МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Методические указания

Санкт-Петербург
2003

Составители: Г. А. Весничева, В. Ф. Худяков, З. К. Яковлева,
Г. Б. Яцевич

Рецензент канд. техн. наук доцент В. С. Бойков

Приводится методика математической обработки результатов лабораторных измерений. Рекомендуется студентам всех форм обучения, изучающих дисциплину "Метрология и электрорадиоизмерения".

Подготовлены кафедрой конструирования и управления качеством РЭС и рекомендованы к изданию редакционно-издательским советом Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения.

Подписано к печати 29.12.03. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,7. Уч. -изд. л. 2,9. Тираж 100 экз. Заказ №

Редакционно-издательский отдел
Отдел электронных публикаций и библиографии библиотеки
Отдел оперативной полиграфии
СПбГУАП
190000, Санкт-Петербург, ул. Б. Морская, 67

ВВЕДЕНИЕ

Основная задача любого количественного эксперимента состоит в определении численного значения физической величины. Численное значение физической величины находят в результате измерения.

По способу получения результата различают измерения прямые, косвенные, совокупные и совместные. К прямым относят непосредственные измерения физических величин измерительными приборами. Например, измерение промежутка времени секундомером, сопротивления – омметром и т. д. К косвенным относят измерения величин, связанных некоторой функциональной зависимостью с величинами, измеряемыми непосредственно. Так, сопротивление проводника можно определить, если измерены ток и падение напряжения на проводнике. Плотность тела можно найти, если измерены масса и объем тела и т. п.

Совокупными называют измерения, в которых значения измеряемых величин находят по данным повторных измерений одной или нескольких одноименных величин при различных их сочетаниях.

Совместными называют производимые однократно (прямые или косвенные) измерения двух или нескольких неодноименных величин. Целью совместных измерений, по существу, является нахождение функциональной зависимости между величинами, например зависимость длины тела от температуры и т. п.

Никакое измерение нельзя выполнить абсолютно точно, результат любого измерения всегда содержит некоторую погрешность.

Отклонение Δ результата измерения величины x от истинного значения $x_{\text{ист}}$ называют погрешностью измерения:

$$\Delta = x_{\text{изм}} - x_{\text{ист}} .$$

Погрешности измерений вызываются различными причинами и их можно разделить по характеру проявления на систематические, случайные и промахи. Промахи или грубые ошибки обычно вызываются неисправностью приборов, невнимательностью экспериментатора и т. п. Они приводят к существенным искажениям результата и устанавливаются при повторных измерениях. Если такая ошибка установлена, то соответствующий результат исключается из дальнейшей обработки.

Систематические погрешности вызываются причинами, действующими упорядоченным образом. При многократном повторении измерений они приводят к отклонениям результатов отдельных измерений от истинного значения физической величины и остаются постоянными или закономерно изменяются на протяжении всей серии измерений. Систематические погрешности могут быть следствием неточности приборов, ошибочности метода, погрешностей экспериментальной установки и т. п.

Например, погрешности, вызванные взаимным влиянием измерительных приборов при неправильном их расположении, неправильной установкой приборов, наблюдениями при меняющейся температуре. Такие погрешности можно обнаружить, если провести несколько серий измерений различными методами и различными приборами. В принципе их можно устранить или учесть. Так как приемы измерений физических величин разнообразны, то и методы учета и исключения систематических погрешностей различны.

Случайные погрешности неизбежны в любом эксперименте. Они зависят от большого числа случайных факторов, действие которых в каждом опыте различно и не может быть учтено. Возникают они вследствие того, что условия, в которых проводится эксперимент, не остаются строго постоянными. Кроме того, сам наблюдатель вследствие несовершенства органов чувств может внести некоторые неточности при измерениях. Улучшая условия, в которых проводится эксперимент, можно в какой-то мере ослабить влияние некоторых из этих факторов. Но полностью избежать их или точно учесть их влияние невозможно.

Случайные погрешности являются неустранимыми, но с помощью методов теории вероятностей можно оценить их величину.

Обычно предполагается, что существует “точное” или “истинное” значение измеряемой величины x_0. Результаты эксперимента не дают этого значения, а позволяют найти некоторое приближение к нему. Совершенствуя методику и технику измерений, можно ближе подойти к истинному значению.

Таким образом, результат каждого измерения содержит систематическую и случайную погрешности. Задача экспериментатора состоит в том, чтобы оценить их величины. Это можно сделать различными способами, например указать верхний предел абсолютного значения возможной погрешности. Чаще всего нет смысла определять строгий, абсолютно надежный предел возможной погрешности, достаточно определить границы интервала, в котором с наперед заданной вероятностью находится истинное значение измеряемой величины.

Для оценки случайной погрешности по результатам серии прямых измерений применяют методы математической статистики.

1. СЛУЧАЙНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

Пусть проводятся многократные измерения физической величины X. Если отклонения результатов отдельных измерений, вызванные случайными факторами, сравнимы по абсолютной величине с чувствительностью измерительного прибора или больше ее, то они обнаруживаются, и при многократных измерениях получаются различные значения измеряемой величины

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n.$$

Результат измерения содержит случайную погрешность и представляет собой случайную величину. Оценку погрешности измерений можно получить с помощью известных методов математической статистики.

При неограниченном числе измерений случайной величины мы получаем полный набор ее значений. Этот набор называют генеральной совокупностью. В реальных условиях число измерений всегда конечно, и из бесчисленного множества значений случайной величины мы располагаем лишь случайной выборкой объема n (n – число измерений).

Задача математической статистики состоит в том, чтобы получить наиболее полные сведения о генеральной совокупности по имеющейся выборке.

Опыт показывает, что часто случайные погрешности подчиняются следующим закономерностям:

погрешности принимают непрерывный ряд значений;

при большом числе измерений погрешности разных знаков, но одинаковые по величине, встречаются одинаково часто;

частота появления погрешностей уменьшается при увеличении их значений.

Таким образом, погрешности характеризуются определенным законом распределения. Существование такого закона можно обнаружить при многократных измерениях.

Пусть проведено n измерений физической величины X и получено n результатов:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n. \tag{1}$$

Построим диаграмму, которая показывает, как часто получаются те или иные значения в серии измерений. Такую диаграмму называ-

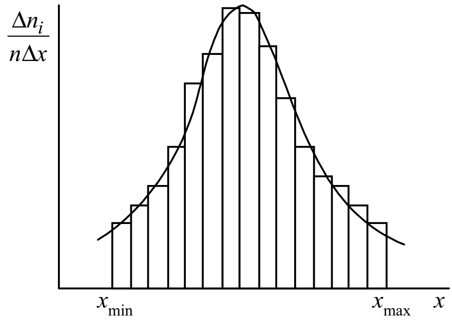

Рис. 1

ют гистограммой и строят ее следующим образом. Все результаты измерений лежат в промежутке $[x_{min}, x_{max}]$, где x_{min} и x_{max} – полученные минимальное и максимальное значения результатов измерений. Разобьем промежуток $[x_{min}, x_{max}]$ на k одинаковых интервалов шириной $\Delta x=(1/k)\cdot(x_{max}-x_{min})$ и представим графически распределение результатов измерений по этим интервалам (рис. 1). Для этого на каждом из интервалов оси абсцисс Δx_i $(1 \leq i \leq k)$ построим прямоугольник высотой $\Delta n_i/(n\Delta x)$, где Δn_i – число результатов измерений, попадающих в i-й интервал, n – полное число измерений, Δx – ширина интервала. Полученную таким образом ступенчатую кривую называют гистограммой. Площади прямоугольников пропорциональны вероятности получения результата из соответствующего интервала значений величины X. При увеличении числа наблюдений отношение $\Delta n_i/n$ стремится к определенному пределу, который представляет собой вероятность P того, что результат измерения попадает в выделенный интервал, причем вероятности попадания в различные интервалы одинаковой ширины различны

$$P(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta n_i}{n}. \qquad (2)$$

Если при $n \to \infty$ одновременно уменьшать ширину интервалов $\Delta x \to 0$, то гистограмма перейдет в плавную кривую $f(x)$ (см. рис. 1), которую называют плотностью распределения вероятности результатов измерений или просто плотностью распределения

$$f(x) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x\to 0}} \frac{\Delta n_i}{n\Delta x}. \qquad (3)$$

Максимальное значение функции плотности распределения соответствует действительному значению измеряемой величины.

Очевидно, что вероятность того, что при измерении вообще получится какой-либо результат, равна 1, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1. \quad (4)$$

Условие (4) называют условием нормировки. В случае нормированной функции плотности распределения, когда выполняется условие (4), произведение $f(x)dx$ равно вероятности того, что при измерении получится результат, попадающий в промежуток $[x,x+dx]$

$$dP(x) = f(x)dx. \quad (5)$$

Вероятность того, что результат измерения лежит в конечном промежутке $[x_1,x_2]$, равна площади под кривой $f(x)$ между абсциссами x_1 и x_2

$$P(x_1,x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx. \quad (6)$$

Эта же кривая описывает и распределение погрешностей измерений. Действительно, если перенести начало координат в точку $x = x_0$, то по оси абсцисс будут отложены величины погрешностей $\delta x = x - x_0$, а по оси ординат – плотность распределения $f(\delta x)$. Кривая плотности распределения погрешностей характеризует точность эксперимента. Чем точнее проведен эксперимент, тем более острой будет кривая.

