необходимы датчики случайных чисел, равновероятно распределенных в пределах от 0 до 1. Условимся в дальнейшем называть их просто случайными числами и обозначать буквой z . В качестве датчиков таких чисел могут выступать рулетки с равномерно нанесенными секторами, барабаны с помещенными в них пронумерованными фишками и т. д. Еще чаще в качестве датчика случайных чисел используется таблица, заранее заполненная с помощью рулетки, барабана с фишками и т. п. Такие таблицы приводятся во многих пособиях по исследованию операций, сборниках таблиц (см., например, [4]).

При пользовании таблицей случайных чисел нужно заранее установить порядок выбора чисел (по строчкам, по столбцам и т. д.) и в процессе моделирования строго придерживаться этого порядка. Впрочем, реализация статистических моделей осуществляется, как правило, с применением ЭВМ. При этом использование таких датчиков случайных чисел, как рулетки, фишки становится невозможным, а таблиц случайных чисел — нерациональным, так как таблицы загромождают память машины. Поэтому для ЭВМ разрабатываются алгоритмы формирования так называемых псевдослучайных чисел. Эти алгоритмы разрабатываются таким образом, чтобы корреляция между вырабатываемыми числами практически отсутствовала, а закон их распределения был равновероятным.

9.2.2. Статистическое моделирование случайных событий

Моделирование случайного события. Пусть имеется событие A . Известна вероятность появления этого события $P(A)$. Требуется организовать элементарный опыт для статистического моделирования события A .

Возьмем отрезок, длина которого равна единице (рис. 9.2). Отложим на этом отрезке значение вероятности $P(A)$. Очевидно, что вероятность попадания случайного числа z на участок отрезка от точки 0 до точки $P(A)$ равна $P(A)$, а вероятность непадания на этот отрезок, т. е. попадания на участок отрезка от точки $P(A)$ до точки 1,0 — вероятности $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, т. е. вероятности события \bar{A} (события “не A ”).

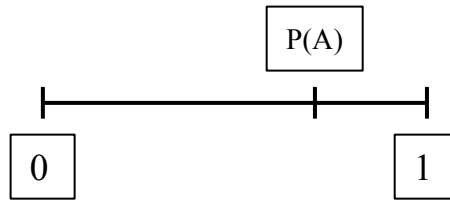


Рис.9.2

Таким образом, попадание случайного числа z в интервал $[0; P(A)]$ и появление события A есть события равносильные. Поэтому для моделирования случайного события необходимо составить систему условий:

- $0 \leq z < P(A)$ — событие A произошло;
- $P(A) < z \leq 1,0$ — событие A не произошло.

Если случайное число z примет значение, в точности равное $P(A)$, следует повторить опыт.

Моделирование полной группы несовместных событий. Пусть имеется полная группа несовместных событий $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_m$ с вероятностями $P(A_1), P(A_2), \dots, P(A_i), \dots, P(A_m)$.

Поэтому $\sum_{i=1}^m P(A_i) = 1$.

Возьмем отрезок, длина которого равна единице (рис. 9.3), и отложим на нем значения вероятностей $P(A_i)$. Попадание случайного числа на участок отрезка $P(A_i)$ и появление события A_i ($i = 1, 2, \dots, m$) — события равносильные. Поэтому можем составить систему условий:

- $0 \leq z < P(A_1)$ — произошло событие A_1 ;
- $P(A_1) < z < P(A_1) + P(A_2)$ — произошло событие A_2 ;
-

$$\sum_{k=1}^{i-1} P(A_k) < z < \sum_{k=1}^i P(A_k) \text{ — произошло событие } A_i;$$

$$\dots$$

$$\sum_{k=1}^{m-1} P(A_k) < z \leq 1,0 \text{ — произошло событие } A_m.$$

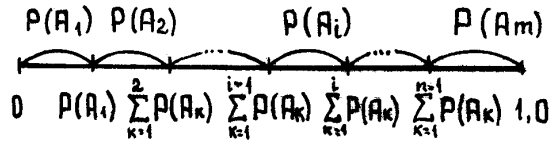


Рис. 9.3

Пример 9.2. При преодолении противолодочного рубежа подводная лодка может быть: поражена противолодочными силами противника с вероятностью $P(A_1)=0,1$; обнаружена, но не поражена с вероятностью $P(A_2) = 0,2$; пройти необнаруженной с вероятностью $P(A_3) = 0,7$.

Необходимо организовать элементарный опыт для статистического моделирования преодоления подводной лодкой противолодочного рубежа.

Составим систему условий (рис. 9.4):

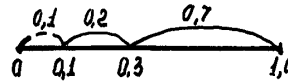


Рис. 9.4

$0 \leq z < 0,1$ — подводная лодка поражена;

$0,1 < z < 0,3$ — подводная лодка обнаружена, но не поражена;

$0,3 < z \leq 1,0$ — подводная лодка не обнаружена.

Для статистического моделирования последовательно выбирают случайные числа z и определяют, какому интервалу они соответствуют.

Моделирование совместного появления нескольких независимых событий. Имеются независимые события H_1, H_2, \dots, H_m . Требуется организовать элементарный опыт для моделирования появления события A , являющегося произведением указанных событий:

$$A = H_1 H_2 \dots H_m.$$

Для проведения такого опыта требуется знание вероятностей появления всех событий группы: $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_m)$.

Если в соответствии со структурой модели всего явления (процесса) имеется возможность предварительно вычислить вероятность появления события A

$$P(A) = P(H_1)P(H_2) \dots P(H_m),$$

то проблема сводится к рассмотренной выше проблеме моделирования случайного события A , имеющего вероятность появления $P(A)$.

Если структура модели требует для моделирования события A последовательного моделирования появления событий H_1, H_2, \dots, H_m , то поступают следующим образом. Каждое из указанных событий моделируется отдельно, причем для каждого события выбирается свое случайное число z .

Факт появления события A регистрируется лишь в случае, если зарегистрированы факты появления всех событий группы. Если же при проведении опыта хотя бы одно из событий не произошло, регистрируется факт неоявления события A (оявления события \bar{A}).

Моделирование появления зависимых событий рассмотрим на следующем примере.

Пример 9.3. Возможны два типа погоды H_1 и H_2 , вероятности появления которых равны соответственно $P(H_1)$ и $P(H_2)$. При типе погоды H_1 тральщик выполняет поставленную задачу с условной вероятностью $P(A/H_1)$, а при типе погоды H_2 — с условной вероятностью $P(A/H_2)$.

Проведение элементарного опыта при статистическом моделировании выполнения тральщиком поставленной задачи распадается на два этапа.

Первый этап — моделирование появления типов погоды H_i . Составляем систему условий:

$0 \leq z < P(H_1)$ — произошло событие H_1 ;

$P(H_1) < z \leq 1,0$ — произошло событие H_2 .

Второй этап — моделирование выполнения тральщиком поставленной задачи при различных типах погоды. Составляем две системы условий — для типа погоды H_1 и типа погоды H_2 :

тип погоды H_1	тип погоды H_2
$0 \leq z < P(A/H_1)$ — произошло событие A	$0 \leq z < P(A/H_2)$ — произошло событие A
$P(A/H_1) < z \leq 1,0$ — произошло событие \bar{A}	$P(A/H_2) < z \leq 1,0$ — произошло событие \bar{A}

В этих условиях событие A — выполнение, а событие \bar{A} — невыполнение тральщиком задачи.

Выбор на втором этапе проведения элементарного опыта той или иной системы условий определяется исходом первого этапа.

9.2.3. Статистическое моделирование дискретных случайных величин

Появление того или иного значения дискретной случайной величины может рассматриваться как появление события из полной группы несовместных событий. Поэтому организация элементарных опытов при статистическом моделировании дискретных случайных величин такая же, как и при моделировании полной группы несовместных событий. Для организации элементарного опыта требуется знание закона распределения случайной величины. Рассмотрим пример.

Пример 9.4. Сообщение передается средствами радиосвязи одновременно на трех частотах. Известен ряд распределения дискретной случайной величины — числа частот, на которых передача сообщения забивается помехами:

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,40	0,30	0,20	0,10

Требуется организовать элементарный опыт для определения числа частот, на которых передача сообщения будет сорвана.

Составим систему условий:

$0 \leq z < 0,40$ — успешная передача на всех трех частотах;

$0,40 < z < 0,70$ — сорвана передача на одной частоте;

$0,70 < z < 0,90$ — сорвана передача на двух частотах;

$0,90 < z \leq 1,0$ — сорвана передача на всех трех частотах.

При статистическом моделировании последовательно выбираются случайные числа z , оцениваются интервалы, которым они соответствуют, и составляется суждение о числе частот, на которых передача сообщения оказывается сорванной.

Возможно и графическое моделирование дискретной случайной величины. Для этого строится график ее функции распределения. На оси ординат откладываются случайные числа z , а с оси абсцисс снимаются соответствующие им значения случайной величины X . Нетрудно видеть, что этот прием аналогичен графическому методу статистического моделирования полной группы несовместных событий.

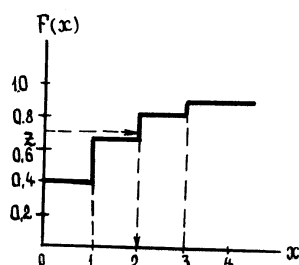


Рис. 9.5

На рис. 9.5 показано графическое моделирование числа частот, на которых помехами сорвана передача сообщения (в условиях примера 9.4).

Графический способ моделирования не имеет большого практического значения, так как статистическое моделирование осуществляется, как правило, на ЭВМ. Однако читателю следует обратить на этот способ внимание, потому что он хорошо иллюстрирует излагаемый далее способ статистического моделирования непрерывных случайных величин.

Моделирование системы дискретных случайных величин требует знания закона распределения этой системы. Организацию проведения элементарного опыта предлагается разработать читателю с использованием результатов примеров 9.3, 9.4.

9.2.4. Статистическое моделирование непрерывных случайных величин

Рассмотрим сначала графический способ, который как и в случае моделирования дискретной случайной величины, требует знания функции распределения $F(x)$ случайной величины X . Далее следует построить график функции распределения (рис. 9.6). Для моделирования выбираются

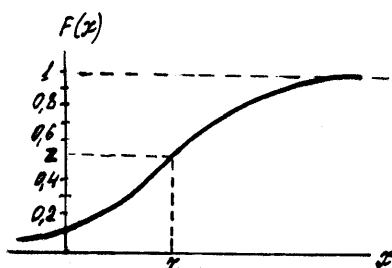


Рис. 9.6

случайные числа z , откладываются на оси ординат, а с оси абсцисс снимаются соответствующие этим числам реализации случайной величины X .

Аналитически этот процесс может быть описан следующим образом. Выбирается случайное число z и приравнивается к функции распределения

$$z = F(x). \quad (9.2.1)$$

Полученное равенство решается относительно x :

$$x = F^{(-1)}(z), \quad (9.2.2)$$

где $F^{(-1)}(z)$ — функция, обратная функции $F(x)$.

Величина x есть реализация случайной величины X , имеющей функцию распределения $F(x)$. Эта реализация соответствует выбранному случайному числу z .

По правилу, выраженному формулами (9.2.1), (9.2.2), можно моделировать непрерывные случайные величины с любым законом распределения.

Изложенному методу может быть дано и более строгое обоснование. Введем в рассмотрение случайную величину $Y = F(X)$ с областью возможных значений от 0 до 1. События, состоящие в том, что $X < x$, $Y < y$, равносильны, так как $F(x)$ — неубывающая функция своего аргумента, и, значит, попаданию по оси абсцисс в область левее точки x соответствует попадание по оси ординат в область ниже точки y (см. рис. 9.6). Так как события равносильны, то

$$P(X < x) = P(Y < y) \quad \text{или} \quad F(x) = F_1(y) = y.$$

Плотность вероятности Y постоянна:

$$f_1(y) = \frac{dF_1(y)}{dy} = \frac{dy}{dy} = 1.$$

Таким образом, если случайная величина X имеет функцию распределения $F(x)$, то случайная величина $Y = F(x)$ распределена по равномерному закону, из чего и следует возможность изложенного выше (см. (9.2.1), (9.2.2)) приема моделирования.

Рассмотрим статистическое моделирование для некоторых видов законов распределения непрерывных случайных величин.

Для нормального закона функция распределения случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \Phi \left(\frac{x - \bar{x}}{\sigma_x} \right) \right].$$

Следуя правилу (9.2.1), запишем

$$z = \frac{1}{2} \left[1 + \Phi \left(\frac{x - \bar{x}}{\sigma_x} \right) \right].$$

Решим полученное выражение относительно x :

$$\Phi \left(\frac{x - \bar{x}}{\sigma_x} \right) = 2z - 1.$$

Обозначим функцию, обратную функции Лапласа, $\Phi^{(-1)}$. Тогда

$$\frac{x - \bar{x}}{\sigma_x} = \Phi^{(-1)}(2z - 1).$$

Обозначим $\Phi^{(-1)}(2z - 1) = u$. Тогда

$$x = \bar{x} + u\sigma_x. \quad (9.2.3)$$

Для определения величины $u = \Phi^{(-1)}(2z - 1)$ по заданным значениям z можно пользоваться либо таблицами функций Лапласа (осуществляя “обратный” вход), либо специальными таблицами (см., например, табл. 7,9 [4]).

Для показательного закона функция распределения равна

$$z = F(x) = 1 - e^{-\alpha x}.$$

Используя правило (9.2.1), получим

$$x = -\frac{\ln(1 - z)}{\alpha}. \quad (9.2.4)$$

Для равномерного закона функция распределения равна

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a; \\ \frac{x - a}{b - a} & \text{при } a \leq x \leq b; \\ 1 & \text{при } x > b, \end{cases}$$

где $[a, b]$ — пределы изменения случайной величины X .

Запишем

$$z = F(x) = \frac{x - a}{b - a};$$

$$x = a + z(b - a). \quad (9.2.5)$$

Рассмотрим теперь способы моделирования систем непрерывных случайных величин на примере системы двух случайных величин X и Y . Если случайные величины X и Y независимы, то каждый элементарный опыт организуется следующим образом.

На первом этапе опыта, используя приведенные выше правила, моделируют случайную величину X , а на втором этапе — случайную величину Y . При этом для каждого этапа выбирается свое случайное число z .

Для статистического моделирования системы зависимых случайных величин (X, Y) должны быть известны функции распределения $F_1(x)$ и $F_2(y/x)$, где $F_2(y/x)$ — условная функция распределения случайной величины Y относительно X .

На первом этапе элементарного опыта моделируют случайную величину X , используя функцию распределения $F_1(x)$. На втором этапе, используя функцию распределения $F_2(y/x)$ для полученного на первом этапе значения x , моделируют случайную величину Y . Для каждого этапа, разумеется,

выбираются свои случайные числа z . Можно построить элементарный опыт, используя и функции распределения $F'(y)$ и $F''(x/y)$.

В качестве примера рассмотрим моделирование системы двух зависимых случайных величин, подчиненных нормальному закону с функциями распределения

$$F_1(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \Phi \left(\frac{x - \bar{x}}{\sigma_x} \right) \right]$$

и

$$F_2(y/x) = \frac{1}{2} \left[1 + \Phi \left(\frac{y - \bar{y}_x}{\sigma_{y/x}} \right) \right],$$

где $\bar{y}_x, \sigma_{y/x}$ — условное математическое ожидание случайной величины Y и условное среднее квадратическое отклонение этой случайной величины, вычисленные при условии, что случайная величина X приняла значение x ,

$$\begin{aligned} \bar{y}_x &= \bar{y} + r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x}); \\ \sigma_{y/x} &= \sigma_y \sqrt{1 - r^2}; \end{aligned}$$

r — коэффициент корреляции; σ_x, σ_y — средние квадратические отклонения случайных величин X и Y .

На первом этапе элементарного опыта по случайному числу z' моделируем случайную величину X , используя выражение (9.2.3):

$$x = \bar{x} + u\sigma_x,$$

где $u = \Phi^{(-1)}(2z' - 1)$.

На втором этапе опыта выбирается случайное число z'' и моделируется случайная величина Y с учетом результатов первого этапа:

$$y = \bar{y}_x + v\sigma_{y/x},$$

где $v = \Phi^{(-1)}(2z'' - 1)$.

Формула для y может быть преобразована с учетом выражений для $\bar{y}_x, \sigma_{y/x}, x$:

$$\begin{aligned} y = \bar{y}_x + v\sigma_{y/x} &= \bar{y} + r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} [\bar{x} + u\sigma_x - \bar{x}] + v\sigma_y \sqrt{1 - r^2} = \\ &= \bar{y} + \sigma_y [ur + v\sqrt{1 - r^2}]. \end{aligned} \tag{9.2.6}$$

Как видно, при независимых X и Y , т. е. при $r = 0$, будем иметь

$$x = \bar{x} + u\sigma_x, \quad y = \bar{y} + v\sigma_y.$$

9.2.5. Рациональная последовательность подготовки к моделированию с использованием метода статистических испытаний

К разработке математической модели специалист по исследованию операций приступает после уяснения оперативно-тактической постановки задачи: цели действия сил, цели моделирования, факторов обстановки, влияющих на исследуемые закономерности, характера зависимостей между этими факторами.

Рациональна следующая последовательность действий:

1. Определить основной и дополнительные показатели эффективности.
2. Разработать замысел моделирования: определить варианты расчетов, их последовательность, управляющие параметры. При определении вариантов расчетов следует иметь в виду, что для выявления закономерностей методом статистических испытаний может потребоваться варьирование значений управляющих параметров таким образом, чтобы составить графики или таблицы.
3. Разработать математическую формулировку задачи. Прежде всего разрабатываются методы проведения элементарного опыта. Для этого необходимо моделируемое явление разбить на последовательность взаимосвязанных этапов, определить, что является вероятностной характеристикой каждого из этапов. После этого разрабатываются методы моделирования каждого из этапов с учетом связей между ними. Далее, используя методы математической статистики, необходимо подготовить методику вычисления показателей эффективности по собранным статистическим данным, а также оценить необходимое число испытаний.
4. Определить способы проведения элементарных опытов на используемых вычислительных средствах.
5. Подготовить исходные данные, необходимые для проведения элементарных опытов.
6. Составить перечень допущений и ограничений, сделанных при оперативно-тактической постановке задачи и разработке модели; оценить характер влияния допущений и ограничений модели на исследуемые закономерности.

Обратим внимание на то, что специфические особенности метода статистических испытаний благоприятствуют разработке стандартных процедур и блоков моделей для статистического моделирования на ЭВК процессов использования сил и средств флота.

Рациональное построение банка данных ЭВК резко сократит время на выполнение пп. 4 и 5 подготовки модели. Тем не менее метод статистических испытаний является, как правило, инструментом заблаговременной подготовки.

Перейдем к рассмотрению примера, иллюстрирующего выполнение пп. 1—3 процесса подготовки к моделированию методом статистических испытаний.

Пример 9.5. Планируется постановка барьера гидроакустических буев в секторе возможных курсов подводной лодки противника (рис. 9.7). Цель постановки барьера — обеспечить наведение ударного противолодочного комплекса для поражения подводной лодки. Запас буев ограничен и с

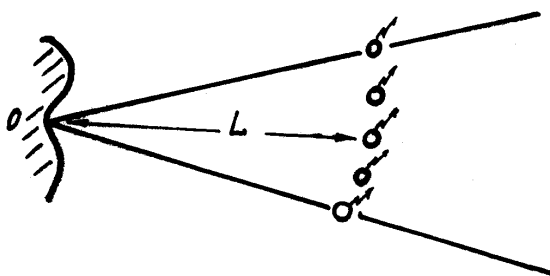


Рис. 9.7

удалением барьера от исходной точки движения подводной лодки плотность заграждения падает. Однако в результате оценки обстановки установлено, что при этом возрастает вероятность поражения обнаруженной подводной лодки. Следует также учесть различные гидрологические условия на различных удалениях барьера от исходной точки θ , обуславливающие различные средние дальности действия буев и возможные колебания этих дальностей. Можно считать, что возможные курсы подводной лодки равновероятно располагаются в пределах выявленного сектора.

Требуется разработать математическую модель для обоснования удаления барьера буев от исходной точки.

Разработка модели. Показателем эффективности является вероятность поражения подводной лодки.

Замысел моделирования. Управляющим параметром следует избрать удаление L барьера от исходной точки θ . От этого удаления зависят:

- интервал между буйами D ;
- средняя дальность действия буя d ;
- среднее квадратическое отклонение дальности действия буя σ ;
- коэффициент корреляции дальности действия буев r ;
- вероятность поражения обнаруженной подводной лодки p .

Расчеты необходимо проводить для ряда значений L от L_{\min} до выявления точки максимума показателя эффективности $L_{\text{опт}}$ через интервал $\Delta L(L_{\min}, L_{\min} + \Delta L, L_{\min} + 2\Delta L, \dots)$.

Ввиду неточного знания параметров D, d, σ, p, r следует варьированием их значений оценить характер ошибки в значениях $L_{\text{опт}}$ из-за ошибок в значениях этих параметров (в условиях данного примера численные значения $L_{\min}, \Delta L$, пределы варьирования параметров D, d, σ, p, r не устанавливаются).

Математическая формулировка задачи. Допустим, что для разработки модели решено использовать метод статистических испытаний (возможно, из-за наличия необходимых блоков в составе математического обеспечения ЭВК).

Сделаем следующие допущения: дальности действия буев распределены по нормальному круговому закону; средние дальности действия буев и средние квадратические отклонения дальностей действия одинаковы для всех буев барьера; коэффициенты корреляции одинаковы для любой пары буев барьера; вероятность поражения подводной лодки одинакова при любой дальности обнаружения подводной лодки любым буйем или одновременно несколькими буйами барьера; точка пересечения подводной лодкой барьера удалена от смежных буев по закону равной вероятности.

Для упрощения примера будем считать, что фланговые буйи располагаются на кромках сектора курсов подводной лодки.

Разобьем процесс статистического моделирования поражения подводной лодки на следующие этапы.

Первый этап — моделирование удаления точки пересечения подводной лодкой барьера x_y между парой смежных буев. Учтем, что в силу принятого допущения безразлично, между какой парой буев подводная лодка пересечет барьер. Поместим начало системы координат в точку расположения левого буя (буй № 1 на рис. 9.8). Используем формулу (9.2.5) для моделирования случайной величины, распределенной по равновероятному закону. При этом следует положить $a = 0$; $b = D$. В результате получим $x_y = zD$.

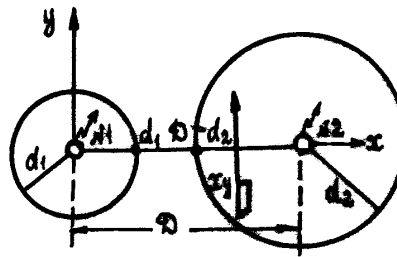


Рис. 9.8

Второй этап — моделирование обнаружения подводной лодки буем № 1. Моделируем случайную величину d_1 — дальность действия буя № 1 — по формуле (9.2.3), в которой следует положить $x = d_1$; $\bar{x} = d$. Будем иметь $d_1 = d + u\sigma$, где $u = \Phi^{(-1)}(2z - 1)$ *.

Далее фиксируем факт обнаружения или необнаружения подводной лодки буем № 1: если $d_1 < x_y$, считаем, что подводная лодка не обнаружена, а если $d_1 \geq x_y$ — обнаружена. При $d_1 \geq x_y$ следует переходить к четвертому этапу, а при $d_1 < x_y$ — к третьему этапу элементарного опыта.

Третий этап — моделирование обнаружения подводной лодки буем № 2. Так как дальности действия буев коррелированы, моделирование случайной величины d_2 — дальности действия буя № 2 — осуществляется по формуле (9.2.6), в которой следует считать $\bar{y} = d$, $y = d_2$, $\sigma_y = \sigma$. Поэтому будем иметь

$$d_2 = d + \sigma \left(ur + v\sqrt{1-r^2} \right),$$

где u берется из результатов второго этапа, а $v = \Phi^{(-1)}(2z - 1)$.

Затем фиксируем факт обнаружения или необнаружения подводной лодки буем № 2. При $d_2 \geq D - x_y$ подводная лодка обнаружена, а при $d_2 < D - x_y$ подводная лодка не обнаружена. Если $d_2 < D - x_y$, это значит, что подводная лодка на барьере не обнаружена вообще, так как третий этап выполняется при условии необнаружения подводной лодки буем № 1. Поэтому фиксируется факт непоражения подводной лодки, и опыт прекращается. Если же $d_2 \geq D - x_y$, осуществляется переход к четвертому этапу.

Четвертый этап — моделирование поражения обнаруженной подводной лодки. Составляем систему условий:

$0 \leq z < p$ — подводная лодка поражена;

$p < z \leq 1,0$ — подводная лодка не поражена.

Выполнением четвертого этапа заканчивается элементарный опыт. Фиксируется факт поражения или непоражения подводной лодки, и осуществляется переход к первому этапу очередного элементарного опыта.

Статистическая оценка показателя эффективности поражения подводной лодки равна $p^* = m/n$, где m — зафиксированное число благоприятных исходов элементарных опытов; n — общее число элементарных опытов, определяемое по формуле (9.1.1).

Глава 10. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ОБОСНОВАНИЯ РЕШЕНИЙ

§ 10.1. ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО АНАЛИЗА ПРИ УПРАВЛЕНИИ СИЛАМИ

* На каждом этапе выбирается новое случайное число z .

10.1.1. Область применения метода

Метод последовательного анализа применяется для обоснования решений в оперативно-тактических и других ситуациях, отличающихся следующими особенностями.

1. Выбор одного из альтернативных вариантов решения зависит от состояния какого-то существенного элемента обстановки, которое характеризуется некоторой вероятностной характеристикой (вероятностью появления события, математическим ожиданием, средним квадратическим отклонением случайной величины). Если в сложившихся условиях обстановки эта вероятностная характеристика принимает значение большее, чем установленное граничное, то принимается один вариант решения, а если меньшее — другой*.

2. Выявить значение необходимой вероятностной характеристики можно только в результате проведения специально организованных экспериментов (опытов, натурального моделирования), т. е. на основании сбора статистического материала (см. гл. 8). В ряде случаев, однако, возможно использование и ранее собранных статистических данных.

3. Время, которое имеется в распоряжении командира, либо же затраты сил, средств, ресурсов не позволяют провести достаточное число опытов, чтобы получить методами “классической” математической статистики нужную статистическую оценку вероятностной характеристики с требуемой точностью и надежностью. Необходимо оценить сложившуюся обстановку при ограниченном числе экспериментов, опытных данных.

Такие ситуации часто возникают как при заблаговременной, так и при непосредственной подготовке боя, операции в ходе выработки решения, при планировании применения сил, использования средств. В ходе ведения боя, операции рассматриваемый метод моделирования может потребоваться для обоснования целесообразности применения разработанных вариантов решения, планов с учетом складывающейся обстановки. В последнем случае метод можно использовать для разработки системы искусственного интеллекта (для организации ситуационного управления).

Метод находит применение в военно-экономической области, а также при обосновании планов строительства и совершенствования сил и средств флота.

В пояснение сказанного приведем примеры ситуаций, требующих для обоснованного выбора варианта решения применения метода последовательного анализа.

Пример 10.1. Требуется развернуть силы из базы в некоторый район для выполнения там поставленной задачи. Есть предположение, что фарватеры (ФВК) заминированы противником. Если это так и плотность минного заграждения велика (вероятность подрыва корабля на mine более некоторой величины p), то во избежание больших потерь требуется организация предварительного траления ФВК. При этом время развертывания сил будет большим, и они должны будут действовать по варианту № 2. Если же ФВК не заминированы либо плотность заграждения невелика (вероятность подрыва корабля на mine менее p), то в тралении необходимости нет, время развертывания сил сокращается, и они могут действовать по варианту № 1. Требуется за ограниченное время, т. е. за

* Возможно существование более двух вариантов решения, соответствующих не одному, а нескольким граничным значениям вероятностной характеристики. Для простоты изложения ограничимся рассмотрением ситуации с одним граничным значением и двумя альтернативными вариантами решения. Читателю предлагается изучить материал главы и самостоятельно разработать особенности применения метода при нескольких граничных значениях вероятностной характеристики. Возможно также, что выбор варианта решения будет зависеть не от одного, а от нескольких элементов обстановки. При этом, однако, применение рассматриваемого метода требует, чтобы все такие элементы обстановки объединялись и характеризовались одной вероятностной характеристикой. В противном случае будет получен набор рекомендуемых вариантов по числу учитываемых элементов обстановки.

ограниченное число тральных галсов, мероприятий противоминной разведки, оценить целесообразный способ развертывания сил и, следовательно, вариант их применения.

Пример 10.2. В ходе боевой подготовки разработан новый тактический прием выполнения поставленной задачи. Установлены требования, которым должен отвечать этот прием. Например, вероятность выполнения поставленной задачи, или математическое ожидание ущерба, причиняемого противнику, или же математическое ожидание предотвращенного ущерба своим объектам должны быть не меньше заданной величины (допустим, ориентированной относительно известных возможностей тактического приема, применяемого ранее). Для оценки разработанного приема требуется проверка его на учениях. Необходимо на основании ограниченного числа таких учений принять решение о целесообразности принятия этого приема.

Пример 10.3. Организовано длительное хранение боеприпасов, в результате которого возможен выход из строя некоторых из них. Установлен норматив — предельно допустимая доля некондиционных боеприпасов. Требуется проверить пригодность хранящихся боеприпасов, произведя ограниченное число их подрывов.

Пример 10.4. Осуществляется приемка партии боеприпасов. Требуется обосновать решение о целесообразности принятия партии.

Пример 10.5. Новый образец ракеты (торпеды, бомбы, снаряда и т. д.) проходит испытания на соответствие тактико-техническому заданию. Этим заданием установлены нормативы, например математическое ожидание дальности действия, срединное рассеивание, вероятность технической надежности и т. д., нарушение которых недопустимо. Требуется организовать испытания так, чтобы обосновать решение о принятии ракеты на вооружение за ограниченное число пусков.

Пример 10.6. Для оценки уровня подготовленности корабля проверяются боевые посты на соответствие предъявляемым требованиям. Установлено, при какой доле положительных оценок боевым постам, кораблю в целом может быть выставлена та или иная оценка. Требуется выставить кораблю оценку при ограниченном числе проверяемых боевых постов.

Пример 10.7. Двум организациям поручена разработка одного и того же типа аппаратуры. Установлены требования к ней. Необходимо обосновать план испытаний для приема одного из конкурсных образцов (отклонения обоих).

Опыт применения метода показал, что он позволяет сократить в среднем вдвое потребное число наблюдений по сравнению с заранее определенным их числом (см. гл. 8) для одних и тех же заданных точности и надежности статистических оценок.

10.1.2. Особенности оперативно-тактической постановки задачи

Для изложения особенностей постановки задачи рассмотрим основную идею метода последовательного анализа. Он заключается в том, что заранее не устанавливается потребное число наблюдений, а последовательно анализируется результат каждого из них. Суждение о реализации той или иной гипотезы составляется по результатам сравнения величины статистической оценки заданной вероятностной характеристики с указанным значением граничной величины этой характеристики. При каждом наблюдении составляется суждение о реализации одной из двух гипотез (H_1 или H_2) относительно состояния нужного элемента обстановки. Каждой из гипотез соответствует то или иное заранее подготовленное решение о рациональных действиях. Например, при реализации гипотезы H_1 могут быть целесообразны действия по некоторому варианту № 1 решения на выполнение поставленной задачи, решения о признании эффективным разработанного тактического приема, решения о необходимости считать партию боеприпасов

кондиционной и т. д. Тогда гипотезе H_2 будет соответствовать вариант № 2 решения на выполнение поставленной задачи, решения о признании неэффективным разработанного тактического приема, решения о признании некондиционной партии изделий и т. д.* На этой границе суждение о реализации гипотезы H_1 и H_2^{**} меняется. Заметим здесь же, что способ определения вида вероятностной характеристики и ее граничного значения, вообще говоря, лежит вне рамок метода последовательного анализа. Существенно важный элемент обстановки, вид вероятностной характеристики определяются на основании оценки обстановки. Для определения граничного значения вероятностной характеристики могут использоваться опыт, в том числе сведенный в нормативы, математическое моделирование, качественный анализ, сочетание этих методов.

Вычисленная статистическая оценка избранной вероятностной характеристики может содержать ошибку из-за ограниченного числа наблюдений и случайного характера их результатов. (см. гл. 8). Даже если избранное граничное значение вероятностной характеристики соответствует объективной обстановке, то по указанной причине возможна ошибка в выборе гипотезы и решения в целом. Поэтому в окрестности точки граничного значения вероятностной характеристики будет располагаться зона неопределенности. Метод последовательного анализа требует указания допустимой величины этой зоны. Из методических соображений для определенности дальнейшего изложения будем считать, что задается граничное значение p_0 вероятности p некоторого события: подрыва корабля на mine (пример 10.1), выполнения задачи при рассматриваемом тактическом приеме (пример 10.2), кондиционности партии боеприпасов (пример 10.3), а также зона неопределенности $[p_1, p_2]$ (рис. 10.1). Если вычисленное значение статистической оценки p^* вероятности (т. е. частоты события) лежит в пределах указанной зоны, то невозможно составить суждение о реализации одной из гипотез — H_1 и H_2 .

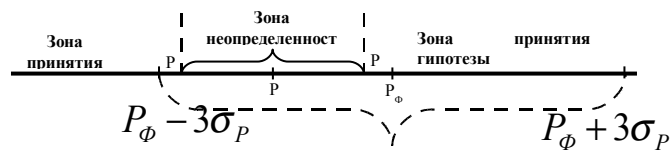


Рис.10.1

Математический аппарат метода последовательного анализа позволяет после каждого наблюдения рекомендовать один из возможных выводов о его результатах: а) считать реальной гипотезу H_1 ; б) считать реальной гипотезу H_2 ; в) провести еще одно испытание, так как полученной информации недостаточно для того, чтобы принять или отвергнуть гипотезу H_1 или H_2 .

Если принимается решение “а” или “б”, то наблюдения заканчиваются, если “в” — продолжаются.

Все приведенные выше рассуждения справедливы для случая, когда фактическая вероятность p_ϕ рассматриваемого события совпадает с назначенным граничным значением p_0 вероятности этого события. Однако фактическая вероятность p_ϕ может быть и больше и меньше граничного значения p_0 . Между тем статистическая оценка будет иметь центром рассеивания неизвестную величину p_ϕ , а

* Нумерацию гипотез можно менять.

** С точки зрения философии диалектики это граничное значение есть точка перехода количественных изменений величины вероятностной характеристики в качественное изменение гипотезы о состоянии элемента обстановки.

не назначенную величину p_0 (см. рис. 10.1; следует, конечно, иметь в виду, что величина $p_\Phi - 3\sigma_p$ не может быть меньше нуля, а $p_\Phi + 3\sigma_p$ — больше единицы). Это — источник дополнительной ошибки. Учитывая указанные обстоятельства, метод допускает, что с некоторой вероятностью может быть совершена ошибка. Возможно, что фактическое значение p_Φ неизвестной вероятности искомого события будет находиться левее точки p_1 ($p_\Phi < p_1$ — см. рис. 10.2, а), но при этом будет допущена ошибка, в результате которой вместо принятия правильной гипотезы H_1 будет принята неверная в этом случае гипотеза H_2 (так называемая ошибка первого рода). Возможна и ошибка второго рода, когда фактическое значение p_Φ искомой вероятности расположено правее точки p_2 ($p_2 < p_\Phi$ — см. рис. 10.2, б), но вместо правильной гипотезы H_2 будет принята неверная гипотеза H_1 со всеми вытекающими последствиями*. Устанавливаются допустимые вероятности α и β совершить ошибки первого и второго рода соответственно. Практикой установлено, что величину этих вероятностей целесообразно назначать в пределах 2—5 %.

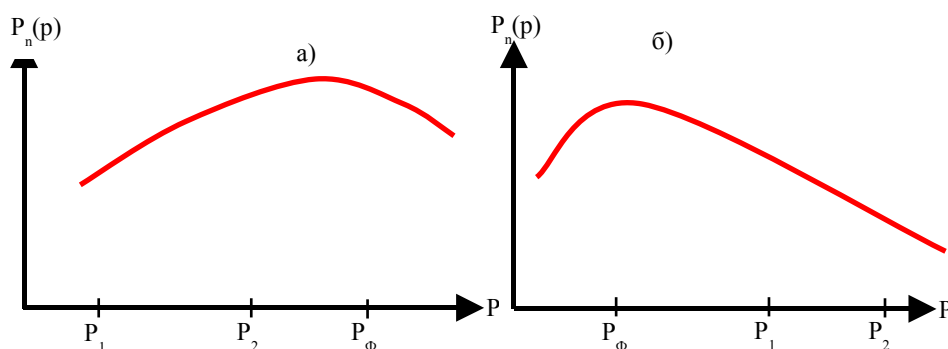


Рис. 10.2

Таким образом, устанавливаются три зоны относительно граничного значения p_0 вероятности (см. рис. 10.1):

- зона принятия гипотезы H_2 при $p \geq p_2$;
- зона принятия гипотезы H_1 при $p \leq p_1$;
- зона неопределенности при $p_1 < p < p_2$.

Вероятность принятия гипотезы H_i при данной вероятности p_Φ получила название *оперативной характеристики*.

Можно сказать, что размеры зоны неопределенности p_1, p_2 характеризуют точность, а величины вероятностей α и β — надежность рекомендаций. Назначением этих параметров, кроме того, обуславливается потребное число наблюдений n . Так, для повышения точности и надежности рекомендаций следует уменьшить размеры зоны неопределенности p_1, p_2 и уменьшить вероятности α и β совершить ошибку. Для этого необходимо уменьшить рассеивание статистической оценки p^*

* В зависимости от условий конкретной задачи зона гипотезы H_1 может располагаться и справа от вероятности p_2 и слева от вероятности p_1 . То же можно сказать и о гипотезе H_2 .

относительно вероятности p_{ϕ} . Этого можно добиться только за счет увеличения числа наблюдений n . Наоборот, увеличение зоны p_1, p_2 , увеличение допустимых вероятностей α и β совершить ошибку позволит достичь цели обоснования за меньшее число наблюдений n , но с большим риском ошибиться. Забегая вперед, укажем, что в процедуре обоснования рекомендаций статистическая оценка p^* используется не непосредственно, а косвенно. Кроме того, механизм влияния на число n параметров p_1, p_2, α, β в методе последовательного анализа более сложный, чем механизм влияния на это число доверительного интервала ϵ и доверительной вероятности β в математической статистике (сравните выражения (8.3.38) и (10.2.9), (10.2.13)).

Подведем итоги. Оперативно-тактическая постановка задачи должна содержать сведения, которые бы позволили установить: что есть тот элемент обстановки и те гипотезы H_1 и H_2 о его состоянии, с которыми связан выбор одного из альтернативных решений; от какой вероятностной характеристики зависит суждение о реализации той или иной гипотезы. В ряде случаев может быть указано и нормативное значение границы этой вероятностной характеристики. Так, для условий примера 10.3 может существовать норматив — доля кондиционных боеприпасов; для условий примера 10.6 нормативом будет определяться доля боеспособных постов, получивших при проверке соответствующие оценки, когда корабль считается подготовленным; в условиях примера 10.2 граничным значением будет значение показателя эффективности выполнения поставленной задачи при ранее используемом тактическом приеме. Часто же в постановке задачи будут указываться оперативно-тактические требования к выбору того или иного варианта решения (см. пример 10.1). После этого потребуется математическое моделирование, использование результатов накопленного опыта для обоснования граничного значения и зоны неопределенности вероятностной характеристики. В этом случае необходима соответствующая оперативно-тактическая постановка задачи (см. гл. 2).

Наконец, командиром может быть указано время на выработку рекомендаций. Это определит предельно допустимое число n наблюдений n , экспериментов, что, в свою очередь, обусловит выбор значений параметров p_1, p_2, α, β (см. (10.2.13)).

Существенного сокращения времени выработки рекомендаций можно добиться, если командир в постановке задачи укажет возможность использования различных источников информации о состоянии оцениваемого элемента обстановки. Так, в условиях примера 10.1 в качестве опытов, экспериментов в определенных условиях могут выступать случаи (результаты) прохождения кораблей, транспортов по системе ФВК базы.

По мере накопления опыта использования рассматриваемого метода при обосновании решений в определенных условиях все большее значение при постановке задачи и формировании модели играет интуиция командира и специалиста по исследованию операций.

10.1.3. Показатели эффективности выполнения поставленной задачи, вычисляемые при использовании метода последовательного анализа

Оценка показателей эффективности выполнения поставленной задачи (и любых других целенаправленных действий) лежит вне рамок метода последовательного анализа. Сам метод позволяет лишь обосновать оценку обстановки — факт реализации той или иной гипотезы о состоянии существенно важного ее элемента. Для сравнительной оценки эффективности выполнения задачи при альтернативных гипотезах и решениях разрабатываются математические модели или (и) используются результаты накопленного опыта. Разработка необходимых математических моделей осуществляется методами, излагаемыми в учебнике.

§ 10.2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ОБОСНОВАНИЯ РЕШЕНИЙ

Рассмотрим случай, когда вероятностной характеристикой, оценивающей состояние нужного элемента обстановки и выбор того или иного варианта решения является вероятность события (см. примеры 10.1—10.4). Для определенности будем говорить о вероятности подрыва корабля на mine*.

Постановка задачи. Необходимо развернуть корабли соединения из базы для выполнения поставленной задачи. Каждый корабль соединения независимо от других кораблей может подорваться на минах при движении по ФВК. Вероятность подрыва зависит от плотности минного заграждения, которая не известна. Установлены граничное значение p_0 вероятности подрыва и зона неопределенности $[p_1, p_2]$. Если оценка (статистическая) вероятности подрыва корабля будет равна или меньше вероятности p_1 ($p^* \leq p_1$), то считается, что реализовалась гипотеза H_1 , рекомендуется развертывание сил осуществлять без предварительного траления ФВК, силам при выполнении задачи действовать по варианту решения № 1. Если же указанная оценка будет равна или больше вероятности p_2 , то считается реализованной гипотеза H_2 , рекомендуется развертывание сил осуществлять после траления ФВК, силам выполнять задачу по варианту решения № 2. В том же случае, когда оценка вероятности подрыва p^* корабля будет находиться внутри зоны $[p_1, p_2]$ ($p_1 < p^* < p_2$), считается невозможным составить то или иное суждение о плотности минного заграждения, гипотезе о состоянии обстановки, целесообразном способе действий.

Установлено также значение вероятностей α и β совершить ошибку:

— первого рода: будет рекомендовано траление ФВК при фактической вероятности p_ϕ подрыва, меньшей чем p_1 ;

— второго рода: будет рекомендовано развертывание сил без предварительного траления ФВК при фактической вероятности p_ϕ подрыва большей, чем p_2 .

Оценкой вероятности подрыва выступает статистическая оценка; наблюдением (опытом, экспериментом) является разведывательный тральный галс (отдельное мероприятие противоминной разведки). Исходом разведывательного мероприятия может быть обнаружение или необнаружение мины. Можно считать, что мины в системе ФВК распределены равномерно. За ограниченное число таких мероприятий необходимо обосновать рекомендацию по выбору одного из двух альтернативных решений. Математическое ожидание времени на проведение разведывательных мероприятий учтено при оценке времени в ходе разработки обоих альтернативных вариантов решения.

Разработка модели. Предположим, что уже проведено n разведывательных мероприятий на системе ФВК базы. Среди них в m случаях обнаружены мины (неблагоприятный исход), а в $n - m$ случаях мины не обнаружены. Если вероятность неблагоприятного исхода равна p , то вероятность полученного сочетания исходов составит

$$P_n(p) = p^m (1 - p)^{n-m}. \quad (10.2.1)$$

Вероятность $P(p)$ имеет максимальное значение в точке $p = m/n$ (читателю предлагается убедиться в этом самостоятельно, найдя известными способами точку экстремума рассматриваемой

* Метод обоснования решения принципиально не изменится, если в качестве вероятностной характеристики выступают математическое ожидание или среднее квадратическое отклонение случайной величины. С особенностями процедуры обоснования решения в этом случае можно ознакомиться в [2, 3, 11].

функции (10.2.1) и затем установив, что найденная точка — точка максимума). Поэтому существует следующая зависимость:

1. Если фактическая вероятность p_Φ подрыва корабля на mine лежит правее точки p_2 , т. е. в области гипотезы H_2 (см. рис. 10.1), то $P_n(p_2) > P_n(p_1)$ (см. рис. 10.2, б).

2. Если фактическая вероятность p_Φ лежит левее точки p_1 , т. е. в области гипотезы H_1 , то $P_n(p_1) > P_n(p_2)$ (см. рис. 10.2, а). Эта зависимость выполняется строго, если вычисления вероятностей $P_n(p_1)$ и $P_n(p_2)$ осуществляются для чисел m и $n - m$, соответствующих вероятности p_Φ . Однако при выработке рекомендации вероятность p_Φ неизвестна, а ее статистическая оценка (частость p^*) оценивается по ограниченному числу наблюдений n . Числа m и $n - m$ неблагоприятных и благоприятных исходов n разведывательных мероприятий будут определяться и закономерностями этого процесса и случайным характером исходов каждого мероприятия. С учетом сказанного частость p^* не используется непосредственно. Для выработки рекомендаций поступают следующим образом. В рассмотрение вводится критерий правдоподобия

$$\mu = \frac{P_n(p_2)}{P_n(p_1)} = \frac{p_2^m (1 - p_2)^{n-m}}{p_1^m (1 - p_1)^{n-m}}. \quad (10.2.2)$$

Чем больше коэффициент правдоподобия μ , тем больше оснований считать, что фактическая вероятность p_Φ расположена правее точки p_2 ($p_\Phi > p_2$ — см. рис. 10.2), что реализовалась гипотеза H_2 и, следовательно, целесообразно рекомендовать предварительное траление ФВК и избрать вариант решения № 2. Наоборот, чем меньше коэффициент правдоподобия μ , тем больше оснований считать, что фактическая вероятность p_Φ расположена левее точки p_1 ($p_\Phi < p_1$), что реализовалась гипотеза H_1 и, следовательно, целесообразно рекомендовать разворачивать силы без траления ФВК и действовать по варианту решения № 1. Если же коэффициент правдоподобия принимает некоторое промежуточное значение, то нет оснований принять ту или иную гипотезу, тот или иной вариант решения, а следует провести еще одно разведывательное мероприятие.

Запишем правило поведения после n -го разведывательного мероприятия (рис. 10.3):



Рис. 10.3

- при $\mu \geq A$ рекомендуются траление ФВК, действия сил по варианту решения № 2;
- при $\mu \leq B$ рекомендуется траление не осуществлять, силам действовать по варианту решения № 1;
- при $B < \mu < A$ следует провести $(n + 1)$ -е разведывательное мероприятие.

Выразим границы зон A и B через вероятности α и β совершить ошибки первого и второго рода соответственно. Траление ФВК будет признано целесообразным в двух случаях:

1. Фактическая вероятность p_Φ подрыва корабля на mine больше установленного граничного значения p_2 , и не будет совершена ошибка второго рода. Вероятность не совершить эту ошибку и в целом принять правильную гипотезу H_2 равна $1 - \beta$.

2. Фактическая вероятность p_Φ меньше граничного значения p_1 , но будет допущена ошибка первого рода. Вероятность допустить эту ошибку и в целом принять ошибочно гипотезу H_2 равна α .

Коэффициент правдоподобия составит

$$\mu = \frac{1-\beta}{\alpha} \geq A. \quad (10.2.3)$$

Траление ФВК будет признано нецелесообразным в следующих случаях:

1. Фактическая вероятность p_Φ менее меньшего граничного значения p_1 , и не будет допущена ошибка первого рода. Вероятность не совершить эту ошибку, принять правильную гипотезу H_1 равна $1 - \alpha$.

2. Фактическая вероятность p_Φ больше граничного значения p_2 , но будет допущена ошибка второго рода. Вероятность этой ошибки, принятия ошибочно гипотезы H_1 равна β .

Коэффициент правдоподобия составит

$$\mu = \frac{\beta}{1-\alpha} \leq B. \quad (10.2.4)$$

Тогда условие целесообразности продолжения разведывательных мероприятий запишется в виде

$$\frac{\beta}{1-\alpha} < \mu < \frac{1-\beta}{\alpha}. \quad (10.2.5)$$

Выразим параметры A и B через коэффициент правдоподобия:

$$A = \frac{1-\beta}{\alpha}; \quad B = \frac{\beta}{1-\alpha}. \quad (10.2.6)$$

Установим зависимость числа m неблагоприятных разведывательных мероприятий от случайного числа испытаний n , а также вероятностей p_1 , p_2 , α , β . Подставим в (10.2.5) значение μ с учетом (10.2.2). Получим

$$\frac{\beta}{1-\alpha} < \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^m \left(\frac{q_2}{q_1}\right)^{n-m} < \frac{1-\beta}{\alpha}, \quad (10.2.7)$$

где $q_1 = 1 - p_1$; $q_2 = 1 - p_2$.

Прологарифмируем неравенство (10.2.7) и выполним необходимые преобразования:

$$\lg \frac{\beta}{1-\alpha} < m \lg \frac{p_2}{p_1} + (n-m) \lg \frac{q_2}{q_1} < \lg \frac{1-\beta}{\alpha};$$

$$\lg \frac{\beta}{1-\alpha} < m \lg \frac{p_2}{p_1} + n \lg \frac{q_2}{q_1} - m \lg \frac{q_2}{q_1} < \lg \frac{1-\beta}{\alpha}.$$

Упростим последнее неравенство, объединив логарифмы с общим множителем m :

$$\lg \frac{\beta}{1-\alpha} < m \lg \frac{p_2 q_1}{p_1 q_2} + n \lg \frac{q_2}{q_1} < \lg \frac{1-\beta}{\alpha}. \quad (10.2.8)$$

Поскольку $p_2 > p_1$, будем иметь $q_2 < q_1$. Поэтому

$$\frac{p_2}{p_1} > 1; \quad \frac{q_1}{q_2} > 1; \quad \frac{p_2 q_1}{p_1 q_2} > 1; \quad \lg \frac{p_2 q_1}{p_1 q_2} > 0.$$

Ко всем членам неравенства (10.2.8) прибавим величину

$$-n \lg \frac{q_2}{q_1} = n \lg \frac{q_1}{q_2}$$

и разделим его на $\lg \frac{p_2 q_1}{p_1 q_2}$, после чего получим

$$\frac{\lg \frac{\beta}{1-\alpha}}{\lg \frac{p_2 q_1}{p_1 q_2}} + n \frac{\lg \frac{q_1}{q_2}}{\lg \frac{p_2 q_1}{p_1 q_2}} < m < \frac{\lg \frac{1-\beta}{\alpha}}{\lg \frac{p_2 q_1}{p_1 q_2}} + n \frac{\lg \frac{q_1}{q_2}}{\lg \frac{p_2 q_1}{p_1 q_2}}. \quad (10.2.9)$$

Для более простой записи неравенства (10.2.9) введем следующие обозначения:

$$a = \frac{\lg \frac{1-\beta}{\alpha}}{\lg \frac{p_2 q_1}{p_1 q_2}}; \quad b = \frac{\lg \frac{\beta}{1-\alpha}}{\lg \frac{p_2 q_1}{p_1 q_2}}; \quad k = \frac{\lg \frac{q_1}{q_2}}{\lg \frac{p_2 q_1}{p_1 q_2}}, \quad (10.2.10)$$

после чего получим

$$b + nk < m < a + nk. \quad (10.2.11)$$

На основании неравенства (10.2.11) сформулируем следующие рекомендации последовательного анализа результатов разведывательных мероприятий в зависимости от числа m неблагоприятных их исходов:

а) рекомендовать траление ФВК и вариант решения № 2 при

$$m \geq a + nk; \quad (10.2.12)$$

б) рекомендовать развертывание сил без предварительного траления ФВК и вариант решения № 1 при $m \leq b + nk$;

в) рекомендовать провести еще одно разведывательное мероприятие при $b + nk < m < a + nk$.

Математическое ожидание числа разведывательных мероприятий до окончания выработки рекомендаций “а” или “б” составит [2]

$$M[n] \approx \frac{\lg \frac{1-\alpha}{\beta} \lg \frac{1-\beta}{\alpha}}{\lg \frac{p_2}{p_1} \lg \frac{q_1}{q_2}}. \quad (10.2.13)$$

Практическая реализация метода выработки рекомендаций. Выработка рекомендаций может осуществляться двумя способами — с использованием либо без использования ЭВМ.

Меньшие затраты времени и большие возможности (просмотр большего числа вариантов обстановки, большая точность и надежность рекомендаций) свойственны первому способу. При этом требуется разработка программного обеспечения ЭВМ, позволяющего после каждого наблюдения реализовать рекомендации (10.2.12) на основании заданных параметров p_1 , p_2 , α , β , и последовательно вводимых чисел n и m . Программное обеспечение должно позволять вычислять (обосновывать) потребное число n наблюдений для достижения необходимых точности и надежности рекомендаций (см. (10.2.13)). Целесообразно, чтобы это программное обеспечение являлось частью системы программного обеспечения АСУ (ЭВМ) соединения. Тогда к нему предъявляется также требование обеспечить обоснование параметров p_1 , p_2 , α , β с использованием математического моделирования или (и) имеющихся статистических данных, позволяющих учесть надежность, точность, расход ресурсов при проведении n наблюдений. При этом способе обеспечивается выработка и реализация рекомендаций в рамках системы искусственного интеллекта (при ситуационном управлении).

Второй способ выработки рекомендаций применяется при отсутствии ЭВМ или невозможности их использования. Расчеты по формулам (10.2.9)—(10.2.11) производятся на счетно-клавишных машинах, с помощью заблаговременно подготовленных таблиц, графиков. Возможности этого способа гораздо шире, чем может показаться на первый взгляд, если учесть длительность проведения опытов, экспериментов (разведывательных мероприятий, учений, проверок боевых постов корабля и т. д. — см. примеры 10.1—10.7). Ниже приводится пример применения графиков, иллюстрирующий метод выработки рекомендаций в целом.

На основании заданных параметров p_1 , p_2 , α , β на чертеже проводятся две параллельные прямые $m_2 = a + nk$ и $m_1 = b + nk$ (см. (10.2.10), (10.2.11)). Поскольку всегда $p_1 \leq p_2$, то $k < 1$. Это значит, что прямые m_2 и m_1 пересекают ось абсцисс под углом меньше 45° .

