

В. А. Бударин

МЕТОД РАСЧЕТА
ДВИЖЕНИЯ
ЖИДКОСТИ

$$X + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) = \frac{du_x}{dt}$$

В. А. Бударин

Метод расчета движения жидкости

Одесса
“Астропринт”
2006

ББК 22.365

Б903

УДК 539.3.01 : 532.12

В монографии выполнен сравнительный анализ уравнений движения жидкости и твердого тела в напряжениях. В результате сравнения показано, что возможно получение уравнений движения вязкой жидкости с произвольным реологическим уравнением. С позиций метода проанализирована система Навье-Стокса и отмечено существование некоторых противоречий, затрудняющих получение общего решения. Приведена иерархия уравнений движения для вязкой, невязкой и идеальной жидкости. Рассмотрено использование данного метода для расчета некоторых известных и новых частных задач. Указаны пути замыкания систем дифференциальных уравнений движения.

Книга предназначена для аспирантов, инженеров и научных работников, занимающихся теоретическими, а также прикладными проблемами механики жидкости, конвективного теплообмена и тепловой энергетики.

Budarin V. Solution method for liquid flow. In the monography the comparative analysis of the equations of movement of a liquid and a solid body in strangts is executed. As a result of comparison it is shown that there is an opportunity of reception of the equations of movement of a viscous liquid equations with any rheological equation. Use of the given method for calculation of some known and new private tasks is considered.

The book is intended for post-graduate students, engineers and the science officers engaged theoretical, and also applied problems of mechanics of a liquid, teplotransfer and thermal power.

Р е ц е н з е н т ы:

В.Х.Кириллов, доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой информационных систем Одесского национального морского университета;
Р.К.Никульшин, доктор технических наук, профессор кафедры холодильных машин Одесской Академии холода

Рекомендовано к изданию ученым советом Энергетического института Одесского национального политехнического университета.

Протокол № 9 от 19 марта 2006 г.

Б 1604100000-058 Без объявл.

318-2006

ISBN 966-318-519-8

© В.А.Бударин, 2006

*Многие вещи нам непонятны не потому, что наши понятия слабы:
но потому, что эти вещи не входят в круг наших понятий.*

Козьма Прутков

Предисловие

Расчет движения жидкости относится к числу не полностью решенных математических проблем, что сдерживает развитие научно-технического прогресса во многих областях науки и техники. Часто предполагается, что решение этой проблемы сводится к задаче решения системы уравнений Навье-Стокса, однако, как следует из ограничений, свойственных этой системе, она может применяться только при гладком распределении функций процесса, в то время как во многих реальных течениях такое условие не выполняется. Это означает, что получение общего решения системы Навье-Стокса не позволит полностью решить задачу движения жидкости.

Неудовлетворенность расчетными возможностями уравнений Эйлера и Навье-Стокса неоднократно высказывалась различными исследователями, которыми предлагались различные пути решения задачи движения жидкости [1, 20]. Современная точка зрения на решение этой задачи и системы уравнений Навье-Стокса представлена, например, в официальном сообщении на сайте [Clay Mathematics Institute](http://www.claymathematics.org/). Настоящая работа продолжает данную тему на основе сопоставления возможностей уравнений движения для различных видов деформируемой среды – твердого тела и жидкости.

Система уравнений движения твердого тела является замкнутой и решается многочисленными методами при стройной системе допущений, показывая хорошее соответствие с опытом. Уравнения движения механики жидкости незамкнуты, нелинейны, а точные решения получены только для небольшого количества частных задач и для очень малых

чисел Рейнольдса, что практически исключает возможность их практического применения.

Данная работа выполнена на стыке теории упругости и механики жидкости с целью поиска дополнительных возможностей использования уравнения движения в форме напряжений и/или давлений для решения задач механики жидкости.

В теории упругости уравнение движения в форме напряжений называется уравнением Навье (1825 г.), где, возможно, более известен его частный случай, получивший название уравнение равновесия. В механике жидкости также имеется аналогичное уравнение движения в напряжениях [20, 31]. В данной работе проводится сравнение этих уравнений в своих областях механики и обосновывается другой путь вывода уравнений движения вязкой жидкости, который не отличается от вывода и использования системы уравнений Навье.

Сравнительный характер настоящей работы требует неоднократного обращения к физическим предпосылкам, уравнениям и условиям, относящимся к этим различным наукам, которое выполняется на протяжении всей работы. Для проведения сравнительного анализа используются системы уравнений движения жидкости и твердого тела в напряжениях, системы уравнений Эйлера, Навье-Стокса и ламинарного пограничного слоя, а также некоторые их точные решения.

В работе рассматривается задача расчета движения жидкости в общей постановке, т. е. без привязки к какому-либо частному режиму течения, например, ламинарному или турбулентному. В то же время применение рассматриваемого метода иллюстрируется на известных примерах ламинарного течения, которые имеют точные решения и неоднократно проверены. Одновременно иллюстрируется применение метода к расчету малоизвестных течений, как рассматривавшихся ранее другими авторами, так и относительно новых [2, 4, 5].

Введение

Рассматриваемый метод относится к феноменологическому и учитывает наиболее характерные свойства твердого тела и жидкости. В частности, для твердого тела характерно различие напряжений в точке, где нормальные напряжения зависят от ориентации элементарной площадки, в отличие от идеальной жидкости, где напряжения в точке (давление) одинаковы во всех направлениях. В то же время, если имеется уравнение (метод), позволяющее найти три различных напряжения, то может существовать и частный случай, при котором все три напряжения в точке одинаковы. В теории упругости такой частный случай получил собственное название - "гидростатическое сжатие" [32]. Таким образом, определив три различных напряжения в вязкой жидкости, можно найти и частный случай этого решения, характерный для идеальной жидкости, где эти напряжения будут одинаковыми. Такая схема решения, как оказалось, не дает единственного решения, и полученные результаты необходимо проверять. Схема решения таких задач рассматривается в главе 2. Если какое-либо из полученных решений для невязкой жидкости удовлетворяет уравнению Эйлера, то оно описывает течение идеальной жидкости. Эти и другие соображения позволили решить частную задачу механики жидкости с помощью одной из известных задач теории упругости в предположении о «квазитвердом» характере течения несжимаемой жидкости [27, 28, 32].

В качестве такой задачи была выбрана задача Ламе при наличии центробежных сил, решение которой привело к известному уравнению механики жидкости для сплошного вращающегося потока, ранее найденному путем интегрирования уравнения Эйлера. Для перехода от общего интеграла уравнения Ламе к задаче механики жидкости использовалось известное условие существования сплошной текучей

среды, в соответствии с которым все функции процесса должны быть гладкими.

В итоге найденные с помощью уравнения теории упругости значения напряжений в точке оказались одинаковыми, что подтверждает правильность результата. Ценность этого пути решения уже решенной задачи состоит в том, что он показывает возможность использования методов теории упругости для расчета процессов течения жидкости. Анализ данного решения показал, что этот путь является более сложным и более общим, чем непосредственное интегрирование уравнения Эйлера, однако с его помощью можно получить новые, ранее неизвестные результаты. К числу таких результатов относится возможность расчета напряженного состояния при течении разрывных потоков (с негладким распределением функций). Такой путь решения задачи движения жидкости, однако, связан с допущением, что уравнения течения жидкости так же, как и уравнения движения твердого тела, - линейные. Это существенное ограничение не позволяет распространить такой метод на любые задачи расчета течения жидкости и ограничиться рассмотрением течений с квазитвердым ядром. Обычно к таким случаям относят относительно тонкие течения, например, течения в водяных или газовых воронках, а также волны возмущения.

При решении частной задачи о вращающейся жидкости выяснились некоторые физические и математические особенности, которые позволили обобщить полученные результаты и перейти к анализу общих уравнений движения теории упругости и механики жидкости в напряжениях с целью использования результатов в механике невязкой жидкости. В результате оказалось, что такая общая система уравнений движения невязкой жидкости практически не должна отличаться от системы уравнений Навье в отсутствии касательных напряжений, однако имеет два частных случая. Эти частные случаи можно получить при

применении к этой системе уравнений уже упоминавшегося условия о равенстве напряжений в точке идеальной жидкости и того же условия, дополненного результатом анализа напряженного состояния жидкости, что позволило перейти к рассмотрению разрывных течений. Эта (другая) форма записи условия равенства напряжений проверена при решении частной задачи и использована при проведении демонстрационных экспериментов.

Анализ условий перехода от общей системы уравнений движения жидкости в напряжениях к системе уравнений Эйлера, позволил уточнить понятие «невязкая жидкость» и дать ей математическое описание в виде системы из трех уравнений.

Сравнительный анализ геометрической интерпретации закона Фурье для расчета процесса теплопроводности и закона Ньютона для расчета вязкого трения, имеющих одинаковую математическую запись, позволил установить существование некоторых несоответствий между физическим смыслом величин, входящих в уравнение Ньютона, и их геометрической интерпретацией. В результате проведенного анализа показана некорректность известной иллюстрации возникновения касательного напряжения на примере течения в пограничном слое.

Основываясь на тезисе о существовании корректного математического описания для процесса движения материальной среды в любой области классической механики, предложен другой путь вывода уравнений движения вязкой жидкости, который повторяет процесс вывода, характерный для системы Навье, из теории упругости. В основе этого вывода лежит уравнение движения жидкости в напряжениях. Этот путь позволяет избежать ряда несоответствий, отмеченных в главе 1, и отказаться от использования при выводе системы уравнений Навье-Стокса понятия скорости угловой деформации частицы.

В работе используется геометрическая интерпретация закона Ньютона применительно к деформации малого элемента без привязки его расположения в пограничном слое, что позволяет исключить противоречия между проекцией градиента скорости потока и направлением касательного напряжения, которое автоматически становится противоположным скорости течения жидкости.

Применение полученных в работе уравнений движения вязкой жидкости иллюстрируется на примерах известных задач (например, течения Пуазейля), решения которых были найдены ранее. Одновременно рассматривается относительно новая задача расчета вязкого течения - торцевое течение на безграничной плоскости. Такое течение является вторичным и возникает при торможении вихревой трубки при контакте ее торца с плоскостью. В предположении о сплошном характере этого течения такая задача имеет известное точное решение для малых чисел Рейнольдса [8, 9].

Отличительной особенностью этого точного решения так же, как и решений других подобных задач, является узкий диапазон чисел Рейнольдса, при которых решение является корректным. Например, решение задачи по обтеканию шара по теории Стокса, Озина и др. справедливы только при числах $Re \leq 1$ [8, 31]. Аналогичная ситуация имеет место и для других точных решений [19]. Если ограничиться только ламинарным режимом течения, то такие числа Рейнольдса составляют около 0,5% их полного диапазона.

Такая ситуация существенно отличается от понятия точных решений в других областях науки. Например, при точном расчете простых процессов теплопроводности нет ограничений на значения их безразмерных параметров, которыми являются числа Био и Фурье.

В данной области, как и во многих других, точное решение не ограничивается какой-либо областью характерных чисел подобия [11, 13].

Указанные отличия точных решений показывают условность самого термина «точное решение» в механике жидкости.

Кроме отмеченных путей, решение задачи движения жидкости осуществляется еще как минимум по двум направлениям:

- применение теории подобия физических явлений к процессам движения жидкости, часто совместно с другими процессами, которое разработано во многом благодаря вкладу специалистов советской научной школы;

- применение численных методов расчета, объединенных общим термином Computer Fluid Dynamic ([CFD](#)), с помощью которых решаются задачи механики жидкости и сводятся в базы данных. Накапливаемая там информация используется для проектирования оборудования, а также для дальнейшего исследования процесса движения.

Одновременно проводятся мероприятия в области [организации](#) научных исследований и [образования](#), имеющих единую цель – продвинуться в решении задач движения жидкости.

В основе рассматриваемого в работе метода лежит общее уравнение движения жидкости в напряжениях, которое предполагает существование массовых сил, сил инерции, а также поверхностных сил. При выводе этого уравнения не вводится допущений о требуемом характере распределения функций, поэтому такое уравнение может использоваться для расчета движения деформируемой среды с произвольной макроструктурой. Об этом свойстве уравнений движения в напряжениях (Навье) явно указывается в теории упругости, в механике жидкости такое разъяснение отсутствует, хотя процесс вывода такой же системы уравнений не использует ограничений, относящихся к макроструктуре текучей среды.

Анализ результатов работы представлен в тезисной форме, где приведена схема возможных частных случаев системы уравнений

движения жидкости в напряжениях, отмечены известные системы уравнений и показаны противоречивые частные случаи, не нашедшие в настоящее время удовлетворительного объяснения.

Данный метод расчета движения жидкости дает основания надеяться на его бóльшую общность, однако ограниченное число имеющихся примеров его использования не позволяет сделать заключение о степени его универсальности. Ответ на этот вопрос может быть найден только при постановке соответствующих экспериментов и проведении дополнительного анализа физических подходов и математических уравнений.

В работе использовались trial-версии математических пакетов для нахождения решений некоторых частных задач, что позволило сократить объем вычислений.

Глава 1. Краткий обзор и анализ методов расчета процесса движения

Рассматриваемые методы расчета относятся к сплошной среде, определения которой для жидкости и твердого тела отличаются и будут проанализированы далее [19, 20, 26].

1.1. Основные дифференциальные уравнения движения жидкости

В основе расчета лежит система уравнений в напряжениях, которую получают путем применения теоремы импульсов к движению жидкой частицы. При этом учитывается влияние массовых и поверхностных сил в форме нормальных и касательных напряжений, а также сил инерции. В результате получены следующие уравнения, которые в декартовой системе координат имеют вид [20, 30]:

$$\begin{aligned} X + \frac{I}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) &= \frac{du_x}{dt} \\ Y + \frac{I}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) &= \frac{du_y}{dt} \\ Z + \frac{I}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right) &= \frac{du_z}{dt} . \end{aligned} \quad (1.1)$$

В данной системе уравнений p_{xx} , p_{yy} , p_{zz} — нормальные напряжения вдоль соответствующей координаты, τ_{ij} — касательные напряжения в проекции на ось j , приложенные к площадке, перпендикулярной к оси i , u_x , u_y , u_z — компоненты скорости.

В соответствии с правилами теоретической механики, для того чтобы частица находилась в равновесии, необходимо одновременное равенство нулю и суммы моментов сил относительно всех осей. В результате применения этого положения доказано равенство касательных напряжений $\tau_{ij} = \tau_{ji}$, что является содержанием теоремы о взаимности касательных напряжений.

Из системы (1.1) может быть получена система уравнений Навье-Стокса путем использования двух ключевых положений: понятия скорости угловой деформации жидкой частицы и линейного уравнения для расчета среднего давления в точке. Варианты вывода этих уравнений приведены в многочисленной литературе [30, 32, 33]. В цилиндрических координатах эта система уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2} \right) + \rho R = \rho \frac{du_r}{dt} \\
 & -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} \right) + \rho \theta = \rho \frac{du_\theta}{dt} \quad (1.2) \\
 & -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + \rho Z = \rho \frac{du_z}{dt} \quad ,
 \end{aligned}$$

в правой части уравнений находятся проекции полного ускорения, включающего обе его части — локальное и конвективное ускорение. В соответствии с правилами записи, проекция полного ускорения, например, на координату r , имеет вид: $\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r}$.

Из системы уравнений (1.2) может быть получена система уравнений движения идеальной жидкости. Полагая динамическую вязкость $\mu = 0$, получим систему уравнений Эйлера:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho R &= \rho \frac{du_r}{dt} \\
 -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho \theta &= \rho \frac{du_\theta}{dt} \\
 -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho Z &= \rho \frac{du_z}{dt},
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Одной из целей расчета течения является нахождение поля давлений в зависимости от координат и времени. В вязкой жидкости в каждой точке геометрической области существует три компоненты давления, которые для несжимаемой жидкости можно вычислить по следующим формулам [33]:

$$\begin{aligned}
 p_x &= p - 2\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \\
 p_y &= p - 2\mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \\
 p_z &= p - 2\mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right).
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

При этом предполагается, что среднее давление p находится в результате решения системы Навье-Стокса.

Наряду с рассмотрением уравнений движения, относящихся к напряженному состоянию (1.1), (1.2) и (1.3), в механике жидкости используется метод Эйлера для рассмотрения деформационного движения [20, 30, 31]. При этом вводятся традиционные понятия

линейной, угловой и объемной деформации, а также скорость деформации элементарного объема.

В основе понятий деформационного движения находятся геометрические представления о движении жидкой частицы при условии отсутствия разрывов. При этом базисными понятиями являются шесть характерных величин: три скорости относительного удлинения элементарных векторов и три скорости деформации координатных углов.

1.2. Основные дифференциальные уравнения движения твердого тела

Рассмотрим систему уравнений движения в напряжениях (Навье) в принятой для теории упругости форме записи.

Для вывода уравнений Навье, в твердом теле выделяется малый элемент, к которому применяются уравнения равновесия в проекции на соответствующую координату [18, 27]. Для получения уравнения Навье в цилиндрической системе координат, используется малый элемент, показанный на рис. 1.1.

В результате вывода получена следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + F_r &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{\tau_{r\theta}}{r} + \frac{\tau_{\theta r}}{r} + F_\theta &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{rz}}{r} + F_z &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.5)$$

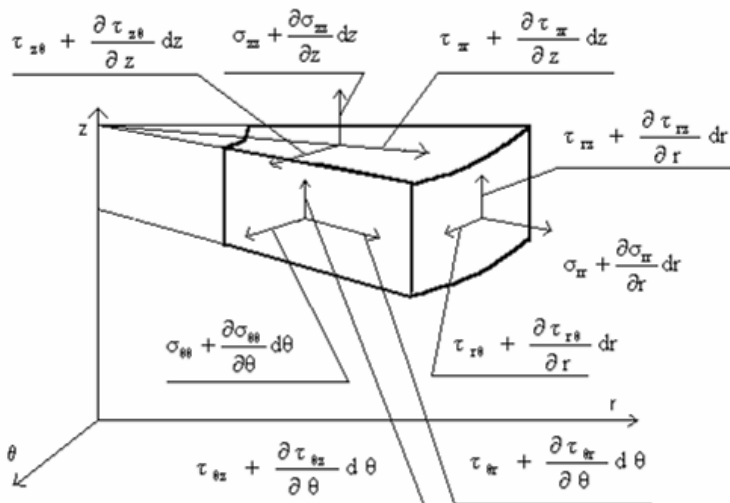


Рис. 1.1. Упрощенная расчетная схема малого элемента (для вывода системы уравнений Навье)

где σ_r , σ_θ , σ_z – нормальное радиальное, окружное и осевое напряжения,

τ_{rz} – касательное напряжение, параллельное оси Z и действующее на криволинейные грани малого элемента.

τ_{zr} – касательное напряжение, параллельное оси R и действующее на плоские грани (верхнюю и нижнюю) малого элемента.

$\tau_{\theta r}$ – касательное напряжение, параллельное оси R и действующее на боковые грани малого элемента.

u , v , w – перемещения по соответствующим координатам.

$\tau_{r\theta}$ – касательное напряжение в окружном направлении, перпендикулярное оси R и действующее на криволинейные грани малого элемента.

$\tau_{\theta z}$ - касательное напряжение в окружном направлении и параллельное оси Z , действующее на плоские боковые грани малого элемента.

$\tau_{z\theta}$ - касательное напряжение в окружном направлении и перпендикулярное оси Z , действующее на плоские (верхнюю и нижнюю) грани малого элемента.

В декартовой системе координат та же система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho X &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho Y &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho Z &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Растягивающие нормальные напряжения принято считать положительными, сжимающие – отрицательными.

Касательные напряжения считаются положительными, если их направления совпадают с положительным направлением осей координат и если при этом растягивающее нормальное напряжение на этой грани совпадает по направлению действия с положительным направлением соответствующей координаты. Касательные напряжения будут также положительны, если их направления противоположны положительному направлению соответствующей координаты и если действие растягивающего нормального напряжения на этой грани противоположно положительному направлению координаты [18].

Кроме напряженного состояния, в теории упругости рассматривают также деформированное состояние тела, в основу расчета которого положена система уравнений движения в перемещениях.

Деформации (e) и перемещения (u) связаны между собой шестью дифференциальными уравнениями, которые, например, для осесимметричной деформации и в предположении о малости перемещений и их градиентов по сравнению с единицей, могут быть сведены к двум уравнениям [18].

$$\frac{\partial e_{\theta}}{\partial r} + \frac{e_{\theta} - e_r}{r} = 0$$

$$r \frac{\partial^2 e_{\theta}}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial e_{rz}}{\partial z} + \frac{\partial e_z}{\partial r} = 0$$

где $e_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}$, $e_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}$, $e_{\theta} = \frac{u_r}{r}$, $2e_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}$ —

уравнения, связывающие деформации и перемещения.

Поскольку напряжения и деформации являются различными проявлениями одного и того же процесса нагружения внешними силами, они связаны между собой, а соответствующие уравнения в линейной теории упругости имеют вид:

$$\begin{aligned} e_r &= \frac{1}{E} [\sigma_r - \mu(\sigma_{\theta} + \sigma_z)] & e_{r\theta} &= \frac{\tau_{r\theta}}{2G} \\ e_{\theta} &= \frac{1}{E} [\sigma_{\theta} - \mu(\sigma_r + \sigma_z)] & e_{\theta z} &= \frac{\tau_{\theta z}}{2G} \\ e_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_r + \sigma_{\theta})] & e_{rz} &= \frac{\tau_{rz}}{2G}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где E — модуль Юнга, $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ — модуль сдвига, μ —

коэффициент Пуассона.

Возможность рассчитывать напряженное и деформированное состояние, т. е. находить все параметры двух полей, позволяет решить задачу теории упругости [11, 18, 26].

1.3. Другие методы расчета

Проблемы с интегрированием системы уравнений (1.1) привели к использованию других методов расчета течений жидкости, газа и пара, среди которых ключевое место занимает уравнение энергии. Это уравнение выполняется для потоков с любой макроструктурой, в том числе и для разрывных течений. На основе этого уравнения получены практически все соотношения газодинамики, которые хорошо соответствуют эксперименту. С другой стороны, уравнение энергии не дает детального описания процесса движения. В частности, не используется число Рейнольдса, процесс диссипации характеризуется с помощью энтропии, а не вязкости, как это имеет место в задачах течения сплошной текучей среды, решенных с помощью уравнения движения.

Другим методом расчета разрывных течений является теория струй идеальной жидкости, в которой предполагается, что течения ограничены стенками, частично свободными поверхностями и поверхностями разрывов, положение которых необходимо задавать. С помощью этой теории, использующей возможности функции комплексного переменного, получен ряд интересных результатов, но в целом такой набор ограничений существенно сужает возможности расчета [20]. С помощью этого же математического инструмента решен и ряд других задач по обтеканию различных тел, однако набор решений находится в рамках плоских задач с большим числом ограничений [20, 30].

Имеются примеры использования системы Навье-Стокса и для описания разрывных течений, например, одномерная задача по нахождению толщины скачка уплотнения. Условия применимости

уравнения движения в данном случае не выполняются как в постановочной части, так и по полученным результатам, в связи с соизмеримостью толщины скачка со свободным пробегом молекулы. В этом случае среда уже не может считаться сплошной, однако результаты расчета близки к полученным другими методами [20].

Уравнения движения, энергии и массового баланса лежат в основе расчета течений многофазных сред, однако в практике расчетов такие системы уравнений не нашли широкого распространения. Основная сложность состоит в недостаточном понимании процессов межфазного взаимодействия, что делает проблему замыкания таких уравнений еще более сложной, чем для однородной среды. В связи с обозначенными проблемами расчет движения таких потоков выполняется на основе полуэмпирических методов с широким использованием теории подобия и эксперимента [17, 20].

Развитие вычислительной техники и прогресс в области профессионального программного обеспечения привели к развитию методов численного моделирования, среди которых выделяется метод конечных элементов. С помощью этого метода удается решать сопряженные задачи переноса, учитывающие влияние механических нагрузок, тепловых и электромагнитных полей, особенно в твердых телах. Решение подобных задач в текучих средах затруднено в связи с проблемой расчета их движения, что и определяет актуальность любой работы в этой области.

1.4. Некоторые частные задачи механики жидкости

1.4.1. Упрощение системы Навье-Стокса

Несмотря на длительную историю решения системы Навье-Стокса, полученные результаты имеют ограниченное применение в связи

с проблемами нахождения общего решения и даже решения частных задач. Основные пути решения уравнения движения сводятся к упрощению системы Навье-Стокса, заключающейся в исключении конвективных слагаемых или замене их другими выражениями, линейно зависящих от компонентов скорости и их производных. Слагаемые, зависящие от вязкости, при этом не меняются, однако интегрировать приходится уже другую систему уравнений, что приводит, по мнению многих авторов, к ограничению конечных результатов малыми числами Рейнольдса [20, 31].

Другой способ упрощения уравнений движения вязкой жидкости предложен Прандтлем и основан на использовании понятия пограничного слоя. Для плоского течения в декартовой системе координат уравнения Навье-Стокса приобретают вид:

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right)$$

$$u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right).$$

Анализ этой системы уравнений, в первую очередь с точки зрения порядка величин, приводит к уравнению Прандтля для установившегося, плоского, ламинарного течения несжимаемой жидкости.

Совместно с уравнением неразрывности получаем систему двух уравнений для определения двух неизвестных компонентов скорости [35].

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0.$$

Необходимо отметить, что слагаемое, зависящее от вязкости $\nu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)$, характеризует сдвиговое течение, т. е. имеется полное соответствие с законом Ньютона для трения. Такое соответствие уравнения движения и закона Ньютона привело к хорошему согласованию теории и эксперимента [35].