В общем случае возможны различные формы закона распределения погрешностей, такие как равномерное, экспоненциальное распределения, треугольный закон распределения и другие. Однако опыт показывает, что случайные погрешности измерений чаще всего описываются нормальным законом распределения – законом Гаусса

$$f(\delta x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(\delta x)^2}{2\sigma^2}}. \quad (7)$$

Вид кривой $f(\delta x)$ определяется параметром σ, который характеризует рассеяние результатов измерений. Параметр σ называют средним квадратическим отклонением результатов измерений. Величину σ^2 в статистике называют дисперсией. На рис. 2 приведены кривые нормального распределения, соответствующие различным значениям σ. При меньших значениях σ кривая $f(\delta x)$ более крутая. Если результаты измерений рассеяны больше $\sigma_2>\sigma_1$, то и кривая рассеяния более размыта.

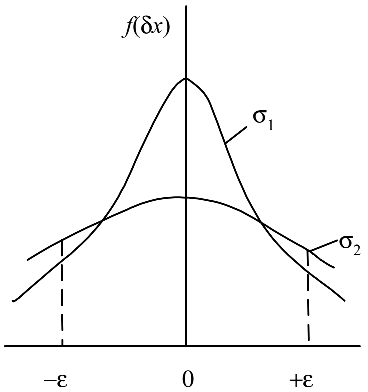

Рис. 2

В теории вероятностей доказывается, что при конечном числе измерений в качестве оценки истинного значения измеряемой величины можно использовать среднее арифметическое из результатов измерений

$$\tilde{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad (8)$$

причем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = x_0.$$

Отклонения случайной величины от среднего значения можно характеризовать средней квадратической погрешностью измерений

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \tilde{x})^2}. \qquad (9)$$

В простейшей методике обработки результатов измерений величину S принимают в качестве меры возможных погрешностей результата. Величина S является наилучшей оценкой параметра σ, причем $\sigma = \lim\limits_{n\to\infty} S$.

Если провести несколько серий измерений величины X, то средние значения результатов измерений в каждой серии $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n$ также представляют собой случайные величины, распределенные по тому же закону

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\tilde{x}}^2}} e^{\frac{-(\tilde{x}-x)^2}{2\sigma_{\tilde{x}}^2}}. \qquad (10)$$

Ширина кривой функции плотности распределения средних значений может быть много меньше, чем ширина кривой функции плотности распределения отдельных результатов измерения.

Важнейшим выводом статистики является соотношение между среднеквадратическими отклонениями σ и $\sigma_{\tilde{x}}$

$$\sigma_{\tilde{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \qquad (11)$$

В качестве оценки $\sigma_{\tilde{x}}$ принимают величину

$$S_{\tilde{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \tilde{x}\right)^2}. \qquad (12)$$

Вероятность того, что значения случайной погрешности δx лежат в пределах интервала $[-\varepsilon, +\varepsilon]$ численно равна площади между кривой и осью абсцисс в этом интервале (рис. 2)

$$P(-\varepsilon \le \delta x \le \varepsilon) = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(\delta x)d(\delta x). \qquad (13)$$

Если на оси абсцисс отложить δx в единицах σ, то все кривые нормального распределения с различными σ изобразятся одной кривой (рис. 3). Причем, для любого $\varepsilon = t\sigma$ значения вероятностей (13) могут быть рассчитаны, если известна функция распределения погрешностей. Для случая нормального закона распределения погрешностей измерений (7) расчет дает

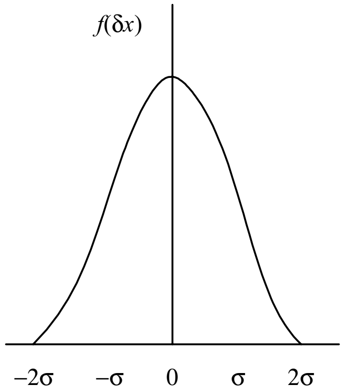

Рис. 3

$$P(-\sigma \le \delta x \le \sigma) = 0{,}683,$$
$$P(-2\sigma \le \delta x \le 2\sigma) = 0{,}954,$$
$$P(-3\sigma \le \delta x \le 3\sigma) = 0{,}998,$$

т. е. примерно 68,3% всех погрешностей составляют погрешности, не превышающие по абсолютной величине σ; 95,4% – погрешности, не превышающие 2σ; 99,8% – погрешности, не превышающие – 3σ. Таким образом, параметр σ характеризует точность измерений.

Результаты измерений распределены по тому же закону и с той же дисперсией, что и погрешности

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\tilde{x})^2}{2\sigma^2}}. \qquad (14)$$

Кривая $f(x)$ симметрична относительно прямой, проходящей через точку с координатой $x = \tilde{x}$. Вероятность попадания случайной величины в интервал $[\tilde{x}-\varepsilon, \tilde{x}+\varepsilon]$ при единичном измерении определяется соотношением, аналогичным (13).

Чтобы получить окончательный результат измерения, необходимо найти оценки истинного значения измеряемой величины, среднеквадратического отклонения и вероятности, с которой истинное значение, находится в том или ином интервале около измеренного среднего.

Если значения случайной величины распределены по нормальному закону (14), то вероятность попадания ее в определенный интервал значений $\tilde{x} \pm \varepsilon$

$$P(\tilde{x}-\varepsilon \le x \le \tilde{x}+\varepsilon) = \int\limits_{\tilde{x}-\varepsilon}^{\tilde{x}+\varepsilon} f(x)dx. \tag{15}$$

Измеряя интервал ε в единицах σ т. е. $\varepsilon = t\sigma$, выражение (15) можно представить в виде

$$P(\tilde{x}-t\sigma \le x \le \tilde{x}+t\sigma) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^t e^{\frac{-t^2}{2}}dt. \tag{16}$$

Функцию

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^t e^{\frac{-t^2}{2}}dt \tag{17}$$

называют интегралом вероятности. Значения интеграла вероятности $\Phi(t)$ для различных t приведены в табл. 1 приложения.

Пользуясь значениями интеграла вероятности, можно найти вероятность попадания случайной величины в определенный наперед заданный интервал или определить величину интервала, в который попадает результат измерения с заданной вероятностью. Например:

$$\begin{aligned} &P(\tilde{x}-\sigma \le x \le \tilde{x}+\sigma) = 0{,}683 \quad (t=1),\\ &P(\tilde{x}-2\sigma \le x \le \tilde{x}+2\sigma) = 0{,}954 \quad (t=2). \end{aligned} \tag{18}$$

Вероятность P называют доверительной вероятностью, а соответствующий интервал ε называют доверительным интервалом.

Во всех приводимых рассуждениях предполагалось, что величина дисперсии σ^2 известна. Однако обычно она не известна, и при малом числе измерений нет возможности ее определить.

В математической статистике разработан метод определения доверительного интервала и соответствующей доверительной вероятности при любом числе измерений, в том числе и малом. Основан этот метод на распределении Стьюдента, которое при малом числе измерений отлично от распределения Гаусса и переходит в него при $n \to \infty$.

Пусть проведено n измерений и найдены величины $\tilde{x}$ и $S_{\tilde{x}}$. Вероятность P того, что истинное значение измеряемой величины лежит в интервале $[\tilde{x} - \varepsilon, \tilde{x} + \varepsilon]$ определяют следующим образом. Находят величину коэффициента Стьюдента или относительный доверительный интервал

$$t_{p,n} = \frac{\varepsilon}{S_{\tilde{x}}}. \tag{19}$$

Значения $t_{P,n}$ для различных P и n приведены в табл. 2 приложения. Зная $S_{\tilde{x}}$ и определив $t_{P,n}$ для заданного ε, по табл. 2 находят доверительную вероятность P для заданного n. Так значению коэффициента $t_{P,n} = 2$, $(\varepsilon = 2S_{\tilde{x}})$ при n = 6 соответствует доверительная вероятность P = 0,9, т. е. при 6 измерениях некоторой величины X действительное значение лежит в интервале $\left[\tilde{x} - 2S_{\tilde{x}},\ \tilde{x} + 2S_{\tilde{x}}\right]$ с вероятностью P = 0,9.

Пользуясь значениями коэффициента Стьюдента, можно найти также доверительный интервал, в который попадает истинное значение измеряемой величины с заданной доверительной вероятностью

$$\varepsilon = t_{P,n} S_{\tilde{x}} \tag{20}$$

или определить, сколько измерений необходимо провести, чтобы результат имел точность не ниже заданной.

2. СИСТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

При оценке результата измерений необходимо учитывать как случайные, так и систематические погрешности измерений. Систематические погрешности можно разделить на следующие группы.

Погрешности, природа которых нам известна, а величина может быть достаточно точно определена. Такие погрешности можно учесть при обработке результатов введением соответствующих поправок. Например, если часы отстают на 1 с за каждый час, то при отсчете времени нужно ввести соответствующую поправку. Источники таких погрешностей следует тщательно анализировать, величины поправок определять и учитывать в окончательном результате.

Другую группу составляют погрешности, которые трудно исключить. Неисключенная систематическая погрешность результата складывается из составляющих, которыми могут быть ошибки метода, ошибки средств измерений и вызванные другими причинами. Например, если мы определяем плотность вещества по измеренным объему и массе образца, то результат может содержать грубую ошибку, если внутри образца имеются пустоты.