Применение графика рассмотрим на примере, когда $p_1 = 0,05$, $p_2 = 0,25$, $\alpha = 0,05$, $\beta = 0,3$. Используя выражение (10.2.10), получим $a = 1,43$, $b = -0,62$, $k = 0,13$. Тогда $m_2 = 1,43 + 0,13n$; $m_1 = -0,62 + 0,13n$. Прямые m_1 и m_2 (рис. 10.4) отсекают на оси Om отрезки $b = -0,62$ и $a = 1,43$ соответственно и пересекают ось абсцисс под углом $7,5^\circ$. Зона неопределенности находится между этими двумя прямыми. При этом нахождение точки (n, m) в области левее и выше прямой m_2 соответствует случаю, когда следует рекомендовать гипотезу H_2 (см. рис. 10.1) и соответствующий ей вариант решения № 2, а правее и ниже — гипотезу H_1 и вариант решения № 1.

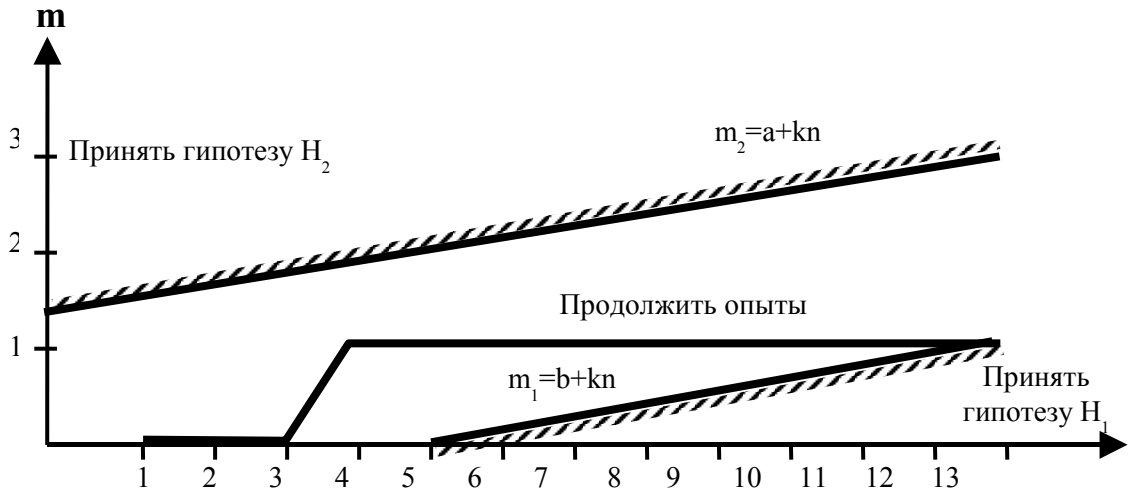


Рис. 10.4

Далее начинается последовательная проверка результатов наблюдений (например, разведывательных мероприятий ПМО). Допустим, что в первом мероприятии получен благоприятный исход — мин не обнаружено. Этому соответствует точка 1 на оси $0n$. Как видно из рис. 10.3, необходимо провести следующее разведывательное мероприятие. Предположим, что второе и третье мероприятия дали также благоприятный исход (точки 2, 3 на оси $0n$). Нахождение точек в зоне неопределенности свидетельствует о необходимости продолжения разведывательных мероприятий. При неблагоприятном, допустим, исходе четвертого мероприятия также нельзя рекомендовать ни гипотезу H_1 , ни гипотезу H_2 .

Подобным образом действуют до тех пор, пока ломаная кривая не пересечет линий m_2 или m_1 .

На рис. 10.4 показан пример последовательного проведения мероприятий, когда только после тринадцати мероприятий оказалось возможным рекомендовать конкретную гипотезу и вариант решения (гипотеза H_1 , вариант решения № 1).

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Глава 11. МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ И ОСНОВЫ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ ПРИ УПРАВЛЕНИИ СИЛАМИ. КЛАССИФИКАЦИЯ МЕТОДОВ

§11.1. ОБЛАСТЬ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДОВ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

Целью использования математического моделирования при управлении является повышение эффективности вырабатываемых решений по поставленным задачам, планов применения сил, использования средств, а также повышение оперативности их выработки и проведения в жизнь (гл. 1).

Как было показано в гл. 2, повышение эффективности решения, плана достигается творческой работой командира, офицеров штаба, в процессе которой на каждом из творческих шагов используется математическое моделирование (см. рис. 2.1). Одной из частных его задач является

математическая оптимизация отдельных элементов решения, плана для обоснования лучших их вариантов из множества возможных либо (с той же целью) сравнительная оценка различных вариантов решения, плана в целом.

Следует подчеркнуть, что всегда методы математической оптимизации используются только в рамках, очерченных творчеством командира, офицера штаба. Командир (офицер штаба) определяет путь повышения эффективности решения, плана, цель математического моделирования, дает оперативную тактическую постановку задачи для формирования модели. Возможности методов оптимизации велики, но не безграничны. При всех обстоятельствах методами оптимизации невозможно добиться повышения эффективности сверх того уровня, который потенциально заложен творчеством командира в решении, способе действий.

Если эффективность и после оптимизации неудовлетворительна, необходимы новые творческие усилия командира, офицера штаба, разработка нового способа, решения. Важно также понимать, что с точки зрения философии диалектики все методы оптимизации — это методы нахождения тождества противоположностей, при котором достигается оптимальное значение показателя эффективности (см. гл. 2).

О причинах, вызвавших потребность в использовании при управлении методов математической оптимизации, можно сказать следующее. Замечательным свойством математических моделей является способность оценивать влияние на величину показателя эффективности различных противоположностей, элементов обстановки, находящихся в такой взаимосвязи, учесть которую человеческий мозг не способен. Это открывает принципиальную возможность количественной оценки лучших вариантов действий (лучших альтернатив) из числа рассматриваемых путем математического моделирования и сравнительной оценки всех возможных вариантов. Однако эту возможность не всегда можно реализовать. Причин этого по крайней мере две. Во-первых, число сравниваемых вариантов может быть столь большим, что за имеющееся время невозможно осуществить их перебор. Вторая причина не менее, если не более, существенная. Очень часто выбор лучшего варианта действий требует знания определенных элементов обстановки, например принятого противником способа использования сил и средств, состояния метеорологической обстановки на момент ведения боевых действий, исходов планируемых обеспечивающих мероприятий и т. д. Во многих случаях на момент выработки командиром решения в отношении истинного состояния таких элементов обстановки будет существовать неопределенность. При этом выявление лучшего варианта действий путем простого последовательного сравнения всех вариантов становится невозможным.

Все эти обстоятельства требуют использования математических методов оптимизации при количественном обосновании решения. Существует большое число различных методов математической оптимизации, что объясняется разнообразием оптимизируемых ситуаций, особенностями функционирования управляемых систем.

Прежде всего методы оптимизации подразделяют на методы, применяемые в условиях достоверного знания элементов обстановки и в условиях неопределенности относительно истинного состояния этих элементов.

Вначале рассмотрим методы оптимизации в условиях достоверного знания необходимых элементов (первая группа). На практике встречаются системы, оптимизировать функционирование которых необходимо в некоторое ограниченное число дискретных моментов времени, и системы, при управлении которыми необходима непрерывная выдача команд управления, оптимизирующих в итоге результат их функционирования. В качестве

примера систем первого типа можно привести соединение кораблей: распределение сил и средств по объектам и задачам осуществляется командиром в дискретные моменты времени выработки решения по поставленной задаче и корректирования этого решения при изменении обстановки. Далее речь пойдет о методах оптимизации управления системами именно этого типа.

Примером системы второго типа является летательный аппарат, который в кратчайший срок (или, например, с минимальным расходом топлива) должен изменить направление и высоту полета. При этом сигналы, регулирующие положение рулей управления полетом, должны подаваться непрерывно. Для решения многих задач этого типа могут применяться методы, в основе которых лежит так называемый принцип максимума Понтрягина.

Прежде чем продолжить рассмотрение методов оптимизации в дискретные моменты времени, дадим общую математическую формулировку таких задач. Она выглядит следующим образом: найти неизвестные $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n$, обращающие в максимум (или минимум) целевую функцию

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n) \quad (11.1.1)$$

при выполнении ряда ограничений:

$$\left. \begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n) &= b_{i_1} (i_1 = 1, 2, \dots, k_1); \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n) &\geq b_{i_2} (i_2 = k_1 + 1, k_1 + 2, \dots, k_2); \\ f_3(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n) &\leq b_{i_3} (i_3 = k_2 + 1, k_2 + 2, \dots, k_3). \end{aligned} \right\} \quad (11.1.2)$$

В практике применения математических методов оптимизации принято говорить о планах, решениях, понимая под этим совокупности параметров $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n$. Если план (решение) не противоречит ограничениям задачи, его называют допустимым. Тот из допустимых планов, при котором целевая функция принимает экстремальное значение, называется оптимальным планом. Причем факт оптимальности должен быть доказан строго математически. Иначе говорят о рациональном, целесообразном плане.

Обратим внимание на очень важное обстоятельство: в исследовании операций оптимальным называется план, гарантирующий экстремальное значение показателя эффективности лишь в рамках математической модели.

Характер влияния плана на величину оптимизируемого показателя эффективности отражает целевая функция. В ряде случаев в качестве целевой функции выступают математические модели, разработанные с использованием аналитических и статических методов.

Системой ограничений (11.1.2) (иногда их называют дисциплинирующими условиями) отражаются либо требования к дополнительным показателям эффективности, либо требования к самим параметрам x_j .

Ограничения задачи могут задаваться в виде некоторых условий ($x_j \geq 0$), функций или же иметь форму математических моделей. В принципе возможно, что на неизвестные x_j не будет накладываться никаких ограничений. Однако при решении оперативно-тактических задач — распределении сил, средств, выборе тактических приемов — подобные случаи весьма редки. В частности, практически обязательным является требование неотрицательности неизвестных x_j .

Возможность применения того или иного метода оптимизации решающим образом зависит от вида целевой функции и ограничений задачи (см. формулы (11.1.1), (11.1.2) соответственно). Разумеется, вид выражений (11.1.1), (11.1.2) определяется главным образом особенностями

моделируемого процесса. Однако в некоторых случаях эти выражения можно видоизменять с целью сделать возможным применение более простых методов оптимизации.

В зависимости от вида целевой функции и ограничений задачи возможно применение следующих методов оптимизации.

Аналитические методы используют классический аппарат дифференциального или вариационного исчисления.

Использование дифференциального исчисления позволяет определять экстремумы функций одной или нескольких переменных, при которых достигаются глобальные или локальные значения максимума целевой функции. При этом целевая функция должна быть задана аналитическим выражением, дифференцируемым во всей области возможных значений неизвестных. Если математическая формулировка задачи содержит ограничения, они должны быть заданы в форме равенств или неравенств типа $x_i \geq a$, $x_i \leq a$, либо же в форме дифференцируемых аналитических выражений.

Методами вариационного исчисления определяется вид функции, являющейся оптимальной из множества всех возможных функций некоторого класса, т. е. такой функции, при которой достигается экстремальное значение показателя эффективности. Методами вариационного исчисления, например, может быть определено уравнение траектории, по которой должно осуществляться движение объекта, чтобы время достижения заданной подвижной или неподвижной области (время сближения с целью) было минимальным или же были минимальными затраты топлива.

Численные (поисковые) методы характеризуются тем, что учитывают предшествующую информацию для построения улучшенных решений задачи при помощи итерационных процедур. Численные методы разработаны так, чтобы для оптимизации применять ЭВМ с их высоким быстродействием.

Обширным подклассом численных методов являются методы математического программирования. Они появились как инструмент оптимального распределения ограниченных ресурсов. Поскольку в качестве ресурсов могут выступать наряды сил, средств, время выполнения задачи в различных районах, скорости движения, дистанции нанесения удара и т. п., то методы математического программирования применяются и для обоснования способов использования сил и средств флота. Различают методы линейного, нелинейного и динамического программирования.

Методы линейного программирования используются, если целевая функция и ограничения задачи (см. (11.1.1), (11.1.2)) суть линейные уравнения или могут быть сведены к таковым путем линеаризации.

Если целевая функция или хотя бы одно из ограничений задачи нелинейны, имеет место задача нелинейного программирования. Для решения задачи нелинейного программирования могут использоваться уже упоминавшиеся аналитические методы, однако гораздо чаще приходится прибегать к специальным поисковым методам. Правда, они содержат многие идеи, приемы аналитических методов.

О методах нелинейного программирования в целом можно сказать, что они менее универсальны, требуют более полного учета индивидуальных особенностей математической формулировки задач, чем методы линейного программирования.

Метод динамического программирования применим как при линейных, так и при нелинейных целевой функции и ограничениях задачи, а также в случаях, когда выражения (11.1.1), (11.1.2) заданы не в виде функций, а в виде алгоритмов. Однако оптимизируемая ситуация должна быть

такой, чтобы имелась возможность интерпретировать процесс разработки оптимального плана как марковский процесс многоэтапного перевода некоторой системы из заданного начального в конечное состояние, при котором достигается экстремум показателя эффективности. Это возможно, если оптимизируемая ситуация обладает рядом других свойств, о чем подробно будет сказано в гл. 14.

В отличие от многих алгоритмов линейного и нелинейного программирования метод динамического программирования позволяет получать целочисленные решения.

Метод случайного поиска ввиду его специфичности часто выделяют в отдельный подкласс численных методов оптимизации. Сущность этого метода заключается в том, что с помощью статистических испытаний последовательно ищутся допустимые планы задачи. Для каждого такого плана вычисляется значение показателя эффективности. Существуют приемы, позволяющие при определении очередного допустимого плана учитывать предыдущий опыт, а также оценивать с заданной точностью факт достижения оптимума.

Перейдем к рассмотрению метода оптимизации в условиях неопределенности (вторая группа). Командиру приходится встречаться с самыми различными ситуациями неопределенности. К сожалению, в настоящее время далеко не для всех возможных ситуаций неопределенности существуют математические методы оптимизации. Наиболее развитыми методами, имеющими практическое значение в оперативно-тактической области, являются методы теории игр, теории статистических решений.

Методы теории игр — это методы математического моделирования в условиях неопределенности, называемых конфликтными. Существует большое число разновидностей конфликтных ситуаций, часть из них будет рассмотрена ниже. Существенно важным для всех них является то, что неопределенность вносится фактом возможности выбора активным противником того или иного варианта действий.

Методы теории статистических решений, в отличие от методов теории игр, рассматривают такие ситуации, где неопределенность вносится не сознательным выбором активного противника, а действием объективных, не зависящих от воли и сознания людей закономерностей: возможностью наступления того или иного типа погоды, возможностью тех или иных исходов запланированных обеспечивающих действий и т. д.

Такова классификация основных методов оптимизации.

§11.2. ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Чтобы специалист по исследованию операций смог использовать тот или иной метод оптимизации, оперативно-тактическая постановка задачи должна содержать комплекс сведений, необходимый для формализованной постановки задачи (с использованием понятийного аппарата исследования операций). В свою очередь, содержание формализованной постановки задачи определяется особенностями процесса выбора метода оптимизации и формирования математической модели (математической формулировки задачи оптимизации). В настоящей главе будет рассмотрено все то общее, что имеет место при использовании методов оптимизации, а в гл. 12—16 — частное в отношении конкретных методов.

11.2.1. Рациональная последовательность разработки моделей оптимизации

Математические модели, которые могут быть необходимы командиру, офицерам штаба в их творческой деятельности при выработке решения, планов (см. рис. 2.1) с точки зрения использования

математических методов оптимизации делятся на два типа: первый — основу математической модели составляет какой-либо метод оптимизации; второй — метод оптимизации является элементом (блоком) математической модели.

Пример 11.1. Соединение кораблей противника состоит из кораблей ядра и охранения. Командиру при определении в замысле направления главного удара и обеспечивающих действий требуется обосновать целесообразность выделения части сил для ослабления охранения. Основу необходимой математической модели может составить один из методов математического программирования или теории игр — в зависимости от особенностей обстановки.

Пример 11.2. В процессе выработки решения командир рассматривает два способа применения подводных лодок — маневренный и позиционный (терминология второй мировой войны). От организации связи с подводными лодками при каждом из способов зависят скрытность подводных лодок (со всеми вытекающими последствиями) и возможность (эффективность) применения оружия. В этом случае математическая модель, необходимая для обоснования способа, будет иметь одним из элементов блок оптимизации связи с подводными лодками для каждого из способов.

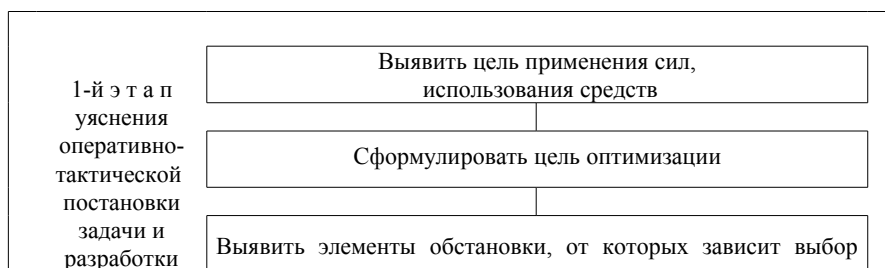
Решение вопроса о том, какой именно тип модели необходим в конкретном случае, — это решение вопроса формирования модели вообще [5]. Ниже будет рассмотрено, как используются именно методы математической оптимизации безотносительно к типу модели.

Вначале на основании уяснения оперативно-тактической постановки задачи следует оценить, к какой группе принадлежит метод оптимизации. Если будет установлено, что имеет место оптимизация в условиях полного знания необходимых элементов обстановки (первая группа методов), рациональна следующая последовательность действий (рис. 11.1).

Необходимо разработать математическую формулировку задачи (см. (11.1.1), (11.1.2)) в общей (символической) форме. При этом лишь указывается, какие именно параметры составляют целевую функцию и ограничения задачи. Затем детально разрабатываются целевая функция и ограничения задачи, являющиеся дополнительными показателями эффективности, а также все другие ограничения. Далее следует проанализировать полученную математическую формулировку задачи, чтобы выбрать метод оптимизации.

В ряде случаев решение задачи в принципе может быть осуществлено несколькими методами. При выборе рационального метода следует учесть цели оптимизации, состав специального математического обеспечения управления, время, имеющееся в распоряжении для проведения расчетов. Это требует хорошего знания методов оптимизации и состава математического обеспечения.

Если окажется, что при данной формулировке задачи ни один из существующих методов оптимизации применить нельзя, возникает проблема такого изменения целевой функции и (или)



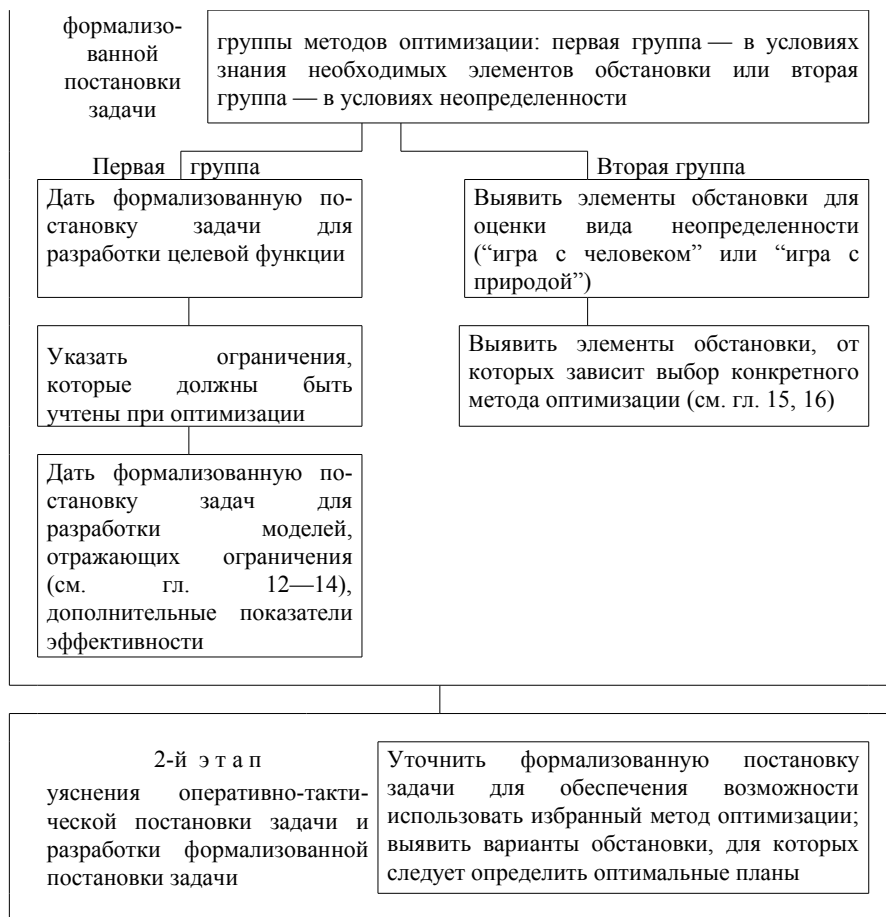


Рис. 11.1

ограничений задачи, чтобы оказалось возможным использовать тот или иной метод.

Для изменения математической формулировки задачи могут применяться следующие приемы:

— формальное преобразование целевой функции и ограничений задачи (линеаризация нелинейных выражений, аппроксимация системы дифференциальных уравнений полиномом и т. д.);

— принятие допущений оперативно-тактического плана, позволяющих изменить математическую формулировку задачи в нужном направлении (например, принятие допущения о независимом действии разведчиков при поиске объекта);

— комбинированное использование приемов, описанных выше (например, замена фактического закона поражения показательной функцией и линеаризация этой функции логарифмированием).

Рассмотрим особенности применения методов оптимизации в условиях неопределенности (вторая группа). В отличие от ранее рассмотренного случая применения методов оптимизации первой группы математическая формулировка задачи даже в самом общем виде невозможна до тех пор, пока на основании уяснения оперативно-тактической постановки задачи не будет выявлен тип ситуации и соответствующий ему конкретный метод оптимизации (матричная игра, стохастическая игра и т. д.). Методы разработки математических формулировок некоторых

типов задач рассмотрены в гл. 15, 16. Отметим, что процесс такой разработки может быть многоэтапным: исходя из возможностей использования тех или иных методов оптимизации могут уточняться тип используемого метода оптимизации (например, вместо бесконечной игры — матричная), целевые функции, модели для вычисления дополнительных показателей эффективности и т. д. Если для этого требуется изменение постановки задачи, оно должно быть согласовано с командиром.

Следует отметить, что в ряде случаев может оказаться возможным выявление необходимого метода оптимизации уже в результате уяснения оперативно-тактической постановки задачи. Тогда сразу же приступают к формализованной постановке задачи с учетом избранного метода оптимизации, а затем — к ее математической формулировке.

11.2.2. Содержание и рациональная последовательность формализованной постановки задачи

Чтобы разработать модель оптимизации, специалист по исследованию операций должен уяснить оперативно-тактическую постановку задачи, осуществленную командиром (офицером штаба), выделить и сформулировать следующие сведения.

Прежде всего сформулировать цель применения сил, использования средств. Формулировка цели должна быть такой, чтобы степень ее достижения можно было оценить числом. Как известно, это необходимо для обоснования показателя эффективности выполнения поставленной задачи. Далее уясняются цель оптимизации и способ реализации плана. Структура модели оптимизации может быть различной в зависимости от того, будет или не будет иметься возможность корректировать план в процессе его выполнения. Что касается цели оптимизации, то полезно подчеркнуть: в общем случае оптимизироваться может как величина показателя эффективности выполнения поставленной задачи, так и величина одного из дополнительных показателей эффективности. Например, целью оптимизации распределения сил по объектам удара может быть минимизация наряда этих сил при условии, что показатель эффективности удара будет не ниже заданного (т. е. основной показатель эффективности является одним из ограничений (11.1.2) задачи). При всех обстоятельствах оптимизировать можно только один из показателей эффективности (основной или какой-либо дополнительный) при остальных показателях, являющихся ограничениями. Так, невозможно требовать одновременно максимизировать эффективность выполнения поставленной задачи и минимизировать свои потери. В данном случае как в реальной жизни, так и в ее отражении — математическом моделировании — можно достичь или цели максимизации эффективности выполнения задачи при своих потерях, не превышающих заданного уровня, или же минимизировать свои потери при условии, что эффективность выполнения задачи будет не ниже заданного значения.

После формулировки цели оптимизации следует изложить факторы, которые позволили бы судить, какую из двух групп методов оптимизации следует избрать: методы оптимизации в условиях знания необходимых элементов обстановки или же в условиях неопределенности. При этом необходимо иметь в виду, что наиболее типичными особенностями ситуаций, требующих применения методов оптимизации первой группы, являются: необходимость выбора одного из нескольких вариантов действий; необходимость учета в модели лишь одного варианта обстановки.

Типичными особенностями ситуаций, требующих применения методов оптимизации второй группы, являются:

— необходимость выбора из нескольких вариантов действий одного;

— возможность нескольких вариантов обстановки при выполнении силами поставленной задачи. При этом а) на момент выработки решения будет не известно, в условиях какой именно обстановки придется выполнять поставленную задачу; б) при различных вариантах ожидаемой обстановки оптимальны различные варианты действий.

Как число вариантов действий, так и число вариантов обстановки может быть в принципе и конечным (но не менее двух) и бесконечным (например, дистанция, время обнаружения объектов и т. п.).

Если из описания ситуации будет следовать, что необходимо применять методы оптимизации второй группы (методы оптимизации в условиях неопределенности), то далее необходимо указать, какой именно из двух возможных факторов создает эту неопределенность:

— противодействие активного противника, сознательно пытающегося поставить другую сторону перед фактом неожиданного применения нового способа действий;

— незнание истинного состояния каких-то элементов обстановки в результате действия объективных, не зависящих от воли и сознания людей, причин.

Иногда образно говорят о двух факторах, формирующих неопределенность — человеке и природе. Эти факторы, разумеется, могут действовать и совместно.

Специфика дальнейшей детализации описания обстановки, если необходимо применять методы оптимизации второй группы, описана в гл. 15, 16.

Далее, постановка задачи должна содержать сведения, позволяющие дать математическую формулировку целевой функции. Как уже указывалось, целевая функция может иметь форму довольно сложной математической модели. Для разработки целевой функции необходимо выявить:

а) влияние какого именно фактора на величину показателя эффективности должно быть определено;

б) на фоне каких элементов обстановки (относящихся к силам противника, своим силам, военно-географическим условиям), с учетом какой взаимосвязи этих элементов проявляется влияние оптимизируемого фактора на величину показателя эффективности.

Например, требуется определить оптимальную дистанцию залпа торпедных катеров по конвою противника, следующего в охранении артиллерийских кораблей. Цель удара — поразить максимально возможное число транспортов. Показатель эффективности — математическое ожидание числа пораженных транспортов. Оптимизируемый фактор — дистанция залпа. Ее оптимальное значение будет различным при различных эффективности артиллерийского огня кораблей эскорта, продолжительности выхода катеров в позицию торпедного залпа, эффективности использования катерами торпедного оружия при различных дистанциях залпа. В свою очередь, продолжительность выхода катеров в позицию залпа будет зависеть от скоростей катеров и конвоя, начального курсового угла цели, характера маневрирования конвоя после обнаружения противниками друг друга, после открытия противником артиллерийского огня. Скорость, особенно катеров, а также эффективность артиллерийского огня могут зависеть от состояния моря (см. примеры 2.4—2.6).

Затем следует указать те ограничения (“дисциплинирующие условия”), при которых должна быть осуществлена оптимизация. Иногда такие ограничения даются при формулировке цели оптимизации. Однако гораздо чаще они составляют специальный и большой раздел формализованной постановки задачи, являющейся результатом уяснения оперативно-тактической постановки задачи.

Например, в условиях рассмотренного выше примера удара торпедных катеров в качестве ограничений задачи могут выступать: минимально и максимально возможные дистанции залпа торпедных катеров, максимальное число катеров, которые по тактическим или техническим причинам могут атаковать противника с одного направления, предельно допустимое число потерь в катерах и т. д.

В том случае, если какие-либо ограничения задачи (см. (11.1.2)) имеют форму моделей, постановка задачи должна содержать сведения, необходимые для их разработки. Например, если при определении оптимальной дистанции залпа торпедных катеров требуется учесть, что для выполнения последующих задач потери катеров не должны превысить некоторое значение, то постановка задачи должна содержать сведения для разработки модели поражения атакующих и выходящих из атаки торпедных катеров артиллерийским огнем кораблей эскорта противника при различных дистанциях залпа (о порядке оперативно-тактической постановки задачи для моделирования применения носителей оружия см. в гл. 18).

Специалист по исследованию операций в процессе оперативно-тактической постановки задачи командиром должен проявить инициативу, чтобы иметь полное представление об ограничениях задачи и возможность (при необходимости) сформировать нужные математические модели.

Завершить уяснение оперативно-тактической постановки задачи и формализованную постановку задачи целесообразно уточнением цели оптимизации. Следует выявить, для каких вариантов обстановки необходимо определить оптимальные планы. Так, в условиях приведенного выше примера определения оптимальной дистанции использования торпедными катерами своего оружия командир может потребовать определения этих оптимальных дистанций для различных начальных курсовых углов конвоя, дистанций его обнаружения и различного состояния моря.

В процессе выработки формализованной постановки задачи специалист обязан активно выявлять (разрабатывать) необходимый метод оптимизации. Если метод будет очевиден только после завершения в общем виде постановки задачи, то может потребоваться детализация постановки с учетом особенностей метода. В гл. 12—16 изложены особенности и формализованной постановки задачи и ее математической формулировки для некоторых методов оптимизации, наиболее часто употребляемых в оперативно-тактической и тактико-специальной областях. Они излагаются в предположении, что метод оптимизации избран либо же требуется корректирование математической формулировки или (и) оперативно-тактической постановки задачи. Знание материала гл. 12—16 необходимо также для того, чтобы в процессе уяснения оперативно-тактической постановки задачи уверенно классифицировать ситуацию для выбора необходимого метода оптимизации.

Многоэтапный характер разработки математической модели оптимизации является причиной многоэтапности процесса уяснения специалистом по исследованию операций оперативно-тактического описания задачи, поставленной командиром, последовательного уточнения его отдельных элементов. Рациональная последовательность уяснения оперативно-тактической постановки задачи показана на рис. 11.1.

Модели оптимизации, как правило, весьма сложны. Их реализация для целей управления обычно требует применения ЭВМ. Оперативное включение модели оптимизации в состав математического обеспечения ЭВК возможно лишь при наличии заблаговременно подготовленных стандартных процедур и модулей оптимизации.

11.2.3. Содержание оперативно-тактической постановки задачи, осуществляемой командиром, офицером штаба

Оперативно-тактическая постановка задачи должна содержать сведения, необходимые для определения типа модели (п. 11.2.1) и формализованной постановки задачи (см. рис. 11.1). При оперативно-тактической постановке задачи командир, офицер штаба должны использовать оперативно-тактический (тактико-специальный) понятийный аппарат.

Содержание постановке задачи в общем виде приведено в гл. 2. Специфика использования методов оптимизации делает возможной и необходимой регламентацию разработки содержания постановки. Цель применения сил, использования средств выявляется при уяснении поставленной задачи, цели моделирования — в процессе творческих шагов при выработке решения (см. рис. 2.1). Что же касается элементов обстановки, которые должны быть отражены в модели, то с наибольшей полнотой, меньшим риском пропуска существенно важного и меньшими временными затратами командир сможет указать их, если целенаправленно использует закон философии диалектики о единстве и борьбе противоположностей. Для этого он должен выявить: что есть диалектические противоположности системы (конкурирующие варианты), что есть диалектические противоречия системы (т. е. влияние противоположностей на эффективность выполнения силами поставленной задачи). Профессионально полное, с учетом цели моделирования, описание противоречий и явится основой этой части постановки задачи.

Пример 11.3. Допустим для определенности, что в примере 11.1 речь идет о распределении своих ракет по кораблям ядра и кораблям охранения противника. Целью удара является поражение максимально возможного числа кораблей ядра. Диалектическими противоположностями в этом случае будут*: максимально возможное число ракет направить на корабли ядра (первый элемент); максимально возможное число ракет направить на корабли охранения (второй элемент).

Диалектические противоречия:

— для первого элемента противоположности:

а) оказывающие положительное влияние: максимальный потенциал направляется на главные объекты, облегчается преодоление ракетами обороны противника (при данном числе кораблей охранения), имеется большая возможность обеспечить внезапность удара;

б) оказывающие отрицательное влияние: противодействовать удару будут все корабли охранения;

— для второго элемента противоположности:

а) оказывающие положительное влияние: часть кораблей охранения будет поражена, что облегчит остальным ракетам преодоление ПРО;

б) оказывающие отрицательное влияние: часть ракет отвлекается от действия на главном направлении, имеется меньшая возможность обеспечить внезапность удара.

Детализация противоречий вынудит далее командира сообщить необходимые сведения о главных объектах и силах обороны противника, своих силах с учетом военно-географических условий и фактора времени. Так, в условиях примера 11.3 командир будет вынужден указать возможные варианты построения и организации охранения, дать их характеристики, указать возможность (невозможность) изменить целераспределение ракет после обнаружения противника (занятия огневых позиций). При этом в одном случае для оптимизации может быть использован один из методов математического программирования, в другом — один из методов теории игр. И т. д.

* Ситуация рассматривается упрощенно, чтобы облегчить изложение и понимание существа метода.

Следующей важной частью постановки задачи являются ограничения. Командир (офицер штаба) указывает ограничения оперативно-тактического или тактико-специального характера. Чаще всего они касаются ресурсов своих или противника: сил, средств, времени. Понятие “ресурсы” следует понимать широко. Это может быть ущерб, дистанция, скорость, водоизмещение — все параметры, которые влияют на величину показателя эффективности, “участвуют” в оптимизации. Так, в условиях примера 11.3 могут существовать ограничения на число ракет в залпе с одного направления, общее число ракет, предельно допустимые потери своих сил и т. д.

В ряде случаев командир может указать дополнительные (точнее, помимо целевой функции) показатели эффективности или факторы обстановки, которые позволят ему вскрыть слабые и сильные стороны рассматриваемого элемента обстановки (см. гл. 2). Следует, однако, иметь в виду, что не все нужные командиру дополнительные показатели эффективности — параметры — могут быть определены с помощью собственно данного метода оптимизации. Чаще всего такая возможность появится в отношении параметров, являющихся ограничениями задачи, некоторыми промежуточными результатами оптимизации. В противном случае будет необходимо разрабатывать дополнительные математические конструкции.

11.2.4. Анализ полученного оптимального плана

Анализ полученного оптимального плана (результатов оптимизации) осуществляют и специалист по исследованию операций и командир (офицер штаба).

Специалист по исследованию операций на этапе исследования необходимых закономерностей и выработки рекомендаций командиру должен оценить соответствие оптимального плана реальной обстановке. Как уже указывалось, полученный план оптимален только в рамках разработанной математической модели. Командир же должен поставить задачи силам с учетом реальной обстановки.

Общее правило анализа плана, полученного методами математической оптимизации, заключается в учете характера влияния на него возможных неточностей исходных параметров задачи, а также допущений, принятых при ее математической формулировке.

Допущения, принятые при разработке модели оптимизации, можно разбить на две группы:

— допущения, принятые при разработке частных моделей, с помощью которых вычисляются исходные параметры задачи;

— допущения, принятые при математической формулировке целевой функции и ограничений задачи.

Основным методом проверки полученного оптимального плана с учетом возможных ошибок в вычислении исходных параметров является оценка областей устойчивости допустимых планов. Определение таких областей осуществляется последовательным изменением соответствующих параметров в некоторых пределах.

Большие размеры области устойчивости плана являются основанием для его принятия. Если же эта область сравнительно мала, то следует проанализировать смежные области. Если переход к другим планам, соответствующим смежным областям, вызывает незначительное изменение показателя эффективности, это свидетельствует в пользу рассматриваемого плана. Если же переход к другим планам связан со значительным изменением показателя эффективности, потребуется найти методы более точного вычисления необходимых исходных параметров. Выявление таких фактов может оказаться чрезвычайно важным для командира.

Что касается метода проверки допущений, принятых при математической формулировке задачи, то рациональным является переход к методам оптимизации, позволяющим избежать проверяемых допущений.

Сравнение оптимальных планов и значений показателей эффективности, вычисленных с помощью различных методов оптимизации, позволит составить суждение об оптимальном плане.

Следует также учитывать и размеры области устойчивых планов: большие размеры этой области свидетельствуют в пользу полученного плана при рассмотрении влияния допущений указанного характера.

Остановимся на двух частных, но имеющих важное практическое значение проблемах анализа допущений задач оптимизации. Многие методы оптимизации требуют допущения о нецелочисленности оптимального плана. Полученный оптимальный нецелочисленный план приходится округлять, причем зачастую бывает совершенно неочевидно, как это сделать, не уходя от “истинного” целочисленного оптимального плана. В том случае, когда имеется возможность хотя бы на этапе заблаговременной подготовки прибегнуть к целочисленным методам программирования, следует в порядке разработки математического обеспечения управления оценить рациональные методы округления. Если целочисленные методы решения данной задачи применить невозможно, рекомендуется прибегнуть к следующему приближенному способу. Ориентируясь на полученный нецелочисленный оптимальный план, наметить варианты округления этого плана и затем оценить каждый вариант. В качестве рационального избирается план, в наибольшей степени отвечающий условиям задачи. Иногда может оказаться, что область экстремума пологая и различные планы в его окрестности мало отличаются друг от друга по эффективности. В этом случае можно при выборе рационального плана учитывать и факторы, не отраженные в модели.

Вторая проблема касается применения методов оптимизации, когда оптимизируемые явления и процессы описываются моделями с использованием показательного закона распределения случайных величин, показательных функций, что имеет широкое распространение в оперативно-тактической области (на-пример, использование показательного закона поражения цели, показательного закона распределения времени обнаружения объекта и т. д.). При этом делается допущение об отсутствии последствия, об ординарности, стационарности процесса (см. гл. 5, 6, 17, 18, 19). В этом случае при анализе результатов оптимизации (выборе метода оптимизации) потребуется оценить правомерность указанных допущений для рассматриваемых явлений, способность избранного метода оптимизации не исказить закономерности явления при сделанных допущениях.

Организация анализа результатов математической оптимизации различна в системах управления различного типа. При управлении оружием и техническими средствами, т. е. в системах управления первого типа (см. гл. 2), такой анализ осуществляется при разработке математического обеспечения ЭВК системы. В системах управления второго типа (корабль — соединение) анализ результатов оптимизации осуществляется при заблаговременной подготовке как обязательный элемент математического обеспечения управления. Поэтому для управления системами второго типа разрабатываемое специальное математическое обеспечение должно позволить формировать необходимые модели оптимизации и анализировать получаемые планы.

Командир (офицер штаба) анализирует результаты оптимизации с оперативно-тактической (тактико-специальной) точки зрения. Он должен понимать, что только в невоенных областях управления (в различных областях экономики, административно-хозяйственных областях и т. д.) использование результатов оптимизации всегда благо. Необходимо лишь, чтобы было доказано соответствие оптимального плана реальной обстановке. Иначе обстоит дело в военной области —

оперативно-тактической, тактико-специальной, где всегда необходимо учитывать стремление активного противника прогнозировать наши действия, произвести оптимизацию наших действий с использованием всех современных методов и затем предпринять соответствующие ответные меры. Например, если командир подводной лодки, корабельной ударной группы математическими методами оптимизации обоснует свои наиболее выгодные огневые позиции, он должен быть готов к тому, что именно в этих позициях противник и будет его ожидать. **Поэтому при анализе результатов оптимизации командир должен выявить возможность и степень подобной угрозы, предусмотреть меры военной хитрости, дезинформации, маскировки.** При использовании методов оптимизации для прогнозирования действий противника командир должен оценить также возможные мероприятия противника по маскировке своих действий, дезинформации, выявить их отличительные признаки.

Глава 12. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПРИ УПРАВЛЕНИИ СИЛАМИ

§ 12.1. ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДОВ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПРИ УПРАВЛЕНИИ СИЛАМИ

12.1.1. Область применения методов

Как и все методы математического программирования, линейное программирование применяется для обоснования распределения ограниченных ресурсов. Если наряды сил, средств, время выполнения поставленных задач, скорости движения, запасы топлива и других материально-технических средств и т. п. интерпретировать как ресурсы, то линейное программирование может быть использовано в качестве инструмента для обоснования способов применения сил, использования средств.

Большое применение методы могут найти в военно-экономической области для обоснования организации функционирования предприятий, технологических процессов, работы транспорта и т. д.* Для иллюстрации сказанного рассмотрим ряд примеров.

Пример 12.1. Для перевозки изделий, представляющих два контейнера *A* и *B*, имеются три транспортных средства разных типов. Перевозка на одном транспортном средстве одновременно двух различных контейнеров не разрешается. Возможности транспортных средств (в среднем) приведены в табл. 12.1.

Необходимо разработать план перевозок, обеспечивающий доставку максимального числа изделий в комплекте за 24 ч при условии, что простои и обратные перевозки не допускаются.

Т а б л и ц а 12.1

Тип транспортных средств	Средняя производительность, ед/ч	
	Контейнер <i>A</i>	Контейнер <i>B</i>
Первый	5	5
Второй	6	2
Третий	5	3

* Метод линейного программирования был впервые разработан выдающимся советским математиком Л. В. Канторовичем в 1939 г. Одним из первых направлений его применения было обоснование экономного раскроя листов стали на судостроительном заводе.

Пример 12.2. Для нанесения удара по группе разнотипных объектов (два объекта первого типа, три объекта второго типа и два объекта третьего типа) выделено семь носителей оружия двух типов (четыре — первого типа и три — второго типа). Известно количество боеприпасов, необходимое для поражения объектов с заданной эффективностью носителями различных типов.

Необходимо разработать план распределения носителей оружия по объектам, обеспечивающий поражение объектов с заданной эффективностью при минимальном расходе боеприпасов. При этом по каждому объекту может действовать не более одного носителя.

Пример 12.3. Для проведения одновременного контрольного поиска в трех районах выделено N_1, N_2, N_3, N_4 разведчиков четырех типов соответственно. В каждом из районов возможно нахождение одной подводной лодки противника. Каждая из них, будучи необнаруженной, представляет одинаковую угрозу выходящему из базы конвою. Условия, время выполнения поиска подводных лодок в различных районах различны для разведчиков разных типов.

Необходимо распределить разведчиков по районам поиска, чтобы в максимальной степени снизить угрозу конвою.

Пример 12.4. Соединение вместе с приданными силами имеет четыре типа носителей оружия для выполнения задачи. Противник, по которому наносится удар, может иметь охранение преимущественно противолодочное, преимущественно противовоздушное, смешанное (сбалансированное).

Необходимо определить наряд сил, обеспечивающий решение поставленной задачи для первых двух вариантов обороны с вероятностью P_3 , а для третьего варианта — с максимальной для этого варианта вероятностью. Действия носителей могут считаться независимыми.

Пример 12.5. Необходимо пополнить боеприпасы на кораблях, находящихся в четырех пунктах базирования. Боезапас хранится на четырех складах. Потребности в боеприпасах в каждом пункте, наличие боеприпасов на складах, расстояние между базами и складами известны. Транспортные средства однотипны. Расход ими топлива при перевозке боеприпасов пропорционален тонно-километрам и определен нормативами.

Необходимо составить план пополнения кораблей боеприпасами с минимальным расходом топлива.

Пример 12.6. Для воздействия по четырем однотипным объектам выделены четыре ударные группы. Боевые возможности ударных групп показаны в табл. 12.2.

Таблица 12.2

Номер ударной группы	Номер объекта			
	1	2	3	4
1	0,90	0,85	0,85	0,80
2	0,50	0,80	0,75	0,60
3	0,80	0,75	0,20	0,45
4	0,70	0,60	0,50	0,10

Необходимо составить план целераспределения, обеспечивающий воздействие по всем объектам и максимальное число пораженных объектов.

Пример 12.7. Для выполнения поставленной задачи шесть однотипных ударных групп необходимо навести на три подвижных объекта таким образом, чтобы на первый объект были наведены три ударные группы, на второй — две ударные группы, на третий — одна ударная группа. Места объектов и групп, характер маневрирования объектов, скорости ударных групп известны.

Необходимо составить план распределения ударных групп по объектам, обеспечивающий наведение сил в кратчайший срок.

Пример 12.8. Планируется переход корабля по маршруту протяженностью S . Возможны различные режимы использования главных двигателей корабля. Каждому i -му режиму соответствует скорость v_i движения корабля и расход a_i топлива на милю пути ($i = 1, 2, \dots, n$). Запас топлива равен B . Из тактических, навигационных соображений могут быть установлены минимально необходимое $t_{\min}^{(i)}$ и максимально возможное $t_{\max}^{(i)}$ время использования каждого i -го режима работы главных двигателей.

Требуется обосновать такой план использования главных двигателей на переходе, при котором время T перехода минимально, а расход топлива не превышает допустимого значения B .

Пример 12.9. В условиях примера 12.8 требуется обосновать такой план использования главных двигателей, при котором расход топлива минимален, а время перехода не превышает заданной величины $T_{\text{зад}}$.

12.1.2. Особенности оперативно-тактической постановки задачи

Как уже указывалось в гл. 11, содержание оперативно-тактической постановки задачи должно позволить специалисту по исследованию операций дать ее формализованную постановку, а затем математическую формулировку. Разумеется, командир, офицер штаба при постановке задачи будут исходить из цели моделирования и излагать свою проблему с использованием своего понятийного аппарата. Специалист по исследованию операций должен иметь возможность увидеть в оперативно-тактической постановке задачи следующую формализованную постановку: найти оптимальный план — неизвестные x_1, x_2, \dots, x_n , которые обращают в максимум (минимум) целевую функцию $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и удовлетворяют заданным ограничениям задачи. Искомые неизвестные должны быть неотрицательными.

При формализованной постановке задачи необходимо четко указать и состав неизвестных и ограничения задачи оптимизации. В ряде случаев для математической формулировки целевой функции, ограничений задачи может потребоваться разработка специальных постановок этих задач.

Пример 12.10. В условиях примера 12.1 формализованная постановка задачи имеет следующий вид: найти неизвестные x_{ij} — время в течение которого транспортное средство j -го типа ($j = 1, 2, 3$) перевозит контейнеры i -го типа ($i = 1, 2$). План должен обеспечить комплектную перевозку максимально возможного числа контейнеров за 24 ч работы каждого из транспортных средств. Встречные перевозки запрещены ($x_{ij} \geq 0$), одновременная перевозка разнотипных контейнеров невозможна.

Пример 12.11. В условиях примера 12.3 формализованной постановке задачи предшествует следующий результат уяснения оперативно-тактической постановки задачи. Целью действия разведчиков является обнаружение подводных лодок противника во всех трех районах за заданное время, а показателем эффективности — вероятность этого события. При максимальном значении этого показателя эффективности вероятности обнаружения подводных лодок во всех районах должны быть равны между собой. Поэтому формализованная постановка задачи будет иметь

следующий вид: найти неизвестные x_{ij} — число разведчиков j -го типа ($j = 1, 2, 3, 4$), направляемых в i -й район ($i = 1, 2, 3$), которые обращают в максимум целевую функцию — вероятность обнаружения подводной лодки в каждом из трех районов. Число разведчиков j -го типа должно быть равно заданному их исходному наряду N_j (т.е. $0 \leq x_{ij} \leq N_j$). Требуется учесть интенсивности γ_{ij} и время t_{ij} выполнения поиска различными разведчиками в разных районах. Действия различных разведчиков могут считаться независимыми.

Первичная постановка задачи может подвергнуться уточнению, корректированию в процессе математической формулировки задачи. Причинами корректирования могут быть:

— необходимость разработки способов определения коэффициентов, ограничений, входящих в математическую формулировку (см. п. 12.2.1);

— необходимость удовлетворять требованиям к математической формулировке: целевая функция должна выражаться линейным уравнением, а ограничения задачи — линейными равенствами или неравенствами.

В том случае, когда целевая функция или (и) ограничения задачи суть нелинейные выражения, встает задача их линеаризации. Линеаризация может осуществляться одним из следующих способов:

а) применением какого-либо формального метода линеаризации (логарифмирование, разложение в ряд и т. д.);

б) учетом особенностей ситуации, включением допущений, позволяющих исключить нелинейные зависимости или заменить нелинейные зависимости линейными;

в) сочетанием способов “а” и “б”.

Специалист по исследованию операций уясняет оперативно-тактическую постановку задачи дважды: первый раз — для разработки математической формулировки задачи в общем виде, второй раз — для линеаризации целевой функции, ограничений задачи (если линеаризация необходима и выполняется способами “б”, “в”). В случае, когда линеаризация невозможна, специалист по исследованию операций должен избрать другой метод оптимизации (нелинейное, динамическое программирование, случайный поиск, полный ненаправленный перебор всех возможных вариантов и т. д.). Кроме того, повторное уяснение постановки задачи, ее дополнение, может потребоваться, как уже указывалось, для разработки способов определения коэффициентов, входящих в математическую формулировку задачи.

12.1.3. Показатели эффективности

Показатели эффективности применения сил, использования средств выявляются в соответствии с принципом Колмогорова, дополнительные показатели — исходя из цели моделирования.

В зависимости от цели моделирования оптимизироваться может основной показатель эффективности при ограничениях, наложенных либо на дополнительные показатели эффективности, либо на параметры, характеризующие обстановку и требования к условиям выполнения поставленной задачи; может оптимизироваться и какой-либо дополнительный показатель эффективности при ограничениях, наложенных на основной показатель эффективности. Во всех случаях целевая функция отражает цель моделирования.

Пример 12.12. В условиях примера 12.1 оптимизируется основной показатель эффективности — математическое ожидание числа комплектно перевезенных контейнеров при ограничениях, наложенных на условия работы транспортных средств.

Пример 12.13. В условиях примера 12.2 оптимизируется дополнительный показатель эффективности — расход боеприпасов. Основной показатель эффективности явно в задаче не

представлен. От него зависит норматив — потребный расход боеприпасов носителями различных типов при их действиях против различных объектов.

§ 12.2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

12.2.1. Общая математическая формулировка задачи линейного программирования

Особенностью задач линейного программирования является возможность дать общую для всех таких задач математическую формулировку: найти неизвестные x_j ($j = 1, 2, \dots, n$), которые обращают в минимум целевую функцию (линейную форму)

$$y = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (12.2.1)$$

при следующих линейных ограничениях:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = b_i; \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n = b_m; \end{array} \right\} \quad (12.2.2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (12.2.3)$$

Часто в подобных случаях линейные ограничения записываются в символической форме:

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{array} \right\} \quad (12.2.4)$$

В этих уравнениях параметры c_j носят название коэффициентов стоимости, параметры a_{ij} , b_i — коэффициентов. Смысл всех этих коэффициентов следует из оперативно-тактической постановки задачи. Из постановки задачи должно вытекать требование неотрицательности переменных ($x_j \geq 0$). Всегда число неизвестных n больше, чем число уравнений m ($n > m$). Совокупность неизвестных x_j ($j = 1, 2, \dots, n$), которые удовлетворяют ограничениям задач (12.2.2), (12.2.3) называется допустимым планом задачи, а тот из допустимых планов, который обращает в минимум целевую функцию (12.2.1), — оптимальным планом.

Методы решения задач линейного программирования — нахождения оптимальных планов — и разработанные на их основе конкретные процедуры нахождения планов предполагают, что математическая формулировка задачи имеет вид, точно соответствующий приведенному выше каноническому виду (см. (12.2.1)—(12.2.3)). Между тем особенности оптимизируемой задачи могут приводить к математическим формулировкам, отличным от канонической. Чтобы не множить число процедур решения задач, систематизировали возможные отличия в формулировках задач и нашли способы таких их модернизаций, чтобы получить каноническую математическую формулировку, в отношении которой можно применить уже существующую процедуру решения задачи. Рассмотрим

возможные особенности формулировок задач и способы сведения таких формулировок к канонической.

1. Условия задачи требуют максимизации, а не минимизации целевой функции:

$$y = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max. \quad (12.2.5)$$

Тогда знаки у коэффициентов стоимости c_j меняют на обратные и минимизируют целевую функцию:

$$y^* = \sum_{j=1}^n -c_j x_j \rightarrow \min. \quad (12.2.6)$$

Минимуму y^* будет соответствовать максимум $y = -y^*$.

2. По условиям задачи линейные ограничения (см. (12.2.2) или (12.2.4)) выражаются неравенствами вида \geq или \leq . В этом случае для соответствующих i -х ограничений в рассмотрение вводятся дополнительные неотрицательные неизвестные x_{n+i} . В случае \geq они вычитаются из левой части неравенства, в случае \leq — прибавляются. Коэффициенты при дополнительных неизвестных берутся равными единице, в целевую функцию дополнительные неизвестные не включаются. Неравенство типа

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad (12.2.7)$$

заменяется равенством

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i, \quad (12.2.8)$$

а неравенства типа

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (12.2.9)$$

— равенством

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (12.2.10)$$

Подобного рода преобразования математической формулировки задачи позволяют использовать для ее решения соответствующую стандартную процедуру.

Рассмотрим примеры математических формулировок задач.

Пример 12.14. В условиях примера 12.1 (см. также пример 12.10) требуется дать математическую формулировку задачи.

Предварительно условимся использовать обозначение x_{ij} — время, в течение которого транспортное средство j -го типа перевозит контейнеры i -го типа. Обозначим также через a_{ij} производительность транспортного средства j -го типа при перевозке контейнеров i -го типа. При таких обозначениях число контейнеров i -го типа, перевезенных транспортными средствами всех типов, может быть найдено с помощью выражения

$$a_{i1}x_{i1} + a_{i2}x_{i2} + a_{i3}x_{i3},$$

а суммарное время работы транспортного средства j -го типа составит

$$x_{1j} + x_{2j}.$$

Теперь дадим математическую формулировку задачи: найти неизвестные x_{ij} ($j = 1, 2, 3, i = 1, 2$), обращающие в максимум целевую функцию

$$y = a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + a_{13}x_{13}$$

при выполнении следующих ограничений:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + a_{13}x_{13} - a_{21}x_{21} - a_{22}x_{22} - a_{23}x_{23} &= 0; \\ x_{11} + x_{21} &= 24; \\ x_{12} + x_{22} &= 24; \\ x_{13} + x_{23} &= 24; \\ x_{ij} &\geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.2.11)$$

Обратим внимание: первое из ограничений задачи отражает требование комплектности перевозок, три последующих — непрерывность работы транспортных средств, условие $x_{ij} \geq 0$ — это требование недопустимости встречных перевозок; целевая функция может быть записана и в виде $y = a_{21}x_{21} + a_{22}x_{22} + a_{23}x_{23}$; требование максимизации целевой функции y может быть заменено требованием минимизации целевой функции $y^* = -a_{11}x_{11} - a_{12}x_{12} - a_{13}x_{13}$.

