В. Г. Болтянский
Н. Я. Виленкин

СИММЕТРИЯ В АЛГЕБРЕ

ВТОРОЕ ИЗДАНИЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО ЦЕНТРА
НЕПРЕРЫВНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

МОСКВА 2002

УДК 512.32
ББК 22.14
Б79

Печатается по изданию
В. Г. Болтянский, Н. Я. Виленкин. Симметрия в алгебре. — М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1967.

Болтянский В. Г., Виленкин Н. Я.
Б79 Симметрия в алгебре. — 2-е изд. — М.: МЦНМО, 2002. — 240 с. — ISBN 5-94057-041-0.

Решение многих задач элементарной алгебры значительно облегчается, если использовать симметричность условия задачи. В этой книге рассказывается, как использовать симметрию при решении систем уравнений, иррациональных уравнений, неравенств и т. д. Все эти задачи решаются единообразным методом, основанным на теории симметрических многочленов.

Книга будет полезна школьникам, готовящимся к конкурсным экзаменам, студентам пединститутов и учителям математики.

ББК 22.14

ISBN 5-94057-041-0

Владимир Григорьевич Болтянский, Наум Яковлевич Виленкин.

Симметрия в алгебре.

М.: МЦНМО, 2002. — 240 с.

Редактор *М. Ю. Панов.*
Младший редактор *А. Ф. Юлдашев.*
Технический редактор *С. В. Крыгина.*
Корректор *Ю. Л. Притыкин.*

Изд. лицензия № 01335 от 24/III 2000 года. Сдано в набор 3/VII 2002 года. Подписано в печать 22/VIII 2002 года. Формат 60×88 $^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Гарнитура обыкновенная новая. Объём 15 печ. л. = 00,00 уч.-изд. л. Тираж 2000 экз. Заказ 1990.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Г-2, Бол. Власьевский пер., 11. Тел. 241 05 00.

Набрано и отпечатано в ФГУП «Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ».
140010, г. Люберцы Московской обл., Октябрьский пр-т, 403. Тел. 554 21 86.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Одним из самых сложных для школьников разделов алгебры является решение систем уравнений высших степеней.

Для квадратного уравнения с одним неизвестным

$$x^2 + px + q = 0$$

выводится формула

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

указывающая стандартный путь решения. Для систем уравнений первой степени тоже есть стандартные приёмы решения (исключение неизвестных, уравнивание коэффициентов и т. д.). Однако для систем уравнений высших степеней дело обстоит сложнее.

Наиболее общим способом решения таких систем является *метод исключения неизвестных*. Мы поясним его на примере следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ 2x^2 + y^2 = 19. \end{cases}$$

Решим первое уравнение относительно неизвестного y. Мы находим $y = 4 - x$. Подставив полученное для y выражение во второе уравнение, получаем новое уравнение, содержащее только одно неизвестное x:

$$2x^2 + (4 - x)^2 = 19.$$

После очевидных упрощений приходим к уравнению

$$3x^2 - 8x - 3 = 0,$$

решая которое, находим два корня

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -\frac{1}{3}.$$

Каждому из этих корней соответствует определённое значение y (которое мы находим с помощью равенства $y=4-x$):

$$y_1=1, \quad y_2=\frac{13}{3}.$$

Проверка показывает, что оба найденных решения

$$\begin{cases} x_1=3, \\ y_1=1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=-\dfrac{1}{3}, \\ y_2=\dfrac{13}{3} \end{cases}$$

удовлетворяют заданной системе уравнений.

Метод исключения неизвестных является весьма общим. Теоретически из любой системы двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными можно, исключая одно неизвестное, получить уравнение относительно второго неизвестного. Однако не всегда процесс исключения является столь простым, как в разобранном выше примере. Наибольшим же неудобством метода исключения является то, что он часто приводит к уравнению очень высокой степени. В высшей алгебре доказывается, что если одно уравнение системы (содержащей два неизвестных) имеет степень n, а второе — степень m, то после исключения, как правило, получается уравнение степени mn.

Возьмём, например, систему

$$\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ x^3+y^3=9. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим: $x^2=5-y^2$, и потому

$$x^2=(5-y^2)^3=125-75y^2+15y^4-y^6.$$

Точно так же из второго уравнения получаем: $x^3=9-y^3$, и потому

$$x^6=81-18y^3+y^6.$$

Приравнивая найденные значения для x^6, получаем уравнение, содержащее только одно неизвестное y:

$$2y^6-15y^4-18y^3+75y^2-44=0.$$

Однако это уравнение имеет *шестую* степень ($2\cdot 3=6$ — в полном соответствии с упомянутой теоремой высшей алгебры), а формулы для решения уравнений шестой степени у школьника*) нет! Таким образом, метод исключения завёл нас в тупик.

Из-за этих недостатков метод исключения (при решении систем уравнений высших степеней) используют в школе довольно редко. Обычно стараются решить систему с помощью какого-нибудь искусственного приёма. Но общих правил отыскания таких приёмов нет. Каждая система решается своим методом, и опыт, полученный при решении одной системы, мало помогает при решении другой. В результате этот раздел школьной математики превращается в набор головоломок и отдельных кустарных методов их решения.

Цель настоящей книги — познакомить читателя с одним довольно общим методом решения систем уравнений высших степеней. Он не столь универсален, как метод исключения, так как может быть применён не ко всякой системе. Однако этот метод применим к большинству систем, с которыми сталкивается школьник. Существенно, что, в отличие от метода исключения, он приводит не к повышению, а к понижению степени уравнений.

Метод, о котором идёт речь, основан на использовании теории так называемых *симметрических многочленов*. Читатель увидит, что сама теория очень проста и что она позволяет решать не только многие системы алгебраических уравнений, но и различные другие алгебраические задачи (решение иррациональных уравнений, доказательство тождеств и неравенств, разложение на множители и т. д.). Ряд задач этих типов будет разобран в тексте книги, а в конце каждого раздела читатель найдёт задачи для самостоятельного решения. Среди этих задач есть и весьма трудные; некоторые из них предлагались на математических олимпиадах. С помощью теории симметрических многочленов решение этих задач заметно упрощается и, что самое главное, проводится стандартным приёмом.

---

*) Да и не только у школьника: как доказал великий норвежский математик Нильс Хенрик Абель, не существует формулы, позволяющей с помощью конечного числа действий (сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения корней) решить общее уравнение пятой (или более высокой) степени.

§ 1. СИММЕТРИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ ОТ x И y

1. Примеры симметрических многочленов. Раскроем книгу В. Б. Лидского, Л. В. Овсянникова, А. Н. Тулайкова и М. И. Шабунина «Задачи по элементарной математике» (М., 1960). Среди наиболее трудных задач на решение систем уравнений высших степеней мы находим там (на стр. 11—12) следующие:

1) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=4, \\ x+xy+y=2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y=a+b, \\ x^2+y^2=a^2+b^2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^3+y^3=5a^3, \\ x^2y+xy^2=a^3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=91, \\ x^2-xy+y^2=7; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2(x+y)=5xy, \\ 8(x^3+y^3)=65; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x+y=1, \\ x^4+y^4=7; \end{cases}$

7) $\begin{cases} (x^2+1)(y^2+1)=10, \\ (x+y)(xy-1)=3; \end{cases}$

8) $\begin{cases} x^2+y^2=axy, \\ x^4+y^4=bx^2y^2. \end{cases}$

Все эти системы имеют одно общее свойство — левые части уравнений являются многочленами, в которые x и y входят одинаковым образом. Именно для таких систем уравнений и применимы излагаемые далее методы решения.

Многочлены, в которые x и y входят одинаковым образом, называют симметрическими. Точнее говоря:

Многочлен от x и y называют *симметрическим*, если он не изменяется при замене x на y, а y на x.

Многочлен x^2y+xy^2 — симметрический. Напротив, многочлен x^3-3y^2 не является симметрическим: при замене x на y, а y на x он превращается в многочлен y^3-3x^2, который не совпадает с первоначальным.

Приведём важнейшие примеры симметрических многочленов. Как известно из арифметики, сумма двух чисел не меняется при перестановке слагаемых, т. е.

$$x + y = y + x$$

для любых чисел x и y. Это равенство показывает, что многочлен $x + y$ является симметрическим.