Для стационарного трехмерного пограничного слоя уравнения приобретают вид:

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$$

$$u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$

Уравнения дополняются следующими граничными условиями:

$$u_x = u_y = u_z \text{ при } y = 0 \text{ и } u_x = U, u_z = W \text{ при } y \rightarrow \infty$$

Отметим характерное свойство пристеночного пограничного слоя, согласно которому давление в направлении, перпендикулярном течению, практически не меняется, т. е. $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$, что дает возможность использовать

в уравнении движения полную производную по координате x в случае плоского течения. Для трехмерного пограничного слоя изменение давления вдоль координаты x и z может быть любым [35].

1.4.2. Распределение давления во вращающейся жидкости

В данной задаче рассматривается распределение давлений в ядре плоского вихря, полагая, что скорость потока вдоль радиуса меняется по линейному закону. Такое допущение позволяет применить уравнение Эйлера для идеальной жидкости, так как в случае такого «квазитвердого вращения» влиянием вязкости можно пренебречь.

Данная задача имеет точное решение с интегралом в случае постоянной плотности

$$p(r) = \frac{\rho\omega^2}{2}r^2 + C_0.$$

Постоянная интегрирования определяется, полагая, что между квазитвердым ядром и неподвижной окружающей средой существует течение, скорость которого уменьшается вдоль радиуса по гиперболическому закону. Наличие такой области подтверждено экспериментально, а распределение скорости в ней найдено по теории потенциальных течений. В результате

$$C_0 = p_\infty - \rho\omega^2 r_0^2,$$

а распределение давления может быть описано уравнением:

$$p(r) = p_\infty - \frac{\rho\omega^2}{2}(2r_0^2 - r^2),$$

где r_0 — радиус ядра, p_∞ — давление вдали от области течения.

Распределение давления в тяжелой жидкости вдоль вертикальной координаты подчиняется гидростатическому закону [31, 33].

1.4.3. Взаимодействие вихревой трубки с неподвижной плоскостью

В данной задаче рассматривается вихревая нить с известной циркуляцией, расположенная перпендикулярно безграничной плоскости с $z \geq 0$. В результате торможения нижнего торца нити вследствие влияния вязкости угловая скорость вращения уменьшается, а на плоскости от периферии к центру образуется вязкое пристеночное течение. Целью расчета является нахождение распределения радиальной и осевой скорости при следующих начальных условиях: $u_r = u_z = 0$, $u_\theta = \Gamma_p / r$, $p = p_\infty - 0,5 \rho \Gamma_p^2 / r^2$, $z = \infty$ (где Γ_p — величина с точностью до множителя 2π равная заданной циркуляции вихря $2\pi\Gamma_p$; u_r , u_z , u_θ — компоненты скорости в цилиндрической системе координат; p_∞ — давление в бесконечности).

В результате аналитического решения задачи с помощью системы Навье-Стокса найдены следующие уравнения для расчета компонент скорости:

$$u_r = -\left(\Gamma_p^2 / \nu\right)(2\ln 2 - 1)z / r^2; \quad u_z = \left(\Gamma_p^2 / \nu\right)(2\ln 2 - 1)z^2 / r^2;$$

$$u_\theta = \Gamma_p z / r^2.$$

Из этих уравнений следует, что радиальная компонента превышает осевую, а интенсивность вторичных течений растет пропорционально квадрату циркуляции.

Окружная компонента не зависит от вязкости и возрастает только в первой степени от циркуляции. Анализ устойчивости данного решения показал, что оно существует только до числа Рейнольдса $Re = 5,53$. Это значение числа Рейнольдса является весьма малым, что вообще характерно для частных задач, решенных с помощью уравнения Навье-Стокса [8, 9].

На рис. 1.2 показаны расчетные линии тока в координатах r, z , а на рис. 1.3 — пространственная картина течений, заимствованная из работы [8]. Из сравнения рисунков видно, что результаты, полученные разными авторами, соответствуют друг другу.

Особенностью данного решения, отмеченного автором, является его противоречие представлениям теории пограничного слоя. Автор объясняет это противоречие с энергетических позиций и связывает с нелинейностью уравнений движения [8, 9].

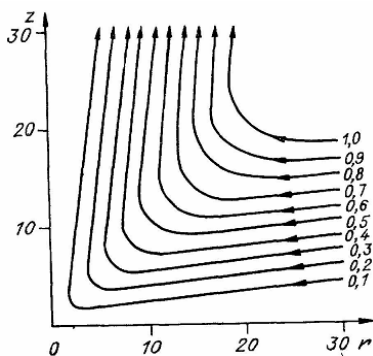


Рис. 1.2. Равноотстоящие линии тока вторичного течения $\psi = 0,1 \dots 1,0$ в координатах z, r [8]

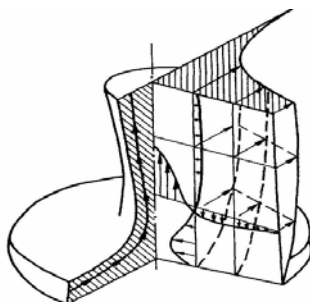


Рис. 1.3. Пространственная картина вторичных течений вблизи плоскости [8, 36]

Проверка полученных результатов, а также попытки разрешить противоречие, связанное с малыми числами Рейнольдса, предпринимались другими исследователями, которые в целом подтвердили теоретические результаты, однако корректно не смогли увеличить область устойчивости решения [15].

Далее будут рассмотрены и некоторые другие частные задачи.

1.5. Некоторые частные задачи теории упругости

1.5.1. Задача Ламе

Одной из частных задач теории упругости, имеющих точное решение, является задача Ламе, которая в классическом варианте предназначена для расчета напряжений в толстостенном цилиндре, находящемся под действием внутреннего и/или внешнего давления. Для решения задачи используется частный случай уравнения Навье, который в обозначениях теории упругости имеет вид:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \quad (1.9)$$

Решение этого уравнения позволяет найти радиальное (σ_r) и окружное (σ_θ) напряжения в стенке при любом соотношении между внутренним (p_a) и внешним (p_b) давлением. Эти решения имеют вид:

$$\sigma_r = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} - \frac{a^2 b^2}{r^2} \frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2}, \quad (1.10)$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} + \frac{a^2 b^2}{r^2} \frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2}. \quad (1.11)$$

1.5.2. Вращение толстостенной трубы

В работе [31] решен другой частный случай системы Навье, предназначенный для расчета напряжений в толстостенной вращающейся трубе при одинаковых давлениях внутри и снаружи. Наиболее просто можно определить напряжения в сечении трубы (диске), если воспользоваться принципом Д'Аламбера и в качестве внешних сил ввести инерционные нагрузки, распределенные по объему диска.

В результате, расчетная схема приобретает вид:

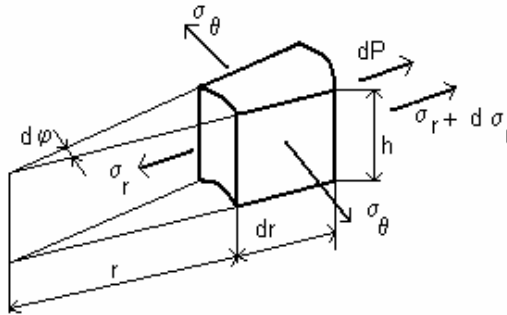


Рис. 1.4. Расчетная схема, действующих сил при вращении толстостенной трубы.

Уравнение силового баланса имеет вид:

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr) \cdot h \cdot d\varphi - \sigma_r \cdot r \cdot h \cdot d\varphi - \sigma_{\theta} \cdot dr \cdot h \cdot d\varphi + \rho \cdot h \cdot \omega^2 \cdot r^2 \cdot d\varphi \cdot dr = 0$$

В итоге можно составить два дифференциальных уравнения:

- в напряжениях

$$\frac{d}{dr}(\sigma_r r) - \sigma_\theta = -\rho\omega^2 r^2;$$

- в перемещениях

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(ur)\right) = -\frac{1-\mu^2}{E} \rho\omega^2 r^2.$$

Оба уравнения имеют точное решение, и для распределения напряжений, получены следующие зависимости:

$$\sigma_r = \frac{\rho\omega^2}{8}(3+\mu)\left(b^2 + a^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2} - r^2\right), \quad (1.12)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\rho\omega^2}{8}(3+\mu)\left(b^2 + a^2 + \frac{a^2 b^2}{r^2} - \frac{1+3\mu}{3+\mu} r^2\right), \quad (1.13)$$

где, μ — коэффициент Пуассона, значение которого для известных твердых тел не превышает 0.5,

a и b — внутренний и внешний радиусы трубы соответственно,

ω — угловая скорость вращения,

ρ — плотность.

В теории упругости рассматривается также вопрос о концентрации напряжений, вызванных отверстием, ослабляющим поперечное сечение. В случае задачи о распределении напряжений во вращающемся диске осесимметричное отверстие приводит к возрастанию окружных напряжений. Если для сплошного диска при $r = 0$ окружное напряжение может быть найдено по формуле $\sigma_\theta = \frac{3+\mu}{8} \rho\omega^2 b^2$, то для диска с

малым отверстием это напряжение удваивается и равно

$$\sigma_{\theta} = \frac{3 + \mu}{4} \rho \omega^2 b^2 \quad [28].$$

Рассмотренные задачи, а также ряд других задач, которые являются осесимметричными, имеют общее свойство: в процессе упругого нагружения возникают лишь нормальные напряжения σ_r и σ_{θ} , а касательные напряжения вследствие симметрии обращаются в ноль. Такие задачи решаются точно, например, с помощью характеристического уравнения четвертой степени, т. е. методом повышения порядка [27].

Рассмотренные примеры частных задач для твердого тела показывают два возможных пути их решения: с помощью дифференциальных уравнений движения в напряжениях или в перемещениях. Однако, какой бы путь не использовался, решение задачи является полным, т. е. в результате решения можно найти все параметры поля напряжений и поля перемещений.

1.6. Краткий анализ основных уравнений

Сравнение систем (1.1) и (1.5) показывает, что они имеют одинаковый смысл, одинаковое число слагаемых и отличаются обозначением нормальных и касательных напряжений, а также правой частью. Для нормальных напряжений имеет место соотношение $p_{xx} = \sigma_x$, $p_{yy} = \sigma_y$, $p_{zz} = \sigma_z$. Для касательных напряжений используются обозначения, соответствующие свойству взаимности, т. е. $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$.

Отличие правой части связано с отсутствием в твердом теле свойства текучести, что дает основания пренебречь конвективным ускорением и ограничиться только второй частной производной от проекции перемещения по времени (или первой производной от скорости). В то же время наличие конвективного ускорения в правой части уравнений

движения жидкости приводит к возникновению нелинейности, что осложняет процесс интегрирования. Таким образом, известный метод линеаризации уравнений движения жидкости, заключающийся в отбрасывании слагаемых конвективного ускорения, меняет физическую сущность задачи расчета. После отбрасывания слагаемых решается уже не задача движения жидкости, а задача движения твердого тела, т. к. система уравнений движения жидкости в напряжениях превращается в систему уравнений Навье.

В механике жидкости рассматривается две стороны процесса движения: свойства силового поля в форме напряжений или давлений, и свойства поля перемещений в форме скоростей деформаций и др. Системы уравнений Навье-Стокса и Эйлера предназначены для расчета параметров двух частных случаев силового поля, возникающего в ньютоновской и идеальной жидкости.

В теории упругости также рассматриваются две стороны процесса движения, содержанием которых является теория напряженного состояния и теория деформаций. В каждой из этих теорий имеется своя система дифференциальных уравнений, связывающих между собой параметры одного или второго поля. В итоге имеется девять уравнений для девяти неизвестных и система уравнений теории упругости является замкнутой. Кроме этой системы, имеются уравнения, связывающие напряжения и деформации между собой (1.7), что позволяет решать задачу любым путем, т. е. с помощью теории деформации или напряжений. Схема связей различных систем уравнений между собой показана на рис. 1.5.

Необходимо отметить, что в основе вывода условий совместности деформаций (Сен-Венана) лежат геометрические представления об изменениях формы тела, а конкретные свойства деформируемой среды учитываются на последующих стадиях преобразования общих уравнений.

Приведенная на рис. 1.5 схема не зависит от конкретных свойств деформируемого тела и должна быть справедлива для любых сред, в которых возникают два отмеченных вида полей.



Рис. 1.5. Схема связей физических полей и соответствующих систем уравнений

В механике жидкости также рассматривается деформационное движение элементарного объема, однако имеющиеся уравнения не связываются с параметрами напряженного состояния, и уравнения аналогичные (1.7) в механике жидкости отсутствуют. Это негативно отражается на всей схеме расчета движения, начиная от проблемы корректного замыкания системы (1.1) и заканчивая взаимной проверкой результатов расчета напряженного состояния и деформационного движения жидкости.

Из сравнения модели вязкой и идеальной жидкости следует, что идеальная жидкость отличается от вязкой двумя основными свойствами: в ней отсутствуют касательные напряжения, а нормальные напряжения не зависят от ориентации элементарной площадки. Математическая реализация первого отличия выполнена путем исключения

соответствующих слагаемых из системы (1.1). Математическая реализация второго условия выполнена в виде условия $p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -p$. Таким образом, переход от системы (1.1) к системе (1.3) показывает полное соответствие физической модели и ее математической интерпретации.

Переход от системы (1.1) к системе Навье-Стокса в части учета неізотропности давления выполнен по неявной схеме. Предполагается, что давление в вязкой жидкости p связано со своими компонентами уравнением (1.14). Для случая идеальной жидкости компоненты p_x , p_y и p_z одинаковы и по (1.14.) равны среднему давлению p .

$$p = \frac{p_x + p_y + p_z}{3} . \quad (1.14)$$

При такой схеме учета зависимости давления от направления, компоненты давления p_x , p_y и p_z исключаются из системы уравнений Навье-Стокса и интегрируется система с другой неизвестной. Более логичная схема учета влияния направления на нормальные напряжения использована в теории упругости, где его компоненты входят в интегрируемую систему.

В теории упругости также присутствует уравнение, аналогичное (1.14), по которому находят среднее нормальное напряжение σ_0 [11, 27].

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} . \quad (1.15)$$

Смысл уравнения (1.14) отличается от смысла уравнения (1.15). По уравнению (1.15) вычисляется напряжение σ_0 , компоненты которого σ_x , σ_y , σ_z являются результатом интегрирования уравнений движения. В механике жидкости среднее давление p само входит в систему уравнений. Таким образом, схема нахождения неизвестных нормальных напряжений в уравнениях движения твердого тела и жидкости противоположна.

Необходимо отметить, что нахождение среднего, как среднеарифметической величины по (1.14), характерно для процессов, параметры которых меняются по линейному закону, чему в полной мере соответствует уравнение (1.15), так как оно используется в линейной теории упругости. Для нелинейных процессов (и уравнений), к которым можно отнести, например, термодинамические процессы или процессы конвективного теплообмена, средние величины находятся также по нелинейным уравнениям, например, в виде среднегеометрической или среднелогарифмической величины [13, 16, 25]. В то же время при малых изменениях осредняемых величин расчет среднего по нелинейным уравнениям практически совпадает со среднеарифметической величиной. Таким образом, использование в выводе нелинейной системы уравнений (Навье-Стокса) формулы (1.14) фактически равноценно требованию малых отличий компонентов давления p_x , p_y и p_z между собой и средним давлением p .

В соответствии с уравнениями (1.4) это приводит к малым значениям градиентов скоростей $\frac{\partial u_x}{\partial x}$, $\frac{\partial u_y}{\partial y}$ и $\frac{\partial u_z}{\partial z}$ между собой или, что то же, изменение скоростей вдоль соответствующей координаты должно быть близко к константе. Таким образом, имеющиеся точные решения системы (1.2), справедливые для малых Re , можно трактовать как малые отклонения от условия $\frac{\partial u_i}{\partial i} = 0$ ($i = x, y, z$).

Отмеченные свойства системы уравнений (1.4) отрицательно сказываются на расчете поля давлений или скоростей, что приводит к несоответствию с параметрами наблюдаемых течений.

Система уравнений (1.1) содержит в качестве неизвестных девять величин: три проекции скорости и шесть проекций напряжений. Система уравнений (1.5) содержит в качестве неизвестных три проекции

перемещения и шесть проекций напряжений. Таким образом, общее количество неизвестных в обеих системах одинаково, и для решения одной и второй задачи необходимо дополнительно одинаковое число уравнений. В теории упругости эта проблема решается путем использования шести уравнений из расчета деформированного состояния. Можно полагать, что в механике жидкости также должна существовать аналогичная схема замыкания системы (1.1) и ее частных случаев, для чего необходимо иметь условия совместности для скоростей деформаций.

Преобразование системы (1.1) к системе уравнений Навье-Стокса (1.2) осуществляется с помощью закона Ньютона, который связывает касательные напряжения и градиенты скорости, что должно уменьшить количество неизвестных до шести. Однако в системе (1.2) присутствует только четыре неизвестных: давление p и три компоненты скорости (массовые силы обычно заданы и не входят в число неизвестных), что указывает на существование еще одного допущения, уменьшающего количество неизвестных. Этим допущением, очевидно, можно считать уравнение (1.14), о чем указывалось выше.

В процессе вывода систем (1.1) и (1.5) не вводится допущение о гладкости функций процесса, однако предполагается, что в твердом теле не возникает трещин. В жидкости возникновение трещин невозможно, поэтому такое предположение выполняется автоматически. Отсутствие требования гладкости функций приводит в теории упругости к возможности рассчитывать упругое состояние тел любой формы, при отсутствии или наличии полостей с внутренними границами, составных тел и так далее. Практическое совпадение двух систем уравнений в напряжениях (1.1) и (1.5) указывает и на одинаковые допущения. Условие гладкости, для системы Навье-Стокса, является жестким ограничением, которое исключает возможность решения многочисленных

задач (например, течение в кавитационной каверне, волне уплотнения, воронке и др.) и понижает иерархический статус этого уравнения.

Обращает на себя внимание различие в схеме использования законов, связывающих напряжения и деформации малого элемента в твердом теле, а также касательные напряжения и скорости деформации в жидкости. В теории упругости эти соотношения используются для пересчета напряжений в деформации или наоборот, а в механике жидкости аналогичные соотношения вводятся в систему уравнений Навье-Стокса, относящуюся к расчету напряженного состояния.

Как следует из свойств пограничного слоя, давление зависит от направления течения, по-разному меняясь вдоль координат x , y и z , что указывает на неизотропность давления. Однако это известное свойство давления не получило полной корректной математической интерпретации в системе уравнений пограничного слоя, где должны присутствовать компоненты p_x и p_z , что также следует из общей системы уравнений (1.1). О том, насколько отличаются компоненты давления, можно косвенно судить по эффектам возникновения подъемной силы и концевым течениям, которые имеют немалую величину и проявляются на некоторых фотографиях обтекания крылового профиля (например, <http://www.efluids.com/efluids/gallery/gallery-pages/cropduster.htm>). Такая ситуация с учетом влияния компонент давления в уравнениях пограничного слоя является результатом «наследства» от системы Навье-Стокса, на что указывалось ранее.

1.7. Анализ движения сплошных и разрывных сред

Под движущейся средой будем здесь понимать тела, находящиеся в одном из трех агрегатных состояний — твердом, жидком или газообразном. При этом будем полагать, что данные среды являются

электрически нейтральными. Как известно, для каждой из этих сред характерно наличие своих механизмов межмолекулярного взаимодействия, которые изучаются в соответствующих разделах физики.

Предметом данного рассмотрения будет известная модель, называемая сплошной средой, которую используют для описания многочисленных процессов, в том числе и процессов движения.

Математическое описание сплошной текучей среды осуществляется с помощью зависимости скорости от координат и времени, а также еще двух термодинамических величин, например, плотности и давления, которые также зависят от координат и времени. Как известно, все термодинамические величины для данного рабочего тела связаны между собой и могут быть вычислены по известным уравнениям, таблицам или компьютерным программам. Отличительной особенностью такой среды является требование гладкости всех термодинамических функций.

Отметим, что зависимости u , ρ , p — есть скорость, плотность и давление жидкости в данной точке пространства с координатами x , y , z и в момент времени t т. е. относится к пространству, а не к точкам жидкости, заполняющей пространство [19].

Свойство гладкости всех функций процесса как условие существования сплошной текучей среды накладывает ограничения на возможности использования такой модели процесса. Например, уравнения движения воздуха как сплошной среды в условиях внутренней или внешней задачи гидродинамики могут использоваться только до тех пор, пока не возникнет скачок уплотнения, т. е. пока гладкая функция, например, плотности, не станет разрывной. В то же время течение с разрывом хотя бы одной функции процесса широко распространено в различных технических приложениях. К таким движениям можно отнести течение двухфазных сред в энергетике, запыленный воздух,

околозвуковое течение газа и т. д. При этом не все разрывы являются тождественными. Например, двухфазное течение состоит из частиц разного агрегатного состояния, а при возникновении скачка уплотнения поток состоит из одних и тех же частиц с отличающимися свойствами. Аналогичные особенности имеют место и при течении сплошных сред, например, для турбулентного режима течения. Для того, чтобы такое течение можно было считать сплошным, необходимо оперировать только осредненными параметрами, т. е. исключить из рассмотрения пульсации, которые создают множество микроразрывов большого числа функций процесса.

Характерную особенность имеет задача обтекания тела (внешняя задача гидродинамики). Выделяя часть пространства, включающую поток и обтекаемое тело, и анализируя характер функций процесса, можно отметить, что зависимость плотности от координаты пространства не является гладкой, т. к. плотность твердого тела и среды существенно отличаются. Таким образом, даже безотрывный процесс обтекания твердого тела, строго говоря, не соответствует условиям гладкости. Если же имеет место обтекание тела с отрывом потока, то границы разрыва не совпадают с контуром тела и распространяются вдоль по течению. В этом случае, внутри области разрыва необходимо включать часть пространства, занимаемого текучей средой. Метод расчета такого течения может выполняться, например, с использованием теории струй, где необходимо задавать положение границ разрыва. Несмотря на отмеченные особенности внешней задачи гидродинамики, расчет такого процесса в настоящее время выполняется с использованием уравнений движения сплошной текучей среды, при этом положение контура часто выбирается так, чтобы он не включал поперечное сечение обтекаемого тела. Такое упрощение обычно благоприятно сказывается на результатах

расчета, однако является, по сути, обходным путем, применяемым только к некоторым частным задачам.

Многие течения могут изменять свою макроструктуру при изменении некоторого параметра процесса, переходя из категории сплошной среды в категорию разрывной среды и обратно. Примером таких течений является вращающаяся жидкость, которая при изменении некоторых параметров может принять форму воронки или опять стать сплошным потоком с параболической формой свободной поверхности. Такое же свойство характерно и при возникновении/исчезновении скачка уплотнения. Наличие такого физического свойства указывает на то, что корректное математическое описание течений должно обеспечивать учет данного явления с помощью соответствующих уравнений и условий. На рис. 1.6 приведены варианты потоков различной макроструктуры и примеры некоторых частных физических процессов.

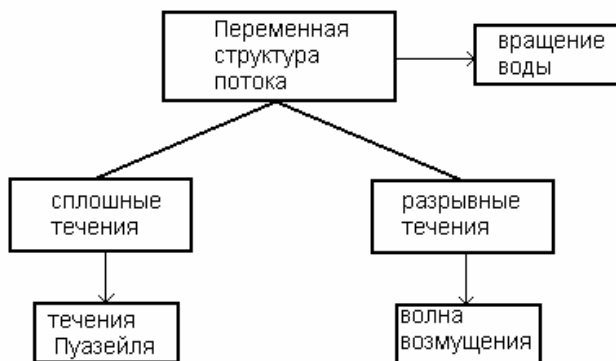


Рис. 1.6. Варианты структуры потоков и их частные случаи

Возможность перехода сплошного течения в разрывное и обратно затрудняет создание "жесткой" классификации течений, тем не менее, в ограниченных пределах изменения параметров процесса в состав

сплошной текучей среды можно включить течение однородных рабочих тел, как это представлено в технической термодинамике, и течения с различными режимами, так, как это представлено в гидродинамике. К разрывным течениям можно отнести такие, при которых возникают заметные различия в макроструктуре потока и для которых не выполняется хотя бы одно из отмеченных ранее условий [19] (рис. 1.7).

Сплошные и разрывные течения существуют в пространстве, которое интерпретируется как геометрическая область. При разрывном течении внутри области возникает граница в виде поверхности, на которой имеет место скачок некоторой функции, а при течении сплошной среды (в связи с гладкостью функций) причины для возникновения внутренних границ отсутствуют.

Таким образом, при возникновении разрыва меняется связность геометрической области, что оказывает существенное влияние на метод составления уравнений движения и на получаемые результаты.

Рассмотренные вопросы классификации относились к сплошной текучей среде, однако термин "сплошная среда" широко используется и в теории упругости.

Анализируя условия, при выполнении которых твердое тело рассматривается как сплошная среда, можно установить, что в нем не должно возникать трещин при нагружении внешними силами. При этом не требуется, чтобы функции процесса были гладкие. В теории упругости различают абсолютно твердое тело, которое жестко смещается под воздействием внешних сил, и деформированное состояние, при котором переход тела в новое состояние сопровождается изменением расстояния между отдельными его точками [11, 27, 28].

Второй вариант твердого тела в большей степени соответствует физике процессов с жидкостью и будет рассматриваться в дальнейшем.

Другие условия существования сплошной твердой среды (по сравнению с жидкостью) привели и к другим результатам расчета движения, которое чаще всего применяется в форме уравнений равновесия. В таких задачах нет ограничений на макроструктуру тела, и расчет напряженного состояния тел с полостями является вполне обычным. К числу таких задач относятся, например, задача Ламе, задача Гадолина, расчет оболочек и т. д. [27, 32].