Пример 12.15. Дать математическую формулировку задачи в условиях примера 12.3 (см. также пример 12.11).

Введем обозначение $P_i(t_{ij}, x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, x_{i4})$ — вероятность обнаружения подводной лодки противника в i -м районе за заданное время t при выделенном j -м наряде сил. Будем иметь следующую формулировку: найти неизвестные x_{ij} ($i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, 4$), которые обращают в максимум целевую функцию — вероятность обнаружения подводной лодки в первом районе

$$y = P_1(t_{1j}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14})$$

при выполнении следующих ограничений:

$$\left. \begin{aligned} P_1(t_{1j}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}) &= P_2(t_{2j}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}); \\ P_2(t_{2j}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}) &= P_3(t_{3j}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}); \\ \sum_{i=1}^3 x_{i1} &= N_1; \\ \sum_{i=1}^3 x_{i2} &= N_2; \\ \sum_{i=1}^3 x_{i3} &= N_3; \\ \sum_{i=1}^3 x_{i4} &= N_4; \end{aligned} \right\}$$

* Читателю предлагается обосновать такую возможность.

$$x_{ij} \geq 0.$$

Требуется конкретизировать $P_i(t_{ij}, x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, x_{i4})$. Если сделать допущения о постоянной интенсивности поиска и независимых действиях разведчиков, то можно использовать известные выражения (см. гл. 17)

$$P_i(t_{ij}, x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, x_{i4}) = 1 - e^{-\sum_{j=1}^4 x_{ij} \gamma_{ij} t_{ij}},$$

где γ_{ij} — интенсивность поиска разведчиками j -го типа подводной лодки в i -м районе. Тогда будем иметь следующие целевую функцию и ограничения задачи:

$$\left. \begin{aligned} y &= 1 - e^{-\sum_{j=1}^4 x_{1j} \gamma_{1j} t_{1j}}; \\ 1 - e^{-\sum_{j=1}^4 x_{1j} \gamma_{1j} t_{1j}} &= 1 - e^{-\sum_{j=1}^4 x_{2j} \gamma_{2j} t_{2j}}; \\ 1 - e^{-\sum_{j=1}^4 x_{2j} \gamma_{2j} t_{2j}} &= 1 - e^{-\sum_{j=1}^4 x_{3j} \gamma_{3j} t_{3j}}; \\ \sum_{i=1}^3 x_{ij} &= N_j, \quad j = 1, 2, 3, 4; \\ x_{ij} &\geq 0. \end{aligned} \right\}$$

Однако полученная целевая функция и первые два ограничения задачи нелинейны. Осуществить их линеаризацию можно логарифмированием. После этого задача формулируется следующим образом: найти неизвестные x_{ij} ($i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, 4$), обращающие целевую функцию

$$y' = \ln(1 - y) = \ln e^{-\sum_{j=1}^4 x_{1j} \gamma_{1j} t_{1j}} = -\sum_{j=1}^4 x_{1j} \gamma_{1j} t_{1j}$$

в минимум при ограничениях

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 x_{1j} \gamma_{1j} t_{1j} - \sum_{j=1}^4 x_{2j} \gamma_{2j} t_{2j} &= 0; \\ \sum_{j=1}^4 x_{2j} \gamma_{2j} t_{2j} - \sum_{j=1}^4 x_{3j} \gamma_{3j} t_{3j} &= 0; \\ \sum_{i=1}^3 x_{i1} &= N_1; \\ \sum_{i=1}^3 x_{i2} &= N_2; \\ \sum_{i=1}^3 x_{i3} &= N_3; \\ \sum_{i=1}^3 x_{i4} &= N_4; \end{aligned}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Возвратимся теперь к принятым допущениям. Допущение о постоянной интенсивности поиска подводной лодки является в большинстве случаев оправданным (см. гл. 17). Что же касается допущения о независимом действии разведчиков, то оно должно быть утверждено командиром (офицером штаба) как корректива в оперативно-тактическую постановку задачи. В противном случае придется прибегнуть к другим методам оптимизации. Оперативно-тактическая постановка задачи должна также содержать сведения, необходимые для определения интенсивностей γ_{ij} (гл. 17) и времени t_{ij} поиска.

На этом примере можно видеть, что в ряде случаев содержание оперативно-тактической постановки задачи может уточняться в процессе формализованной постановки задачи, разработки ее математической формулировки.

12.2.2. Алгебраическая и геометрическая интерпретация методов решения задач линейного программирования

Алгебраическая и геометрическая интерпретация методов решения задач линейного программирования необходима для понимания рабочих процедур решения задач линейного программирования.

Алгебраическая интерпретация. Будем считать, что математическая формулировка задачи имеет вид, показанный в п. 12.2.1 (см. (12.2.1)—(12.2.3)). Существенными для понимания особенностей задачи являются следующие особенности математической формулировки задачи:

- 1) число неизвестных n превышает число линейных ограничений m ($n > m$);
- 2) целевая функция (12.2.1) должна быть минимизирована;
- 3) неизвестные x_j должны быть неотрицательны.

Подчеркнем, что оптимизация возможна только при условии $n > m$, так как при этом система линейных ограничений является неопределенной системой линейных уравнений, имеющей бесчисленное множество решений, в том числе удовлетворяющих всем ограничениям задачи (см. (12.2.2), (12.2.3)). Если $n = m$, то система линейных ограничений (12.2.2) является системой линейных уравнений и имеет единственное решение (при определителе, составленном из коэффициентов при неизвестных, отличном от нуля), так что об оптимизации не может быть и речи. Если $n < m$, то задача вообще не имеет решения, так как при этом нельзя найти неизвестные x_j , удовлетворяющие всем ограничениям.

Для нахождения одного из решений системы уравнений в случае $n > m$, как известно, необходимо считать ровно $n - m$ неизвестных известными и задать им численные значения. В полученной после этого системе число неизвестных равно числу уравнений. Эта система линейных уравнений может быть решена обычными методами.

Какие неизвестные следует “объявлять” известными и какие численные значения им следует задавать? Объявлять известными следует линейно независимые переменные. Никакая из таких неизвестных величин не может быть определена как линейная комбинация других. Формальный признак — отличие от нуля определителя, составленного из коэффициентов при этих неизвестных.

Из требования минимизации целевой функции (12.2.1) следует, что избранным таким образом неизвестным нужно задать как можно меньшие численные значения. При этом требование неотрицательности переменных (12.2.3) устанавливает, что эти переменные должны быть равны нулю.

Итак, выбраны $n - m$ переменных, которые приравнены к нулю. Далее следует найти решение полученной системы линейных уравнений и проанализировать его. Если решение содержит и отрицательные значения переменных, то оно исключается из дальнейшего рассмотрения как не отвечающее требованию неотрицательности переменных (12.2.3). Если же решение содержит только неотрицательные значения переменных, это значит, что получен допустимый план. Как полученный план (значения переменных x_j), так и соответствующее ему значение целевой функции запоминаются. Подобным образом находятся все допустимые планы. Затем из всех допустимых планов отбирается оптимальный, при котором целевая функция принимает минимальное значение. Такой метод решения задачи линейного программирования получил название ненаправленного перебора возможных планов. На практике этот метод не применяется, так как число возможных планов может быть очень большим — многие сотни, тысячи планов. Например, уже при $n = 10$ и $m = 6$ число возможных планов равно $k = C_n^m = C_{10}^6 = 210$. Поэтому потребовалась разработка методов направленного перебора, когда каждый последующий рассматриваемый план является обязательно допустимым и обязательно лучше предыдущего. При этом могут совершаться не шаги, а “прыжки” через многие допустимые планы в сторону оптимального плана. Чтобы представить себе процедуру направленного перебора, целесообразно рассмотреть геометрическую интерпретацию решения задачи линейного программирования, которая позволяет наглядно показать основные свойства этого решения. Такая интерпретация удобна, если $n - m = 2$.

Геометрическая интерпретация. Продолжим рассмотрение примера 12.14. Подставим значения коэффициентов a_{ij} (см. пример 12.1) в полученную математическую формулировку задачи. Обозначим ради краткости для контейнеров первого типа $x_{11} = x_1$; $x_{12} = x_2$; $x_{13} = x_3$; для контейнеров второго типа $x_{21} = x_4$; $x_{22} = x_5$; $x_{23} = x_6$.

Будем иметь следующую математическую формулировку задачи: найти неизвестные x_1, x_2, \dots, x_6 , которые обращают в максимум целевую функцию $y = 5x_1 + 6x_2 + 5x_3$ и удовлетворяют линейным ограничениям:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 5x_4 - 2x_5 - 3x_6 &= 0; \\ x_1 + x_4 &= 24; \\ x_2 + x_5 &= 24; \\ x_3 + x_6 &= 24; \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 6. \end{aligned} \tag{12.2.12}$$

В этой задаче число неизвестных $n = 6$ превосходит число линейных ограничений $m = 4$ на две единицы ($n - m = 2$). Чтобы решить эту задачу геометрически, необходимо выбрать две линейно независимые неизвестные в качестве координатных. Пусть это будут неизвестные x_1 и x_2 . Все остальные неизвестные и целевую функцию выразим через координатные величины. Используя уравнения (12.2.12), получим:

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= -1,25x_1 - x_2 + 30; \\ x_4 &= 24 - x_1; \\ x_5 &= 24 - x_2; \\ x_6 &= 1,25x_1 + x_2 - 6; \\ x_j &\geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, 6); \end{aligned} \right\} \tag{12.2.13}$$

$$y = -1,25x_1 + x_2 + 150 \rightarrow \max. \quad (12.2.14)$$

Из условия неотрицательности всех неизвестных находим следующие выражения, соответствующие линейным ограничениям (12.2.12):

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0; \\ x_2 &\geq 0; \\ x_3 = -1,25x_1 - x_2 - 30 &\geq 0; \\ x_4 = 24 - x_1 &\geq 0; \\ x_5 = 24 - x_2 &\geq 0 \\ x_6 = 1,25x_1 + x_2 - 6 &\geq 0. \end{aligned}$$

Эти выражения позволяют все ограничения выразить через координатные величины:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &\geq 0; \\ x_2 &\geq 0; \\ 1,25x_1 + x_2 &\leq 30; \\ x_1 &\leq 24; \\ x_2 &\leq 24; \\ 1,25x_1 + x_2 &\geq 6. \end{aligned} \right\} \quad (12.2.15)$$

Каждое из ограничений (12.2.15) разделяет координатную плоскость (x_1, x_2) на две части, в одной из которых находятся значения координатных величин, удовлетворяющие данному ограничению, а в другой — не удовлетворяющие.

Приравняем левые и правые части неравенств, нанесем прямые на график (рис. 12.1) и укажем штриховкой ту часть области, где не удовлетворяются условия (12.2.15). Замкнутая область $АВВГД$, образованная прямыми, соответствующими ограничениям, является областью допустимых значений координатных величин. Любая точка этой области соответствует допустимому решению, так как ее координаты удовлетворяют всем ограничениям.

В рассматриваемом примере областью допустимых решений является выпуклый многоугольник. Область называется выпуклой, если вместе с любыми двумя своими точками содержит и все точки отрезка, соединяющего их.

В самом общем случае областью допустимых решений (если она не пуста) является выпуклый многоугольник в $(n - m)$ -мерном пространстве.

Для нахождения среди всех допустимых решений оптимального воспользуемся выражением целевой функции через координатные величины: $y = -1,25x_1 + x_2 + 150$, преобразовав ее следующим образом:

$$-1,25x_1 + x_2 = y - 150. \quad (12.2.16)$$

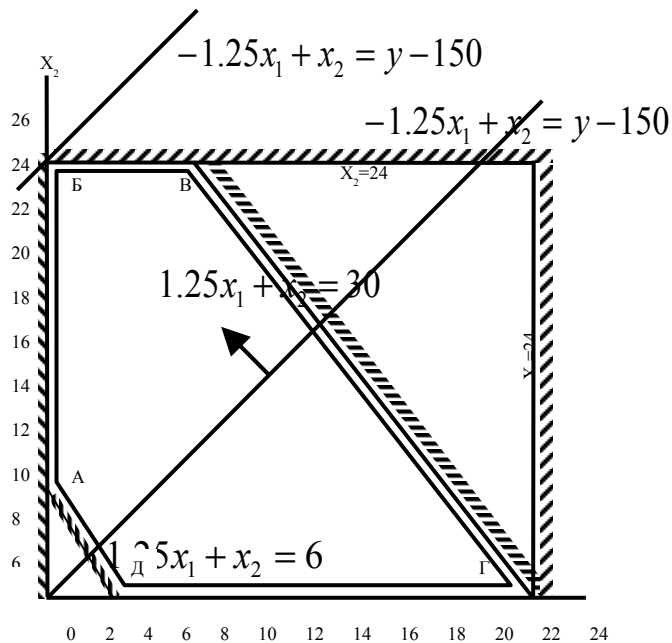


Рис.12.1

Различным значениям y соответствует семейство параллельных прямых с угловым коэффициентом $+1,25$, что, в свою очередь, соответствует углу $51^{\circ}20'$ относительно оси Ox . При увеличении y осуществляется параллельный сдвиг прямой влево, при уменьшении — вправо.

Осуществим параллельное перемещение прямой влево до тех пор, пока хотя бы одна ее точка будет находиться в области допустимых решений. В рассматриваемом примере максимальному значению целевой функции соответствует вершина многоугольника с координатами $x_1 = 0$, $x_2 = 24$. Подставив эти значения в выражения (12.2.13) и (12.2.14), найдем оптимальное решение задачи и значение целевой функции при этом решении:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0; & x_2 &= 24; \\ x_3 &= 1,25x_1 - x_2 + 30 = 6; \\ x_4 &= 24 - x_1 = 24; \\ x_5 &= 24 - x_2 = 0; \\ x_6 &= 1,25x_1 + x_2 - 6 = 18; \\ y &= -1,25x_1 + x_2 + 150 = 174. \end{aligned}$$

Таким образом, оптимальное решение соответствует одной из вершин многоугольника допустимых решений. В самом общем случае экстремальное значение целевой функции соответствует одной из вершин, ребер или граней выпуклого многоугольника области допустимых решений. Если целевая функция имеет тот же угловой коэффициент, что и граница допустимых решений, где достигается экстремум, то задача имеет бесчисленное множество оптимальных решений.

Из рассмотрения рис. 12.1 можно понять, каким образом процедуру нахождения минимума целевой функции использовать в случае, когда необходима ее максимизация. В п. 12.2.1 указывалось,

что для этого следует поменять знаки на обратные у коэффициентов стоимости c_j и искать минимум целевой функции

$$y^* = -y = 1,25x_1 - x_2 - 150.$$

Тогда

$$1,25x_1 - x_2 = y^* + 150.$$

Уменьшая y^* , смещаем прямую y^* влево. Минимальное значение $y^* = -174$ будет в точке с координатами $x_1 = 0, x_2 = 24$, где величина y будет максимальной: $y = -y^* = 174$.

Графическое решение задачи линейного программирования позволяет заметить еще одну закономерность. В каждой из вершин области допустимых решений m искомым величин положительны, а $n - m$ величин равно нулю. В рассматриваемом примере в вершине, соответствующей оптимальному решению, две величины x_1 и x_2 равны нулю, а остальные четыре — положительны. Если в вершине области допустимых планов число величин, равных нулю, больше чем $n - m$, то такой план называется вырожденным.

Обратим внимание: при алгебраической интерпретации решения задачи мы говорили о допустимых планах, которые запоминаются для последующей сравнительной оценки значений целевых функций с целью нахождения оптимального плана. Все эти планы соответствуют вершинам области допустимых планов: ровно $n - m$ неизвестных в них приравнены к нулю, а остальные m неотрицательных неизвестных вычислены.

Подведя итог анализу графического решения задачи линейного программирования, можно сделать следующие выводы:

- область допустимых решений (планов) является выпуклым многогранником в $(n - m)$ -мерном пространстве;
- оптимальное решение соответствует одной из вершин области допустимых решений (планов), в частном случае — нескольким вершинам и, значит, ребру, грани многогранника;
- в каждой вершине области допустимых решений (планов) m неизвестных отличны от нуля, а остальные — равны нулю. В вырожденном случае число неизвестных, равных нулю, может быть больше.

Эти свойства допустимых и оптимального планов задач линейного программирования широко используются в различных методах решения задач линейного программирования.

12.2.3. Решение задач линейного программирования методами направленного перебора. Симплексный метод (метод последовательного улучшения плана)

Для решения задач линейного программирования используются различные методы: симплексный метод (метод последовательного улучшения плана), венгерский метод, метод сокращения невязок, метод уточнения оценок, метод решения транспортных задач и др. Все эти методы отличаются друг от друга различными приемами выполнения этапов решения:

- нахождения начального плана (решения);
- проверки плана на оптимальность;
- перехода к улучшенному плану, если проверяемый план не оптимален.

Различные методы целесообразны для задач с теми или иными особенностями математических формулировок. Наиболее распространенными в оперативно-тактической области являются симплексный метод, рассматриваемый ниже, и метод решения транспортных задач (см. п. 12.2.4).

Во всех способах нахождения начального плана используется свойство оптимального плана — соответствие вершине многогранника допустимых планов. Напомним, что во всех вершинах этого многогранника ровно $n - m$ неизвестных равны нулю, а m неизвестных неотрицательны. Поэтому все требования исходной системы линейных ограничений сводятся к получению такой системы линейных уравнений, чтобы ее решение давало начальный план с указанными свойствами. Иногда начальный план заложен уже в исходной системе ограничений. Например, если вся система линейных ограничений имела вид неравенств типа (12.2.9), в которой все свободные члены b_i положительны, и была преобразована к виду линейных уравнений типа (12.2.10), то для получения начального плана достаточно положить, что все дополнительные переменные x_{n+i} ($i = 1, 2, \dots, m$) равны соответствующим свободным членам b_i , а все остальные неизвестные x_j приравнять к нулю:

$$\begin{aligned} x_{n+i} &= b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \\ x_j &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что при таких значениях неизвестных все уравнения системы превращаются в тождества. Это значит, что получено решение системы уравнений — допустимый план задачи. При этом план соответствует одной из вершин многоугольника решений. Но такой вид исходной системы ограничений — редкое исключение.

Рассмотрим нахождение начального плана способом полного исключения. Пусть исходная система ограничений имеет вид

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m + \dots + a_{1n}x_n &= b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m + \dots + a_{2n}x_n &= b_2; \\ \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mm}x_m + \dots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \right\} \quad (12.2.17)$$

Выбираются m линейно независимых неизвестных, называемых базисными. Допустим, что они имеют номера от $j = 1$ до $j = m$ (x_1, x_2, \dots, x_m). Далее путем несложных, но обычно трудоемких алгебраических преобразований [8, 9, 10] исходная система приводится к виду

$$\left. \begin{aligned} x_1 + \dots & + \alpha_{1m+1}x_{m+1} + \dots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1; \\ & x_2 + \dots & + \alpha_{2m+1}x_{m+1} + \dots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2; \\ & \dots & \dots & \dots \\ & & x_m + \alpha_{mm+1}x_{m+1} + \dots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m. \end{aligned} \right\} \quad (12.2.18)$$

В каждом уравнении этой системы содержится только одна базисная неизвестная. Она имеет коэффициент, равный единице, и отсутствует во всех других уравнениях. В таком виде система позволяет найти начальный план (опорное или базисное решение) непосредственно:

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta_1; \quad x_2 = \beta_2; \quad \dots; \quad x_m = \beta_m; \\ x_{m+k} &= 0 \quad (\text{для всех } k = 1, 2, \dots, n - m) \end{aligned}$$

при условии, что все $\beta_i \geq 0$.

Как видно, полученный план соответствует одной из вершин многоугольника решений. Неизвестные x_1, x_2, \dots, x_m составляют базис задачи, остальные неизвестные называются небазисными. К базисным переменным предъявляются два требования: они должны быть линейно независимы и неотрицательны.

Стандартная процедура для ЭВМ нахождения начального плана способом полного исключения довольно сложна. На практике чаще прибегают к способу искусственного базиса. Существо способа искусственного базиса состоит в том, что вводятся вспомогательные неизвестные с коэффициентом, равным единице, и прибавляются к левым частям линейных уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \quad +x_{n+1} \quad \quad \quad = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \quad \quad \quad +x_{n+2} \quad \quad \quad = b_2; \\ \dots\dots\dots \dots\dots \dots\dots \dots\dots \dots\dots \dots\dots \dots\dots \dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \quad \quad \quad +x_{n+m} \quad \quad \quad = b_m. \end{array} \right\} \quad (12.2.19)$$

Одновременно с введением вспомогательных переменных в линейные ограничения их необходимо ввести и в целевую функцию. В зависимости от того, максимизируется или минимизируется целевая функция, коэффициенты M при вспомогательных переменных берутся со знаком “минус” или “плюс” соответственно.

Чтобы при дальнейшем решении задачи вспомогательные переменные при переходе к новым планам быстро исключались, коэффициенты по абсолютному значению должны быть достаточно большими:

$$\begin{aligned} y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + M \sum_{i=1}^m x_{n+i} &\rightarrow \min; \\ y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n - M \sum_{i=1}^m x_{n+i} &\rightarrow \max. \end{aligned} \quad (12.2.20)$$

В качестве начального плана в случае искусственного базиса может служить следующий план:

$$\begin{aligned} x_{n+1} = b_1; \quad x_{n+2} = b_2; \quad \dots, \quad x_{n+m} = b_m; \\ x_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (12.2.21)$$

Чтобы окончательное решение имело смысл, каждая вспомогательная переменная в заключительном плане должна обращаться в нуль. Если хотя бы одна из вспомогательных переменных войдет в базис с положительным значением, то задача не имеет решения, так как условия задачи не будут выполняться.

Способ искусственного базиса является трудоемким. Однако при применении электронно-вычислительной техники этот способ позволяет использовать один и тот же алгоритм для нахождения как начального, так и оптимального плана, что и делает его рациональным.

Если часть линейных ограничений задана в виде неравенств вида \leq , число вспомогательных величин может быть уменьшено на число таких неравенств. Тогда в начальный план наравне со вспомогательными войдут и дополнительные величины, обращающие неравенства в равенства. Объем расчетов в этом случае может быть сокращен.

Вспомогательные величины, вводимые для создания искусственного базиса, не следует путать с дополнительными величинами, вводимыми при сведении задачи к каноническому виду (см. (12.2.8), (12.2.10)).

Проверка плана на оптимальность практически осуществляется одновременно с отысканием улучшенного плана. Если окажется, что план улучшить нельзя, значит, он оптимален.

Допустим, с помощью одного из существующих методов получен начальный план

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = \beta_1; \quad x_2 = \beta_2; \quad \dots, \quad x_m = \beta_m; \\ x_{m+1} = x_{m+2} = \dots = x_n = 0. \end{array} \right\} \quad (12.2.22)$$

Для этого плана целевая функция приобретает значение

$$y = \sum_{j=1}^n c_j x_j = \sum_{j=1}^m c_j \beta_j. \quad (12.2.23)$$

Все дальнейшие рассуждения будем вести для невырожденного случая, когда все базисные величины положительны. При этом плану (12.2.22) соответствует одна из вершин области допустимых планов. Алгоритм симплексного метода применяется и для вырожденного случая.

Чтобы определить, является ли план (12.2.22) оптимальным, а если нет, то найти другой, улучшенный план, совершим переход от принятого базиса к другому. Для этого сохраним $m - 1$ величин, входящих в базис, а одну величину за номером s ($1 \leq s \leq m$) выведем из базиса. На ее место введем в базис одну из небазисных величин за номером j ($m + 1 \leq j \leq n$).

Чтобы отличать значения величин x_1, x_2, \dots, x_n в первоначальном и новом планах, будем в новом плане обозначать их x'_1, x'_2, \dots, x'_n . В старом плане было $x_s > 0$, $x_j = 0$, в новом плане требуется $x'_s = 0$, $x'_j > 0$. Это обстоятельство, а также требование, чтобы новый базис x'_i ($i = 1, 2, \dots, j, \dots, m$) удовлетворял системе линейных ограничений, определяют способ нахождения x'_j .

Рассмотрим систему (12.2.18). Поскольку требуется, чтобы было $x'_s = 0$, а $x'_j > 0$, уравнение, содержащее x'_s , необходимо преобразовать:

$$x'_s = \beta_s - \alpha_{sj} x'_j = 0.$$

Отсюда

$$x'_j = \frac{\beta_s}{\alpha_{sj}}. \quad (12.2.24)$$

Но тогда изменится весь предыдущий план. Из (12.2.18) получим:

$$\left. \begin{array}{l} x'_1 = \beta_1 - \alpha_{1j} x'_j; \\ x'_2 = \beta_2 - \alpha_{2j} x'_j; \\ \dots \dots \dots \\ x'_s = \beta_s - \alpha_{sj} x'_j; \\ \dots \dots \dots \\ x'_m = \beta_m - \alpha_{mj} x'_j. \end{array} \right\} \quad (12.2.25)$$

Так как в новом плане все неизвестные x_i должны быть положительны, требуется, чтобы

$$\beta_i - \alpha_{ij}x'_j > 0; \quad x'_j < \frac{\beta_i}{\alpha_{ij}}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad i \neq s,$$

т. е.

$$\frac{\beta_s}{\alpha_{sj}} < \frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} \quad (12.2.26)$$

для всех i от 1 до m , не равных s (см. также (12.2.24)). Значит, не всякую величину можно исключить из базиса.

Если $\alpha_{sj} < 0$, то x'_j окажется отрицательным, что не удовлетворяет условиям задачи. Поэтому для исключения из базиса s -й величины должно быть $\alpha_{sj} > 0$. Кроме того, из неравенства (12.2.26) следует, что из всех положительных отношений $\frac{\beta_i}{\alpha_{ij}}$, если их несколько, необходимо выбрать наименьшее $\frac{\beta_s}{\alpha_{sj}}$. В противном случае какие-либо новые базисные величины, определяемые с помощью выражений (12.2.25), окажутся отрицательными.

Подставим полученное по формуле (12.2.24) значение вводимой в базис величины x'_j в целевую функцию (12.2.23), учтем выражения (12.2.25), найдем новое значение целевой функции

$$\begin{aligned} y' &= \sum_{i=1}^m c_i x'_i + c_j x'_j = \sum_{i=1}^m c_i (\beta_i - \alpha_{ij} x'_j) + c_j x'_j = \\ &= \sum_{i=1}^m c_i \beta_i - x'_j \left(\sum_{i=1}^m c_i \alpha_{ij} - c_j \right) = y - x'_j \delta_j, \end{aligned}$$

где

$$\delta_j = \sum_{i=1}^m c_i \alpha_{ij} - c_j. \quad (12.2.27)$$

Подставив значение x'_j , окончательно получим

$$y' = y - \frac{\beta_s}{\alpha_{sj}} \delta_j. \quad (12.2.28)$$

Так как $\frac{\beta_s}{\alpha_{sj}} > 0$, то знак изменения целевой функции определяется знаком δ_j :

$$\left. \begin{aligned} y' &> y && \text{при } \delta_j < 0; \\ y' &= y && \text{при } \delta_j = 0; \\ y' &< y && \text{при } \delta_j > 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.2.29)$$

Как видно, для улучшения плана, уменьшения целевой функции предыдущего плана, необходимо вводить в новый базис величину x_j , соответствующую наибольшему положительному

значению δ_j . Если среди значений δ_j нет положительных, то согласно (12.2.29) план не может быть улучшен, а следовательно, он оптимален. Наибольшему улучшению плана соответствует введение в базис такой величины, для которой $\frac{\beta_s}{\alpha_{sj}} \delta_j$ принимает наибольшее положительное значение.

Практически ради простоты ограничиваются выбором величины, для которой δ_j принимает наибольшее положительное значение, так как это все равно приводит к оптимальному плану в результате небольшого числа шагов. Параметр δ_j получил название критерия оптимальности. Обычно сперва определяют, какую величину включить в базис, а затем — какую исключить из базиса.

Алгоритм симплексного метода проверки на оптимальность и перехода к улучшенному плану продемонстрируем на примере 12.1, для которого была показана формализованная постановка задачи (пример 12.10), математическая формулировка задачи в общем виде (пример 12.14), геометрическая интерпретация решения задачи линейного программирования (см. п.12.2.2). Сохраним символику математической формулировки задачи из п. 12.2.2: x_1, x_2, x_3 — время работы транспортных средств первого, второго, третьего типов при перевозке контейнеров первого типа; x_4, x_5, x_6 — время работы тех же транспортных средств при перевозке контейнеров второго типа.

В математической формулировке задачи (12.2.12) заменим требование максимизации целевой функции y требованием минимизации целевой функции

$$y^* = -5x_1 - 6x_2 - 5x_3.$$

Опустим описание нахождения начального плана. Будем считать, что он найден и соответствует вершине A области допустимых планов (см. рис. 12.1), в которой $x_1 = 0, x_2 = 6, x_3 = 24, x_4 = 24, x_5 = 18, x_6 = 0$. В этом плане базисными величинами являются x_2, x_3, x_4, x_5 , а небазисными — величины x_1, x_6 .

Для изложения рассматриваемой процедуры симплексного метода рассмотрим табличный способ ее реализации.

Т а б л и ц а 12.3

i	j	1	2	3	4	5	6	β_i	$\frac{\beta_i}{\alpha_{ij}}$
	c_j	-5	-6	-5	0	0	0		
5	0	-1,25	0	0	0	1	1	18	18
2	-6	1,25	1	0	0	0	-1	6	-6
3	-5	0	0	1	0	0	1	24	24
4	0	1	0	0	1	0	0	24	∞
δ_j		-2,5	0	0	0	0	1	$y^* = -156$	

В табл. 12.3 в столбцах 1, 2, 3, 4, 5, 6, β_i и строках 5, 2, 3, 4 записаны ограничения задачи (см. (12.2.18)). При этом индекс j приписывается всем неизвестным, индекс i — неизвестным, вошедшим в базис на данном шаге: c_j, c_i — коэффициенты стоимости в целевой функции при всех неизвестных и

базисных неизвестных соответственно; на пересечении i -й строки и j -го столбца находятся коэффициенты α_{ij} при неизвестных системы ограничений; β_i — правые части системы ограничений; δ_j — критерий оптимальности.

Величины δ_j могут быть рассчитаны по формуле (12.2.27) с помощью табл. 12.3. Для этого необходимо поэлементно перемножить столбец c_i с элементами α_{ij} столбца, соответствующего значению j , сложить полученные произведения и из суммы вычесть значение c_j , соответствующее данному столбцу.

Значение целевой функции также может быть вычислено с помощью табл. 12.3. Для этого необходимо умножить c_i на соответствующие значения β_i и полученные произведения сложить.

Определим значения δ_j для принятого начального плана. У базисных величин будем иметь всегда $\delta_j = 0$. Из числа небазисных величин в рассматриваемом примере $\delta_6 > 0$. Значит, план неоптимален, шестую неизвестную величину надо вводить в базис.

Для определения величины, которую необходимо исключить из базиса, найдем отношения $\frac{\beta_i}{\alpha_{i6}}$ и выберем наименьшее положительное значение. Оно соответствует x_5 . Следовательно, x_6 необходимо вводить вместо x_5 .

Чтобы найти новый план, требуется преобразовать систему линейных ограничений (табл. 12.4).

Т а б л и ц а 12.4

j		1	2	3	4	5	6	β_i
i	c_j	-5	-6	-5	0	0	0	
	c_i							
6	0	-1,25	0	0	0	1	1	18
2	-6	0	1	0	0	1	0	24
3	-5	1,25	0	1	0	-1	0	6
4	0	1	0	0	1	0	0	24
δ_j		-1,25	0	0	0	-1	0	$y^* = -174$

1. В том уравнении, где находилась исключаемая из базиса величина x_5 , следует получить коэффициент, равный 1, у новой базисной величины x_6 (т. е. $\alpha_{66} = 1$). Это значит, что коэффициент 1 должен быть получен на пересечении строки $i = 6$ и столбца $j = 6$ табл. 12.4. Для этого требуется все коэффициенты α_{sj} и β_5 табл. 12.3 разделить на α_{56} (в рассматриваемом примере коэффициент α_{56} уже равен 1).

2. Во всех остальных уравнениях коэффициенты у величины x_6 должны быть равны нулю. Это значит, что должны быть равны нулю все элементы α_{i6} столбца $j = 6$ табл. 12.4. Для этого следует в табл. 12.3 преобразованную первую строку (см. п. 1) поэлементно прибавить ко второй строке и поэлементно вычесть из третьей строки; четвертую строку оставить без изменений.

Таблица 12.4 является результатом описанных преобразований табл. 12.3. В табл. 12.4 все $\delta_j \leq 0$, и, следовательно, дальнейшее улучшение плана невозможно.

Таким образом, план $x_1 = 0, x_2 = 24, x_3 = 6, x_4 = 24, x_5 = 0, x_6 = 18$ является оптимальным. Для этого плана целевая функция $y^* = -174$, а значит $y = 174$.

Если перейти к первоначальной постановке задачи максимизации целевой функции примера 12.1, то оптимальный план обеспечивает перевозку 174 изделий в комплекте.

Из анализа рис. 12.1 следует, что, улучшив начальный план, мы перешли из вершины A области допустимых планов в вершину B этой области, миновав вершину V . Как видно, оптимальный план, полученный симплексным методом, совпал с планом, полученным графически.

При использовании в качестве начального плана искусственного базиса процедура расчетов принципиально не меняется. Как уже указывалось, вспомогательные неизвестные вводятся в целевую функцию с коэффициентами стоимости c_{n+i} , c'_i , которые значительно превышают коэффициенты стоимости c_j реальной задачи. Алгоритм симплексного метода гарантирует, что:

а) сначала из плана (и из рассмотрения вообще) будут выведены все вспомогательные переменные (для этого будет использовано требование минимизации целевой функции и большие величины коэффициентов стоимости c'_i);

б) следующий за этим план будет допустимым и будет соответствовать одной из вершин многогранника допустимых планов (т. е. в этом плане будет m неотрицательных переменных, $n - m$ нулевых переменных, план будет обращать линейные уравнения в тождества).

Рассмотрим прием использования искусственного базиса при решении примера 12.1. Напомним математическую формулировку задачи: найти неизвестные x_j ($j = 1, 2, \dots, 6$), которые обращают в максимум целевую функцию $y = 5x_1 + 6x_2 + 5x_3$ или в минимум целевую функцию $y^* = -5x_1 - 6x_2 - 5x_3$ и удовлетворяют системе линейных ограничений (см. (12.2.12)):

$$\left. \begin{aligned} 5x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 5x_4 - 2x_5 - 3x_6 &= 0; \\ x_1 &+ x_4 &= 24; \\ &x_2 &+ x_5 &= 24; \\ &&x_3 &+ x_6 &= 24; \\ &&&x_j \geq 0. \end{aligned} \right\}$$

Для нахождения начального плана введем четыре вспомогательные переменные x_7, x_8, x_9, x_{10} (по числу линейных ограничений). Присвоим им коэффициенты стоимости, равные, допустим 100 ($c'_i = 100$, $i = 7, 8, 9, 10$). Математическая формулировка задачи будет иметь следующий вид: найти неизвестные x_1, x_2, \dots, x_{10} , обращающие в минимум целевую функцию $y^* = -5x_1 - 6x_2 - 5x_3 + 100x_7 + 100x_8 + 100x_9 + 100x_{10}$ и удовлетворяющие линейным ограничениям:

$$\left. \begin{aligned} 5x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 5x_4 - 2x_5 - 3x_6 + x_7 &= 0; \\ x_1 &+ x_4 &+ x_8 &= 24; \\ &x_2 &+ x_5 &+ x_9 &= 24; \\ &x_3 &+ x_6 &+ x_{10} &= 24; \\ &&x_j \geq 0. \end{aligned} \right\}$$

В качестве начального возьмем план

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0;$$

$$x_7 = 0; x_8 = x_9 = x_{10} = 24.$$

При этом $y^* = 7200$.

Проверим этот план на оптимальность, найдем улучшенный план. Для удобства иллюстративных вычислений занесем ограничения задачи в табл. 12.5, аналогичную по форме табл. 12.3, 12.4.

Найдем теперь величины δ_j по правилу (12.2.27) и убедимся, что план неоптимален, так как есть положительные δ_j . В новый план следует ввести неизвестную x_2 (δ_2 — большая из числа положительных δ_j), из плана следует исключить x_7 (отношение $\frac{\beta_7}{\alpha_{72}}$ меньше неотрицательное из всех $\frac{\beta_i}{\alpha_{i2}}$)*.

Таблица 12.5

<i>i</i>	<i>j</i> <i>c_j</i> <i>c_i</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	β_i
		7	100	5	6	5	-5	-2	-3	1	0	
8	100	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	24
9	100	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	24
10	100	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	24
δ_j		605	706	605	0	0	0	0	0	0	0	$y^* = 7200$

Читатель может убедиться, что, следуя алгоритму симплексного метода (см. также примеры его использования при получении табл. 12.3, 12.4), он будет последовательно получать планы, помещенные далее в табл. 12.6—12.10.

План, соответствующий табл. 12.9 (и вершине *B* области допустимых планов — см. рис. 12.1), уже не содержит вспомогательных величин. В этом плане $x_1 = 0$, $x_2 = 24$, $x_3 = 6$, $x_4 = 24$, $x_5 = 0$, $x_6 = 18$. Оптимальный план, разумеется, тот же, что был получен геометрически (см. рис. 12.1) и симплексным методом (см. табл. 12.4). Этот план и значение целевой функции содержатся в табл. 12.10.

Таблица 12.6

<i>i</i>	<i>j</i> <i>c_j</i> <i>c_i</i>	1	2	3	4	5	6	8	9	10	β_i
		2	-6	5/6	1	5/6	-5/6	-1/3	-1/2	0	
8	100	1	0	0	1	0	0	1	0	0	24
9	100	-5/6	0	-5/6	5/6	1 ^{1/3}	1/2	0	1	0	24
10	100	0	0	1	0	0	1	0	0	1	24
δ_j		100/6	0	100/6	<u>1130</u>	<u>812</u>	<u>918</u>	0	0	0	$y^* = 7200$

* При исключении из базиса вспомогательных переменных можно ориентироваться не на положительные, а на неотрицательные отношения $\frac{\beta_i}{\alpha_{ij}}$.

				6	6	6			
--	--	--	--	---	---	---	--	--	--

Вводим в базис x_4 , исключаем из базиса x_8 .

Таблица 12.7

i	j	1	2	3	4	5	6	9	10	β_i
	c_j	-5	-6	-5	0	0	0	100	100	
2	-6	10/6	1	5/6	0	-1/3	-1/2	0	0	20
4	0	1	0	0	1	0	0	0	0	24
9	100	-10/6	0	-5/6	0	4/3	1/2	1	0	24
10	100	0	0	1	0	0	1	0	1	24
δ_j		-1030/-6	0	100/6	0	812/6	918/6	0	0	$y^* = 2680$

Вводим в базис x_6 , исключаем из базиса x_9 .

Таблица 12.8

i	j	1	2	3	4	5	6	10	β_j
	c_j	-5	-6	-5	0	0	0	100	
1	2	3	4	5	6	7	8		10
2	-6	0	1	0	0	1	0	0	24
4	0	1	0	0	1	0	0	0	24
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6	0	$-3^{1/3}$	0	$-1^{2/3}$	0	$2^{2/3}$	1	0	8
10	100	$3^{1/3}$	0	$2^{2/3}$	0	$-2^{2/3}$	0	1	16
δ_j		1015/3	0	815/3	0	-818/3	0	0	$y^* = 1456$

Вводим в базис x_1 , исключаем из базиса x_{10} .

Таблица 12.9

i	j	1	2	3	4	5	6	β_i
	c_j	-5	-6	-5	0	0	0	
2	-6	0	1	0	0	1	0	24

4	0	0	0	-8/10	1	8/10	0	216/10
6	0	0	0	1	0	0	1	24
1	-5	1	0	8/10	0	-8/10	0	48/10
δ_j		0	0	1	0	-2	0	$y^* = -168$

Включаем в план x_3 , исключаем из плана x_1 .

Т а б л и ц а 12.10

	j	1	2	3	4	5	6	
i	c_j	-5	-6	-5	0	0	0	β_i
	c^i							
2	-6	0	1	0	0	1	0	24
4	0	1	0	0	1	0	0	24
6	0	-10/8	0	0	0	1	1	18
3	-5	10/8	0	1	0	-1	0	6
δ_j		-10/8	0	0	0	-1	0	$y^* = -174$

План оптимален: все δ_j неположительны, $y = -y^* = 174$.

Решение задачи, полученное симплексным методом, всегда нецелочисленное. В зависимости от реальной задачи это может потребовать округления результата (например, при решении задач оптимизации целераспределения, выделяемого наряда сил и т. д.). Результаты округления целесообразно проверять с помощью целевой функции. В ряде случаев, в частности при задачах с большим числом неизвестных, способы округления могут быть неочевидными и приходится прибегать к специальным методам.

Излагаемые далее методы решения транспортных задач линейного программирования дают всегда целочисленное решение. Однако не все реальные задачи могут быть сформулированы необходимым образом.

§ 12.3. ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ТРАНСПОРТНЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Свое название этот обширный класс задач линейного программирования получил по первоначальной цели их применения — оптимизации перевозок. Математические формулировки указанных задач обладают особенностями, которые сделали целесообразной разработку специального метода их решения, хотя они могут быть решены и симплексным методом. В настоящее время метод решения транспортных задач линейного программирования применяется также при оптимизации назначений, целераспределения, развертывания сил, пополнения запасов, выборе кратчайшего маршрута и т. д. Этими методами могут быть решены такие различные по содержанию задачи, как приведенные в примерах 12.2, 12.5—12.7. Ниже для определенности будут рассмотрены задачи оптимизации перевозок. Они делятся на два подкласса — транспортные задачи по критерию стоимости и по критерию времени. В транспортных задачах по критерию стоимости минимизируется стоимость перевозок. Эта стоимость может быть выражена в затратах средств, топлива, износе механизмов транспортных средств, экологическом ущербе и т. д. В транспортных

задачах по критерию времени минимизируется время выполнения плана перевозок — от момента его начала и до завершения.

12.3.1. Транспортные задачи по критерию стоимости

Формализованная постановка задачи. Имеется k пунктов отправления $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_k$. В этих пунктах сосредоточены запасы какого-то однородного продукта в количестве $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_k$ единиц груза в каждом пункте соответственно. Имеется l пунктов назначения $B_1, B_2, \dots, B_j, \dots, B_l$, в каждый из которых необходимо перевезти $b_1, b_2, \dots, b_j, \dots, b_l$ единиц однородного груза из пунктов отправления. Предполагается, что сумма всех заявок на поставки равна сумме всех запасов

$$\sum_{i=1}^k a_i = \sum_{j=1}^l b_j. \quad (12.3.1)$$

Задана стоимость c_{ij} перевозки единицы груза из i -го пункта отправления в j -й пункт назначения для всех i и j . Требуется составить план перевозок, обеспечивающий выполнение всех заявок с минимальной стоимостью перевозок. При этом обратные перевозки запрещаются. Схематически транспортная задача показана на рис. 12.2.

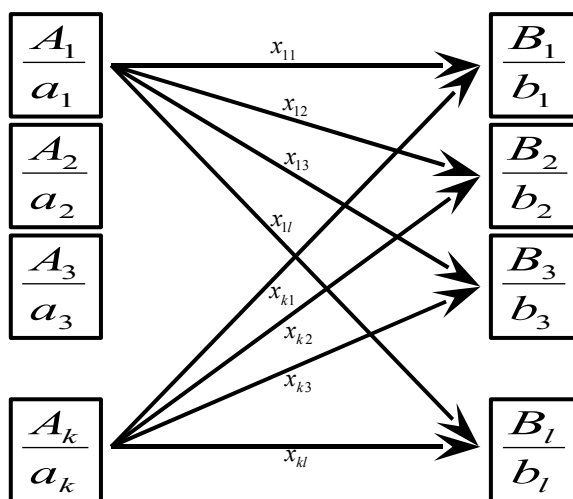


Рис. 12.2

Математическая формулировка задачи. Число единиц однородного груза, перевозимого из i -го пункта отправления в j -й пункт назначения, обозначим через x_{ij} . С учетом принятых обозначений транспортная задача формулируется следующим образом: найти неизвестные x_{ij} ($i = 1, 2, \dots, k$; $j = 1, 2, \dots, l$), обращающие суммарную стоимость перевозок

$$y = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l c_{ij} x_{ij} \quad (12.3.2)$$

в минимум при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^k x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, l; \quad (12.3.3)$$

$$\sum_{j=1}^l x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, k; \quad (12.3.3')$$

$$\sum_{i=1}^k a_i = \sum_{j=1}^l b_j; \quad (12.3.4)$$

$$x_{ij} \geq 0.$$

Первые две группы ограничений соответствуют требованию удовлетворения потребности каждого пункта назначения и необходимости вывоза всего продукта из пунктов отправления. Условие $x_{ij} \geq 0$ соответствует требованию, запрещающему обратные перевозки.

Во многих случаях условие

$$\sum_{i=1}^k a_i = \sum_{j=1}^l b_j$$

не соблюдается, так как запасы могут быть больше потребностей или потребности — выше запасов. В этих случаях для приведения задачи к виду (12.3.2), (12.3.3) необходимо ввести так называемые фиктивные пункты назначения и отправления с потребностями или запасами, равными разностям

$$b_{l+1} = \sum_{i=1}^k a_i - \sum_{j=1}^l b_j;$$

$$a_{k+1} = \sum_{j=1}^l b_j - \sum_{i=1}^k a_i.$$

Если нам безразлично, в каком пункте останется однородный продукт, то стоимость его перевозки в фиктивный пункт назначения берется равной нулю: $c_{i,l+1} = 0$. Если небезразлично, то размеры остатков продукта в каждом пункте отправления могут регулироваться стоимостью штрафа $c_{i,l+1}$ за единицу невывезенного продукта. Чем выше стоимость, тем больше продукта останется в данном пункте отправления. Аналогичным образом определяются стоимости перевозок из фиктивного пункта отправления. В этом случае также может регулироваться недодача потребного продукта в пункты назначения.

Прежде чем приступить к рассмотрению метода решения транспортной задачи, остановимся на особенностях математической формулировки задачи. Согласно равенствам (12.3.3) гарантируются полный вывоз всех грузов из всех пунктов отправления и полное удовлетворение потребностей всех пунктов назначения. Кроме того, в уравнениях (12.3.3) коэффициенты при неизвестных равны 1, а величины a_i и b_j всегда положительны. Если хотя бы одна из этих величин равна нулю, то этот пункт отправления или назначения исключается из рассмотрения. Особенностью является и то, что из $k + l$ уравнений (12.3.3) только $k + l - 1$ уравнений линейно независимы, так как все уравнения связаны условием баланса (12.3.4), позволяющим любое уравнение выразить через остальные. Обязательным условием решаемости задачи и является условие баланса.

Все эти особенности задач транспортного типа и дали возможность разработать для их численного решения специальные методы.

Метод решения задачи. Этапами решения транспортной задачи, как и при симплексном методе, являются нахождение начального плана, проверка плана на оптимальность, переход к улучшенному плану, если план не оптимален.

Нахождение начального плана. Существует несколько способов нахождения начального плана: северо-западного угла, наименьшего элемента. Более простым является способ северо-западного угла, который и будет рассмотрен. Условия задачи можно записать в виде табл. 12.11.

Т а б л и ц а 12.11

Пункты отправления	Пункты назначения				
	B_1	B_2	...	B_l	a_i
A_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1l}	a_1
A_2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2l}	a_2
...
A_k	x_{k1}	x_{k2}	...	x_{kl}	a_k
b_j	b_1	b_2	...	b_l	$\sum_{i=1}^k a_i = \sum_{j=1}^l b_j$

В клетках $A_i B_j$ таблицы помещаются планируемые перевозки x_{ij} из i -го пункта отправления в j -й пункт назначения. Часть из планируемых перевозок равна нулю, часть представляет собой положительные величины.

В соответствии с ограничениями (12.3.3) сумма элементов i -й строки должна составлять $\sum_{j=1}^l x_{ij} = a_i (i = 1, 2, \dots, k)$, что означает требование: все грузы из i -го пункта отправления должны быть вывезены. Сумма элементов j -го столбца должна составить $\sum_{i=1}^k x_{ij} = b_j (j = 1, 2, \dots, l)$, что означает требование: все необходимые в j -м пункте назначения грузы должны быть туда доставлены. Так как только $k + l - 1$ уравнений линейно независимы, то число положительных перевозок (когда $x_{ij} > 0$) равно $k + l - 1$ (для невырожденной задачи).

Алгоритм построения опорного плана состоит из нескольких шагов, на каждом из которых заполняется либо строка, либо столбец таблицы.

Нахождение опорного плана начинается с левого верхнего (“северо-западного”) элемента плана

$$x_{11} = \min(a_1; b_1).$$

Если $a_1 < b_1$, т. е. $x_{11} = a_1$, то в другие клетки данной строки в дальнейшем назначения производить нельзя; если $a_1 \geq b_1$, т. е. $x_{11} = b_1$, то дальнейшие назначения нельзя производить в первый столбец. Если $a_1 < b_1$, то следующее назначение производится во вторую строку. При этом $x_{21} = \min(a_2; b_1 - a_1)$. Если $a_2 < b_1 - a_1$, т. е. $x_{21} = a_2$, то заполнение других клеток второй строки в дальнейшем исключается; если $a_2 \geq b_1 - a_1$, т. е. $x_{21} = b_1 - a_1$, то в дальнейшем исключается заполнение первого столбца, а следующее назначение производится на пересечении второй строки и второго столбца. При этом

$$x_{22} = \min(a_1 + a_2 - b_1; b_2).$$

В дальнейшем по этому же алгоритму находятся все элементы начального плана.

Полученный план является допустимым, так как алгоритм построен на выполнении всех условий задачи.

Проверка разработанного плана включает: удовлетворение плана условиям (12.3.3), (12.3.3'), установление факта наличия в плане $k + l - 1$ положительных перевозок.

Проверка плана на оптимальность. Наиболее распространенным методом решения транспортных задач по критерию стоимости является метод потенциалов. Введем в рассмотрение вспомогательные числа u_1, u_2, \dots, u_k и v_1, v_2, \dots, v_l . Для любого допустимого плана перевозок

величина $\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l (u_i + v_j)x_{ij}$ сохраняет одно и то же постоянное значение. Действительно,

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l (u_i + v_j)x_{ij} = \sum_{i=1}^k u_i \sum_{j=1}^l x_{ij} + \sum_{j=1}^l v_j \sum_{i=1}^k x_{ij} = \sum_{i=1}^k u_i a_i + \sum_{j=1}^l v_j b_j = C \quad (12.3.5)$$

для любого допустимого плана перевозок.

Допустим, что при некотором плане перевозок удалось найти такие числа u_i и v_j , что их сумма для положительных (в этом плане) перевозок равна c_{ij} , а для нулевых перевозок — не превосходит c_{ij} , т. е.

$$\begin{aligned} u_i + v_j &= c_{ij} & \text{при } x_{ij} > 0; \\ u_i + v_j &\leq c_{ij} & \text{при } x_{ij} = 0. \end{aligned} \quad (12.3.6)$$

План перевозок, для которого существует система (12.3.6) потенциалов u_i, v_j , называют *потенциальным планом*. Сумму $u_i + v_j$ называют в отличие от стоимости c_{ij} *псевдостоимостью* \bar{c}_{ij} .

Условие (12.3.6) для потенциального плана можно записать в виде

$$\begin{aligned} \bar{c}_{ij} - c_{ij} &= 0 & \text{при } x_{ij} > 0; \\ \bar{c}_{ij} - c_{ij} &\leq 0 & \text{при } x_{ij} = 0. \end{aligned} \quad (12.3.7)$$

Общая стоимость перевозок в потенциальном плане равна C . Действительно, в (12.3.2) можно заменить c_{ij} на $u_i + v_j$, так как слагаемые, для которых $u_i + v_j < c_{ij}$, равны нулю.

Если изменить потенциальный план так, чтобы некоторые положительные перевозки стали нулевыми, а взамен их некоторые нулевые перевозки — положительными (т. е. изменить базис), то новый план не будет потенциальным, так как при некоторых $x'_{ij} > 0$ будет $u_i + v_j \leq c_{ij}$. При тех же u_i, v_j получим общую стоимость перевозок в измененном плане

$$y' = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l c_{ij} x'_{ij} \geq \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l (u_i + v_j) x'_{ij} = C$$

или $y' \geq y$.

Таким образом, общая стоимость перевозок для любого плана не может быть меньше, чем для потенциального плана. Иначе говоря, потенциальный план оптимален. Если же имеется хотя бы одно значение $x_{ij} = 0$, для которого $\bar{c}_{ij} - c_{ij} > 0$, то план перевозок не оптимален, его можно улучшить. На этом основан алгоритм проверки плана на оптимальность.

Переход к улучшенному плану. Эта задача возникает, если проверяемый план оказался неоптимальным. Она распадается на две задачи: определение номера одной из ранее нулевых перевозок, которая в новом плане должна быть положительной, и определение ее величины; исключение из плана одной из ранее положительных перевозок, корректирование ряда ранее положительных перевозок.

В новый план включают ту из нулевых перевозок предыдущего плана, которой соответствует максимальная положительная разность $\bar{c}_{ij} - c_{ij} > 0$. Назначают $x'_{ij} = \theta$. При этом план становится недопустимым: некоторые из ограничений (12.3.3), (12.3.4) не будут выполняться, число положительных перевозок увеличится на единицу и станет равным $k + l$ вместо необходимого их числа $k + l - 1$. Поэтому производится корректирование плана, чтобы добиться необходимого баланса по строчкам и столбцам табл. 12.11, т. е. выполнения ограничений (12.3.3), (12.3.4). Параметру θ придается такое значение, при котором одна из ранее положительных перевозок становится нулевой, т. е. общее число положительных перевозок в новом плане становится равным $k + l - 1$. Этот новый план вновь проверяется на оптимальность и т. д. до получения потенциального, т. е. оптимального плана.