Точно так же из закона коммутативности умножения

$$xy = yx$$

следует, что произведение xy является симметрическим многочленом.

Симметрические многочлены $x + y$ и xy являются самыми простыми. Их называют *элементарными симметрическими многочленами* от x и y. Для них используют специальные обозначения*):

$$\sigma_1 = x + y, \quad \sigma_2 = xy.$$

Кроме σ_1 и σ_2, нам часто будут встречаться так называемые *степенные суммы*, т. е. многочлены $x^2 + y^2$, $x^3 + y^3$, ..., $x^n + y^n$, ... Принято обозначать многочлен $x^n + y^n$ через s_n. Таким образом,

$$\begin{aligned} s_1 &= x + y, \\ s_2 &= x^2 + y^2, \\ s_3 &= x^3 + y^3, \\ s_4 &= x^4 + y^4, \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

2. Основная теорема о симметрических многочленах от двух переменных. Существует простой приём, позволяющий получать симметрические многочлены. Возьмём любой (вообще говоря, не симметрический) многочлен от σ_1 и σ_2 и подставим в него вместо σ_1 и σ_2 их выражения через x и y. Ясно, что при этом мы получим симметрический многочлен от x и y (ведь ни $\sigma_1 = x + y$, ни $\sigma_2 = xy$ не меняются при перестановке местами x и y, а потому не меняется и весь получившийся многочлен, выражающийся через $x + y$ и xy). Например, из многочлена $\sigma_1^3 - \sigma_1\sigma_2$ получаем симметрический многочлен

$$(x + y)^3 - (x + y)xy = x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3.$$

Итак,

если взять любой многочлен от σ_1 и σ_2 и подставить в него вместо σ_1 и σ_2 их выражения $\sigma_1 = x + y$, $\sigma_2 = xy$, то получится симметрический многочлен от x и y.

---

*) σ — греческая буква («сигма»).

Возникает вопрос, является ли этот приём построения симметрических многочленов общим, т. е. можно ли с его помощью получить любой симметрический многочлен?

Рассмотрение примеров делает это предположение вероятным. Например, степенные суммы s_1, s_2, s_3, s_4 без труда выражаются через σ_1 и σ_2:

$$
\begin{aligned}
&s_1 = x + y = \sigma_1;\\
&s_2 = x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = \sigma_1^2 - 2\sigma_2;\\
&s_3 = x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = (x+y)((x+y)^2 - 3xy) = \sigma_1(\sigma_1^2 - 3\sigma_2);\\
&s_4 = x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (\sigma_1^2 - 2\sigma_2)^2 - 2\sigma_2^2.
\end{aligned}
$$

В качестве следующего примера возьмём симметрический многочлен $x^3y + xy^3$. Мы имеем:

$$x^3y + xy^3 = xy(x^2 + y^2) = \sigma_2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2).$$

Разбор дальнейших примеров даёт тот же результат: какой бы симметрический многочлен мы ни взяли, после более или менее сложных выкладок его удаётся выразить через элементарные симметрические многочлены σ_1 и σ_2. Таким образом, примеры приводят нас к предположению о справедливости следующей теоремы:

Теорема. Любой симметрический многочлен от x и y можно представить в виде многочлена от $\sigma_1 = x + y$ и $\sigma_2 = xy$.

Разумеется, даже миллион разобранных примеров не может заменить доказательства*) — всегда остаётся опасность, что найдётся миллион первый симметрический многочлен, не выражающийся через σ_1 и σ_2.

---

*) История математики знает несколько ярких случаев ошибочности утверждений, подмеченных на примерах. Французский математик Пьер Ферма, рассматривая числа вида $2^{2^n} + 1$, нашёл, что при $n = 1$, 2, 3 и 4 эти числа являются простыми. Он полагал, что и при любом натуральном n число $2^{2^n} + 1$ будет простым. Но это неверно: Леонард Эйлер показал, что уже при $n = 5$ получается десятизначное число $2^{32} + 1$, не являющееся простым (оно делится на 641).

Другой пример (также указанный Эйлером). Если в трёхчлен $n^2 + n + 41$ подставить вместо n значение 0, то получим простое число 41. При $n = 1$ также получаем простое число 43. Подставляя в трёхчлен последовательно числа $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$, продолжаем в качестве значений трёхчлена всё время получать простые числа. Напрашивается вывод: трёхчлен $n^2 + n + 41$ при любом целом $n \geqslant 0$ даёт простое число. Но это неверно! При $n = 0, 1, 2, \ldots, 38, 39$ действительно получаются простые числа. Но уже при $n = 40$ трёхчлен принимает значение $40^2 + 40 + 41 = 1681 = 41^2$, являющееся составным числом. Эти примеры показывают, что проверка предполагаемой закономерности на примерах не может заменить общего доказательства.

Переходим к доказательству сформулированной теоремы. Мы проведём его в два приёма.

3. Выражение степенных сумм через σ_1 и σ_2. Сначала мы докажем теорему не для любых симметрических многочленов, а лишь для степенных сумм. Иными словами, мы установим, что

каждую степенную сумму $s_n = x^n + y^n$ можно представить в виде многочлена от σ_1 и σ_2.

С этой целью мы умножим обе части равенства $s_{k-1} = x^{k-1} + y^{k-1}$ на $\sigma_1 = x + y$. Получим:

$$\sigma_1 s_{k-1} = (x+y)(x^{k-1} + y^{k-1}) = x^k + xy^{k-1} + x^{k-1}y + y^k = \\ = x^k + y^k + xy(x^{k-2} + y^{k-2}) = s_k + \sigma_2 s_{k-2}.$$

Таким образом,

$$s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2}. \tag{1}$$

Из этой формулы и вытекает справедливость нашего утверждения. В самом деле, раньше мы уже проверили (стр. 10), что степенные суммы s_1 и s_2 представляются в виде многочленов от σ_1 и σ_2. Но если нам уже известно, что степенные суммы $s_1, s_2, \ldots, s_{k-2}, s_{k-1}$ выражаются в виде многочленов от σ_2 и σ_2, то, подставляя эти выражения в формулу (1), мы получим выражение степенной суммы s_k через σ_1 и σ_2. Иными словами, мы можем последовательно находить выражения степенных сумм через σ_1 и σ_2: зная s_1 и s_2, находим по формуле (1) s_3, затем s_4, s_5 и т. д. Ясно, что рано или поздно мы получим выражение любой степенной суммы s_n через σ_1 и σ_2. Таким образом, наше утверждение доказано*).

Формула (1), составляющая основу изложенного доказательства, позволяет не только утверждать, что s_n как-то выражается через σ_1 и σ_2, но также позволяет последовательно вычислять выражения степенных сумм s_n через σ_1 и σ_2. Так, с помощью формулы (1) мы последовательно находим**):

$$s_3 = \sigma_1 s_2 - \sigma_2 s_1 = \sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - \sigma_2\sigma_1 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2;$$
$$s_4 = \sigma_1 s_3 - \sigma_2 s_2 = \sigma_1(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2) - \sigma_2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2;$$
$$s_5 = \sigma_1 s_4 - \sigma_2 s_3 = \sigma_1(\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2) - \sigma_2(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2) = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2$$

*) Применённый метод доказательства носит название *метода математической индукции*. Подробнее об этом методе можно прочитать в книге И. С. Соминского «Метод математической индукции», М.: Физматгиз, 1961.

**) Сравните полученные значения степенных сумм s_3 и s_4 с формулами, которые были получены на стр. 10.

и т. д. В табл. 1 сведены выражения степенных сумм $s_1, s_2, \ldots, s_{10}$ через σ_1 и σ_2; эти выражения будут нам полезны при решении задач. Рекомендуем читателю самостоятельно построить эту таблицу с помощью формулы (1).