Погрешности средств измерений есть результат действия многих факторов случайного и систематического характера. Закон распределения их, как правило, не известен, поэтому приходится ограничиваться указанием области их существования. Эта область определяется как предельная систематическая погрешность средства измерения – Θ. Предельная систематическая погрешность определяется по классу точности прибора, или как половина цены наименьшего деления прибора, когда не указан класс точности. Максимальные погрешности, даваемые измерительными приборами, иногда указываются на самих приборах, а иногда – в прилагаемых паспортах. Обычно дается наибольшая абсолютная погрешность. Электроизмерительные приборы обычно характеризуются классом точности в пределах от 0,05 до 4. Более грубые приборы обозначения класса точности не имеют. Пределы допускаемой основной погрешности измерений принято выражать в форме:

абсолютной погрешности Δ, выражаемой в единицах измеряемой величины;

относительной погрешности $-\delta = \pm\frac{\Delta}{X}$ или $\delta = \pm[c + d(\frac{X_k}{X})]$, где X_k – конечное значение измеряемой величины, а c и d – положительные;

приведенной погрешности $\gamma = \frac{\Delta}{X_N}$, где X_N – нормирующее значение измеряемой величины, выражаемое в тех же единицах, что и Δ. (Относительная и приведенная погрешности приводятся в %.)

Нормирующее значение X_N для приборов устанавливают равным большему из пределов измерений или равным сумме модулей пределов измерений, если нулевое значение находится внутри диапазона измерений.

Для средств измерений физической величины, для которых принята шкала с условным нулем, нормирующее значение устанавливают равным модулю разности пределов измерений.

Для измерительных приборов с существенно неравномерной шкалой нормирующее значение устанавливают равным всей длине шкалы или ее части, соответствующей диапазону измерений.

Обозначения классов точности приборов приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Форма выражения погрешности	Предел допускаемой погрешности	Обозначение класса точности
Приведенная погрешность, если нормирующее значение выражено в единицах измеряемой величины	$\gamma = \pm 1{,}5\%$	1,5
Приведенная погрешность, если нормирующее значение принято равным длине шкалы	$\gamma = \pm 0{,}5\%$	0,5
Относительная погрешность (постоянная)	$\delta = \pm 0{,}5\%$	$\boxed{0{,}5}$
Относительная погрешность, возрастающая с уменьшением измеряемой величины	$\delta = \pm\left[0{,}02 + 0{,}01\left(\dfrac{X_k}{X} - 1\right)\right]$	0,02/0,01

Так если на приборе указан класс точности 0,5, то это означает, что при каждом измерении допускается ошибка не больше чем 0,5 % от всей действующей шкалы прибора. Амперметр, шкала которого рассчитана на 500 мА, дает ошибку в измерении тока не более чем в 0,05·500 мА = 2,5 мА.

Если имеется несколько источников систематических погрешностей и $\Theta_1, \Theta_2, ..., \Theta_m, ...$ предельные систематические погрешности, обусловленные различными причинами, то предельная систематическая погрешность результата прямого измерения вычисляется по формуле

$$\Theta = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \Theta_i^2}. \qquad (21)$$

3. ПОРЯДОК ОБРАБОТКИ И ФОРМА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТА ПРЯМОГО ИЗМЕРЕНИЯ

1. Определяют среднее арифметическое из результатов наблюдений по формуле (8):

$$\tilde{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Величину $\tilde{x}$ принимают за результат измерения.

2. Оценивают среднее квадратическое отклонение результатов измерений по формуле (12) или (9):

$$S_{\tilde{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \tilde{x}\right)^2} .$$

3. Определяют границу неисключенной систематической погрешности результата измерения Θ.

4. Результаты измерений представляются в форме

$$\tilde{x} = \ldots, S_{\tilde{x}} = \ldots,\ n = \ldots, \Theta = \ldots \qquad (22)$$

Пример. При измерении некоторой величины были получены следующие значения: x_1=16,6; x_2=16,8; x_3=16,4; x_4=17,2; x_5=17,0; x_6=16,2; x_7=16,8; n=7; Θ=0,1. Определим величины $\tilde{x}$ и $S_{\tilde{x}}$ по формулам (8) и (12):

$$\tilde{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 16,71;$$

$$S_{\tilde{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \tilde{x}\right)^2} = 0,14.$$

Результат представляем в виде

$$\tilde{x} = 16,71;\ \ S_{\tilde{x}} = 0,14;\ \ n = 7;\ \ \Theta = 0,1.$$

4. ПОГРЕШНОСТИ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

При косвенных измерениях искомая физическая величина Y связана некоторой функциональной зависимостью с рядом независящих друг от друга величин $X_1, X_2, X_3, ..., X_m$

$$Y = f(X_1, X_2, ..., X_m). \tag{23}$$

Величины X_i измеряются непосредственно (прямые измерения). Результат измерения каждой из величин X_i содержит свою погрешность в общем случае случайную и систематическую. В зависимости от вида функции Y, связывающей искомую величину с результатами измерений X_1, X_2, ... , эти погрешности по разному влияют на погрешность окончательного результата. Задача экспериментатора состоит в том, чтобы найти значение величины Y и оценить погрешность ее измерения.

В качестве оценки величины Y принимают значение функции, соответствующее средним значениям величин $\tilde{x}_i$, т. е.

$$\tilde{y} = f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_m). \tag{24}$$

Результат косвенного измерения также содержит случайную и систематическую погрешности. Случайную погрешность характеризуют величиной среднего квадратического отклонения $S_{\tilde{y}}$. Вычислить величину $S_{\tilde{y}}$ результата косвенного измерения можно, пользуясь соотношением, которое выводится в теории вероятностей

$$S_{\tilde{y}} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\right)^2_{X_1=\tilde{x}_1} \cdot S^2_{\tilde{x}_1} + \left(\frac{\partial f}{\partial X_2}\right)^2_{X_2=\tilde{x}_2} \cdot S^2_{\tilde{x}_2} + ...} \tag{25}$$

Здесь $\partial f / \partial X_i$ – значения частных производных функции $f(X_1, X_2, ...)$ по переменной X_i. Величины $S_{\tilde{x}_i}$ – представляют собой средние квадратические отклонения средних арифметических значений прямо измеренных величин.

В табл. 3 приложения приведены формулы для вычисления величин $S_{\tilde{y}}$ для наиболее часто встречающихся на практике случаев функциональных зависимостей. Следует заметить, что иногда бывает легче вычислить относительное значение среднего квадратического отклонения, т. е. величину τ_S:

$$\tau_S = \frac{S_{\tilde{y}}}{\tilde{y}} \qquad (26)$$

и уже по τ_S определять величину $S_{\tilde{y}} = \tau_S \tilde{y}$. Формулы для расчета величины τ_S также приведены в табл. 3 приложения.

Систематическая погрешность результата косвенного измерения Θ_y определяется систематическими погрешностями результатов отдельных измерений Θ_x. Величину Θ_y можно найти пользуясь соотношением

$$\Theta_y = \left|\frac{\partial f}{\partial X_1}\right|_{X_1=\tilde{x}_1} \cdot \Theta_{X_1} + \left|\frac{\partial f}{\partial X_2}\right|_{X_2=\tilde{x}_2} \cdot \Theta_{X_2} + \ldots \qquad (27)$$

В табл. 4 приложения приведены формулы для вычисления границ неисключенной систематической погрешности Θ_y и относительной $\tau_\Theta = \dfrac{\Theta_y}{y}$ для некоторых наиболее часто встречающихся функциональных зависимостей.

5. ПОРЯДОК ОБРАБОТКИ И ФОРМА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТА КОСВЕННОГО ИЗМЕРЕНИЯ

1. Результаты наблюдений каждой из величин X_i обрабатываются как прямые измерения, т. е. вычисляются величины $\tilde{x}_i = \ldots, S_{\tilde{x}_i} = \ldots, \Theta_{X_i} = \ldots$

2. Пользуясь средними значениями величин $\tilde{x}_i$, находят оценку истинного значения результата косвенного измерения $\tilde{y} = f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_m)$.

3. Используя соотношение (25) вычисляют величину $S_{\tilde{y}}$.

4. Определяют границу неисключенной систематической погрешности Θ_y по формуле (27).

5. Результат косвенного измерения представляют в виде

$$\tilde{y} = \ldots, S_{\tilde{y}} = \ldots, \Theta_y = \ldots \qquad (28)$$

Для результатов наблюдений, принадлежащих нормальному закону распределения, находят доверительные границы случайной погрешности результата измерений $\varepsilon = t_{P,n} S_{\tilde{x}}$, а также границы полной погрешности

$$\Delta x = \Theta + \varepsilon = \Theta + t_{P,n} S_{\tilde{x}}$$

или

$$\tilde{x} = \ldots, \quad \varepsilon = \ldots, \quad P = \ldots, \quad n = \ldots, \quad \Theta = \ldots \qquad (29)$$

Если $\Theta / S_{\tilde{x}} < 0,8$, то неисключенной систематической погрешностью Θ пренебрегают и принимают ε за границу погрешности результата $\Delta x = \varepsilon$.