Алгоритм перехода к улучшенному плану лучше всего изложить на примере.

Пример 12.16. В трех базах находятся соответственно три, пять и два однотипных десантных судна. Для посадки десанта необходимо подать их в четыре пункта погрузки в количестве четыре, два, три и одно соответственно. Расстояния между базами и пунктами погрузки десанта заданы в табл. 12.12.

Т а б л и ц а 12.12

База	Пункт погрузки			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	400	600	800	200
A_2	400	1200	500	100
A_3	800	1000	600	400

Требуется составить план перехода, обеспечивающий минимальный суммарный расход топлива при условии, что средний расход топлива на единицу пути составляет 0,01 ед. топлива.

Формализованная постановка задачи. Имеются три пункта ($k = 3$) базирования (отправления). В каждом пункте находятся a_i ($i = 1, 2, 3$) единиц десантных судов (однородных грузов). Существуют

четыре пункта погрузки (назначения) ($l = 4$), в каждый из которых требуется переместить b_j ($j = 1, 2, 3, 4$) десантных судов. Число десантных судов во всех пунктах базирования равно их суммарной потребности в пунктах погрузки. Задана стоимость $c_{ij} = 0,01s_{ij}$ перемещения одного десантного судна из i -го пункта базирования в j -й пункт погрузки. Требуется составить план, минимизирующий суммарный расход y топлива при перемещении судов.

Математическая формулировка задачи. Обозначим через x_{ij} число десантных судов, направляемых из i -го пункта базирования в j -й пункт погрузки. Задача формулируется следующим образом: найти неизвестные x_{ij} ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4$), обращающие в минимум целевую функцию

$$y = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 c_{ij} \cdot x_{ij}$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^4 x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$\sum_{i=1}^3 x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, 3, 4;$$

$$\sum_{i=1}^3 a_i = \sum_{j=1}^4 b_j;$$

$$x_{ij} \geq 0.$$

Расход c_{ij} топлива при переходе из i -й базы в j -й пункт — в табл. 12.13.

Т а б л и ц а 12.13

База	Пункт погрузки			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	6	8	2
A_2	4	12	5	1
A_3	8	10	6	4

Решение задачи. Нахождение начального плана осуществим способом северо-западного угла, используя табл. 12.14.

Т а б л и ц а 12.14

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	a'_i
A_1	3				3	0
A_2	1	2	2		5	4, 2, 0
A_3			1	1	2	1, 0
b_j	4	2	3	1	$y_1 = 60$ ед	
b'_j	1, 0	0	1, 0	0		

Заполним в этой таблице значения всех a_i и b_j .

Приступим к определению величины x_{11} . В начальном плане эта перевозка всегда положительна. Потребность в судах в пункте погрузки B_1 составляет $b_1=4$. Планируем перевести в пункт все суда из базы A_1 (их там $a_1=3$). Теперь наличие судов в базе A_1 будет равно нулю ($a'_1=0$), а потребность их в пункте B_1 составит одно судно ($b'_1=1$). Возьмем его из базы A_2 . Теперь пункт B_1 получил (в плане) все необходимые ему суда, а база A_2 лишилась одного судна (нами определены значения $x_{11}=3, x_{21}=1$). В пункте B_2 требуются два судна ($b_2=2$). Планируем их перевод из базы A_2 (т. е. назначаем $x_{22}=2$). Теперь потребность в судах в базе B_2 удовлетворена, а в базе A_2 осталось два судна. Назначаем их для перевода в базу B_3 ($x_{23}=2$). Теперь в базе A_2 не осталось судов, не планируемых к переводу, а для пункта B_3 требуется запланировать еще одно судно. Назначаем перевод одного судна из базы A_3 в пункт B_3 ($x_{33}=1$). Теперь осталось запланировать перевод одного судна в пункт B_4 из базы A_3 ($x_{34}=1$).

Далее проверяем, что получен допустимый план. Для этого убеждаемся: сумма всех элементов каждой i -й строки a_i , а сумма элементов каждого j -го столбца b_j ; число запланированных положительных перевозок равно $k+l-1$. Расход топлива при этом плане составит $y=4 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 12 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 60$ ед. После этого переходим к проверке полученного плана на оптимальность.

Проверку первого плана на оптимальность наглядно целесообразно показать с помощью табл. 12.15. В каждой клетке, соответствующей положительной перевозке, помещаются три числа: c_{ij} — в верхнем правом углу клетки, \bar{c}_{ij} — в верхнем левом углу и $x_{ij} > 0$ — в центре клетки. В клетку с нулевыми перевозками вносят сначала только значения c_{ij} , так как $x_{ij} = 0$, а \bar{c}_{ij} до определения чисел u_i и v_j неизвестны.

При нахождении чисел u_i и v_j исходят из требования: их сумма должна быть равна c_{ij} ($u_i + v_j = c_{ij}$) для всех положительных перевозок ($x_{ij} > 0$). Одно из чисел может быть взято произвольным, например, равным нулю, после чего для невырожденного плана определяются остальные.

Положим $v_1 = 0$. Так как требуется $u_1 + v_1 = 4$, то $u_1 = 4$ и т. д. По найденным значениям u_i и v_j определяем псевдостоимости $\bar{c}_{ij} = u_i + v_j$ для всех нулевых перевозок.

Т а б л и ц а 12.15

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	4 4 3 - θ	12 6 θ	5 8	3 2	3	4
A_2	4 4 1 + θ	12 12 2 - θ	5 5 2	3 1	5	4
A_3	5 8	10	6 6 1	4 4 1	2	5
b_j	4	2	3	1	$y_1 = 60$ ед.	
v_j	0	8	1	-1		

Теперь может быть проведена проверка плана на оптимальность. В рассматриваемом примере имеется несколько клеток, в которых $\bar{c}_{ij} - c_{ij} > 0$. Следовательно, это не оптимальный план.

При переходе к улучшенному плану выявляем клетку с максимальной положительной разностью $\bar{c}_{ij} - c_{ij}$ — клетку A_1B_2 . План может быть улучшен, если будет назначена некоторая положительная перевозка из A_1 в B_2 . Обозначим ее величину через θ и включим в новый план — поместим в клетку A_1B_2 . Но теперь необходимо на ту же величину θ уменьшить объем перевозок в других клетках, расположенных на первой горизонтали и второй вертикали. Уменьшаем перевозки на величину θ в A_1B_1 и в A_2B_2 . Это вызывает нарушение равновесия на второй горизонтали и первой вертикали. Для восстановления баланса следует на величину θ увеличить перевозку в A_2B_1 .

Определим величину θ , удовлетворив два требования: исключить из начального плана одну из положительных перевозок и не иметь в новом плане отрицательных перевозок. Наибольшее допустимое значение θ , удовлетворяющее этим требованиям, определяется из условия $\min_{\theta}(3 - \theta, 2 - \theta) = 0$, т. е. $\theta = 2$. При этом новый план будет иметь вид, показанный в табл. 12.16.

Т а б л и ц а 12.16

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	4 1	4 2	6 6	5 8	3 2	3 4
A_2	4 3	4 12	5 5	3 $2 - \theta$	3 θ	1 1
A_3	5 8	7 10	6 6	4 4	4 $1 + \theta$	4 $1 - \theta$
b_j	4	2	3	1	$y_2 = 48$ ед.	
v_j	0	2	1	-1		

Проверяем, является ли этот новый план допустимым: сумма элементов всех i -х строк a_i , всех j -х столбцов b_j , а число положительных перевозок составляет $k + l - 1 = 6$. Расход топлива при этом новом плане $y_2 = 4 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 48$ ед.

Заметим, что улучшение плана было достигнуто за счет изменения на одну и ту же величину θ объема перевозок в нескольких клетках, которые образуют замкнутый цикл.

Проверка второго плана на оптимальность осуществляется в том же порядке, что и первого плана (см. табл. 12.15). Из анализа табл. 12.16 следует, что новый план неоптимален: имеются положительные разности между псевдостоимостью и стоимостью $\bar{c}_{ij} - c_{ij}$ в клетках A_1B_4 и A_2B_4 .

Переход к улучшенному плану требует планирования положительной перевозки θ в клетке A_2B_4 , где указанная разность максимальна. Далее осуществляется замкнутый цикл изменения на величину θ перевозок в клетках A_2B_3 , A_3B_3 , A_3B_4 для сохранения нужного баланса по строчкам и столбцам табл. 12.16, т. е. для удовлетворения ограничениям задачи (12.3.3), (12.3.4). Затем определяется величина $\theta = 1$ по правилу $\min_{\theta}(2 - \theta, 1 - \theta) = 0$. Это обеспечивает выполнение условия: число положительных перевозок составляет $k + l - 1 = 6$.

Новый (третий) план приведен в табл. 12.17. Расход топлива при этом плане составляет $y_3 = 46$ ед. Проверка третьего плана показывает, что он оптимален: нет положительных разностей $(\bar{c}_{ij} - c_{ij})$.

Т а б л и ц а 12.17

A_i	B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1		4 4 1	6 6 2	5 8	1 2	3	4
A_2		4 4 3	6 12	5 5 1	1 1 1	5	4
A_3		5 8	7 10	6 6 2	2 4	2	5
b_j		4	2	3	1	$y_3 = 46$ ед.	
v_j		0	2	1	-3		

В оптимальном третьем плане рекомендуется переводить десантные суда:

- в пункт погрузки B_1 из баз A_1 (одна единица) и A_2 (три единицы);
- в пункт погрузки B_2 из базы A_1 (две единицы);
- в пункт погрузки B_3 из баз A_2 (одна единица) и A_3 (две единицы);
- в пункт погрузки B_4 из базы A_2 (одна единица);

Изложенный метод решения задач транспортного типа по критерию стоимости применим для невырожденного случая.

Рассмотрим вырожденный случай транспортной задачи по критерию стоимости. Задача транспортного типа будет вырожденной, если хотя бы одно значение a_i или неполная сумма a_i равны одному значению или сумме нескольких b_j . Вырожденная задача характеризуется тем, что в опорном или промежуточном планах число положительных перевозок может оказаться меньше чем $k + l - 1$, т. е. часть нулевых перевозок войдет в базис. В этом случае условие $u_i + v_j = c_{ij}$ будет справедливо и для части нулевых перевозок. Это может привести к закливанию процесса нахождения оптимального плана.

Исключение закливания и использование для вырожденных транспортных задач изложенного метода требует некоторых изменений условий задачи. Эти изменения заключаются в том, что ко всем a_i добавляется одинаковая малая величина ϵ , а к одному из b_j — величина $k\epsilon$ (“ ϵ -прием”).

При достаточно малом ϵ изменения условий задачи не сказываются на окончательном плане. После получения окончательного плана величина ϵ приравнивается к нулю. Применение такого элементарного приема дает возможность использовать один и тот же алгоритм и стандартную процедуру как для невырожденных, так и для вырожденных задач транспортного типа.

12.3.2. Транспортные задачи по критерию времени

Формализованная постановка задач этого типа отличается от формализованной постановки транспортных задач по критерию стоимости целью оптимизации: найти план, минимизирующий время его выполнения. При этом заданы времена t_{ij} перевозки всех грузов из i -го пункта отправления в j -й пункт потребления. Время t_{ij} не меняется в зависимости от числа x_{ij} перевозимых грузов.

Математическая формулировка задачи: найти неизвестные x_{ij} ($i = 1, 2, \dots, k; j = 1, 2, \dots, l$), обращающие в минимум время выполнения перевозок:

$$T = \max_{x_{ij} > 0} t_{ij} \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^k x_{ij} &= b_j \quad j = 1, 2, \dots, l; \\ \sum_{j=1}^l x_{ij} &= a_i \quad i = 1, 2, \dots, k; \\ \sum_{i=1}^k a_i &= \sum_{j=1}^l b_j, \\ x_{ij} &\geq 0, \end{aligned} \right\}$$

где $\max_{x_{ij} > 0} t_{ij}$ — максимальная по продолжительности перевозка в данном плане, которая и определяет продолжительность выполнения плана.

Если в соответствии с постановкой задачи условие $\sum_{i=1}^k a_i = \sum_{j=1}^l b_j$ не выполняется, то в рассмотрение вводится фиктивный пункт отправления или назначения (см. п. 12.3.1).

Как всегда, **решение задачи** распадается на этапы нахождения начального плана, проверки плана на оптимальность, перехода к улучшенному плану, если рассматриваемый план неоптимален.

Нахождение начального плана может быть осуществлено способом северо-западного угла (см. п. 12.3.1).

Проверка плана на оптимальность и переход к улучшенному плану обычно осуществляются способом запрещенных клеток: путем циклического перехода производится перераспределение положительных перевозок таким образом, чтобы от итерации к итерации время максимальной по продолжительности положительной перевозки по крайней мере не увеличивалось. Признаком оптимальности плана при этом способе оптимизации является невозможность организовать следующий циклический переход.

Уточним метод решения транспортной задачи по критерию времени на примере.

Пример 12.17. В условиях примера 12.16 составить план, обеспечивающий переход судов в минимальный срок. Время t_{ij} перехода из любой базы в любой пункт погрузки десанта определено (табл. 12.18).

Т а б л и ц а 12.18

Базы	Пункты погрузки			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	20	30	40	10
A_2	20	60	25	5
A_3	40	50	30	20

Формализованная постановка задачи. Имеются 3 пункта ($k = 3$) базирования, в каждом из которых находятся a_i десантных судов. Их требуется перевести в 4 пункта ($l = 4$) погрузки в количестве b_j единиц для j -го пункта. Число судов в базах равно потребному числу судов в пунктах погрузки. Заданы времена t_{ij} перевода судов из базы A_i в пункт погрузки B_j . Требуется разработать план, при котором время перевода всех судов в пункты погрузки минимально.

Математическая формулировка задачи. Найти неизвестные x_{ij} ($i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, 4$), обращаемые в минимум время T перевода всех судов:

$$T = \max_{x_{ij} > 0} t_{ij}$$

при выполнении следующих ограничений:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^3 x_{ij} &= b_j, \quad j = 1, 2, 3, 4; \\ \sum_{j=1}^4 x_{ij} &= a_i, \quad i = 1, 2, 3; \\ \sum_{i=1}^3 a_i &= \sum_{j=1}^4 b_j; \\ x_{ij} &\geq 0. \end{aligned} \right\}$$

Решение задачи. Нахождение начального плана. Используем способ северо-западного угла (см. п. 2.3.1) и получаем начальный план, который приведен в табл. 12.19, где в правом верхнем углу каждой клетки помещены значения t_{ij} (а не c_{ij} как ранее).

Т а б л и ц а 12.19

A_i	B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1		20 $3 - \theta$	30 θ	40	10	3
A_2		20 $1 + \theta$	60 $2 - \theta$	25 2	5	5
A_3		40	50	30 1	20 1	2
b_j		4	2	3	1	

Убеждаемся, что план является допустимым, т. е. он удовлетворяет ограничениям задачи. Заметим, однако, что рассматриваемая процедура решения задачи не требует, чтобы число положительных перевозок было равно $k + l - 1$.

Время T_1 выполнения плана определяется максимальным временем $t_{22} = 60$ ч перевода судов из базы A_2 в пункт B_2 :

$$T_1 = \max_{x_{ij} > 0} t_{ij} = t_{22} = 60 \text{ ч.}$$

Исключим из плана этот перевод, осуществив циклическое изменение плана при $\theta = 2$ (см. табл. 12.19). Получим новый план, который приведен в табл. 12.20. Как всегда убеждаемся, что план является допустимым. Время выполнения этого плана составляет

$$T_2 = \max_{x_{ij} > 0} t_{ij} = t_{12} = t_{33} = 30 \text{ ч.}$$

Прежде чем перейти к проверке плана на оптимальность, пометим крестиками те клетки таблицы, где время перевода судов равно или превышает $T_2 = 30$ ч и где переводы не должны планироваться.

Т а б л и ц а 12.20

A_i	B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1		20 1	30 2	40 +	10	3
A_2		20 3	60 +	25 2	5	5
A_3		40 +	50 +	30 1	20 1	2
	b_j	4	2	3	1	

Для сокращения времени T_2 выполнения плана необходимо исключить переводы судов из A_1 в B_3 и из A_3 в B_3 . Можно убедиться, что добиться этого циклическим изменением плана невозможно. Следовательно, план улучшить нельзя, минимальное время его выполнения $T = 30$ ч.

Используя данные примера 12.16 можем определить расход топлива для этого плана $y = 4 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + 4 \times \times 1 = 48$ ед. Как видно, он превышает оптимальный.

В гл. 11 рассматривались факт и причина существенного отличия в использовании результатов оптимизации в оперативно-тактической области и в области управления экономикой: если противнику известны цели оптимизации и необходимые исходные данные, он может повторить наши расчеты и получить наш план, а затем использовать против нас полученную информацию. Поэтому, используя результаты оптимизации, следует учесть степень важности для противника знания нашего плана, знание им целей оптимизации, исходных данных, необходимых для оптимизации и, при необходимости, возможность организовать мероприятия дезинформации и маскировки. Для обоснования таких мероприятий могут потребоваться методы оптимизации. Проиллюстрируем сказанное на примере рассмотренных транспортных задач линейного программирования. Получив план перевода десантных судов из баз в пункты погрузки, следует оценить важность для противника знания этого плана, его осведомленность относительно целей оптимизации плана (минимизация расхода ресурсов или времени выполнения плана). Если командир на основании такой оценки обстановки сочтет необходимым изменить план (для дезинформации противника, маскировки, повышения боевой устойчивости судов на переходах), то с помощью целевой функции (12.3.2) можно оценить превышение расхода топлива по сравнению с оптимальным планом ("плата" за дезинформацию, маскировку). Если для целей дезинформации, маскировки, потребуется наложить какие-то ограничения на перевод судов из некоторых баз в некоторые пункты, это может быть учтено с помощью параметров a_i , b_j штрафных условий, вводимых относительно некоторых переводов и т. д. Вообще, знание метода оптимизации, процедуры его реализации позволят учесть многие ограничения, вытекающие из плана маскировки, дезинформации.

Пример 12.18. В условиях примера 12.16 необходимо разработать план перевода судов с минимизацией расхода топлива и с учетом требования: в целях маскировки перевод судов из базы A_2 в пункт B_3 не планировать.

Чтобы удовлетворить этому требованию, необходимо назначить высокий расход топлива c_{23} (допустим $c_{23} = 50$ ед.). Читатель может найти оптимальный план и убедиться, что указанное требование в нем будет учтено.

Возможен учет при оптимизации и более сложных требований ограничений, для чего необходимы знание метода оптимизации и наличие гибкого программного обеспечения. Сказанное касается всех методов математической оптимизации.

§ 12.4. ДВОЙСТВЕННАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Любую задачу линейного программирования можно определенным образом сопоставить с некоторой другой задачей, тоже линейной, получившей название двойственной. Эти две задачи (прямая и двойственная) связаны между собой и составляют двойственную пару. Совместное рассмотрение пары двойственных задач находит применение при разработке процедур решения задач линейного программирования, при рассмотрении численных методов одновременного решения обеих задач (см., например, гл. 15), при проведении анализа результатов решения задач линейного программирования.

Постановку двойственной задачи линейного программирования целесообразно показать на примере некоторой экономической прямой и двойственной задачи линейного программирования. Исходная задача ставится следующим образом. Для выпуска n видов продукции необходимо затратить m ресурсов (сырье, оборудование, труд людей и т. д.). Каждый ресурс ограничен имеющимся на предприятии объемом b_i ($i = 1, 2, \dots, m$). Для производства единицы каждого вида продукции необходимо израсходовать a_{ij} единиц соответствующего ресурса ($i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$). Цена единицы готового продукта c_j задана.

Необходимо определить объем продукции каждого вида x_j , обеспечивающий предприятию максимальный доход. Задача производства формулируется следующим образом: найти неизвестные x_j ($j = 1, 2, \dots, n$), обращающие целевую функцию

$$y = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (12.4.1)$$

в максимум при ограничениях

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \\ x_j &\geq 0. \end{aligned} \right\}$$

В данной формулировке задачи целевая функция и ограничения имеют следующий экономический смысл. Величина $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$ определяет суммарное количество i -го ресурса, необходимого для производства всего набора продукции. Совокупность величин $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$ для всех

$i = 1, 2, \dots, m$ определяет затраты всех ресурсов на производство набора продукции, а величины b_i — ограничения ресурсов. Целевая функция выражает стоимость готовой продукции при заданном объеме x_j ($j = 1, 2, \dots, n$) производимой продукции. Для достижения цели производства необходимо целевую функцию максимизировать.

Из приведенной постановки исходной задачи вытекает следующая постановка двойственной задачи: найти условные оценки единицы каждого вида ресурса, измеряемые в тех же единицах, что и доход предприятия. Эти оценки должны быть такими, чтобы суммарная оценка всех ресурсов, необходимых для производства единицы продукта, была бы не менее стоимости единицы готовой продукции данного вида. Из допустимых вариантов таких оценок выбирается тот, для которого суммарная оценка всех затраченных на производство ресурсов была бы минимальна. Эта задача формулируется следующим образом: найти неизвестные

$$z_i (i = 1, 2, \dots, m),$$

обращающие целевую функцию

$$u = \sum_{i=1}^m b_i z_i \quad (12.4.2)$$

в минимум при ограничениях

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m a_{ij} z_i \geq c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\ z_i \geq 0. \end{array} \right\}$$

Остановимся более подробно на элементах двойственной задачи. Переменные двойственные задачи являются условными оценками единицы соответствующего ресурса, выраженными в ценах готовой продукции. Они определяют ответ на вопрос, какова наименьшая стоимость набора ресурсов, дающая возможность произвести и реализовать продукцию. Ограничения двойственной задачи выражают тот факт, что если оценка затрат, необходимых для производства продукта, меньше цены продукта, то более выгодно произвести и продать продукт, чем продавать ресурсы, если же больше цены продукта, то более выгодно продавать ресурсы.

Экономическая интерпретация двойственной задачи позволяет сделать следующие выводы:

— если какой-либо ресурс не может быть полностью использован при производстве оптимального набора продукции, то его условная оценка равна нулю;

— продукт, издержки производства которого превосходят его цену, производиться не будет, так как его производство нерентабельно;

— если целевая функция двойственной задачи принимает значение большее чем значение целевой функции исходной задачи, то все производство нерентабельно.

В практике управления силами и средствами теория двойственности задач линейного программирования нашла практическое применение при анализе результатов решения задач линейного программирования. В частности, решение двойственной задачи дает возможность оценить влияние на устойчивость полученного решения прямой задачи:

— коэффициентов c_j целевой функции (стоимостей, интенсивностей поиска, производительности транспортных средств и т. п.);

— констант b_i в правых частях линейных ограничений (выделенного наряда сил, выделенного ресурса времени, заданной вероятности решения задачи, суммарной интенсивности поиска и т. п.);

— введения в модель новой переменной (новых транспортных средств, новых разведчиков, новых ресурсов и т. п.).

Примеры анализа решений задач линейного программирования на устойчивость к изменению различных параметров рассмотрены в пособиях по линейному программированию (см., например, [9]).

Для практической реализации возможностей теории двойственности в интересах анализа решения задач линейного программирования необходимо соответствующее математическое обеспечение ЭВК, разработанное на основе комплексного рассмотрения прямых и двойственных им задач.

Глава 13. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПРИ УПРАВЛЕНИИ СИЛАМИ

§ 13.1. ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДОВ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПРИ УПРАВЛЕНИИ СИЛАМИ

13.1.1. Область применения методов

Применение методов линейного программирования существенно ограничивается требованием описания целевой функции и ограничений задачи в виде линейных функций. В очень большом числе случаев реальные связи между параметрами задачи нелинейны, а их линеаризация приводит к потере смысла задачи, недопустимому искажению объективных закономерностей, например, при решении многих задач оптимизации применения носителей оружия, поисковых сил, сил и средств разведки, РЭБ, связи и т. д., что делает необходимым использование методов нелинейного программирования.

Методы нелинейного программирования не обладают свойством универсальности, присущим методам линейного программирования. Особенности математических формулировок задач оптимизации, обусловливаемые особенностями реальных явлений, могут потребовать различных способов нелинейного программирования. Но даже применение одного и того же способа к решению задач оптимизации, имеющих отличия в математической формулировке, могут иметь различия в процедуре реализации способа. Указанные обстоятельства требуют, чтобы при разработке специального математического и программного обеспечения выявлялись классы ситуаций и соответствующие им классы задач нелинейного программирования и для каждого из них создавалось специальное математическое и программное обеспечение, которое бы составляло систему.

В оперативно-тактической области существует обширный класс задач оптимизации распределения по объектам и задачам сил, систем оружия и технических средств, боеприпасов, средств материально-технического снабжения со следующими особенностями математической формулировки: для вычисления основного и дополнительных показателей эффективности используются пуассоновский, показательный, биномиальный, равновероятный законы распределения соответствующих случайных величин. Для решения подобных задач в данной главе изложены способы нелинейного программирования, более точно — теоретическое обоснование способа решения широкого круга подобных задач (способ множителей Лагранжа, его применение для нахождения седловой точки, понятие о градиентных способах), а затем показана конкретизация способа для решения ряда задач этого класса.

Укажем некоторые оперативно-тактические ситуации, иллюстрировав их примерами, когда для обоснования решения, планов, их корректирования, обоснования применения систем оружия и технических средств используются методы нелинейного программирования.

1. Обоснование порядка огневого поражения противника при нанесении удара по одной цели или нескольким группам однотипных или разнотипных объектов. Цели моделирования: оптимальное распределение сил и средств по объектам группы или по группе объектов, оптимальная последовательность нанесения ударов, оптимальное распределение резерва по объектам после удара главных сил, оптимальное распределение сил и средств для решения задачи на главном направлении и обеспечивающих действий, прогнозирование действий противника и т. д.

Пример 13.1. Для нанесения удара по n десантным отрядам (ДесО) при k_1, k_2, \dots, k_n кораблях в каждом ДесО выделено N средств поражения. С учетом различного предназначения ДесО и различных вероятностей поражения корабля из их состава требуется обосновать распределение средств поражения, обеспечивающее разгром десанта.

Пример 13.2. Для отражения воздушного удара, в котором участвуют n групп по k_1, k_2, \dots, k_n воздушных целей в группе, соединение может произвести N залпов зенитными ракетными комплексами. Вероятности поражения одним залпом одной цели в разных группах отличаются друг от друга, группы представляют различную угрозу соединению. Необходимо обосновать распределение залпов по группам, обеспечивающее срыв удара противника по соединению кораблей.

2. Поиск объектов в районах или на рубежах. Цели моделирования: оптимальное распределение сил по районам или на рубежах; оптимальное распределение времени поиска в районах и на эшелонах рубежа; прогнозирование действий противника и т. д.

Пример 13.3. Выделено N комплексов противолодочных сил (ПЛС) для поиска и поражения подводных лодок противника, которые при выполнении своей задачи проследуют через противолодочный рубеж и через район действия ПЛС. Требуется обосновать главное и обеспечивающее направления действий ПЛС, их распределение на рубеже и в район для поражения возможно большего числа подводных лодок противника.

Пример 13.4. Возможны два района действий подводной лодки противника. Ее поиск в течение времени t будут осуществлять две корабельные поисковые группы (ПУГ). Эффективность действий ПУГ в различных районах различна. Требуется обосновать распределение ПУГ по районам поиска, целесообразность и момент времени сосредоточения действий ПУГ в одном из районов.

3. Использование средств связи, РЭБ наблюдения на различных этапах выполнения поставленной задачи, а также при повседневном управлении. Цели моделирования: распределение средств по задачам и направлениям, организация использования системы связи, РЭБ, наблюдения, их элементов, прогнозирование противодействия противника функционированию систем.

Пример 13.5. Для связи с объектами, находящимися в n районах, может быть открыто N приемных радиовахт. Вероятность приема сообщения каждой радиовахтой из i -го района ($i = 1, 2, \dots, n$) равна p_i . Математическое ожидание числа сообщений, передаваемых из i -го района, составляет m_i . Требуется обосновать распределение радиовахт по районам, при котором будет максимальным: а) математическое ожидание числа принятых сообщений; б) вероятность приема каждого передаваемого сообщения. При этом требуется учесть противодействие противника передаче и приему сообщений.

Пример 13.6. Планируется оборудование корабля приемными радиоустройствами трех различных диапазонов (УКВ, КВ, СДВ). Информация, передаваемая в любом диапазоне, имеет одинаковую ценность и поступает с интенсивностью λ_i РДО в единицу времени ($i = 1, 2, 3$). Средняя

стоимость одного комплекта приемной аппаратуры равна c_i . Требуется обосновать состав приемной аппаратуры корабля, который при минимальной его стоимости обеспечивает прием информации с вероятностью не ниже заданной.

4. Строительство новых или модернизация существующих типов носителей оружия, систем оружия и технических средств. Цели моделирования: обоснование распределения выделенных средств по типам носителей оружия, выявление закономерностей распределения в зависимости от выделенных средств и т. д.

Перечисленными ситуациями не исчерпывается все их многообразие. Следует также отметить, что знание излагаемого класса задач нелинейного программирования облегчит изучение других классов задач оптимизации.

13.1.2. Особенности оперативно-тактической постановки задачи

Оперативно-тактическая постановка задачи должна обеспечить ее формализованную постановку, а затем математическую формулировку. Для этого в оперативно-тактической постановке должны быть указаны: цель применения сил, использования средств, цель оптимизации (что именно должно быть оптимизировано), факторы (ресурсы), за счет которых должна осуществляться оптимизация, а также условия обстановки, которые должны быть учтены в модели оптимизации.

Формализованная постановка задачи в общем случае имеет следующий вид. Найти неизвестные x_1, x_2, \dots, x_n , которые обращают в максимум (минимум) показатель эффективности применения сил, использование средств (указать показатель эффективности) и удовлетворяют заданным ограничениям задачи. Искомые неизвестные должны быть неотрицательны.

Далее постановка задачи должна содержать сведения, позволяющие определить конкретный вид целевой функции и ограничения задачи. Источником для формулировки этих сведений могут быть:

- а) требования внутренней логики формирования модели, соединенные с оперативно-тактическими знаниями специалиста по исследованию операций;
- б) указания командира, содержащиеся в оперативно-тактической постановке задачи.

Не исключено также, что разработка формализованной постановки задачи, ее математической формулировки потребует уточнения, доработки оперативно-тактической постановки.

Пример 13.7. Дадим формализованную постановку задачи для условий примера 13.1. Анализ условий примера показывает, что формулировка цели удара — разгром конвоя — должна быть уточнена. Необходимо, чтобы эта формулировка позволила использовать принцип Колмогорова и выявить вид показателя эффективности (см. гл. 1). Например, в конкретных условиях обстановки разгром конвоя может быть достигнут при поражении не менее некоторого числа M_3 (доли μ_3) десантных кораблей. Тогда формализованная постановка задачи будет иметь следующий вид: найти неизвестные x_1, x_2, \dots, x_n — число средств поражения, направляемых на первый, второй, ..., n -й ДесО соответственно, при которых максимальна вероятность поражения не менее заданного числа M_3 десантных кораблей при выполнении условий: общее число средств поражения равно N , неизвестные x_i неотрицательны.

Допустим, что профессиональная подготовка специалиста по исследованию операций позволила ему уточнить следующие условия формирования целевой функции: факт зависимости (или

независимости) действия средств поражения, характер целераспределения средств поражения по объектам ДесО, на который они направлены, вид закона поражения объекта ДесО*.

Допустим также, что в оперативно-тактической постановке задачи заложено требование учета в модели эффективности целеуказания носителям средств поражения и связи с ними, что специалист по исследованию операций уточнил у командира (специалиста штаба) отсутствовавшее в постановке задачи указание о необходимости учитывать противодействие обороны противника средствам поражения с изменением их распределения по различным ДесО, сведения о характере этого изменения и т. д. Все такие сведения будут включены в формализованную постановку задачи**.

13.1.3. Показатели эффективности

Как и при использовании любых других методов оптимизации, целевая функция задачи должна отражать цель оптимизации. В общем случае оптимизироваться может:

— основной показатель эффективности при ограничениях, наложенных на некоторые дополнительные показатели и (или) параметры, характеризующие условия выполнения поставленной задачи, условия оптимизации (например, наряд распределяемых сил, требование неотрицательности переменных — см. пример 13.1);

— какой-либо дополнительный показатель эффективности при ограничениях на основной и некоторые дополнительные показатели, а также на параметры, характеризующие условия выполнения поставленной задачи и условия оптимизации (см. пример 13.6).

В п. 13.1.2 было указано, что формулировка цели действия сил должна позволить использовать принцип Колмогорова (см. гл. 1) для выявления основного показателя эффективности. Им может являться и вероятность причинить противнику ущерб не менее заданного (примеры 13.1, 13.7) и математическое ожидание причиняемого противнику ущерба (пример 13.3).

Дополнительные показатели эффективности определяются в результате творческого процесса выработки замысла, решения, плана (см. гл. 2).

§ 13.2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

13.2.1. Общая математическая формулировка задачи нелинейного программирования

Математическая формулировка задачи нелинейного программирования в общем случае имеет следующий вид. Найти неизвестные x_1, x_2, \dots, x_n , которые обращают в минимум целевую функцию

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min \quad (13.2.1)$$

при ограничениях

* Методы математического моделирования применения носителей оружия по одиночным, групповым, площадным целям рассматриваются в гл. 17.

** Исходя из методических соображений и направленности учебника полное описание ситуаций и полная формализованная постановка задачи в этом примере не приводятся.

$$\left. \begin{array}{l} z_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0; \\ z_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0; \\ x_i \geq 0. \end{array} \right\} \quad (13.2.2)$$

По крайней мере одна из функций y, z_1, z_2, \dots, z_m является нелинейной функцией своих аргументов. Некоторые из ограничений могут быть заданы в виде равенств. Ограничения вида (13.2.2) часто называют ограничениями сверху.

Если задача заключается в максимизации целевой функции, то оптимизируют $y^* = -y$.

Ограничения снизу имеют вид $z_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ и могут быть получены умножением на -1 ограничений сверху.

Если существует ограничение $x_i \geq A_i$, то вводят новую переменную $x_i^* = x_i - A_i$ и требование неотрицательности x_i^* . Если же $x_i \leq A_i$, то условию неотрицательности удовлетворяет переменная $x_i^* = A_i - x_i$. В условиях примера 13.6 общая (без детализации) математическая формулировка задачи будет следующей: найти неизвестные x_1, x_2, x_3 — средства, выделяемые для оборудования корабля радиоприемной аппаратурой УКВ, КВ, СДВ диапазонов, которые минимизируют целевую функцию

$$y = x_1 + x_2 + x_3$$

и удовлетворяют ограничениям

$$\left. \begin{array}{l} z_1(x_1) \geq W_1; \\ z_2(x_2) \geq W_2; \\ z_3(x_3) \geq W_3; \\ x_1 \geq c_1; \quad x_2 \geq c_2; \quad x_3 \geq c_3, \end{array} \right\}$$

где $z_i(x_i)$ — вероятность приема сообщения, передаваемого на i -м диапазоне при выделении для него суммы средств x_i ; W_i — заданная вероятность приема сообщения на i -м диапазоне; c_i — стоимость одного комплекта аппаратуры i -го диапазона.

Обозначим $x_i^* = x_i - c_i$. Математическая формулировка этой задачи может быть приведена к каноническому виду (13.2.1), (13.2.2) следующим образом: найти неизвестные x_1^*, x_2^*, x_3^* , обращающие в минимум целевую функцию

$$y^* = x_1^* + x_2^* + x_3^*$$

при выполнении следующих ограничений:

$$\left. \begin{aligned} z_1(x_1^*) - W_1 &\geq 0; \\ z_2(x_2^*) - W_2 &\geq 0; \\ z_3(x_3^*) - W_3 &\geq 0; \\ x_1^* \geq 0; \quad x_2^* \geq 0; \quad x_3^* &\geq 0. \end{aligned} \right\}$$

При конкретизации математической формулировки задачи должны быть разработаны функции $z_i(x_i^*)$ с учетом всех необходимых условий приема сообщений, в том числе ожидаемого противодействия противника

13.2.2. Метод множителей Лагранжа

Метод множителей Лагранжа может быть использован при решении упомянутого в п. 13.1.1 класса задач нелинейного программирования, имеющих целью распределение сил, средств. Правда, в своем первоначальном, “классическом”, виде этот метод требует, чтобы ограничения задачи (13.2.2) задавались в виде равенств, а условие неотрицательности переменных отсутствовало.

Рассмотрим классический метод Лагранжа, а в п. 13.2.3 его модификацию для решения указанного в п. 13.1.1 класса оперативно-тактических задач.

Математическая формулировка задачи, решаемой рассматриваемым методом, имеет следующий вид: найти неизвестные x_1, x_2, \dots, x_n , обращающие в максимум (минимум) целевую функцию $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при ограничениях, заданных в виде равенств:

$$\left. \begin{aligned} z_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0; \\ z_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0; \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ z_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13.2.3)$$

Предполагается, что $m < n$ и что функции y, z_1, z_2, \dots, z_m дифференцируемы по всем своим аргументам. Экстремум функции y при наличии ограничений носит название условного экстремума в отличие от безусловного экстремума для функции, на аргументы которой не наложены ограничения.

Лагранж доказал (1797), что задача нахождения условного экстремума функции y может быть заменена задачей нахождения безусловного экстремума другой функции:

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) &= y(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + \\ &+ \sum_{j=1}^m \lambda_j z_j(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (13.2.4)$$

Функция (13.2.4) получила название функции Лагранжа, а параметры λ_j — коэффициентов пропорциональности или множителей Лагранжа. В экстремальной точке $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0)$ должны быть равны нулю частные производные

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial L}{\partial x_i}\right)^0 &= \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^0 + \sum_{j=1}^m \lambda_j^0 \left(\frac{\partial z_j}{\partial x_i}\right)^0 = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n; \\ \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}\right)^0 &= z_j^0 = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \right\} \quad (13.2.5)$$

Таким образом, получаем систему из $n + m$ уравнений, откуда находим x_i^0 и λ_j^0 . Полученное решение будет нецелочисленным. Некоторые из найденных x_i^0 могут быть отрицательными, так как требование неотрицательности x_i , как уже указывалось, в математической формулировке (13.2.3) отсутствует. Круг задач, решаемых методом множителей Лагранжа, весьма сужается из-за этого обстоятельства, а также требования, чтобы ограничения были заданы в виде равенств. В частности, задачи формирования и распределения наряда сил, как правило, не удовлетворяют этим требованиям.

13.2.3. Выпуклое программирование

Выпуклое программирование можно использовать для такой модификации метода множителей Лагранжа, при которой становится возможным учет ограничений z_j в виде неравенств (13.2.2) и выполнение требования неотрицательности неизвестных x_i .

Прежде чем изложить метод выпуклого программирования, введем понятие выпуклых и вогнутых дуг или функций, а также понятие седловой точки.

Дуга называется *выпуклой*, если отрезок, соединяющий две точки дуги, лежит выше нее. Этому соответствует условие (рис. 13.1)

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) \leq \alpha f(x_1) + \beta f(x_2),$$

где α и β — коэффициенты пропорциональности, $\alpha + \beta = 1$.

Дуга называется *вогнутой*, если отрезок, соединяющий две точки дуги, лежит ниже нее (рис. 13.2), чему соответствует условие

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) \geq \alpha f(x_1) + \beta f(x_2).$$

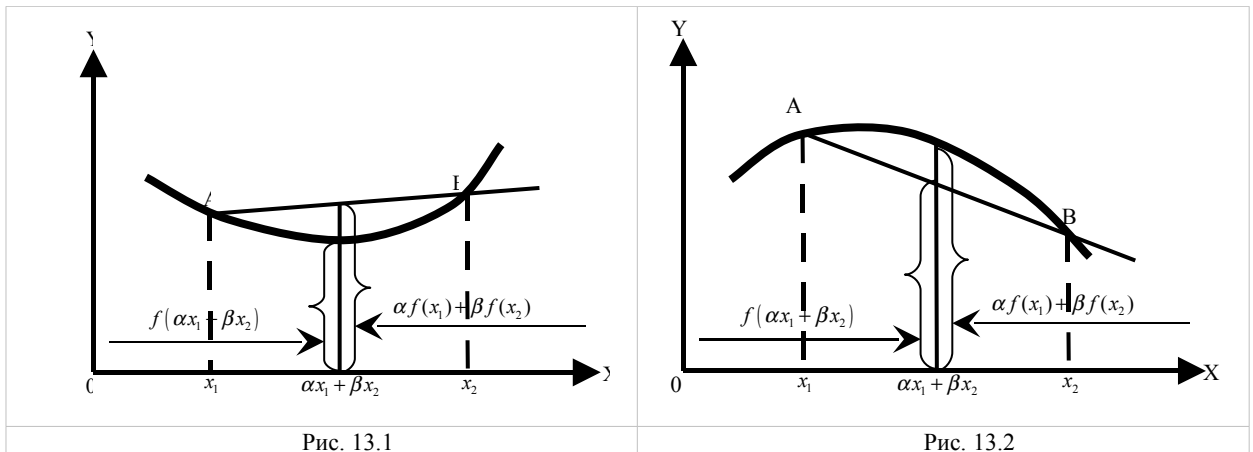


Рис. 13.1

Рис. 13.2

Для непрерывных и дифференцируемых функций дуга выпукла, если вторая производная функции в соответствующем интервале неотрицательна, т. е. $f''(x) \geq 0$. Дуга вогнута, если $f''(x) \leq 0$. Например, если вероятность поражения объекта составляет $y = 1 - e^{-u}$, то имеет место вогнутая функция потенциала поражения u , так как ее вторая производная отрицательна: $y'' = -e^{-u}$. При этом

Рис.13.3

вероятность непоражения объекта e^{-u} выпукла, так как $y'' = (e^{-u})'' = e^{-u}$. Линейная функция удовлетворяет обоим условиям, поэтому ее можно считать либо выпуклой, либо вогнутой, исходя из интересов решения задачи.

Функция может быть ни выпуклой, ни вогнутой, если не соблюдаются рассмотренные выше условия.

Сумма выпуклых функций выпукла, а вогнутых — вогнута.

Изложим теперь понятие *седловой точки*. Рассмотрим функцию двух переменных $F(x, \lambda)$. Если $F(x, \lambda)$ выпукла по переменной x и вогнута по λ , она имеет седловую точку (рис. 13.3).

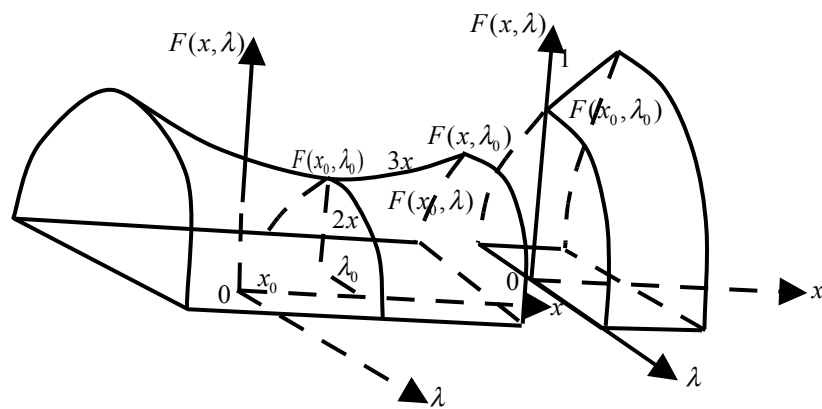


Рис. 13.3

В седловой точке (x_0, λ_0) функция $F(x_0, \lambda_0)$ принимает наименьшее значение по переменной x и наибольшее — по переменной λ , т. е.

$$F(x_0, \lambda_0) = \min_x \max_{\lambda} F(x, \lambda). \quad (13.2.6)$$

Следовательно, в окрестности седловой точки выполняется неравенство вида

$$F(x_0, \lambda) \leq F(x_0, \lambda_0) \leq F(x, \lambda_0). \quad (13.2.7)$$

Если условия (13.2.6), (13.2.7) выполняются для любых неотрицательных значений x и λ , то седловая точка является глобальной, величина x достигает в ней абсолютного (глобального) минимума. Если функция $F(x, \lambda)$ выпукла по одному, а вогнута по другому аргументу, то это достаточное условие, чтобы имелась глобальная седловая точка (глобальный экстремум функции). Пример нескольких экстремумов функции показан на рис. 13.4.

Найдем другие, более удобные для практического использования, формы записи необходимых и достаточных условий существования седловой точки. Пусть функция $F(x, \lambda)$ непрерывна и дифференцируема. Возможны два типа седловых точек.

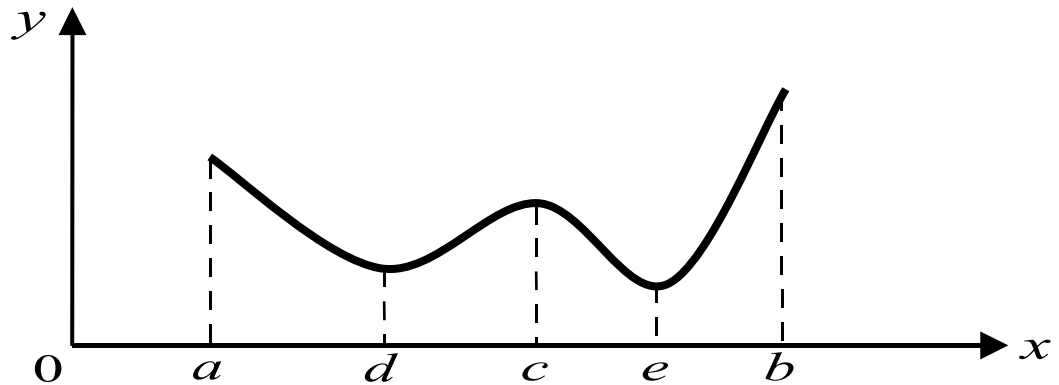


Рис. 13.4

Первый тип — седловая точка (x_0, λ_0) находится внутри возможных значений переменных x и λ (левая часть рис. 13.3). Первые частные производные в этой точке равны нулю:

$$\frac{\partial F(x_0, \lambda_0)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial F(x_0, \lambda_0)}{\partial \lambda} = 0,$$

а сами переменные не равны нулю: $x_0 > 0; \lambda_0 < 0$. Во всех других точках области (точки 2, 3) эти производные не равны нулю: $\frac{\partial F(x, \lambda_0)}{\partial x} > 0; \frac{\partial F(x_0, \lambda)}{\partial \lambda} < 0$.

Второй тип седловой точки имеет место, когда она расположена на границе области возможных значений какой-либо (каких-либо) из переменных.

Пример седловой точки этого типа показан на правой части рис. 13.3. В этой седловой точке $x_0 = 0, \lambda_0 = 0$, причем

$$\frac{\partial F(x_0, \lambda_0)}{\partial x} > 0; \quad \frac{\partial F(x_0, \lambda_0)}{\partial \lambda} = 0.$$

С учетом требования неотрицательности переменных x и λ возможны также ситуации седловой точки этого типа, когда

$$x_0 = 0, \lambda_0 = 0 \text{ и } \frac{\partial F(x_0, \lambda_0)}{\partial x} \geq 0; \quad \frac{\partial F(x_0, \lambda_0)}{\partial \lambda} \leq 0,$$

либо

$$x_0 > 0, \lambda_0 = 0 \text{ и } \frac{\partial F(x_0, \lambda_0)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial F(x_0, \lambda_0)}{\partial \lambda} \leq 0,$$

либо

$$x_0 = 0, \lambda_0 > 0 \text{ и } \frac{\partial F(x_0, \lambda_0)}{\partial x} \geq 0; \quad \frac{\partial F(x_0, \lambda_0)}{\partial \lambda} = 0.$$

Обобщим полученный результат. Чтобы точка (x_0, λ_0) была седловой, необходимо иметь

$$\frac{\partial F(x_0, \lambda_0)}{\partial x} \geq 0; \quad \frac{\partial F(x_0, \lambda_0)}{\partial \lambda} \leq 0,$$

причем

$$x_0 \geq 0 \text{ при } \frac{\partial F(x_0, \lambda_0)}{\partial x} = 0; \quad x_0 = 0 \text{ при } \frac{\partial F(x_0, \lambda_0)}{\partial x} > 0; \quad (13.2.8)$$

$$\lambda_0 \geq 0 \text{ при } \frac{\partial F(x_0, \lambda_0)}{\partial \lambda} = 0; \quad \lambda_0 = 0 \text{ при } \frac{\partial F(x_0, \lambda_0)}{\partial \lambda} < 0. \quad (13.2.9)$$

Эти условия можно объединить: в седловой точке

$$\frac{\partial F(x_0, \lambda_0)}{\partial x} \geq 0; \quad \frac{\partial F(x_0, \lambda_0)}{\partial \lambda} \leq 0; \quad x_0 \frac{\partial F(x_0, \lambda_0)}{\partial x} = 0; \quad \lambda_0 \frac{\partial F(x_0, \lambda_0)}{\partial \lambda} = 0, \quad (13.2.10)$$

так как по крайней мере один из сомножителей равен нулю (в зависимости от типа седловой точки).

Условия (13.2.10) необходимы, но еще недостаточны, чтобы точка (x_0, λ_0) была седловой. Дополнительными условиями, кроме (13.2.10), служат неравенства:

$$\left. \begin{aligned} F(x, \lambda_0) &\geq F(x_0, \lambda_0) + \frac{\partial F(x_0, \lambda_0)}{\partial x} (x - x_0) = f_1(x); \\ F(x_0, \lambda) &\leq F(x_0, \lambda_0) + \frac{\partial F(x_0, \lambda_0)}{\partial \lambda} (\lambda - \lambda_0) = f_2(\lambda), \end{aligned} \right\} \quad (13.2.11)$$

которые должны выполняться для значений x, λ в окрестности (x_0, λ_0) . Неравенства (13.2.11) можно доказать, используя условия (13.2.10) и неравенства (13.2.7).

Если неравенства (13.2.11) выполняются для любых неотрицательных значений x, λ , то седловая точка является глобальной, величина x достигает в ней абсолютного (глобального) минимума. Тогда функции $f_1(x), f_2(\lambda)$ в (13.2.11) являются уравнениями прямых, проходящих через глобальную седловую точку соответственно под кривой $F(x, \lambda_0)$ и над кривой $F(x_0, \lambda)$.

Неравенства (13.2.11) выполняются всегда, если кривая $F(x, \lambda_0)$ выпукла по x , а $F(x_0, \lambda)$ вогнута по λ (см. рис. 13.3). В этом случае условия (13.2.10) являются необходимыми и достаточными для того, чтобы точка (x_0, λ_0) была седловой и притом единственной.

Приведенное выше понятие седловой точки для функции двух переменных и ее свойства могут быть распространены на функцию многих аргументов (функцию точки в многомерном пространстве). Выше (см. (13.2.1), (13.2.2)) была дана общая математическая формулировка задачи нелинейного программирования, когда необходимо найти минимум целевой функции y при ограничениях z_j , заданных в виде неравенств и требовании неотрицательности x_i .

Пусть функции y, z_1, z_2, \dots, z_m дифференцируемы по каждому аргументу. Составим функцию Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = y(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j z_j(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (13.2.12)$$

также дифференцируемую по каждому аргументу.

Задача отыскания оптимального плана $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ в большом числе случаев равносильна задаче отыскания седловой точки функции Лагранжа (13.2.12). Частные производные от функции Лагранжа в седловой точке, т. е. при $x_i = x_i^0, \lambda_j = \lambda_j^0$, обозначим так:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} \right)^0 &= \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^0 + \sum_{j=1}^m \lambda_j \left(\frac{\partial z_j}{\partial x_i} \right)^0; \\ \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda_j} \right)^0 &= z_j(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0). \end{aligned} \right\} \quad (13.2.13)$$

Наличие седловой точки функции Лагранжа определяется условиями Куна-Таккера по аналогии с (13.2.10):

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_i} \right)^0 = 0, \quad x_i \geq 0 \quad \text{или} \quad \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} \right)^0 > 0, \quad x_i = 0; \quad (13.2.14)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda_j} \right)^0 = 0, \quad \lambda_j \geq 0 \quad \text{или} \quad \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda_j} \right)^0 < 0, \quad \lambda_j = 0. \quad (13.2.15)$$

Поскольку в седловой точке либо частная производная, либо переменная равны нулю, то условия (13.2.14), (13.2.15) можно объединить

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_i} \right)^0 \geq 0; \quad \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda_j} \right)^0 \leq 0; \quad x_i^0 \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} \right)^0 = 0; \quad \lambda_j^0 \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda_j} \right)^0 = 0. \quad (13.2.16)$$

Если целевая функция y и функции z_j выпуклы, то функция Лагранжа имеет седловую точку и соответствующий ей оптимальный план, так как вторая составляющая функции Лагранжа — линейная комбинация множителей $\sum_{j=1}^m \lambda_j z_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — является частным случаем вогнутой функции. При выпуклых функциях y и z_j задача отыскания неотрицательных переменных x_1, x_2, \dots, x_n , которые обращают y в минимум при ограничениях $z_j \leq 0$, является задачей *выпуклого программирования*.

Условия Куна-Таккера показывают, что при выпуклом программировании оптимальный план находится в седловой точке функции Лагранжа, но непосредственно по этим условиям нельзя рассчитать эту точку. Для расчета седловой точки (нахождения оптимального плана) существуют рабочие методики с численными методами поиска экстремума, что позволяет использовать ЭВМ с их высоким быстродействием. В основе различных вариантов таких методик — последовательные

приближения к седловой точке. В градиентных методах используется то обстоятельство, что наибольшей скорости изменения функции (приближения к седловой точке) соответствует перемещение в направлении вектора, составленного из частных производных этой функции по ее аргументам $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ в точке X', Λ' . Такой вектор называется градиентом:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_i}\right)' = \frac{\partial L}{\partial x_i} \Bigg|_{\substack{X=X' \\ \Lambda=\Lambda'}}; \quad \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}\right)' = \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} \Bigg|_{\substack{X=X' \\ \Lambda=\Lambda'}}$$

“Длина” шага пропорциональна градиенту:

$$\left. \begin{aligned} x_i'' &= x_i' - k_i' \left(\frac{\partial L}{\partial x_i}\right)' \\ \lambda_j'' &= \lambda_j' + k_j' \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}\right)' \end{aligned} \right\}$$

если при этом не нарушается требование неотрицательности x_i, λ_i . В новой точке X'', Λ'' осуществляется очередной шаг к точке X''', Λ''' . И т. д.