Таблица 1

Выражения степенных сумм $s_n = x^n + y^n$ через $\sigma_1 = x + y$ и $\sigma_2 = xy$

s_1	σ_1	s_6	$\sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3$
s_2	$\sigma_1^2 - 2\sigma_2$	s_7	$\sigma_1^7 - 7\sigma_1^5\sigma_2 + 14\sigma_1^3\sigma_2^2 - 7\sigma_1\sigma_2^3$
s_3	$\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$	s_8	$\sigma_1^8 - 8\sigma_1^6\sigma_2 + 20\sigma_1^4\sigma_2^2 - 16\sigma_1^2\sigma_2^3 + 2\sigma_2^4$
s_4	$\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2$	s_9	$\sigma_1^9 - 9\sigma_1^7\sigma_2 + 27\sigma_1^5\sigma_2^2 - 30\sigma_1^3\sigma_2^3 + 9\sigma_1\sigma_2^4$
s_5	$\sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2$	s_{10}	$\sigma_1^{10} - 10\sigma_1^8\sigma_2 + 35\sigma_1^6\sigma_2^2 - 50\sigma_1^4\sigma_2^3 + 25\sigma_1^2\sigma_2^4 - 2\sigma_2^5$
		...	....

4. Доказательство основной теоремы. Теперь нетрудно завершить доказательство теоремы, сформулированной на стр. 10. Любой симметрический многочлен от x и y содержит (после приведения подобных членов) слагаемые двух видов.

Во-первых, могут встретиться одночлены, в которые x и y входят в одинаковых степенях, т. е. одночлены вида ax^ky^k. Ясно, что

$$ax^ky^k = a(xy)^k = a\sigma_2^k,$$

т. е. одночлены этого вида непосредственно выражаются через σ_2.

Во-вторых, могут встретиться одночлены, имеющие разные степени относительно x и y, т. е. одночлены вида bx^ky^l, где $k \neq l$. Ясно, что вместе с одночленом bx^ky^l симметрический многочлен содержит также и одночлен bx^ly^k, получаемый из bx^ky^l перестановкой букв x и y. Иными словами, в симметрический многочлен входит двучлен вида $b(x^ky^l + x^ly^k)$. Предполагая для определённости $k < l$, мы сможем переписать этот двучлен следующим образом:

$$b(x^ky^l + x^ly^k) = bx^ky^k(y^{l-k} + x^{l-k}) = b\sigma_2^k s_{l-k}.$$

А так как по доказанному степенная сумма s_{l-k} представляется в виде многочлена от σ_1 и σ_2, то и рассматриваемый двучлен выражается через σ_1 и σ_2.

Итак, каждый симметрический многочлен представляется в виде суммы одночленов вида ax^ky^k и двучленов вида $b(x^ky^l + x^ly^k)$, каждый из которых выражается через σ_1 и σ_2. Следовательно, любой симметрический многочлен, представляется в виде многочлена от σ_1 и σ_2. Теорема полностью доказана.

Рассмотрим пример. Пусть дан симметрический многочлен

$$f(x, y) = x^5 + 3x^3y^2 - x^3y^3 + 2xy^4 - 7x^2y^2 + y^5 + 3x^2y^3 - 5xy^3 - 5x^3y + 2x^4y.$$

Разбивая его на одночлены и двучлены, как указано в доказательстве, получаем:

$$f(x, y) = -x^3y^3 - 7x^2y^2 + (x^5 + y^5) + 3(x^3y^2 + x^2y^3) + \\ + 2(xy^4 + x^4y) - 5(xy^3 + x^3y),$$

или, иначе,

$$f(x, y) = -x^3y^3 - 7x^2y^2 + (x^5 + y^5) + 3x^2y^2(x + y) + \\ + 2xy(x^3 + y^3) - 5xy(x^2 + y^2) = \\ = -\sigma_2^3 - 7\sigma_2^2 + s_5 + 3\sigma_2^2\sigma_1 + 2\sigma_2 s_3 - 5\sigma_2 s_2.$$

Подставляя, наконец, выражения степенных сумм через σ_1 и σ_2 (см. табл. 1), получаем окончательно:

$$f(x, y) = -\sigma_2^3 - 7\sigma_2^2 + (\sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2) + 3\sigma_1\sigma_2^2 + \\ + 2\sigma_2(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2) - 5\sigma_2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) = \\ = \sigma_1^5 - 3\sigma_1^3\sigma_2 - 5\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_1\sigma_2^2 - \sigma_2^3 + 3\sigma_2^2.$$

5. Теорема единственности*). Мы видим, что если дан симметрический многочлен от x, y (не слишком высокой степени), то выразить его через σ_1 и σ_2 несложно. Изложенное выше доказательство основной теоремы как раз и содержит приём, позволяющий выразить любой симметрический многочлен $f(x, y)$ через элементарные симметрические многочлена σ_1 и σ_2. Естественно возникает вопрос: не может ли найтись какой-либо другой приём, который приведёт к иному выражению многочлена $f(x, y)$ через σ_1 и σ_2? Оказывается, что это невозможно: каким бы путём мы ни воспользовались для выражения симметрического многочлена $f(x, y)$ через σ_1 и σ_2, мы всегда получим один и тот же результат. Иными словами, справедлива следующая

Т е о р е м а е д и н с т в е н н о с т и. Если многочлены $\varphi(\sigma_1, \sigma_2)$ и $\psi(\sigma_1, \sigma_2)$ при подстановке $\sigma_1 = x + y$, $\sigma_2 = xy$ превращаются в один и тот же симметрический многочлен $f(x, y)$, то они совпадают**): $\varphi(\sigma_1, \sigma_2) = \psi(\sigma_1, \sigma_2)$.

Достаточно доказать лишь частный случай теоремы единственности, а именно случай, когда $f(x, y) = 0$. Иными словами, достаточно доказать следующее утверждение:

(А) Если многочлен $\Phi(\sigma_1, \sigma_2)$ при подстановке $\sigma_1 = x + y$, $\sigma_2 = xy$ обращается в нуль, то он тождественно равен нулю.

---

*) Этот пункт при первом чтении может быть пропущен.

**) Вообще говоря, из того, что два многочлена дают один и тот же результат при некоторой подстановке ещё не следует, что эти многочлены совпадают. Например, многочлены $\varphi(u, v) = 2u^2 - v + uv$ и $\psi(u, v) = u^2 + uv$ дают один и тот же результат при подстановке $u = x + y$, $v = x^2 + 2xy + y^2$. Это объясняется тем, что многочлены $u(x, y)$ и $v(x, y)$ связаны зависимостью $u^2 = v$. Суть доказываемой сейчас теоремы состоит в том, что многочлены $\sigma_1 = x + y$ и $\sigma_2 = xy$ не связаны никакой алгебраической зависимостью.

Покажем, что теорема единственности вытекает из утверждения (А). Предположим, что многочлены $\varphi(\sigma_1, \sigma_2)$ и $\psi(\sigma_1, \sigma_2)$ при подстановке $\sigma_1 = x+y$, $\sigma_2 = xy$ дают одинаковые результаты: $\varphi(x+y, xy) = \psi(x+y, xy)$. Тогда многочлен $\Phi(\sigma_1, \sigma_2) = \varphi(\sigma_1, \sigma_2) - \psi(\sigma_1, \sigma_2)$ при той же подстановке обращается в нуль:

$$\Phi(x+y, xy) = \varphi(x+y, xy) - \psi(x+y, xy) = 0.$$

Поэтому, если верно утверждение (А), то $\Phi(\sigma_1, \sigma_2) = 0$ и, следовательно, $\varphi(\sigma_1, \sigma_2) = \psi(\sigma_1, \sigma_2)$.

Для доказательства утверждения (А) нам понадобится понятие старшего члена многочлена от двух переменных. Пусть Ax^ky^l и Bx^my^n — два одночлена от x и y. «Старшинство» определяется сравнением показателей при x, а в случае, когда они равны, — показателей при y. Иными словами, считают, что одночлен Ax^ky^l старше Bx^my^n, если либо $k > m$, либо $k = m$ и $l > n$. Например, одночлен x^4y^2 старше x^2y^7, а одночлен x^4y^6 старше x^4y^5. Ясно, что если Ax^ky^l старше Bx^my^n, а Bx^my^n старше Cx^py^q, то Ax^ky^l старше Cx^py^q.

Докажем теперь следующую лемму:

Старший член многочлена, который получается после раскрытия скобок в выражении

$$(x+y)^k(xy)^l, \tag{*}$$

равен $x^{k+l}y^l$.