Если $\Theta / S_{\tilde{x}} > 8$, то пренебрегают случайной погрешностью и величину Θ принимают за границу погрешности результата $\Delta x = \varepsilon$.

При отсутствии данных о виде функции распределения погрешности и необходимости дальнейшей обработки результат измерений предоставляется в форме

$$\tilde{x} = \ldots, \quad S_{\tilde{x}} = \ldots, \quad n = \ldots, \quad \Theta = \ldots$$

Пример. При измерении некоторой величины были получены значения (см. пример ранее)

$$\tilde{x} = 16,71; \quad S_{\tilde{x}} = 0,14; \quad n = 7; \quad \Theta = 0,10.$$

Пусть известно, что результаты измерений величины X характеризуются нормальным законом распределения.

а. Найдем доверительный интервал ε, в который попадает истинное значение измеряемой величины с вероятностью $P = 0,95$.

Пользуясь табл. 2 приложения для $P = 0,95$ и $n = 7$ находим значение коэффициента Стьюдента $t_{P,n} = 2,45.$ Тогда,

$$\varepsilon = t_{P,n} \cdot S_{\tilde{x}} = 2,45 \cdot 0,14 = 0,34.$$

Так как $\Theta / S_{\tilde{x}} = 0,71 < 0,8,$ результат измерения представляем в виде (30)

$$x_0 = 16,7 \pm 0,4; \quad P = 0,95; \quad n = 7.$$

б. Найдем доверительную вероятность того, что среднее арифметическое значение $\tilde{x}$ отличается от истинного x_0 не более чем на $\varepsilon = 0,2$.

Определим коэффициент Стьюдента

$$t_{P,n} = \frac{\varepsilon}{S_{\tilde{x}}} = \frac{0,2}{0,14} = 1,43.$$

Из таблицы получаем при $n = 7$, $P = 0,8$.

6. ОКРУГЛЕНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ И РЕЗУЛЬТАТА

Погрешности измерений принято оценивать сверху. Так как погрешности определяют зону недостоверности результата, то их не требуется знать очень точно. В окончательной записи погрешность измерения принято выражать числом с одной или двумя значащими цифрами. Если первая значащая цифра погрешности больше 2, то погрешность округляется до одной значащей цифры. Если первая значащая цифра 1 или 2, то погрешность выражается числом с двумя значащими цифрами. При приближенном оценивании погрешности числом с одной значащей цифрой цифру 9 не применяют (округляют до 1 более высокого разряда).

При округлении результата руководствуются следующими правилами.

1. Числовые значения результатов измерений должны оканчиваться десятичным знаком того же разряда, что и значение погрешности.

2. Если цифра старшего из отбрасываемых разрядов меньше 5, то остающиеся цифры не изменяются. В целых числах лишние цифры заменяют нулями.

Пример. Пусть полученное числовое значение результата 14,532, а погрешность 0,4. Тогда результат следует округлять до 14,5. Тот же результат при погрешности 0,12 следует округлять до 14,53.

3. Если цифра старшего отбрасываемого разряда больше 5 и за ней следуют отличные от нуля цифры, то последнюю оставшуюся цифру увеличивают на единицу.

4. Если отбрасываемая цифра равна 5, а следующие за ней цифры неизвестны или равны нулю, то последнюю цифру числа не изменяют, если она четная, и увеличивают на единицу, если она нечетная.

Пример. Результат 10,5 при погрешности 2 округляют до 10, а результат 11,5 при той же погрешности 2 округляют до 12.

7. ГРАФИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Часто в физическом эксперименте изучается зависимость одной величины от другой и результаты измерений могут быть представлены графически. Графики дают наглядное представление о виде функциональной зависимости, выявляют многие ее важные свойства и особенности. При построении графиков руководствуются следующими правилами.

1. Графики отроят только на специальной графической бумаге.

2. По оси абсцисс принято откладывать ту величину, которая является причиной изменения другой (т. е. аргумент).

Необходимо правильно выбрать масштаб и диапазон, в которых представляются исследуемые величины. Масштаб должен быть простым, т. е. одна клетка масштабной сетки должна соответствовать 1, 2, 5, 10 и т. д. единицам измеряемой величины, но не 3, 7, 11 и т. п. Масштаб выбирается так, чтобы ошибка графика ($\Delta_{\text{гр}} = 0{,}5$ мм) была меньше, чем предельная систематическая погрешность прибора.

Представляемые на осях интервалы значений должны использовать все поле графика. На осях графика следует указывать название (или символ) и единицы измерения величины.

3. Экспериментальные результаты представляется на графике в виде точек, причем на график обязательно наносят все полученные при измерениях значения. Экспериментальные точки дают хорошее представление о виде функциональной зависимости; однако для большей наглядности и для определения некоторых параметров функциональной зависимости по графику через точки проводят кривую. Проводить кривую следует плавно, избегая изломов, как можно ближе к экспериментальным точкам так, чтобы по обе стороны от кривой было примерно одинаковое количество точек. Кривая проводится так, чтобы все экспериментальные точки оставались видны.

Если на одном графике представляются результаты различных экспериментов, то следует для обозначения различных групп точек пользоваться разными символами (точки, крестики и т. д.).

С помощью графиков можно вести графическую обработку экспериментальных данных. Она не так точна, как численная, но проста, наглядна и не требует длинных вычислений. По графикам можно находить некоторые параметры теоретической или экспериментальной зависимости, проводить интегрирование, дифференцирование, оценивать практическую погрешность и т. д.

8. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Одним из методов оценки параметров линейной зависимости физических величин является метод наименьших квадратов.

Часто экспериментально определяются величины X и Y, связанные функциональной зависимостью

$$Y = f(X,\ A,\ B,\ ...)\ . \tag{31}$$

Вид функции $f(X,\ A,\ B,\ ...)$ бывает обычно известен из физических законов, а коэффициенты $A,\ B...$ определяются по результатам эксперимента.

Если Y и X связаны линейной зависимостью

$$Y = A + BX, \tag{32}$$

то для нахождения A и B достаточно двух абсолютно точных результатов измерений величин Y и X. В действительности измеренные экспериментально значения x_i и y_i содержат погрешность, поэтому по ним можно получить только оценки параметров функции A и B.

Чтобы получить наиболее достоверные оценки проводят многократные измерения и в результате эксперимента получают набор из n пар значений измеряемых величин x_i и y_i.

Наиболее удобным и простым методом определения коэффициентов A и B уравнения прямой (32) является метод наименьших квадратов согласно которому наивероятнейшими значениями A и B будут такие, при которых сумма квадратов отклонений измеренных значений y_i от вычисленных по формуле (32) будет наименьшей, т. е. выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{n}(A + Bx_i - y_i)^2 = \min. \tag{33}$$

Условие минимума суммы (33), как функции параметров A и B, состоит в равенстве нулю частных производных по этим параметрам

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} 2(A + Bx_i - y_i) = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} 2(A + Bx_i - y_i)\cdot x_i = 0. \end{cases} \tag{34}$$

Решая систему относительно A и B, получим

$$A = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2},$$

$$B = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}. \tag{35}$$

Метод наименьших квадратов позволяет не только найти наилучшие значения параметров линейной зависимости (32), но и произвести оценку погрешности найденных значений параметров. Дисперсию отклонения точек от прямой S_y^2 и дисперсию коэффициентов S_A^2 и S_B^2 можно определить, пользуясь следующими соотношениями:

$$S_y^2 = \frac{n \sum y_i^2 - \left(y_i\right)^2}{n(n-2)} - \frac{\left(\sum x_i \sum y_i - n \sum x_i y_i\right)^2}{n(n-2)\left[n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2\right]}$$

$$S_A^2 = \frac{S_y^2 \sum x_i^2}{n \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}, \quad S_B^2 = \frac{n S_y^2}{n \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}. \tag{36}$$

В формулах (35), (36) опущены обозначения индексов при суммировании.

Пример. При изучении зависимости сопротивления проводника от температуры было проведено 8 измерений величин R и t. Известно что, для металлов зависимость сопротивления от температуры линейная

$$R_t = A + Bt.$$

Найдем значения коэффициентов A и B по методу наименьших квадратов. Сведем результаты измерений в табл. 8.1.