От величины коэффициентов $k', k'', \dots, k^{(s)}$ существенно зависят число шагов до получения плана, близкого к оптимальному, точность приближения к нему. При малых $k^{(s)}$ ($s = 1, 2, \dots$) потребуется много шагов; при больших $k^{(s)}$ можно “перешагнуть” через экстремум и возвращаться к нему. С увеличением $k^{(s)}$ в общем случае уменьшается точность определения плана.

Разработаны различные модификации градиентного метода: метод скорейшего подъема или спуска, метод условного градиента, метод проекции градиента.

В методах производных второго порядка используются вторые производные целевой функции, что повышает скорость приближения к точке ее экстремума.

Наличие ограничений вида (13.2.2) усложняет задачу поиска экстремума целевой функции (13.2.1). В этом смысле особое место занимает метод множителей Лагранжа, в котором задача поиска экстремума с ограничениями сводится к задаче поиска экстремума (седловой точки) без ограничений или с ограничениями простого вида, что значительно упрощает процедуру численной оптимизации. Однако, как говорилось, эти методы применимы при выпуклом программировании. В противном случае для учета ограничений при численных методах решения задач нелинейного программирования прибегают к специальным приемам. Наиболее простым и распространенным является метод штрафных функций, позволяющий сводить задачу со сложными ограничениями к задаче без ограничений или с простыми ограничениями.

В различных вариантах метода случайного поиска экстремума целевая функция и ограничения задачи могут задаваться и алгоритмически*. Основой этого метода является метод статистических испытаний. Пусть установлено, что переменная x_i не превосходит A_i (и неотрицательна). Тогда с помощью случайного механизма выбираем n чисел $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$,

* Зачастую методы случайного поиска относят к особому классу численных методов оптимизации.

равномерно распределенных в пределах от 0 до 1, и составляем набор значений переменных $(A_1\zeta_1, A_2\zeta_2, \dots, A_n\zeta_n)$. Если этот набор удовлетворяет всем ограничениям задачи, то для него рассчитывается значение целевой функции. Такая последовательная выборка оптимизируемых параметров и соответствующих им значений целевой функции осуществляется заданное количество раз. Затем выбирается наибольшее или наименьшее значение целевой функции. Соответствующие ему значения неизвестных x_i близки к оптимальному плану. Сходимость описанного метода невелика, требуется большое число испытаний. Поэтому прибегают к приемам ускорения сходимости. При этом каждое последующее испытание осуществляется с учетом результатов ранее проведенных испытаний. В отличие от предыдущего ненаправленного случайного поиска такие методы случайного поиска названы направленными. Существуют различные варианты направленного поиска: метод случайного сканирования, удачной выборки, случайного спуска, многократной выборки и др. [21].

Сущность метода направленного случайного поиска минимума целевой функции такова. После первого удовлетворительного испытания находим исходную точку $X' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ и значение целевой функции $y(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$. Далее с помощью случайного механизма находим приращение к исходной точке $\Delta x'_i$ и $x''_i = x'_i + \Delta x'_i$. Если при этом новая точка $X'' = (x''_1, x''_2, \dots, x''_n)$ удовлетворяет всем ограничениям и целевая функция в ней меньше, чем в предыдущей точке, не менее чем на некоторую положительную величину ε , т. е. $\Delta y = y(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) - y(x''_1, x''_2, \dots, x''_n) \geq \varepsilon$, то старую точку отбрасываем и переходим в новую, а если эти условия не выполняются, то новую точку отбрасываем и остаемся в старой. После этого для новой (или для сохраненной старой) точки все повторяется снова. При достаточно большом числе шагов достигается точка, близкая к искомой. Среднее число испытаний растет с увеличением требований по точности, т. е. с уменьшением величины ε .

В более сложных направленных методах очередные шаги учитывают не только сам факт убывания целевой функции, но и величину $\Delta y - \varepsilon$, чтобы, например, двигаться большими шагами при быстром убывании целевой функции (вдали от минимума) и короткими шагами при медленном его убывании (вблизи минимума).

Особенностью всех методов случайного поиска, которую необходимо учитывать в оперативно-тактической области, является длительное время решения задач оптимизации. Это зачастую исключает возможность их применения не только при непосредственной, но и при заблаговременной подготовке к выполнению поставленной задачи и может явиться затруднением при использовании методов в научно-исследовательской работе.

Для других указанных методов решения задач нелинейного программирования также необходимо проводить проверку возможности и отрабатывать приемы их использования в динамике различных этапов управления, приобретать необходимые навыки. Для изучения методов нелинейного программирования и случайного поиска существует обширная литература [9, 10, 11, 21], а для их использования — подготовленное программное обеспечение.

Что же касается метода множителей Лагранжа, его можно использовать и непосредственно, не прибегая к численным методам, для выработки рекомендаций, практически важных в оперативно-тактической области.

§ 13.3. НЕКОТОРЫЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОПТИМАЛЬНОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ СИЛ И СРЕДСТВ ПО ЗАДАЧАМ И ОБЪЕКТАМ

13.3.1. Оптимальное распределение сил и средств по однотипным объектам

Рассмотрим случай, когда показателем эффективности является математическое ожидание M числа обнаруженных или пораженных объектов, причем этот показатель определяется с помощью выражения

$$M = \sum_{i=1}^k (1 - e^{-u_i}), \quad (13.3.1)$$

где k — число объектов; u_i — потенциал обнаружения или поражения i -го объекта*.

Оптимальному целераспределению соответствует максимум математического ожидания числа M пораженных (обнаруженных) объектов или минимум y математического ожидания числа непораженных (необнаруженных) объектов:

$$y = \sum_{i=1}^k e^{-u_i}. \quad (13.3.2)$$

Требуется распределить ударный (поисковый) потенциал по объектам оптимальным образом**.

Для определенности будем далее говорить об ударных силах или средствах, а ущерб измерять числом пораженных объектов.

Выражения (13.3.1), (13.3.2) соответствуют случаю, когда взаимодействие между силами (средствами), наносящими удар, отсутствует, противодействие противника может считаться не зависящим от способа целераспределения, целераспределение в ходе выполнения задачи не корректируется, выстрелы независимые, закон поражения цели показательный или единичный.

Математическая формулировка задачи: найти числа u_1, u_2, \dots, u_k , обращающие в минимум целевую функцию

$$y(u_1, u_2, \dots, u_k) = \sum_{i=1}^k e^{-u_i} \quad (13.3.3)$$

при ограничении

$$z(u_1, u_2, \dots, u_k) = \sum_{i=1}^k u_i - U \leq 0, \quad (13.3.4)$$

где U — общий потенциал.

Функция Лагранжа имеет вид

$$L = \sum_{i=1}^k e^{-u_i} + \lambda \left(\sum_{i=1}^k u_i - U \right). \quad (13.3.5)$$

Оптимальные значения u_i^0 имеют место в седловой точке, где согласно условиям Куна-Таккера

* О потенциалах обнаружения, поражения см. гл. 17, 18.

** Излагаемые в § 13.3 методы разработаны с использованием трудов профессора Военно-морской академии И. Я. Динера.

$$\left(\frac{\partial L}{\partial u_i}\right)^0 = -e^{-u_i} + \lambda \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (13.3.6)$$

Однако неочевидны тип седловой точки (см. п. 13.2.3, рис. 13.3), номера u_i , равных в седловой точке нулю, и, следовательно, факт наличия знака равенства или неравенства в правой части выражения (13.3.6) для различных u_i ($i = 1, 2, \dots, k$).

Допустим, что для некоторого числа s случаев в (13.3.6) будет знак $=$, а в $k - s$ случаях — знак $>$.

Найдем число s . При $\left(\frac{\partial L}{\partial u_i}\right)^0 > 0$ имеем $u_i = 0$, что означает $(k - s)$ целей не будут обстреляны, а удар

наносится по s целям ($s < k$). При $\left(\frac{\partial L}{\partial u_i}\right)^0 = 0$ имеем $e^{-u_i^0} = \lambda = \text{const}$ и, значит,

$$u_1^0 = u_2^0 = \dots = u_s = \frac{U}{s}. \quad (13.3.7)$$

Математическое ожидание числа непораженных целей составит

$$y(s) = (k - s) + se^{-\frac{U}{s}}.$$

Так как $\frac{\partial y(s)}{\partial s} < 0$, то $y(s)$ — убывающая функция от s . Для обращения $y(s)$ в минимум надо положить $s = k$:

$$y_{\min} = ke^{-\frac{U}{k}}. \quad (13.3.8)$$

Итак, оптимальным распределением ударного потенциала по однотипным объектам (при возможности указанных выше допущений) является его равномерное распределение. При этом математическое ожидание числа пораженных объектов достигает максимума:

$$M_0 = k(1 - e^{-\frac{U}{k}}). \quad (13.3.9)$$

Аналогичное правило имеет место при распределении неоднородных сил и средств с общим потенциалом U по k однотипным объектам. Обозначим: U_j — потенциал j -го типа сил (средств); k_j — число объектов, на которые направлен потенциал U_j ; r — число типов средств. Оптимальным будет распределение, когда соблюдено условие

$$\frac{U_1}{k_1} = \frac{U_2}{k_2} = \dots = \frac{U_j}{k_j} = \dots = \frac{U_r}{k_r} = \frac{U}{k}. \quad (13.3.10)$$

Из этого условия следует

$$k_j = k \frac{U_j}{U}, \quad (13.3.11)$$

т. е. общее число целей должно быть распределено между группами средств поражения пропорционально потенциалам этих групп. При этом вероятности поражения объектов во всех группах будут одинаковы. Таким же образом может быть сформулирована и решена задача поиска объектов, когда распределение поисковых единиц по районам или участкам рубежа должно обеспечить максимизацию математического ожидания числа обнаруженных объектов.

Подчеркнем, что изложенные рекомендации справедливы для таких оперативно-тактических ситуаций, когда эффективность действия сил, средств может быть оценена с использованием выпуклых или вогнутых функций (см. п. 13.1.1). В гл. 17, 18 рассмотрены некоторые из таких ситуаций. Во всех других случаях следование указанным рекомендациям может приводить к грубым промахам при выработке решения или при планировании (см. п. 18.2.2). Сказанное справедливо и для рекомендаций, рассмотренных в пп. 13.3.2, 13.3.3.

13.3.2. Оптимальное распределение сил и средств по группам, состоящим из однотипных объектов

Решение этой задачи рассмотрим на следующем примере.

Пример 13.8. Требуется распределить N средств поражения по группам, каждая из которых включает k_j ($j = 1, 2, \dots, s$) объектов. Все объекты однотипны. Противодействие противника не зависит от варианта распределения средств поражения, распределение не может корректироваться в процессе удара по наблюдаемым результатам ударов (либо такая возможность на заданном этапе подготовки удара не рассматривается). Целью удара является поражение максимально возможного числа объектов противника, поэтому показателем эффективности удара является математическое ожидание числа пораженных объектов. Для формализованной постановки задачи необходимо предварительное уяснение оперативно-тактической постановки задачи.

Обозначим: N_j — число средств поражения, направляемых на j -ю группу объектов; p_j — вероятность поражения объекта j -й группы.

Допустим, что на основании этого уяснения можно сделать вывод: средства поражения действуют независимо, закон поражения цели единичный или показательный*, распределение средств поражения по объектам групп оптимальное для этих условий, т. е. равномерное (см. п. 13.3.1).

Требуется найти распределение средств поражения, при котором математическое ожидание M числа пораженных объектов максимально (математическое ожидание числа y непораженных объектов минимально) при условии, что все средства поражения участвуют в ударе.

Математическая формулировка задачи: найти неизвестные N_1, N_2, \dots, N_s , обращающие в минимум целевую функцию

$$y = \sum_{j=1}^s k_j e^{-\frac{N_j p_j}{k_j}} \quad (13.3.12)$$

при условии

$$\sum_{j=1}^s N_j = N$$

или

* Эти понятия, способ получения выражения (13.3.12) будут рассмотрены в гл. 18.

$$\sum_{j=1}^s N_j - N = 0. \quad (13.3.13)$$

Так как функция (13.3.12) выпуклая, а (13.3.13) — линейная, то для решения этой задачи можно использовать метод выпуклого программирования, а именно найти седловую точку функции Лагранжа (см. п. 13.2.3). Для получения необходимых аналитических выражений необходим предварительный анализ ситуации с целью выяснить, все ли группы противника следует обстреливать и для каких номеров j групп числа N_j должны быть равны нулю (определить тип седловой точки — см. п. 13.2.3).

При малом числе N средств поражения и их низкой эффективности обстреливать все группы противника может оказаться нецелесообразным.

Пронумеруем группы в порядке убывания вероятностей p_j : $p_1 > p_2 > \dots > p_s$. Первую группу следует обстреливать всегда. К обстрелу второй группы целесообразно переходить, когда при направлении очередного средства поражения на первую группу противнику причиняется меньший ущерб, чем при направлении его на вторую группу. Обозначим через v_1 критическое число средств поражения, направляемых на первую группу, после чего целесообразно обстреливать вторую группу. Если на первую группу направлено v_1 средств, то вероятность непоражения каждой цели первой группы равна $e^{-\frac{v_1 p_1}{k_1}}$, а приращение математического ожидания доли числа пораженных объектов при направлении очередного средства на первую и вторую группы соответственно равно $p_1 e^{-\frac{v_1 p_1}{k_1}}$ и p_2 . Отсюда

$$p_1 e^{-\frac{v_1 p_1}{k_1}} = p_2. \quad (13.3.14)$$

Логарифмируя, получим

$$v_1 = \frac{k_1}{p_1} \ln \frac{p_1}{p_2}. \quad (13.3.15)$$

При $N \leq v_1$ следует наносить удар только по первой группе. Тогда $N_1^0 = N$, $N_2^0 = \dots = N_s^0 = 0$. При $N > v_1$ следует обстреливать и вторую группу.

Существует и критическое число v_2 , когда целесообразно переходить к обстрелу третьей группы, если при назначении $(v_2 + 1)$ -го средства поражения на вторую или первую группу, противнику будет причинен меньший ущерб, чем если бы это средство поражения было направлено на третью группу. При наряде, в точности равном числу v_2 , получим

$$p_1 e^{-\frac{N_{12} p_1}{k_1}} = p_2 e^{-\frac{N_{22} p_2}{k_2}} = p_3,$$

где

$$N_{12} + N_{22} = v_2.$$

Аналогично из условия

$$p_1 e^{-\frac{N_{1j} p_1}{k_1}} = p_2 e^{-\frac{N_{2j} p_2}{k_2}} = \dots = p_j e^{-\frac{N_{jj} p_j}{k_j}} = p_{j+1} \quad (13.3.16)$$

найдем критическое число v_j средств поражения, после которого необходимо переходить к поражению $(j + 1)$ -й группы противника. Из (13.3.16) получим

$$N_{ij} = \frac{k_i}{p_i} \ln \frac{p_j}{p_{j+1}};$$

$$v_j = \sum_{i=1}^j N_{ij} = \sum_{i=1}^j \frac{k_i}{p_i} \ln \frac{p_i}{p_{j+1}}. \quad (13.3.17)$$

При условии

$$v_{j-1} < N \leq v_j \quad (13.3.18)$$

необходимо распределять наряд на j групп из общего их числа s . В случае $N > v_{s-1}$ наряд распределяется по всем s группам.

Итак, оптимальному распределению соответствуют группы обстреливаемые и необстреливаемые. Пусть выполняется условие (13.3.18). Тогда $N_i > 0$ при $i = 1, 2, \dots, j$ и $N_i = 0$ при $i = j + 1, j + 2, \dots, s$. Уточним математическую формулировку задачи: найти неизвестные

N_1, N_2, \dots, N_j , обращающие в минимум целевую функцию $y = \sum_{i=1}^j k_i e^{-\frac{p_i N_i}{k_i}}$, при условии $\sum_{i=1}^j N_i = N$ или $\sum_{i=1}^j N_i - N = 0$.

Минимуму математического ожидания числа непораженных объектов соответствует $\left(\frac{\partial L}{\partial N_i}\right)^0 = 0$ при $i = 1, 2, \dots, j$, где выпуклая функция Лагранжа имеет вид

$$L = \sum_{i=1}^j k_i e^{-\frac{N_i p_i}{k_i}} + \lambda \left(\sum_{i=1}^j N_i - N \right). \quad (13.3.19)$$

Отсюда

$$\left(\frac{\partial L}{\partial N_i}\right)^0 = -p_i e^{-\frac{N_i^0 p_i}{k_i}} + \lambda^0 = 0;$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)^0 = \sum_{i=1}^j N_i^0 - N = 0.$$

Поэтому

$$p_1 e^{-\frac{N_1^0 p_1}{k_1}} = p_2 e^{-\frac{N_2^0 p_2}{k_2}} = \dots = p_j e^{-\frac{N_j^0 p_j}{k_j}} = \lambda^0. \quad (13.3.20)$$

То есть при оптимальном распределении средств по группам объектов имеет место равенство вероятности поражения объекта очередным средством для любой обстреливаемой группы.

Из (13.3.20) находим

$$N_i^0 = \frac{k_i}{p_i} (\ln p_i - \ln \lambda^0);$$

$$N = \sum_{i=1}^j N_i^0 = \sum_{i=1}^j \frac{k_i}{p_i} \ln p_i - \ln \lambda_0 \sum_{i=1}^j \frac{k_i}{p_i}.$$

Обозначим для краткости

$$\alpha_i = \frac{k_i}{p_i}; \quad -\beta_i = \frac{k_i}{p_i} \ln p_i.$$

Получим

$$-\ln \lambda^0 = \frac{N + \sum_{i=1}^j \beta_i}{\sum_{i=1}^j \alpha_i}$$

и, следовательно,

$$N_i^0 = \frac{\alpha_i}{\sum_{i=1}^j \alpha_i} \left(N + \sum_{i=1}^j \beta_i \right) - \beta_i. \quad (13.3.21)$$

Везде выше числа N_i средств поражения считались непрерывными аргументами. Получаемые изложенным методом планы распределения сил или средств являются нецелочисленными и подлежат округлению

Итак, для сформулированных условий рекомендация выглядит следующим образом: средства поражения не следует распределять на все группы противника, а выделять те из групп, где суммарный ущерб противнику при их обстреле максимален; потенциал поражения среди объектов выделенных подобным образом групп необходимо распределить равномерно.

13.3.3. Оптимальное распределение сил и средств по группам неоднотипных объектов

Продолжим рассмотрение тех оперативно-тактических ситуаций, когда показателем эффективности является математическое ожидание причиняемого противнику ущерба. Трудность при использовании в этих случаях изложенных выше приемов для обоснования распределения сил и средств заключается в невозможности суммировать разнородный ущерб при поражении разнородных объектов.

В некоторых случаях можно объективно определить коэффициент важности a_i объекта i -го типа и добиться аддитивности ущерба.

Пример 13.9. При действиях германских подводных лодок во время второй мировой войны на коммуникациях Англии ставилась цель поражения грузовых судов с максимально возможным суммарным водоизмещением. Показателем эффективности при этом являлось математическое ожидание уничтоженного водоизмещения, а коэффициентом важности атакуемого i -го объекта — его водоизмещение V_i .

Пример 13.10. При действиях подводных лодок США на коммуникациях Японии во время второй мировой войны ставилась цель сорвать или в минимальной степени снизить снабжение Японии нефтепродуктами. Показателем эффективности при этом являлось математическое ожидание

объема (массы) нефтепродуктов, уничтожаемого на атакуемых танкерах (транспорты), а коэффициентом важности атакуемого i -го объекта — масса нефтепродуктов на нем.

Пример 13.11. Целью удара по десантному отряду противника является поражение максимально возможного числа живой силы десанта. Показателем эффективности удара в этом случае является математическое ожидание пораженной живой силы противника, а коэффициентом важности объекта i -го типа — численность личного состава десанта на нем.

Пример 13.12. Целью удара по корабельным группам противника является срыв или максимальное ослабление удара этих групп по нашим объектам. Установлено, что причиняемый нам ущерб пропорционален числу боеприпасов, имеющихся на кораблях ядра этих групп. Тогда показателем эффективности удара по противнику может выступать математическое ожидание числа недовыпущенных противником боеприпасов, а коэффициентом важности кораблей ядра групп противника — число боеприпасов на них на момент удара.

Во всех приведенных и аналогичных им случаях математическое ожидание причиненного ущерба составит

$$M = \sum_{i=1}^s a_i k_i \left(1 - e^{-\frac{N_i p_i}{k_i}}\right),$$

а недопричиненного —

$$y = \sum_{i=1}^s a_i k_i e^{-\frac{N_i p_i}{k_i}}.$$

Для обоснования распределения сил и средств при этом могут использоваться приемы, изложенные в п. 13.3.2, со следующими отличиями:

— группы следует нумеровать в порядке убывания величин $p'_i = a_i p_i$:

$$p'_1 > p'_2 > \dots > p'_s;$$

— определять j -е критическое число v_j , после которого следует переходить к обстрелу $(j + 1)$ -й группы, по формуле

$$v_j = \sum_{i=1}^j \frac{k_i}{p_i} \ln \frac{p'_i}{p'_{j+1}};$$

— рассчитывать число β' (см. 13.3.21) по формуле

$$\beta' = -\frac{k_i}{p_i} \ln p'_i.$$

В изложенных выше рекомендациях по оптимальному распределению сил и средств мы исходили из пуассоновского распределения числа средств, поражающих объекты противника, при этом математическое ожидание числа пораженных объектов определялось по формуле

$$M = k \left(1 - e^{-\frac{Np}{k}}\right).$$

Аналогичные рекомендации (см. пп. 13.3.1—13.3.3) можно получить при биномиальном распределении числа поражающих объекты средств, когда

$$M = k \left[1 - \left(1 - \frac{p}{k} \right)^N \right].$$

Читателю предлагается использовать изложенные в § 13.3 подходы для получения необходимых рабочих методик.

Перейдем теперь к рассмотрению тех многочисленных случаев, когда объективными методами невозможно установить коэффициенты важности объектов a_i различных i -х типов. Дело часто усугубляется еще и тем, что на различных этапах выполнения поставленной задачи эти коэффициенты обычно меняются. Например, коэффициент важности тральщика группы траления различен на этапах разведывательного и контрольного траления, проводки кораблей за тралами, окончания развертывания главных сил и т. д.

В практике математического моделирования существуют различные способы учета важности объектов в рассматриваемых случаях.

Один из способов — использование экспертных оценок для получения на их основе статистических оценок коэффициентов важности. Недостаток способа заключается в том, что такие оценки зачастую являются характеристикой субъективных мнений экспертов, а не объективной реальности. Способ экспертных оценок можно рекомендовать, если этот недостаток исключен, признаком чего является наличие методики для объективного определения точности и надежности экспертной оценки (как это, например, имеет место для экспертных оценок времени выполнения мероприятий при сетевом планировании).

В ряде случаев важной информацией для командира при выработке решения будет зависимость оптимального распределения сил и средств от важности объектов, а также степень устойчивости оптимального распределения к изменению этой важности. Дело в том, что оптимальное распределение обладает свойством консерватизма: оно способно не изменяться в некотором диапазоне изменения коэффициентов важности объектов. Быстродействие и другие возможности существующих ЭВМ позволяют достаточно быстро производить серии расчетов для определения областей устойчивых распределений*.

Радикальным способом в большом числе ситуаций является использование показателей эффективности более высокого уровня. При этом структура математической модели должна позволять учитывать влияние того или иного распределения некоторых сил или средств по объектам, районам на эффективность выполнения той задачи, в интересах которой действуют эти силы и средства. Модели оптимизации распределения сил и средств являются модулями соответствующей модели выполнения поставленной задачи. Чаще всего это ведет к необходимости комплексного использования творчества командира и математического моделирования, т. е. перехода к эвристической оптимизации (см. § 2.3).

Эффективное использование методов нелинейного программирования возможно только при разработке системы программного обеспечения. В настоящее время имеется обширная библиотека программ для реализации на ЭВМ различных методов нелинейного программирования.

* Сказанное касается и других параметров обстановки, от которых зависит распределение.

Глава 14. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПРИ УПРАВЛЕНИИ СИЛАМИ

§ 14.1. ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПРИ УПРАВЛЕНИИ СИЛАМИ

14.1.1. Область применения метода

Материалы гл. 12, 13 свидетельствуют, что возможность применения того или иного метода оптимизации (в частности линейного, нелинейного программирования) определяется особенностями математической формулировки задачи. В свою очередь, содержание математической формулировки определяется особенностями реального оптимизируемого явления. Правда, в некоторых случаях можно использовать математические приемы, принятие допущений и ограничений, позволяющих получить математическую формулировку задачи желаемой структуры. Но такие возможности открываются лишь в некоторых редких реальных ситуациях, их осуществление предъявляет весьма высокие требования к квалификации всех участников (см. § 2.5) математического моделирования и, главное, требует больших временных затрат. Поэтому рациональным является путь разработки методов оптимизации для различных классов ситуаций. В связи с этим и появился метод динамического программирования.

Метод динамического программирования не требует, чтобы целевая функция и ограничения задачи являлись линейными выражениями (как это необходимо при линейном программировании), выпуклыми (вогнутыми) функциями, имеющими производные во всей области существования неизвестных (как это требуется при выпуклом программировании). Математическая формулировка задачи может быть задана и математически и алгоритмически. Метод позволяет получать целочисленные решения.

Однако применение метода возможно лишь в случаях, когда процесс оптимизации, планирования (но необязательно само управляемое действие!) может быть представлен как многошаговый процесс последовательных назначений^{*}. Этот процесс должен быть марковским: возможность и последствия оптимизации на последующих его шагах должны зависеть только от состояния оптимизируемой системы к данному шагу и не зависеть от того, как именно система пришла в это состояние, т. е. как осуществлялась оптимизация на предыдущих шагах. Далее, необходимо чтобы результат процесса планирования оценивался показателем эффективности, который является суммой или произведением показателей эффективности, полученных на всех шагах^{**}. Конечно, для этого необходимо, чтобы вид показателя эффективности не менялся от шага к шагу оптимизации (назначений).

Ситуаций, удовлетворяющих указанным требованиям в оперативно-тактической, военно-экономической областях, достаточно много, и динамическое программирование может применяться при выработке решений, планировании для распределения сил, средств, других ресурсов по объектам и задачам, оптимизации способов применения сил, планировании взаимодействий сил, использовании средств на различных этапах выполнения поставленной задачи: развертывания сил, наведения, нанесения ударов по противнику, отражения ударов противника и т. д. В проектно-

^{*} Управляемое действие может быть и одношаговым (залп, удар) действием и случайным процессом с дискретным или непрерывным временем переходов (последовательные удары групп, наведение подводной лодки на противника и т. д.).

^{**} Об этом свойстве говорят как о свойствах аддитивности или мультипликативности целевой функции.

конструкторских работах метод используется для обоснования структуры систем. Для иллюстрации сказанного рассмотрим примеры.

Пример 14.1. Для нанесения удара по k неоднотипным объектам выделено N однородных носителей оружия. Носители наносят удары способом “в кратчайший срок” независимо друг от друга. Целью удара является нанесение противнику максимального ущерба, целью моделирования — обоснование распределения носителей по объектам удара.

Пример 14.2. На объект противника, обнаруженный силами разведки, осуществляется наведение подводной лодки. Целью наведения является обнаружение подводной лодки противника. Место объекта распределено по нормальному закону, средняя квадратическая ошибка $\sigma(t)$ места возрастает по мере увеличения времени t , прошедшего от момента обнаружения объекта. Заданы точка, ориентированная относительно объекта противника, в которую наводится подводная лодка (допустим, в центр распределения места противника), и последующее маневрирование (допустим, движение контркурсом). Требуется обосновать скорость движения подводной лодки на различных этапах ее наведения (полный ход, средний ход, малый ход). Чем больше скорость движения подводной лодки, тем меньше рассеивание места объекта при выходе подводной лодки в заданную точку, тем меньше время пребывания подводной лодки в зоне противолодочной обороны. С другой стороны, с увеличением скорости движения подводной лодки уменьшается дальность действия ее средств наблюдения, из-за чего уменьшается вероятность обнаружения объекта; увеличивается заметность подводной лодки и возможность ее обнаружения противолодочными силами противника.

Пример 14.3. Решить ту же задачу с учетом возможности получения на подводной лодке в процессе наведения дополнительных данных о месте и параметрах движения противника.

Пример 14.4. Для повышения надежности радиосвязи подводная лодка может передавать одно и то же сообщение n раз на различных частотах. Возможны два способа связи: а) с передачей на подводную лодку подтверждения о получении адресатом передаваемого сообщения; б) без передачи такого подтверждения.

При способе “а” подводная лодка после каждой очередной передачи в течение довольно продолжительного времени τ ожидает на перископной глубине подтверждения. Если подтверждение не принято, подводная лодка повторяет сообщение на новой частоте. Повторные передачи прекращаются, если получено подтверждение, если подводная лодка обнаружена противолодочными силами противника, если осуществлено n повторных передач.

При способе “б” подводная лодка с максимально возможной быстротой осуществляет n повторных передач сообщения и погружается на рабочую глубину.

Каждая из радиопередач подводной лодки может быть обнаружена радиоразведкой противника, что снизит эффективность выполнения ею поставленной задачи.

Наибольшая вероятность обнаружения подводной лодки противолодочными силами — при способе “а”, наибольшая вероятность ее обнаружения радиоразведкой — при способе “б”^{*}.

Требуется обосновать способ радиопередач (способы “а”, “б” или их комбинацию), при котором вероятность получения адресатом сообщения максимальна, а вероятности обнаружения подводной лодки и ее радиопередач не превышают заданной величины.

Пример 14.5. При развертывании сил они последовательно преодолевают ряд рубежей обороны противника, где могут быть обнаружены и поражены. Состав и эффективность сил противника на различных рубежах различны. Выделен ресурс сил для ослабления обороны противника на рубежах с целью обеспечения развертывания сил. Боевые возможности выделенного

^{*} Читателю предлагается обосновать это утверждение.

ресурса различны при действии против сил противника на различных рубежах. Требуется обосновать распределение ресурса для действий против рубежей противника с целью обеспечить минимальные потери развертываемых сил.

Пример 14.6. При оценке обстановки выявлено главное направление и направление обеспечивающих действий сил соединения. Использование части ударного потенциала соединения на обеспечивающее направление способно повысить эффективность удара на главном направлении. Требуется обосновать распределение ударного потенциала соединения для его использования на главном и обеспечивающем направлениях.

Пример 14.7. Конструируется некоторая система, рассматривается вопрос ее ремонта в процессе эксплуатации, а именно снабжение системы комплектом запасных частей (ЗИП). Требуется, чтобы ремонт системы осуществлялся в срок не более заданного t_3 с вероятностью $P(t_3)$ при минимально возможной стоимости комплекта ЗИП. Заданы время T эксплуатации системы, законы распределения времени безотказной работы отдельных ее элементов. Наименьшей стоимостью обладает комплект такого ЗИП, который состоит из набора отдельных деталей системы. Но при этом велико время нахождения неисправного элемента и его замены. При блочном построении системы время диагноза неисправного блока и его замены тем меньше, чем крупнее блоки. Однако при этом возрастает стоимость ЗИП. Требуется обосновать структуру блоков системы, число различных запасных блоков в составе ЗИП.

Пример 14.8. Предприятие имеет организационную структуру на базе отделений. Ежегодно осуществляется распределение ассигнований на научно-исследовательские и опытно-конструкторские работы. Каждое из N отделений выполняет работы трех видов:

1) поисковые исследования. Если на исследования такого рода j -му отделению выделяются ассигнования размером v_j , то оценка ожидаемого досрочного дохода составляет $U_j(v_j)$;

2) выпуск продукции, по которой поисковые исследования уже произведены и требуются опытно-конструкторские работы и испытания. Для таких работ ассигнования в размере w_j дадут доход $Q_j(w_j)$;

3) улучшение качества уже выпускаемой продукции. Ассигнования в размере x_j при этом должны принести доход $S_j(x_j)$.

Требуется распределить ассигнования между отделениями таким образом, чтобы обеспечить максимизацию дохода предприятия.

14.1.2. Особенности оперативно-тактической постановки задачи. Показатели эффективности

Оперативно-тактическая постановка задачи, как и всегда, должна содержать сведения, позволяющие выявить основной и дополнительные показатели эффективности выполнения поставленной задачи, цель моделирования и дать возможность формализованной постановки задачи. Формализованная постановка в общем случае должна иметь следующее содержание.

Указывается система, которая из некоторого начального должна быть оптимальным образом переведена в конечное состояние. Оптимальность перевода характеризуется показателем эффективности. Часто оптимизируется основной показатель эффективности выполнения поставленной задачи, но может оптимизироваться и какой-либо дополнительный показатель при ограничении, наложенном на основной показатель*. В примере 14.1 систему составляют объекты противника, система из состояния “объекты противника не поражены” переводится в состояние

* Об основном и дополнительных показателях эффективности см. гл. 2.

“объекты противника поражены”. Оптимизируется показатель эффективности — математическое ожидание числа пораженных объектов. В примерах 14.2, 14.3 системой является подводная лодка, оптимизируемым показателем эффективности — вероятность обнаружения ею объекта противника, в примере 14.4 система — подводная лодка, оптимизируемым показателем эффективности является вероятность получения адресатом передаваемого сообщения при условии, что вероятности обнаружения противником подводной лодки и ее радиопередач не будут выше заданных. Заметим, что в примере 14.4 ограничение на скрытность подводной лодки, скрытность ее радиопередач есть косвенное ограничение на величину основного показателя ее эффективности, так как эти ограничения определяются и с учетом их влияния на величину основного показателя.

Оптимизируемый показатель эффективности и ограничения, которые учитываются при оптимизации системы, являются первой из трех групп параметров, описывающих систему. Две другие группы параметров будут показаны ниже.

Далее указываются этапы оптимизации — шаги последовательных назначений. В ряде случаев они однозначно определяются особенностями оптимизируемой системы. Так, в примере 14.1 такими шагами являются назначения носителей на объекты удара. В примере 14.4 общее число назначений равно предельному числу n повторных передач. В примерах 14.2, 14.3 процесс наведения подводной лодки является непрерывным. Если относительный путь движения подводной лодки разбить на участки и скорость ее движения назначать для каждого из них, то задача оптимизации сведется к многошаговому процессу назначений скорости подводной лодки на каждом из участков. От числа участков будет зависеть точность и продолжительность решения задачи*.

Определение шагов назначений сопровождается определением, что есть управление (назначение ресурса) и параметры управления. В примере 14.1 управлением является назначение на данном шаге того или иного числа носителей оружия (ресурса) на объект удара, а параметром управления — число назначаемых носителей оружия. В примерах 14.2, 14.3 управлением выступает назначение той или иной скорости хода на каждом из участков наведения, а параметрами управления — время, прошедшее от начала наведения (это и есть ресурс), а также скорость подводной лодки. В примере 14.4 управлением будет назначение на каждом шаге передач, осуществляемых способом “б” (ресурса), а параметром управления — число таких передач.

Завершается эта часть постановки задачи указанием способа получения суммарного показателя эффективности всего процесса назначений: сложение показателей эффективности, полученных на каждом шаге назначений (аддитивный показатель эффективности), или их перемножение (мультипликативный показатель). В примерах 14.1, 14.2 показатели эффективности аддитивны. В примере 14.4 показатель эффективности мультипликативен, если минимизируется вероятность неприема сообщения адресатом. Перемножение вероятностей можно заменять суммированием их логарифмов.

Определение указанных элементов постановки задачи позволяет определить следующий ее элемент — постановки задач для оценки эффективности управлений, избираемых на каждом шаге. В условиях примера 14.1 необходимо поставить задачи для разработки моделей, позволяющих

* Можно устремить длину участка к нулю и решать эту задачу (и ей подобные) как непрерывную задачу динамического программирования. Такие задачи сложны и в оперативно-тактической области используются редко. Существуют и методы оптимизации при бесконечном плановом периоде, когда число N дискретно и не ограничено. Необходимость в таких методах может возникать при планировании работы предприятий, управления запасами, систематических действиях сил. В учебнике эти методы не рассматриваются, они изложены в многочисленных пособиях по исследованию операций (см., например: Вагнер Г. Основы исследования операций. М., Мир, 1973).

вычислить вероятности поражения каждого из объектов назначенным числом носителей; в примерах 14.2, 14.3 — вероятность обнаружения объекта на каждом участке наведения подводной лодки; в примере 14.4 — вероятности приема сообщения адресатом, обнаружения подводной лодки за заданное время τ , обнаружения радиопередач подводной лодки при заданном их числе; в примере 14.5 — эффективность поражения сил обороны противника на различных рубежах выделенным ресурсом обеспечивающих сил и эффективность противодействия нашим силам со стороны тех сил противника, которые сохранят боеспособность.

Анализ разработанных элементов постановки задачи позволяет выявить вторую группу параметров, характеризующих систему. Необходимость в таких параметрах и способы их выявления нуждаются в специальных пояснениях. В методе динамического программирования используется следующий принцип оптимальности: **каковы бы ни были начальное состояние и начальное управление, последующее управление должно быть оптимальным по отношению к состоянию, полученному в результате действия начального управления.** Иначе говоря, при определении оптимального управления для последующих шагов должно учитываться только состояние системы перед данным шагом безотносительно к тому, как система на предыдущих шагах пришла в это состояние.

Это — требование отсутствия последствия, марковости процесса. С точки зрения математического моделирования требование марковости процесса назначений заключается в том, чтобы иметь возможность оптимально назначить оставшиеся ресурсы (говоря шире, выбрать управление) на последующих шагах планирования только на основании знания состояния системы к данному шагу, без “оглядки” на предыдущие шаги. Для этого на каждом шаге надо знать все те характеристики всех тех состояний системы, от которых зависит выбор оптимального распределения на последующих шагах и которые есть следствие предыдущих шагов. Эти состояния, а также параметры, их характеризующие, должны быть выявлены и разработаны способы их вычисления на всех шагах. Так, в примере 14.5 эффективность действия сил обороны противника зависит от числа объектов сил, преодолевающих рубеж, например подводных лодок, самолетов и т. д. Параметр — математическое ожидание числа объектов, преодолевающих рубеж, — явится одной из характеристик системы (каким бы ни был оптимизируемый показатель эффективности). К числу параметров второй группы, характеризующих систему, относятся также число выполненных (оставшихся невыполненными) шагов назначений, число израсходованных (оставшихся неизрасходованными) ресурсов, а также значения показателей эффективности, выступающих как ограничения. Так, в примере 14.4 на каждом шаге назначения числа передач необходимо учесть число выполненных назначений, число использованных частот, вероятности обнаружения подводной лодки и ее радиопередач к данному шагу. В простейшем случае характеристиками системы являются число неизрасходованных ресурсов и число невыполненных назначений (см. пример 14.1). Фактически с помощью параметров второй группы в динамическом программировании осуществляется учет при выборе управления на последующих шагах предыстории процесса назначений: и управления, принятого на предыдущих шагах, и достигнутых при этом результатов. Таким образом, о марковости процесса оптимизации можно говорить только с математической точки зрения. Отсутствие последствия при математическом моделировании для многошагового процесса планирования “организуется” искусственно. Поучительно обратить внимание руководителей любого ранга в любой области деятельности на следующие рекомендации, вытекающие из принципа оптимальности: приступая к выбору управления на каждом шаге, необходимо выявить и учесть, во-первых, последствия управления на предыдущих шагах — существенно важные элементы состояния

управляемой системы к данному шагу — и, во-вторых, те последствия управления на данном шаге, которые скажутся на последующих шагах. Эти рекомендации кажутся тривиальными, но как сложно бывает следовать им на практике!

Третью группу параметров, характеризующих систему на каком-либо шаге назначений, составляют так называемые параметры состояния, необходимые для математического моделирования. Так, в примере 14.1 это будут вероятности попаданий в объект средств поражения носителей, математическое ожидание числа попаданий, необходимых для поражения объекта и т. д.

Часто характеристики системы первой и второй групп являются общими для всех шагов назначений, характеристики же третьей группы могут быть индивидуальными для каждого шага. В примерах 14.1— 14.4 все характеристики (но не их численные значения — параметры) системы одинаковы для всех шагов назначений*, в примере 14.5 характеристики третьей группы индивидуальны для каждого шага.

Формализованная постановка задачи завершается описанием вариантов обстановки, в которых может выполняться поставленная задача. Так, в условиях примера 14.5 это могут быть варианты гидрологических условий при разворачивании подводных лодок, радиолокационной наблюдаемости при разворачивании авиации, варианты построения системы обороны противника. Для выработки рекомендаций при этом потребуются привлечь и другие методы математического моделирования, например методы теории статистических решений, теории игр и т. д. (см. гл. 15, 16).

Как можно видеть, формализованная постановка задачи требует, чтобы в оперативно-тактической постановке задачи содержались многие специфические сведения, позволяющие при их уяснении сформулировать задачу оптимизации как задачу динамического программирования. К важнейшим из них следует отнести сведения, позволяющие интерпретировать задачу оптимизации как многошаговый марковский процесс последовательных назначений. В ряде случаев формализованная постановка задачи является результатом анализа математической формулировки требуемой задачи оптимизации, осуществленной в общем виде (см. гл. 11). Командир (офицер штаба) будет осуществлять оперативно-тактическую постановку задачи, используя оперативно-тактический (тактико-специальный) понятийный аппарат. Эффективное применение метода динамического программирования, возможно, если специалист по исследованию операций хорошо знает метод, имеет должную оперативно-тактическую (тактико-специальную) подготовку, обладает навыками применения метода для решения задач оптимизации, свойственных данному соединению, взаимодействующим с ним силам, используемым системам оружия и технических средств. Большое значение имеет слаженная работа всех специалистов, участвующих в математическом моделировании (см. гл. 2).

§ 14.2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Если задача оптимизации получила формализованное описание как задача динамического программирования, то далее требуется разработать ее математическую формулировку — математическую модель оптимизации, включить эту модель в состав математического обеспечения ЭВМ (АСУ), подготовиться к реализации модели на имеющихся вычислительных средствах, а затем выполнить оперативно-тактические расчеты в соответствии с замыслом моделирования (об этапах исследования операций см. § 2.1). Что же касается методики выполнения оперативно-тактических

* Читателю предлагается указать ситуации, когда в условиях примеров 14.2, 14.3 характеристики третьей группы могут быть различными для разных шагов назначений.

расчетов и выработки рекомендаций в динамике творческой деятельности командира, офицера штаба, то она соответствует методике, изложенной в § 2.3 и гл. 11.

14.2.1. Описание процесса и процедуры решения задачи динамического программирования

Нахождение оптимального плана методами динамического программирования осуществляется в два этапа. На 1-м этапе производятся последовательные назначения распределяемого ресурса от последнего шага назначений к первому. На 2-м этапе последовательно, от первого шага к последнему, анализируются полученные результаты и формируется оптимальный план. Рассмотрим первый этап.

Итак, в методе динамического программирования процесс выработки оптимального плана рассматривается как процесс оптимизации последовательных назначений некоторого ограниченного ресурса (сил, средств, времени, дистанции и т. д.). При выделении ресурса для каждого шага назначений приходится считаться с потребностями последующих шагов. Исключение в этом смысле составляет лишь последний шаг: весь оставшийся нераспределенным к последнему шагу ресурс необходимо израсходовать на этом шаге. Поэтому процесс оптимизации назначений ресурса начинается с последнего шага. В примере 14.4 последним шагом назначения скорости хода наводимой подводной лодки является последний участок ее пути. В примере 14.1, где рассматриваются независимые удары носителей оружия, возможна любая нумерация объектов удара. Но если порядок нумерации избран, назначения начинаются с последнего (по номеру) объекта.

Однако объем ресурсов, оставшийся не распределенным к последнему шагу, неизвестен. Неизвестны и другие параметры второй группы (кроме осуществленных шагов назначений), знание которых необходимо для обоснования распределения ресурсов (см. п. 14.1.2). Поэтому рассматриваются все возможные гипотезы о неизрасходованных ресурсах и других неизвестных параметрах второй группы, т. е. о состоянии системы после предпоследнего шага. Назначение ресурса на данном шаге для условий той или иной гипотезы называется *условным управлением*. Для условного управления с использованием специально сформированных моделей вычисляются значения показателя эффективности, ограничений задачи. То из условных управлений, при котором достигается оптимальное значение показателя эффективности (с учетом ограничений задачи), называется *условным оптимальным управлением*. На последнем шаге условным оптимальным управлением является назначение всего оставшегося ресурса.

Итак, найдено условное оптимальное управление на последнем шаге для любой гипотезы о неизрасходованном ресурсе, состоянии оптимизируемой системы. Вычислены показатели эффективности, соответствующие всем условным оптимальным управлениям.

Далее переходят к оптимизации назначений на следующем от конца, предпоследнем шаге. Вновь строят гипотезы о неизрасходованном ресурсе и состоянии системы к этому шагу. Для каждой из полной группы гипотез определяют условное оптимальное управление на двух шагах — предпоследнем и последнем. С этой целью рассматривают все возможные управления, которые сводятся к назначению части ресурса на нужды предпоследнего шага и остальной части ресурса на нужды последнего шага. Для каждого управления определяют значение показателя эффективности на предпоследнем шаге. Затем суммируют его (либо ищут произведение) с ранее вычисленным значением показателя эффективности на последнем шаге, получая, таким образом, значение условного показателя эффективности за два шага. Произведя их сравнительную оценку для всех управлений, выбирают оптимальное значение показателя эффективности. Ему соответствует условное оптимальное управление для данной гипотезы о состоянии системы.

Аналогичным образом поступают в отношении всех гипотез.

В итоге рассмотрения предпоследнего шага назначений (выбора управления) фиксируются все гипотезы о состоянии системы к предпоследнему шагу и для каждой гипотезы — условное оптимальное управление и соответствующее ему условное оптимальное значение показателя эффективности. Вся остальная информация исключается из дальнейшего рассмотрения (стирается из памяти ЭВМ). Теперь, каким бы ни был исход предшествующего шага (состояние системы), известны и условное оптимальное управление на двух последних шагах и соответствующие им условные оптимальные значения показателя эффективности.

Точно таким же образом к предпоследнему шагу может быть присоединен третий (от конца) шаг: строят гипотезы, определяют условные оптимальные управления на трех последних шагах и соответствующие им условные оптимальные значения показателей эффективности за три шага. С этой целью для каждой гипотезы рассматривают все возможные управления, каждое из которых заключается в выделении части ресурса для нужд третьего (от конца) шага и остальной части ресурса для нужд предпоследнего и последнего шагов. После этого вычисляют значение показателя эффективности, достигаемого на третьем шаге, суммируют с ранее вычисленным значением оптимального показателя эффективности, достигаемым на двух последних шагах, если на нужды этих шагов осталось данное значение ресурса. Сравнив значения условных показателей эффективности, находят оптимальное значение и соответствующее ему условное оптимальное управление. После этого фиксируют все гипотезы, условные оптимальные управления и условные оптимальные значения показателей эффективности. Все остальные результаты, полученные на третьем (от конца) шаге, исключаются из дальнейшего рассмотрения.

Самый последний (от конца) первый шаг, с которого начинается процесс назначений, планируется иначе. Состояние системы, состав ресурсов к этому шагу известны. Поэтому строить гипотезы нет нужды. Оптимальное управление на этом шаге определяется с учетом известного первоначального состояния системы. Рассматриваются возможные управления — выделение части ресурсов для нужд первого от начала (последнего от конца) шага, остальной части ресурсов — для нужд всех последующих шагов. Далее, как обычно, вычисляется значение показателя эффективности для условий первого шага; ищется ранее вычисленное условное оптимальное значение показателя эффективности, соответствующее тому состоянию системы (в том числе и оставшемуся ресурсу), которое будет иметь место после назначения, сделанного на первом шаге, суммируются (перемножаются) эти два значения показателя эффективности, в результате чего получается значение показателя эффективности за все шаги: за первый шаг — при данном управлении, за все последующие шаги — при оптимальном управлении на всех этих шагах. Сравнив значения показателей эффективности для всех управлений на 1-м (от начала) шаге, находят оптимальное значение показателя. Ему соответствует оптимальное управление на первом шаге — выделение ресурса для первого и последующих шагов.

После этого выполняется второй этап решения задачи: последовательно просматриваются ранее определенные условные оптимальные управления, начиная с первого и кончая последним шагом, и определяется суммарный оптимальный план.

Выше было дано описание процесса решения задачи в самом общем виде. Детализируем его, обратившись к примеру.

Пример 14.8. Уточним условия примера 14.1. Планируются удары семи однотипных носителей оружия по четырем объектам. Вероятности p_i поражения i -го объекта одним носителем и ущерб c_i , причиняемый противнику при поражении i -го объекта, приведены в табл. 14.1. Действия носителей

оружия независимы, цель удара — причинить противнику максимально возможный ущерб. Для определенности будем считать: объектами удара являются транспорты противника, коэффициентами стоимости c_i — десятки тысяч тонн их водоизмещения, ущерб, причиняемый противнику — суммарное водоизмещение пораженных транспортов. Требуется обосновать распределение наряда носителей по объектам противника.

Т а б л и ц а 14.1

Номера объектов	1	2	3	4
p_i	0,2	0,4	0,5	0,3
c_i	3	1	1	1

Дадим формализованную постановку задачи. Оптимизируемую систему составляют объекты противника, по которым наносятся удары. Показателем эффективности удара является математическое ожидание ущерба, причиняемого противнику. Задача оптимизации распределения носителей по объектам удара может быть интерпретирована как задача оптимизации последовательных шагов назначения носителей на объекты. Показатель эффективности удара аддитивен. Состояние системы на каждом шаге характеризуется числом осуществленных шагов назначений и нераспределенным ресурсом — нераспределенными носителями. Управлением на каждом шаге выступает назначение носителей на объекты удара, параметром управления — число носителей. Далее допустим, что осуществлена постановка задачи и разработана модель для определения математического ожидания $M_j(x_i)$ ущерба, причиняемого противнику, если на j -й объект назначено x_i носителей оружия*:

$$M_j(x_i) = c_j [1 - (1 - p_j)^{x_i}].$$

Перейдем к решению задачи. Для удобства дальнейших вычислений сведем значения $M_j(x_i)$ в табл. 14.2.

Т а б л и ц а 14.2

x_i	$M_1(x_i)$	$M_2(x_i)$	$M_3(x_i)$	$M_4(x_i)$
1	0,600	0,400	0,500	0,300
2	1,080	0,640	0,750	0,510
3	1,464	0,784	0,875	0,657
4	1,770	0,870	0,938	0,760
5	2,016	0,922	0,969	0,832
6	2,214	0,953	0,984	0,882
7	2,370	0,972	0,992	0,918

* Эти вопросы рассматриваются в гл. 18.

Описание процесса решения задачи удобно осуществлять, сведя вычисления в табл. 14.3. В 1-й графе этой таблицы помещены гипотезы о числе n_j носителей оружия, не распределенных к j -му шагу назначений. Во 2-й графе для каждой гипотезы указаны параметры x_i всех возможных управлений.

Таблица 14.3

n_j	x_i	$f_{4,4}(n_4)$	$M_3(x_i^{(3)}) + f_{4,4}(n_3 - x_i^{(3)})$	$M_2(x_i^{(2)}) + f_{3,4}(n_2 - x_i^{(2)})$	$M_1(x_i^{(1)}) + f_{2,4}(n - x_i^{(1)})$
1	2	3	4	5	6
1	0	<u>0,300</u>	0 + 0,300 = 0,300 0,500 + 0 = <u>0,500</u>	0 + 0,500 = <u>0,500</u> 0,400 + 0 = 0,400	
2	0 1 2	<u>0,510</u>	0 + 0,510 = 0,510 0,500 + 0,300 = <u>0,800</u> 0,750 + 0 = 0,750	0 + 0,800 = 0,800 0,400 + 0,500 = <u>0,900</u> 0,640 + 0 = 0,640	
3	0 1 2 3	<u>0,657</u>	0 + 0,657 = 0,657 0,500 + 0,510 = 1,010 0,750 + 0,300 = <u>1,050</u> 0,875 + 0 = 0,875	0 + 1,050 = 1,050 0,400 + 0,800 = <u>1,200</u> 0,640 + 0,500 = 1,140 0,784 + 0 = 0,784	
4	0 1 2 3 4	0,760	0 + 0,760 = 0,760 0,500 + 0,657 = 1,157 0,750 + 0,510 = <u>1,260</u> 0,875 + 0,300 = 1,175 0,938 + 0 = 0,938	0 + 1,260 = 1,260 0,400 + 1,050 = <u>1,450</u> 0,640 + 0,800 = 1,440 0,784 + 0,500 = 1,284 0,870 + 0 = 0,870	
5	0 1 2 3 4 5	<u>0,832</u>	0 + 0,832 = 0,832 0,500 + 0,760 = 1,260 0,750 + 0,657 = <u>1,407</u> 0,875 + 0,510 = 1,385 0,938 + 0,300 = 1,238 0,969 + 0 = 0,969	0 + 1,407 = 1,407 0,400 + 1,260 = 1,660 0,640 + 1,050 = <u>1,690</u> 0,784 + 0,800 = 1,584 0,870 + 0,500 = 1,370 0,922 + 0 = 0,922	
6	0 1 2 3 4 5 6	<u>0,882</u>	0 + 0,882 = 0,882 0,500 + 0,832 = 1,332 0,750 + 0,760 = 1,510 0,875 + 0,657 = <u>1,532</u> 0,938 + 0,510 = 1,448 0,969 + 0,300 = 1,269 0,984 + 0 = 0,984	0 + 1,532 = 1,532 0,400 + 1,407 = 1,807 0,640 + 1,260 = <u>1,900</u> 0,784 + 1,050 = 1,834 0,870 + 0,800 = 1,670 0,922 + 0,500 = 1,422 0,953 + 0 = 0,953	
7	0 1 2 3 4 5 6 7	<u>0,918</u>	0 + 0,918 = 0,918 0,500 + 0,882 = 1,382 0,750 + 0,832 = 1,582 0,875 + 0,760 = <u>1,635</u> 0,938 + 0,657 = 1,595 0,969 + 0,510 = 1,479 0,984 + 0,300 = 1,284 0,992 + 0 = 0,992	0 + 1,635 = 1,635 0,400 + 1,532 = 1,932 0,640 + 1,407 = <u>2,047</u> 0,784 + 1,260 = 2,044 0,870 + 1,050 = 1,920 0,922 + 0,800 = 1,722 0,953 + 0,500 = 1,453 0,972 + 0 = 0,972	0 + 2,047 = 2,047 0,600 + 1,900 = 2,500 1,080 + 1,690 = 2,770 1,464 + 1,450 = 2,914 1,770 + 1,200 = <u>2,970</u> 2,016 + 0,900 = 2,916 2,214 + 0,500 = 2,714 2,370 + 0 = 2,370

Причем x_i — число носителей, направляемых на j -й объект, позволяет определить и число $n_{j+1} = n_j - x_i^{(j)}$ носителей*, предназначенных для назначения на шагах от $(j+1)$ -го до N -го. Например, при гипотезе $n_j = 3$ возможными управлениями будут назначения на j -й объект нуля, одного, двух, трех носителей ($x_i = 0, 1, 2, 3$) и соответственно выделение трех, двух, одного, нуля носителей для всех последующих назначений. В 3-й графе помещены условные оптимальные значения показателя эффективности на четвертом (по номеру объекта) и первом (в процессе первого этапа) шаге назначений. В 4-й графе указываются значения показателей эффективности для третьего и четвертого шагов назначений с учетом гипотезы n_3 и управлений x_i на третьем шаге. Значения показателей эффективности определяются по формуле

$$f'_{3,4}(n_3) = M_3(x_i^{(3)}) + f_{4,4}(n_3 - x_i^{(3)}) = M_3(x_i^{(3)}) + f_{4,4}(n_4), \quad (14.2.1)$$

где $n_3 - x_i^{(3)} = n_4$.