При этом в теории упругости характерна ситуация, когда простые задачи (как правило, одномерные) решаются точно, а для более сложных задач, хорошие результаты дают численные методы.

Такие же свойства характерны и для других областей науки, например, теории теплопроводности [13].

Результаты, достигнутые в теории упругости, заманчиво использовать в механике жидкости, однако классические уравнения теории упругости являются линейными в частных производных, а уравнения гидродинамики — нелинейны, что осложняет их решение [31]. В то же время общая корректная постановка расчета в теории упругости позволяет решать и нелинейные задачи.

В настоящей работе рассматривается использование уравнений движения жидкости в напряжениях, а также аналогичные уравнения теории упругости для решения задач движения в своих областях. В результате такого сравнительного анализа на уровне вывода общих уравнений уточнены связи между ними и известными уравнениями, что в целом составляет содержание самостоятельного метода расчета движения жидкости. Этот метод, как будет показано далее, не связан явным образом с системой Навье-Стокса.

Задачу движения жидкости и твердого тела можно также рассматривать с позиций теории автоматического управления (ТАУ), которая оперирует общими понятиями, имеющими интерпретацию и в

данных задачах [25]. *Объектом*, по терминологии ТАУ этом случае, является текучая или твердая среда, а внешние силы представляют входное возмущение. Обе задачи имеют два выхода (результата), которыми, в случае твердого тела, являются поле механических напряжений и поле деформаций.

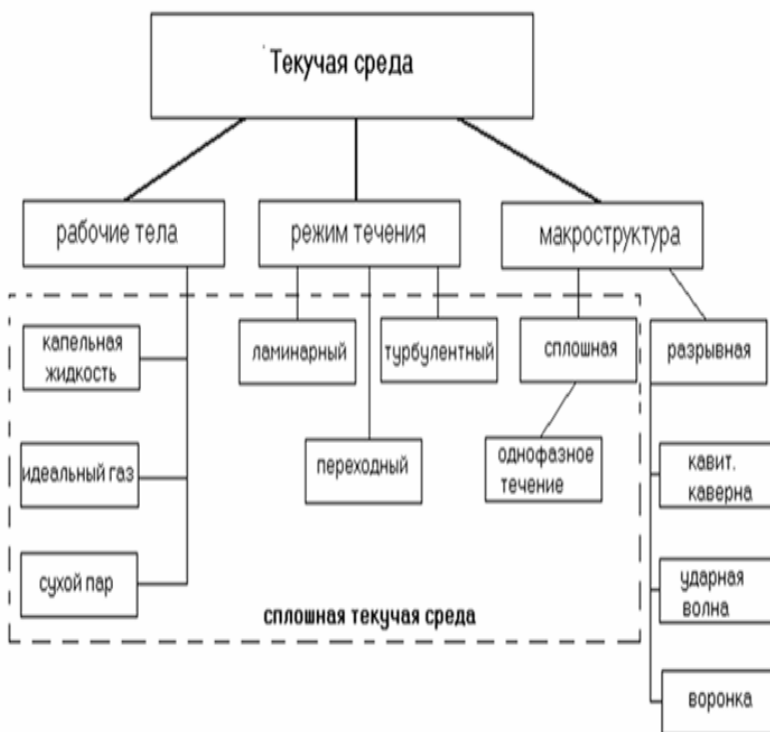


Рис. 1.7. Классификация рабочих тел с точки зрения макроструктуры

Для жидкости такими выходами (результатами) будут поле давлений и поле скоростей. Задача движения жидкости является нелинейной, а задача движения твердого тела может быть любой, в зависимости от свойств материала. В обоих случаях можно найти

использование принципа обратной связи, который требует ограничения внешних сил по условиям движения (например, по условию прочности или жесткости твердого тела или по условию ограниченности перепада давления для потока жидкости и т. д.).

Такая аналогия распространяется на дифференциальные уравнения и на их интегралы, в частности, на использование принципа суперпозиции решений, который можно использовать только в случае линейной задачи. Можно надеяться, что подходы, используемые для расчета нелинейных систем в теории автоматического управления окажутся полезными и в механике жидкости.

Анализируя схему расчета различных полей, можно заключить, что она обладает некоторыми общими свойствами, которые включают следующие компоненты:

- формулировка цели расчета;
- формирование системы понятий, достаточно полно характеризующих конкретное поле;
- составление и решение системы уравнений, связывающих эти понятия;
- сравнение результата расчета с заявленной целью, опытом, результатами расчета с помощью других методов и т. д.

Применение такой схемы к расчету движения ньютоновской жидкости с помощью системы Навье-Стокса показывает наличие отклонения, которое заключается в использовании понятий поля деформаций (деформационного движения) к расчету поля напряжений.

Выводы.

1. В основе расчета процесса движения жидкости лежит закон сохранения количества движения и его математическая интерпретация в

форме системы уравнений движения в напряжениях, которая не содержит ограничений в отношении требуемых реологических законов.

2. При выводе системы уравнений движения для ньютоновской жидкости (Навье-Стокса) не нарушены какие-либо законы физики или правила математики, однако отмеченные противоречия по физическому смыслу некоторых слагаемых и сопутствующих уравнений ограничивают декларируемую общность данной системы.

3. Существенным недостатком схемы вывода системы Навье-Стокса является нарушение логики использования корректного понятия – скорости угловой деформации малого элемента, которое является параметром деформационного движения, а используется для установления связей между параметрами другого (силового) поля. В результате, корректная схема взаимосвязей физических полей и соответствующих уравнений (рис.1.5) в механике жидкости оказывается нарушенной.

4. Использование при выводе системы Навье-Стокса приближенного уравнения для расчета среднего давления в точке дополняет число ограничений условием малости производной от скорости, $\partial u_i / \partial i = 0$, где ($i = x, y, z$).

5. В теории упругости используется система уравнений движения (Навье), которая отличается от системы уравнений движения жидкости в напряжениях отсутствием конвективного ускорения. Данная система уравнений замкнута и позволяет решать частные задачи в большом диапазоне изменения влияющих факторов. Переход от системы Навье к частным уравнениям осуществляется с помощью метода подстановки реологических уравнений для конкретной среды, связывающих касательные напряжения и деформации.

Глава 2. Метод расчета движения невязкой жидкости

2.1. Введение

Как следует из определения невязкой жидкости, в ней отсутствует процесс внутреннего трения, т. е. все частицы такой гипотетической среды должны двигаться с одинаковыми угловыми или линейными скоростями либо между движущимися слоями не должно быть трения, что подобно наличию идеальной смазки. В любом случае такая идеализированная среда отличается от реальной, а ее первый вариант получил большее распространение при рассмотрении вращающихся потоков, где часто используется термин «квазитвердое вращение» [23, 31]. В механике жидкости получил также распространение термин «идеальная жидкость», который, как будет показано далее, не эквивалентен термину «невязкая жидкость», так как содержит дополнительное допущение, относящееся к свойству нормальных напряжений.

В последующих примерах будет рассмотрен вариант движения жидкости, который предполагает наличие постоянной угловой скорости. Это условие хорошо соответствует реальности для тонких течений, например, для стенки вихревой трубки, где не может существенно проявиться процесс нелинейности.

С другой стороны, условие постоянства угловой скорости должно выполняться и при вращении твердого тела, в противном случае его нельзя считать сплошным. Совпадение условий вращения для невязкой жидкости и твердого тела дает основание использовать уравнения теории упругости для расчета течения такой жидкости.

2.2. Постановка задачи

В основу рассматриваемого метода положены уравнения движения жидкости в напряжениях (1.1) при условии пренебрежения касательными напряжениями. Эта же система уравнений может быть получена с помощью системы уравнений Навье также без касательных напряжений, но с добавлением локального ускорения в правую часть. Такое добавление приводит к учету влияния текучести, но не меняет допущений, относящихся к структуре геометрической области.

Различие между уравнениями движения в этих разделах механики видно на примере трактовки понятия сплошной среды. В механике потоков под сплошностью понимается такое состояние среды, которая полностью заполняет пространство с координатами x, y, z , а такие функции как скорость $u(x, y, z, t)$, давление $p(x, y, z, t)$ и плотность $\rho(x, y, z, t)$, — непрерывны. Таким образом, сплошная среда в гидродинамическом смысле не может иметь какие-либо полости или ту же среду со скачками этих функций.

В теории упругости под сплошностью понимается только отсутствие трещин при нагружении тела, не ограничивая при этом его макроструктуру, и, таким образом, понятие сплошности в теории упругости является более общим, чем в механике потоков [11, 27]. Оба понятия сплошности могут быть согласованы, если устремить размер полости в твердом теле к нулю. Тогда твердое тело, так же как и жидкость, будет представлять собой однородную среду с непрерывным распределением ее функций.

Одновременно, как твердая, так и жидкая среда подчиняются закону Гука, т.е. они имеют линейную зависимость между нормальными напряжениями и деформациями, что создает предпосылку для разработки метода решения задач невязкой жидкости, использующего подходы теории упругости.

Сущность этого метода заключается в формулировке и использовании условий, накладываемых на уравнение движения в напряжениях, с целью выделения частного решения для расчета сплошного или разрывного течения невязкой и идеальной жидкости. Причем эти условия можно применять как для дифференциальных уравнений, так и для их интегралов. Контрольным результатом этого метода для сплошного течения идеальной жидкости должно быть известное уравнение Эйлера, а также его решения. Новые уравнения, получаемые данным методом, нуждаются, как правило, в экспериментальной проверке.

Из системы (1.1) следует, что условию отсутствия касательных напряжений ($\tau = 0$) соответствует два варианта систем уравнений: первый вариант может быть получен путем линеаризации, а второй – путем использования допущения о независимости нормальных напряжений от положения элементарной площадки в пространстве.

2.3. Уравнения движения

В теории упругости обычно предполагается, что тело находится в состоянии медленного движения, в связи с чем в правую часть уравнений теории упругости входит ускорение, зависящее только от времени (локальная производная). В правую часть уравнений движения жидкости входит полное ускорение, например, в цилиндрических координатах, $\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r}$, которое учитывает неравномерность движения в пространстве (конвективная производная), что более точно. В результате локальную производную в уравнении Навье (1.5) или (1.6) без ущерба для смысла можно заменить на полную.

Таким образом, после дополнения правой части уравнения теории упругости приобретут вид, который, с учетом смены обозначений для

нормальных напряжений, совпадает с системой (1.1) без касательных напряжений.

С учетом системы (1.5) получим:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho R = \rho \frac{du_r}{dr}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \rho \theta = \rho \frac{\partial u_\theta}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho Z = \rho \frac{du_z}{dt}.$$

При использовании обозначений, характерных в механике жидкости ($\sigma_r = p_{rr}$, $\sigma_\theta = p_{\theta\theta}$, $\sigma_z = p_{zz}$), эта же система уравнений приобретет вид:

$$\frac{\partial p_{rr}}{\partial r} + \frac{p_{rr} - p_{\theta\theta}}{r} + \rho R = \rho \frac{du_r}{dr}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \rho \theta = \rho \frac{\partial u_\theta}{\partial t}$$

$$\frac{\partial p_{zz}}{\partial z} + \rho Z = \rho \frac{du_z}{dt}.$$

Эти системы уравнений необходимо рассматривать как математическое выражение понятия невязкая жидкость, записанное в цилиндрических координатах [18, 20, 27].

Формальный переход от системы (2.1) к системе уравнений движения идеальной жидкости (Эйлера) осуществляется, если принять

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z = -p, \quad (2.2)$$

или

$$p_{rr} = p_{\theta\theta} = p_{zz} = -p,$$

что одновременно является математическим выражением принципа независимости нормальных напряжений от ориентации элементарной площадки в идеальной жидкости и учитывает правило знаков для давления (p) и напряжения (σ или p_{ii}). Применение условия (2.2) к системе (2.1) показывает, что система уравнений Эйлера (1.3) является частным случаем системы (2.1).

2.4. Условия для разрывных течений

Большая общность системы (2.1) предполагает существование решений, не входящих в уравнение Эйлера, что требует для их нахождения формулировки других условий, отличных от (2.2) и не противоречащих свойствам жидкости. В зависимости от конкретной задачи такие условия могут быть различными, но их целью является выделение из трех напряжений одного — сжимающего, а остальные два, которые должны быть положительны, будут использоваться только для нахождения области параметров, при которых существует разрыв сплошности. Поскольку напряжения по всем направлениям в общем случае равноценны, существуют три варианта таких условий, которые можно записать в виде матрицы:

$$\begin{vmatrix} \sigma_r < 0 & \sigma_\theta > 0 & \sigma_z > 0 \\ \sigma_r > 0 & \sigma_\theta < 0 & \sigma_z > 0 \\ \sigma_r > 0 & \sigma_\theta > 0 & \sigma_z < 0 \end{vmatrix}. \quad (2.3)$$

Учитывая, что $\sigma = -p$, главную диагональ матрицы (2.3) можно представить в форме давлений.

Тогда условия (2.3) примут вид:

$$\begin{vmatrix} p & \sigma_\theta > 0 & \sigma_z > 0 \\ \sigma_r > 0 & p & \sigma > 0 \\ \sigma_r > 0 & \sigma_\theta > 0 & p \end{vmatrix}. \quad (2.4)$$

При расчете движения только разрывных потоков отсутствует необходимость в определении области параметров, при которых существует разрыв и условия (2.4) приводятся к виду

$$\begin{matrix} & r & \theta & z \\ r & \left| \begin{array}{ccc} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{array} \right| \\ \theta & & & \\ z & & & \end{matrix}. \quad (2.5)$$

которые, как и условия (2.4), должны применяться к системе (2.1).

2.5. Связи между уравнениями движения

Уравнения системы (2.1) могут быть получены из исходной системы уравнений вязкой жидкости (1.1) при пренебрежении касательными напряжениями ($\tau = 0$). Далее существует два пути решения задачи, отличающиеся общностью используемых допущений (рис. 2.1). Наиболее полным и информативным является путь, требующий интегрирования системы (2.1), который позволяет определить возможность существования течения в сплошной или разрывной форме, а также найти условия перехода одного течения в другое. Второй путь

использует дополнительное допущение о безусловном существовании сплошного или разрывного течения при любом наборе влияющих факторов. Переход от системы (2.1) к дифференциальным уравнениям сплошного или разрывного течения осуществляется при использовании соответствующих условий (2.2) или (2.3). Этот путь имеет меньшую информативность результата, но проще для реализации.

Интегрирования системы (2.1), так же как и системы (1.5) или (1.6) без касательных напряжений, могут осуществляться методом повышения порядка, что приводит к появлению нескольких произвольных постоянных [11, 27]. Применение к полученным решениям различных условий, например (2.4) и (2.5), может привести к потере единственности решения конкретной задачи. Такая негативная возможность требует наличия способа, позволяющего выделить из нескольких решений одно, удовлетворяющее условиям течения невязкой жидкости. Для сплошного течения эту задачу решает уравнение Эйлера, превращаясь в тождество при подстановке в него истинного решения.

По аналогии со схемой расчета сплошного течения, в тождество должны превратиться уравнения, полученные из системы (2.1) с помощью условий (2.5), при подстановке в них решения для только разрывного течения.

Взаимосвязь различных уравнений метода между собой можно иллюстрировать следующей схемой (рис. 2.1), в которой показано место каждого уравнения, условия и варианты расчета.

Рассмотрим пример применения данного метода для задачи о вращающейся жидкости, находящейся в состоянии относительного равновесия, при наличии и отсутствии внутренней полости. Эта задача хорошо известна для случая сплошного течения, что позволит сопоставить и проанализировать результаты использования рассматриваемого метода.

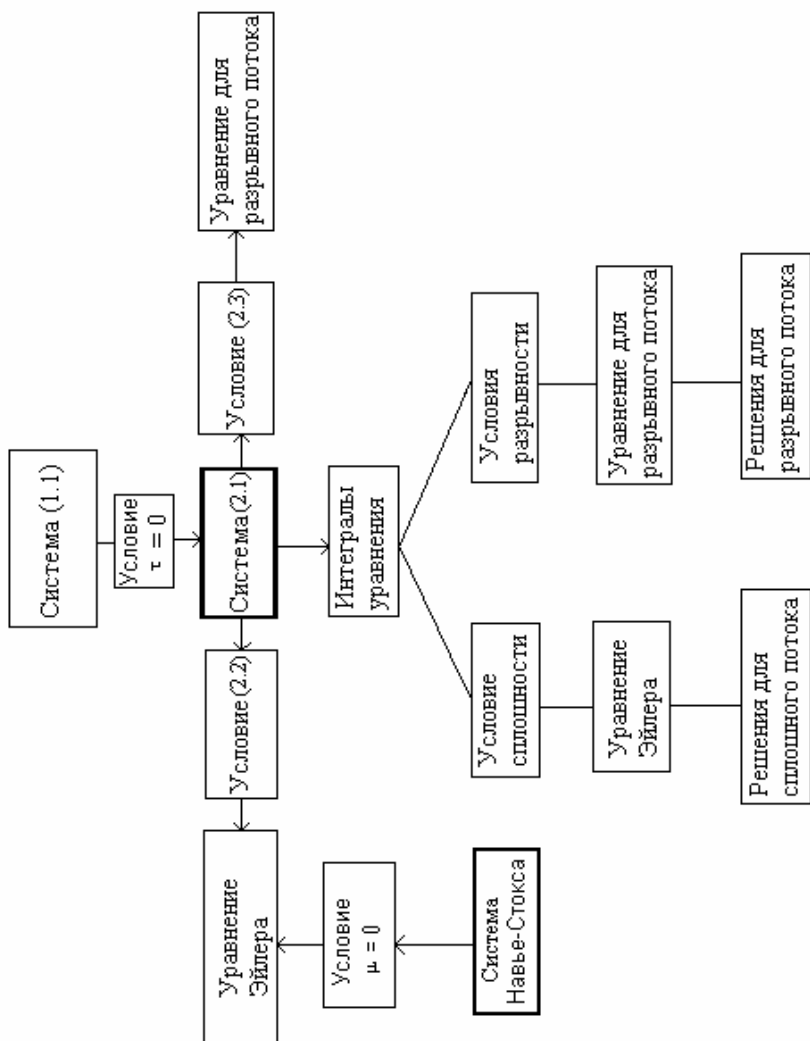


Рис. 2.1. Схема связей между уравнениями движения невязкой жидкости

2.6. Вращающаяся жидкость

2.6.1. Введение

К данной задаче неоднократно обращались различные исследователи, рассматривая ее с различных точек зрения [2, 15, 25, 31]. Такой интерес вызван повышенной плотностью энергии вращающегося потока, наличием различных неустойчивостей, которые затрудняют его экспериментальное изучение, а также возникновением различных дополнительных эффектов как положительного, так и отрицательного характера.

В основе теоретического описания процесса вращения лежит частный случай уравнения Эйлера и его точное решение, анализ которого позволяет описать основную часть наблюдаемых эффектов. Область применения этого решения весьма широка, но может быть распространена только на сплошную текучую среду, т.е. до тех пор пока в жидкости не образуется воронка.

Анализ этого решения проводится в основном на примере капельной жидкости, полагая, что в газах и парах процесс осуществляется аналогично.

В теории упругости хорошо известны методы, позволяющие находить распределение упругих напряжений в твердых телах, имеющих сплошное и разрывное поперечное сечение, что создает принципиальную возможность использования накопленных в этой области знаний для получения уравнений механики потоков, учитывающих влияние нарушения сплошности. Таким образом, метод расчета данной задачи основан на использовании известного подхода, разработанного в теории упругости.

2.6.2. Уравнения движения

Рассмотрим использование данного метода на примере нахождения уравнений движения невязкого вихря с помощью уравнения для распределения нормальных напряжений во вращающемся твердом диске, учитывая при этом влияние основных отличительных факторов. К их числу относятся распределение скорости вдоль радиуса, независимость нормальных напряжений в жидкости от ориентации элементарной площадки, другие граничные условия и т. д.

Например, для твердого диска скорость линейно зависит от радиуса, а давление на его внешней границе равно давлению окружающей среды, в то время как плоское сечение вихря может быть представлено в виде двух областей, имеющих различный закон изменения скорости вдоль радиуса. Обычно выделяют квазитвердое ядро с линейным распределением скорости и переходную область между ядром и неподвижной окружающей средой, в которой скорость изменяется по гиперболическому закону [8, 10, 31].

Рассмотрим уравнение для расчета распределения напряжений в твердом вращающемся диске в виде [18, 28, 32].

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho\omega^2 r = 0, \quad (2.6)$$

где σ_r , σ_θ — радиальное и окружное напряжения соответственно, ρ — плотность, ω — угловая скорость, r — текущий радиус.

Как известно, решение уравнения (2.6) имеет вид [32]:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} \left[C_1(1+\mu) - C_2(1-\mu)\frac{1}{r^2} \right] - \frac{\rho\omega^2}{8}(3+\mu)r^2,$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{E}{1-\mu^2} \left[C_1(I+\mu) + C_2(I-\mu) \frac{I}{r^2} \right] - \frac{\rho\omega^2}{8} (3+\mu)r^2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, E — модуль упругости, μ — коэффициент Пуассона.

Найдем значения констант C_1 и C_2 при следующих граничных условиях: при радиусе $r = a$, $\sigma_r = -p_a$, а при $r = b$, $\sigma_r = -p_b$. Подставляя выражения для констант в общее решение, найдем после преобразований распределение напряжений в диске.

$$\sigma_r = \frac{\rho\omega^2}{8} (3+\mu) \left(a^2 + b^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2} - r^2 \right) + \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} + \frac{p_b - p_a}{b^2 - a^2} \frac{a^2 b^2}{r^2}, \quad (2.7)$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{\rho\omega^2}{8} (3+\mu) \left(a^2 + b^2 + \frac{a^2 b^2}{r^2} - \frac{1+3\mu}{3+\mu} r^2 \right) + \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} - \frac{p_b - p_a}{b^2 - a^2} \frac{a^2 b^2}{r^2}, \quad (2.8)$$

где a и b — соответственно внутренний и внешний радиусы, p — давление [2].

Из уравнений (2.7) и (2.8) можно получить решения, известные в теории упругости. Например, при отсутствии вращения ($\omega=0$) получим уравнение распределения напряжений, характерное для задачи Ламе, а при отсутствии избыточных давлений внутри и снаружи диска второе и третье слагаемые исключаются, и эти уравнения приводятся к известным уравнениям для вращающихся труб или дисков [28, 32].

Пользуясь (2.7) и (2.8), найдем распределение напряжений вдоль радиуса сплошного диска. Тогда при $a = 0$:

$$\sigma_r = \frac{\rho\omega^2}{8}(3 + \mu)(b^2 - r^2) - p_b, \quad (2.9)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\rho\omega^2}{8}(3 + \mu)\left(b^2 - \frac{1 + 3\mu}{3 + \mu}r^2\right) - p_b. \quad (2.10)$$

Как известно, нормальное напряжение в жидкости не зависит от ориентации элементарной площадки, т. е. поперечные ($\sigma_{\text{попер}}$) и продольные ($\sigma_{\text{прод}}$) напряжения должны быть одинаковы. Из этого следует, что для этой модели течения коэффициент Пуассона $\mu = \varepsilon_{\text{попер}} / \varepsilon_{\text{прод}} = \sigma_{\text{попер}} / \sigma_{\text{прод}}$ должен быть принят равным единице, что отличается от максимального значения коэффициента Пуассона в теории упругости, который равен 0,5 [28, 32].

Другим отличием процесса вращения вихря от вращения твердого диска является наличие эффекта Бернулли, в результате чего давление на внешней поверхности квазитвердого ядра меньше, чем давление в окружающей среде p_∞ [24, 31, 32].

Тогда, с учетом $\mu = 1$ и при

$$p_b = p_\infty - \frac{\rho\omega^2 b^2}{2},$$

уравнения (2.9) и (2.10) совпадают и приводятся к виду:

$$\sigma_r = \frac{\rho\omega^2}{2}(b^2 - r^2) - p_b. \quad (2.11)$$

Так как в рассматриваемой задаче касательные напряжения отсутствуют, то $\sigma_r = -p$ и последнее уравнение можно записать в форме давлений.

$$p = p_{\infty} - \frac{\rho\omega^2}{2}(2b^2 - r^2). \quad (2.12)$$

Уравнение (2.12) является частным решением уравнения $dp = \rho\omega^2 r dr$, найденным в гидродинамике другим способом для вихря со сплошным поперечным сечением [31,33]. Возможность получения уравнения (2.12) с помощью уравнения теории упругости (2.6) указывает, что между распределением напряжений в сплошном диске и в сплошном вихре существует аналогия.

Распространим полученные результаты на вращение вихря с центральной полостью. Эта задача осложнена наличием двухсвязного контура, однако, как показано в работе [11, 28], используемый метод решения позволяет его применять и для этого случая.

Тогда, полагая коэффициент Пуассона $\mu = 1$, из (2.7) и (2.8) получим:

$$\sigma_r = \frac{\rho\omega^2}{2} \left(a^2 + b^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2} - r^2 \right) + \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} + \frac{p_b - p_a}{b^2 - a^2} \frac{a^2 b^2}{r^2}, \quad (2.13)$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{\rho\omega^2}{2} \left(a^2 + b^2 + \frac{a^2 b^2}{r^2} - r^2 \right) + \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} - \frac{p_b - p_a}{b^2 - a^2} \frac{a^2 b^2}{r^2}. \quad (2.14)$$

Поскольку напряжение в точке невязкой жидкости не может иметь двух значений и должно быть сжимающим, то для существования полого вихря необходимо решить, какое из двух напряжений рассматриваемой плоской задачи является определяющим. Соответственно второе напряжение будет использоваться для нахождения значений параметров, при которых существует разрыв. Так как воронка представляет собой

разрыв в радиальном направлении, выберем в качестве условия первую строку матрицы (2.3).

$$\sigma_r < 0 \text{ и } \sigma_\theta > 0, \quad (2.15)$$

где σ_r — радиальное напряжение, σ_θ — окружное напряжение.