Пользуясь соотношениями (35) для коэффициентов A и B, получим

$$A = \frac{\sum t_i^2 \sum R_i - \sum t_i \sum R_i t_i}{n \sum t_i^2 - \left(\sum t_i\right)^2}, \quad B = \frac{n \sum R_i t_i - \sum t_i \sum R_i}{n \sum t_i^2 - \left(\sum t_i\right)^2}.$$

Таблица 8.1

№ опыта	t_i, °C	t_i^2, (°C)^2	R_i, Ом	$R_i t_i$, Ом·°C·
1	20	400	32,0	640
2	30	900	34,8	1044
3	40	1600	35,2	1408
4	50	2500	37,8	1890
5	60	3600	38,1	2286
6	70	4900	40,9	2863
7	80	6400	41,2	3296
8	90	8100	43,5	3915
	$\sum t_i = 440$	$\sum t_i^2 = 28400$	$\sum R_i = 303{,}5$	$\sum R_i t_i = 17342$

Подставим значения, приведенные в табл. 8.1:

$$A = \frac{28400 \cdot 303{,}5 - 440 \cdot 17342}{8 \cdot 28400 - 440^2} = 29{,}4; \quad B = \frac{8 \cdot 17342 - 440 \cdot 303{,}5}{8 \cdot 28400 - 440^2} = 0{,}155.$$

Определим дисперсию R, A и B по формулам (36):

$$S_R^2 = 0{,}426; \quad S_A^2 = 0{,}360; \quad S_B^2 = 10^{-4}; \quad S_A = 0{,}6; \quad S_B = 0{,}01.$$

Получим значения коэффициентов прямой

$$A = (29{,}4 \pm 0{,}6) \ \text{Ом}, \ \ B = (0{,}16 \pm 0{,}01) \ {}^{\text{Ом}}\!/_{°\text{C}}$$

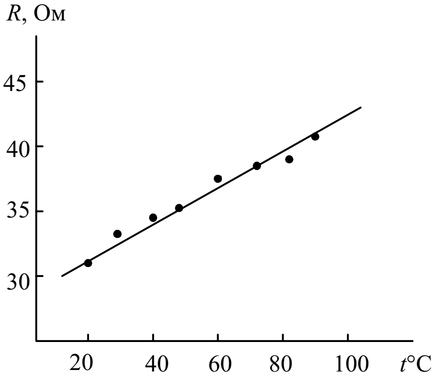

Рис. 4

Таким образом, зависимость сопротивления от температуры имеет вид

$$R_t = 29{,}4 + 0{,}16t. \qquad (37)$$

На рис. 4 приведены результаты эксперимента и прямая, построенная по методу наименьших квадратов (37).

Вычисления коэффициентов прямой по формулам (35) бывают затруднительны. Поэтому рассмотрим более простой метод парных точек, который применяют для определения наклона прямой.

Пусть имеется восемь точек, лежащих приблизительно на одной прямой.

Требуется найти наилучшее значение параметра B и его погрешность. Воспользуемся данными табл. 8.1 и пронумеруем точки от 1 до 8 (рис. 5). Возьмем точки 1 и 4: через них пройдет прямая с параметром B_1. Для следующей пары точек 2 и 5 найдем B_2 и т. д. В итоге можно составить несколько пар и получить значения параметра B_i. Составим пять пар точек. Результаты представим в табл. 8.2.

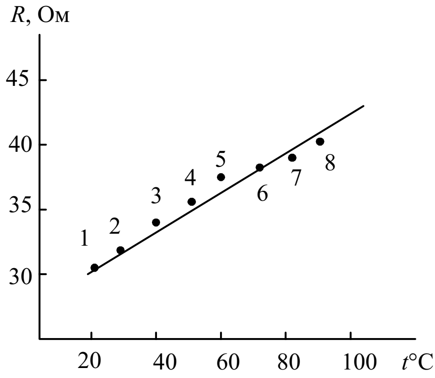

Рис. 5

Таблица 8.2

№ опыта	t_i	R_i	№ опыта	t_i	R_i	$R_i' - R_i$	$t_i' - t_i$	$B_i = \frac{R_i' - R_i}{t_i' - t_i}$
1	20	32,0	4	50	37,0	5,8	30	0,193
2	30	34,8	5	60	38,1	3,3	30	0,110
3	40	35,2	6	70	40,9	5,7	30	0,190
4	50	37,8	7	80	41,2	3,4	30	0,113
5	60	38,1	8	90	43,5	5,4	30	0,180

Среднее значение коэффициента $\tilde{B}$:

$$\tilde{B} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} B_i = 0{,}157,$$

а среднее квадратическое отклонение

$$S_{\tilde{B}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(B_i - \tilde{B}\right)^2} = 0{,}02.$$

Следовательно, тангенс угла наклона исследуемой прямой α равен

$$\mathrm{tg}\alpha = B = (0{,}16 \pm 0{,}02)\ \frac{\text{Ом}}{{}^\circ\text{C}}.$$

На рис. 5 показаны экспериментальные точки 1–8 зависимости сопротивления от температуры и прямая, построенная по методу парных точек.

9. АППРОКСИМАЦИЯ И ИНТЕРПОЛЯЦИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЯ

Аппроксимация

При обработке результатов измерений приходится иметь дело с задачами, в которых для функции, заданной только таблицей или графиком, требуется подобрать аналитическое выражение, приближенно отображающее эту функцию. Подобная задача может возникнуть и для функции, задаваемой формулой, если эта формула оказывается слишком сложной или неподходящей для требуемых целей. Формулы, изображающие функциональную зависимость, полученную из опыта в виде таблицы или графика, называют эмпирическими формулами. Обычно для приближенного изображения заданной функции $f(x)$ выбирают аппроксимирующую (приближенную) функцию $\varphi(x)$ из функций определенного вида, например $\varphi(x)$ ищут в виде полинома

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n . .$$

При этом требуется, чтобы функция $\varphi(x)$ наиболее близко приближалась к $f(x)$ на некотором интервале $[x_{\min}, x_{\max}]$. Обычно при аппроксимации используют метод наименьших квадратов (МНК), но применение его для ручных расчетов целесообразно, если степень n аппроксимирующего полинома не превышает 2 (см. раздел. 8). При большем порядке полинома задача нахождения его коэффициентов усложняется и особенно в тех случаях, когда измерительная информация избыточна, что имеет место при значительном числе наблюдений.

Задача аппроксимации ставится так: необходимо найти порядок и коэффициенты полинома (с помощью МНК), который бы наилучшим образом аппроксимировал результаты наблюдений (как правило, при наличии случайных погрешностей или “шума”), что аналогично тому случаю, когда осуществляется подбор эмпирических формул. Достаточно просто указанная задача решается при использовании современных пакетов прикладных программ, в частности, MatLab (см. приложение).

Интерполяция

При изучении функциональных зависимостей между двумя физическими величинами x и y результатом экспериментов зачастую является таблица значений функции $y_i = f(x_i)$ в определенных точках $x_0, x_1, ..., x_k$. Точки $x_0, x_1, ..., x_k$ называются узлами интерполяции. Простейшая задача интерполирования функции заключается в приближенном вычислении значения этой функции в промежуточной точке x, находящейся между узлами интерполяции. Обычно при обработке результатов измерений применяют параболическую интерполяцию, при которой используется приближенное представление функции $f(x)$ многочленом (полиномом) $P(x) = P_n(x)$ степени не выше n. Значения полинома в точках $x_0, x_1, ..., x_k$ должны совпадать с заданными значениями функции $f(x)$. Интерполяционный многочлен $P(x)$ однозначно определяется узлами интерполяции и значениями функции в них.

В простейшем случае используется линейная интерполяция, а именно: интерполяция функции $f(x)$ линейной функцией $P(x)$ по двум узлам, например x_0 и x_1, с помощью формулы Лагранжа

$$P(x) = y_0(x - x_0)/(x_0 - x_1) + y_1(x - x_0)/(x_1 - x_0).$$

Из этого уравнения при конкретных значениях y_0 и y_1, получаемых как $f(x_0)$ и $f(x_1)$, можно рассчитать значение y, если задавать любое x из интервала $[x_0, x_1]$. Целесообразно использовать линейную интерполяцию также при работе с математическими (справочными) таблицами, в которых данные представлены с недопустимо редким для конкретной задачи шагом и требуется найти промежуточные данные, располагающиеся между приведенными в таблице.

Интерполяция с помощью кубической параболы (кубическими сплайнами) реализованы в совместных прикладных пакетах программ и, в частности, в пакете MatLab (см. приложение).

Аппроксимация и интерполяция результатов измерения с помощью пакета MatLab

Данные y, полученные в результате измерений при изменении аргумента x, необходимо сформировать в виде двух векторов-строк **y** и **x**, причем оба эти вектора должны иметь одинаковую длину (одинаковое количество элементов). Для полиномиальной аппроксимации этих данных применяется процедура **polyfit (x,y,n)**. Значение указанного в скобках символа **n**, соответствует задаваемому порядку аппроксимирующего полинома. В результате действия этой процедуры получается вектор длиной **(n+1)** коэффициентов полинома.

Пример. Полученные результаты измерения из восьми значений аргумента и восьми значений результатов наблюдений заданы в виде двух векторов

$$\mathbf{x} = [1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8]$$

$$\mathbf{y} = [-1.1\ 0.2\ 0.5\ 0.8\ 0.7\ 0.6\ 0.4\ 0.1].$$

Указанная процедура применяется, например, для трех значений порядка аппроксимирующего полинома $n = 1$, $n = 2$ и $n = 3$. Для этого запускается пакет MatLab, а в командном окне набираются следующие операторы (элементы векторов отделяются пробелами, строки разделяются точкой с запятой, если результат их выполнения не выводится на экран монитора):

```
x=[1 2 3 4 5 6 7 8];
y=[-1.1 0.2 0.5 0.8 0.7 0.6 0.4 0.1];
polyfit (x,y,1)
ans =
     0.1143 -0.2393
polyfit (x,y,2)
ans =
    -0.1024 1.0357 -1.7750
polyfit (x,y,3)
ans =
     0.0177 -0.3410 1.9461 -2.6500
```

Полученные результаты аппроксимации для каждого полинома обозначены как $\alpha n \sigma$ и представляют собой коэффициенты полиномов. Так для полинома первой степени (прямая линия)

$y(x) = 0.1143x – 0.2393$;

для полинома второй степени (квадратичная парабола)

$y(x) = -0.1024x^2 + 1.0357x – 1.7750$;

для полинома третьей степени (кубическая парабола)

$y(x) = 0.0177x^3 – 0.3410x^2 + 1.9461x – 2.6500$.