Везде далее через $f_{j+1,N}(n_j - x_i^{(j)})$ обозначается условное оптимальное значение показателя эффективности на шагах назначений от $(j+1)$ -го до последнего N -го, определенное для гипотезы $n_{j+1} = n_j - x_i^{(j)}$ о числе носителей, оставшихся не распределенными к $(j+1)$ -му шагу.

Оптимальные значения показателей эффективности $f_{3,4}(n_3)$ для каждой из гипотез n_3 помещены в рамку. Им соответствуют условные оптимальные управления. В 5-й графе помещены значения показателей эффективности для шагов назначений от второго до четвертого с учетом гипотез n_2 и управлений $x_i^{(2)}$ на втором шаге. Они рассчитываются по формуле

$$f'_{2,4}(n_2) = M_2(x_i^{(2)}) + f_{3,4}(n_2 - x_i^{(2)}) = M_2(x_i^{(2)}) + f_{3,4}(n_3), \quad (14.2.2)$$

где $n_2 - x_i^{(2)} = n_3$.

Условные оптимальные значения показателей эффективности $f_{2,4}(n_2)$ для всех гипотез n_2 также помещены в рамку.

В 6-й графе располагаются значения показателей эффективности для шагов от первого до четвертого с учетом выделенного наряда носителей $n = 7$ и управлений x_1 :

$$f'_{1,4}(n) = M_1(x_i^{(1)}) + f_{2,4}(n - x_i^{(1)}) = M_1(x_i^{(1)}) + f_{2,4}(n_2), \quad (14.2.3)$$

где $n - x_i^{(1)} = n_2$.

Перейдем к изложению первого этапа нахождения оптимального плана. Сначала устанавливаются все возможные гипотезы о числе носителей, подлежащих назначению на j -м шаге. В данной задаче они одинаковы для всех шагов ($n_j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$) и, как указывалось, помещаются в 1-й графе. Затем для каждой гипотезы определяются все возможные управления. В данной задаче они также одинаковые для всех управлений и помещаются в одной общей для всех шагов 2-й графе.

После этого приступают к определению условных оптимальных управлений и значений показателей эффективности, двигаясь от четвертого шага назначений к первому.

* Условимся для большей ясности изложения указывать в необходимых случаях у параметров x_i в верхней их части номера j шагов назначений ($x_i^{(j)}$).

По условию задачи все носители оружия должны быть применены. Поэтому, если к четвертому шагу (назначение на четвертый объект) остались нераспределенными n_j носителей, их все следует назначить на этом шаге:

$$f_{4,4}(n_4) = M_4(n_4). \quad (14.2.4)$$

Значения $M_4(n_4)$ будут соответствовать условному оптимальному управлению на этом шаге для гипотезы о состоянии системы, характеризуемой числом n_4 . Значения $M_4(n_4)$ выберем из 5-й графы табл. 14.2 и поместим в 3-ю графу табл. 14.3.

Нахождение условных оптимальных управлений на третьем шаге для всех гипотез n_3 осуществляется с использованием формулы (14.2.1). Допустим, рассматривается гипотеза о трех не распределенных к этому шагу носителях ($n_3 = 3$). Параметр управления $x_i^{(3)}$ при этой гипотезе может принимать значения от нуля до трех. При $x_i^{(3)} = 0$ на последний (четвертый) шаг будут направлены три единицы носителей ($n_4 = 3$). Поэтому значение показателя эффективности составит

$$f'_{3,4} = M_3(0) + f_{4,4}(3) = 0 + 0,657 = 0,657.$$

Параметр $f_{4,4}(3) = 0,657$ выбран из 3-й графы табл. 14.3. Для параметра управления $x_i^{(3)} = 1$ будем иметь $n_4 = 3 - 1 = 2$, а значение показателя эффективности будет

$$f'_{3,4}(3) = M_3(1) + f_{4,4}(2) = 0,500 + 0,510 = 1,010.$$

Значение $M_3(1)$ выбираем из 4-й графы табл. 14.2, а значение $f_{4,4}(2)$ — из 3-й графы табл. 14.3 и т. д. Вычислив значения показателя эффективности для всех параметров управления, сравнив их, найдем и зафиксируем значение условного оптимального показателя. В рассматриваемом примере он составляет $f_{3,4}(3) = 1,050$ (в табл. 14.3 заключен в рамку). Ему соответствует условное оптимальное управление: выделить для удара по третьему объекту два носителя ($x_y^{(3)} = 2$), а один носитель направить для удара по четвертому объекту ($n_4 = n_3 - x_y^{(3)}$). Обратим теперь внимание на математическую формулировку правила, по которому были определены условный оптимальный показатель эффективности и условное оптимальное управление:

$$f_{3,4}(3) = \max_{0 \leq x_i \leq 3} \{M_3(x_i^{(3)}) + f_{4,4}(3 - x_i^{(3)})\}. \quad (14.2.5)$$

Выражение, стоящее в фигурных скобках, в пояснении не нуждается. Перед фигурной скобкой помещено символическое определение правила нахождения оптимальных значений показателя эффективности и оптимального управления: необходимо перебрать все значения параметра управления (нуль, один, два, три), вычислить для каждого из них значение показателя эффективности, используя выражение в фигурной скобке, избрать максимальное значение, что и дает искомое решение.

Аналогичным образом находятся значения $f_{3,4}(n_3)$ и оптимальные управления для всех гипотез n_3 на третьем шаге (см. табл. 14.3). После этого переходят к нахождению значений показателей эффективности $f_{2,4}(n_2)$ и условных оптимальных управлений на втором шаге. По аналогии с (14.2.5) правилу нахождения искомого решения может быть дана следующая математическая формулировка:

$$f_{2,4}(n_2) = \max_{0 \leq x_i \leq n_2} \{M_2(x_i^{(2)}) + f_{3,4}(n_2 - x_i^{(2)})\}. \quad (14.2.6)$$

В рассматриваемом примере значение $M_2(x_i^{(2)})$ находится из 3-й графы табл. 14.2, а значение $f_{3,4}(n_2 - x_i^{(2)})$ — по данным только что вычисленных и помещенных в 4-й графе табл. 14.3 значений $f_{3,4}(n_3)$. Например, при $n_2 = 4$ и $x_i^{(2)} = 2$ значение показателя эффективности составит

$$f'_{2,4} = M_2(2) + f_{3,4}(4 - 2) = 0,640 + 0,800 = 1,400.$$

Таким же образом находят значения показателей эффективности для всех параметров управления при рассматриваемой гипотезе $n_2 = 4$, а затем условное оптимальное значение показателя эффективности ($f_{2,4}(4) = 1,450$; в табл. 14.3 оно заключено в рамку) и условное оптимальное управление ($x_y^{(2)} = 2$, $n_3 = n_2 - x_y^{(2)} = 2$).

После подобного рассмотрения всех гипотез на втором шаге приступают к нахождению оптимального управления на первом шаге. Математическая формулировка нахождения оптимальных управления и показателя эффективности имеет вид

$$f_{1,4}(n_1) = \max_{0 \leq x_i \leq n_1} \{M_1(x_i^{(1)}) + f_{2,4}(n_1 - x_i^{(1)})\}. \quad (14.2.7)$$

Как уже указывалось, при этом исходят из известного начального состояния системы ($n_1 = n = 7$). Тогда для рассматриваемого примера можно записать

$$f_{1,4}(7) = \max_{0 \leq x_i^{(1)} \leq 7} \{M_1(x_i^{(1)}) + f_{2,4}(7 - x_i^{(1)})\}. \quad (14.2.7)'$$

Значения $M_1(x_i^{(1)})$ находятся из 2-й графы табл. 14.2, значения $f_{2,4}(7 - x_i^{(1)})$ — из 5-й графы табл. 14.3 по аргументу $n_2 = 7 - x_i^{(1)}$ (значения $f_{2,4}(n_4)$ заключены в рамку). Далее выполняется рутинная работа: для всех значений параметра управления $x_i^{(1)}$ ($x_i^{(1)} = 0, 1, \dots, 7$) вычисляются правые части выражения (14.2.7)', и из них отбираются наибольшее значение — оптимальный показатель эффективности $f_{1,4}(7) = 2,970$ за все четыре шага — и соответствующее ему оптимальное управление на первом шаге при условии оптимальных назначений носителей на каждый объект. В данном примере это управление заключается в том, чтобы четыре носителя направить на первый объект (см. 6-ю графу табл. 14.3), а три — на второй, третий, четвертый объекты. На этом кончается первый этап оптимизации.

На втором этапе нахождения оптимального плана последовательно от первого шага к последнему определяются оптимальные управления — назначения носителей на каждый из объектов. Оптимальное управление на первом шаге известно: $x_0^{(1)} = 4$, $n_2 = 7 - 4 = 3$. Используем 5-ю графу табл. 14.3 и по аргументу $n_2 = 3$ найдем оптимальное значение показателя эффективности на втором шаге ($f_{2,4}(3) = 1,200$) и соответствующее ему оптимальное управление на втором шаге: $x_0^{(2)} = 1$; $n_3 = 3 - 1 = 2$. Теперь по параметру $n_3 = 2$ в 4-й графе таблицы найдем оптимальное значение показателя эффективности на третьем шаге ($f_{3,4}(2) = 0,800$), чему соответствует оптимальное управление на третьем шаге: $x_0^{(3)} = 1$; $n_4 = 2 - 1 = 1$. Таким образом, нам известно и $x_0^{(4)} = n_4 = 1$.

Итак, оптимальным является следующее распределение носителей оружия по объектам удара: $X_0 = (x_0^{(1)} = 4; x_0^{(2)} = 1; x_0^{(3)} = 1; x_0^{(4)} = 1)$. Напомним, что при этом распределении показатель эффективности удара принимает максимальное значение $f_{1,4}(7) = 2,970$.

Подобным образом можно найти оптимальное распределение носителей оружия для различных нарядов сил. Для этого необходимо найти оптимальные управления на первом шаге для каждого из этих нарядов, а затем провести для них второй этап оптимизации. Читателю предлагается проделать работу и сравнить полученные результаты с данными табл. 14.4.

Т а б л и ц а 14.4

Число носителей оружия	Распределение носителей оружия по объектам удара				Значение показателя эффективности
	1	2	3	4	
1	1	—	—	—	0,600
2	1	—	1	—	1,100
3	2	—	1	—	1,580
4	2	1	1	—	1,980
5	3	1	1	—	2,364
6	4	1	1	—	2,670
7	4	1	1	1	2,970

Рассмотренная задача динамического программирования относится к числу простейших: на каждом шаге назначений для оптимизации необходимо знать только число осуществленных (неосуществленных) шагов и один-единственный параметр управления — число x_i носителей оружия, назначаемых для действий против очередного объекта. Ограничения на выбор управления отсутствуют. Параметр управления непосредственно входит в выражение для вычисления показателя эффективности $M_j(x_i)$. Действия носителей против различных объектов независимы. При этом необходимо рассматривать лишь гипотезы о числе n_i нераспределенных носителей.

В отличие от условий примера 14.8 в примере 14.4 выбор управления — назначение на данном шаге числа передач, выполняемых способом “б”, — должно осуществляться с учетом двух ограничений: ограничения на вероятность обнаружения противолодочными силами подводной лодки и ограничения на вероятность обнаружения радиоразведкой противника ее радиопередач. Это делает необходимым строить для каждого шага гипотезы и о числе неиспользованных запасных частот, и о достигнутых к данному шагу вероятностях обнаружения подводной лодки и ее радиопередач.

В примере 14.5 управления — назначения ресурса x_i — оказывают не непосредственное, а косвенное влияние на величину показателя эффективности $M_j(x_i)$: назначаемый ресурс в той или иной степени ослабляет оборону противника, а с этим связана величина вероятности сохранения боеспособности объектами, преодолевающими оборону, и величина показателя эффективности $M_j(x_i)$. По указанной причине модель для вычисления показателя $M_j(x_i)$ имеет двухуровневую структуру и может быть сложной и громоздкой. Кроме того, как указывалось выше, эффективность сил обороны противника и, следовательно, величина показателя эффективности $M_j(x_i)$ зависят от

числа объектов своих сил, прорывающих j -й рубеж обороны противника. Это делает необходимым на каждом j -м шаге рассматривать гипотезы и о неизрасходованном ресурсе и о числе объектов, прорывающих рубеж.

С увеличением числа параметров управления, числа учитываемых ограничений существенно возрастает объем вычислений. Однако процесс нахождения оптимального плана в основных своих чертах остается аналогичным рассмотренному в примере 14.8.

14.2.2. Математическая формулировка задачи динамического программирования

В п. 14.2.1 были получены выражения (14.2.4)—(14.2.7), которые использовались для получения условных оптимальных управлений на различных шагах назначений. В общем виде указанные выражения могут быть записаны следующим образом:

$$f_{j,N}(n_j) = \max_{0 \leq x_i \leq n_j} \{M_j(x_i) + f_{j+1,N}(n_j - x_i)\}, \quad (14.2.8)$$

где $f_{j,N}(n_j)$ — условное оптимальное значение показателя эффективности за число шагов от j -го до N -го, вычисленное при условии, что оставшийся не израсходованным к j -му шагу ресурс равен n_j ; x_i — параметр управления на j -м шаге, представляющий собой число единиц ресурса, назначаемых на этом шаге при гипотезе n_j ; $M_j(x_i)$ — значение показателя эффективности на j -м шаге, если избрано управление, характеризуемое параметром x_i ; $f_{j+1,N}(n_j - x_i)$ — условное оптимальное значение показателя эффективности за число шагов от $(j + 1)$ -го до N -го, вычисленное при условии: после j -го шага назначений, т. е. к $(j + 1)$ -му шагу, остались неизрасходованными $n_{j+1} = n_j - x_i$ единиц ресурса.

Выражение (14.2.8) носит название *функционального уравнения*. Оно — основа математической формулировки задачи динамического программирования. Условные оптимальные значения показателей эффективности и условные оптимальные управления на всех шагах процесса назначений находятся путем его рекуррентного использования.

Другими элементами математической формулировки задачи являются:

— математические модели для вычисления показателей эффективности $M_j(x_i)$ на каждом шаге с учетом ограничений (в примере 14.8 ограничения отсутствуют);

— уравнение для вычисления параметра управления на $(j + 1)$ -м шаге (в примере 14.8 оно имеет простейший вид: $n_{j+1} = n_j - x_i^{(j)}$).

Два последних элемента модели индивидуальны для различных задач динамического программирования. Возможны также и модификации функциональных уравнений. Функциональное уравнение (14.2.8) соответствует случаю, когда необходима максимизация показателя эффективности. Возможны и задачи минимизации показателя эффективности (см. пример 14.5). В общем случае функциональное уравнение типа (14.2.8) запишется в виде

$$f_{j,N}(n_j) = \text{opt}_{0 \leq x_i \leq n_j} \{M_j(x_i) + f_{j+1,N}(n_{j+1})\}. \quad (14.2.9)$$

Однако для решения конкретной задачи функциональное уравнение должно разрабатываться с точным указанием цели оптимизации — максимизации или минимизации показателя эффективности.

Если показатель эффективности не аддитивен, а мультипликативен, функциональное уравнение имеет вид

$$f_{j,N}(n_j) = \operatorname{opt}_{0 \leq x_i \leq n_j} \{M_j(x_i)f_{j+1,N}(n_j - x_i)\}. \quad (14.2.10)$$

В п. 14.1.2 указывалось, что оптимизируемая система на j -м шаге может характеризоваться несколькими параметрами: множеством U параметров управления, множеством z ограничений, а также множеством s параметров, характеризующих те состояния системы, от которых зависит марковость процесса назначений. В этом случае структура функционального уравнения и процесс решения задачи оптимизации усложняются, возрастает объем вычислений. Тем не менее состояние существующих вычислительных средств позволяет решать задачи динамического программирования любой сложности на пунктах управления силами, на кораблях и самолетах, разведывательных и ударно-разведывательных комплексах.

Если говорить о сложностях использования динамического программирования, то они заключаются в сложности разработки системы специального математического обеспечения и системы программного обеспечения для соединения, корабля, части. Для различных сил, средств (своих и противника, реальных и предполагаемых) для достижения различных целей оптимизации в общем случае потребуются различные модели при вычислении условных показателей эффективности ($M_j(x_i)$ — см. пример 14.8), параметров-ограничений, параметров управления. Чтобы иметь возможность использовать метод динамического программирования в процессе управления силами, необходима возможность модульного формирования нужных моделей. Такая возможность должна предусматриваться при определении структур систем СМО и СПО соединения. Упрощению этих структур послужит выявление комплекса задач оптимизации, возникающих при управлении данным соединением, придаваемыми и поддерживающими силами, системами оружия и технических средств.

Глава 15. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ИГР ПРИ УПРАВЛЕНИИ СИЛАМИ

§ 15.1. ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ИГР ПРИ УПРАВЛЕНИИ СИЛАМИ

15.1.1. Область применения методов

Без преувеличения можно сказать, что одной из самых важных проблем, стоящих перед командирами всех времен при выработке решения, была и остается проблема выбора наилучшего варианта действий в условиях неопределенности относительно избираемого противником способа действий. Причем решение этой проблемы всегда включает решение частных проблем:

- оценки возможных вариантов действий противника;
- разработки рациональных вариантов использования своих сил и средств;
- отбора лучшего из числа разработанных варианта использования своих сил и средств с учетом неопределенности в отношении того, какой именно вариант действий примет противник.

Подобную ситуацию, складывающуюся при выработке решения, в теории исследования операций принято называть конфликтной ситуацией.

В условиях указанной выше неопределенности всегда активно использовались и будут активно использоваться все возможности сил и средств разведки. Тем не менее в большом числе случаев неопределенность в отношении планируемого противником варианта действий может сохраняться. Теория игр — это теория математического моделирования конфликтных ситуаций. Методы теории игр в оперативно-тактической области вначале были применены как инструмент для обоснования

лучшего, из числа разработанных, варианта использования своих сил и средств в условиях неопределенности в отношении того, какой именно вариант действий из числа выявленных изберет противник. Еще большее значение методы теории игр могут иметь место в процессе творческой работы командира по разработке вариантов своих действий, прогнозированию возможных действий противника. Большие возможности представляют также методы для обоснования заданий силам разведки, планирования мероприятий маскировки, дезинформации. Боевые действия любого масштаба, ведущиеся с самыми различными целями, могут потребовать для количественного обоснования решения командира применения методов теории игр. Эти методы также находят широкое применение при планировании строительства и совершенствования сил и средств вооруженной борьбы.

В качестве отдельного направления использования методов теории игр можно выделить разработку наставлений, инструкций по использованию сил и средств. В п. 15.1.2, а также в § 15.3 приведены примеры многих оперативно-тактических ситуаций, когда для обоснования решений требуется применение методов теории игр.

15.1.2. Классификация игр. Основные понятия теории игр

Существует большое разнообразие классов конфликтных ситуаций. Различным классам ситуаций соответствуют свои методы моделирования. Математическое моделирование конфликтных ситуаций, как любых процессов вообще, невозможно без их схематизации, упрощения, т. е. принятия ряда допущений и ограничений. Задача командира (офицера-оператора) на этапе оперативно-тактической постановки задачи — увидеть в реальном процессе черты конфликтной ситуации, отметить особенности процесса, знание которых позволит специалисту по исследованию операций отнести конфликтную ситуацию к тому или иному классу игр, т. е. выбрать метод моделирования и определить, позволят ли допущения и ограничения данного метода теории игр достичь заданной командиром цели моделирования.

Ниже даются классификация игр и общая постановка некоторых задач теории игр. Следует отметить, что не для всех классов реальных конфликтных ситуаций разработаны и существуют методы их математического моделирования.

Все игры делятся прежде всего на стратегические и нестратегические. Игры, моделирующие конфликтные ситуации, когда действуют не менее двух сторон, каждая из которых выступает со своими вариантами действий (стратегиями), называются *стратегическими*. Если сторона со своими вариантами действий всего одна либо же существует одна коалиция сторон, все участники которой выступают с одним набором вариантов действий, то игра называется *нестратегической*.

По числу участвующих сторон стратегические игры делятся на *парные* (число сторон равно двум) и *множественные* (число сторон более двух). В оперативно-тактической области наибольшее значение имеют парные стратегические игры. Именно они и будут рассматриваться далее.

Парные стратегические игры могут быть *антагонистическими* и *неантагонистическими*. В антагонистической игре цели действий сторон прямо противоположны. Показатель эффективности выполнения задачи одной стороной является и численной мерой степени невыполнения задачи другой стороной. Другими словами*, выигрыш одного игрока есть одновременно проигрыш другого. Если представить дело так, что оба игрока — “выигры-вающие”, но их выигрыш имеет разные знаки,

* Многие термины теории игр заимствованы из азартных игр: игра, игрок, выигрыш, ход, партия игры и т. п.

то сумма выигрышей обеих сторон будет равна нулю, отсюда второе название антагонистических игр “*игры с нулевой суммой*”.

В отличие от антагонистических игр в неантагонистических играх стороны преследуют различные, но не противоположные цели. Выигрыш одного игрока не является в точности проигрышем другого. В оперативно-тактической области находят применение как антагонистические, так и неантагонистические игры.

Стратегические игры делятся, кроме того, на *конечные* и *бесконечные*. Конечные стратегические игры описывают конфликтную ситуацию, в которой все участвующие стороны имеют конечное число возможных вариантов действий. Если хотя бы одна из сторон имеет бесконечно большое число вариантов действий, игра относится к классу бесконечных игр.

Как конечные, так и бесконечные игры могут быть *одно-* и *многоходовые*. Ходом называется выбор стороной одного из предусмотренных вариантов действий. При личном ходе такой выбор делается сознательно, а при случайном — осуществляется случайно, в результате действия объективных закономерностей, неподвластных ни одной из сторон (попадание в цель ракеты, торпеды и т. д.). При одноходовой игре каждая из сторон имеет по одному ходу, при многоходовой игре по крайней мере одна из сторон делает несколько (два и более) ходов.

Многоходовой игрой описывается процесс динамической конфликтной ситуации, длящейся во времени. Существует подкласс многоходовых игр — *конечные позиционные игры*, которые для их решения интерпретируются как одноходовые игры. Такая интерпретация возможна, если совокупности решений, принимаемых каждой из сторон на всех последовательных шагах процесса, могут быть представлены как некоторое обобщающее решение.

Многоходовые игры, не являющиеся конечными позиционными играми, в свою очередь делятся на две группы в соответствии с особенностями моделируемых конфликтных ситуаций. Одну группу составляют игры, в которых стороны принимают решение в некоторые дискретные моменты времени (например, стохастические, рекурсивные игры), а другую группу составляют игры, в которых управление системой требует непрерывного выбора вариантов действий, — *непрерывные игры*. Наибольшее прикладное значение и наиболее развитый математический аппарат среди игр последней группы имеют *дифференциальные игры*.

Существует ряд других признаков для классификации игр, которые, однако, в большей степени, чем указанные выше, могут быть отнесены к ограничениям и допущениям и будут указываться при постановке задач.

Рассмотрим общую постановку некоторых задач теории игр (т. е. постановку задач для разработки математических моделей некоторых классов конфликтных ситуаций), а также краткое описание тех особенностей игр, знание которых позволит осуществить более полную постановку задачи. Выбраны те задачи теории игр, применение которых в оперативно-тактической области представляется наиболее возможным и методы решения которых к настоящему времени являются наиболее отработанными либо же быстро развивающимися.

Матричные игры. Матричная игра — это стратегическая парная антагонистическая с нулевой суммой одноходовая игра с конечным числом вариантов действий у каждой из сторон. Описанию матричных игр будет уделено большее по сравнению с другими классами игр внимание по следующим причинам. На примере матричных игр наиболее удобно рассмотреть многие понятия и идеи теории игр. Матричные игры являются составным элементом многих других классов игр. Наконец, матричные игры имеют хорошо отработанный аппарат и находят широкое применение в оперативно-тактической области.

Общая формализованная постановка задачи матричной игры выглядит следующим образом. Имеются две стороны A и B . Сторона A имеет m вариантов действий, а сторона B располагает n вариантами. Известны показатели эффективности u_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) действий стороны A (ее “выигрыши”), если она выберет вариант A_i , а сторона B — вариант B_j . При этом параметр u_{ij} одновременно является показателем невыполнения задачи стороной B (ее “проигрышем”). Сторона A считается выигрывающей, а сторона B — проигрывающей.

Обратим внимание на важное обстоятельство: стороне A точно известны весь набор возможных вариантов действий стороны B и выигрыши u_{ij} для каждой из пар вариантов действий (A_i, B_j). Точно также стороне B точно известны весь набор возможных вариантов действий стороны A и свои проигрыши u_{ij} . При этом противники измеряют выигрыши и проигрыши одной мерой. Кроме того, каждый из противников хорошо знает о степени осведомленности противоположной стороны. Неизвестно же каждому из противников (“игроков”) только одно: какой именно вариант из числа известных выберет другая сторона. Однако известен принцип, по которому обе стороны выбирают оптимальный вариант действий. Подробно об этом принципе будет сказано в пп. 15.1.4, 15.2.1.

До сих пор при изложении использовался термин “вариант действий”. В теории же игр существует другое, более широкое, понятие — стратегия. *Стратегией стороны* называется совокупность правил, определяющих выбор этой стороной варианта действий при каждом личном ходе в зависимости от сложившейся ситуации. Поясним сказанное примерами.

Пример 15.1. Корабельное соединение планирует переход морем в круговом порядке. В этом порядке предусмотрены две точки № 1 и № 2, в которые могут быть помещены главный объект и ложная цель (рис. 15.1). Соединение может быть атаковано подводной лодкой.

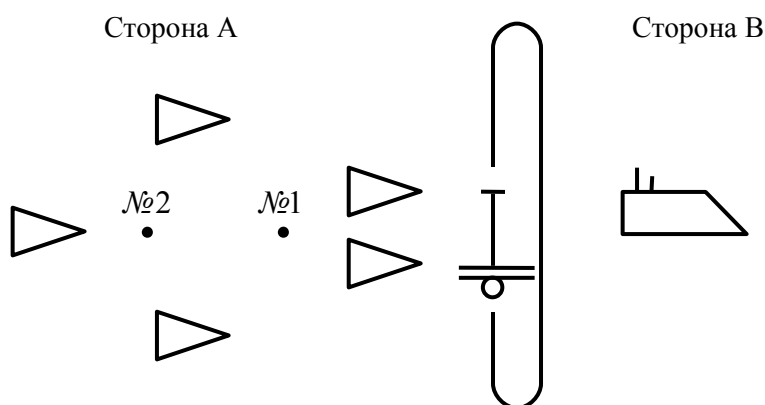


Рис. 15.1

Подводная лодка способна осуществить один залп. При этом цель в точке 1 она поражает без прорыва ближнего корабельного охранения, а в точке 2 — обязательно с прорывом. Отличить главный объект от ложной цели подводная лодка не в состоянии.

Цель действий подводной лодки — поразить главный объект, цель охранения — не допустить его поражения.

Требуется обосновать: для корабельного соединения точку, в которую целесообразно помещать главный объект, для подводной лодки — объект атаки.

В данном случае имеет место одноходовая игра: каждый из противников выбирает возможный вариант действий только один раз. Такими вариантами действий являются:

— для корабельного соединения (назовем его стороной A):

A_1 — поместить главный объект в точку 1;

A_2 — поместить главный объект в точку 2;

— для подводной лодки (сторона B):

B_1 — атаковать объект, находящийся в точке 1;

B_2 — атаковать объект, находящийся в точке 2.

Показателем эффективности действий стороны A (ее выигрышем) служит вероятность непоражения главного объекта. Этот же параметр есть проигрыш стороны B .

Читателю рекомендуется на основании качественного анализа определить рациональные варианты действий сторон и сравнить их с рекомендациями, полученными методами теории игр (см. примеры 15.9, 15.10).

Пример 15.2. Подводная лодка (сторона A) должна осуществлять слежение за корабельным соединением противника (сторона B) с целью обеспечения наведения на него ударных сил. Возможны две позиции слежения и два способа передачи подводной лодкой донесений на командный пункт.

Корабельное соединение на переходе может осуществлять “профилактические” мероприятия для отрыва от слежения. Предполагаются два способа отрыва.

Подводная лодка способна определить факт попытки противника оторваться от слежения и может применить один из трех способов восстановить (удержать) контакт.

Ни один из противников, осуществляя выбор способа действий, не знает о выборе противника.

Математическое моделирование должно позволить обосновать позицию слежения подводной лодки, способы передачи ею донесения, способ восстановления контакта, а также прогнозировать способ отрыва противника от слежения.

В данном случае имеет место многоходовая игра. Показателем эффективности действий подводной лодки является вероятность наведения на противника своих ударных сил. Эффективность мероприятий противника по отрыву от слежения должна оцениваться вероятностью срыва этого наведения.

Разобьем процесс определения сторонами способов действий на следующие ходы:

— первый ход стороны A — выбор позиции слежения и способа передачи донесений;

— первый ход стороны B — выбор способа отрыва от возможного слежения противника;

— второй ход стороны A — выбор способа восстановления контакта.

Вариантами действий стороны A на первом ходе являются:

a'_1 — осуществлять слежение в позиции № 1, а передачу донесений — первым способом;

a'_2 — осуществлять слежение в позиции № 1, передачу донесений — вторым способом;

a'_3 — осуществлять слежение в позиции № 2, передачу донесений — первым способом;

a'_4 — осуществлять слежение в позиции № 2, передачу донесений — вторым способом.

Следующий ход делает сторона B . Вариантами ее действий являются отрыв от возможного слежения первым или вторым способом (обозначим эти варианты соответственно через b_1 и b_2).

Затем свой второй ход делает сторона A . Напомним, что она выбирает один из трех возможных способов восстановления контакта. Обозначим их a''_1, a''_2, a''_3 .

Многоходовую игру можно представить в виде дерева игры (рис. 15.2). На этом дереве кружками с помещенными внутри символами A или B обозначено, какая именно сторона делает выбор на данном ходе, а отрезками с помещенными рядом символами a'_i, a''_i, b_j обозначены конкурирующие на данном ходе варианты.

Избранная выше форма описания многоходовой игры называется развернутой. Ее можно свести к нормальной форме, при которой многоходовая игра описывается как одноходовая. При этом каждая сторона заранее предусматривает все возможные ситуации на каждом ходе игры и определяет совокупность правил, по которым осуществляются частные выборы в течение всей игры. Эти правила в теории игр и являются стратегиями.

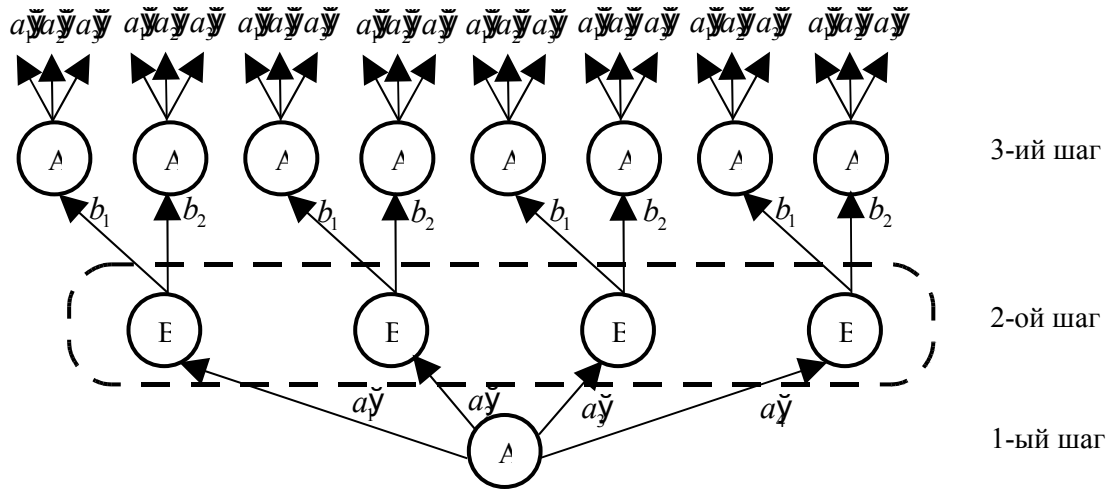


Рис. 15.2

Иначе говоря, стратегия — это один обобщенный выбор. Так, в условиях рассматриваемого примера стратегиями стороны A будет выбор на первом и втором ходах соответственно вариантов:

- $A_1 - a'_1$ и a''_1 ; $A_7 - a'_3$ и a''_1 ;
- $A_2 - a'_1$ и a''_2 ; $A_8 - a'_3$ и a''_2 ;
- $A_3 - a'_1$ и a''_3 ; $A_9 - a'_3$ и a''_3 ;
- $A_4 - a'_2$ и a''_1 ; $A_{10} - a'_4$ и a''_1 ;
- $A_5 - a'_2$ и a''_2 ; $A_{11} - a'_4$ и a''_2 ;
- $A_6 - a'_2$ и a''_3 ; $A_{12} - a'_4$ и a''_3 .

Стратегиями стороны B будут:
 B_1 — выбирать вариант действий b_1 ;
 B_2 — выбирать вариант действий b_2 .

Таким образом, многоходовая игра сведена к одноходовой. При этом для стороны B , имеющей один ход, понятия “стратегия” и “вариант действий” совпадают (с точки зрения терминологии теории игр). В примере 15.1 для обеих сторон понятия “стратегия” и “варианты действий” совпадают, так как игра одноходовая.

Всякая многоходовая игра с конечным числом ходов может быть сведена к одноходовой игре. Методы решения матричных игр разработаны для одноходовых игр или игр, сведенных к одноходовой игре.

Продолжим рассмотрение примера 15.2 с целью показать, как меняется число стратегий стороны с изменением информации о стратегиях противника.

Ранее предполагалось, что ни одна из сторон не знает выбора другой стороны. Допустим теперь, что стороне B известен выбор стороны A позиции слежения. Иначе говоря, сторона B теперь знает, какая пара вариантов действий стороны A имеет место: a'_1, a'_2 или же a'_3, a'_4 .

Предположим, что в условиях такой осведомленности сторона B по-прежнему делает выбор между вариантами действий b_1 и b_2 , однако число стратегий стороны B , подлежащих теперь рассмотрению, изменится.

Приведем эти стратегии:

B_1 — придерживаться варианта действий b_1 при любой паре вариантов действий стороны A (a'_1, a'_2 или a'_3, a'_4);

B_2 — придерживаться варианта действий b_1 , если известно, что сторона A использует один из вариантов пары a'_1, a'_2 ; придерживаться варианта действий b_2 , если известно, что сторона A использует один из вариантов пары a'_3, a'_4 ;

B_3 — придерживаться варианта действий b_2 при любой паре вариантов действий стороны A ;

B_4 — придерживаться варианта действий b_2 , если известно, что сторона A использует один из вариантов пары a'_1, a'_2 ; придерживаться варианта действий b_1 , если известно, что сторона A использует один из вариантов пары a'_3, a'_4 .

Таким образом, число стратегий стороны B увеличилось вдвое. Вообще, с увеличением информации о выборе противника число стратегий другой стороны возрастает. Можно показать, что увеличение информации о выборе, сделанном противником, способствует увеличению выигрыша (уменьшению проигрыша) у стороны, получившей информацию (как это и имеет место на практике).

Дерево описанной выше игры показано на рис. 15.3. В отличие от рис. 15.2 на нем пунктиром обведены не сразу все кружки, в которые ведут стрелки, соответствующие вариантам действий a'_1, a'_2, a'_3, a'_4 , а две пары кружков. Пунктирной линией принято объединять в одну группу те варианты действий, которые другой стороне невозможно классифицировать.

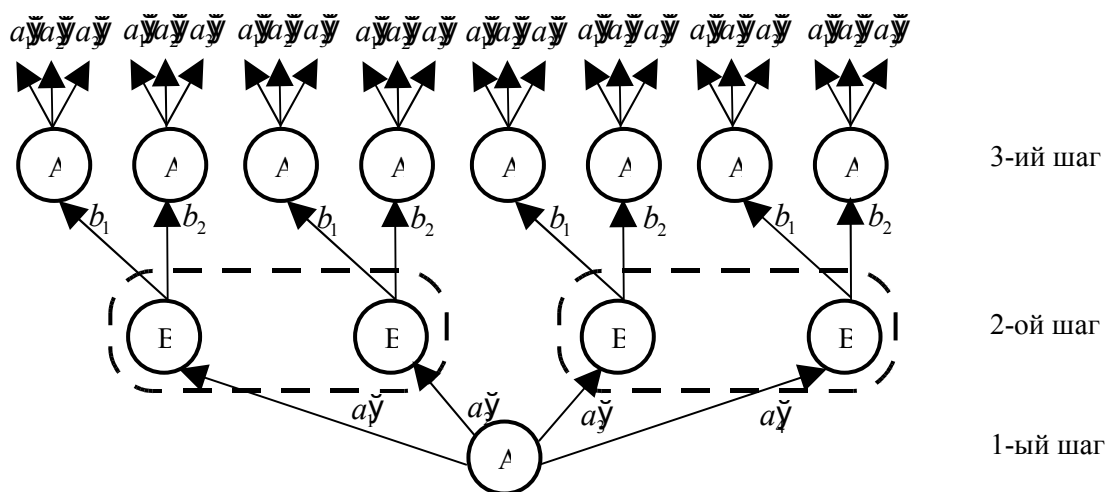


Рис. 15.3

В том случае, когда игроку точно известна избранная противником стратегия, игровая задача для него превращается в задачу оптимизации в условиях полного знания обстановки.

Исчерпывающую информацию о матричной игре дает матрица игры, или платежная матрица (матрица 15.1). Элементами этой матрицы являются выигрыши стороны A (проигрыш стороны B) при соответствующей паре стратегий противников. Например, элемент матрицы u_{ij} есть выигрыш стороны A (проигрыш стороны B), если сторона A избрала стратегию A_i , а сторона B — стратегию B_j .

Матрица 15.1

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	...	B_j	...	B_n
A_1	u_{11}	u_{12}	...	u_{1j}	...	u_{1n}
A_2	u_{21}	u_{22}	...	u_{2j}	...	u_{2n}
...
A_i	u_{i1}	u_{i2}	...	u_{ij}	...	u_{in}
...
A_m	u_{m1}	u_{m2}	...	u_{mj}	...	u_{mn}

Разумеется, можно любому из противников приписывать символы A или B . Важно только, чтобы элементы матрицы u_{ij} являлись показателями эффективности выигрывающей стороны. Для вычисления этих показателей используются статистические данные, в том числе сведенные в нормативы, а еще чаще специальные математические модели использования сил и средств, разработанные с помощью различных методов исследования операций.

В результате решения игры определяются оптимальные стратегии сторон и цена игры — средний выигрыш стороны A (средний проигрыш стороны B) при применении противниками своих оптимальных стратегий. В общем случае оптимальными являются смешанные стратегии сторон.

Смешанной стратегией игрока называется применение нес-кольких чистых стратегий, чередующихся по случайному закону с определенным соотношением частот.

Введем обозначение оптимальных смешанных стратегий:

— для стороны A

$$S_A = (p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_m);$$

— для стороны B

$$S_B = (q_1, q_2, \dots, q_j, \dots, q_n),$$

где p_i, q_j — вероятности (частоты) применения сторонами A, B своих стратегий A_i, B_j соответственно. Если вероятности p_i и q_j отличны от нуля, то соответствующие им стратегии A_i, B_j называются активными, а если эти вероятности равны нулю — неактивными. Иногда употребляют выражение “чистая стратегия A_i , входящая (не входящая) в оптимальную смешанную стратегию стороны A ”. Может быть, что активной является только какая-либо одна стратегия игрока. В связи с этим в теории игр используются выражения: “решение игры в чистых стратегиях”, “решение игры в смешанных стратегиях”. Всегда $\sum_{i=1}^m p_i = 1, \sum_{j=1}^n q_j = 1$.

В соответствии с методами теории игр выбор той или иной активной стратегии в заданной партии игры осуществляется с помощью механизма случайного выбора (жеребья) аналогично тому, как это делается при статистическом моделировании. Ниже будет показано, что в условиях математической модели конфликтной ситуации использование смешанной стратегии есть способ избежать шаблонного применения какой-либо одной стратегии, позволяющий повысить (понизить) среднее значение выигрыша (проигрыша) стороны. Применение же жеребьевки при большом числе повторений партий игры обеспечивает, во-первых, оптимальную частоту применения полезных стратегий, а во-вторых, маскировку от противника выбора стороной стратегии в очередной партии.

Рекомендации по использованию получаемых методами теории игр решений при планировании действий сил, в том числе условия обстановки, при которых становится оправданным применение механизма случайного выбора, рассмотрены в § 15.3.

Бесконечные игры. Бесконечными играми называют стратегические парные антагонистические одноходовые игры с бесконечным числом вариантов действий (стратегий) хотя бы у одного из игроков, то есть с выбором им (ими) значения непрерывного параметра (глубины погружения подводной лодки, углубления мин, дистанции залпа, суммы средств, выделенных на строительство каких-либо сил и т. д.). При этом, естественно, каждый из противников, принимая решение, должен учитывать действия другой стороны.

Рассмотрим общую формализованную постановку задачи, ведущую к применению бесконечных игр. Имеются две стороны — A и B , преследующие противоположные цели. Стратегией стороны A является выбор параметра a , непрерывного в интервале $[a_1, a_2]$. Стратегией стороны B является выбор параметра b , непрерывного в интервале $[b_1, b_2]^*$. Известна или может быть определена функция выигрыша стороны A (проигрыша стороны B) $u(a, b)$. Функция выигрыша $u(a, b)$ не обязательно должна быть непрерывной. Что касается множеств $[a_1, a_2]$, $[b_1, b_2]$, то они могут быть и открытыми и замкнутыми.

В оперативно-тактической области чаще всего имеют место замкнутые множества: глубина погружения подводной лодки, углубление мин, дистанция стрельбы и т. д., — ограниченные с обеих сторон какими-то пределами. В этом случае нормировкой можно заменить задачу нахождения оптимальных стратегий сторон в интервалах $[a_1, a_2]$, $[b_1, b_2]$ на задачу нахождения оптимальных стратегий в интервалах $[0, 1]$, $[0, 1]$. Поскольку при этом множество ситуаций (a, b) заполняет единичный квадрат (рис. 15.4), такие игры называются играми на единичном квадрате.

В общем случае оптимальными стратегиями игроков являются смешанные стратегии. Смешанная стратегия для бесконечных игр есть некоторое распределение вероятностей для стратегий a, b . Это распределение может быть непрерывным и задаваться плотностями вероятностей $f_1(a)$, $f_2(b)$ или же дискретным. В последнем случае оптимальные стратегии состоят из набора отдельных чистых стратегий, чередующихся с определенными вероятностями. Из бесконечных игр наиболее разработанными являются методы решения игр на единичном квадрате.

* Как уже отмечалось, одна из сторон может иметь и конечное число стратегий.

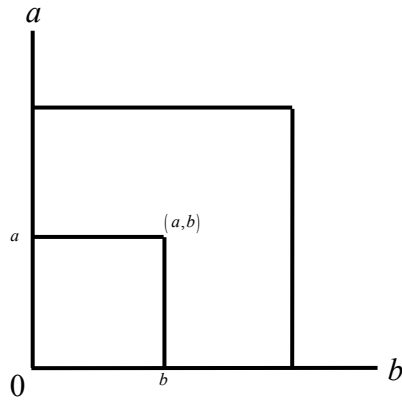


рис.15.4

Бесконечная игра может быть искусственно сведена к конечной игре. Для этого множества $[a_1, a_2]$, $[b_1, b_2]$ разбиваются на конечное число интервалов, и считается, что искомый параметр может принимать только значения, равные значению середины интервала. Полученное при этом решение является приближенным.

Рассмотрим пример ситуации, требующей для моделирования использования аппарата бесконечных игр.

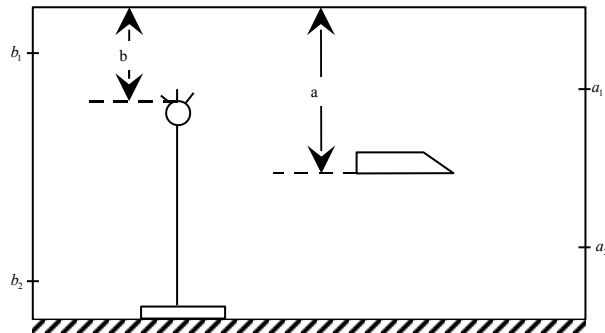


Рис.15.5

Пример 15.3. Командир подводной лодки (сторона A) должен выбрать глубину преодоления противолодочного рубежа, где противником (сторона B) выставляется заграждение из якорных контактных мин в один ряд. Смысл задачи ясен из рис. 15.5. Любая точка отрезка a_1a_2 характеризует глубину погружения — стратегию подводной лодки; любая точка отрезка b_1b_2 характеризует углубление мины — стратегию противника. Граничные значения a_1a_2 и b_1b_2 определяются тактико-техническими характеристиками подводной лодки и мин соответственно, военно-географическими условиями, тактическими соображениями*.

Биматричная игра. Выше были рассмотрены примеры конфликтных ситуаций с антагонистическими (прямо противоположными) интересами сторон, когда сумма выигрышей сторон равна нулю. Едва ли не большинство ситуаций в оперативно-тактической области являются

* Изложенная задача является упрощенным вариантом реальной задачи, поставленной и решенной в годы второй мировой войны специалистами по исследованию операций для обоснования английским морским командованием заданий на постановку минных заграждений против германских подводных лодок, прорывающихся на судоходные коммуникации Англии.

антагонистическими (в указанном выше понимании). Тем не менее весьма часто может возникнуть необходимость рассмотрения ситуаций, при которых цели сторон различны, но не прямо противоположны, в результате чего сумма их выигрышей не равна нулю. Так может быть, например, при желании проверить последствия неверной оценки цели действий противника. Существуют и другие реальные конфликтные ситуации, требующие для обоснования своего способа действий, прогнозирования способа действий противника аппарата биматричных игр — стратегических парных неантагонистических одноходовых игр с конечным числом стратегий.

Дадим общее формализованное описание задачи, ведущее к биматричной игре. Имеются стороны A и B с их стратегиями A_i ($i = 1, 2, \dots, m$), B_j ($j = 1, 2, \dots, n$). При выборе сторонами пары стратегий A_i и B_j выигрыш стороны A равняется $u_{ij}^{(A)}$, а стороны B составляет $u_{ij}^{(B)}$. Каждая сторона знает весь набор стратегий противника и его выигрыши для всех пар стратегий сторон. Известен также и факт взаимной осведомленности противников об этих обстоятельствах. Неизвестным является то, какую стратегию из числа известных выберет противник.

Цель моделирования — обосновать свой способ действий с учетом возможного поведения противника при данной конфликтной ситуации. Рассмотрим пример.

Пример 15.4. Самолет-истребитель стороны A в процессе ведения “свободной охоты” может иметь встречу с осуществляющим “свободную охоту” истребителем стороны B . Целью действий истребителя стороны A является уничтожение обнаруженных самолетов противника. Аналогичную цель преследует и истребитель-охотник стороны B . Требуется оценить лучшие способы действий истребителя A с учетом выявленных тактических приемов противника, прогнозировать способы действий истребителя B .

В рассмотренном примере выигрышем стороны A является показатель эффективности выполнения поставленной задачи — математическое ожидание числа сбитых самолетов стороны B ; выигрышем стороны B является показатель эффективности выполнения ею своей задачи — математическое ожидание числа сбитых самолетов стороны A . Это приводит к необходимости иметь две игровые матрицы с выигрышами стороны A и B соответственно (отсюда и произошло название этого класса игр “биматричные”). Каждой из сторон известны обе матрицы и факт осведомленности противника об этих матрицах.

Перейдем теперь к рассмотрению некоторых классов многоходовых игр, не относящихся к классу конечных позиционных игр. Основная особенность конфликтных ситуаций, для моделирования которых они разработаны, — отсутствие ограничения на число ходов. Другие особенности таких конфликтных ситуаций определили разнообразие классов многоходовых игр. Ниже будет дано описание игр, наиболее перспективных в оперативно-тактической области.

Стохастические игры. Стохастическая игра — это стратегическая парная антагонистическая многоходовая игра с конечным числом стратегий у каждой стороны. Помимо отсутствия ограничения на число ходов эта игра имеет также следующие особенности:

- сторона A получает определенный выигрыш на каждом ходе игры;
- на каждом ходе с некоторой вероятностью, отличной от нуля, игра может закончиться.

Процессы, описываемые методами стохастических игр, являются своеобразным сочетанием дискретных цепей Маркова и конфликтных ситуаций. Вот общее формализованное описание задачи. Имеется система, которая в дискретные моменты времени может с некоторой известной вероятностью переходить в одно из N состояний. Процесс переходов системы в различные состояния — марковский, т. е. будущее состояние системы зависит только от состояния системы на данный момент времени и не зависит от того, как именно система пришла в это состояние.

Если система имеет N состояний, из которых N' состояний поглощающие (при их достижении процесс заканчивается), то имеется $N - N'$ матричных игр-компонент. Обозначим через M_k матрицу k -й игры-компоненты, а через $A_i^{(k)}, B_j^{(k)}$ — стратегии сторон в k -й игре-компоненте ($k = 1, 2, \dots, N - N'$). Выбор сторонами своих стратегий $A_i^{(k)}, B_j^{(k)}$ приводит к следующим последствиям: сторона A получает выигрыш $u_{ij}^{(k)}$, с вероятностью $w_{ij}^{(k)}$ процесс заканчивается, система переходит в поглощающее состояние, с вероятностями $p_{ijr}^{(k)}$ ($r = 1, 2, \dots, N - N'$) стороны переходят к новому разыгрыванию одной из игр-компонент (r -й), т. е. система переходит в одно из непоглощающих состояний. На число шагов системы ограничения не накладываются.

Решение стохастической игры дает оптимальные стратегии сторон при различных состояниях системы и выигрыш стороны A (проигрыш стороны B) для процесса в целом. Цель моделирования — обоснование использования сил в случайных процессах с конфликтными ситуациями.

Рассмотрим пример.

Пример 15.5. Разрабатываются правила управления залповым артиллерийским огнем корабля A по кораблю B противника для его поражения, а именно правила корректировки огня при получении недолетов, перелетов и накрытий. Возможно несколько вариантов маневрирования корабля противника при наблюдении им знака падения снарядов очередного залпа корабля A с целью избежать накрытия снарядами последующего залпа. Существует также несколько вариантов корректировки огня корабля A при различных знаках падения снарядов залпа. При этом, вводя очередную корректуру, управляющий огнем корабля A еще не может знать характера маневрирования противника между залпами. Возможно поражение цели и при одном-единственном накрытии цели. Кроме того, при всех способах корректировки огня и всех вариантах маневрирования цели возможно ее накрытие уже следующим залпом, если при предыдущем залпе наблюдались недолет или перелет.

Цель моделирования:

а) обоснование способа корректировки огня корабля A при наблюдении различных знаков падения снарядов залпа с учетом возможного маневрирования противника. Способ должен обеспечивать поражение корабля противника при наименьшем числе залпов;

б) прогнозирование способов уклонения противника от поражения.

Изложим теперь ситуацию, используя термины теории стохастических игр. Имеется марковский случайный процесс с конечным числом состояний системы и дискретным временем переходов. Систему составляют корабль B противника и снаряды залпа корабля A . Шагом системы является очередной залп корабля A и ответный маневр корабля B . Система имеет следующие состояния:

S_1, S_2, S_3 — недолет, перелет, вынос по целику снарядов залпа соответственно;

S_4 — накрытие цели снарядами залпа без ее поражения;

S_5 — поражение цели.

При всех стратегиях сторон с вероятностью, отличными от нуля, система может за один шаг переходить из состояний $S_1 - S_4$ в любые другие или оставаться в прежнем состоянии. Состояние S_5 является поглощающим. Очевидно, что при большом числе шагов процесса игра будет достоверно закончена переходом системы в поглощающее состояние S_5 .

Определим теперь, что есть выигрыш стороны A при различных играх-компонентах. Предварительно отметим, что показателем эффективности стороны A является математическое ожидание числа залпов, необходимых для поражения цели. Сторона A стремится минимизировать

это число. Поэтому выигрышем стороны A на каждом шаге процесса при каждой k -й игре-компоненте будет $u_{ij} = -1$. Максимизируя выигрыш стороны A за весь процесс, получим минимальное по абсолютной величине значение показателя эффективности. Что касается стороны B , то своим маневрированием она будет стремиться максимизировать число залпов, необходимых для ее поражения. Поэтому $-u_{ij} = 1$ будет ее выигрышем при каждой игре-компоненте.

Таким образом, в каждом из состояний $S_1 - S_4$ имеет место матричная игра при отсутствии у сторон информации о выборе противником стратегии перед очередным шагом случайного процесса. При этом, однако, каждая из сторон знает, в каком состоянии находится система перед очередным шагом и, следовательно, какая игра-компонента будет разыгрываться.