В самом деле, выражение (*) можно записать так:

$$\underbrace{(x+y)\ldots(x+y)}_{k\ \text{раз}}\, x^ly^l.$$

Ясно, что член с наибольшим показателем при x получится, если выбрать в каждой скобке слагаемое x. Так как число скобок равно k, то этот член имеет вид $x^{k+l}y^l$. Во всех остальных членах показатель при x меньше $k+l$. Таким образом, $x^{k+l}y^l$ — старший член. Лемма доказана.

Заметим, что выражение (*) получается из одночлена $\sigma_1^k\sigma_2^l$ при подстановке $\sigma_1 = x+y$, $\sigma_2 = xy$. Поэтому доказанная лемма позволяет по одночлену $\sigma_1^k\sigma_2^l$ сразу написать соответствующий старший член, а по заданному старшему члену найти одночлен $\sigma_1^k\sigma_2^l$. Например, после подстановки $\sigma_1 = x+y$, $\sigma_2 = xy$ в одночлен $\sigma_1^6\sigma_2^4$ и раскрытия скобок получится многочлен со старшим членом $x^{10}y^4$. Если же задан старший член x^7y^3, то по нему восстанавливается одночлен $\sigma_1^4\sigma_2^3$.

Перейдём, наконец, к доказательству предложения (А). Нам надо убедиться, что если многочлен $\Phi(\sigma_1, \sigma_2)$ отличен от нуля, то он не может обратиться в нуль после подстановки $\sigma_1 = x+y$, $\sigma_2 = xy$.

Пусть многочлен $\Phi(\sigma_1, \sigma_2)$ имеет вид

$$\Phi(\sigma_1, \sigma_2) = \sum_{k,l} A_{kl}\sigma_1^k\sigma_2^l.$$

Выберем в $\Phi(\sigma_1, \sigma_2)$ те члены, для которых $k+l$ имеет наибольшее значение. Из отобранных слагаемых выберем член с наибольшим значением l (такой член только один, так как числа $k+l$ и l однозначно определяют k).

Например, если

$$\Phi(\sigma_1, \sigma_2) = 3\sigma_1^4\sigma_2 - 4\sigma_1^2\sigma_2^3 + \sigma_1\sigma_2^4 - 6\sigma_1\sigma_2^2 + 11\sigma_2^3 - 7\sigma_1 + 5\sigma_2 + 8,$$

то сначала мы выбираем группу членов $3\sigma_1^4\sigma_2$, $-4\sigma_1^2\sigma_2^3$, $\sigma_1\sigma_2^4$, а потом из них берём $\sigma_1\sigma_2^4$.

Итак, пусть мы выбрали одночлен $A\sigma_1^m\sigma_2^n$. Ему соответствует старший член $Ax^{m+n}y^n$. Покажем, что он старше всех остальных членов, получающихся при подстановке $\sigma_1 = x+y$, $\sigma_2 = xy$ в многочлен $\Phi(\sigma_1, \sigma_2)$ и последующем раскрытии скобок. Относительно членов, получающихся из слагаемого $A\sigma_1^m\sigma_2^n$, это ясно, поскольку $Ax^{m+n}y^n$ — старший из этих членов. Возьмём теперь какое-либо другое слагаемое, скажем $B\sigma_1^k\sigma_2^l$. Этому слагаемому отвечает старший член $Bx^{k+l}y^l$. При этом, в силу выбора одночлена $A\sigma_1^m\sigma_2^n$, мы имеем либо $m+n>k+l$, либо $m+n=k+l$, но $n>l$. В обоих случаях член $Ax^{m+n}y^n$ старше, чем $Bx^{k+l}y^l$. Тем более он старше остальных членов, получающихся из слагаемого $B\sigma_1^k\sigma_2^l$.

Мы доказали, что $Ax^{m+n}y^n$ — самый старший из всех членов, получающихся после подстановки $\sigma_1 = x+y$, $\sigma_2 = xy$ в многочлен $\Phi(\sigma_1, \sigma_2)$ и раскрытия скобок. Поэтому у него нет подобных членов, и после приведения подобных членов он не уничтожится. Но тогда многочлен $\Phi(x+y, xy)$ не может тождественно равняться нулю. Полученное противоречие доказывает предложение (А). Вместе с тем доказана и теорема единственности.

6. Формула Варинга*). Метод вычисления степенных сумм, основанный на применении формулы (1) (стр. 11), обладает одним недостатком: чтобы найти выражение для s_k, надо предварительно вычислить в с е предыдущие суммы. А иногда это нам не нужно, и хотелось бы сразу получить выражение для s_k через σ_1 и σ_2. Соответствующая формула была открыта в 1779 году английским математиком Эдуардом Варингом. Она имеет следующий вид**):

$$\frac{1}{k}s_k = \frac{1}{k}\sigma_1^k - \frac{(k-2)!}{1!\,(k-2)!}\sigma_1^{k-2}\sigma_2 + \frac{(k-3)!}{2!\,(k-4)!}\sigma_1^{k-4}\sigma_2^2 - \frac{(k-4)!}{3!\,(k-6)!}\sigma_1^{k-6}\sigma_2^3 + \ldots \qquad (2)$$

Легко понять закон образования слагаемых в этой формуле. Так как степенная сумма $s_k = x^k + y^k$ является многочленом степени k от x и y, естественно ожидать, что в разложение (2) будут входить также лишь многочлены степени k. Но $\sigma_1 = x+y$ — многочлен первой степени, а $\sigma_2 = xy$ — одночлен в т о р о й степени (относительно x и y). Если возвести σ_2 в степень m, то получится выражение $\sigma_2^m = x^m y^m$ степени $2m$ относительно x и y. На долю σ_1 остаётся лишь степень $k-2m$. Поэтому выражение для $\frac{1}{k}s_k$ и составлено из слагаемых вида $a_m\sigma_1^{k-2m}\sigma_2^m$, где m меняется от нуля до наибольшего целого числа, не превосходящего $\frac{k}{2}$.

Коэффициент a_m представляет собой дробь, в числителе которой стоит $(k-m-1)!$, а знаменатель является произведением чисел $m!$ и $(k-2m)!$ (это легко запомнить: m и $k-2m$ являются показателями степеней, с которыми входят σ_2 и σ_1 в это слагаемое). Кроме того, коэффициенты a_m поочерёдно меняют знак. Отметим, что и коэффициент при σ_1^k образован по тому же закону. Надо только иметь в виду, что в это слагаемое σ_2 входит в нулевой степени, а принято считать, что $0! = 1$. Поэтому все слагаемые в правой части формулы (2) могут быть получены одним и тем же методом: надо в выражении

$$\frac{(-1)^m(k-m-1)!}{m!\,(k-2m)!}\sigma_1^{k-2m}\sigma_2^m$$

числу m последовательно придавать значения 0, 1, 2, ... вплоть до наибольшего

---

*) Этот пункт при первом чтении может быть пропущен.

**) Через $n!$ в математике обозначают произведение всех натуральных чисел от 1 до n, т. е. $n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$.

значения m, при котором показатель $k-2m$ ещё неотрицателен $\Bigl($т. е. до наибольшего целого числа, не превосходящего $\dfrac{k}{2}\Bigr)$.

В математике часто встречаются суммы, все слагаемые которых похожи друг на друга. Точнее говоря, они получаются из некоторого выражения $f(m)$, зависящего от m, при частных значениях m. Такие суммы принято записывать в виде

$$\sum_m f(m)\ ^{*)},$$

причём дополнительно надо указывать, какие именно значения принимает m. Если, например, число m принимает все целые значения от 0 до некоторого p, то эту сумму записывают в виде

$$\sum_{m=0}^{p} f(m).$$

Иными словами,

$$\sum_{m=0}^{p} f(m) = f(0) + f(1) + \ldots + f(p).$$

Пользуясь знаком $\sum$, мы можем переписать формулу (2) в виде

$$\frac{1}{k}s_k = \sum_{m=0}^{p} \frac{(-1)^m(k-m-1)!}{m!(k-2m)!}\sigma_1^{k-2m}\sigma_2^m,$$

где p — наибольшее целое число, не превосходящее $\dfrac{k}{2}$. В дальнейшем указания границ изменения m мы будем опускать.

С помощью формулы Варинга легко получить снова формулы для степенных сумм s_k, $1 \leqslant k \leqslant 10$, приведённые в табл. 1 на стр. 12.