Возможность существования такой комбинации влияющих факторов, для которых выполняются условия (2.15), иллюстрируется расчетным распределением радиальных и окружных напряжений для водяного вихря с полостью (воронкой), находящейся при атмосферном давлении (рис. 2.2). Графики построены по уравнениям (2.13) и (2.14). При этом предполагалось, что увлечение во вращение среды, находящейся в полости, незначительно, и им пренебрегалось. Характерно, что область расчетных параметров узкая, и некоторое изменение размеров a , b , угловой скорости ω и др. приводит к существенному изменению графиков рис. 2.2.

Рассмотренный пример показывает, что уравнение (2.6) позволяет найти распределение давления в теле вихря произвольной макроструктуры. В то же время часто встречаются задачи, когда заранее известна макроструктура вихря, например, сплошная или полая. В этом случае, вводя дополнительное допущение о структуре, получим:

- для сплошного вихря, на основании применения условия $\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma$ к уравнению (2.6)

$$\frac{d\sigma}{dr} + \rho\omega^2 r = 0$$

или в форме давлений

$$\frac{dp}{dr} = \rho\omega^2 r,$$

которое совпадает с известным [31, 33, 34];

- для полого вихря, на основании применения условия $\sigma_r < 0$ (σ_θ при этом необходимо исключить, т. к. оно не может быть растягивающим по определению) к уравнению

$$\frac{d\sigma}{dr} + \frac{\sigma}{r} + \rho\omega^2 r = 0 \quad (2.16)$$

или в форме давлений ($\sigma = -p$)

$$\frac{dp}{dr} + \frac{p}{r} = \rho\omega^2 r. \quad (2.17)$$

Уравнения (2.16), (2.17) могут быть получены другим путем, основанным на использовании уравнения равновесия, примененного к тонкому кольцу, находящемуся в ядре квазитвердого вихря (2.19) [4].

Данные результаты можно использовать для решения двумерной задачи о водяной воронке, дополнив уравнение (2.16) третьим уравнением системы Навье (1.5 или 1.6) в виде $\frac{\partial \sigma}{\partial z} + \rho Z = 0$.

Это уравнение или его интеграл в форме давлений $p = p_0 + \rho \cdot g \cdot h$ (где h — глубина погружения под свободной поверхностью) указывает на гидростатический закон распределения давления в жидкости, где возникла воронка.

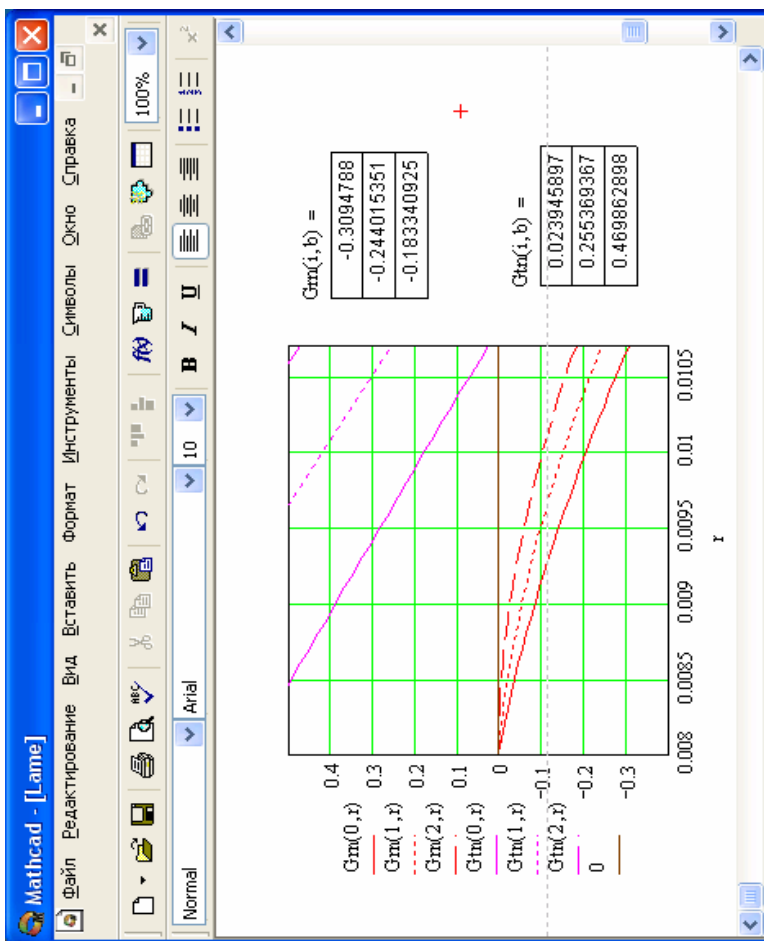


Рис. 2.2. Расчетное распределение радиальных σ_r ($G_{tn}0, 1, 2$) и окружных σ_θ ($G_{tn}0, 1, 2$) напряжений, отнесенных к динамическому давлению $0.5(\rho\omega^2b^2)$ для водяной воронки.

$a = 8 \text{ мм}$ $b = 10,7 \text{ мм}$, $p_a = 0$, $p_\infty = 1000 \text{ Па}$. Кривые 1, 4 - $\omega = 115,5 \text{ 1/с}$,
 2, 5 - $\omega = 118,5 \text{ 1/с}$, 3, 6 - $\omega = 121,5 \text{ 1/с}$.

Выводы

1. В результате решения задачи о вращающейся жидкости появилась возможность находить распределение давления по радиусу сплошного вращающегося потока, а также в стенке вихревой трубки. Такой подход позволяет учесть процесс перехода сплошного вращающегося течения в течение с полостью и обратно. Показано, какие факторы и в какой степени влияют на процесс такого перехода.

2. Уравнения (2.13)...(2.15) могут быть использованы для нахождения условий, при которых отсутствует воронкообразование, или для решения обратной задачи, связанной с разработкой энергетических установок, генерирующих разнообразные полые вихри с целью использования их свойств.

2.7. Вихревая трубка

2.7.1. Общие положения

Для составления дифференциального уравнения движения рассмотрим баланс сил в центральной части вихревой трубки, т. е. исключим из рассмотрения эффекты, возникающие на торцах, которые находятся вблизи стенок, где проявляется влияние вязкого трения. Приведенная ниже расчетная схема в форме трубчатой поверхности имеет такую же систему геометрических обозначений, как и для расчета процесса переноса теплоты через цилиндрическую стенку в задачах теплопроводности [13].¹

¹. При составлении дифференциальных уравнений в рамках сплошной текучей среды обычно всегда выполняется условие соответствия связности геометрической области интегрального объекта и малого элемента. При составлении уравнений, где интегральная область имеет 2-х, 3-х или большую связность, вопрос о форме малого элемента приобретает большую актуальность. При выводе уравнения движения вихревой трубки, а также при последующем использовании

Уравнение движения для такой расчетной схемы можно получить двумя путями: с помощью системы (2.1) и непосредственным применением к расчетной схеме закона сохранения количества движения в форме уравнения равновесия.

Полагая, что течение одномерное и стационарное, а радиальный разрыв существует при любом наборе влияющих факторов, применим первое условие матрицы (2.5) к системе (2.1).

Тогда получим, что $\sigma_r = -p$, $\sigma_\theta = 0$, $\sigma_z = 0$. Обозначая $p_r = p$ и учитывая известное выражение для центробежных сил, получим уравнение (2.16).

Для реализации второго пути выделим в стенке вихревой трубки элементарную цилиндрическую поверхность толщиной dr , находящуюся на расстоянии r от оси вращения.

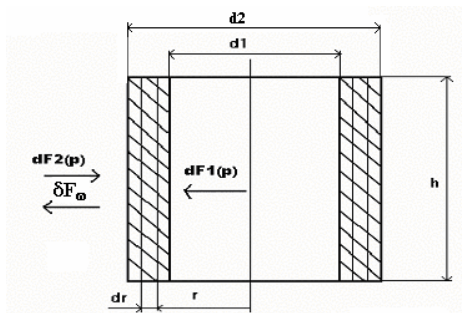


Рис. 2.3. Расчетная схема для сил, действующих на центральную часть вихревой трубки

этого подхода используется условие равенства связности малого элемента и интегральной геометрической области. При невыполнении этого условия возникает противоречие с опытом, например, уравнения движения однофазной среды и многофазной оказываются одинаковыми. На необходимость учета связности указывает также отсутствие гомеоморфности геометрических областей (кольца и окружности), в пределах которых выполняется интегрирование [Болтянский В. Г., Ефремович В. А. Наглядная топология. М., ГРФМЛ, 1982].

На выделенный элемент действуют три силы: сила инерции, возникающая в связи с вращением элемента, сила давления, приложенная к наружной поверхности и сжимающая цилиндрическую поверхность, и сила давления, приложенная к внутренней поверхности малого элемента. Уравнение равновесия малого элемента имеет вид:

$$\delta F_p + \delta F_\omega = 0, \quad (2.18)$$

где $\delta F_\omega = \pi \rho h [(r + dr)^2 - r^2] \omega^2 r = 2\pi \rho h \omega^2 r^2 dr$ — сила инерции, действующая на малый элемент;

$\delta F_p = 2\pi h [rp - (r + dr)(p + dp)] = -2\pi h (r \cdot dp + p \cdot dr)$ — равнодействующая сил давления.

Подставляя полученные выражения в уравнение силового баланса, получим:

$$\frac{dp}{dr} + \frac{p}{r} = \rho \omega^2 r. \quad (2.19)$$

Данное уравнение отличается от уравнения Эйлера $\frac{dp}{dr} = \rho \omega^2 r$ наличием дополнительного слагаемого, что меняет физический смысл уравнения (2.19) — центробежная сила уравнивает полную силу давления, в отличие от формулировки решения уравнения Эйлера — центробежная сила уравнивает градиент силы давления. При этом под полным давлением понимается сумма постоянного (неизменного) вдоль радиуса давления и переменного, которое меняется вдоль радиуса при возникновении вращения (рис. 2.4). Различие между уравнениями и их формулировками приводит к тому, что в случае сплошного вращающегося течения, возникает необходимость уравновесить не только

градиент давления (т. е. переменную вдоль радиуса величину), но и ее постоянную составляющую. Поскольку (согласно уравнению Эйлера) центробежная сила постоянную составляющую силы давления не уравнивает, необходима еще одна (дополнительная) сила, роль которой выполняет, например, реакция стенки трубы R (рис. 2.4).

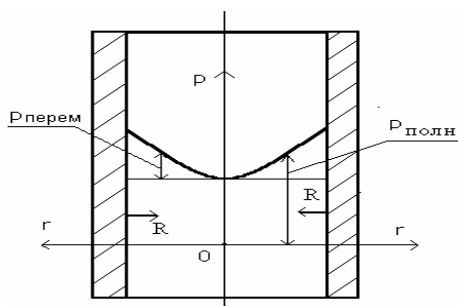


Рис. 2.4. Схема распределения давления в закрученном потоке, движущемся в трубе

Роль реакции стенки можно оценить при рассмотрении истечения закрученного потока из трубы. В связи с исчезновением стенки и ее реакции радиус потока возрастает до его полного распада. Причина расширения — наличие центробежной силы при отсутствии уравнивающей силы. Таким образом, наличие стенки является обязательным условием существования сплошного вращающегося течения. Эта же особенность сплошного потока играет важную роль в различных теплотехнических устройствах. В связи с наличием контакта между потоком и стенкой ее температура близка к температуре потока. Это приводит к тому, что свойства материала стенки в значительной степени определяют максимальную температуру потока, а это, в свою очередь, ограничивает эффективность работы, например, тепловых двигателей, эффективность которых существенно зависит от температуры горячего источника (в связи с требованиями теоремы Карно) [16, 21].

Таким образом, реализовать достоинства потоков с высокой температурой при использовании сплошного течения не представляется возможным.

2.7.2. Несжимаемая трубка

Для условия постоянной плотности ($\rho = const$), линейное неоднородное уравнение (2.19) может быть решено с использованием интегрирующего множителя. Так как $\mu(r) = \exp\left(\int \frac{1}{r} dr\right) \quad \mu(r) = r$,

общее решение примет вид:

$$p(r) = \frac{1}{r} \left[\left(\int \rho \omega^2 r \right) r \cdot dr + C_0 \right]$$

или

$$p(r) = \frac{\rho \omega^2 r^2}{3} + \frac{C_0}{r} . \quad (2.20)$$

Это первое (общее) решение уравнения (2.18), второе решение - особое, имеет вид: $p = 0$ при $r = 0$.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию общего решения, полагая, что произвольная постоянная C_0 в общем случае может иметь любой знак. Зададим возможные параметры вихря при постоянной угловой скорости ω , плотности ρ и произведем анализ влияния произвольной постоянной C_0 с помощью пакета Mathcad (фрагмент расчета приведен ниже).

Анализ графика рис. 2.5 показывает, что разрывная структура вихря (наличие полости) усложняет характер распределения давления в стенке, которое в общем случае может меняться по одному из трех законов. При этом расчетные значения давления могут принимать отрицательные значения, что физически невозможно. Для последнего случая это

означает, что такие вихри, в некотором диапазоне размеров, плотностей и скоростей вращения, существовать не могут.

Для вихря с положительной постоянной интегрирования имеется минимум давления. Оценим значение радиуса вихря при минимуме давления.

$$\text{Дифференцируя уравнение (2.20), получим: } \frac{dp}{dr} = \frac{2\rho\omega^2 r}{3} + C_0 \ln(r) .$$

Так как в точке с минимальным давлением, $dp/dr = 0$ определим радиус R_{min} с помощью пакета Mathcad на примере водяной воронки.

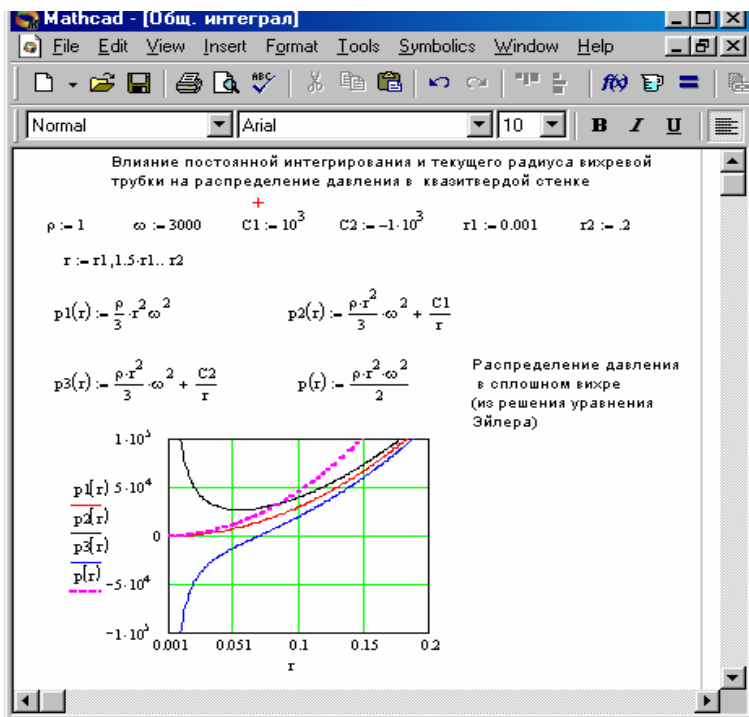


Рис. 2.5. Различный характер изменения давления для различных видов вихрей

В случае сплошного вихря, согласно решению уравнения Эйлера, распределение давления может быть только параболическим, причем с бóльшим коэффициентом параболы, чем для вихря с полостью. На рис.2.5 показаны все четыре варианта распределения давления в вихрях обоих видов.

Найдем частное решение уравнения (2.19) с целью определения отношения давления во внутренней полости трубки p_1 к давлению на наружной поверхности p_2 .

Полагая, что при $r = r_1$, $p = p_1$, а при $r = r_2$, $p = p_2$, исключим произвольную постоянную C_0 из (2.20).

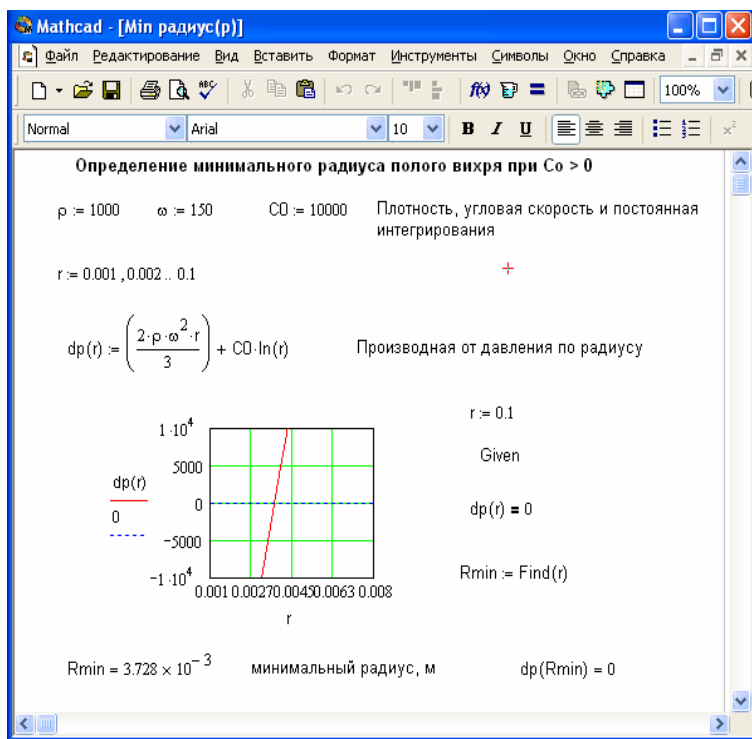


Рис. 2.6. Оценка параметров воронки для случая минимума давления

$$p_1 r_1 - \frac{\rho \omega^2 r^3}{3} = p_2 r_2 - \frac{\rho \omega^2 r^3}{3}$$

и найдем отношение давлений

$$\frac{p_1}{p_2} = \bar{r} - \frac{\rho V_2^2}{3 p_2} \left(\bar{r} - \frac{1}{\bar{r}^2} \right), \quad (2.21)$$

где $\bar{r} = r_2 / r_1$ — относительный радиус вихревой трубки, V_2 — скорость вращения внешней поверхности.

Оценим влияние относительной толщины стенки и скорости вращения применительно к водяной воронке.

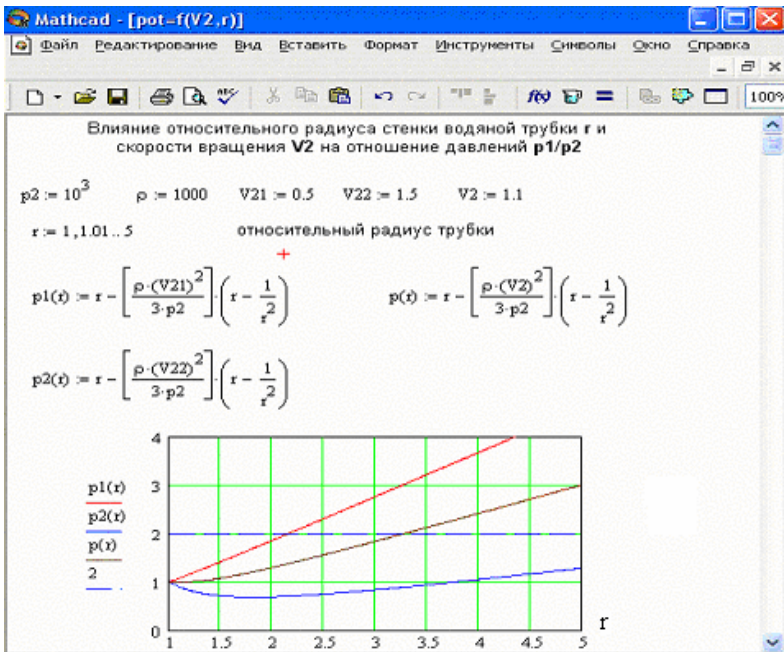


Рис. 2.7. Характер влияния относительного радиуса водяной вихревой трубки и скорости вращения на отношение давления во внутренней полости к давлению на внешней поверхности

Как следует из графиков, отношение давлений меняется сложным образом, и при некоторых скоростях появляется возможность устойчивого вращения, т. к. расчетное давление внутри полости становится меньше наружного. Например, при заданном наружном избыточном давлении $p_2 = 0.1 \text{ м.Н}_2\text{О}$ приблизительное значение скорости V_2 , при которой расчетное отношение давлений становится меньше единицы, имеет порядок 1 м/с . Так как вода является тяжелой жидкостью, при ее истечении из донного отверстия автоматически возникает разность давлений между внутренней полостью и наружной поверхностью жидкости, которая, при наличии закрутки необходимой величины, может привести к возникновению воронки. Качественный эксперимент, проведенный в таких условиях, согласуется с расчетом (Гл. 4).

2.7.3. Политропная трубка

Рассмотрим решение уравнения для случая квазитвердого вращения вихря идеального газа при наличии политропного процесса [16].

Тогда, при $p/\rho^n = \text{const}$, плотность ρ будет равна $\rho = p_2^{\frac{n-1}{n}} p^{1/n} / (RT_2)$, а уравнение (2.19) примет вид:

$$\frac{dp}{dr} + \frac{p}{r} = C_{\omega} p^{\frac{1}{n}} r, \quad (2.22)$$

где $C_{\omega} = p_2^{\frac{n-1}{n}} \omega^2 (RT_2)$ — константа уравнения.

Уравнение (2.22) является дифференциальным уравнением Бернулли и имеет аналитическое решение. При введении

вспомогательной величины $z = p^{\frac{n-1}{n}}$ оно приводится к виду $z' + \frac{n-1}{n} \frac{z}{r} = \frac{n-1}{n} C_{\omega} r$ и может быть проинтегрировано традиционным способом.

Для сокращения вычислений воспользуемся символическими возможностями пакета Maple. Фрагмент программы расчета приведен на рис. 2.8.

```

> ode1:=diff(p(r),r)+p(r)/r=Cid*(p(r)^(1/n))*r;
ode1 = (d/d r p(r)) + p(r)/r = Cid p(r)^(1/n) r
> ans:=dsolve(ode1,[Bernoulli]);
ans = p(r) = r^(1/n) * (3 Cid r^(2n-1) / (n^2 r - 4 Cid r^(2n-1)) + Cid r^(2n-1) / (n r - Cid n^2 r^(3n-1)) + Cid r^(2n-1) / (r(6n^2 - 5n + 1)))^(n/(n-1))
> simplify(ans,assume=prop);
p(r) = r^(1/n) * (3 r^(1/n) Cid n + Cid r^(3n-r) Cid - Cid r^3) / ((3n-1)r)^(n/(n-1))

```

Рис. 2.8. Фрагмент программы для символического решения дифференциального уравнения одномерной газовой вихревой трубки

После окончательного упрощения последнего уравнения (рис. 2.8) получим:

$$p(r) = \left[\frac{n-1}{3n-1} C_{\omega} r^2 + \frac{C_0}{r^{\frac{n-1}{n}}} \right]^{\frac{n}{n-1}}. \quad (2.23)$$

Пользуясь известным из термодинамики соотношением между давлениями и температурами

$$\frac{T(r)}{T_2} = \left[\frac{p(r)}{p_2} \right]^{\frac{n-1}{n}},$$

получим

$$T(r) = T_2 p_2^{\frac{1-n}{n}} \left(\frac{n-1}{3n-1} C_{\omega} r^2 + \frac{C_0}{r^{\frac{n-1}{n}}} \right). \quad (2.24)$$

Найдем отношение давления на внутренней границе p_1 к давлению на внешней границе p_2 .

Полагая, что при $r = r_1$, давление $p = p_1$, а температура $T = T_1$. Аналогично, для радиуса $r = r_2$, $p = p_2$ и $T = T_2$.

Тогда

$$\frac{p_1}{p_2} = \left[C_q \left(1 - \bar{r}^{\frac{3n-1}{n}} \right) + \bar{r}^{\frac{n-1}{n}} \right]^{\frac{n}{n-1}}, \quad (2.25)$$

$$\frac{T_1}{T_2} = C_q \left(1 - \bar{r}^{\frac{3n-1}{n}} \right) + \bar{r}^{\frac{n-1}{n}}, \quad (2.26)$$

где $\bar{r} = r_2 / r_1$ — относительный радиус стенки вихревой трубки,

$C_q = \frac{n-1}{3n-1} \frac{V_1^2}{RT_2} = \frac{n-1}{3n-1} \frac{V_2^2}{\bar{r}^2 RT_2}$ — константа политропного вихря, V_1 и V_2

— линейные скорости вращения границ вихревой трубки.