Рекурсивные игры. Рекурсивные игры отличаются от стохастических двумя особенностями:

- 1) свой выигрыш сторона A получает только в том случае, если процесс заканчивается;
- 2) вероятность прекращения игры может быть равна нулю, т. е. возможны состояния системы и пары стратегий сторон, при которых переход системы в поглощающие состояния невозможен.

Покажем особенности постановки задачи, требующей применения рекурсивных игр, на следующем примере.

Пример 15.6. Поисково-ударная группа (ПУГ) в составе трех кораблей (сторона A) преследует подводную лодку (сторона B), осуществляя последовательные атаки с целью ее поражения. На каждую атаку ПУГ подводная лодка может ответить маневром, применением оружия, средств РЭБ. Цель подводной лодки — оторваться от преследования и сохранить боеспособность.

Способы и результативность атак ПУГ и контратак, маневров подводной лодки зависят от числа боеспособных кораблей ПУГ. Подводная лодка и ПУГ имеют такое количество боезапаса, которого практически достаточно для достижения цели действий*.

Для каждого числа боеспособных кораблей ПУГ обе стороны имеют несколько вариантов действий (каких именно, в данном примере не рассматривается). Для стороны A они, допустим, различаются способами атак, для стороны B — контратак и маневрирования при отрыве от преследования. Подводная лодка, используя гидроакустическую станцию, точно знает число боеспособных кораблей ПУГ. Каждая из сторон не знает, какой вариант действий из числа возможных изберет противник при очередной атаке.

Математическая модель должна позволить обосновать способ атаки подводной лодки при различном числе боеспособных кораблей ПУГ и прогнозировать способы контратак подводной лодки и ее маневрирования для отрыва от преследования.

Изложим теперь ту же ситуацию, используя термины теории рекурсивных игр. Имеется марковский случайный процесс с конечным числом состояний системы и дискретным временем переходов. Систему составляют корабли ПУГ и подводная лодка; шагом системы является очередная атака кораблей ПУГ и ответные действия подводной лодки. Состояния системы:

S_1, S_2, S_3 — боеспособны соответственно три, два, один корабль ПУГ и подводная лодка; подводная лодка от преследования не оторвалась;

S_4 — подводная лодка оторвалась от преследования либо в результате поражения всех кораблей ПУГ, либо в результате удачного маневрирования;

S_5 — подводная лодка поражена (при любом числе боеспособных кораблей ПУГ).

В каждом из непоглощающих состояний S_1, S_2, S_3 имеет место матричная игра-компонента, в которой стороны не имеют информации о выборе противником стратегии перед очередным шагом

* Учсть ограниченное число боезапаса можно за счет увеличения числа состояний сторон (см. гл. 5).

процесса, но осведомлены, в каком состоянии находится система и какая именно игра-компонента будет разыгрываться.

Выигрыш стороны A равен единице, если подводная лодка (сторона B) поражена (система перешла в состояние S_5) и нулю, если она сохранила боеспособность или оторвалась от преследования (система перешла в состояние S_1 — S_4). Переход системы в состояния S_4, S_5 означает конец процесса. Сторона A имеет и такие стратегии, которые при определенных стратегиях стороны B могут и не приводить систему в поглощающие состояния. Например, возможна такая пара стратегий сторон, при которых исход атаки ПУГ и контратаки подводной лодки ничейный, т. е. подводная лодка достоверно оказывается непораженной и не оторвавшейся от преследования. При этом, однако, не исключено, что та же стратегия стороны A при других стратегиях стороны B и та же стратегия стороны B при других стратегиях стороны A будет давать отличные от нуля вероятности перехода системы в поглощающие состояния.

Квазиматричные игры. Используются для моделирования многошаговых конфликтных ситуаций двух сторон (A и B) со случайным ходом у одной из них и антагонистическими интересами.

Не нарушая общности изложения, допустим, что случайный ход делает сторона B . В результате этого хода может сложиться одна из n ситуаций. Распределение вероятностей исходов случайного хода p_s ($s = 1, 2, \dots, n$) известно обеим сторонам. Однако какая именно ситуация реализовалась, знает только сторона B . Это дает ей преимущества. Дело в том, что для s -х ситуаций выигрыши $u_{ij}^{(s)}$ в общем случае различны, если даже стороны будут применять одни и те же стратегии. Поэтому различными для каждой ситуации будут и матрицы игры. Сторона B выбирает стратегию $B_j^{(s)}$, имея сведения о разыгрываемой игре и используемой матрице. Что касается стороны A , то она осуществляет выбор стратегии, зная лишь распределение p_s и вид матриц-компонент. Обратим внимание, что в силу таких особенностей игры сторона B имеет возможность для каждой s -й ситуации разработать отдельный набор стратегий, а сторона A такой возможности не имеет.

Рассмотрим пример.

Пример 15.7. При преодолении противолодочного рубежа подводная лодка (сторона A) может быть обнаружена действующими на рубеже противолодочными комплексами (сторона B) либо первого, либо второго типов с вероятностями соответственно p_1 и p_2 или не обнаружена вообще. Вероятность последнего события равна p_3 . Вероятности p_1 и p_2 называются вероятностями упреждающего обнаружения объекта разведчиками первого или второго типов и вычисляются, как показано в гл. 17. Подводная лодка не знает, каким типом противолодочных комплексов она обнаружена, но ей известны возможные способы ее атак комплексом каждого типа. Рассматриваемые способы преодоления подводной лодкой рубежа имеют разную эффективность при различных способах атак различных комплексов противника.

Цель подводной лодки — преодолеть противолодочный рубеж, цель противолодочных сил рубежа — не допустить прорыва подводной лодки.

Математическое моделирование должно позволить обосновать лучший способ преодоления подводной лодкой рубежа и прогнозировать способы атак подводной лодки силами противника.

Дифференциальные игры. Дифференциальные игры в определенном смысле являются аналогом рекурсивных игр. Разница заключается в следующем. Рекурсивные игры есть модели марковских случайных процессов со счетным и конечным числом состояний и дискретным временем переходов системы; дифференциальные игры описывают марковский случайный процесс с бесконечным числом состояний системы и непрерывным временем переходов. В каждый момент

времени этого процесса разыгрывается бесконечная игра: каждый из двух противников выбирает значения некоторых параметров из замкнутых их множеств. На выбор параметров накладывается ограничение: они должны давать единственное решение системы дифференциальных уравнений, описывающих случайный процесс. При этом результат игры может интерпретироваться как некоторая траектория.

Обычно считается, что игра заканчивается с выходом траектории на некоторую заданную границу, при этом сторона A получает выигрыш. Впрочем, может быть определен выигрыш и в случае, если траектория бесконечное время не выходит на заданную границу.

Пример 15.8. Типичным примером дифференциальной игры является игра-преследование, которая в общем виде формулируется следующим образом. Имеются сторона A — преследующая и сторона B — преследуемая. Целью стороны A является сближение вплотную с противником в кратчайший срок. Сторона B стремится избежать этой встречи либо же по возможности ее оттянуть. Стратегией каждой стороны является правило, в соответствии с которым она осуществляет выбор вектора скорости для любой возможной позиции.

Выигрышем стороны A является математическое ожидание времени \bar{t} , потребного для сближения вплотную. Если встреча не происходит, принимается $\bar{t} = \infty$.

Приведенный перечень игр не является полным. Так, не были рассмотрены множественные игры, когда в игре участвуют более двух сторон, и некоторые другие. Как уже было указано, описаны классы игр, перспективные с точки зрения их применения в настоящее время в оперативно-тактической области и имеющие наиболее совершенный математический аппарат. Описание других классов игр можно найти, например, в [7, 9, 10, 11, 17, 20]. Следует учитывать, что методы теории игр будут непрерывно совершенствоваться и развиваться.

15.1.3. Особенности оперативно-тактической постановки задачи

Разработка оперативно-тактической постановки задачи для формирования математической модели конфликтной ситуации состоит из двух этапов. На первом этапе командир дает оперативно-тактическое описание обстановки в соответствии с рекомендациями, изложенными в гл. 11 (см. рис. 11.1). На втором этапе специалист по исследованию операций уясняет это оперативно-тактическое описание и интерпретирует реальную обстановку как тот или иной класс конфликтных (в понимании теории игр) ситуаций. Для этого может потребоваться уточнение у командира сведений об отдельных элементах реальной обстановки. Состав сведений должен быть таким, чтобы дать возможность специалисту по исследованию операций определить:

1. Конфликтующие стороны. При этом следует иметь в виду, что наличие более двух участников еще не есть свидетельство множественной игры. Если все множество игроков состоит из двух групп, причем для каждой группы характерно наличие одной и той же цели действий, то игра парная. Например, подводные лодки, преодолевающие противолодочный рубеж, разведывательная авиация, ведущая разведку в интересах прорыва, ударная авиация, наносящая удары по противолодочным силам на рубеже, средствам управления ими, и т. п. выступают как одна сторона, цель которой — преодоление подводными лодками рубежа. Второй стороной являются все противолодочные силы и средства рубежа: авиация, надводные корабли, подводные лодки, стационарные средства наблюдения и заграждения и т. п. Цель этой стороны — воспрепятствовать прорыву подводных лодок.

2. Цели конфликтующих сторон. От этого зависит решение вопроса, является ли эта игра антагонистической или нет.

3. Стратегии сторон. Должен быть определен полный набор стратегий сторон, указаны их особенности, чтобы решить вопросы:

- является ли данная ситуация одной из разновидностей конечных либо бесконечных игр;
- имеются ли помимо личных случайные ходы;

— является ли матричная игра одно- или многоходовой; в последнем случае, как свести игру к нормальной форме.

4. Не является ли данная ситуация сочетанием случайного процесса и конфликтной ситуации, не требуется ли для ее моделирования применения аппарата стохастических, рекурсивных, дифференциальных игр. Если требуется, то постановка задачи должна позволить охарактеризовать случайный процесс: определить систему, все ее возможные состояния, моменты времени и возможные направления переходов системы.

5. Способы вычисления выигрышей (показателей эффективности) сторон для всех возможных пар стратегий. В большом числе случаев постановка задачи должна содержать сведения, нужные для формирования (разработки) необходимых математических моделей. При разработке модели специалист по исследованию операций должен добиваться равнозначности моделей для всех сочетаний стратегий сторон.

В заключение рассмотрения особенностей оперативно-тактической постановки задачи для моделирования конфликтных ситуаций следует подчеркнуть, что такая постановка невозможна без активного творческого участия в ней специалиста по исследованию операций.

15.1.4. Показатели эффективности, вычисляемые методами теории игр

При моделировании методами теории игр оперативно-тактических ситуаций могут использоваться и вероятность выполнения поставленной задачи и математическое ожидание причиняемого (предотвращенного) ущерба. При этом необходимо иметь в виду следующую особенность вычисления показателя эффективности.

Сначала, в случае конечных игр, вычисляются показатели эффективности для всех возможных пар стратегий сторон. Для бесконечных игр должна определяться функция выигрыша, ставящая в соответствие каждому сочетанию стратегий сторон показатели эффективности. В антагонистических играх это будут показатели эффективности (выигрыш) стороны, условно принятой за выигрывающую (сторона *A*), которые одновременно являются характеристикой проигрыша стороны, условно принятой за проигрывающую (сторона *B*). В неантагонистических играх это показатели эффективности каждой из сторон.

Для вычисления показателя эффективности (определения функции выигрыша) используются, как уже отмечалось, математические модели исследования операций. В ряде случаев могут использоваться статистические оценки в виде нормативов. Методы вычисления выигрышей не входят в методы теории игр.

Затем с помощью аппарата теории игр вычисляется среднее значение выигрыша (показателя эффективности) выигрывающей стороны, а также среднее значение проигрыша — характеристики невыполнения поставленной задачи проигрывающей стороной. Это среднее значение (математическое ожидание) выигрыша (проигрыша) получило в теории игр специальное название *цена игры*.

Используем обозначение оптимальной смешанной стратегии сторон, данное в п. 15.1.2 для матричной игры. Выражение для вычисления цены игры будет иметь вид

$$v = M(S_A, S_B) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i q_j u_{ij}. \quad (15.1.1)$$

Достижение цены игры гарантировано участникам (разумеется, в условиях модели с учетом всех ее допущений и ограничений), если участники ведут себя оптимальным с точки зрения теории игр образом, т. е. придерживаются оптимальных смешанных стратегий и правил выбора активных стратегий в очередной партии игры. Если же какая-либо из сторон ведет себя неоптимальным образом, ее выигрыш может уменьшиться (проигрыш увеличиться) в пользу другой стороны.

Описание комплекса условий, при которых вычисляются показатели эффективности действий сторон в конфликтной ситуации, будет неполным, если не сказать о принципе нахождения решения игры — оптимальных стратегий сторон и цены игры. В теории игр считается, что обе стороны исходят из так называемого принципа минимакса. По существу содержанием теории игр и является определение принципов нахождения оптимальных стратегий сторон в конфликтных ситуациях, а также разработка соответствующих этим принципам методов математического моделирования конфликтных ситуаций, позволяющих определить оптимальные стратегии сторон и вычислить показатели эффективности. Методы решения матричных игр будут рассмотрены в § 15.2, так как этот класс игр наиболее распространен в оперативно-тактической области, а знание методов их решения необходимо для освоения методов решения других классов игр.

Применению результатов моделирования конфликтной ситуации для обоснования решения командира по поставленной задаче должен предшествовать анализ этих результатов. В его основе лежит сравнение условий моделирования с реальными условиями. Вопросам анализа решения игры посвящен § 15.3.

§ 15.2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ МАТРИЧНЫХ ИГР

Напомним, что решение игры составляют оптимальные стратегии сторон и цена игры. Оптимальной называется стратегия, которая при большом числе повторений партий игры гарантирует участнику максимально возможный средний выигрыш (минимально возможный средний проигрыш).

Решение игры, вообще говоря, может быть различным в зависимости от принципов подхода к его отысканию. В теории игр для отыскания решения используется принцип минимакса. Рассмотрим подробнее его сущность.

15.2.1. Принцип минимакса в теории игр. Верхняя и нижняя цена игры. Максиминная и минимаксная стратегия игроков

Если участник конфликта следует принципу минимакса, то, оценивая целесообразность применения каждой из своих стратегий, он исходит из возможности наиболее неблагоприятного для себя ответного хода противника. Выбранная им стратегия гарантирует ему максимально возможный выигрыш (или минимально возможный проигрыш) при самой неблагоприятной для него стратегии противника*.

* Народная мудрость давно нашла этот принцип и образно его сформулировала: лучше синица в руках, чем журавль в небе. Противоположным ему является принцип максимакса: или грудь в крестах, или голова в кустах.

Рассмотрим пример. Допустим, что при оценке обстановки выявлены три возможных варианта построения стороной B противокатерной обороны объекта и четыре варианта нанесения по объекту удара торпедными катерами стороны A . До момента нанесения удара ни одна из сторон не знает о выборе, сделанном противником. Вычислены и сведены в матрицу игры (мат-рица 15.2) показатели эффективности выполнения стороной A поставленной задачи для различных пар $A_i B_j$ вариантов действий (стратегий) сторон. Оценивая каждую свою стратегию A_i , сторона A определяет для нее минимально возможный выигрыш α_i , для чего просматриваются выигрыши u_{ij} при всех стратегиях B_j противника ($j = 1, 2, \dots, n$):

$$\alpha_i = \min_j u_{ij}.$$

Сторона A — выигрывающая, она стремится максимизировать свой выигрыш, поэтому она просматривает все выигрыши $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, m)$ и выбирает максимальный из них:

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j u_{ij}.$$

Матрица 15.2

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	0,70	0,40	0,25	0,25
A_2	0,40	0,55	0,50	0,40
A_3	0,30	0,60	0,75	0,30
A_4	0,70	0,35	0,40	0,35
β_j	0,70	0,60	0,75	

Величина α называется *нижней ценой игры* или *максимином*. Стратегия стороны A , при которой она достигает максиминного выигрыша, называется *максиминной стратегией*. В рассматриваемом примере $\alpha = 0,40$, а максиминной стратегией является A_2 .

Сторона B , выбирая стратегию, поступает аналогично. Так как сторона B — проигрывающая, то, исходя из принципа минимакса, она считает необходимым при оценке каждой своей стратегии учитывать возможность такого ответного хода противника, при котором ее проигрыш будет максимальным. Поэтому для каждой своей стратегии B_j она ищет максимальный проигрыш β_j , просматривая все стратегии A_i противной стороны:

$$\beta_j = \max_i u_{ij}.$$

Затем сторона B определяет минимальный из всех найденных подобным образом максимальных проигрышей:

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i u_{ij}.$$

Величина β называется *верхней ценой игры* или *минимаксом*, а соответствующая стратегия стороны B *минимаксной стратегией*. В рассматриваемом примере $\beta = 0,60$, а минимаксной является стратегия B_2 . Всегда $\beta \geq \alpha$.

Из способов определения максиминной стратегии следует, что ее применение гарантирует стороне A выигрыш не меньше чем α , какие бы стратегии ни принимала сторона B .

Точно так же применение стороной B своей минимаксной стратегии гарантирует ей проигрыш не более чем β при любых стратегиях стороны A .

Обратим внимание на то, что стремление каждой из сторон повысить свою эффективность делает максиминную и минимаксную стратегии неустойчивыми при наличии у соответствующей стороны информации о поведении противника. Например, если стороне A (см. матрицу 15.2) стало известно, что сторона B применяет стратегию B_2 , ей будет целесообразно вместо максиминной стратегии A_2 , применять стратегию A_3 . При этом ее выигрыш повысится с 0,55 до 0,60. Если факт применения стороной A этой своей стратегии станет известен стороне B , ей будет выгодно вместо минимаксной стратегии B_2 применять стратегию B_1 . Это понизит ее проигрыш с 0,60 до 0,30. И т. д.

Однако имеются такие конфликтные ситуации, в которых даже полное знание обеими сторонами поведения противника не дает им возможности сменить максиминную (минимаксную) стратегию на другую, так как это приведет к снижению эффективности. Для иллюстрации рассмотрим игровую матрицу 15.3.

Матрица 15.3

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	0,70	0,40	0,25	0,25
A_2	0,40	0,55	0,50	0,40
A_3	0,65	0,60	0,75	0,60
A_4	0,70	0,35	0,40	0,35
β_j	0,70	0,60	0,75	

Определим по изложенному выше правилу нижнюю и верхнюю цены игры: $\alpha = 0,60$, $\beta = 0,60$, т. е. $\alpha = \beta$. Обратим внимание, что эта величина является минимальной в строке A_3 и максимальной в столбце B_2 . Этот элемент платежной матрицы получил название *седловой точки*. Он и является ценой игры v , так как при наличии седловой точки любая из сторон, уклонившаяся от стратегии, выбранной в соответствии с принципом минимакса, обязательно потеряет в эффективности, если другая сторона придерживается этой своей стратегии. Подобная ситуация называется ситуацией равновесия, так как даже наличие у сторон информации о поведении другой стороны не дает им возможности повысить свою эффективность за счет изменения стратегии.

Таким образом, максиминная и минимаксная стратегии при $\alpha = \beta$ являются оптимальными стратегиями. Это — случай решения игры в чистых стратегиях.

Доказано, что игры с полной информацией всегда имеют седловую точку и, значит, обладают решением в чистых стратегиях. Такое решение в принципе есть у игры в шахматы, и если это решение не найдено, то исключительно из-за необозримо большого числа возможных стратегий. Седловую точку могут иметь и игры с неполной информацией, однако в оперативно-тактической области такие ситуации — исключение, а не правило.

Если у матричной игры седловая точка отсутствует, то оптимальными стратегиями сторон являются смешанные стратегии. Для нахождения оптимальных смешанных стратегий разработан ряд методов. Ниже будут рассмотрены аналитические и графические методы решения игр 2×2 , $2 \times n$, $m \times 2$ ($n > 2$; $m > 2$), а также метод сведения матричной игры с матрицей любого размера к задаче линейного программирования или методу итераций. Для того чтобы иметь возможность применять теорию игр при управлении, необходимо уметь оперативно решать игры с матрицами различного

размера. Это требует применения ЭВМ и универсальных (с точки зрения размеров матриц) алгоритмов решения. Такому условию соответствуют два последних из числа перечисленных методов.

Методы решения игр 2×2 , $2 \times n$, $m \times 2$ рассматриваются главным образом потому, что специфические особенности этих игр, простота отыскания решения игры, возможность графической интерпретации решения делают удобным использование таких игр для иллюстрации решения игры и особенностей их применения при управлении. Предварительно, однако, рассмотрим два вопроса: основные свойства оптимальных стратегий и возможность упрощения матрицы игры.

15.2.2. Основные свойства оптимальных смешанных стратегий

В 1929 г. фон Нейманом была доказана теорема, называемая основной теоремой теории игр или теоремой о минимаксе: каждая конечная игра имеет по крайней мере одно решение, возможно, в области смешанных стратегий.

Оптимальные смешанные стратегии игроков создают ситуацию равновесия, даже если отсутствует седловая точка, т. е. при $\alpha \neq \beta$. Эта ситуация определяется неравенством

$$M(S'_A, S_B) \leq v \leq M(S_A, S'_B),$$

где S'_A, S'_B — любые неоптимальные стратегии игроков A и B соответственно.

Для изложения методов нахождения оптимальных смешанных стратегий потребуется знание следующих их свойств*.

1. Если одна из сторон применяет свою оптимальную смешанную стратегию, а другая не применяет, но не выходит за рамки активных стратегий (т. е. придерживается одной из активных стратегий или любой смеси активных стратегий), то выигрыш стороны A (проигрыш стороны B) равен цене игры. Эффективность действий стороны может уменьшиться, если она будет применять неактивные стратегии.

2. Изменение всех элементов u_{ij} платежной матрицы по правилу $au_{ij} + b = u'_{ij}$, где a и b — любые числа (кроме случая $a = 0$), не меняет оптимальных стратегий сторон. Смысл этого свойства: изменение масштаба выигрыша не может менять поведения игроков. Нетрудно также видеть, что цена игры при этом изменится по тому же правилу, по которому менялись выигрыши u_{ij} .

3. У каждого игрока число активных стратегий в игре $m \times n$ не может превосходить меньшего из чисел m или n . Например, в играх $2 \times n$, $m \times 2$ число активных стратегий у обоих игроков не может быть больше 2 при любых n и m .

15.2.3. Сокращение матрицы игры

Нахождение решения игры тем проще, чем меньше размеры игровой матрицы. В ряде случаев размеры матрицы можно уменьшить путем вычеркивания излишних стратегий, заведомо невыгодных или дублирующих.

Стратегии стороны $A(B)$ являются дублирующими, если выигрыш (проигрыш) стороны одинаков при всех этих стратегиях. Причем это имеет место для всех стратегий противника. Стратегия стороны $A(B)$ является невыгодной, если у этой стороны имеется хотя бы одна другая стратегия,

* Далее при необходимости сослаться на эти свойства будут указываться их номера.

гарантирующая при всех стратегиях противника больший выигрыш (меньший проигрыш). Это — случай строгого доминирования (превосходства) одной стратегии над другой. Если же для некоторых стратегий противника имеет место превосходство, а для других — дублирование, то говорят о слабом доминировании. Доминирующими могут быть не только чистые стратегии, но и их смеси. Правда, при анализе матрицы может оказаться затруднительным обнаружить факт такого доминирования.

Указанный анализ матрицы игры может быть полезен командиру при оценке обстановки.

15.2.4. Методы решения игр 2×2

Приступая к решению любой игры, необходимо прежде всего проверить наличие в матрице седловой точки. Если седловая точка есть, решение найдено: соответствующие седловой точке чистые стратегии являются оптимальными, а выигрыш равен цене игры. При отсутствии седловой точки следует попытаться уменьшить размеры матрицы игры. После этого приступают к решению игры.

Игра 2×2 может быть решена двумя методами — аналитическим и графическим.

Аналитический метод. Пусть игра 2×2 (матрица 15.4) не имеет седловой точки. Следовательно, решение такой игры лежит в области смешанных стратегий, причем обе стратегии каждого игрока активные.

Матрица 15.4

	B_j	B_1	B_2
A_i		u_{11}	u_{12}
A_1		u_{21}	u_{22}
A_2			

Допустим, что сторона A использует свою оптимальную смешанную стратегию $S_A = (p_1; p_2)$. Тогда в силу первого свойства оптимальной смешанной стратегии (см. п. 15.2.2) при использовании игроком B любой своей чистой стратегии B_1 или B_2 выигрыш стороны A будет равен цене игры v , которая вычисляется по формулам

$$v = p_1 u_{11} + p_2 u_{21}; \quad v = p_1 u_{12} + p_2 u_{22} \quad (15.2.1)$$

при использовании стороной B своих стратегий B_1 и B_2 соответственно.

Учтем, что $p_1 + p_2 = 1$, приравняем правые части полученных уравнений, произведем алгебраические преобразования. В результате будем иметь

$$p_1 = \frac{u_{22} - u_{21}}{(u_{11} - u_{12}) + (u_{22} - u_{21})}; \quad p_2 = \frac{u_{11} - u_{12}}{(u_{11} - u_{12}) + (u_{22} - u_{21})}. \quad (15.2.2)$$

Пусть теперь сторона B использует свою оптимальную смешанную стратегию $S_B = (q_1; q_2)$, а сторона A — одну из чистых стратегий A_1 или A_2 . Напомним, что обе эти стратегии активные. Тогда в силу первого свойства решения игры проигрыш стороны B при любой чистой стратегии стороны A будет равен цене игры v , которая вычисляется по формулам

$$v = q_1 u_{11} + q_2 u_{12}; \quad v = q_1 u_{21} + q_2 u_{22} \quad (15.2.3)$$

при использовании стороной A своих стратегий A_1 и A_2 соответственно.

Приравняем правые части уравнений (15.2.3), учтем, что $q_1 + q_2 = 1$. Решив полученное уравнение относительно q_1 или q_2 , получим

$$q_1 = \frac{u_{22} - u_{12}}{(u_{22} - u_{12}) + (u_{11} - u_{21})}; \quad q_2 = \frac{u_{11} - u_{21}}{(u_{11} - u_{21}) + (u_{22} - u_{12})}. \quad (15.2.4)$$

Таким образом, оптимальные смешанные стратегии сторон определяются с помощью выражений (15.2.2) и (15.2.4). После того как стратегии сторон определены, вычисляется цена игры по одному (любому) из уравнений (15.2.1) или (15.2.3).

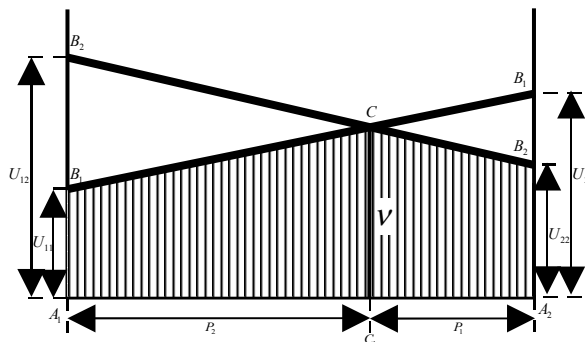


Рис.15.6

Графический метод. Задача 2×2 может быть решена и графически. Найдем вначале оптимальную смешанную стратегию стороны A . Для этого из концов отрезка A_1A_2 , длина которого равна единице, восстановим перпендикуляры и отложим на них выигрыши стороны A при использовании стороной B стратегий B_1 и B_2 (рис. 15.6). Концы отрезков u_{11} , u_{21} и u_{12} , u_{22} соединим прямыми B_1B_1 и B_2B_2 .

Каждая точка отрезка A_1A_2 представляет собой стратегию стороны A . Отрезки перпендикуляров, восстановленных из этих точек и заключенных между отрезком A_1A_2 и ближайшей из прямых B_1B_1 или B_2B_2 , есть выигрыш стороны A (проигрыш стороны B) при применении стороной A соответствующей смешанной стратегии в условиях разумного поведения стороны B .

Например, точке C_1 соответствует смешанная стратегия $S_A = (p_1; p_2)$. Покажем, что именно точке C_1 соответствует оптимальная смешанная стратегия стороны A . Величина же отрезка CC_1 равна цене игры.

Первое обстоятельство следует из принципа максимина, в соответствии с которым сторона A выбирает оптимальную стратегию: она ищет максимальный из минимально возможных выигрышей. Что это так видно из рис. 15.6, где показаны некоторые минимально возможные выигрыши.

Если сторона A начнет применять другие стратегии, которые соответствуют точкам отрезка A_1A_2 , расположенным влево (вправо) от точки C_1 , то противник, применив чистую стратегию $B_1(B_2)$ уменьшит выигрыш стороны A . Значит, точке C_1 соответствует ситуация равновесия: при любой стратегии противника выигрыш стороны A не меняется, т. е. равен цене игры.

Из геометрических соображений следует, что этот выигрыш составит

$$CC_1 = u_{11}p_1 + u_{21}p_2 = u_{12}p_1 + u_{22}p_2 = v,$$

где p_1 и p_2 численно равны длинам отрезков C_1A_2 и C_1A_1 соответственно.

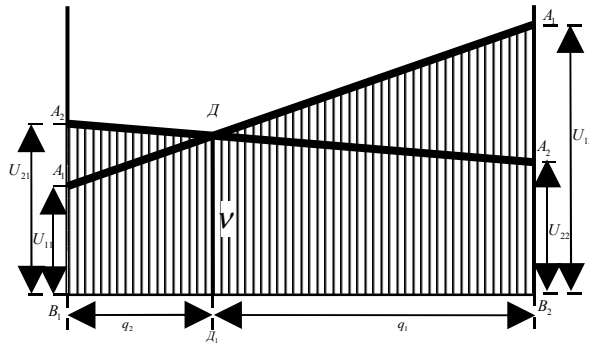


Рис.15.7

Аналогичным образом может быть определена оптимальная смешанная стратегия стороны B . Берем отрезок B_1B_2 , равный единице, из его концов восстанавливаем перпендикуляры. На них откладываем проигрыши стороны B — отрезки u_{11} , u_{21} и u_{12} , u_{22} (рис. 15.7). Концы соответствующих отрезков соединяем прямыми A_1A_1 и A_2A_2 . Далее ищем минимакс — минимальный из всех максимально возможных проигрышей стороны B . На рис. 15.7 он равен отрезку DD_1 . Это — цена игры v . Точке D_1 соответствует оптимальная смешанная стратегия стороны B и цена игры соответственно:

$$S_B = (q_1; q_2); \quad v = DD_1 = u_{11}q_1 + u_{12}q_2 = u_{21}q_1 + u_{22}q_2,$$

где q_1 и q_2 численно равны длинам отрезков D_1B_2 и D_1B_1 соответственно.

Рассмотрим на примере аналитический метод решения игры 2×2 .

Пример 15.9. Решим игру из примера 15.1. Будем считать, что вероятность преодоления подводной лодкой дальнего противолодочного охранения $p_d = 0,8$, ближнего корабельного охранения $p_6 = 0,58$, вероятность поражения атакованного объекта $w = 0,88$. Матрица игры будет иметь вид матрицы 15.5.

Матрица 15.5

	B_j	B_1	B_2
A_i			
	A_1	0,30	1
	A_2	1	0,59

Показатели эффективности (выигрыш стороны A) u_{12} , u_{21} равны единице (главный объект достоверно не поражен), так как при парах стратегий A_1, B_2 и A_2, B_1 подводная лодка атакует ложную цель. Показатели эффективности u_{11} , u_{12} вычисляются по следующим формулам:

$$u_{11} = 1 - p_d w; \quad u_{22} = 1 - p_d p_6 w.$$

Переходим к решению игры. Определяем $\alpha = 0,59$, $\beta = 1,0$ и приходим к выводу, что седловая точка отсутствует ($\alpha \neq \beta$). Проверяем стратегии сторон на доминирование и убеждаемся, что невыгодных или дублирующих стратегий нет.

Таким образом, необходимо решить игру 2×2 . Используем аналитический метод. Оптимальные стратегии сторон вычислим по формулам (15.2.2) и (15.2.4):

$$p_1 = \frac{u_{22} - u_{21}}{(u_{22} - u_{21}) + (u_{11} - u_{12})} = \frac{-0,41}{-0,41 - 0,70} = 0,37;$$

$$p_2 = 1 - p_1 = 0,63;$$

$$q_1 = \frac{u_{22} - u_{12}}{(u_{22} - u_{12}) + (u_{11} - u_{21})} = \frac{-0,41}{-0,41 - 0,70} = 0,37;$$

$$q_2 = 1 - q_1 = 0,63.$$

Для нахождения цены игры воспользуемся одним из выражений (15.2.1) и (15.2.3). Например, $v = u_{11}p_1 + u_{21}p_2$. Подставив значения параметров, получим $v = 0,30 \cdot 0,37 + 1 \cdot 0,63 = 0,74$.

Итак, шаблонное следование какой-либо одной стратегии противопоказано обеим сторонам. Сторона A должна располагать главный объект и в точке 1 и в точке 2 (см. рис. 15.1) с частотами, соответственно равными $p_1 = 0,37$ и $p_2 = 0,63$. Подводные лодки стороны B должны атаковать объект и в точке 1 и в точке 2 с частотами соответственно $q_1 = 0,37$ и $q_2 = 0,63$. Цена игры — вероятность непоражения главного объекта стороны A — при этом равна $v = 0,74$.

Разумеется, численные значения всех полученных параметров справедливы только для условий поставленной задачи и с учетом особенностей воспроизведения конфликтной ситуации аппаратом теории матричных игр. В данном параграфе ограничимся лишь изложением методов нахождения решения игры, а к вопросам интерпретации полученного решения и выработки рекомендаций вернемся ниже.

Читателю предлагается самостоятельно найти решение примера 15.9 графическим методом.

15.2.5. Методы решения игр $2 \times n$ и $m \times 2$

Такие игры могут решаться двумя методами — графоаналитическим и графическим. В обоих случаях для нахождения решения игры используется третье свойство оптимальной смешанной стратегии, в силу которого у обеих сторон в играх $2 \times n$ и $m \times 2$ не может быть более двух активных стратегий (см. п. 15.2.2). Активные стратегии выявляются графическим способом. В результате игра $2 \times n$ (или $m \times 2$) оказывается сведенной к игре 2×2 , которая решается аналитически или графически (см. п. 15.2.4). В качестве иллюстрации рассмотрим следующий пример.

Пример 15.10. Расширим условия примера 15.9. Допустим, что сторона A прогнозирует возможность применения стороной B варианта действий, при котором подводная лодка, прорвавшая ближнее противолодочное охранение, частью торпед атакует цель в точке 1, а остальными торпедами — цель в точке 2. Допустим также, что расчеты, произведенные с использованием методов теории эффективности стрельбы, дали следующие вероятности поражения объектов в точках 1 и 2: $w_1 = 0,52$; $w_2 = 0,26$.

Обозначим исследуемый вариант действий стороны B стратегией B_3 . Очевидно, что и в данном случае имеет место одноходовая игра. Найдем матрицу этой игры (матрица 15.6).

Матрица 15.6

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3
A_1	0,30	1,0	0,76
A_2	1,0	0,59	0,88

Показатели эффективности (выигрыши) u_{13} , u_{23} для пар стратегий A_1, B_3 и A_2, B_3 определяются из выражений:

$$u_{13} = 1 - p_d p_6 w_1 = 1 - 0,8 \cdot 0,58 \cdot 0,52 = 0,76;$$

$$u_{23} = 1 - p_d p_6 w_2 = 1 - 0,8 \cdot 0,58 \cdot 0,26 = 0,88.$$

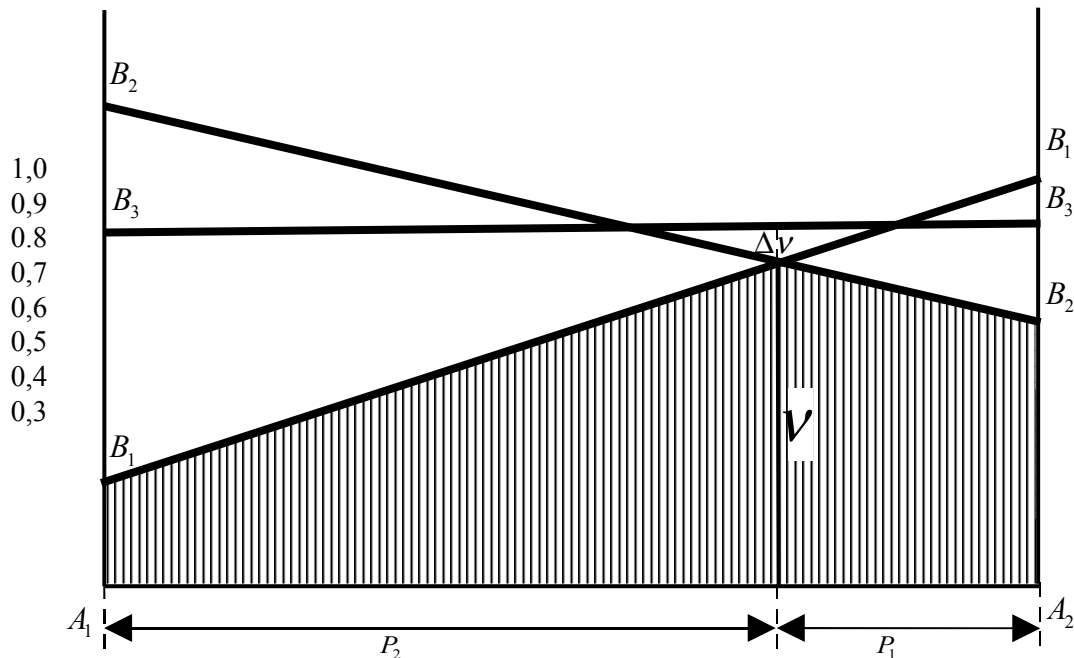


Рис.15.8

Определим нижнюю и верхнюю цены игры: $\alpha = 0,59$, $\beta = 0,88$. Убеждаемся в отсутствии седловой точки ($\alpha \neq \beta$), а также в отсутствии у сторон невыгодных или дублирующих стратегий и переходим к решению игры. На рис. 15.8 показаны выигрыши стороны A при ее стратегиях A_1 и A_2 и различных стратегиях стороны B . Активными для стороны B являются стратегии B_1 и B_2 . Стратегия B_3 не является активной: если сторона B будет ее применять, то при оптимальной смешанной стратегии стороны A проигрыш стороны B увеличится сверх цены игры на величину $\Delta v = 0,09$.

Таким образом, требуется решить игру 2×2 со стратегиями сторон A_1, A_2 и B_1, B_2 . Решить эту игру, как уже указывалось, можно либо аналитически, либо графически. В данном примере мы вернулись к игре, уже решенной в примере 15.9, и, естественно, получим те же результаты.

Выше был рассмотрен пример игры $2 \times n$ (для случая $n = 3$). Аналогично решаются и игры $m \times 2$. Разница заключается лишь в том, что графическим построением ищутся две активные стратегии стороны A при двух заданных активных стратегиях стороны B .

Пример 15.11. Корабельная поисково-ударная группа (КПУГ — сторона B) осуществляет поиск подводных лодок. Вертолеты КПУГ могут использоваться либо по варианту 1, либо по варианту 2. Подводная лодка (сторона A) обнаруживает противника первой и для уклонения от обнаружения может: а) прорывать строй КПУГ, при этом она обнаруживается только кораблями с вероятностью 0,4; б) выходить из полосы поиска способом 1. Вероятность ее обнаружения равна 0,65

и 0,3 при вариантах 1 и 2 использования противником вертолетов соответственно; в) выходить из полосы поиска способом 2. Подводная лодка обнаруживается при этом вертолетами с вероятностью 0,25 и 0,75 в зависимости от варианта их использования.

Принимая решение, командир подводной лодки и командир КПУГ не знают избранного противником варианта действий. Необходимо разработать модель конфликтной ситуации для обоснования рекомендаций относительно наилучшего поведения сторон.

В данном случае имеет место одноходовая матричная игра. Показателем эффективности подводной лодки является вероятность ее уклонения от КПУГ. (Это выигрыш стороны A и проигрыш стороны B).

Графическое решение задачи приведено на рис. 15.9.

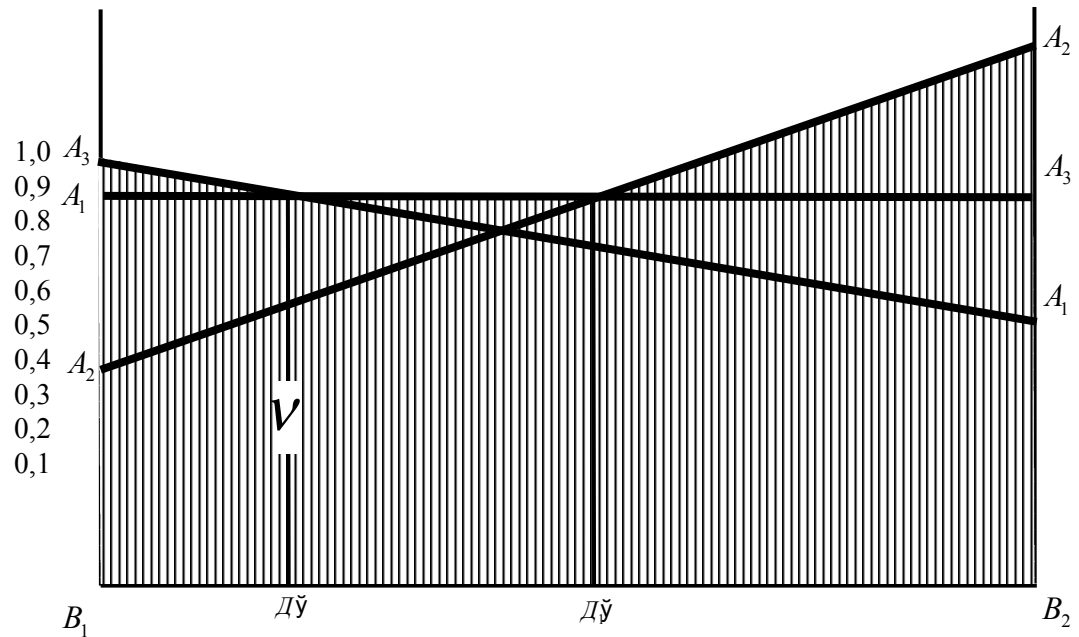


Рис.15.9

Рассматриваемый пример иллюстрирует одну из возможных ситуаций матричной игры — бесчисленное множество стратегий у игрока. Как видно, любая точка отрезка $D'D'$ есть оптимальная смешанная стратегия игрока B . Его проигрыш при любой из этих стратегий неизменен и равен цене игры v . Видно также, что у стороны A имеется лишь одна возможность — применять стратегию A_1 . Применение стратегий A_2 и A_3 , если сторона B следует своей оптимальной смешанной стратегии, способно лишь снизить выигрыш этой стороны.

15.2.6. Решение матричной игры методами линейного программирования

Требуется найти решение игры, имеющей матрицу 15.1. Числа m и n могут быть любыми. Матрица может иметь или не иметь седловой точки. Несущественно также, содержит или не содержит эта матрица дублирующие и невыгодные стратегии.

Обозначим, как условлено, через $S_A = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ оптимальную смешанную стратегию стороны A . Допустим, что сторона A применяет свою оптимальную смешанную стратегию, а сторона B — какую-либо из своих чистых стратегий, например B_j . Поскольку не известно, является стратегия

B_j активной или не является, то в силу первого свойства оптимальных смешанных стратегий можем записать

$$u_{1j}p_1 + u_{2j}p_2 + \dots + u_{ij}p_i + \dots + u_{mj}p_m \geq v.$$

Подобные неравенства справедливы для случая применения стороной B каждой из своих чистых стратегий $B_1, B_2, \dots, B_j, \dots, B_n$. Поэтому будем иметь систему неравенств:

$$\left. \begin{aligned} u_{11}p_1 + u_{21}p_2 + \dots + u_{i1}p_i + \dots + u_{m1}p_m &\geq v; \\ u_{12}p_1 + u_{22}p_2 + \dots + u_{i2}p_i + \dots + u_{m2}p_m &\geq v; \\ \dots &\dots \\ u_{1j}p_1 + u_{2j}p_2 + \dots + u_{ij}p_i + \dots + u_{mj}p_m &\geq v; \\ \dots &\dots \\ u_{1n}p_1 + u_{2n}p_2 + \dots + u_{in}p_i + \dots + u_{mn}p_m &\geq v. \end{aligned} \right\} \quad (15.2.5)$$

При этом должны выполняться условия $\sum_{i=1}^m p_i = 1$; $p_i \geq 0$.

Далее будем считать параметр v положительным. Такое допущение можно сделать без нарушения общности результата: в силу второго свойства (см. 15.2.2) оптимальных смешанных стратегий можно увеличить все элементы u_{ij} матрицы игры на такую положительную величину, чтобы все эти элементы были положительными. При этом и цена игры будет положительной.

Преобразуем теперь полученную систему (15.2.5), разделив правые и левые части неравенств на положительную величину v . Введем обозначение $x_i = p_i / v$. Тогда

$$\left. \begin{aligned} u_{11}x_1 + u_{21}x_2 + \dots + u_{i1}x_i + \dots + u_{m1}x_m &\geq 1; \\ u_{12}x_1 + u_{22}x_2 + \dots + u_{i2}x_i + \dots + u_{m2}x_m &\geq 1; \\ \dots &\dots \\ u_{1j}x_1 + u_{2j}x_2 + \dots + u_{ij}x_i + \dots + u_{mj}x_m &\geq 1; \\ \dots &\dots \\ u_{1n}x_1 + u_{2n}x_2 + \dots + u_{in}x_i + \dots + u_{mn}x_m &\geq 1. \end{aligned} \right\} \quad (15.2.6)$$

При этом очевидно, что $x_i \geq 0$.

Сторона A — выигрывающая. Она стремится максимизировать цену игры v . Обратим внимание, что

$$\sum_{i=1}^m x_i = \sum_{i=1}^m \frac{p_i}{v} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^m p_i = \frac{1}{v}.$$

Поэтому будем иметь следующую задачу линейного программирования: найти неизвестные $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_m$, обращающие в минимум целевую функцию $y = x_1 + x_2 + \dots + x_i + \dots + x_m = \frac{1}{v}$ при выполнении линейных ограничений (15.2.6):

$$\sum_{i=1}^m u_{ij} x_i \geq 1, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Полученная задача может быть решена одним из методов решения задач линейного программирования, например симплексным. В результате будут получены параметры $y = 1/v$ и $x_i = p_i/v, i = 1, 2, \dots, m$. Далее вычисляется цена игры $v = 1/y$, а затем вероятности $p_i = vx_i$. Итак, цена игры и оптимальная стратегия стороны A определены.

Аналогичным образом может быть определена и оптимальная смешанная стратегия стороны B . Следует лишь учесть, что сторона B — проигрывающая и стремится минимизировать свой проигрыш. Поэтому вместо (15.2.6) получим систему ограничений $\sum_{j=1}^n u_{ij} z_j \leq 1, i = 1, 2, \dots, m$ и

целевую функцию $y' = \sum_{j=1}^n z_j = \frac{1}{v}$, которую следует максимизировать. В этих формулах $z_j = \frac{q_j}{v}$.

Однако практически нет необходимости для нахождения оптимальных стратегий сторон решать две задачи линейного программирования. Каждая из сформулированных задач содержит двойственную задачу. Решение прямой задачи дает оптимальную стратегию одной стороны, а решение двойственной задачи — другой. Так, при решении симплексным методом задачи (15.2.6) будут введены дополнительные переменные $x_{m+j} (j = 1, 2, \dots, n)$ (см. гл. 12). В заключительной таблице решения задачи будут получены параметры δ_{m+j} . Можно показать, что вероятности $q_j (j = 1, 2, \dots, n)$ оптимальной смешанной стратегии стороны B определяются по формуле $q_j = -v\delta_{m+j}$.

15.2.7. Решение матричной игры методом итераций

Идея метода итераций (последовательных приближений) сводится к следующему. Последовательно разыгрываются партии игры за сторону A и сторону B . Каждый раз подсчитываются суммы выигрышей стороны A (проигрышей стороны B) для всех стратегий этих сторон за все партии игры. Выбор стратегии для очередного хода стороны A осуществляется с ориентацией на достигнутый к данному ходу максимальный суммарный выигрыш, а для стороны B — на минимальный суммарный проигрыш. При этом достигнутая каждой стороной к данному шагу итераций эффективность является результатом применения некоторой смешанной стратегии.

Доказано, что процесс итераций сходится: при увеличении их числа частоты $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_m; \tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n$ применения сторонами своих стратегий приближаются к их вероятностям $p_1, p_2, \dots, p_m; q_1, q_2, \dots, q_n$, а средний выигрыш \tilde{v} стремится к цене игры v .

Покажем метод итераций на примере.

Пример 15.12. Планируется удар четырех носителей стороны A по соединению кораблей противника (стороны B), состоящему из корабля ядра и кораблей охранения и следующему в район выполнения задачи.

При уяснении задачи и оценке обстановки установлено следующее. Цель удара — поражение корабля ядра. Противник, обеспечивая на переходе боеспособность корабля ядра, способен действовать по одному из следующих вариантов:

B_1 — с обнаружением носителя оружия все силы поддержки направить в район обнаружения;

B_2 — направить часть сил поддержки в район обнаружения носителя, остальную часть сил распределить на другие направления;

B_3 — распределить силы поддержки равномерно на все направления после обнаружения хотя бы одного носителя.

При указанных вариантах действий противника различную эффективность имеют следующие варианты использования носителей оружия:

A_1 — носители оружия использовать в составе двух групп по два носителя в группе;

A_2 — два носителя использовать в составе группы, два — самостоятельно;

A_3 — все носители использовать самостоятельно.

Одиночные носители или их группы могут действовать только с различных направлений. К моменту нанесения удара ни одна из сторон не знает об избранном противником варианте действий.

Математическое моделирование должно позволить обосновать вариант применения носителей оружия и прогнозировать действия противника.

Допустим, что методами математического моделирования произведена оценка показателя эффективности для всех возможных пар стратегий сторон, в результате чего получена игровая матрица 15.7

Матрица 15.7

	B_j			
A_i		B_1	B_2	B_3
A_1		0,40	0,65	0,75
A_2		0,50	0,60	0,70
A_3		0,70	0,60	0,30

Убедившись в отсутствии седловой точки, разработаем процедуру нахождения решения этой игры методом итераций.

Сущность метода итераций отражена в табл. 15.1. В первом столбце помещены номера партий. Каждая партия включает пару выборов — стороны A и стороны B . Они помещены в столбцах 2 и 6.

Накопленные к k -му шагу процесса проигрыши стороны B для каждой из ее стратегий помещены в столбцах 3—5; в столбцах 7—9 помещены накопленные выигрыши стороны A . В каждой строчке подчеркнуты минимальный проигрыш стороны B и максимальный выигрыш стороны A . Именно они

Таблица 15.1

k	Выбор A	Суммарный ожидаемый проигрыш стороны B при стратегиях			Выбор B	Суммарный ожидаемый выигрыш стороны A при стратегиях			$\tilde{\alpha}_k$	$\tilde{\beta}_k$	\tilde{v}_k	$\tilde{p}_1^{(k)}$	$\tilde{p}_2^{(k)}$	$\tilde{p}_3^{(k)}$	$\tilde{q}_1^{(k)}$	$\tilde{q}_2^{(k)}$	$\tilde{q}_3^{(k)}$
		B_1	B_2	B_3		A_1	A_2	A_3									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	A_1	<u>0,40</u>	0,65	0,75	B_1	0,40	0,50	<u>0,70</u>	0,40	0,70	0,55	1	0	0	1	0	0
2	A_3	1,10	1,25	<u>1,05</u>	B_1	0,80	1,00	<u>1,40</u>	0,52	0,70	0,61	0,5	0	0,5	1	0	0
3	A_3	1,80	1,85	<u>1,35</u>	B_3	1,55	<u>1,70</u>	1,70	0,45	0,57	0,51	0,33	0	0,67	0,67	0	0,33
4	A_2	2,30	2,45	<u>2,05</u>	B_3	2,30	<u>2,40</u>	2,00	0,51	0,60	0,56	0,25	0,25	0,5	0,5	0	0,5
5	A_2	2,80	3,05	<u>2,75</u>	B_3	3,05	<u>3,10</u>	2,30	0,55	0,62	0,59	0,2	0,4	0,4	0,4	0	0,6
6	A_2	<u>3,30</u>	3,65	3,45	B_3	<u>3,80</u>	3,80	2,60	0,55	0,63	0,59	0,17	0,5	0,33	0,33	0	0,67
7	A_1	<u>3,70</u>	4,30	4,20	B_1	4,20	<u>4,30</u>	3,30	0,53	0,61	0,57	0,29	0,42	0,29	0,43	0	0,57
8	A_2	<u>4,20</u>	4,90	4,90	B_1	4,60	<u>4,80</u>	4,00	0,53	0,60	0,57	0,25	0,5	0,25	0,5	0	0,5

9	A_2	<u>4,70</u>	5,50	5,60	B_1	5,00	<u>5,30</u>	4,70	0,52	0,59	0,56	0,22	0,56	0,22	0,55	0	0,45
10	A_2	<u>5,20</u>	6,10	6,30	B_1	5,40	<u>5,80</u>	5,40	0,52	0,52	0,55	0,2	0,6	0,2	0,60	0	0,4
11	A_2	<u>5,70</u>	6,70	7,00	B_1	5,80	<u>6,30</u>	6,10	0,52	0,57	0,55	0,18	0,64	0,18	0,64	0	0,36
12	A_2	<u>6,20</u>	7,30	7,70	B_1	6,20	<u>6,80</u>	<u>6,80</u>	0,52	0,57	0,55	0,17	0,66	0,17	0,67	0	0,33
13	A_3	<u>6,90</u>	7,90	8,00	B_1	6,60	7,30	<u>7,50</u>	0,53	0,58	0,56	0,15	0,62	0,23	0,69	0	0,31
...
16	A_3	9,00	9,70	<u>8,90</u>	B_1	7,80	8,80	<u>9,60</u>	0,56	0,61	0,59	0,12	0,5	0,38	0,75	0	0,25
17	A_3	9,70	10,30	<u>9,20</u>	B_3	8,55	9,50	9,90	0,54	0,58	0,56	0,12	0,47	0,41	0,71	0	0,29
18	A_3	10,40	10,90	<u>9,50</u>	B_3	9,30	<u>10,20</u>	10,20	0,53	0,57	0,55	0,11	0,445	0,445	0,67	0	0,33
19	A_2	10,90	11,50	<u>10,20</u>	B_3	10,05	<u>10,90</u>	10,50	0,54	0,57	0,54	0,11	0,47	0,42	0,63	0	0,37
...
23	A_2	<u>12,90</u>	13,90	13,00	B_3	13,05	<u>13,70</u>	11,70	0,56	0,60	0,58	0,09	0,56	0,35	0,52	0	0,48
24	A_2	<u>13,40</u>	14,50	13,70	B_1	13,45	<u>14,20</u>	12,40	0,56	0,59	0,58	0,08	0,58	0,34	0,54	0	0,46
...
33	A_2	<u>17,90</u>	19,90	20,00	B_1	17,05	18,70	<u>18,70</u>	0,54	0,57	0,56	0,06	0,68	0,26	0,67	0	0,33
34	A_3	<u>18,60</u>	20,50	20,30	B_1	17,45	19,20	<u>19,40</u>	0,55	0,57	0,56	0,06	0,65	0,29	0,68	0	0,32
...
39	A_3	22,10	23,50	<u>21,80</u>	B_1	20,45	21,70	<u>22,90</u>	0,57	0,59	0,58	0,05	0,6	0,35	0,72	0	0,28
40	A_3	22,80	24,10	<u>22,10</u>	B_3	21,20	22,40	<u>23,20</u>	0,55	0,58	0,57	0,05	0,58	0,37	0,7	0	0,3
41	A_3	23,50	24,70	<u>22,40</u>	B_3	21,95	23,10	<u>23,50</u>	0,55	0,57	0,56	0,05	0,56	0,39	0,68	0	0,32
42	A_3	24,20	25,30	<u>22,70</u>	B_3	22,70	<u>23,80</u>	23,80	0,54	0,57	0,56	0,05	0,55	0,4	0,67	0	0,33
43	A_2	24,70	25,90	<u>23,40</u>	B_3	23,45	<u>24,50</u>	24,10	0,54	0,57	0,56	0,05	0,56	0,39	0,65	0	0,35
...
50	A_2	<u>28,20</u>	30,10	28,30	B_3	28,70	<u>29,40</u>	26,20	0,56	0,59	0,58	0,04	0,62	0,34	0,56	0	0,44
51	A_2	<u>28,70</u>	30,70	29,00	B_1	29,10	<u>29,90</u>	26,90	0,56	0,59	0,58	0,04	0,63	0,33	0,57	0	0,43
52	A_2	<u>29,20</u>	31,30	29,70	B_1	29,50	<u>30,40</u>	27,60	0,56	0,58	0,57	0,04	0,63	0,33	0,58	0	0,42
53	A_2	<u>29,70</u>	31,90	30,40	B_1	29,90	<u>30,90</u>	28,30	0,56	0,58	0,57	0,04	0,64	0,32	0,58	0	0,42
54	A_2	<u>30,20</u>	32,50	31,10	B_1	30,30	<u>31,40</u>	29,00	0,56	0,58	0,57	0,04	0,65	0,31	0,59	0	0,41

определяют выбор соответствующей стороной стратегии для очередной партии игры. Если выделить сразу несколько выигрышей (проигрышей), то выбор стратегий осуществляется с использованием, например, случайного розыгрыша.