Доказательство формулы Варинга проведём методом математической индукции. При $k=1$ формула принимает вид

$$s_1 = \sigma_1,$$

а при $k=2$ — вид

$$\frac{1}{2}s_2 = \frac{1}{2}\sigma_1^2 - \sigma_2.$$

Таким образом, при $k=1$ и $k=2$ формула Варинга справедлива.

---

*) $\sum$ — прописная греческая буква «сигма»; в качестве символа суммирования она выбрана как аналог латинской буквы S, с которой начинается слово Summa (сумма).

Предположим теперь, что уже доказана справедливость формулы Варинга для s_1, s_2, . . ., s_{k-1}. Чтобы доказать её для s_k, используем формулу (1), указанную на стр. 11. Мы имеем:

$$\frac{1}{k}s_k = \frac{1}{k}(\sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2}) = \frac{k-1}{k}\sigma_1 \cdot \sum_m \frac{(-1)^m (k-m-2)!}{m!(k-2m-1)!}\sigma_1^{k-2m-1}\sigma_2^m - \\ - \frac{k-2}{k}\sigma_2 \cdot \sum_n \frac{(-1)^n (k-n-3)!}{n!(k-2n-2)!}\sigma_1^{k-2n-2}\sigma_2^n = \\ = \frac{1}{k}\sum_m \frac{(-1)^m (k-m-2)!(k-1)}{m!(k-2m-1)!}\sigma_1^{k-2m}\sigma_2^m - \frac{1}{k}\sum_n \frac{(-1)^n (k-n-3)!(k-2)}{n!(k-2n-2)!}\sigma_1^{k-2n-2}\sigma_2^{n+1}.$$

Заменим во второй сумме $n+1$ на m. Тогда обе суммы можно будет объединить:

$$\frac{1}{k}s_k = \frac{1}{k}\sum \frac{(-1)^m (k-m-2)!(k-1)}{m!(k-2m-1)!}\sigma_1^{k-2m}\sigma_2^m - \frac{1}{k}\sum \frac{(-1)^{m-1} (k-m-2)!(k-2)}{(m-1)!(k-2m)!}\sigma_1^{k-2m}\sigma_2^m = \\ = \frac{1}{k}\sum_m (-1)^m (k-m-2)! \left(\frac{k-1}{m!(k-2m-1)!} + \frac{k-2}{(m-1)!(k-2m)!}\right)\sigma_1^{k-2m}\sigma_2^m.$$

Но

$$\frac{1}{(m-1)!} = \frac{m}{m!}, \qquad \frac{1}{(k-2m-1)!} = \frac{k-2m}{(k-2m)!},$$

и потому выражение в скобках равно

$$\frac{(k-1)(k-2m)}{m!(k-2m)!} + \frac{(k-2)m}{m!(k-2m)!} = \frac{k(k-m-1)}{m!(k-2m)!}.$$

Так как, наконец, $(k-m-1)\cdot(k-m-2)! = (k-m-1)!$, мы и получаем требуемое соотношение

$$\frac{1}{k}s_k = \sum_m \frac{(-1)^m (k-m-1)!}{m!(k-2m)!}\sigma_1^{k-2m}\sigma_2^m.$$

Формула Варинга доказана.

§ 2. ПРИМЕНЕНИЯ К ЭЛЕМЕНТАРНОЙ АЛГЕБРЕ. I

7. Решение систем уравнений. Результаты предыдущего параграфа позволяют весьма просто решать различные системы алгебраических уравнений. Мы уже говорили, что очень часто встречаются системы уравнений, левые части которых симметрично зависят от неизвестных x, y. В этом случае удобно перейти к новым неизвестным $\sigma_1 = x + y$ и $\sigma_2 = xy$. В силу теоремы, указанной на стр. 10, это всегда возможно. Выгода такой замены неизвестных заключается в том, что степени уравнений после замены уменьшаются (поскольку $\sigma_2 = xy$ является многочленом в т о р о й степени от x, y). Иными словами, как правило, решение системы относительно новых неизвестных σ_1, σ_2 п р о щ е, чем решение первоначальной системы.

После того как найдены значения величин σ_1, σ_2, нужно найти значения первоначальных неизвестных x, y. Это может быть сделано с помощью следующей теоремы, известной из школьного курса алгебры; мы напомним её в несколько уточнённой формулировке.

Т е о р е м а. Пусть σ_1 и σ_2 — два произвольных числа. Квадратное уравнение

$$z^2 - \sigma_1 z + \sigma_2 = 0 \qquad (*)$$

и система уравнений

$$\begin{cases} x + y = \sigma_1, \\ xy = \sigma_2, \end{cases} \qquad (**)$$

связаны друг с другом следующим образом: если z_1, z_2 — корни квадратного уравнения (*), то система (**) имеет два решения:

$$\begin{cases} x_1 = z_1, \\ y_1 = z_2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = z_2, \\ y_2 = z_1 \end{cases}$$

и других решений не имеет; обратно, если $x = a$, $y = b$ — решение системы (**), то числа a и b являются корнями квадратного уравнения (*).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если z_1 и z_2 — корни квадратного уравнения (*), то по формулам Виета

$$z_1 + z_2 = \sigma_1,$$
$$z_1 z_2 = \sigma_2,$$

т. е. числа

$$\begin{cases} x_1 = z_1, \\ x_2 = z_2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = z_2, \\ x_2 = z_1 \end{cases}$$

являются решениями системы (**). То, что других решений система (**) не имеет, вытекает из последнего утверждения теоремы, которое мы сейчас докажем.

Итак, пусть $x = a$, $y = b$ — решение системы (**), т. е.

$$a + b = \sigma_1,$$
$$ab = \sigma_2.$$

Тогда мы имеем:

$$z^2 - \sigma_1 z + \sigma_2 = z^2 - (a + b)z + ab = (z - a)(z - b).$$

Но это означает, что числа a и b являются корнями квадратного уравнения (*). Теорема доказана.

Приведём примеры.

1°. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 35, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

Введём новые неизвестные $\sigma_1 = x + y$, $\sigma_2 = xy$. Обращаясь к табл. 1 на стр. 12, находим:

$$x^3 + y^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2,$$

а потому для новых неизвестных получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 35, \\ \sigma_1 = 5. \end{cases}$$

Из этой системы уравнений получаем $\sigma_2 = 6$.

Итак, $\sigma_1 = 5$, $\sigma_2 = 6$, т. е. для первоначальных неизвестных x, y мы получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6. \end{cases}$$

Эта система уравнений легко решается (например, теорема на стр. 18 сводит решение этой системы к решению квадратного уравнения $z^2 - 5z + 6 = 0$), и мы получаем следующие решения первоначальной системы:

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 3, \\ y_2 = 2. \end{cases}$$

2°. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^5 + y^5 = 33, \\ x + y = 3. \end{cases}$$

Решение проводится аналогично: полагая

$$\sigma_1 = x + y, \qquad \sigma_2 = xy,$$

приводим исходную систему к виду

$$\begin{cases} \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 = 33, \\ \sigma_1 = 3 \end{cases}$$

(см. табл. 1 на стр. 12). Отсюда для σ_2 получаем квадратное уравнение

$$15\sigma_2^2 - 135\sigma_2 + 210 = 0,$$

или

$$\sigma_2^2 - 9\sigma_2 + 14 = 0.$$

Из этого уравнения находим два значения для σ_2:

$$\sigma_2 = 2 \quad \text{и} \quad \sigma_2 = 7.$$

Таким образом, для первоначальных неизвестных x, y получаем д в е системы уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 7. \end{cases}$$

Решая эти системы, находим четыре решения первоначальной системы:

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{19}}{2}i, \\ y_3 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{19}}{2}i; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{19}}{2}i, \\ y_4 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{19}}{2}i. \end{cases}$$

При решении систем уравнений указанным способом часто оказывается полезной т е о р е м а Б е з у (см. стр. 136). Следующий пример иллюстрирует применение этой теоремы (заметим, что методом исключения нам не удалось решить аналогичный пример, см. стр. 6).