Для иллюстрации применения функции **polyfit (x,y,n)** необходимо построить в одном поле графического окна заданную дискретную функцию (результаты измерения) и графики всех полученных при аппроксимации полиномов:

```
x=[1 2 3 4 5 6 7 8];
y=[-1.1 0.2 0.5 0.8 0.7 0.6 0.4 0.1];
p1=polyfit (x,y,1);
p2=polyfit (x,y,2);
p3=polyfit (x,y,3);
stem (x,y);
hold
x1=0.5: 0.05:8.5;
y1=polyval (p1,x1);
y2=polyval (p2,x1);
y3=polyval (p3,x1);
plot (x1,y1,x1,y2,x1,y3); grid
title ('Полиномиальная аппроксимация');
xlabel ('аргумент');
ylabel ('функция');
```

Результат аппроксимации приведен на рис. 6.

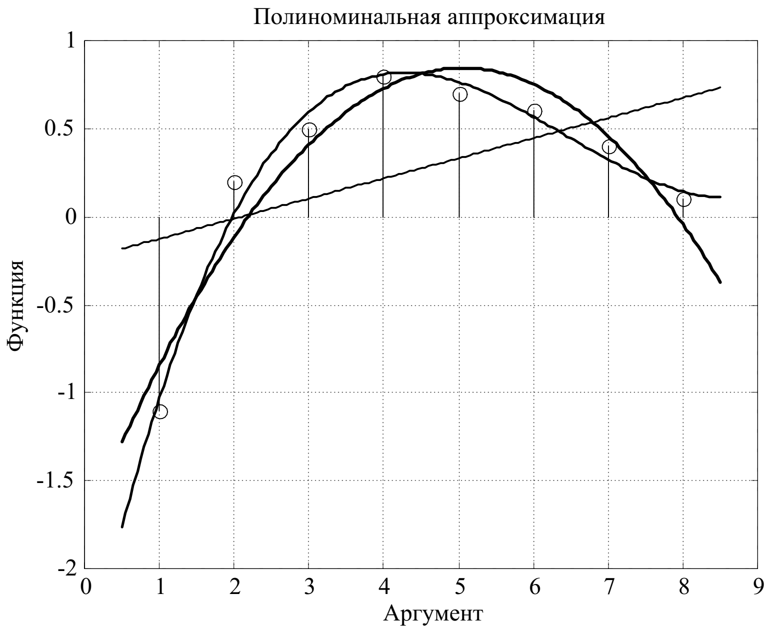

Рис. 6

В приведенной программе использованы новые функции **stem (x,y)** для построения исходной дискретной функции, **hold** – для дополнительного построения нескольких кривых y1, y2, y3 на одном графике, **plot (x,y)** – команда построения графика, **grid** – нанесение сетки на график. Новая переменная x_1 разбивает весь интервал изменения аргумента x на более мелкие интервалы с величиной 0.05 для более точной аппроксимации полученной зависимости с помощью процедуры **polival**.

Для осуществления интерполяции используется функция **spline (x,y,xi)**, которая осуществляет интерполяцию кубическими сплайнами. При обращении к функции **yi = spline(x,y,x1);** интерполируются значения вектора **y**, заданного при различных значениях аргумента, представленных в векторе **x**, и выдается значение интерполирующей функции в виде вектора **yi** при значениях аргумента, заданных вектором **xi**. это возможно в случае, когда вектор **x** имеет ту же длину, что и вектор **y** и номера их элементов совпадают.

Для примера рассмотрим интерполяцию вектора

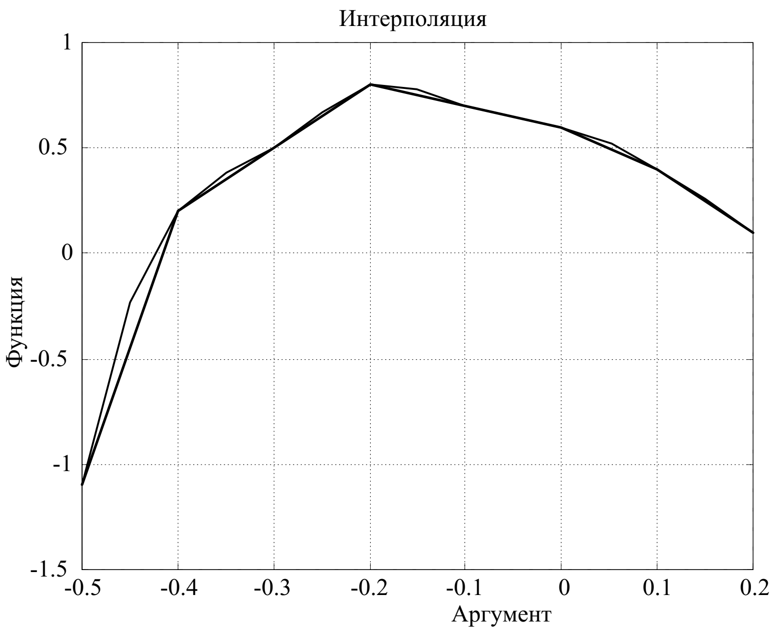

Рис. 7

```
x = -0.5 : 0.1: 0.2;
y=[-1.1 0.2 0.5 0.8 0.7 0.6 0.4 0.1];
x1=-0.5: 0.05: 0.2;
y2=spline(x,y,x1);
plot (x,y,x1,y2); grid
title ('Интерполяция');
xlabel ('аргумент');
ylabel ('функция');
```

Результат интерполяции приведен на рис. 7.

10. ПРАКТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПРОВЕРКИ НОРМАЛЬНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Обычно задача ставится так: имеется группа результатов наблюдений и высказывается гипотеза о том, что эти наблюдения можно считать реализациями случайной величины с выбранной формой функции распределения. Затем методами математической статистики эта гипотеза проверяется и либо принимается, либо отвергается.

При большом числе наблюдений ($n > 50$) лучшими критериями проверки данной гипотезы считают критерий согласия К. Пирсона (критерий χ^2) для группированных наблюдений и критерий Р. Мизеса–Н. В. Смирнова (критерий ω^2) для негруппированных наблюдений.

Остановимся на критерии χ^2. Идея этого метода состоит в контроле отклонений гистограммы экспериментальных данных от гистограммы с таким же числом интервалов, построенной на основе нормального распределения. Сумма квадратов разностей частот по интервалам не должна превышать значений χ^2, для которых составлены таблицы в зависимости от уровня значимости критерия q и числа степеней свободы $k = L - 3$, где L – число интервалов.

Вычисления ведутся по следующей схеме.

1. Вычисляют среднее арифметическое из результатов наблюдений и оценку среднего квадратического отклонения:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{38}$$

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}. \qquad (39)$$

2. Группируют наблюдения по интервалам. При числе наблюдений 40–100 обычно принимают 5–9 интервалов. Для каждого интервала находят середину x_{i0} и подсчитывают число наблюдений $\tilde{\varphi}_i$, попавших в каждый интервал.

3. Вычисляют число наблюдений для каждого из интервалов, теоретически соответствующее нормальному распределению. Для этого сначала от реальных середин интервалов x_{i0} переходят к нормированным z_i:

$$z_i = \frac{x_{i0} - \overline{x}}{\tilde{\sigma}}. \qquad (39)$$

Затем для каждого значения z_i находят значение функции плотности вероятностей

$$f\left(z_i\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z_i^2}{2}}. \qquad (40)$$

Вычисление $f(z_i)$ ведется с помощью табл. 5 приложения.

Теперь можно вычислить ту часть φ_i общего числа имеющихся наблюдений, которая теоретически должна была быть в каждом из интервалов:

$$\varphi_i = n\frac{h}{\tilde{\sigma}} f\left(z_i\right), \qquad (41)$$

где n – общее число наблюдений, $h = x_{i0+1} - x_{i0}$ – длина интервала, принятая при построении гистограммы.

4. Если в какой-либо интервал теоретически попадает меньше 5 наблюдений, то его в обеих гистограммах соединяют с соседним интервалом. Затем определяют число степеней свободы $k = L - 3$, где L – общее число интервалов (если произведено укрупнение интервалов, то L – число интервалов после укрупнения).

5. Вычисляют показатель разности частот χ^2:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{L}\chi_i^2,\ \chi_i^2 = \frac{\left(\tilde{\varphi}_i - \varphi_i\right)^2}{\varphi_i}. \qquad (42)$$

6. Выбирают уровень значимости критерия q. Уровень значимости должен быть достаточно малым, чтобы была мала вероятность отклонить правильную гипотезу (совершить ошибку первого рода). С другой стороны, слишком малое значение q увеличивает вероятность принять ложную гипотезу, т. е. совершить ошибку второго рода.

По уровню значимости q и числу степеней свободы k по табл. 6 приложения находим границу критической области χ_q^2, так что

$$P\left\{\chi^2 > \chi_q^2\right\} = q.$$

Вероятность того, что получаемое значение χ^2 превышает χ_q^2, равна q и мала. Поэтому, если оказывается, что $\chi^2 > \chi_q^2$, то гипотеза о нормальности отвергается. Если $\chi^2 < \chi_q^2$, то гипотеза о нормальности принимается.