В столбцах 10 и 11 помещены средние значения соответственно нижней ($\tilde{\alpha}_k$) и верхней ($\tilde{\beta}_k$) цены игры. Параметр $\tilde{\alpha}_k$ получается делением минимального накопленного проигрыша стороны B на число проведенных партий k , параметр $\tilde{\beta}_k$ — делением максимального выигрыша стороны A на число проведенных партий k игры.

В столбце 12 помещены средние значения цены игры \tilde{v}_k , для k -го шага итерационного процесса. Они вычислены как среднее арифметическое значение

$$\tilde{v}_k = \frac{\tilde{\alpha}_k + \tilde{\beta}_k}{2}.$$

Подсчитывая число случаев применения стороной каждой стратегии и деля его на число партий k , получим статистические оценки частот $\tilde{p}_i^{(k)}$, $\tilde{q}_j^{(k)}$ применения сторонами всех стратегий A_i, B_j .

Получаемые в результате итерационного процесса средние значения цены игры \tilde{v}_k и смешанные стратегии

$$\tilde{S}_A(k) = (\tilde{p}_1^{(k)}, \tilde{p}_2^{(k)}, \dots, \tilde{p}_3^{(k)}); \quad \tilde{S}_B(k) = (\tilde{q}_1^{(k)}, \tilde{q}_2^{(k)}, \dots, \tilde{q}_3^{(k)})$$

сходятся к их истинным значениям.

Допустим, что на первом шаге итерационного процесса стороны выбрали стратегии A_1, B_1 . Используем матрицу 15.7 и запишем в табл. 15.1 проигрыши стороны B и выигрыши стороны A (см. столбцы 3—5 и 7—9).

Как видно, минимальный проигрыш стороны B на первом шаге имеет место при использовании стратегии B_1 . Эту стратегию сторона B будет использовать на следующем (втором) шаге процесса.

Максимальный выигрыш сторона A на первом шаге имеет при использовании стратегии A_3 . Эту стратегию сторона A и будет использовать на следующем (втором) шаге.

Далее заполним столбцы 10—18 таблицы:

$$\tilde{\alpha}_1 = \frac{0,40}{1} = 0,40; \quad \tilde{\beta}_1 = \frac{0,70}{1} = 0,70; \quad \tilde{\nu}_1 = \frac{0,40 + 0,70}{2} = 0,55;$$

$$\tilde{p}_1^{(1)} = \frac{1}{1} = 1; \quad \tilde{p}_2^{(1)} = \tilde{p}_3^{(1)} = 0; \quad \tilde{q}_1^{(1)} = \frac{1}{1} = 1; \quad \tilde{q}_2^{(1)} = \tilde{q}_3^{(1)} = 0.$$

Переходим ко второму шагу процесса. В столбцах 2 и 6 запишем избранные сторонами стратегии. Используя матрицу 15.7, запишем в столбцах 3—5 и 7—9 проигрыши B и выигрыши A за два шага. Определим оптимальные стратегии сторон для третьего шага. Ими являются A_3 и B_3 . Затем определим:

$$\tilde{\alpha}_2 = \frac{1,05}{2} = 0,52; \quad \tilde{\beta}_2 = \frac{1,40}{2} = 0,70; \quad \tilde{\nu}_2 = \frac{0,52 + 0,70}{2} = 0,61;$$

$$\tilde{p}_1^{(2)} = \frac{1}{2} = 0,50; \quad \tilde{p}_2^{(2)} = 0; \quad \tilde{p}_3^{(2)} = \frac{1}{2} = 0,50;$$

$$\tilde{q}_1^{(2)} = \frac{2}{2} = 1; \quad \tilde{q}_2^{(2)} = 0; \quad \tilde{q}_3^{(2)} = 0.$$

Подобным же образом процесс продолжается и далее. Для сокращения размеров таблицы результаты некоторых шагов этого процесса в табл. 15.1 не представлены. При этом во всех таких шагах обе стороны применяют те же стратегии, что и на шаге, непосредственно предшествующем пропущенным.

Как видно, сходимость метода медленная, особенно оптимальных стратегий. Это характерно не только для рассматриваемого примера, но для метода в целом. Однако простота процедуры позволяет осуществлять на ЭВМ большое число итераций за сравнительно небольшое время и достигать необходимой точности решения игры. Специфической особенностью метода является также то, что с возрастанием матрицы игры $m \times n$ вычислительные операции усложняются весьма незначительно. Между тем сложность решения задачи линейного программирования с увеличением m и n возрастает значительно.

§ 15.3. РЕШЕНИЕ ИГРЫ И РЕАЛЬНАЯ КОНФЛИКТНАЯ СИТУАЦИЯ. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ИГР В ТВОРЧЕСКОЙ РАБОТЕ КОМАНДИРА, ОФИЦЕРА ШТАБА

Проблема интерпретации решения игры будет изложена применительно к матричным играм. Однако основные результаты, как будет видно далее, касаются и других классов игр.

Методологические позиции, с которых должна осуществляться интерпретация: следует сравнить постановку задачи матричных игр с особенностями реальных конфликтных ситуаций, моделируемых методами этих игр.

Постановка задачи матричной игры приведена в п. 15.1.2.

Напомним: считается, что каждому из противников известны: весь набор своих стратегий, а также весь набор стратегий другой стороны; выигрыши (проигрыши) u_{ij} для всех пар стратегий; принцип выбора противником оптимальной стратегии (принцип минимакса); факт наличия у противника информации об указанных выше элементах обстановки.

В условиях поставленной задачи решение матричной игры определяет оптимальные стратегии сторон, которыми в общем случае являются смешанные стратегии. Согласно теории игр выбор перед очередным боем или операцией конкретной стратегии (варианта действий) из числа активных стратегий должен осуществляться с помощью механизма случайного выбора — жребия. Использование смешанной стратегии в условиях модели конфликтной ситуации есть способ избежать шаблонного применения какой-либо одной стратегии, добиться среднего выигрыша, не меньшего, чем цена игры, при использовании противником любой стратегии или любых сочетаний стратегий. Последнее обстоятельство делает оптимальную стратегию устойчивой.

Вообще говоря, рекомендации, полученные методами теории игр, касаются и случая, когда многократно повторяются партии одной и той же игры, и случая, когда многократно проводится по одной партии различных игр.

Рассмотрим теперь, как выглядят реальные конфликтные ситуации и в какой степени правомерно буквальное использование рекомендаций, полученных методами теории матричных игр.

Можно утверждать, что конфликтные ситуации, подобные описанным выше, в реальных условиях встречаются чрезвычайно редко, да и то в низшем тактическом звене, а также при использовании оружия и технических средств. В тактическом, оперативном звеньях конфликтные ситуации выглядят следующим образом.

Существенными неопределенностями для командиров каждой из сторон является неопределенности относительно того, какие варианты действий рассматривает противник в качестве своих возможных вариантов и что думает противник о возможных вариантах действий данной стороны. Можно утверждать, что эти вопросы являются одними из главнейших в творческой деятельности командира при выработке решения.

Все сказанное составляет первое важное отличие условий реальной конфликтной ситуации от постановки задачи на моделирование конфликтной ситуации методом теории игр.

Второе отличие имеет своей причиной то обстоятельство, что далеко не во всех случаях может быть правильно выявлена цель действий противника. Ошибка же в определении цели действий вызывает, во-первых, ошибку в выборе класса игры для моделирования реальной конфликтной ситуации (антагонистическая или неантагонистическая игра) и, во-вторых, ошибку в определении величины выигрыша u_{ij} , что существенно исказит решение игры.

Следует указать на еще одну причину ошибки в определении величины выигрыша u_{ij} , которая кроется в способах ее вычисления и приводит к отличию реальной конфликтной ситуации от ее модели—игры.

Как уже отмечалось, для вычисления выигрышей u_{ij} разрабатываются специальные модели, а любая модель способна исказить объективно существующие показатели эффективности. Впрочем, если эти искажения равномерные (одинаковые) для всех пар стратегий $A_i B_j$, это не скажется на правильности вычисления оптимальных стратегий, а лишь аналогичным образом изменит цену игры

(о свойствах решения игры см. п. 15.2.2). Однако невозможность математического отражения многих важных факторов обстановки, например политических, морально-психологических и др. (о свойствах математических моделей вооруженной борьбы см. гл. 1), приводит к неодинаковому искажению моделью результата действий сил. Например, ведение боя с противником на малой и большой дистанциях может быть связано с различными морально-психологическими нагрузками на личный состав, объективно влияющими на эффективность выполнения задачи, но не учитываемыми математической моделью.

Итак, допущения и ограничения модели, используемой для вычисления выигрышей u_{ij} , — третье существенное отличие условий реальной конфликтной ситуации от игровой постановки задачи.

Четвертым отличием может быть факт существования у каждой из сторон неопределенности относительно принципа выбора противником варианта действий из числа возможных, а также отличие избранного противником принципа выбора от принципа минимакса.

Пятое отличие конфликтной ситуации от игровой постановки задачи заключается в том, что у каждой из сторон будут отсутствовать все необходимые сведения относительно степени осведомленности противника об обстановке.

Итак, как видно, реальные конфликтные ситуации в значительной мере отличаются от конфликтных ситуаций, моделируемых методами теории игр. Это делает невозможным непосредственное, “в лоб” следование рекомендациям, полученным в результате решения игры. Неоправданно и бессмысленно, решив матричную игру, бросить жребий и на основании полученного результата назначать построение сил на операцию, посылать в бой бригады кораблей, полки авиации, избирать способ маневрирования подводной лодки, выставлять минное заграждение и т. д. Но почему же все-таки математический аппарат теории игр рекомендует смешанные стратегии, механизм случайного выбора?

Дело в том, что методы теории игр совершенно правильно отражают одну из важнейших объективных закономерностей вооруженной борьбы — необходимость маскировки способов своих действий, вред шаблона. Однако математический аппарат “не знает” никаких других способов маскировки, кроме механизма случайного выбора. А вот военное искусство знает множество различных способов. Достаточно вспомнить мероприятия оперативного и тактического масштаба по маскировке эвакуации Одессы в 1941 г., мероприятия, проводимые во всех звеньях управления (стратегического, оперативного, тактического масштаба), по маскировке наступательной операции наших войск в Белоруссии в 1944 г. и др.

Что же касается использования смешанной стратегии, это в условиях математической модели единственный способ ограничить вред шаблона. Однако в реальных оперативно-тактических условиях грубым шаблоном является не только непрерывное использование одного-единственного способа действий (стратегии), но и ограниченного их набора, пусть даже с незакономерной их сменой.

Опыт войн свидетельствует, что наибольшего успеха добивались те командиры, каждое решение которых было неповторимым, оригинальным, неожиданным для противника, даже если эти решения принимались в одинаковых условиях обстановки и даже если другим казалось, что в этих условиях ничего, кроме тривиального, придумать невозможно. Но поиски новых решений требуют от командиров непрерывной творческой работы по изысканию новых способов использования сил и средств, прогнозированию способов действий противника. И теория игр является инструментом, который способен оказать помощь командиру в этой работе. Теория игр может быть успешно

применена командиром для расширения представления о множестве своих объективно существующих способов действий (стратегий), для прогнозирования возможных способов действий противника.

Для того чтобы это оказалось возможным, при уяснении командиром задачи и оценке обстановки необходимо сочетать творческие, эвристические методы с методами теории игр. Схематично этот процесс выглядит следующим образом. Уяснив задачу, выяснив цель действия сил, качественно оценив обстановку и выявив варианты использования своих сил и противника, командир дает указание осуществить математическое моделирование. Производится анализ решения игры — активных и неактивных стратегий сторон, цены игры. При этом учитываются возможные ошибки в исходных параметрах, допущения и ограничения как моделей, разработанных для вычисления выигрышей, так и модели конфликтной ситуации в целом.

После этого командир (офицер-оператор) совместно со специалистом по исследованию операций осуществляет творческий поиск с целью определения:

- какие возможны другие способы действий, свои и противника (расширение матрицы игры);
- при каких условиях неактивные стратегии сторон способны стать активными;
- в какой степени изменяется эффективность действий сторон при получении различной информации относительно возможных способов действий противника.

Разработанные при этом стратегии сторон включаются в матрицу новой игры, и находится решение этой новой игры. И т. д. Сколько раз следует повторить эти действия, зависит от творческих возможностей командира, сложности ситуации, имеющегося в распоряжении времени.

Заканчивая эту работу, командир должен оценить:

- выявленные множества (наборы) возможных способов действий, своих и противника, их эффективность при использовании сторонами различных сочетаний способов действий, условия обстановки, при которых тот или иной способ становится эффективным;
- меры маскировки тех или иных способов своих действий, меры дезинформации противника, имеющие целью скрыть от противника замысел использования своих сил, создать у него ложное представление о возможных способах выполнения нами поставленной задачи и тем самым вынудить выбрать способ действий, облегчающий реализацию планируемого замысла использования наших сил;
- разведывательные признаки, позволяющие судить об избранном противником способе действий.

Кроме того, должны обязательно учитываться факторы, не включенные в модель.

Опыт показывает, что использование методов теории игр позволяет командиру существенно расширить свои знания особенностей ситуации, механизма предстоящих действий и более обоснованно избрать способ решения поставленной задачи. Из анализа возможностей применения методов теории игр следует, что эти методы — в основном инструмент заблаговременной подготовки.

Эффективное использование методов теории матричных игр предъявляет определенные требования к структуре специального математического обеспечения ЭВМ, которое должно позволить:

- решать игры с использованием матриц любого размера;
- заполнять игровую матрицу, используя статистические данные или результаты математического моделирования;

— производить анализ полученного решения игры с учетом возможных ошибок в знании исходных параметров, а также допущений и ограничений моделей, разработанных для вычисления показателей эффективности.

Для удовлетворения этим требованиям необходимо, чтобы методы теории игр (равно как и другие методы математической оптимизации) являлись составным элементом структуры СМО ЭВК (АСУ), а система программного обеспечения позволяла бы оперативно формировать необходимые модели из базовых модулей (выбирать готовые модели из библиотек), а также получать необходимые параметры из баз данных, выполнять оперативно-тактические расчеты для вычисления показателей эффективности (выигрышей сторон), обеспечивать решение игры в соответствии с ее математической формулировкой, а затем обеспечивать анализ решения игры.

Глава 16. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ПРИ УПРАВЛЕНИИ СИЛАМИ

§ 16.1. ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДОВ ТЕОРИИ СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ПРИ УПРАВЛЕНИИ СИЛАМИ

16.1.1. Область применения методов

При проведении подготовки к выполнению поставленной задачи командир может встретиться с такой ситуацией, когда он не будет в состоянии сделать обоснованный выбор того или иного варианта применения сил, использования средств из-за незнания истинного состояния некоторых элементов обстановки на момент выполнения силами задачи. Причем неопределенность относительно состояния этих элементов обстановки возникает не в результате сознательного противодействия активного противника, как это имеет место в конфликтных ситуациях (см. п. 15.1.2 о стратегических и нестратегических играх), а является результатом влияния объективных закономерностей, неподвластных воле и сознанию людей. Для обоснования решений, планов, способов действий в таких случаях и используется математическое моделирование, в основе которого — методы теории статистических решений.

Все множество тактических ситуаций, для моделирования которых используются рассматриваемые методы, можно разделить на два больших класса:

а) ситуации, когда эффективность тех или иных способов зависит от состояния военно-географических элементов обстановки;

б) ситуации, когда эта эффективность зависит от исходов каких-то обеспечивающих действий: разведки, РЭБ, упреждающих ударов, отражения атак противника и т. д.*

Рассмотрим примеры.

Пример 16.1. Для выполнения задачи в заданном районе моря может быть выделен наряд из ударных единиц только первого или второго типа либо же смешанный, состоящий из ударных единиц и первого и второго типа. Общее число ударных единиц в составе наряда сил во всех случаях ограничено. Эффективность выполнения задачи каждым из возможных нарядов ударных единиц различна при различных типах гидрометеорологической обстановки. Не известно, какой именно тип обстановки будет иметь место при выполнении задачи. Может быть указана лишь вероятность появления того или иного типа. Требуется обосновать наряд сил.

* Возможно также и сочетание этих ситуаций.

Пример 16.2. Рассматривается несколько вариантов построения сил. Эффективность выполнения задачи при каждом варианте построения различна и зависит от исходов разведки. Известны все возможные исходы разведки и вероятности их появления. Изменить построение сил после того, как станут известными результаты разведки, невозможно. Требуется обосновать вариант построения сил.

Во всех случаях должны быть известны (вычислены) распределение вероятностей состояний обстановки, от которых зависит эффективность рассматриваемых способов действий, и показатель эффективности этих способов при всех вариантах обстановки. Вид показателя эффективности не меняется от состояния обстановки.

Однако определение оптимального способа применения сил, использования средств в указанных специфических условиях обстановки — это только часть проблемы, решаемой методами теории статистических решений. Другой частью является определение целесообразности проведения доразведки (эксперимента) с целью уточнения обстановки. Разумеется, задача возникает лишь в случае, если за доразведку надо “платить”: выделять силы, средства, другие ресурсы из числа имеющихся, расходовать время, терять скрытность и т. д. Если же дополнительные сведения достигаются “бесплатно”, то можно заведомо сказать, что доразведка целесообразна, каким бы ничтожным ни было приращение информации (кроме, конечно, случая, когда результатом доразведки может быть дезинформация).

Пример 16.3. В условиях примера 16.2 требуется оценить целесообразность организации доразведки, для чего необходимо предусмотреть применение части ударных сил в разведывательном варианте. Таким образом, в данном случае получение дополнительной информации может привести к снижению ударного потенциала группировки сил.

Важным направлением использования теории статистических решений является обоснование наряда сил (средств) доразведки, а также обоснование задания этим силам — добывание таких сведений об обстановке, знание которых существенно сказывается на обоснованности выбора способа действий сил и на повышении их эффективности.

Рассматриваемые методы позволяют также прогнозировать действия противника, в том числе состав его сил и средств разведки, способы их действий, что необходимо при разработке мероприятий обороны, дезинформации, маскировки.

Для аналогичных изложенным выше целям методы теории статистических решений используются в научной работе, направленной на совершенствование сил и средств флота, способов их применения. Отдельно следует указать, что в разведывательно-ударных комплексах, различных других системах оружия и технических средств использование указанных методов повышает обоснованность выбора их системами управления одного из предусмотренных вариантов действий.

16.1.2. Особенности оперативно-тактической постановки задачи

Методы теории статистических решений используются для обоснования решения (планов), если на основании уяснения оперативно-тактической постановки задачи может быть разработана следующая формализованная постановка.

Имеется m вариантов действий $a_1, a_2, a_i, \dots, a_m$. Известны гипотезы о возможных видах обстановки на момент реализации планируемых вариантов действий: $s_1, s_2, s_j, \dots, s_n$. Они составляют полную группу несовместных событий. Реализация той или иной гипотезы s_j никак не связана с выбором того или иного варианта действий a_i .

Каждому варианту действий a_i и каждому состоянию обстановки s_j соответствует показатель эффективности выполнения поставленной задачи $u(a_i, s_j)$. Показатели эффективности $u(a_i, s_j)$, вероятности гипотез $p(s_j)$ определяются на основании существующих нормативов либо же вычисляются с помощью специальных моделей.

В том случае, когда для вычисления параметров $p(s_j)$, $u(a_i, s_j)$ необходимы математические модели, в оперативно-тактической постановке задачи должны содержаться сведения, необходимые для разработки этих элементов в формализованной постановке (см. гл. 17—22).

Целью математического моделирования (оптимизации) является определение оптимального, из числа рассматриваемых, способа действий a_i^* , при котором показатель эффективности выполнения поставленной задачи принимает максимальное (или минимальное, в зависимости от условий задачи) значение*.

Пример 16.4. Планируется удар авиации по конвою с целью поражения максимально возможного числа транспортов. При уяснении задачи и оценке обстановки установлено, что в составе охранения конвоя имеется корабль радиолокационного дозора (РЛД) и авианосец, несущий истребительную авиацию. Для повышения эффективности удара авиации в плане старшего начальника предусматривается упреждающий удар подводной лодки по охранению конвоя. Подводная лодка способна уничтожить или корабль РЛД, или авианосец.

Рассматриваются два способа решения боевой задачи авиацией: a_1 — удар по конвою нанести неполным составом сил, используя часть ударных самолетов для постановки помех и демонстрационных действий; a_2 — удар по конвою нанести всеми выделенными силами (самолеты для постановки помех и демонстрационных действий не выделяются).

При оценке обстановки способ действий a_1 представляется эффективным, если подводной лодкой не будут поражены ни корабль РЛД, ни авианосец, а способ действий a_2 представляется эффективным, если корабль РЛД или же авианосец будут поражены подводной лодкой. Установлено также, что к моменту постановки боевых задач подразделениям авиации результат удара подводной лодки достоверно не будет известен. Требуется обосновать лучший способ удара.

Заметим, что выше изложена формализованная постановка задачи для определения оптимального способа действий с учетом априорной (без проведения доразведки) информации о состоянии обстановки. В этой постановке отсутствуют те ее составные части, которые необходимы для получения параметров $p(s_j)$, $u(a_i, s_j)$.

Если требуется оценить целесообразность доразведки (эксперимента), то постановка задачи дополняется. Для этого указываются свойства источника информации, позволяющие заблаговременно определить состав сведений, которые он способен добыть (будем далее для краткости источник информации называть разведчиком).

В частном случае разведчик может точно указать, что вид обстановки есть s_j . Иногда он может определить вид обстановки s_j с некоторой вероятностью w_j . В общем случае разведчик способен добыть лишь один из множества косвенных признаков, характеризующих обстановку. Эти признаки составляют полную группу несовместных событий. Должна иметься возможность вычислить условную вероятность $p(z_l/s_j)$ того, что разведчик доставит сведения z_l ($l = 1, 2, \dots, L$), если фактическая обстановка будет вида s_j .

* Во многих работах по теории статистических решений способ действий a_i называется действием a_i , виды обстановки s_j — состоянием природы s_j , исходное распределение вероятностей гипотез $p(s_j)$ — априорным распределением, а оптимальный способ действий — априорным байесовым действием a_i^* .

Пример 16.5. Допустим, что в условиях примера 16.4 рассматривается целесообразность проведения доразведки частью ударных сил исхода упреждающего удара подводной лодки. Самолеты доразведки способны добыть информацию лишь следующих двух видов: z_1 — приводной радиомаяк, установленный на авианосце, работает; z_2 — приводной радиомаяк не работает.

Имеется возможность вычислить условные вероятности $p(z_1/s_j)$ и $p(z_2/s_j)$ получения от самолетов-разведчиков информации вида z_1 и z_2 , определенные при условии, что фактически имеет место вид обстановки s_j . Самолеты доразведки не могут принять участие в ударе (это и есть “плата” за доразведку). Требуется обосновать целесообразность проведения доразведки.

Следует заметить, что методы нахождения распределения вероятностей гипотез $p(s_j)$, вычисления показателей эффективности $u(a_i, s_j)$, условных вероятностей исходов доразведки $p(z_i/s_j)$ лежат, вообще говоря, за пределами методов теории статистических решений. Фактически же, если признано необходимым использовать для оптимизации методы теории статистических решений, то наиболее сложной и трудоемкой явится именно разработка способов вычисления указанных параметров. В особенности это касается параметров $u(a_i, s_j)$, $p(s_j)$, $p(z_i/s_j)$, для получения которых чаще всего приходится разрабатывать математические модели с использованием различных методов исследования операций (см. часть II учебника). Оперативно-тактическая постановка задачи должна содержать сведения, необходимые для формализованной постановки. Опыт также свидетельствует, что на этом этапе специалист по исследованию операций вынужден продумывать систему вопросов к командиру для уточнения и корректирования оперативно-тактической постановки задачи.

16.1.3. Показатели эффективности, вычисляемые методами теории статистических решений

Показатели эффективности $u(a_i, s_j)$ выполнения задачи при способе действий a_i и виде обстановки s_j определяются на основании принципа Колмогорова. Формульные зависимости для расчета показателя эффективности должны меняться с изменением способа действий a_i и вида обстановки s_j . При разработке моделей, используемых для вычисления показателей эффективности $u(a_i, s_j)$, должна быть учтена необходимость соблюдения равнозначности их вычисления для всех пар a_i, s_j .

Следует также иметь в виду, что метод теории статистических решений предусматривает выбор лучшего способа действий путем сравнения математических ожиданий показателей эффективности для всех рассматриваемых вариантов действий с учетом распределения вероятностей состояний обстановки:

$$\bar{u}(a_i) = \sum_{j=1}^n p(s_j) u(a_i, s_j), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

При этом одни и те же значения показателя эффективности $\bar{u}(a_i)$ могут быть получены для различных соотношений численных значений параметров $p(s_j)$ и $u(a_i, s_j)$. С точки зрения метода теории статистических решений все такие варианты действий a_i являются равноценными, между тем как для командира совсем безразлично, по какой причине снижается боевая эффективность при данном варианте действий a_i : за счет малой вероятности появления выгодного вида обстановки или же за счет низкой эффективности способа действий при высокой вероятности данного вида обстановки.

Пример 16.6. Возможны два варианта обстановки s_1 и s_2 . Вероятности их появления $p(s_1) = 0,8$, $p(s_2) = 0,2$. Вычислены вероятности выполнения задачи для варианта действий a_i и различных видов обстановки s_j , а именно: $u(a_i, s_1) = 0,2$; $u(a_i, s_2) = 0,8$. При этом математическое ожидание показателя эффективности для варианта действий a_i равно

$$\bar{u}(a_i) = p(s_1)u(a_i, s_1) + p(s_2)u(a_i, s_2) = 0,8 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,8 = 0,32.$$

Допустим теперь, что для некоторой другой ситуации и того же способа действий имеем:

$$p(s_1) = 0,2; \quad p(s_2) = 0,8; \quad u(a_i, s_1) = 0,8; \quad u(a_i, s_2) = 0,2.$$

При этом получим

$$\bar{u}(a_i) = p(s_1)u(a_i, s_1) + p(s_2)u(a_i, s_2) = 0,2 \cdot 0,8 + 0,8 \cdot 0,2 = 0,32.$$

Как видно, одинаковая эффективность одного и того же способа действий a_i ($\bar{u}(a_i) = 0,32$) в этих двух случаях объясняется различными причинами, которые могут быть вскрыты только с помощью качественного анализа.

§ 16.2. РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ ТЕОРИИ СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Разработка математических моделей методами теории статистических решений включает:

- 1) разработку модели для определения оптимального способа действий с учетом заданного первоначального распределения видов обстановки (определение априорного байесова действия);
- 2) разработку модели для оценки целесообразности проведения доразведки (эксперимента) и для определения оптимального способа действий при различных возможных исходах доразведки (определения апостериорных байесовых действий), необходимость которой (модели) диктуется целями моделирования.

16.2.1. Разработка модели для определения оптимального способа действий с учетом априорного распределения видов обстановки

Для определения оптимального способа действий должны быть известны:

- гипотезы о видах обстановки на момент выполнения силами поставленной задачи $s_1, s_2, \dots, s_j, \dots, s_n$. Эти гипотезы должны составлять полную группу событий;
- способы использования сил или средств (способы действий) $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_m$, из числа которых требуется определить оптимальный способ;
- распределение вероятностей гипотез $p(s_1), p(s_2), \dots, p(s_n)$;
- показатели эффективности выполнения поставленной задачи для всех гипотез о видах обстановки и всех рассматриваемых способах действий $u(a_i, s_j)$ ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$).

Далее формируются две матрицы: матрица 16.1 вероятностей гипотез о видах обстановки $p(s_j)$ и матрица 16.2 показателей эффективности выполнения поставленной задачи $u(a_i, s_j)$.

Матрица 16.1

	$p(s_j)$					
s_j	s_1	s_2	...	s_j	...	s_n

$p(s_j)$	$p(s_1)$	$p(s_2)$...	$p(s_j)$...	$p(s_n)$
----------	----------	----------	-----	----------	-----	----------

Матрица 16.2

		$p(a_i, s_j)$					
		s_1	s_2	...	s_j	...	s_n
a_i	s_j						
a_1		$u(a_1, s_1)$	$u(a_1, s_2)$...	$u(a_1, s_j)$...	$u(a_1, s_n)$
a_2		$u(a_2, s_1)$	$u(a_2, s_2)$...	$u(a_2, s_j)$...	$u(a_2, s_n)$
...	
a_i		$u(a_i, s_1)$	$u(a_i, s_2)$...	$u(a_i, s_j)$...	$u(a_i, s_n)$
...	
a_m		$u(a_m, s_1)$	$u(a_m, s_2)$...	$u(a_m, s_j)$...	$u(a_m, s_n)$

При использовании средств малой механизации расчетов, прежде чем приступить к определению оптимального действия, целесообразно проверить матрицу $u(a_i, s_j)$ на доминирование, исключив заведомо невыгодные или дублирующие (эквивалентные) способы действий (о доминировании см. п. 15.2.3).

Следует отметить, что при использовании для расчетов ЭВМ с большим быстродействием включение в машинную программу процедуры проверки способов действий на доминирование часто оказывается нецелесообразным.

После того как матрицы $p(s_j)$, $u(a_i, s_j)$ подготовлены, приступают к определению оптимального способа действий. Для этого, как уже указывалось, необходимо вычислить математические ожидания показателей эффективности для каждого из способов действий a_i :

$$\bar{u}(a_i) = \sum_{j=1}^n p(s_j) u(a_i, s_j), \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (16.2.1)$$

Оптимальным является тот способ действий a_i^* , которому соответствует максимальное (или минимальное) значение показателя $\bar{u}(a_i)$:

$$\mathcal{E}(a_i^*) = \operatorname{opt}_{a_i} \{\bar{u}(a_i)\}. \quad (16.2.2)$$

Обратим внимание на правильное понимание смысла “оптимальный способ действий” в данном случае. Неверно думать, что применение способа a_i^* гарантирует обязательный успех. Применение способа a_i^* в условиях, соответствующих учтенным в модели, гарантирует большие шансы на успех, чем при других способах. Это означает, что при многократном выполнении в рассматриваемых условиях одной и той же боевой задачи среднее арифметическое выигрыша при способе действий a_i^* выше, чем при других способах. Иногда вместо показателя эффективности $u(a_i, s_j)$ используют так называемый риск $r(a_i, s_j)$, определяемый по следующему правилу:

$$r(a_i, s_j) = \max_i(a_i, s_j) - u(a_i, s_j).$$

Таким образом, риск — это разность между максимальным по величине элементом в данном столбце (см. матрицу 16.2) и остальными элементами этого столбца. Риск характеризует потерю в эффективности из-за неоптимального выбора решения. Оптимальным является то действие a_i^* , при котором математическое ожидание риска минимально:

$$\bar{r}(a_i^*) = \min_i \{\bar{r}(a_i)\}, \quad (16.2.3)$$

где

$$\bar{r}(a_i) = \sum_{j=1}^n p(s_j) r(a_i, s_j), \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (16.2.4)$$

Можно показать, что определение оптимального способа действий при использовании для вычислений показателей эффективности $u(a_i, s_j)$ или риска $r(a_i, s_j)$ приводит к одному и тому же результату. Действительно,

$$\begin{aligned} \bar{u}(a_i) + \bar{r}(a_i) &= \sum_{j=1}^n p(s_j) [u(a_i, s_j) + r(a_i, s_j)] = \sum_{j=1}^n p(s_j) [u(a_i, s_j) + \\ &+ \max_i u(a_i, s_j) - u(a_i, s_j)] = \sum_{j=1}^n p(s_j) \max_i u(a_i, s_j) = C. \end{aligned}$$

Постоянная C есть математическое ожидание максимального значения показателя эффективности. Поэтому, максимизируя величину $\bar{u}(a_i)$ или минимизируя параметр $\bar{r}(a_i)$, придем к одному и тому же оптимальному действию a_i^* . Расчеты, выполненные с использованием показателей $u(a_i, s_j)$, обладают более высокой наглядностью, чем при использовании параметра $r(a_i, s_j)$.

Для иллюстрации способов определения априорного байесова действия рассмотрим пример.

Пример 16.7. Продолжим рассмотрение примера 16.4, введем следующие обозначения исходов упреждающего удара подводной лодки по охранению конвоя:

- s_1 — авианосец и корабль РЛД сохранили боеспособность;
- s_2 — авианосец поражен, корабль РЛД боеспособен;
- s_3 — авианосец боеспособен, корабль РЛД поражен.

Допустим, что распределение вероятностей различных видов обстановки $p(s_j)$, значения показателя эффективности — математического ожидания доли уничтоженных транспортов конвоя $u(a_i, s_j)$ — соответствуют значениям, приведенным в матрицах 16.3 и 16.4.

Матрица 16.3

		$p(s_j)$		
		s_1	s_2	s_3
s_j				
$p(s_j)$		0,5	0,3	0,2

Матрица 16.4

		$u(a_i, s_j)$		
		s_1	s_2	s_3
s_j				

a_i			
a_1	0,5	0,6	0,55
a_2	0,1	0,95	0,8

Вычислим по формуле (16.2.1) математические ожидания показателей эффективности:

$$\bar{u}(a_1) = 0,5 \cdot 0,5 + 0,3 \cdot 0,6 + 0,2 \cdot 0,55 = 0,54;$$

$$\bar{u}(a_2) = 0,5 \cdot 0,1 + 0,3 \cdot 0,95 + 0,2 \cdot 0,8 = 0,50.$$

Оптимальное действие a^* найдем по правилу (16.6.2). Этим действием является a_1 . Ему соответствует показатель эффективности $\mathcal{E}(a_1^*) = 0,54$.

16.2.2. Разработка модели для оценки целесообразности проведения доразведки

Этот этап разработки модели возможен лишь после выполнения первого этапа. Проблема оценки целесообразности доразведки возникает в том случае, когда имеет место следующее противоречие. С одной стороны, проведение доразведки требует каких-то затрат, прямо или косвенно снижающих эффективность выполнения поставленной задачи. С другой стороны, доразведка позволяет с некоторой вероятностью получить дополнительную информацию о виде обстановки, в результате чего можно более обоснованно выбрать лучший способ действий, что будет способствовать повышению эффективности выполнения задачи.

Для суждения о целесообразности проведения доразведки необходимо выяснить, что превалирует: отрицательное влияние расходов на доразведку или положительное влияние возможности получения дополнительной информации. В такой постановке задачи расходы обязательны всегда, однако повышение эффективности выполнения боевой задачи не гарантировано. Для выяснения необходимо, чтобы расходы на доразведку и достигаемое повышение эффективности выражались бы в сопоставимых величинах стоимости или в каких-либо других единицах измерения. Однако в оперативно-тактической области это, как правило, невозможно. Поэтому ниже будет изложен модифицированный метод.

Рассмотрим более общий случай, когда доразведка способна дать лишь косвенные сведения об обстановке. Для производства расчетов необходимо знать следующие исходные данные:

— условные вероятности $p(z_i/s_j)$ того, что доразведка способна дать сведения z_i , если видом обстановки является s_j (матрица 16.5);

Матрица 16.5

		$p(z_i/s_j)$					
	s_j	s_1	s_2	...	s_j	...	s_n
z_i	z_1	$p(z_1/s_1)$	$p(z_1/s_2)$...	$p(z_1/s_j)$...	$p(z_1/s_n)$
	z_2	$p(z_2/s_1)$	$p(z_2/s_2)$...	$p(z_2/s_j)$...	$p(z_2/s_n)$

	z_i	$p(z_i/s_1)$	$p(z_i/s_2)$...	$p(z_i/s_j)$...	$p(z_i/s_n)$

...
z_L	$p(z_L/s_1)$	$p(z_L/s_2)$...	$p(z_L/s_j)$...	$p(z_L/s_n)$

— априорное (исходное) распределение вероятностей видов обстановки $p(s_j)$ (см. матрицу 16.1);
 — показатели эффективности выполнения поставленной задачи $u_1(a_i, s_j)$ при виде обстановки s_j и способе действий a_i . Эти показатели должны вычисляться при условии, что организуется доразведка с целью добыть один из признаков обстановки z_1, z_2, \dots, z_L . Обратим внимание на то, что затраты на такую доразведку (расход сил, средств, времени, снижение скрытности и т. д.) способны уменьшить значения показателей эффективности $u(a_i, s_j)$ и привести к тому, что

$$u(a_i, s_j) > u_1(a_i, s_j).$$

Это и есть “плата” за доразведку. Значения показателей эффективности сведем в матрицу 16.6*.

Матрица 16.6

		$u_1(a_i, s_j)$					
		s_j					
$a_i \backslash s_j$		s_1	s_2	...	s_j	...	s_n
a_1		$u_1(a_1, s_1)$	$u_1(a_1, s_2)$...	$u_1(a_1, s_j)$...	$u_1(a_1, s_n)$
a_2		$u_1(a_2, s_1)$	$u_1(a_2, s_2)$...	$u_1(a_2, s_j)$...	$u_1(a_2, s_n)$
...	
a_i		$u_1(a_i, s_1)$	$u_1(a_i, s_2)$...	$u_1(a_i, s_j)$...	$u_1(a_i, s_n)$
...	
a_m		$u_1(a_m, s_1)$	$u_1(a_m, s_2)$...	$u_1(a_m, s_j)$...	$u_1(a_m, s_n)$

Как уже указывалось (см. п. 16.1.2), для получения указанных выше исходных данных используются статистический материал, нормативы, результаты расчетов по специальным моделям. В результате оптимизации определяются:

- оптимальный способ действий для каждого исхода доразведки;
- значение показателя эффективности с учетом всех возможных исходов доразведки;
- целесообразность организации доразведки.

Однако прежде чем приступить к оптимизации, следует оценить ее принципиальную целесообразность. Для этого необходимо сравнить показатели эффективности без доразведки ($u(a_i, s_j)$ — см. матрицу 16.2) и с доразведкой ($u_1(a_i, s_j)$ — см. матрицу 16.6). Плата за доразведку заведомо чрезмерно высока, если даже при получении достоверных знаний об обстановке и использовании при этом оптимальных способов действий мы не сможем превзойти эффективности наихудшего способа действий для случая, когда доразведка не проводится. При этом в столбцах матриц 16.2 и 16.6 для любого s_j будем иметь

$$\min_i u(a_i, s_j) \geq \max_i u_1(a_i, s_j). \quad (16.2.5)$$

* Ввод в рассмотрение такой матрицы — основа модификации для использования в оперативно-тактической области метода обоснования целесообразности проведения эксперимента (разведывательных мероприятий) для уточнения обстановки.

В данном случае в оптимизации нет смысла. Если же неравенство (16.2.5) для каких-либо s_j выполняется, оптимизация целесообразна, хотя и не гарантировано, что будет получена рекомендация проводить доразведку.

Необходимые для оптимизации модели и последовательность расчетов по ним следующие.

1. Для каждого возможного исхода доразведки $z_l (l = 1, 2, \dots, L)$ определяются оптимальный способ действий $a^*(z_l)$ и соответствующее ему оптимальное значение показателя эффективности $u(a^*, z_l)$. Предварительно необходимо вычислить распределение вероятностей типов обстановки $p(s_j/z_l)$ с учетом исхода z_l доразведки (апостериорное распределение вероятностей). Для этого используется теорема Байеса:

$$p(s_j/z_l) = \frac{p(s_j)p(z_l/s_j)}{\sum_{j=1}^n p(s_j)p(z_l/s_j)}. \quad (16.2.6)$$

Затем методом, изложенным в п. 16.2.1, для каждого способа действий a_i определяют условное математическое ожидание показателя эффективности (отдельно для каждого исхода доразведки z_l и с использованием апостериорного распределения типов обстановки):

$$\bar{u}(a_i/z_l) = \sum_{j=1}^n p(s_j/z_l)u_1(a_i, s_j) \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad l = 1, 2, \dots, L. \quad (16.2.7)$$

Рассчитанные показатели эффективности для всех способов действий (при данном исходе доразведки z_l) сравнивают между собой. Оптимальный способ $a^*(z_l)$ соответствует оптимальному значению показателя эффективности

$$u[a^*(z_l)] = \underset{i}{\text{opt}} \{ \bar{u}(a_i/z_l) \}. \quad (16.2.8)$$

Таким образом, для каждого исхода доразведки фиксируется оптимальный способ действий.

2. Поскольку на этапе выработки решения (планирования) будет не известно, каким именно окажется исход доразведки, то далее определяют вероятность того, что будут получены результаты z_l :

$$p(z_l) = \sum_{j=1}^n p(s_j)p(z_l/s_j), \quad l = 1, 2, \dots, L. \quad (16.2.9)$$

После этого рассчитывают безусловное математическое ожидание показателя эффективности с учетом распределения вероятностей $p(z_l)$ исходов доразведки:

$$\mathcal{E}_d = \sum_{l=1}^L p(z_l)u[a^*(z_l)]. \quad (16.2.10)$$

3. Путем сравнения $\mathcal{E}(a^*)$ (см. (16.2.2)) и \mathcal{E}_d (см. (16.2.10)) оценивают целесообразность проведения доразведки.

На этом заканчивается оценка целесообразности доразведки для данного состава сил, заданного им состава добываемых сведений об обстановке z_l , а также способа применения сил (средств) доразведки.

Пример 16.8. Продолжим рассмотрение примеров 16.4, 16.5, 16.7. Допустим, что планирующий орган решил оценить целесообразность доразведки в интересах получения косвенных сведений, а также выявить оптимальные способы действий при получении той или иной разведывательной информации. В результате оценки обстановки установлено, что самолеты, выделяемые для доразведки из состава ударных сил, способны добыть информацию, позволяющую составить суждение о результатах упреждающего удара: z_1 — приводной радиомаяк, установленный на авианосце, работает; z_2 — приводной радиомаяк не работает.

Вычислены:

— условные вероятности $p(z_i/s_j)$ добывания информации z_i при виде обстановки s_j (матрица 16.7)

Матрица 16.7

		$p(z_i/s_j)$		
		s_1	s_2	s_3
z_i	z_1	0,8	0	0,9
	z_2	0,2	1,0	0,1

— показатели эффективности выполнения задачи $u_1(a_i, s_j)$ с учетом выделения части ударных самолетов для ведения доразведки (матрица 16.8).

Матрица 16.8

		$u_1(a_i, s_j)$		
		s_1	s_2	s_3
a_i	a_1	0,55	0,57	0,52
	a_2	0,07	0,92	0,75

Для достижения целей моделирования произведем расчеты. Прежде всего используем выражение (16.2.6) и вычислим апостериорное распределение вероятностей состояния обстановки для каждого предполагаемого исхода доразведки z_1 и z_2 . Будем иметь:

$$p(s_1/z_1) = \frac{p(s_1)p(z_1/s_1)}{\sum_{j=1}^3 p(s_j)p(z_1/s_j)} = \frac{0,50 \cdot 0,80}{0,50 \cdot 0,80 + 0,30 \cdot 0 + 0,20 \cdot 0,90} = 0,69;$$

$$p(s_1/z_2) = \frac{p(s_1)p(z_2/s_1)}{\sum_{j=1}^3 p(s_j)p(z_2/s_j)} = \frac{0,50 \cdot 0,20}{0,50 \cdot 0,20 + 0,30 \cdot 1 + 0,20 \cdot 0,10}$$

и т. д. для остальных сочетаний z_i и s_j . Результаты расчетов сведены в матрицу 16.9.

Матрица 16.9

		$p(s_j/z_l)$		
		s_1	s_2	s_3
z_l	s_j			
	z_1	0,69	0	0,31
	z_2	0,24	0,71	0,05

Далее по формуле (16.2.7) вычислим значение показателя эффективности для всех способов действий (a_1 и a_2) и всех исходов доразведки (z_1, z_2), используя данные матриц 16.8 и 16.9. Например:

$$\bar{u}(a_1/z_1) = \sum_{j=1}^3 p(s_j/z_1)u_1(a_1, s_j) = 0,69 \cdot 0,55 + 0 \cdot 0,57 + 0,31 \cdot 0,52 = 0,54;$$

$$\bar{u}(a_2/z_2) = \sum_{j=1}^3 p(s_j/z_2)u_1(a_2, s_j) = 0,24 \cdot 0,07 + 0,71 \cdot 0,92 + 0,05 \cdot 0,75 = 0,71$$

и т. д. для других сочетаний. Результаты расчетов сведены в матрицу 16.10.

Матрица 16.10

		$\bar{u}(a_i/z_l)$	
		z_1	z_2
a_i	z_l		
	a_1	0,54	0,56
	a_2	0,28	0,71

Теперь, используя выражение (16.2.8), определим оптимальные способы действий для каждого исхода доразведки. Ими являются a_1 для исхода доразведки z_1 и a_2 для исхода z_2 . Этим апостериорным байесовым действиям соответствуют оптимальные показатели эффективности $u[a^*(z_1)] = 0,54$, $u[a^*(z_2)] = 0,71$.

Определим вероятности исходов доразведки z_1 и z_2 (см. формулу (16.2.9)):

$$p(z_1) = \sum_{j=1}^3 p(s_j)p(z_1/s_j) = 0,50 \cdot 0,80 + 0,30 \cdot 0 + 0,20 \cdot 0,90 = 0,58;$$

$$p(z_2) = \sum_{j=1}^3 p(s_j)p(z_2/s_j) = 0,50 \cdot 0,20 + 0,30 \cdot 1 + 0,20 \cdot 0,10 = 0,42.$$

Используя найденные значения $u[a^*(z_l)]$ и $p(z_l)$, вычислим математическое ожидание показателя эффективности с учетом распределения вероятностей исходов доразведки (см. (16.2.10)):

$$\mathcal{E}_d = \sum_{l=1}^2 p(z_l)u[a^*(z_l)] = 0,58 \cdot 0,54 + 0,42 \cdot 0,71 = 0,61.$$

Сравним показатели эффективности $\mathcal{E}(a^*)$ (см. пример 16.7) и \mathcal{E}_d :

- а) доразведка не производится $\mathcal{E}(a^*) = 0,54$;
б) доразведка производится для получения косвенных сведений об обстановке (z_1 и z_2), тогда $\mathcal{E}_d = 0,61$.

Как видно, для рассматриваемых условий проведение доразведки целесообразно.

При любом исходе оптимизации должны быть проведены анализ ее результатов, выявление сильных и слабых сторон полученного оптимального плана (решения). Особое внимание должно быть уделено оценке платы за доразведку (сравнению показателей эффективности $u(a_i, s_j)$ и $u_1(a_i, s_j)$ действия сил без доразведки и с доразведкой), а также степени повышения информированности об обстановке (сравнению $p(s_j)$ и $p(s_j/z_1)$). Итогами такого анализа могут быть:

1. Разработка мероприятий для снижения платы за доразведку — уменьшение нарядов разведчиков, времени доразведки, повышение скрытности доразведки и т. д. Так, в условиях примера 16.8 для повышения скрытности доразведки, снижения потерь разведчиков и уменьшения наряда может быть осуществлена оптимизация профиля и режима полета самолетов доразведки в район и т. д.

2. Совершенствование заданий разведчикам в отношении добываемых косвенных сведений о противнике, чтобы повысить степень информированности об обстановке при той же или уменьшенной плате за доразведку. Так, в условиях примера 16.8 самолетам доразведки может быть поручено выявление не только факта работы приводного радиомаяка, но и наличия в воздухе истребителей противника и т. д.

3. Совершенствование способов действий сил с учетом выявленных положительных и отрицательных последствий доразведки.

Указанный анализ, разработка и совершенствование способов применения сил должны проводиться одновременно с уточнением оценки противника. В частности, должно осуществляться прогнозирование ответных мероприятий противника для отражения действий наших сил на главном направлении (использование резервов, маневр, маскировка, дезинформация и т. д.). Так, в условиях примера 16.8 следует оценить возможность использования противником вместо пораженного корабля РЛД—самолета РЛД, имитации работы приводного радиомаяка (или наоборот, его маскировки) и т. д.

Эффективное использование методов теории статистических решений в динамике работы командира возможно только при включении этих методов элементом в структуру СМО ЭВК (АСУ) и разработке соответствующей программной поддержки как элемента системы программного обеспечения. Наибольшая сложность заключается в представлении возможности своевременно разрабатывать способы, модели для вычисления параметров $p(s_j)$, $p(z_1/s_j)$, $u(a_i, s_j)$, $u_1(a_i, s_j)$ для различных условий обстановки и различных направлений творчества командира. Перспективным в этом отношении является разработка проблемно-ориентированных модулей, баз данных, учитывающих специфику действий соединения, придаваемых и поддерживающих частей и соединений при выполнении свойственных им задач. СМО ЭВК (АСУ) должна быть открытой и предусматривать совершенствование своей структуры.

На этом заканчивается изложение методов математического моделирования. Уже знания только этих методов достаточно для разработки многих необходимых при управлении силами математических моделей. Но, кроме того, перед читателем открываются и другие перспективы: возможность самостоятельного изучения многих других методов, в основе которых — методы,

изложенные в р. II; самостоятельная разработка новых методов на основе изученных; умение модернизировать изученные методы в связи с потребностями конкретного моделирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
2. Вальд А. Последовательный анализ. М.: Физматгиз, 1960.
3. Волгин Н. С., Махров Н. В., Юровский В. А. Исследование операций. Л.: ВМА, 1981.
4. Волгин Н. С., Махров Н. В., Юровский В. А. Прикладные задачи исследования операций. Ч. 1, 2. Л.: ВМА, 1975, 1976.
5. Волгин Н. С. Математическое моделирование морских боев и операций. Л.: ВМА, 1990.
6. Волгин Н. С. Применение методов теории вероятностей в оперативно-тактической области. Л.: ВМА, 1988.
7. Воробьев Н. Н. Теория игр. М.: Знание, 1971.
8. Ганин М. П. Прикладные методы теории цепей Маркова. Л.: ВМА, 1971.
9. Горелик В. А., Ушаков И. А. Исследование операций. М.: Машиностроение, 1986.
10. Дегтярев Ю. И. Исследование операций. М.: Высшая школа, 1986.
11. Динер И. Я. Исследование операций. Л.: ВМА, 1969.
12. Иванов Д. А., Савельев В. П., Шиманский П. В. Основы управления войсками. М.: Воениздат, 1971.
13. Канторович Л. В., Горстко А. Б. Оптимальные решения в экономике. М.: Наука, 1972.
14. Колмогоров А. Н. Число попаданий при нескольких выстрелах и общие принципы оценки эффективности системы стрельбы. — Труды Математического института им. В. А. Стеклова, вып. 12, 1945.
15. История военно-морского искусства. Т. 1, 2, 3. М.: Воениздат, 1953.
16. Морской атлас. Т. 3, ч. 1 и 2. М.: ГШ ВМФ, 1959.
17. Льюис Р. Д., Райфа Х. Игры и решения. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
18. Марков А. А. Исчисление вероятностей. М.: Госиздат, 1924.
19. Моисеев Н. Н. Математика ставит эксперимент. М.: Наука, 1979.
20. Нейман Фон Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970.
21. Растринин Л. А. Системы экстремального управления. М.: Наука, 1974.
22. Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В. Краткий курс математической статистики для технических приложений. М.: Физматгиз, 1959.
23. Хедли Дж. Нелинейное и динамическое программирование. М.: Мир, 1975.
24. Чутко И. Э. Красные самолеты. М.: Политиздат, 1982.