3°. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 8, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

Как и в предыдущих примерах, введём новые неизвестные $\sigma_1 = x + y$, $\sigma_2 = xy$. Тогда наша система переписывается в следующем виде (см. табл. 1 на стр. 12):

$$\begin{cases} \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 8, \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 4. \end{cases}$$

Находя из второго уравнения значение σ_2 и подставляя его в первое уравнение, мы получаем следующее уравнение относительно неизвестного σ_1:

$$-\frac{1}{2}\sigma_1^3 + 6\sigma_1 - 8 = 0,$$

или, после умножения на -2,

$$\sigma_1^3 - 12\sigma_1 + 16 = 0.$$

Для нахождения значений σ_1 можно было бы воспользоваться общей формулой решения уравнений третьей степени (такую формулу можно найти в учебниках высшей алгебры), но в данном случае проще воспользоваться теоремой Безу. Именно, пробуя подставлять в рассматриваемое кубическое уравнение целые значения для σ_1 (т. е. $\sigma_1 = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$), мы вскоре обнаруживаем, что значение $\sigma_1 = 2$ является его корнем (см. стр. 137). По теореме Безу (см. следствие на стр. 136) отсюда следует, что левая часть этого уравнения делится на $\sigma_1 - 2$. Произведём деление:

$$\begin{array}{rrrr|l}
-\ \sigma_1^3 & & -12\sigma_1 & +16 & \ \sigma_1 - 2 \\ \cline{5-5}
\sigma_1^3 & -2\sigma_1^2 & & & \ \sigma_1^2 + 2\sigma_1 - 8 \\ \cline{1-2}
& -\ 2\sigma_1^2 & -12\sigma_1 & & \\
& 2\sigma_1^2 & -4\sigma_1 & & \\ \cline{2-3}
& & -\ -8\sigma_1 & +16 & \\
& & -8\sigma_1 & +16 & \\ \cline{3-4}
& & & 0 &
\end{array}$$

Как и утверждает следствие из теоремы Безу, деление производится без остатка, и мы получаем:

$$\sigma_1^3 - 12\sigma_1 + 16 = (\sigma_1 - 2)(\sigma_1^2 + 2\sigma_1 - 8).$$

Следовательно, рассматриваемое кубическое уравнение распадается на два уравнения: линейное

$$\sigma_1 - 2 = 0,$$

которое даёт уже известный нам корень $\sigma_1 = 2$, и квадратное

$$\sigma_1^2 + 2\sigma_1 - 8 = 0,$$

которое даёт ещё два корня: $\sigma_1 = -1 \pm 3$, т. е. $\sigma_1 = 2$ и $\sigma_1 = 4$.

Итак, у нас есть две возможности: либо $\sigma_1 = 2$, либо $\sigma_1 = -4$. Из уравнения $\sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 4$ находим для σ_2 соответствующие значения: $\sigma_2 = 0$ или $\sigma_2 = 6$. Таким образом, для первоначальных неизвестных x, y мы получаем две системы уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ xy = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x + y = -4, \\ xy = 6. \end{cases}$$

Решая их, находим четыре решения первоначальной системы:

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 0, \\ y_2 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -2 + i\sqrt{2}, \\ y_3 = -2 - i\sqrt{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -2 - i\sqrt{2}, \\ y_4 = -2 + i\sqrt{2}. \end{cases}$$

УПРАЖНЕНИЯ

Решить следующие системы уравнений (см. также системы, указанные на стр. 8):

1) $\begin{cases} x + y = 5, \\ x^2 - xy + y^2 = 7; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y = 7, \\ \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{25}{12}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = 1, \\ x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + y = 5, \\ x^3 + y^3 = 65; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 4(x + y) = 3xy, \\ x + y + x^2 + y^2 = 26; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 32, \\ 12(x + y) = 7xy; \end{cases}$

7) $\begin{cases} xy = 15, \\ x + y + x^2 + y^2 = 42; \end{cases}$

8) $\begin{cases} x + y + xy = 7, \\ x^2 + y^2 + xy = 13; \end{cases}$

9) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 19, \\ x - xy + y = 7; \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 19(x - y), \\ x^3 + y^3 = 7(x + y); \end{cases}$

11) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = 12, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{3}; \end{cases}$

12) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = 18, \\ x + y = 12; \end{cases}$

13) $\begin{cases} x + y = a, \\ x^3 + y^3 = b(x^2 + y^2); \end{cases}$

14) $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 30, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6}; \end{cases}$

15) $\begin{cases} xy(x + y) = 20, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{4}; \end{cases}$

16) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2(x + y) = 23, \\ x^2 + y^2 + xy = 19; \end{cases}$

17) $\begin{cases} x^4 - x^2y^2 + y^4 = 1153, \\ x^2 - xy + y^2 = 33; \end{cases}$

18) $\begin{cases} \dfrac{x^5 + y^5}{x^3 + y^3} = \dfrac{31}{7}, \\ x^2 + xy + y^2 = 3; \end{cases}$

19) $\begin{cases} x+y=4, \\ x^4+y^4=82; \end{cases}$

20) $\begin{cases} x+y=a, \\ x^4+y^4=a^4; \end{cases}$

21) $\begin{cases} x^4+y^4=a^4, \\ x+y=b; \end{cases}$

22) $\begin{cases} x+y=a, \\ x^4+y^4=14x^2y^2; \end{cases}$

23) $\begin{cases} x+y=0, \\ x^2+y^2+x^3+y^3+x^4+y^4+x^5+y^5=b; \end{cases}$

24) $\begin{cases} x+y=a; \\ x^5+y^5=b^5, \end{cases}$

25) $\begin{cases} (x^3+y^3)(x^2+y^2)=2b^5, \\ x+y=b; \end{cases}$

26) $\begin{cases} x^3+y^3=9, \\ x^2+y^2=5; \end{cases}$

27) $\begin{cases} x^2+y^2=7+xy, \\ x^3+y^3=6xy-1; \end{cases}$

28) $\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=133, \\ x^2-xy+y^2=7; \end{cases}$

29) $\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=a^2, \\ x^2+xy+y^2=1; \end{cases}$

30) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=49, \\ x^4+x^2y^2+y^4=931; \end{cases}$

31) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=39, \\ x^4-x^2+y^4-y^2=612; \end{cases}$

32) $\begin{cases} x^4-x^2+y^4-y^2=84, \\ x^2+x^2y^2+y^2=49; \end{cases}$

33) $\begin{cases} x^3+y^3+xy(x+y)=13, \\ x^2y^2(x^2+y^2)=468; \end{cases}$

34) $\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2)=16, \\ (x+y)(x^2+y^2)=40; \end{cases}$

35) $\begin{cases} xy(x+y)=30, \\ x^3+y^3=35; \end{cases}$

36) $\begin{cases} x^3+y^3=(x+y)^2, \\ x^2+y^2=x+y+a; \end{cases}$

37) $\begin{cases} xy=a^2-b^2, \\ x^4+y^4=2(a^4+6a^2b^2+b^4); \end{cases}$

38) $\begin{cases} x^3+y^3=a, \\ x^2y+xy^2=b; \end{cases}$

39) $\begin{cases} x+y=a, \\ x^7+y^7=a^7; \end{cases}$

40) $\begin{cases} x+y-z=7, \\ x^2+y^2-z^2=37, \\ x^3+y^3-z^3=1; \end{cases}$

41) $\begin{cases} x^4+6x^2y^2+y^4=353, \\ xy(x^2+y^2)=68; \end{cases}$

42) $x^2+y^2=x^3+y^3=x^5+y^5;$

43) $\begin{cases} x^4=ax^2+by^2, \\ y^4=bx^2+ay^2; \end{cases}$

44) $\begin{cases} 16(x^4+y^4+z^4+u^4)=289, \\ xy-zu=z+u=\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{3}{2}. \end{cases}$

8. Введение вспомогательных неизвестных. Иногда бывает, что система двух уравнений с двумя неизвестными, состоящая из несимметричных уравнений, может быть сведена к симметричной системе введением новых (вспомогательных) неизвестных. Например, если в системе

$$\begin{cases} x^3-y^3=5, \\ xy^2-x^2y=1 \end{cases}$$

заменить неизвестное y новым неизвестным $z=-y$, то мы придём к системе

$$\begin{cases} x^3+z^3=5, \\ xz^2+x^2z=1, \end{cases}$$

левые части которой симметрично зависят от x и z. Иногда нужная подстановка имеет более сложный вид. Например, в системе

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5, \\ 81x^4 + 16y^4 = 6817 \end{cases}$$

надо сделать подстановку $3x = u$, $-2y = v$, после чего получим симметричную систему

$$\begin{cases} u + v = 5, \\ u^4 + v^4 = 6817. \end{cases}$$

Нередко бывает также, что введением вспомогательных неизвестных можно свести уравнение с одним неизвестным к симметричной системе двух уравнений с двумя неизвестными. Рассмотрим пример.