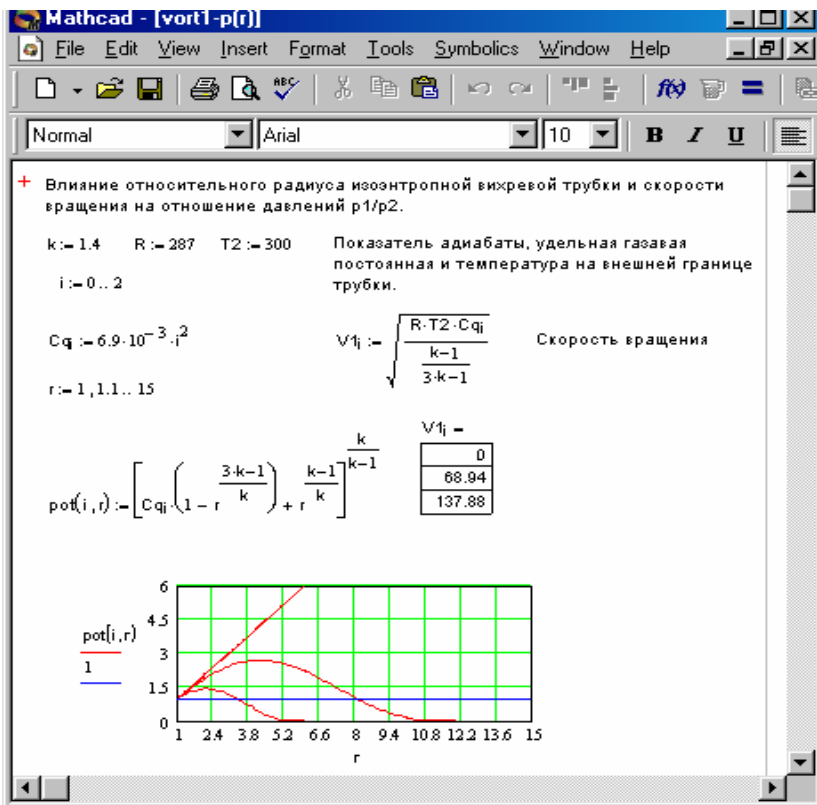


Рис. 2.9. Фрагмент программы для оценки влияния скорости вращения на отношения давлений в изоэнтропной вихревой трубке.

На рис. 2.9 показано влияние относительного радиуса \bar{r} и константы C_q на отношение давлений и температур в изоэнтропном вихре (расчет проведен с использованием пакета Mathcad).

Из данного графика следует, что существует область параметров вращения, при которых расчетное давление внутри вихря больше, чем снаружи ($p_1 > p_2$), что исключает самопроизвольное возникновение

(существование) вихревой трубки. Как следует из баланса сил, должно быть обратное соотношение между давлениями, т. е. $p_1 < p_2$. Выполнить это условие можно только с помощью использования внешнего источника энергии, который обеспечит необходимое соотношение давлений, т. е. $0 < p_1 / p_2 < 1$. Это означает, что внешний источник должен уменьшить давление внутри вихря на относительную величину $[(p_1 / p_2)_{расч.} - 1]$. Это условие накладывает ограничение на параметры вихревой трубки, при которых возможно ее существование. Как известно, разрежение, создаваемое во всасывающем патрубке нагнетателя, не может быть больше атмосферного давления ($9.81 \cdot 10^4$ Па), т. е. область расчетных параметров вихря должна быть $(p_1 / p_2)_{расч.} < 2$. В противном случае нельзя будет достичь области устойчивого существования вихря в атмосфере при использовании любого нагнетателя. Как видно из рис. 2.9, расчетные значения отношения давлений $(p_1 / p_2)_{расч.}$ могут значительно выходить за допустимую границу ($p_1 / p_2 = 2$).

Графически область устойчивого существования вихря будет изображаться фигурой, заключенной между изобарой $p_1 / p_2 = 1$ и смещенной на единицу кривой, рассчитанной по формуле (2.25). Необходимо отметить, что для одних и тех же параметров вращения могут существовать две области устойчивости: первая — при малых относительных радиусах (r_2 / r_1) и росте функции $p_1 / p_2(r_2 / r_1)$, а вторая — при больших относительных радиусах и уменьшении $p_1 / p_2(r_2 / r_1)$.

Уравнение распределения давления (2.25) не может быть применено для значения показателя политропы $n = 1$, т. е. для изотермического процесса. Для нахождения искомой функции необходимо вернуться к дифференциальному уравнению (2.19) и выразить плотность идеального газа через известное термодинамическое

уравнение, $\rho = \frac{p}{RT}$ (где R — удельная газовая постоянная). Тогда уравнение движения для изотермического вихря примет вид:

$$\frac{dp}{dr} + \frac{p}{r} = \frac{p}{RT} \omega^2 r \quad . \quad (2.27)$$

Умножая левую и правую части уравнения на $\frac{dr}{p}$ и производя

упрощения, получим уравнение в виде $\frac{dp}{p} = \frac{\omega^2}{RT} r \cdot dr - \frac{dr}{r}$, которое имеет

общий интеграл: $\ln p = \frac{\omega^2}{2RT} r^2 - \ln r + C_0$.

Зададим прежние граничные условия в виде: при $r = r_1$, $p = p_1$, а при $r = r_2$, $p = p_2$. Тогда, исключая произвольную постоянную, найдем отношение давления в полости к давлению на внешней границе:

$$\frac{p_1}{p_2} = \bar{r} \cdot \exp\left(\frac{V_2^2}{2RT} (\bar{r}^{-2} - 1)\right), \quad (2.28)$$

где V_2 — линейная скорость на внешней границе, $\bar{r} = \frac{r_2}{r_1}$ —

относительный радиус стенки вихревой трубки.

На рис. 2.10 показан характер изменения отношения давлений p_1/p_2 как функция отношения радиусов стенки и константы изотермического вихря $C_t = V_2^2/(2RT)$.

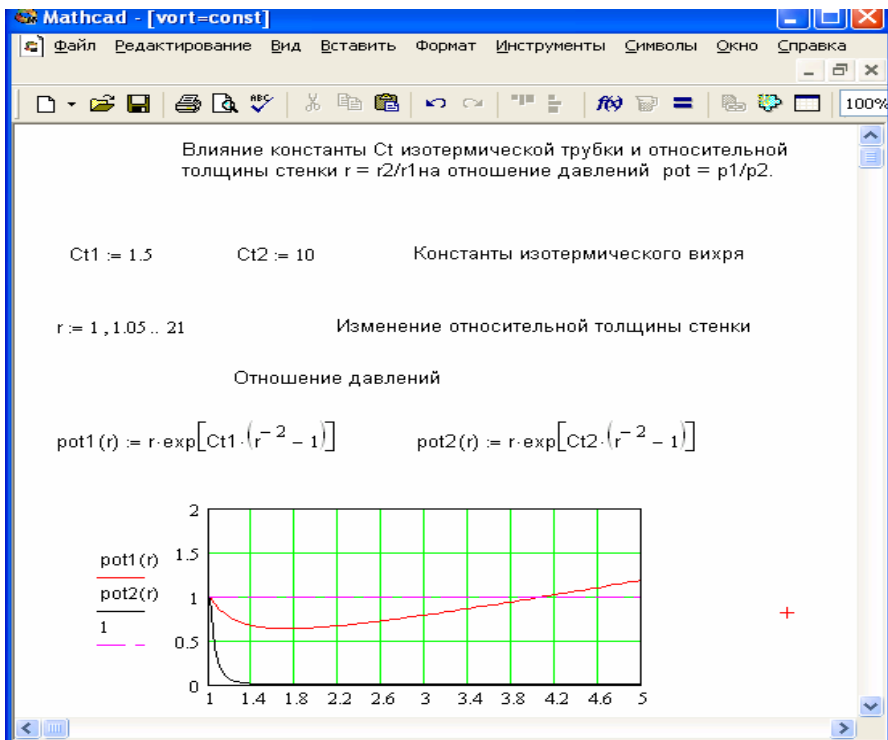


Рис. 2.10 Влияние константы изотермического вихря на отношение давлений

2.7.4. Сравнительный анализ вихревых трубок

1. Газовые вихревые трубки. На рис. 2.11 показано влияние относительного радиуса стенки трубки и показателя политропы на отношение давлений при постоянной скорости вращения и температуре на наружной поверхности. Из сравнения следует, что характер зависимости $\frac{p_1}{p_2} = f\left(\frac{r_2}{r_1}, n\right)$ существенно меняется в зависимости от показателя политропы n , причем при $n > 1$ перепад давления

существенно уменьшается вплоть до таких значений относительного радиуса, при которых существование вихревой трубки невозможно.

Показатель политропы оказывает существенное влияние на отношение давлений и температур, особенно вблизи точки разрыва функции при $n = 1$ (на рис. 2.12 показаны кривые отношения давлений и температур в зависимости от показателя политропы). При больших или малых значениях показателя политропы отношение давлений и температур меняется слабо. Ниже приведен пример оценки влияния показателя политропы на отношение давлений и температур, выполненный с использованием пакета Mathcad.

Приведенные уравнения позволяют оценить скорость вращения вихревой трубки, исходя из возможности ее устойчивого существования. Однако для выполнения такого расчета необходимо разрабатывать специальную методику в связи с большим числом сильно влияющих факторов. Характер изменения максимальной скорости, которую дают данные уравнения, таков, что с уменьшением размера и приближением показателя политропы к единице скорость вращения растет. Приближенно оценить максимальную скорость вращения изотермического вихря можно, приняв значение константы (C_i) изотермического вихря $\frac{V_2^2}{2RT} \approx 10$ (рис. 2.11).

Тогда скорость вращения на внешней границе составит $V_2 = \sqrt{C_i 2RT}$. При температуре $T = 300 \text{ K}$, эта скорость составит $\sim 1300 \text{ м/с}$. Необходимо отметить, что это число получено в рамках модели невязкой жидкости, которая завышает реальные результаты.

1.1. Адиабатные и изотермические трубки занимают одну область системы координат $p_1 / p_2 = f(r_2 / r_1)$, которая показана на рис. 2.13. Различие заключается только в характере расчетных кривых.

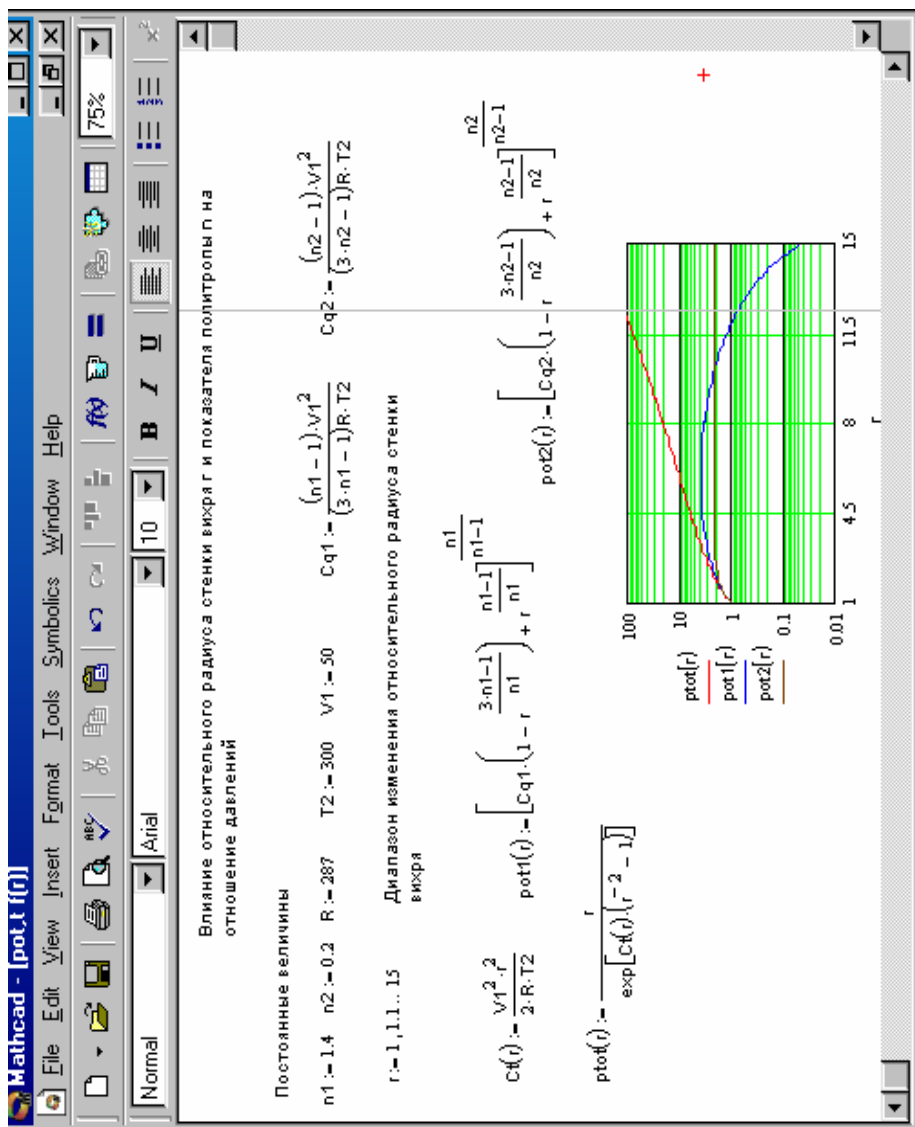


Рис. 2.11. Фрагмент программы для оценки влияния относительного радиуса вихревой трубки и показателя политропы на отношение давлений

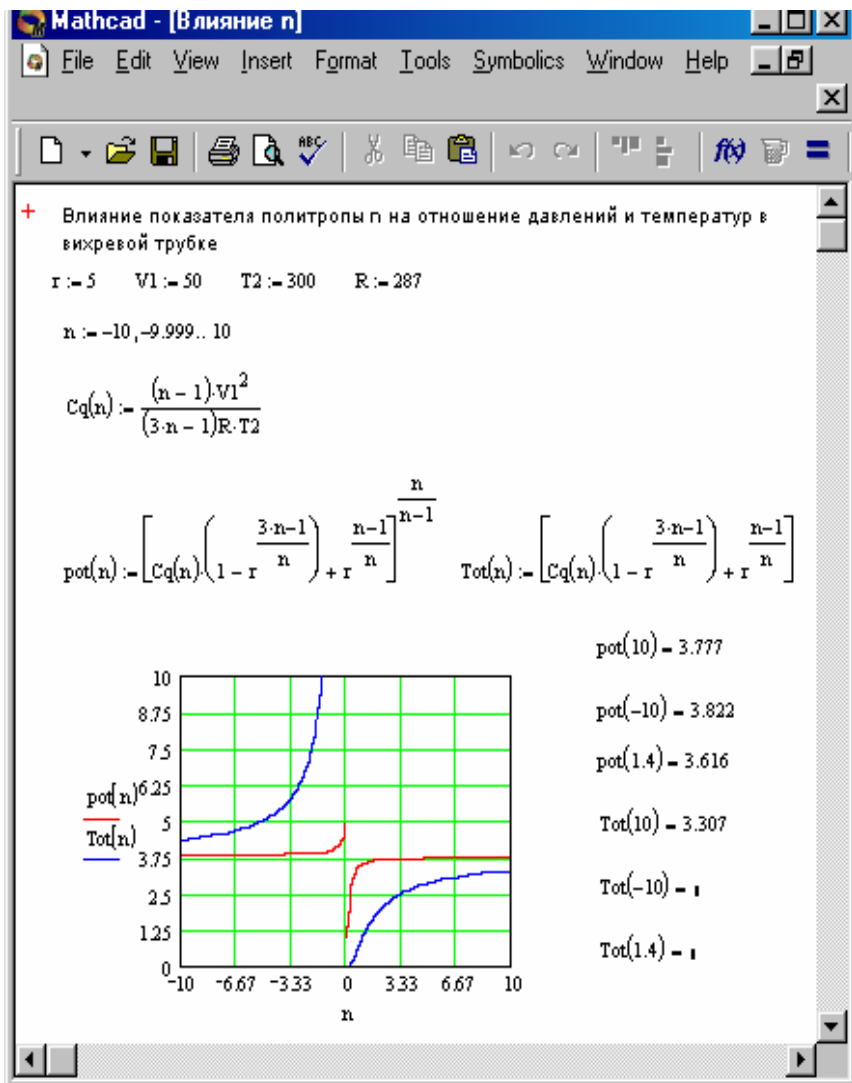


Рис. 2.12. Влияние показателя политропы на отношение давлений и температур в газовой вихревой трубке

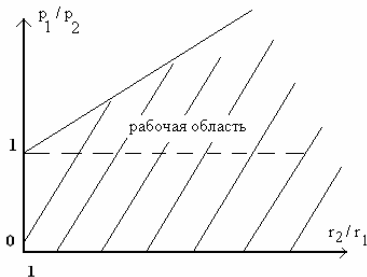


Рис. 2.13. Область системы координат, в которой находятся зависимости $p_1 / p_2 = f(r_2 / r_1)$ для адиабатных и изотермических трубок

2. Водяные воронки. Для определения влияния глубины погружения на возникновение и существование воронки, воспользуемся третьим уравнением системы (2.1), которое имеет вид:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho Z = \rho \frac{du_z}{dt}$$

Переходя к форме записи с давлением ($p = -\sigma$) для стационарного вращения, получим: $p(z) = \rho \cdot g \cdot z + C_0$, что указывает на гидростатический закон распределения давления. В результате получим известную формулу для нахождения давления в жидкости на глубине h в виде $p = \rho \cdot g \cdot h + p_0$ (где p_0 — давление на свободной поверхности).

Выводы

1. Уравнения движения невязкой жидкости в напряжениях (2.1) являются частным случаем системы (1.1), а ее упрощение, в соответствии с постановкой задачи о вращающейся жидкости, приводит к уравнению (2.6). Это уравнение известно в теории упругости и является частным случаем системы Навье для твердого тела (1.5). Возможность использования уравнения (2.6) для расчета движения жидкости связано с пренебрежением влияния текучести, что

оправдывается малыми размерами стенки вращающегося вихря и экспериментальными данными, на основании которых введено понятие «квазитвердое вращение» [20, 31]. Допущение такого типа используется и в других задачах, например, при расчете переноса теплоты через тонкую криволинейную стенку в задачах теплопроводности [13]. При рассмотрении стационарного вращения относительно толстого вихря, уравнение движения (2.6) должно содержать в правой части конвективное ускорение.

2. Допущения, при которых справедливо уравнение (2.6), позволяет применять его как для сплошного поперечного сечения вращающегося цилиндра, так и при наличии в нем внутренней осесимметричной полости. Такая возможность приводит к двум решениям: уравнениям (2.7) и (2.8), которые определяют условия и величину напряжений в полем вихре, и уравнениям (2.11) или (2.12) — для сплошного вихря, которые совпадают с известным решением для тех же условий [31, 33]. При этом уравнения (2.7) и (2.8) относятся к модели невязкой жидкости, а уравнения (2.11) или (2.12) — к модели идеальной жидкости. Переход от одной модели к другой осуществляется путем применения геометрических условий и условий по напряжениям (2.2) к общим решениям дифференциального уравнения (2.6).

3. Рассмотренные уравнения движения различных вариантов вращения жидких и газовых трубок являются одномерными, стационарными и нуждаются в экспериментальной проверке, например, с помощью установок, описанных в главе 4.

4. Сравнение газовых вихревых трубок показывает, что наибольшую интенсивность имеет изотермическая трубка, в связи с подводом дополнительной теплоты.

Глава 3. Метод расчета движения вязкой жидкости

3.1. Введение

Наиболее представительной системой уравнений для расчета движения ньютоновской жидкости в настоящее время является система Навье-Стокса, которую обычно выводят из общего уравнения движения жидкости в напряжениях с использованием закона Ньютона для вязкого трения, причем градиенту скорости ставится в соответствие скорость угловой деформации частицы, т. е. $\frac{du}{dn} = \frac{d\varphi}{dt}$ [20, 33, 34].

В результате получено следующее слагаемое, учитывающее влияние вязкого трения, которое отличает это уравнение от уравнений Эйлера для идеальной жидкости [20, 31].

В проекции на радиус цилиндрической системы координат и в проекции на ось x декартовой системы координат, это слагаемое имеет вид:

$$f_r(v) = v \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2} \right) \quad (3.1)$$
$$f_x(v) = v \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right).$$

3.1.1. О геометрической интерпретации закона Ньютона

В соответствии с уравнением Ньютона, касательное напряжение τ_{mp} пропорционально градиенту скорости сдвига, которая в проекции на ось x равна:

$$\tau_{mp} = -\mu \cdot \text{gradu}_x \quad . \quad (3.2)$$

Полная сила трения в проекции на ось x $F_{mp} = -\mu \cdot f \cdot \text{grad} u_x$,

где μ — динамическая вязкость, u_x — скорость вдоль оси x , f — поверхность трения.

Аналогичные градиентные зависимости между различными величинами широко используются в других областях науки, где им дается соответствующая геометрическая интерпретация, которая всегда согласуется с действующими в данной области науки физическими законами.

Рассмотрим пример такой геометрической интерпретации уравнения аналогичного (3.2) между тепловым потоком Φ и градиентом температуры T , которая используется в теплопроводности и носит название закона Фурье. Математическое выражение этого закона имеет вид [13]:

$$\Phi = -\lambda \cdot A \cdot \text{grad} T,$$

где λ — коэффициент теплопроводности среды, A — поверхность теплообмена.

Как известно, градиент направлен в сторону возрастания функции (в данном случае температуры), а знак “минус” указывает на противоположное градиенту температуры направление теплового потока, что соответствует второму закону термодинамики (рис. 3.1).

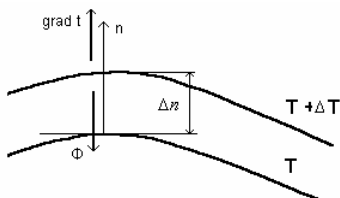


Рис. 3.1. Геометрическая интерпретация закона Фурье [13].

Ясная и простая интерпретация закона Фурье приводит к хорошим

результатам расчета всего процесса теплопроводности.

В то же время этот закон имеет особенность касающуюся значения температуры T , входящей в функцию градиента. Как следует из физики процесса теплопроводности, температура не должна быть равна (близка) нулю, так как при низких температурах может отсутствовать среда, в которой будет существовать процесс теплопроводности (например, газ). Однако математика допускает любые значения температуры (например, $T = 0$), так как уравнение для расчета $gradT$ при этом не меняется. Таким образом, уравнение Фурье нельзя распространять на сколь угодно малые или большие температуры.

Проанализируем известную геометрическую интерпретацию закона Ньютона, пользуясь уравнением (3.2) [26]. На рис. 3.2 показано течение вблизи пластинки, обозначены два вектора скорости, направление градиента скорости и направление действия расчетного касательного напряжения τ_{mp} и касательного напряжения, следующего из его физического смысла $\tau_{физ.}$.

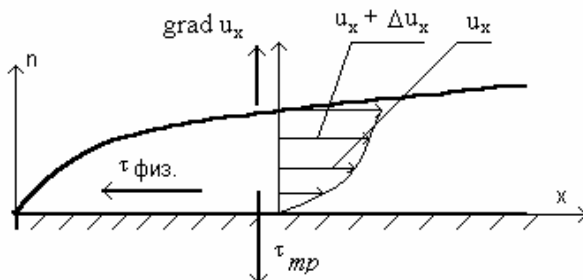


Рис. 3.2. Геометрическая интерпретация зависимости между касательным напряжением и градиентом скорости потока

Из рис. 3.2 видно, что расчетное направление напряжения трения τ_{mp} не совпадает с напряжением, следующим из общих положений

механики, согласно которым напряжение $\tau_{\text{физ}}$ должно быть противоположно скорости и приложено к поверхности трения, находящейся между движущимися слоями. Несмотря на противоречивость представленной схемы расчетных и физических сил, напряжение $\tau_{\text{мп}}$ "условно" поворачивают в правильном направлении таким образом, чтобы она совпала с $\tau_{\text{физ}}$ [26, 35]. Такая произвольная трактовка физического закона не может пройти безследно для результатов расчета всего процесса движения, поскольку вычисленное напряжение $\tau_{\text{мп}}$ искажает векторную сумму сил на выбранное направление, составленную в соответствии с правилами теоретической механики. Кроме того, поверхности, к которой приложены расчетная и физическая сила, согласно их геометрической интерпретации и физическому смыслу, оказываются разными.

Указанные противоречия не означают, что закон Ньютона не может быть использован для нахождения силы вязкого трения, однако конструкция математического выражения должна быть такой, чтобы $\tau_{\text{мп}}$ и $\tau_{\text{физ}}$ совпадали по всем параметрам, характерным для векторных величин, и во всем диапазоне изменения других влияющих факторов.

Возникновение касательного напряжения на рис. 3.2 иллюстрируется на примере обтекания поверхности твердого тела, на которой изотакса, совпадающая с поверхностью, имеет нулевую скорость. Это следует из гипотезы «прилипания» потока текучей среды к поверхности, которая неоднократно проверена и не подлежит сомнению, по крайней мере, для вязкостного режима течения (числа Кнудсена меньше 0,1). С математических позиций величина проекции скорости потока для нахождения градиента может быть произвольной, но с физической точки зрения, при нулевой скорости потока, жидкость находится в состоянии покоя, и сила вязкого трения не возникает по определению.

Это несоответствие можно преодолеть, переместив точку в поток жидкости, градиент скорости которой и подлежит нахождению (рис. 3.3).

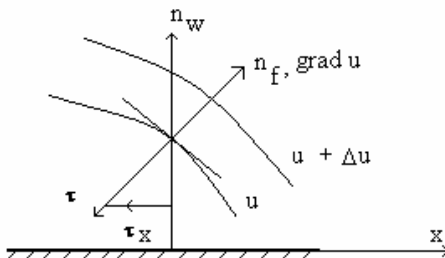


Рис. 3.3. Расчетная схема действия касательных напряжений для случая $u \neq 0$

Таким образом, точка, с которой необходимо восстанавливать перпендикуляр, должна находиться не на обтекаемой поверхности, а на ненулевой изотaxe, положение которой может не совпадать с поверхностью. Как следует из анализа различных течений, отклонение ненулевой изотaxи от профиля поверхности мало, если на ней существует пограничный слой. Однако при весьма малых числах Рейнольдса пограничный слой еще отсутствует, и расположение изотax может составлять с поверхностью значительный угол. Такой характер течения имеет место и при потенциальном обтекании тела [31].