Чем меньше q, тем при том же k больше значение χ_q^2 и тем легче выполняется условие $\chi^2 < \chi_q^2$ и принимается проверяемая гипотеза. Но при этом увеличивается вероятность ошибки второго рода. Поэтому нецелесообразно брать $q < 0.01$.

При слишком большом q, как указывалось выше, возрастает вероятность ошибки первого рода и, кроме того, снижается чувствительность критерия. Например, при $q = 0{,}5$ с равной вероятностью χ^2 может быть и больше и меньше χ_q^2 и, следовательно, теряется возможность сделать выбор в пользу проверяемой гипотезы или против нее.

Для единообразия решения рассматриваемой задачи желательно унифицировать применяемые уровни значимости. С этой целью можно предложить попытаться ограничить выбор уровня значимости интервалом $0{,}02 \le q \le 0{,}1$.

Наряду с рассмотренной проверкой, при которой была принята односторонняя критическая область, применяют и двусторонние критические области, т. е. оценивается $P\left\{\chi_{\text{н}}^2 < \chi^2 < \chi_{\text{в}}^2\right\} = q$. В этом есть определенный смысл, так как у реальной группы данных очень малое значение χ^2 маловероятно. Уровень значимости критерия q делится на две части: $q = q_1 + q_2$. Для простоты часто считают $q_1 = q_2$. По табл. 6 приложения для $P\left\{\chi^2 > \chi_q^2\right\}$ находят χ_1^2 для уровня значимости q_1 и числа степеней свободы k и χ_2^2 для уровня значимости $1 - q_2$ и того же k. Гипотеза о нормальности проверяемой группы данных принимается, если

$$\chi_2^2 \leq \chi^2 \leq \chi_1^2.$$

Следует еще раз отметить, что данный критерий позволяет проверять соответствие эмпирических данных любому теоретическому распределению, а не только нормальному. Однако этот критерий, как и другие критерии согласия, не позволяет установить вид распределения наблюдений, а лишь дает возможность проверить, допустимо ли отнести их к нормальному или иному, выбранному заранее типу распределения.

В практике измерений часто возникает необходимость проверить гипотезу о нормальности распределения небольшой группы наблюдений $n>50$. Согласно рекомендации ГОСТ гипотеза проверяется с помощью составного критерия.

Критерий 1. По данным наблюдений $x_1, \ldots, x_n$ вычисляем значение параметра d по формуле

$$d = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{x}|}{nS_*}, \tag{43}$$

где

$$S_* = \sqrt{\frac{\sum_{i-1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n}}. \tag{44}$$

Выбираем затем уровень значимости критерия q_1 и по табл. 7 приложения находим $d_{\frac{q_1}{2}}$ и $d_{1-\frac{q_1}{2}}$.

Принимаем, что гипотеза о нормальности по критерию 1 не отвергается, если

$$d_{1-\frac{q_1}{2}} \leq d \leq d_{\frac{q_1}{2}}.$$

В противном случае гипотеза отвергается.

Критерий 2. Этот критерий введен дополнительно для проверки “концов” распределений.

Принимаем, что гипотеза о нормальности по критерию 2 не отвергается, если не более m разностей $\left|x_i - \bar{x}\right|$ превзошли $z_{\frac{\alpha}{2}}\tilde{\sigma}$, где $\tilde{\sigma}$ вычисляется по формуле (39), а z_{α} – верхняя $100\frac{\alpha}{2}$-процентная квантиль нормированной функции Лапласа (табл. 8 приложения); α определяем по n и уровню значимости q как корень уравнения

$$1 - \sum_{k=0}^{m} C_k^n \left(1-\alpha\right)^k \alpha^{n-k} = q.$$

Для нахождения α по заданным n, q и m = 1 или 2 составлена табл. 9 приложения.

При $10 < n < 20$ следует принимать m = 1. Если $50 > n \geq 20$, то m = 2.

Если число разностей $\left|x_i - \bar{x}\right|$, больших $z_{\frac{\alpha}{2}}\tilde{\sigma}$, превышает m, то гипотеза о нормальности отвергается.

Гипотеза о нормальности принимается, если для проверяемой группы данных выполняются оба критерия.

Уровень значимости составного критерия

$$q \leq q_1 + q_2,$$

где q_1 – уровень значимости для критерия 1, q_2 – уровень значимости для критерия 2.

Пример проверки нормальности распределения результатов наблюдений

В табл. 10.1 приведены результаты наблюдений, полученные при измерении напряжения исследуемого источника с помощью потенциометра. Проверим, можно ли считать полученные данные реализациями случайной величины, имеющей нормальное распределение.

Сначала найдем оценки параметров распределения:

$$\bar{x} = \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{36} x_i = 2{,}7994 \text{ В},$$

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{35}\sum_{i=1}^{36}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} = \sqrt{\frac{1478 \cdot 10^{-8}}{35}} = 6{,}52 \cdot 10^{-4} \text{ В}.$$

Затем найдем S_*:

$$S_* = 6,52 \cdot 10^{-4} \sqrt{\frac{35}{36}} = 6,41 \cdot 10^{-4} \text{ В}.$$

Таблица 10.1

Номер наблюдения i	Показания потенциометра x_i, В	$(x_i - x) \cdot 10^4$	$(x_i - x)^2 \cdot 10^8$	Номер наблюдения i	Показания потенциометра x_i, В	$(x_i - x) \cdot 10^4$	$(x_i - x)^2 \cdot 10^8$
1	2,7997	+3	9	19	2,7988	–6	36
2	7991	–3	9	20	7999	+5	25
3	7990	-4	16	21	7998	+4	16
4	7997	+3	9	22	7996	+2	4
5	7992	–2	4	23	7992	–2	4
6	7976	–18	324	24	8000	+6	36
7	7984	–10	100	25	7993	–1	1
8	7999	+5	25	26	7988	–6	36
9	7990	–4	16	27	7993	–1	1
10	7989	–5	25	28	7982	–12	144
11	7997	+3	9	29	7999	+5	25
12	7993	–1	1	30	7997	+3	9
13	8000	+6	36	31	7999	+5	25
14	8006	+12	144	32	7992	–2	4
15	7998	+4	16	33	7999	+5	25
16	7995	+1	1	34	7989	–5	25
17	7992	–2	4	35	7994	0	0
18	8011	+17	289	36	7999	+5	25

Критерий 1. Для того чтобы вычислить значение d, сначала подсчитаем

$$\sum_{i=1}^{n} \left| x_i - \overline{x} \right| = 174 \cdot 10^{-4}.$$

Затем находим

$$d = \frac{174 \cdot 10^{-4}}{36 \cdot 6,41 \cdot 10^{-4}} = 0,754.$$

Выбрав уровень значимости $q_1 = 0{,}02$, из табл. приложения находим $d_{0,01} = 0{,}877$ и $d_{0,99} = 0{,}717$.

Так как $0{,}717 < 0{,}754 < 0{,}877$, то критерий 1 выполняется.

Критерий 2. Примем уровень значимости $q_2 = 0{,}02$. По табл. Приложения для n = 36 и q = 0,02 находим $\alpha = 0{,}99$. Тогда, обращаясь к табл. приложения, находим $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}58$. Отсюда

$$z_{\frac{\alpha}{2}}\tilde{\sigma} = 2{,}58 \cdot 6{,}52 \cdot 10^{-4} = 16{,}8 \cdot 10^{-4} .$$

Согласно критерию 2, не более двух разностей $\left|x_i - \overline{x}\right|$ могут превзойти $16{,}8 \cdot 10^{-4}$. По данным, приведенным в табл., приведенной в примере, видим, что разности $\left|x_i - \overline{x}\right|$ только при i = 6 и i = 18 превышают критическое значение. Следовательно, критерий 2 выполняется.

Таким образом, с уровнем значимости $q \le q_1 + q_2 = 0{,}04$ гипотеза о нормальности распределения полученных данных согласуется с данными наблюдений.

Библиографический список

1. *Зайдель А. Н.* Ошибки измерений физических величин. Л.: Наука, 1985.

2. ГОСТ 8.207-76. Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов измерений. М.: Изд-во стандартов, 1976.

3. ГОСТ 8.401-80. Классы точности средств измерений. М.: Изд-во стандартов, 1980.

4. ГОСТ 8.251-77.Анализаторы статистических характеристик. М.: Изд-во стандартов, 1977.

5. *Рабинович С. Т.* Погрешности измерений. Л.: Энергия, 1978.