Решить иррациональное уравнение

$$\sqrt[4]{97 - x} + \sqrt[4]{x} = 5.$$

Положим $\sqrt[4]{x} = y$ и $\sqrt[4]{97 - x} = z$. Тогда рассматриваемое уравнение примет вид $y + z = 5$. Кроме того, имеем:

$$y^4 + z^4 = x + (97 - x) = 97.$$

Таким образом, мы получили систему уравнений

$$\begin{cases} y + z = 5, \\ y^4 + z^4 = 97. \end{cases}$$

Введение неизвестных $\sigma_1 = y + z$, $\sigma_2 = yz$ сводит её к системе

$$\begin{cases} \sigma_1 = 5, \\ \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 = 97, \end{cases}$$

из которой получаем для σ_2 квадратное уравнение

$$\sigma_2^2 - 50\sigma_2 + 264 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, находим:

$$\sigma_2 = 6 \quad \text{или} \quad \sigma_2 = 44.$$

Таким образом, задача свелась к решению двух систем уравнений:

$$\begin{cases} y + z = 5, \\ yz = 6; \end{cases} \qquad \begin{cases} y + z = 5, \\ yz = 44. \end{cases}$$

Первая из этих систем имеет решения

$$\begin{cases} y_1 = 2, \\ z_1 = 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2 = 3, \\ z_2 = 2. \end{cases}$$

Так как $y = \sqrt[4]{x}$, то для первоначального неизвестного x получаем два решения: $x_1 = 16$, $x_2 = 81$. Вторая система даёт для y и z, а значит, и для x, ещё два решения (они комплексны, а для иррациональных уравнений берутся лишь действительные значения неизвестных).

УПРАЖНЕНИЯ

Решить следующие системы уравнений:

1) $\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1, \\ \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} = 4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{5}{2}xy, \\ x - y = \dfrac{1}{4}xy; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y = 2, \\ x^3 - y^3 = 8; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^5 - y^5 = 3093, \\ x - y = 3; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^5 - y^5 = b^5, \\ x - y = a; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2 + y = 5, \\ x^6 + y^3 = 65; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = \dfrac{5}{6}\sqrt{xy}, \\ x + y = 13; \end{cases}$

8) $\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = a, \\ \dfrac{x^2}{\sqrt{y}} + \dfrac{y^2}{\sqrt{x}} = b; \end{cases}$

9) $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2\sqrt{xy}, \\ x + y = 20; \end{cases}$

10) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{7}{\sqrt{xy}} + 1, \\ \sqrt{x^3y} + \sqrt{y^3x} = 78; \end{cases}$

11) $\begin{cases} x + y = 10. \\ \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{5}{2}; \end{cases}$

12) $\begin{cases} x + \sqrt{xy} + y = a, \\ x^3 + 2xy\sqrt{xy} + y^3 = a^3; \end{cases}$

13) $\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 7, \\ x^2 + y^2 + xy = 133; \end{cases}$

14) $\begin{cases} x + y + \sqrt{xy} = 14, \\ x^2 + y^2 + xy = 84; \end{cases}$

15) $\begin{cases} x^{3/4} + y^{3/5} = 35. \\ x^{1/4} + y^{1/5} = 5; \end{cases}$

16) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{61}{\sqrt{xy}} + 1, \\ \sqrt[4]{x^3y} + \sqrt[4]{xy^3} = 78; \end{cases}$

17) $\begin{cases} x + y = 72, \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 6; \end{cases}$

18) $\begin{cases} x + xy + y = 12, \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y} = 0; \end{cases}$

19) $\begin{cases} \sqrt[4]{y^3 - 1} + \sqrt{x} = 3, \\ x^2 + y^3 = 82; \end{cases}$

20) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3, \\ xy = 8; \end{cases}$

21) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=2{,}5\sqrt[6]{xy}, \\ x+y=10; \end{cases}$

22) $\begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{x}{y}}+\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}=a, \\ x+y=b. \end{cases}$

Решить следующие уравнения:

23) $\left(\dfrac{x+a}{2}\right)^6+\left(\dfrac{x-a}{2}\right)^6=a^6$;

24) $(ax^2+bx+c)^5-(ax^2+bx+d)^5=e$;

25) $(z^2+1)^7-(z^2-1)^7=2^7$;

26) $z^4+(1-z)^4=1$;

27) $(x+a+b)^5=x^5+a^5+b^5$;

28) $\sqrt{1-x^2}=(a-\sqrt{x})^2$;

29) $\sqrt[5]{\dfrac{1}{2}+x}+\sqrt[5]{\dfrac{1}{2}-x}=1$;

30) $x+\sqrt{17-x^2}+x\sqrt{17-x^2}=9$;

31) $x\sqrt[3]{35-x^3}(x+\sqrt[3]{35-x^3})=30$;

32) $x\dfrac{19-x}{x+1}\left(x+\dfrac{19-x}{x+1}\right)=84$;

33) $(a-y)^2=\sqrt[3]{a^6-y^6}$;

34) $\sin^3 x+\cos^3 x=1$;

35) $\sqrt[4]{629-x}+\sqrt[4]{77+x}=8$;

36) $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}=2-\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$;

37) $\sqrt[3]{8+x}+\sqrt[3]{8-x}=1$;

38) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{35}{12}$;

39) $x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{35}{12}$;

40) $\sqrt[3]{54+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{54-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{18}$;

41) $\sqrt[4]{78+\sqrt[3]{24+\sqrt{x}}}-\sqrt[4]{84-\sqrt[3]{30-\sqrt{x}}}=0$;

42) $\sqrt[3]{10-x}-\sqrt[3]{3-x}=1$;

43) $\sqrt[4]{41+x}+\sqrt[4]{41-x}=2$;

44) $\sqrt[5]{a+x}+\sqrt[5]{a-x}=\sqrt[5]{2a}$;

45) $\sqrt[7]{a-x}+\sqrt[7]{x}=\sqrt[7]{a}$;

46) $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{a-x}=\sqrt[4]{b}$;

47) $\sqrt[4]{8-x}+\sqrt[4]{89+x}=5$;

48) $(x+a)^4+(x+b)^4=c^4$.

9. Задачи о квадратных уравнениях. Целая серия задач, в которых требуется вычислить некоторые выражения, содержащие корни заданного квадратного уравнения, также с успехом решается при помощи симметрических многочленов. Рассмотрим два примера.

1°. Дано квадратное уравнение $x^2+6x+10=0$; составить новое квадратное уравнение, корнями которого являются квадраты корней данного уравнения.

Для решения этой задачи обозначим корни данного уравнения через x_1 и x_2, корни искомого — через y_1 и y_2, а коэффициенты искомого уравнения — через p и q. По теореме Виета

$$\sigma_1=x_1+x_2=-6, \qquad \sigma_2=x_1x_2=10$$

и, точно так же,

$$y_1+y_2=-p, \qquad y_1y_2=q.$$

Но, по условию задачи, имеем $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_2^2$, и потому

$$p = -(y_1 + y_2) = -(x_1^2 + x_2^2) = -s_2 = -(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) = -16,$$
$$q = y_1 y_2 = x_1^2 x_2^2 = \sigma_2^2 = 100.$$

Таким образом, искомое квадратное уравнение имеет вид

$$y^2 - 16y + 100 = 0.$$

Тем же приёмом можно решать и более сложные задачи. Рассмотрим следующий пример.

2°. Составить квадратное уравнение $z^2 + pz + q = 0$, корнями которого являются числа

$$z_1 = x_1^6 - 2x_2^2, \qquad z_2 = x_2^6 - 2x_1^2,$$

где x_1, x_2 — корни квадратного уравнения $x^2 - x - 3 = 0$.