При угле близком к 90^0 расчетное и физическое касательное напряжение будут близки как по величине, так и по направлению. Это означает, что искажающее влияние τ_{mp} будет мало и векторная сумма сил на данное направление не будет искажаться. По мере увеличения скорости положение изотax в потоке будет постепенно меняться, приближаясь к профилю обтекаемого тела, а составляющая касательного напряжения, проектируемая на твердую поверхность, будет уменьшаться, что приведет к отклонению результатов расчета от экспериментальных

данных.

Возможно, что рассмотренные особенности геометрической интерпретации уравнения Ньютона можно применить к объяснению свойства решений системы Навье-Стокса, которые справедливы только при малых числах Рейнольдса. В этом случае уравнение Навье-Стокса можно считать верным при пренебрежении искажающего влияния расчетного вектора силы вязкого трения или при отсутствии пограничного слоя.

Приведенный анализ не решает вопрос о поверхности приложения касательного напряжения, которая должна находиться между слоями жидкости, движущимися с разными скоростями. Как следует из геометрической интерпретации градиента, поверхность трения будет всегда перпендикулярна градиенту скорости, а значит, и касательному напряжению, что противоречит физическим представлениям.

Отмеченные недостатки в геометрической интерпретации закона Ньютона не ставят под сомнение сам закон, а лишь указывают, что использование для этой цели схемы обтекания пластинки (рис. 3.2) нецелесообразно.

Ниже рассматривается другой путь учета влияния вязкого трения, основанный на непосредственном использовании закона Ньютона (без введения понятия скорости угловой деформации частицы), в котором геометрическая интерпретация касательного напряжения и его смысл соответствуют физическим представлениям по всем трем параметрам, характеризующим векторную величину (модулю, направлению и поверхности приложения).

3.2. Уравнения движения

Для получения системы уравнений движения ньютоновской жидкости применим известный метод, используемый в теории упругости.

В основу этого метода положена система уравнений Навье, а переход к другим, более частным уравнениям, осуществляется методом подстановки.

Отличительной особенностью ньютоновской жидкости по сравнению с твердым телом является другая зависимость для нахождения касательных напряжений, однако это не меняет принцип ее использования. Подстановку реологического уравнения Ньютона (3.2) можно осуществить в систему (1.1), с получением результата в декартовой системе координат, либо в правую часть системы (1.5) – для получения результата в цилиндрических координатах.

Применим закон Ньютона для расчета вязкого трения, с целью вычисления касательных напряжений, входящих в систему (1.5). При этом будем основываться на нумерации индексов касательных напряжений, как это принимается при выводе системы уравнений Навье.

В соответствии с принятым направлением нормального напряжения (σ_r) и давления ($p_r = -\sigma_r$), радиальная скорость u_r должна быть направлена в сторону действия давления. Градиент радиальной скорости ($grad u_r$) направлен в ту же сторону, что и касательное напряжение τ_{rz} , и в сторону увеличения координаты Z . В соответствии с принципом взаимности касательных напряжений $|\tau_{zr}| = |\tau_{rz}|$, можно найти .

$$\frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) = \mu \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} . \quad (3.3)$$

На рис. 3.4 показаны соответствующие векторы, приводящие к согласованности в направлениях проекции скорости потока и проекции касательного напряжения.

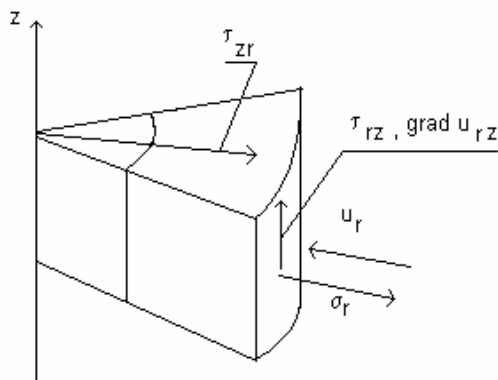


Рис. 3.4. Схема расположения векторов для расчета касательного напряжения τ_{zr}

τ_{zr} – действует в радиальном направлении и перпендикулярно оси Z . Причиной возникновения этого касательного напряжения является движение с компонентой скорости u_r .

Рассмотрим нахождение касательного напряжения $\tau_{\theta r}$, действующего в радиальном направлении на боковых гранях выделенного элемента. Причиной возникновения этого касательного напряжения также является движение с компонентой скорости u_r , которая приводит к возникновению касательного напряжения $\tau_{r\theta}$ (рис. 3.5). В соответствии с ранее упомянутым принципом взаимности $|\tau_{\theta r}| = |\tau_{r\theta}|$, найдем $\tau_{\theta r}$ по аналогичному уравнению.

$$\frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} = \mu \frac{\partial}{\partial \theta} (\text{grad}_{\theta} u_r) = \frac{\mu}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2}.$$

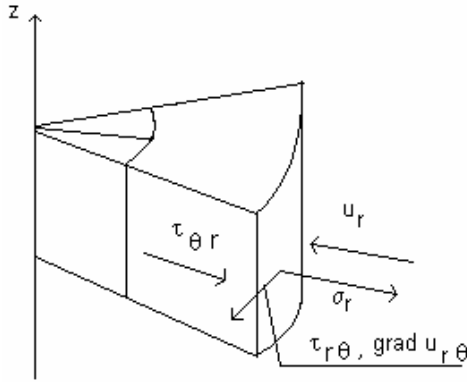


Рис. 3.5. Схема расположения векторов для расчета касательного напряжения τ_{θ} .

Аналогично найдем еще четыре касательных напряжения, входящих в систему (1.5) [18, 20]. Положение касательных напряжений τ_{rz} , $\tau_{\theta z}$, $\tau_{r\theta}$ и $\tau_{z\theta}$ на гранях малого элемента показано на расчетной схеме рис. 1.1 .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} &= \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} & \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} &= \frac{\mu}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} &= \mu \frac{\partial^2 u_{\theta}}{\partial r^2} & \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} &= \mu \frac{\partial^2 u_{\theta}}{\partial z^2} . \end{aligned} \quad (3.4)$$

Подставим полученные выражения для касательных напряжений в левую часть уравнений (1.5) и получим систему уравнений движения ньютоновской жидкости (3.5) в цилиндрической системе координат.

Эта система отличается от системы уравнений Навье (1.5) только выражениями для касательных напряжений и полной производной в правой части.

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} \right) + F_r = \rho \frac{du_r}{dt}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) + F_\theta = \rho \frac{du_\theta}{dt} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + F_z = \rho \frac{du_z}{dt}.$$

Принимая во внимание, что нормальные напряжения и давления имеют взаимообратные знаки, получим:

$$-\left(\frac{\partial p_r}{\partial r} + \frac{p_r - p_\theta}{r} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} \right) + F_r = \rho \frac{du_r}{dt}$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial p_\theta}{\partial \theta} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) + F_\theta = \rho \frac{du_\theta}{dt} \quad (3.6)$$

$$-\frac{\partial p_z}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + F_z = \rho \frac{du_z}{dt}.$$

Осуществляя аналогичные преобразования можно получить такую же систему уравнений в декартовой системе координат (3.7).

Краткий анализ. В уравнении Навье-Стокса давление p представлено как среднеарифметическая величина из трех проекций (1.14), однако, как указано в работе [20], такое представление давления является

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial p_x}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + F_x &= \rho \frac{du_x}{dt} \\
-\frac{\partial p_y}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + F_y &= \rho \frac{du_y}{dt} \\
-\frac{\partial p_z}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) + F_z &= \rho \frac{du_z}{dt}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

дополнительной гипотезой, которую нельзя доказать из общих гидродинамических соображений. В отличие от системы уравнений Навье-Стокса, три проекции давления на оси координат, входящие в систему (3.7), не содержат дополнительных гипотез и могут быть найдены путем ее решения.

Как известно, в соответствии с правилами теоретической механики, тело находится в равновесии, если равны нулю суммы проекций всех сил на выбранные направления и суммы моментов этих сил. Второе требование выражается в форме условий взаимности касательных напряжений [18, 20]. При выводе систем уравнений (3.5)... (3.7) в явном виде используются оба эти условия, что гарантирует наличие равновесия выделенного элемента по обоим параметрам.

Характерно, что по сравнению с системой Навье-Стокса в этих уравнениях, в левой части, отсутствуют производные от скорости с одинаковыми индексами. Это означает, что по данному методу касательные напряжения возникают только от компонентов скорости, которые меняются перпендикулярно рассматриваемому направлению, т. е. создают сдвиг скорости. Таким образом, слагаемые, например, $\partial u_r / \partial r$, $\partial^2 u_r / \partial r^2$ и др., для нахождения касательных напряжений не учитываются.

Проведем краткий анализ слагаемых системы Навье-Стокса, характеризующих вязкое трение (3.1). В декартовых координатах эти слагаемые можно записать в следующем виде:

$$\nu \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \right). \quad (3.8).$$

Слагаемое $\frac{\partial u_x}{\partial x}$ имеет инерционную природу, так как характеризует изменение скорости u_x вдоль координаты x , а вторые два слагаемых характеризуют сдвиг потока относительно оси x в направлении y и z . Таким образом, уравнение (3.8) устанавливает смешанную природу силы вязкого трения, в то время как, согласно закону Ньютона, вязкое трение имеет только сдвиговую природу.

Система уравнений (3.5), полученная с помощью подстановки (3.2) в уравнение движения жидкости в напряжениях, устраняет указанное несоответствие и согласуется с уравнением Ньютона для расчета силы вязкого трения.

Системы (3.5)...(3.7), так же как и система уравнений Навье-Стокса, являются незамкнутыми, так как число неизвестных превышает число уравнений. Рассмотрим некоторые возможности замыкания отмеченных систем уравнений.

Как следует из физики процесса течения, под воздействием внешних сил в каждой точке рассматриваемого тела возникает напряжение (давление), нахождение которого является целью расчета напряженного состояния. К этому виду расчета относятся, например, система Эйлера и Навье-Стокса. С другой стороны, под воздействием тех же внешних сил каждая точка тела смещается на некоторое расстояние, т. е. получает перемещение, нахождение которого в механике твердого

тела является одной из целей расчета деформированного состояния. Этот расчет для твердого тела выполняется с помощью уравнений совместности деформаций, в которые не входят поверхностные напряжения. Система уравнений для расчета поля деформаций в твердом теле получена на основании только геометрических представлений и не содержит допущений о свойствах конкретной среды [11, 28].

Для замыкания уравнений системы (3.5) необходимо найти другой частный случай уравнений совместности деформаций, учитывающий наличие у среды свойства текучести. Такая система уравнений должна содержать шесть уравнений, как и для твердого тела, которыми можно будет дополнить систему уравнений движения жидкости. Таким образом, схема замыкания уравнений движения в жидкости должна быть такой же, как и в другом разделе механики сплошной среды – твердом теле. Аналогично методу решения задачи теории упругости должны существовать и уравнения пересчета результатов расчета поля давлений в поле (перемещений) или скоростей потока жидкости и обратно.

Таким образом, задачу механики жидкости, так же как и задачу теории упругости, можно будет решать путем расчета любого из двух полей, возникающих под воздействием одинаковой системы внешних сил. В настоящее время известные и рассмотренные в данной работе системы уравнений движения жидкости не могут в полной мере решить требуемые задачи.

В уравнениях движения рассматриваемого метода, так же как и в системе Навье (1.5), отсутствует условие гладкости функций, что определяет их большую общность. В то же время эти уравнения нельзя распространить на турбулентные течения, так как в них нет параметров, учитывающих влияние пульсаций всех термодинамических величин.

Из системы (3.6) можно получить систему уравнений Эйлера. Для этого необходимо использовать два взаимосвязанных условия:

1) $p_r = p_\theta = p_z = p$, которое характеризует наличие сплошной структуры потока и свойство независимости давлений в идеальной жидкости от ориентации элементарной площадки;

2) равенство нулю касательных напряжений, которое, для ньютоновской жидкости, эквивалентно условию $\mu = 0$.

Возможно, что использование других реологических уравнений для нахождения касательных напряжений, характерных для неньютоновских жидкостей, окажется полезным для нахождения их уравнений движения.

3.2.1. Связи между уравнениями

Большое разнообразие уравнений требует установления связей между ними и их согласования с принятыми допущениями. На схеме рис. 3.6 показаны некоторые связи между уравнениями движения для вязкой ньютоновской, невязкой и идеальной жидкости. Систему (3.6) можно будет проинтегрировать после дополнения ее тремя дифференциальными уравнениями, составленными из параметров деформационного движения для вязкой ньютоновской жидкости. Для невязкой жидкости возможно существование двух путей расчета: интегрирование системы (2.1) с получением общего решения и решение задачи с помощью частных случаев системы (2.1), одним из которых является система Эйлера (1.3). Решение частной задачи идеальной жидкости можно получить тремя способами (на примере задачи сплошной текучей среды):

- интегрированием системы уравнений Эйлера;
- интегрированием системы уравнений (2.1) с последующим нахождением решения для сплошной среды;
- интегрированием системы уравнений вязкой жидкости (3.6 ...3.7) с последующим нахождением частного решения по условию отсутствия касательных напряжений и независимости давления от направления.

В работе рассматриваются только несколько частных задач, иллюстрирующих часть рассмотренных на рис. 3.6 путей расчета. Эти задачи относятся к невязкой жидкости (гл.2) и вязкой ньютоновской жидкости (п. 3.3).

Системы (3.6 ...3.7) получены с помощью уравнения (3.2) для ньютоновской жидкости, однако использованный метод подстановки реологического уравнения в общую систему уравнений позволяет потенциально использовать и другие реологические уравнения, т. е. в данном случае используется тот же подход, что и при решении задач теории упругости при наличии касательных напряжений [11, 18].

Необходимо отметить, что схема, представленная на рис.3.6 относится ко второму уровню общности решения задачи движения, так как содержит условие в форме реологического уравнения (3.2). Наиболее общим путем следует считать использование системы из минимум девяти дифференциальных уравнений, в которую входит система (1.1).

3.3. Применение метода к некоторым частным задачам

Известно небольшое количество задач вязкой жидкости, которые решены точно с помощью уравнений Навье-Стокса и соответствуют эксперименту в пределах малых чисел Рейнольдса. Часть этих задач решена точно путем непосредственного применения уравнения равновесия к малому элементу, т. е. без прямого использования уравнения Навье-Стокса [33] .

Рассмотрим несколько частных задач, в числе которых — ламинарное течение в трубе и вторичное течение на плоскости, возникающее при торможении на ней торца вихревой трубки. В предположении, что пристеночное течение сплошное (т. е. не имеет внутренних границ), а первичное течение представляет собой вихревую нить, последняя задача решена М. А. Гольдштиком [8,9].

3.3.1. Ламинарное течение в трубе

Полагая, как обычно, что течение одномерное, стационарное и сплошное, можно записать следующие условия упрощения системы (3.6)

$$\frac{du_z}{dt} = 0 \quad \text{и} \quad p_z = p.$$

$$-\frac{dp}{dz} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) = 0. \quad (3.9)$$

Анализируя это уравнение, можно заключить, что градиент давления вдоль оси Z является величиной постоянной, которую можно определить с использованием понятия гидравлического уклона J , характеризующего падение линии полной удельной энергии потока. По определению, гидравлический уклон для данного случая (труба горизонтальна и скорость потока одинакова на всей длине трубы) равен:

$$\rho g J = -\frac{dp}{dz}, \quad \text{или} \quad \gamma J = -\frac{dp}{dz}.$$

С учетом этого понятия уравнение (3.9) можно записать [33]:

$$\gamma J + \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) = 0. \quad (3.10)$$

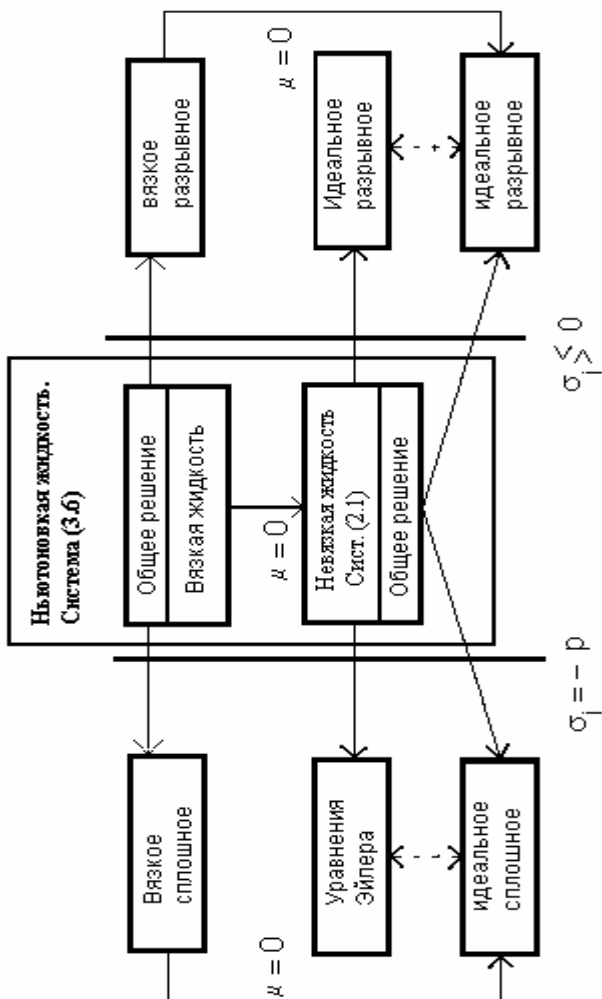


Рис. 3.6. Связи между дифференциальными уравнениями и их решениями.

Сплошная – связи между общими решениями. Пунктир – связи между частными решениями

Найдем распределение скорости вдоль радиуса с помощью пакета Maple.

Интегрирование дифференциального уравнения для частного случая движения жидкости. Ламинарный поток в круглой трубе.

> **ode:=gamma*J+m*(diff(u(r),r,r)+1/r*diff(u(r),r));**

$$ode := \gamma J + m \left(\left(\frac{d^2}{dr^2} u(r) \right) + \frac{\frac{d}{dr} u(r)}{r} \right)$$

> **dsolve(ode,u(r));**

$$u(r) = -\frac{\gamma J r^2}{4 m} + _C1 \ln(r) + _C2$$

> **ode2:=gamma*L*r/2+m*(diff(u(r),r));**

$$ode2 := \frac{\gamma L r}{2} + m \left(\frac{d}{dr} u(r) \right)$$

> **dsolve(ode2,u(r));**

$$u(r) = -\frac{\gamma L r^2}{4 m} + _C1$$

Таким образом, общий интеграл уравнения (3.10) имеет вид:

$$u(r) = -\frac{\gamma J}{4\mu} r^2 + C_1 \ln(r) + C_2, \quad (3.11)$$

который совпадает с известным результатом и применяется, например,

для нахождения распределения скорости между соосными цилиндрами [33].

Дифференцируя последнее уравнение, получим:

$$\frac{du}{dr} = \frac{\gamma J}{2\mu} r + \frac{C}{r}.$$

Полагая, что течение симметрично относительно оси, примем $\frac{du}{dr} = 0$ при $r = 0$. В этом случае константа $C = 0$ и последнее уравнение приводится к известному виду:

$$\gamma J \frac{r}{2} + \mu \frac{du}{dr} = 0. \quad (3.12)$$

Решение данного уравнения показано в том же примере.

В итоге получим следующий интеграл:

$$u = -\frac{\gamma J}{4\mu} r^2 + C,$$

который показывает, что распределение скорости по радиусу трубы меняется по параболическому закону [33].

3.3.2. Разгонное течение

Такое течение является одномерным, неустановившимся и возникает в отсутствии массовых сил и градиента давления, скорость изменяется от $u_x = 0$ при $t = 0$, для всех y , и до $u_x = U_0$ при $t > 0$, для $y = \infty$ (где t — время, U_0 — заданная скорость) [20, 35].

Запишем первое уравнение системы (3.7) в декартовых координатах

$$-\frac{\partial p_x}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + F_x = \rho \frac{du_x}{dt}.$$

Применяя вышеизложенные условия, можно получить следующее уравнение:

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2},$$

которое совпадает с известным уравнением, полученным с помощью системы Навье-Стокса [20, 35].

3.3.3. Уравнения пограничного слоя

С помощью первого уравнения системы (3.7) можно получить уравнение пограничного слоя простым упрощением, т. е. без использования анализа составляющих системы уравнений Навье-Стокса в результате которого было исключено слагаемое $\mu \frac{\partial u_x}{\partial x^2}$ [31]. Полагая, что пограничный слой плоский ($p_x = p$), получим

$$-\frac{\partial p_x}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) + F_x = \rho \frac{du_x}{dt}. \quad (3.13)$$

Используя свойство независимости давления по нормали и полагая, что массовые силы отсутствуют, получим для установившегося течения, уравнение (1.8).

Уравнения пограничного слоя были получены путем проведения оценки порядка величин отдельных слагаемых в уравнении Навье-Стокса, которое привело к исключению производных от скорости с одинаковыми индексами. Этот результат является вполне закономерным, так как они не создают сдвига скорости, а значит, и не должны приводить к возникновению силы вязкого трения.

3.3.4. Торцевой эффект на безграничной плоскости

Данное течение возникает под воздействием торможения на плоскости цилиндрического вихря с полостью или без нее. Такое течение является вторичным и в значительной степени определяется свойствами первичного течения – цилиндрического вихря, который может иметь различную структуру, мощность и масштаб. Наиболее широко известны такие течения в вихревых камерах, где они получили название торцевого эффекта. В метеорологии такие течения возникают вблизи основания торнадо, называются подошвенным течением и могут иметь значительную скорость. Анализ разрушений, вызванных таким течением дает скорость порядка 200...500 м/с, которая сохраняет горизонтальное направление в большом диапазоне расстояний от области торможения [10, 24].

Физической причиной возникновения этого течения является нарушение баланса сил в вихре по мере приближения вертикальной координаты к поверхности. Под воздействием трения о поверхность скорость вращения и силы инерции уменьшаются, и для их компенсации возникает пристеночное течение, направленное к центру.

Наиболее полное решение задачи расчета пристеночного течения, найденное в рамках уравнений Навье-Стокса, описано в работах [8, 9], где показано, что решение уравнения существует только при малых числах

Рейнольдса ($Re < 5,5$), что противоречит наблюдениям, на что указывают авторы работы. В то же время такой результат согласуется с результатами расчета этих и других течений, выполненного с помощью уравнений Навье-Стокса [15, 19, 20, 36].

Одной из особенностей рассматриваемой задачи является допущение о малости размеров вихря. В результате возникает ситуация, когда бесконечно тонкий цилиндрический вихрь (вихревая нить) создает конечный эффект в виде пристеночного течения, распространяющегося из бесконечности. Такой подход является корректным с точки зрения математики, так как позволяет изолировать в начале координат область торможения, объявив ее особой точкой, а пристеночное течение рассматривать как сплошную среду, применяя к ней уравнения Навье-Стокса. В то же время такое допущение нарушает физическую причинно-следственную связь, так как бесконечно тонкая вихревая нить должна иметь бесконечно малую энергию и не может создать конечные возмущения в безграничной среде.

Рассмотрим решение этой же задачи, полагая, что пристеночное течение является разрывным. Такое заключение можно сделать, основываясь на конечности радиальных размеров цилиндрического вихря и на резком изменении характера пристеночного течения по мере приближения к стенке вихревой трубки. В результате вблизи стенки вихря радиальное течение отсутствует, так как поток поворачивает вверх и скручивается в спираль. Это означает, что внутри пристеночного течения имеется граница, на которой возникает скачок радиальной скорости, а также меняются и другие термодинамические параметры.

Упрощая систему (3.6) в соответствии с условиями (2.5), получим: $p_r = p, p_\theta = p_z = 0$. При этом будем полагать, что течение стационарное и происходит под воздействием радиальной компоненты давления с возникновением радиальной скорости. В этом случае можно ограничиться

одним уравнением

$$-\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{p}{r} + \mu \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} = \rho u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} . \quad (3.14)$$

Однако это уравнение не в полной мере отражает физическую сущность рассматриваемой задачи, так как в нем не учтено влияние шероховатости поверхности, от которой должен существенно зависеть процесс течения. Кроме того, заранее неизвестна зависимость $u_r = f(r, z)$.

Составим уравнение движения для этого же течения, полагая, что оно плоское и стационарное. Учет силы трения осуществим с помощью коэффициента сопротивления трения C_f и оперируя понятием средней скорости течения $V(r)$.

Этот метод основан на допущениях о гиперболическом изменении скорости вдоль радиуса ($V \cdot r = const$) и о малости вращательной компоненты скорости вдали от области торможения [8, 9, 20]. Эти допущения позволяют составить следующее уравнение баланса сил, действующих на элементарное кольцо шириной dr (рис. 3.7). Такой подход к нахождению уравнений движения потока дает возможность наиболее просто найти отношение давлений для двух сечений потока и использовать в дальнейшем термодинамическую теорию течения газа.

$$\delta F_{\text{дав}} + \delta F_{\text{тр}} + \delta F_{\text{ин}} = 0. \quad (3.15)$$

Использование расчетной схемы приводит к следующим выражениям для элементарных сил [5].

$$\delta F_{\text{давл}} = 2\pi\delta \left[\left(r + \frac{dr}{2} \right) \left(p + \frac{dp}{2} \right) - \left(r - \frac{dr}{2} \right) \left(p - \frac{dp}{2} \right) \right]$$

$$\delta F_{mp} = \pi C_f \left[\left(r + \frac{dr}{2} \right)^2 - \left(r - \frac{dr}{2} \right)^2 \right] \frac{\rho V^2}{2},$$

$$\delta F_{\text{ин}} = dm \cdot a = \pi\delta\rho \left[\left(r + \frac{dr}{2} \right)^2 - \left(r - \frac{dr}{2} \right)^2 \right] \cdot \left[-V \frac{dV}{dr} \right]$$

— соответственно элементарные силы давления, вязкого трения и инерции.