6. *Маркин Н. С.* Основы теории обработки результатов измерений. М.: Изд-во стандартов, 1991.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1

Значения функции $\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$
0,0	0,000	1,1	0,729	2,1	0,964
0,1	0,080	1,2	0,770	2,2	0,972
0,2	0,158	1,3	0,806	2,3	0,979
0,3	0,236	1,4	0,838	2,4	0,984
0,4	0,311	1,5	0,866	2,5	0,988
0,5	0,383	1,6	0,890	2,6	0,991
0,6	0,452	1,7	0,911	2,7	0,993
0,7	0,516	1,8	0,928	2,8	0,995
0,8	0,5576	1,9	0,943	2,9	0,996
0,9	0,632	2,0	0,954	3,0	0,997
1,0	0,683				

Таблица 2

Значения коэффициентов Стьюдента $t_{P,n}$

n	P					
	0,6	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99
2	1,38	3,08	6,31	12,7	31,8	63,7
3	1,06	1,89	2,92	4,30	6,96	9,92
4	0,98	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84
5	0,94	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60
6	0,92	1,48	2,02	2,57	3,36	4,03
7	0,90	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71
8	0,90	1,42	1,89	2,36	3,00	3,50
10	0,88	1,38	1,80	2,26	2,82	3,25
12	0,87	1,36	1,80	2,19	2,72	3,11
14	0,87	1,35	1,77	2,16	2,65	3,01
18	0,86	1,33	1,74	2,11	2,57	2,90
20	0,86	1,33	1,73	2,09	2,54	2,86

Таблица 3

Формулы для вычисления среднего квадратического отклонения функции нескольких переменных

№ пп.	Вид функции $Y = f(X_1, \ldots, X_m)$	Среднее квадратическое отклонение $S_{\tilde{y}}$	Относительная погрешность τ_S
1	$X_1 + X_2 + \ldots + X_m$	$\sqrt{S_{X_1}^2 + S_{X_2}^2 + \ldots + S_{X_m}^2}$	$\dfrac{\sqrt{S_{X_1}^2 + S_{X_2} + \ldots + S_{X_m}^2}}{X_1 + X_2 + \ldots + X_m}$
2	$X_1 - X_2$	$\sqrt{S_{X_1}^2 + S_{X_2}^2}$	$\dfrac{\sqrt{S_{X_1}^2 + S_{X_2}}}{X_1 - X_2}$
3	$X_1 \cdot X_2$	$\sqrt{X_2^2 S_{X_1}^2 + X_1^2 S_{X_2}^2}$	$\sqrt{\dfrac{S_{X_1}^2}{X_1^2} + \dfrac{S_{X_2}^2}{X_2^2}}$
4	X^m	$mX_{m-1}S_X$	$m\dfrac{S_X}{X}$
5	$\dfrac{X_1}{X_2}$	$\sqrt{\dfrac{S_{X_1}^2}{X_2^2} + \left(\dfrac{X_1}{X_2^2}\right)^2 S_{X_2}^2}$	$\sqrt{\dfrac{S_{X_1}^2}{X_1^2} + \dfrac{S_{X_2}^2}{X_2^2}}$
6	$\sin X$	$S_X \cos X$	$S_X \operatorname{ctg} X$
7	$\cos X$	$S_X \sin X$	$S_X \operatorname{tg} X$
8	$\operatorname{tg} X$	$\dfrac{S_X}{\cos^2 X}$	$\dfrac{2S_X}{\sin 2X}$

Таблица 4

Формулы для вычисления систематической погрешности функции нескольких переменных

№ пп.	Вид функции $Y = f(X_1, \ldots, X_m)$	Систематическая погрешность Θ_y	Относительная погрешность τ_Θ
1	$X_1 + X_2 + \ldots + X_m$	$\Theta_{X_1} + \Theta_{X_2} + \ldots + \Theta_{X_m}$	$\dfrac{\Theta_{X_1} + \Theta_{X_2} + \ldots + \Theta_{X_m}}{X_1 + X_2 + \ldots + X_m}$
2	$X_1 - X_2$	$\Theta_{X_1} + \Theta_{X_2}$	$\dfrac{\Theta_{X_1} + \Theta_{X_2}}{X_1 - X_2}$
3	$X_1 \cdot X_2$	$X_1\Theta_{X_1} + X_2\Theta_{X_2}$	$\dfrac{\Theta_{X_1}}{X_1} + \dfrac{\Theta_{X_2}}{X_2}$
4	X^m	$mX_{m-1}\Theta_X$	$m\dfrac{\Theta_X}{X}$
5	$\dfrac{X_1}{X_2}$	$\dfrac{\Theta_{X_1}}{X_2} + \dfrac{X_1}{X_2^2}\Theta_{X_2}$	$\dfrac{\Theta_{X_1}}{X_1} + \dfrac{\Theta_{X_2}}{X_2}$
6	$\sin X$	$\Theta_X \cos X$	$\Theta_X \operatorname{ctg} X$
7	$\cos X$	$\Theta_X \sin X$	$\Theta_X \operatorname{tg} X$
8	$\operatorname{tg} X$	$\dfrac{\Theta_X}{\cos^2 X}$	$\dfrac{2\Theta_X}{\sin 2X}$

Таблица 5

Значения функции плотности вероятностей нормированного нормального распределения $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$

$\|z\|$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0039	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблица 6

Значения q-процентных точек для χ^2-распределения $\left(P\left\{\chi^2 > \chi_q^2\right\}\right)$

Число степеней свободы $k = n - 1$	Уровень значимости q, %													
	99	98	95	90	80	70	50	30	20	10	5	2	1	0,5
1	0,00016	0,00063	0,00393	0,0158	0,0642	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635	7,879
2	0,0201	0,0404	0,130	0,211	0,446	0,713	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210	10,597
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,336	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345	12,838
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	9,448	11,668	13,277	14,860
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086	16,750
6	0,872	1,134	1,635	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812	18,548
7	1,239	1,564	2,167	2,833	3,822	4,671	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475	20,278
8	1,646	2,032	2,733	3,490	4,594	5,527	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090	21,955
9	2,088	2,532	3,325	4,168	5,380	6,393	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666	23,589
10	2,558	3,059	3,940	4,865	6,179	7,267	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209	25,188
11	3,053	3,609	4,575	5,578	6,989	8,148	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725	26,757
12	3,571	4,178	5,226	6,304	7,807	9,034	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217	28,300
13	4,107	4,765	5,892	7,042	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688	29,819
14	4,660	5,368	6,571	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141	31,319
15	5,229	5,985	7,261	8,547	10,307	11,721	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578	32,801

Окончание табл. 6

Число степеней свободы $k = n - 1$	Уровень значимости q, %													
	99	98	95	90	80	70	50	30	20	10	5	2	1	0,5
16	5,812	6,614	7,962	9,312	11,152	12,624	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000	34,267
17	6,408	7,255	8,672	10,085	12,002	13,531	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409	35,718
18	7,015	7,906	9,390	10,865	12,857	14,440	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805	37,156
19	7,633	8,567	10,117	11,651	13,716	15,352	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191	38,582
20	8,260	9,237	10,851	12,443	14,578	16,266	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566	39,997
21	8,897	9,915	11,591	13,240	15,445	17,182	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932	41,401
22	9,542	10,600	12,338	14,041	16,314	18,101	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289	42,796
23	10,196	11,293	13,091	14,848	17,187	19,021	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638	44,181
24	10,856	11,992	13,848	15,659	18,062	19,943	23,337	27,096	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980	45,558
25	11,524	12,697	14,611	16,473	18,940	20,867	24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314	46,928
26	12,198	13,409	15,379	17,292	19,820	21,792	25,336	29,246	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642	48,290
27	12,879	14,125	16,151	18,114	20,703	22,719	26,336	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963	49,645
28	13,565	14,847	16,928	18,939	21,588	23,647	27,336	31,391	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278	50,993
29	14,256	15,574	17,708	19,768	22,475	24,577	28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588	52,336
30	14,953	16,306	18,493	20,599	23,364	25,508	29,336	33,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892	53,672

Таблица 7

Значения q-процентных точек распределения $d = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{nS_*}$

Число наблюдений	При $q/2$, %			При $(1 - q)/2$, %		
	1	5	10	90	95	99
11	0,9359	0,9073	0,8899	0,7409	0,7153	0,6675
16	9137	8884	8733	7452	7236	6829
21	9001	8768	8631	7495	7304	6950
26	8901	8686	8570	7530	7360	7040
31	8827	8625	8511	7559	7404	7110
36	8769	8578	8468	7583	7440	7167
41	8722	8540	8436	7604	7470	7216
46	8682	8508	8409	7621	7496	7256
51	8648	8481	8385	7636	7518	7291

Таблица 8

Значения нормированной функции Лапласа $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-y^2/2} dy$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	41980	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861

П р и м е ч а н и е. Значения Φ(z) при z = 3,0 ÷ 4,5 следующие:

3,0 ... 0,49865
3,1 ... 0,49903
3,2 ... 0,49931
3,3 ... 0,49952
3,4 ... 0,49966
3,5 ... 0,49977
3,6 ... 0,49984
3,7 ... 0,49989
3,8 ... 0,49993
3,9 ... 0,49995
4,0 ... 0,499968
4,5 ... 0,499999

Таблица 9

Значения α из уравнения $1-\sum_{k=0}^{m} C_n^k (1-\alpha)^k \alpha^{n-k} = q$

n	m	Уровень значимости q, %		
		1	2	5
10	1	0,98	0,98	0,96
11–14	1	0,99	0,98	0,97
15–20	1	0,99	0,99	0,98
21–22	2	0,98	0,97	0,96
23	2	0,98	0,98	0,96
24–27	2	0,98	0,98	0,97
28–32	2	0,99	0,98	0,97
33–35	2	0,99	0,98	0,98
36–49	2	0,99	0,99	0,98

ОГЛАВЛЕНИЕ