После подстановки получим следующее дифференциальное уравнение движения пристеночного течения вдоль радиуса пластинки:

$$\frac{dp}{dr} + \frac{p}{r} = \frac{C_f}{\delta(r)} \frac{\rho V^2}{2} - \rho V \frac{dV}{dr}. \quad (3.16)$$

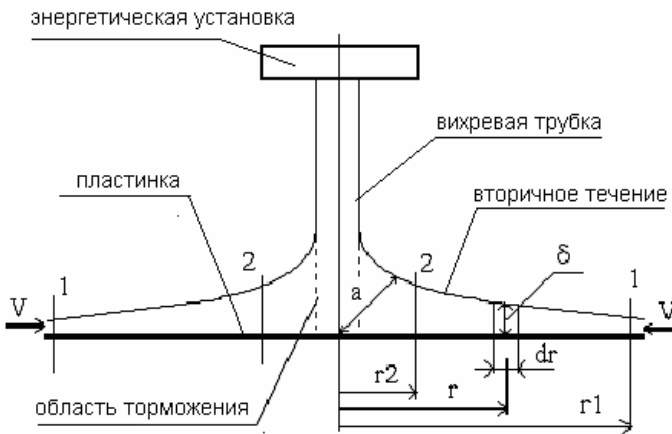


Рис. 3.7. Расчетная схема плоского осесимметричного течения на круглой пластинке

Уравнение (3.16) можно преобразовать к следующему виду,

полагая, что параметры течения в сечении 2 известны, а $Vr = const$. Тогда

$V = \frac{V_2 r_2}{r}$. В результате получим:

$$\frac{dp}{dr} + \frac{p}{r} = \frac{\rho V_2^2 r_2^2}{2} \left[\frac{C_f}{r^2 \delta(r)} + \frac{2}{r^3} \right], \quad (3.17)$$

где ρ — плотность, кг/м³;

V_2, r_2 — радиальная скорость и радиус сечения 2, соответственно;

p — давление, Па; $\delta(r)$ — толщина пристеночного течения, м;

C_f — коэффициент сопротивления трению, который считается приближенно постоянным.

Для оценки распределения давления вдоль радиуса необходимо знать зависимость $\delta(r)$. Примем для простоты, что $\delta(r) = a^2/(2r)$, т. е. толщина течения растет при уменьшении радиуса, что принципиально согласуется с физикой течения. При такой зависимости $\delta(r)$ уравнение (3.17) имеет простое решение, которое, например, для несжимаемой жидкости приобретает вид (рис.3.9):

$$p(r) = \rho V_2^2 r_2^2 \left[\frac{C_f}{a^2} - \frac{1}{r^2} \right] + \frac{C_0}{r}. \quad (3.18)$$

Распределение давления вдоль радиуса при течении идеального газа описывается двумя уравнениями: при постоянном показателе политропы ($n \neq 1$) и при $n = 1$, что соответствует изотермическому течению.

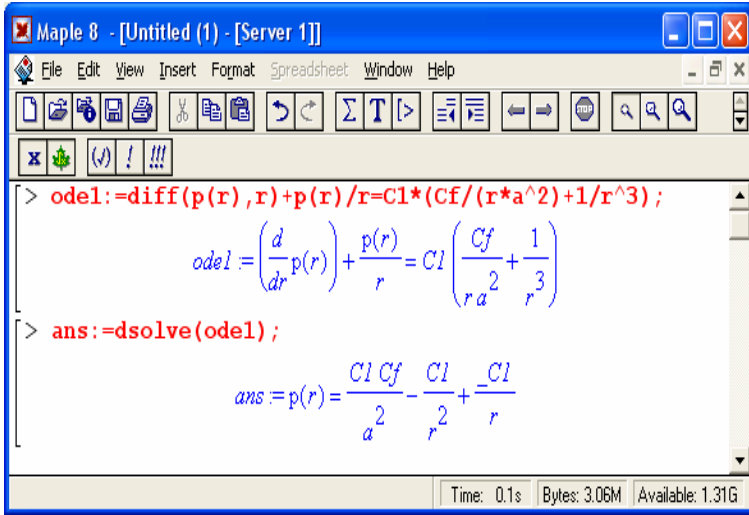


Рис. 3.8. Фрагмент программы для нахождения решения уравнения (3.17), где $C1 = \rho V_2^2 r_2^2$

Используя уравнение состояния и уравнение политропы, можно получить зависимость плотности газа от давления в виде $\rho = p^{1/n} p_2^{n-1} / RT_2$. Решая совместно последнее уравнение и уравнение (3.17) можно получить следующее распределение давления между сечениями 1 и 2:

$$p(r) = \frac{1}{r} \left[C_n \left[\frac{C_f}{a^2} r^{\frac{n-1}{n}} - \frac{n-1}{n+1} r^{-\frac{n+1}{n}} \right] + C_0 \right]^{\frac{n}{n-1}} \quad (3.19)$$

где $C_n = \frac{V_2^2 r_2^2}{RT_2} p_2^{\frac{n-1}{n}}$ — константа течения, в которую входят

известные параметры в сечении 2. (R — удельная газовая постоянная, Дж/кг.К; T_2 — абсолютная температура, К).

Используя уравнение состояния в виде $\rho = p/(RT)$ и подставляя его в уравнение (3.17) получим следующее дифференциальное уравнение для распределения давления на пластинке при изотермическом течении газа

$$\frac{dp}{dr} + \frac{p}{r} = \frac{p}{RT} V_2^2 r_2^2 \left(\frac{C_f}{a^2 r} + \frac{1}{r^3} \right),$$

решение которого имеет вид:

$$\ln p = \left(\frac{V_2^2 r_2^2}{RT} \frac{C_f}{a^2} - 1 \right) \ln r - \frac{V_2^2 r_2^2}{2RT r^2} + C_0 \quad (3.20)$$

Уравнения (3.19) и (3.20) описывают распределение давления только при дозвуковом течении газа [5].

Оценим количественные характеристики пристеночного течения для наиболее простого случая $\rho = const$, задаваясь приемлемыми с физической точки зрения исходными данными. При этом будем полагать, что водяная вихревая трубка тормозится на верхней поверхности пластинки в ее центре.

Найдем частное решение уравнения (3.18) при следующих граничных условиях: при текущем радиусе r , давление равно $p(r)$. При радиусе $r = r_2$, $p = p_2$.

Тогда

$$p(r) = \rho V_2^2 \frac{r_2^2}{r} \left[\frac{C_f}{a^2} (r - r_2) + \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r} \right) \right] + p_2 \frac{r_2}{r} \quad (3.21)$$

Распределение давления на пластинке, построенное по уравнению (3.21), и вид сечения тела давления показан на рис. 3.9.

При этом принято: плотность воды $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, константа $C_f/a^2 = 50$; радиусы $r_2 = 0,1 \text{ м}$, $r_1 = 0,364 \text{ м}$, давление $p_2 = 3 \text{ КПа}$, скорость $V_2 = 8,0 \text{ м/с}$.

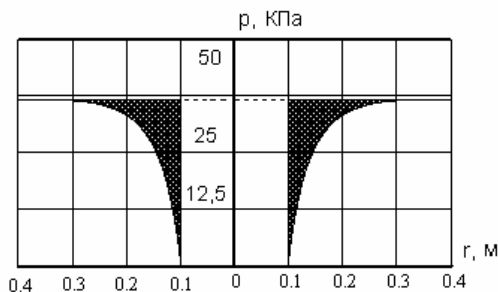


Рис. 3.9. Распределение давления вдоль радиуса
пластинки и сечение тела давления

Интегрируя приведенное распределение давлений по поверхности круглой пластинки, можно найти полную силу давления по уравнению

$$P_y = 2 \pi \int_{r/2}^{r/2} [p_0 - p(r)] r dr, \quad (3.22)$$

которая для условий примера приблизительно равна $P_y(r) = 1200 \text{ Н}$, а поверхностная нагрузка составит около 300 кг/м^2 . Если положить, что на нижней поверхности пластинки течение отсутствует и давление постоянно, то величину P_y можно рассматривать как неуравновешенную силу давления. Аналогичные примеры расчетов, проведенные с использованием уравнений (3.19) и (3.20), указывают на перспективность использования такого пристеночного течения на воздухе для разнообразных технических применений, в том числе и для получения неуравновешенной силы давления. Однако окончательное заключение о перспективности технического использования такого метода может быть сделано после проведения экспериментальных исследований.

Необходимо отметить, что имеются косвенные данные, основанные на анализе метеорологических наблюдений, которые дают скорость движения воздуха в аналогичном пристеночном течении близкую к скорости звука, что может привести к достаточно большой поверхностной нагрузке [12, 24].

Глава 4. Демонстрационные эксперименты

4.1. Принцип работы экспериментальной установки и ее схема

Работы по созданию экспериментальных установок, способных генерировать вихревые трубки различной формы и масштаба, проводились многими исследователями и в разных странах. Обычно такие установки содержат закручивающее устройство с вентилятором или без него, а также устройство для понижения давления в центре [22, 23]. Отличительной особенностью таких установок является работа по разомкнутой схеме. Результат работы одной из таких установок показан на рис. 4.1. Наибольшие скорости в лабораторных установках получены с применением принудительной подачи/отсоса воздуха. Скорости вращения в таких установках могут превышать 20 м/с, а радиусы вращения равны порядка десяткам сантиметрам. Эти параметры существенно меньше, чем в природных торнадо, однако для некоторых инженерных приложений такие скорости и размеры течения могут быть полезными.

В настоящей работе эксперименты по созданию воздушной вихревой трубки проводились с помощью установки, схема работы которой отражает теоретический результат о том, что для попадания в область устойчивого существования течения необходимо принудительно понизить давление в ее центре до необходимой величины. Этот факт хорошо известен и отмечается в большом числе работ, однако разные исследователи используют разные способы понижения давления.

С другой стороны, необходимо существование циркуляционного течения, которое, как известно, легко осуществляется с помощью вихревой камеры.

Таким образом, установка должна выполнять две функции — создавать закрученный поток и понижать давление в центре трубки.



Рис. 4.1. Мини-торнадо, полученный Тедом Фуджита (университет Чикаго)

Кроме того, необходимо иметь в виду положение теоремы Гельмгольца о вихрях, согласно которой торцы трубки должны находиться на границе раздела сред, например, на твердой или жидкой поверхности. Поскольку при работе любой установки должно выполняться уравнение массового баланса, приходим к схеме установки, изображенной на рис. 4.2 [4].

Такой способ получения трубки является напорным, и его параметры легко регулируются, а мощность трубки ограничена только мощностью используемого нагнетателя. При такой схеме удастся в известной степени подавить влияние различных неблагоприятных факторов и использовать свойства таких трубок в различных прикладных областях.

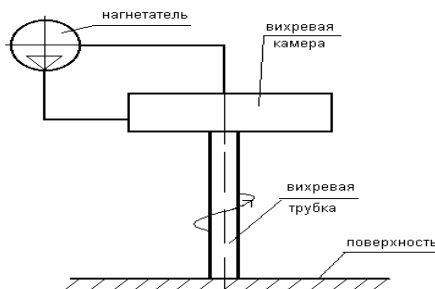


Рис. 4.2. Схема установки для получения вихревой трубки

При работе нагнетателя, на выходе из вихревой камеры, образуется расходящийся вращающийся поток конической формы, в центре которого устанавливается давление, близкое к атмосферному. Вихревая трубка образуется за счет сжатия конического потока под воздействием силы атмосферного давления, возникающей при понижении давления в центре конического факела.

В результате сжатия потока, выходящего из вихревой камеры, происходит увеличение его скорости вращения в соответствии с законом сохранения момента количества движения. Таким образом, вихревая трубка располагается в окружающей среде вдали от ограничивающих в радиальном направлении стенок.

На рис. 4.3 показаны несколько фотографий вихревых трубок, возникающих над поверхностью насыщенной жидкости. В этом случае трубка состоит из паровоздушной смеси, которая хорошо видна и может быть легко сфотографирована.

На рис. 4.3 видны капли жидкости, которые увлекаются течением вверх, а затем сепарируются в области с большей скоростью.

Такая же трубка может быть получена на чистом воздухе и на аэрозоле.

На рис. 4.4 показана обработанная на компьютере фотография дымовой трубки, где видна трубчатая более светлая область с пониженным давлением и тонкая темная стенка с повышенной плотностью. Наружная ("лохматая") область является переходной к неподвижному воздуху. Такая же переходная область наблюдается и на фотографиях [природных торнадо](#).

В результате наблюдения за процессом вращения обнаружены малоразмерные сферические вихри, имеющие диаметр примерно на порядок меньше, чем диаметр вихревой трубки, и окруженные двумя

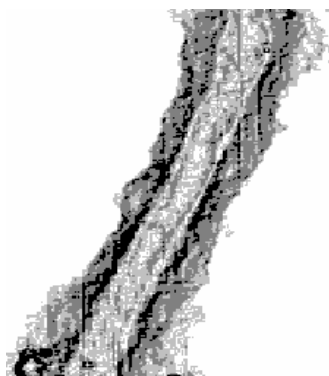


Рис. 4.3. Фотографии паровоздушной вихревой трубки

Рис. 4.4. Фотография дымовой трубки, обработанная на компьютере

изогнутыми следами. Сферические вихри образуются на внешней поверхности цилиндрической трубки и удаляются от нее в радиальном направлении. Такие вихри существуют относительно продолжительное время, однако их регистрация и анализ свойств требуют специальной аппаратуры.

Сравнение полученных в лаборатории течений показывает их большое сходство с такими же течениями, полученными другими

методами, а также с природными торнадо рис. 4.5. В этих вихрях можно различить пристеночное (приземное) течение достаточно большой интенсивности, которое может быть сопоставлено с кольцевой пылевой областью, находящейся в основании природного торнадо. Такая область наблюдается на снимках, полученных специальным объективом, расположенным над землей.

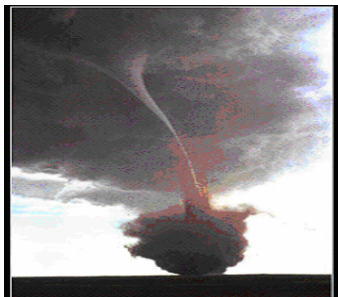


Рис. 4.5. Природный торнадо (фотография Sheila Beougher)

Систематизированное описание свойств торнадо различного масштаба приведено в работе Д. В. Наливкина, где описано также подошвенное течение на поверхности земли [24]. В результате анализа последствий разрушений, а также других эффектов можно приближенно оценить некоторые термодинамические параметры. Например, падение давления сравнительно мало и обычно меньше десяти миллиметров ртутного столба, максимальная скорость подошвенного (радиально-сходящегося) потока воздуха, найденного по результатам разрушений, колеблется от 50 м/с до 250 м/с, скорость вращения воронки может достигать скорости звука.

4.2. Использование водяной воронки

Нестационарную водяную трубку (воронку) легко получить с помощью перевернутой и первоначально раскрученной бутылки. Многочисленные фотографии течений такого вида, а также варианты экспериментальных устройств можно найти в Интернете.

Возможность заранее рассчитывать параметры водяной воронки позволяет использовать ее для получения механической работы. Для этого внутрь воронки устанавливается вертушка (турбина), на валу которой может находиться электрогенератор или другое устройство. Поток воды закручивается направляющим аппаратом до образования воронки, в результате чего скорость воды и скорость вращения вертушки возрастает. В таком методе получения работы используется два последовательных процесса ускорения воды: ускорение под воздействием силы тяжести, необходимое для работы направляющего аппарата, и ускорение в результате образования воронки.

На рис. 4.6 показана схема опыта, в котором можно получить два режима вращения вертушки, отличающихся длиной воронки. В данном случае длина воронки является важным свойством, характеризующим положительный эффект, достигаемый в данном способе. При длинной воронке, которая распространяется за пределы вертушки вниз по течению, вертушка отбирает у потока малую мощность, т. е. работает в режиме, близком к холостому.

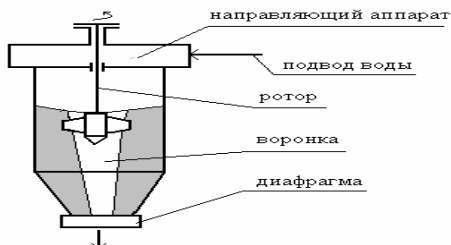


Рис. 4.6. Схема опыта по использованию водяной воронки

При увеличении сопротивления вращения вертушки (крутящего момента сопротивления) длина воронки постепенно уменьшается и, в пределе, заканчивается сразу за вертушкой. При дальнейшем увеличении сопротивления вращению вертушка останавливается.

Энергетической особенностью данного способа получения крутящего момента является наличие процесса перехода разрывного (неравновесного) течения в сплошное (равновесное), т. е. изменение макроструктуры потока воды. Из термодинамики известно, что для осуществления такого перехода, от рабочего тела необходимо отобрать энергию, что и делает вертушка в режиме короткой воронки. Источником энергии в этом методе (как и в обычной гидроэлектростанции) является потенциальная энергия положения воды.

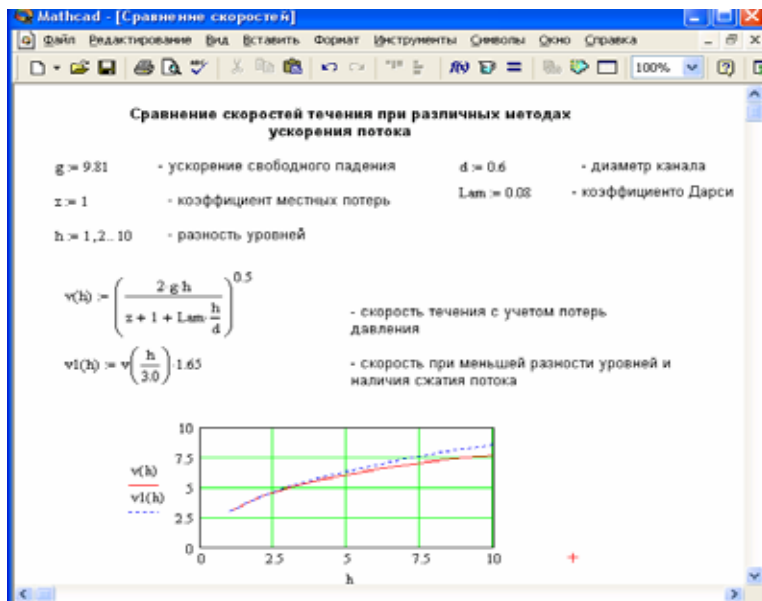


Рис. 4.7. График зависимости скорости течения при двух вариантах ускорения потока. $v(h)$ – скорость течения в канале длиной h ; $v1(h)$ – скорость течения при уменьшения напора и наличии сжатия потока

Оценим влияние двухступенчатого ускорения потока, определив скорость течения в канале при наличии потерь давления по длине и в местных сопротивлениях, и сравним ее со скоростью течения при наличии сжатия потока [33].

Зададимся приемлемыми с физической точки зрения исходными данными, которые показаны на рис. 4.7.

Приведенная ниже программа расчета в пакете Mathcad и график зависимости скорости при двух вариантах ускорения показывают, что сжатие потока (в 1,65 раза при уменьшении напора в 3,0 раза) оказывает положительное влияние на увеличение скорости, а значит, и на кинетическую энергию потока.

Можно ожидать, что после соответствующей экспериментальной проверки такой способ сможет найти применение при меньшей, чем в настоящее время, разности геометрических отметок высот между уровнями воды. Среди возможных применений можно указать, например, на приливные станции, напор которых не может быть больше высоты прилива, т. е. 7 метров.

Другой возможностью использования метода расчета возникновения/отсутствия воронки является, например, прогнозирование свойств такого течения на входе в насос или при опорожнении сосудов, а также анализ атмосферных течений типа торнадо с целью борьбы с этим природным явлением.

4.3. Магнитогазодинамический генератор

4.3.1. Введение

Магнитогазодинамический (МГД) принцип непосредственного получения электрической энергии из тепловой потенциально имеет высокую эффективность, однако многолетние попытки его реализации в виде работоспособной инженерной конструкции не увенчались успехом и

в результате большая часть стран приостановила эти исследования в середине XX века. Одна из причин такой ситуации – противоречие между требуемой высокой температурой рабочего тела (плазмы) и низкими теплофизическими и диэлектрическими свойствами материала канала, в котором она движется. В результате возникает проблема термостойкости конструкции, которая решается введением в рабочее тело ионизирующих присадок, повышающих электропроводность среды при той же температуре. Этот метод частично решает проблему увеличения электропроводности рабочего тела, но создает экономические и технологические затруднения с использованием присадок. Кроме того, плазма механически контактирует со стенками канала, в результате чего возникают большие утечки теплоты и заряда, которые понижают эффективность работы МГД генератора. Относительное влияние этих утечек уменьшается при увеличении мощности генератора, которая должна быть больше 100 МВт для приемлемой величины термодинамической эффективности процесса, что требует больших ресурсов на его создание [16]. Необходимо отметить, что используемый в МГД генераторе принцип ускорения плазмы с помощью профилированного канала не может привести к существенному уменьшению этого вида потерь в связи с необходимостью интенсивного охлаждения.

4.3.2. Возможная схема реализации

Одним из вариантов выхода из сложившейся ситуации может быть использование другого термодинамического процесса ускорения рабочего тела, который не требует твердотельного канала переменного поперечного сечения. Таким процессом может быть сжатие и ускорение потока в форме вихревой трубки, которая уже имеет пример реализации для оборудования экологического назначения.

Как уже указывалось, такое течение требует наличия твердых стенок только в осевом направлении, а в радиальном они могут быть удалены на значительное расстояние или вообще отсутствовать (рис. 4.2).

Упрощенная схема МГД генератора с использованием вихревой трубки может быть представлена в следующем виде.

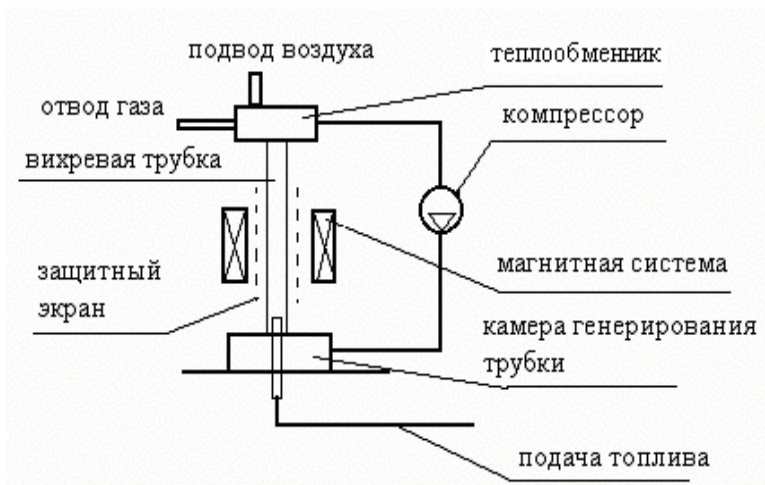


Рис. 4.8. Вариант упрощенной схемы реализации МГД генератора, использующего вихревую трубку

4.3.3. Отличительные особенности

1. Поток в вихревой трубке сжимается силами давления окружающей среды, что приводит к увеличению скорости вращения рабочего тела (в соответствии с законом сохранения количества движения) и благоприятно влияет на ионную температуру плазмы.

2. Отсутствие непосредственного контакта плазмы с твердой стенкой канала в радиальном направлении приведет к уменьшению

потерь теплоты и заряда, что позволит уменьшить тепловую мощность установки при той же ее эффективности.

3. Математическое описание такого процесса осуществляется известной системой уравнений, в которой меняется уравнение движения. Так как вихревая трубка содержит внутреннюю полость и не может быть представлена как сплошная текучая среда, необходимо использовать уравнение движения, например, в форме (2.1).

4. Такая схема реализации находится в рамках известной идеи об использовании «газового blankets» для термоизоляции плазмы, однако, в свое время, рассматриваемый в работе метод реализации не анализировался, т. к. не был известен [6]. Положительным свойством вихревой трубки для данного применения является значительная устойчивость и высокая скорость в тангенциальном направлении.

Необходимо отметить, что для получения приемлемых температур (порядка 5000 °C) необходимо соответствующее топливо, что согласуется с современным положением в области тепловых машин (известные разновидности двигателей используют разное топливо). В случае реализации данной схемы имеется вероятность использования такого течения для других технических применений. Например, исключение из схемы магнитной системы приводит к схеме длиннофакельной горелки, которая имеет самостоятельную область применения.

Таким образом, отказ от геометрического воздействия на поток рабочего тела с помощью профилированного канала и замена его процессом динамического сжатия позволяет надеяться на «реанимацию» привлекательного физического принципа.

Отличительной особенностью МГД генератора, работающего при давлениях, больших атмосферного, является необходимость использования высокотемпературных материалов с экстремальными

свойствами. Вместе с тем, как следует из физики, электропроводность газов увеличивается не только при увеличении температуры, но и при уменьшении давления. Это означает, что можно подобрать такое сочетание свойств конструкционных материалов, температуры и давления газа, которые обеспечат достаточную для работы генератора электропроводность газа при более низких температурах. Такой режим работы, очевидно, целесообразно использовать при закрытой схеме реализации генератора либо в условиях низкого давления окружающей среды, т. е. на больших высотах.

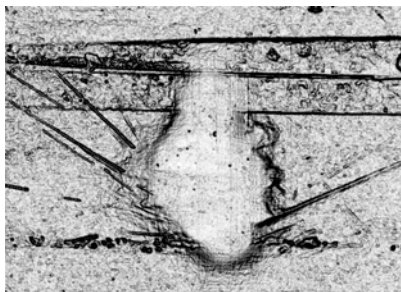


Рис. 4.9. Фотография вихревого облака аэрозоля над областью сварки

Аэрозольная вихревая трубка

С помощью установки (рис. 4.2) была получена воздушная вихревая трубка, предназначенная для локализации сварочного аэрозоля с целью его последующей очистки. На рис. 4.9 показан вид облака аэрозоля, образующегося при горении электрической дуги. Этот метод эффективно сжимает облако, а также благоприятно влияет на процесс сварки в связи с вакуумированием сварного шва. При этом вихревая трубка самоустанавливается на области с максимальной температурой, что не требует использования системы точного слежения за перемещением области сварки.

Анализ и обобщение результатов

1. В данном методе предполагается, что наиболее общей является система уравнений движения жидкости в напряжениях (1.1) [20, 31, 33]. Как показано в данной работе, использование уравнения Ньютона для расчета вязкого трения позволяет найти слагаемые в уравнении движения, учитывающие влияние касательных напряжений, не прибегая к использованию понятия скорости угловой деформации малого элемента. Отсутствие необходимости в использовании этого понятия становится понятным, если учесть, что оно введено для расчета деформационного движения жидкости, а не напряженного, к которому относится уравнение движения в напряжениях или его варианты с использованием, например, давления. Поэтому применение прямого метода нахождения касательных напряжений (метода подстановки уравнения Ньютона для трения в общее уравнение движения) является вполне логичным. Этот же метод применяется и при использовании системы уравнений Навье для конкретного вида деформируемой твердой среды [18, 28, 32].

Характерно, что в этом случае автоматически решается проблема соответствия направления скорости течения потока и направления касательных напряжений, которые должны быть противоположны. Это приводит к исключению неопределенности со знаком плюс или минус в уравнении Ньютона, который рекомендуется выбирать в соответствии с особенностями конкретной задачи [26, 33]. В итоге, выбор знака не имеет принципиального значения, так как условия взаимности касательных напряжений выполняются в любом случае (рис. 3.2).

2. В настоящее время используются две трактовки понятия «сплошная среда». Согласно гидродинамическим представлениям, в сплошной текучей среде должно быть выполнено условие гладкости термодинамических величин, например, плотности, скорости и давления

[19, 20]. В то же время в теории упругости требование относительно гладкости этих же или других функций отсутствует. Основное требование сплошности для твердой среды – отсутствие трещин, которое для текучей среды выполняется автоматически.

Анализ известных точек зрения на физику процесса движения текучей и твердой среды, а также на соответствующие уравнения позволяет считать, что трактовка понятия «сплошная среда» должна быть такой же, как в термодинамике. В то же время для ряда частных случаев например, при использовании уравнений Эйлера, общепринятая формулировка понятия сплошной текучей среды сохраняется, являясь частным случаем общей трактовки. Другие варианты сплошной среды, например, ньютоновская или невязкая, приводят к изменению системы (1.1) в соответствии с условиями существования той или иной среды. В этом случае уравнение второго закона Гука и уравнение Ньютона могут рассматриваться как реологические уравнения для частных случаев сплошной среды.

3. Данный метод приводит к изменению иерархической структуры уравнений движения. Наиболее общим в этом случае как уже указывалось, является система уравнений движения вязкой жидкости в напряжениях (1.1), которая и подлежит интегрированию. На втором, более низком уровне находится система уравнений Навье, которая отличается от предыдущей системы отсутствием конвективных слагаемых полного ускорения частицы в связи с отсутствием свойства текучести в твердом теле. Система уравнений Навье (1.5) имеет частные случаи, которые рассматриваются в теории упругости.

Анализ других частных случаев общей системы уравнений (1.1) показывает, что теоретически возможно существование следующих вариантов систем уравнений, отличающихся количеством и содержанием

принятых допущений. Рассмотрим возможные варианты условий, накладываемых на систему уравнений (1.1).

1. Пренебрегая только касательными напряжениями, т. е. $\tau = 0$.

Система уравнений (1.1) в этом случае принимает вид

$$X + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} = \frac{du_x}{dt}$$

$$Y + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} = \frac{du_y}{dt}$$

$$Z + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} = \frac{du_z}{dt},$$

или, выражая компоненты давления через напряжения ($p_x = -p_{xx}$, $p_y = -p_{yy}$, $p_z = -p_{zz}$), получим

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_x}{\partial x} + X &= \frac{du_x}{dt} \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_y}{\partial y} + Y &= \frac{du_y}{dt} \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_z}{\partial z} + Z &= \frac{du_z}{dt}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где p_{xx} , p_{yy} , p_{zz} — проекции нормального напряжения, p_x , p_y , p_z — проекции давления.

Эта система относится к такой модели текучей среды, в которой давление зависит от ориентации элементарной площадки, а касательные напряжения отсутствуют. Эту систему уравнений можно сопоставить с ранее рассмотренной моделью невязкой жидкости и использовать, например, для расчета разрывных течений. Давления в этом случае выбираются с помощью матрицы условий (2.3).

2. Пренебрегая различием в нормальных напряжениях при изменении ориентации элементарной площадки, т. е. $p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -p$.

Для такой модели среды система уравнений (1.1) принимает вид:

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + X &= \frac{du_x}{dt} \\
 -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) + Y &= \frac{du_y}{dt} \\
 -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) + Z &= \frac{du_z}{dt},
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

или, выражая касательные напряжения через компоненты скорости, с помощью закона Ньютона методом подстановки, получим

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + F_x &= \rho \frac{du_x}{dt} \\
 -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + F_y &= \rho \frac{du_y}{dt} \\
 -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) + F_z &= \rho \frac{du_z}{dt},
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

где $F_x = \rho X$, $F_y = \rho Y$, $F_z = \rho Z$.

Такая система уравнений содержит физическое противоречие, т. к. согласно современной точке зрения на движение вязкой молекулярной жидкости, давление в ней должно зависеть от ориентации элементарной площадки, т. е. одновременное выполнение условий $p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -p$ и $\tau \neq 0$ невозможно.

Из этой системы можно получить следующий частный случай, характерный для течений в ламинарном пограничном слое. Полагая, что давление вдоль оси y (в соответствии с известным свойством пограничного слоя) не меняется, второе уравнение системы (4.3) исключается. Полагая, что течение осуществляется вдоль плоской поверхности хорошо обтекаемого тела, т. е. вдоль оси x и z со сдвигом в направлении оси y , можно получить следующую систему из двух уравнений:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + F_x = \rho \frac{du_x}{dt}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + F_z = \rho \frac{du_z}{dt},$$

которая совпадает с системой уравнений трехмерного пограничного слоя [35]. Для плоского установившегося течения из последней системы можно получить уравнение Прандтля для ламинарного пограничного слоя [33, 35]. Используя свойство независимости давления по координате y , получим $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{dx}$. Полагая также, что массовые силы отсутствуют и

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = 0, \text{ получим уравнение (1.8).}$$

3. Модель течения, в котором одновременно выполняются условия $\tau = 0$ и $p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -p$.

В этом случае мы получаем систему уравнений Эйлера (1.3) для общепринятой модели идеальной жидкости.

Рассмотренные варианты уравнений для ньютоновской жидкости (4.1), (4.2) и (1.3) также могут быть линеаризованы в пределах

корректности частной задачи. Именно таким путем можно получить систему (2.1) из системы (4.1), записанной в цилиндрических координатах и с помощью обозначений теории упругости.

На рис. 4.10 представлена схема связей между уравнениями для рассмотренных в работе моделей среды. Характерно, что система уравнений в напряжениях (1.1) может иметь по два частных случая для ньютоновской и неньютоновской жидкости. Первый частный случай реализуется при использовании реологического уравнения Ньютона с получением системы уравнений (3.7). При использовании какого-либо другого реологического уравнения будут получены и другие системы уравнений движения, которых может быть достаточно много. Вторым вариантом частных случаев отличается от первого использованием допущения, относящегося к свойствам нормальных напряжений, которые должны быть все равны между собой. Касательные напряжения в этом случае, так же как и в первом, могут вычисляться по своему реологическому уравнению. К этому варианту частных случаев относятся уравнения ламинарного пограничного слоя (1.8).

Анализ корректности частных случаев системы (1.1) приводит к заключению, что существует пять вариантов математического описания движения, три из которых соответствуют представлениям, сложившимся в классической физике (рис.4.10). Один из вариантов относится к движению твердого тела и, после линеаризации, совпадает с системой уравнений Навье (1.5).

Второй вариант частных случаев выходит за рамки представлений как молекулярной физики, так и твердого тела (на схеме рис. 4.10 ключевое условие показано пунктиром). Область корректного использования этого пути, если она существует, в настоящее время неизвестна.

На этой схеме нет системы уравнений Навье-Стокса, что связано с существованием ранее отмеченных противоречий.

Из схемы рис. 4.10 следует, что модель идеальной жидкости является самостоятельной (т. е. не связанной с системой Навье-Стокса), а соответствующая ей система уравнений (1.3) является частным случаем системы (1.1) при одновременном выполнении двух условий.

4. Проблемы с получением общего решения системы Навье-Стокса привели к методу их упрощения, предложенному Прандтлем, что позволило существенно продвинуться в решении задач механики жидкости [20, 31, 35]. Однако оборотной стороной этого метода упрощения, явилось искусственное деление потока на две части: основной поток, движение которого описывается системой Навье-Стокса (или Эйлера), и пограничный слой, расчет движения которого выполняется с помощью уравнений пограничного слоя.

Настоящий метод устраняет такое деление и рассматривает поток как единое целое с системой уравнений (1.1) или (3.7), а также ее частными случаями, изложенными в п. 3. В таком варианте трактовки течения, пограничный слой является заторможенной частью основного потока, причем уравнения движения обеих частей является одинаковыми.

Расчет течения ньютоновской жидкости в пограничном слое должен в общем случае выполняться с помощью системы (3.7) при других граничных условиях, соответствующих условиям прилипания на стенке. В этом случае отсутствует необходимость сращивания решений двух уравнений, как это необходимо выполнять в настоящее время [20, 31].

5. Рассмотренные в п. 3 модели и уравнения имеют разную степень общности и требуют для замыкания разное количество дополнительных уравнений. Наиболее общей является система (1.1), которая содержит девять неизвестных – шесть проекций напряжений и три проекции скорости. Массовые силы и теплофизические свойства среды обычно задаются и, как правило, не входят в состав неизвестных величин. Такое же количество неизвестных содержит и система уравнений Навье (1.5).

Система (4.2) содержит семь неизвестных – давление, три касательных напряжения и три компоненты скорости.

Система (4.1) содержит шесть неизвестных – три компоненты нормального напряжения и три компоненты скорости.

Система уравнений Эйлера (1.3), так же как и система Навье-Стокса, содержит четыре неизвестных – давление и три компоненты скорости.

6. Как известно, существует большое число вязкопластических сред, для которых закон Ньютона для вязкого трения не выполняется. Данный метод позволяет найти уравнения движения таких сред, используя тот же метод подстановки других известных реологических уравнений для нахождения касательных напряжений в систему (1.1). Существует много реологических законов, отражающих свойства различных жидкостей. В этой связи интересно поведение вязкоупругих сред, обладающих как текучестью с влиянием вязкого трения, так и свойствами упругого тела, восстанавливающего свою форму [20]. Такие физические свойства нашли свое отражение, например, в зависимости Фойхта, в которой общее касательное напряжение τ представляется суммой упругого τ_1 и вязкого τ_2 напряжения.

Предложенная формула для этих сред имеет вид

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = G\varepsilon + \mu\varepsilon';$$

где ε — деформация сдвига, G — модуль сдвига, μ — коэффициент динамической вязкости, ε' — скорость сдвига. Использование такой закономерности требует и соответствующего уравнения движения, в котором можно было бы учесть оба вида касательных напряжений. Как следует из данной работы, таким уравнением может быть система уравнений (1.1), которая принципиально должна быть применима для сред с любым реологическим законом. Необходимо отметить, что использование реологических законов, отличных от закона Ньютона, требует шести дополнительных уравнений, необходимых для замыкания системы уравнений движения. С этой точки зрения, уравнение Ньютона не только дает простую зависимость между касательными напряжениями и градиентами скорости, но и уменьшает количество замыкающих уравнений.

7. В теории упругости различают напряженное состояние, целью расчета которого является нахождение напряжений, и деформированное состояние, целью расчета которого является определение перемещений. В настоящей работе рассматриваются некоторые проблемы расчета напряженного состояния текучей среды и не затрагивается использование параметров деформационного движения. В то же время деформации (и перемещения) в текучей среде должны быть более значительными, чем в твердом теле, и интерпретация уравнений совместности, применительно к расчету деформационного движения текучей среды, является весьма актуальной.

8. Анализируя место рассматриваемого в работе метода расчета движения жидкости в задаче расчета процесса движения, можно заключить, что он представляет собой самостоятельный метод, в основе которого лежит система уравнений движения жидкости в напряжениях. Слагаемые этой системы могут вычисляться по различным уравнениям, в зависимости от рассматриваемой модели. Например, для твердого тела

касательные напряжения вычисляются из условия их пропорциональности деформациям, а для жидкости или газа – скоростям деформации, для идеальной жидкости нормальные напряжения в точке не зависят от направления, а касательные напряжения равны нулю и т. д. Это дает основания поднять статус системы (1.1) и считать ее системой уравнений движения материальной среды независимо от наличия или отсутствия в этой среде свойства текучести, что позволяет надеяться на возможность использования системы (1.1) для расчета движения и других физических полей.

9. Рассматриваемый метод, кроме физико-математического аспекта, имеет и философское обобщение, относящееся к теории познания. Так, известные точные решения частных задач, полученные с помощью системы Навье-Стокса, могут быть найдены и из системы (3.7), что противоречит принципу единственности и требует более точного определения области применения систем (1.2) и (3.7), на что обращается внимание в п. 10.

Необходимо отметить, что система (3.7) может использоваться для расчета течений с негладким распределением функций процесса, например, по уравнениям (2.6) или (3.14), т. е. область использования системы уравнений (3.7) шире, чем системы уравнений Навье-Стокса.

В основе рассматриваемого метода, так же как и метода, использующего уравнение Навье-Стокса, лежит уравнение (1.1), однако конкретизация последней системы уравнений для расчета движения ньютоновской жидкости выполняется другим путем, который совпадает с используемым в другой области механики — теории упругости. Такой подход к анализу уравнений движения сплошной среды согласуется с понятиями интертеоретических отношений [29]. Системы уравнений (1.1) и (3.7) имеют более разветвленную схему частных случаев (рис. 4.10), чем система Навье-Стокса. С помощью системы (1.1) можно получить уже

известные системы и уравнения /уравнения (1.3), (1. 6), (1.8).../, а также новые математические выражения как в форме общих систем уравнений, так и их частных случаев /уравнения (1.9), (2.1),(2.19), (3.13)/.

10. Рассмотренный метод расчета движения позволяет выполнить анализ причин отсутствия решений системы Навье-Стокса уже при малых числах Рейнольдса. Как следует из сравнения этой системы и системы уравнений Эйлера для идеальной жидкости, данная проблема возникает в связи с учетом вязкости, в связи с чем обратимся к уже рассматриваемой физической трактовке трех слагаемых (3.8), учитывающих влияние касательных напряжений. Наличие двух различных и положительно влияющих факторов (в форме сдвига скорости и конвективного ускорения) на величину расчетных касательных напряжений приводит к их быстрому росту, что затрудняет существование течения при конечном перепаде давления. Такое влияние касательных напряжений показывает, что система Навье-Стокса должна давать правильный результат расчета течения, но не для ньютоновской жидкости, а для «виртуальной» среды с парадоксальным набором механических свойств. Эти свойства характеризуются независимостью давления от ориентации площадки, что характерно для идеальной жидкости, и в то же время совместным влиянием процессов сдвига и инерции на величину касательных напряжений. Из изложенных результатов следует, что поиск решения системы Навье-Стокса является нерациональным, так как отмеченный парадоксальный набор механических свойств противоречит представлениям о течении вязких сред. Область практического применения этой системы уравнений (1.2), если она существует, должна находиться за пределами молекулярной физики.

Отмеченные недостатки не умаляют значения уравнений Навье-Стокса, а требуют дополнительного анализа его особенностей, что может привести к новым результатам.

Л и т е р а т у р а

1. Бубнов В. А. Об уравнениях гидродинамики для разрывных потоков. // Энергоперенос в каналах. Наука и техника – Минск, 1970. – С. 161 – 178.
2. Бударин В. А. Метод нахождения уравнений движения разрывного потока. // Теплообмен – 4 ММФ. Минск: ИТМО АНБ, 2000. Т. 1. – С. 238-241.
3. Бударин В. А. Метод расчета движения идеальной жидкости. // Теплообмен – 5 ММФ. Минск: ИТМО АНБ, 2004.
4. Бударин В.А. Экспериментальное получение и аналитическое исследование некоторых свойств свободного вихря. // Инж. – Физ. журн. -1995. - Т. 68. - № 2. - С. 212-217.
5. Бударин В. А. Взаимодействие стационарной вихревой трубки с безграничной плоскостью. // Инж.- Физ. журн. – 1998. – Т. 70, № 4. - С. 662 – 666.
6. Вихревая термоизоляция плазмы. / Сб. научн. трудов. Под ред. проф. М. А. Гольдштика, Новосибирск, ИТФ СО АН СССР. - 1979.
7. Волчков Э. П., Семенов С. В., Терехов В. И. О торцевом пограничном слое в вихревой камере. // Структура вынужденных и термогравитационных течений. – Новосибирск, 1983. - С. 51 – 87.
8. Вязкие течения с парадоксальными свойствами / Гольдштик М. А., Штерн В. Н., Яворский Н. И . – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989. - 336 с.
9. Гольдштик М. А. Вихревые потоки. – Новосибирск: Наука, 1984.- 366 с.
10. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей. - Л.: Гидрометеиздат, 1975. - 304 с.
11. Демидов С. П. Теория упругости. Учебник для вузов. - М., Высш. школа, 1979. - 432 с.

12. Интенсивные атмосферные вихри / Под ред. Бенгстона, М., Мир, 1983 – 587 с.
13. Исаченко В. П, Осипова В. А., Сукомел А. С. Теплопередача. Энергоиздат, М.: 1981. - 417 с.
14. Катков В. Л. Течение жидкости под действием внешнего вихря // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.-1973.-Т. 9, № 3.- с. 326-330.
15. Кид. Мл. Фарис (Теннеси). Потенциальное течение вблизи неподвижной поверхности. ТР. Амер. Об-ва инж-мех. Прикладная мех. 1968. - С. 1 - 8.
16. Кириллин В. А., Сычев В. В., Шейндлин А. Е. Техническая термодинамика. М., Энергоатомиздат, 1983. - 416 с.
17. Справочник по теплогидравлическим расчетам: (Ядерные реакторы, теплообменники парогенераторы). Под общ. ред. П. Л. Кириллова. М.: Энергоатомиздат, 1984. - 296 с.
18. Колтунов М. А. и др. Упругость и прочность цилиндрических тел. Учебн. Пособие для вузов. М., Высш. школа, 1975. - 526 с.
19. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. - 744 с.
20. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. Изд. 5, переработанное. ГРФМЛ издательства Наука, М., 1978. - 736 с.
21. Малогабаритный МГД [генератор](http://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/5112.html).
(<http://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/5112.html>)
22. Мартыненко О. Г. и др. Экспериментальные исследования вихревых трубок. – Сб. Процессы тепло– и массообмена в элементах термооптических устройств. Минск: ИТМО им. А. В. Лыкова АН БССР, 1979. - С. 79 – 109
23. Моделирование атмосферных вихревых образований. / Бобор В. А. и др. Сб. Эволюционные задачи энергопереноса в неоднородных средах. Минск, ИТМО, 1982. - С. 3 – 19.
24. Наливкин Д. В. Смерчи. М., Наука, 1984. - 110 с.

25. Основы автоматического управления. Под ред. В. С. Пугачева. М.; Наука, 1974. - 719 с.
26. Патрашев А. Н. Прикладная гидромеханика. М.: Воениздат, 1970.- 688с.
27. Подгорный А. Н. Основы и методы прикладной теории упругости. К.: Вища школа, 1981. - 325 с.
28. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. Учебн. пособие для вузов. – 2-е изд., испр. – М. Наука. ГРФМЛ, 1988. - 712 с.
29. Рузавин Г. И. Научная теория. Логико-методологический анализ. М.: Мысль, 1978. – 245 с.
30. Уравнения математической физики. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, М., Наука, 1977. - 736 с.
31. Фабрикант Н. Я. Аэродинамика. М., Наука, 1964. - 814 с.
32. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. Изд. 6. М., Наука, 1972.- 544с.
33. Френкель Н. З. Гидравлика. ГЭИ., М.: 1956. - 456 с.
34. Штеренлихт Д. В. Гидравлика: Учебн. для вузов. – 2-е изд., - М.: Энергоатомиздат, 1991. - 367 с.
35. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. Изд-во иностр. лит-ры., М., 1974. - 711 с
36. Guilloud J. C., Arnault J., Dicerescenzo C. Etude d'une nouvelle famille de solutions des equations de Navier – Stokes //J. Mec. – 1973.–V. 12, N 1.– P. 47-74.

Оглавление

Предисловие	3
Введение	5
Глава 1. Краткий обзор и анализ методов	
расчета процесса движения	11
1.1. Основные дифференциальные уравнения движения жидкости.....	11
1.2. Основные дифференциальные уравнения движения твердого тела.....	14
1.3. Другие методы расчета.....	18
1.4. Некоторые частные задачи механики жидкости.....	19
1.4.1. Упрощение системы Навье-Стокса.....	19
1.4.2. Распределение давления во вращающейся жидкости.....	22
1.4.3. Взаимодействие вихревой трубки с неподвижной плоскостью.....	23
1.5. Некоторые частные задачи теории упругости.....	25
1.5.1. Задача Ламе.....	25
1.5.2. Вращение толстостенной трубы.....	26
1.6. Краткий анализ основных уравнений.....	28
1.7. Анализ движения сплошных и разрывных сред.....	34
Глава 2. Метод расчета движения невязкой	
жидкости	43
2.1. Введение.....	43

2.2. Постановка задачи.....	44
2.3. Уравнения движения.....	45
2.4. Условия для разрывных течений.....	47
2.5. Связи между уравнениями движения.....	48
2.6. Вращающаяся жидкости.....	51
2.6.1. Введение.....	51
2.6.2. Уравнения движения.....	52
2.7. Вихревая трубка.....	59
2.7.1. Общие положения.....	59
2.7.2. Несжимаемая трубка.....	63
2.7.3. Политропная трубка.....	67
2.7.4. Сравнительный анализ вихревых трубок.....	73
Глава 3. Метод расчета движения вязкой жидкости.....	79
3.1. Введение.....	79
3.1.1. О геометрической интерпретации закона Ньютона.....	79
3.2. Уравнения движения.....	85
3.2.1. Связи между уравнениями.....	92
3.3. Применение метода к некоторым частным задачам.....	93
3.3.1. Ламинарное течение в трубе.....	94
3.3.2. Разгонное течение.....	97
3.3.3. Уравнения пограничного слоя.....	98
3.3.4. Торцевой эффект на безграничной плоскости.....	99
Глава 4. Демонстрационные эксперименты.....	107
4.1. Принцип работы экспериментальной установки и ее схема.....	107

4.2. Использование водяной воронки.....	112
4.3. Магнитогазодинамический генератор.....	114
4.3.1. Введение.....	114
4.3.2. Возможная схема реализации.....	115
4.3.3. Отличительные особенности.....	116
Анализ и обобщение результатов.....	119
Литература.....	131

Бударін В. О. Метод розрахунку руху рідини. — Одеса:
Б 903 Астропрінт, 2006.—137 с.
Рос. Мовою.
ISBN 966-318-519.8.

У монографії виконано порівняльний аналіз рівнянь руху рідини та твердого тіла в напруженнях. У результаті порівняння показано, що можливо здобути рівняння руху вязкої рідини з довільним реологічним рівнянням. Розглянуто використання методу для розрахунку деяких відомих та нових задач.

Книга призначена для аспірантів, інженерів та наукових співробітників, що займаються теоретичними і прикладними проблемами механіки рідини, конвективного теплообміну та теплоенергетики.

Б 1604100000-058 Без оголош.
318-2006

ББК 22.365
УДК 539.3.01: 532.12

Наукове видання

Бударін Віталій Олександрович

Метод розрахунку руху рідини

Монографія

Російською мовою

Книга видана в авторській редакції

Зав. редакцією Т.М.Забанова
Коректор О.Г.Дайбова

Здано у виробництво 12.04.06. Підписано до друку . Формат 60x84/16
Папір офсетний. Друк офсетний. Ум. друк. арк. .
Тираж 300 прим. Зам. № 179.

Надруковано з готового оригінал-макета

Видавництво і друкарня “Астропрінт”
(Свідоцтво ДК №1373 від 28.05.2003р.)
65082, м.Одеса, вул. Преображенська, 24.
Тел.: (048) 26-98-82, 26-96-82, (0482)37-14-25.
www.astroprint.odessa.ua