Для решения снова воспользуемся формулами Виета, согласно которым

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 = 1, \qquad \sigma_2 = x_1 x_2 = -3.$$

С другой стороны, по тем же формулам,

$$-p = z_1 + z_2 = (x_1^6 - 2x_2^2) + (x_2^6 - 2x_1^2),$$
$$q = z_1 z_2 = (x_1^6 - 2x_2^2)(x_2^6 - 2x_1^2).$$

Воспользовавшись табл. 1 на стр. 12, легко выразим симметрические многочлены p и q через σ_1, σ_2 и, подставив значения $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = -3$, вычислим интересующие нас коэффициенты p и q. Имеем:

$$-p = (x_1^6 + x_2^6) - 2(x_1^2 + x_2^2) = s_6 - 2s_2 = (\sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3) - \\ - 2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) = (1^6 - 6 \cdot 1^4 \cdot (-3) + 9 \cdot 1^2 \cdot (-3)^2 - 2 \cdot (-3)^3 - \\ - 2(1^2 - 2 \cdot (-3)) = 140;$$

$$q = (x_1^6 - 2x_2^2)(x_2^6 - 2x_1^2) = x_1^6 x_2^6 - 2(x_1^8 + x_2^8) + 4x_1^2 x_2^2 = \sigma_2^6 - 2s_8 + 4\sigma_2^2 = \\ = \sigma_2^6 - 2(\sigma_1^8 - 8\sigma_1^6\sigma_2 + 20\sigma_1^4\sigma_2^2 - 16\sigma_1^2\sigma_2^3 + 2\sigma_2^4) + 4\sigma_2^2 = \\ = (-3)^6 - 2 \cdot (1^8 - 8 \cdot 1^6 \cdot (-3) + 20 \cdot 1^4 \cdot (-3)^2 - \\ - 16 \cdot 1^2 \cdot (-3)^3 + 2 \cdot (-3)^4) + 4 \cdot (-3)^2 = -833.$$

Таким образом, $p = -140$, $q = -833$, и потому искомое квадратное уравнение имеет вид $z^2 - 140z - 833 = 0$.

УПРАЖНЕНИЯ

1) Составить квадратное уравнение, корнями которого являются кубы корней квадратного уравнения $x^2 + 6x + 10 = 0$.

2) Составить квадратное уравнение, корнями которого являются десятые степени корней квадратного уравнения $x^2+x-3=0$.

3) Пусть x_1, x_2 — корни квадратного уравнения $x^2+px+q=0$. Вычислить значение выражения $x_1^k+x_2^k$ при $k=\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5$.

4) Составить квадратное уравнение с корнями x_1, x_2, если известно, что $x_1^5+x_2^5=31$, $x_1+x_2=1$.

5) Доказать, что если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ с целыми коэффициентами p и q, то при любом натуральном n число $x_1^n+x_2^n$ является целым.

6) При каком действительном a сумма квадратов корней уравнения $x^2-(a-2)x-a-1=0$ принимает наименьшее значение?

7) Доказать, что если x_1, x_2 — корни квадратного уравнения $x^2-6x+1=0$, то сумма $x_1^n+x_2^n$ при любом натуральном n является целым числом и ни при каком n не делится на 5.

8) Пусть $x^2+px+q=0$ — квадратное уравнение, корни α и β которого положительны. Выразить $\sqrt[4]{\alpha}+\sqrt[4]{\beta}$ через коэффициенты уравнения.

10. Неравенства. Симметрические многочлены можно также с успехом применять для доказательства многих неравенств. Основными инструментами здесь служат формулы, приведённые в табл. 1 на стр. 12, и следующая

Теорема. Пусть σ_1 и σ_2 — действительные числа. Для того, чтобы оба числа x, y, определяемые из системы уравнений

$$\begin{cases} x+y=\sigma_1, \\ xy=\sigma_2, \end{cases}$$

были действительными, необходимо и достаточно, чтобы σ_1 и σ_2 удовлетворяли неравенству $\sigma_1^2-4\sigma_2 \geqslant 0$. Равенство $\sigma_1^2=4\sigma_2$ достигается лишь в случае, если $x=y$. Для того, чтобы оба числа x, y были действительными и неотрицательными, необходимо и достаточно, чтобы числа σ_1, σ_2 удовлетворяли неравенствам

$$\sigma_1^2-4\sigma_2 \geqslant 0, \quad \sigma_1 \geqslant 0, \quad \sigma_2 \geqslant 0.$$

Доказательство. Числа x, y являются, в силу теоремы, приведённой на стр. 18, корнями квадратного уравнения

$$z^2-\sigma_1 z+\sigma_2=0,$$

т. е. совпадают с числами

$$z_{1,2}=\frac{\sigma_1 \pm \sqrt{\sigma_1^2-4\sigma_2}}{2}.$$

Поэтому для действительности чисел x, y необходимо и достаточно, чтобы подкоренное выражение было неотрицательным, т. е. чтобы было выполнено неравенство $\sigma_1^2-4\sigma_2\geqslant 0$. Равенство $\sigma_1^2-4\sigma_2=0$ означает, что оба корня квадратного уравнения совпадают, т. е. $x=y$.

Если числа x, y неотрицательны, то, помимо неравенства $\sigma_1^2-4\sigma_2\geqslant 0$, выполняются ещё неравенства $\sigma_1\geqslant 0$, $\sigma_2\geqslant 0$. Пусть теперь, обратно, выполнены неравенства $\sigma_1^2-4\sigma_2\geqslant 0$, $\sigma_1\geqslant 0$, $\sigma_2\geqslant 0$. Как было показано выше, из первого неравенства следует, что числа x и y действительны; так как $\sigma_2\geqslant 0$, то оба они имеют одинаковый знак; наконец, из соотношения $\sigma_1\geqslant 0$ вытекает, что оба они неотрицательны. Теорема доказана.

Можно предложить и другое доказательство. Числа x, y, являющиеся корнями квадратного уравнения $z^2-\sigma_1 z+\sigma_2=0$ с действительными коэффициентами, либо оба действительны — и тогда их разность также действительна, либо являются сопряжёнными комплексными числами — и тогда их разность является чисто мнимым числом. Таким образом, в первом случае $(x-y)^2\geqslant 0$, а во втором $(x-y)^2<0$. Следовательно, если σ_1 и σ_2 действительны, то необходимым и достаточным условием действительности чисел x, y является выполнение неравенства $(x-y)^2\geqslant 0$. Остаётся заметить, что $(x-y)^2=$ $=x^2+y^2-2xy=\sigma_1^2-4\sigma_2$, так что неравенство $(x-y)^2\geqslant 0$ переписывается в виде $\sigma_1^2-4\sigma_2\geqslant 0$. Дальнейшая часть доказательства не отличается от приведённой выше.

Установленная теорема применяется для доказательства неравенств следующим образом. Предположим, что дан некоторый симметрический многочлен $f(x, y)$ и требуется доказать, что при любых действительных значениях x, y (или при любых неотрицательных значениях, или при $x+y\geqslant a$ — в зависимости от условия задачи) этот многочлен принимает неотрицательные значения: $f(x, y)\geqslant 0$. Для доказательства нужно прежде всего заменить симметрический многочлен $f(x, y)$ его выражением через σ_1 и σ_2. Затем в полученном многочлене заменяют σ_2 его выражением через σ_1 и неотрицательную величину $z=\sigma_1^2-4\sigma_2$, т. е. подставляют $\sigma_2=\dfrac{1}{4}(\sigma_1^2-z)$. В результате мы получаем многочлен от σ_1 и z и требуется доказать, что при *неотрицательных* z и при указанных в задаче ограничениях на σ_1 этот многочлен принимает лишь неотрицательные значения. Как правило, это сделать легче, чем доказать первоначальное неравенство. Иногда бывает полезно заменить σ_1^2 его выражением через σ_2 и z (т. е. $\sigma_1^2=z+4\sigma_2$).

Рассмотрим примеры.

1°. Доказать, что если a и b — действительные числа, удовлетворяющие условию $a+b \geqslant c$, то справедливы неравенства:

$$a^2+b^2 \geqslant \frac{c^2}{2}, \quad a^4+b^4 \geqslant \frac{c^4}{8}, \quad a^8+b^8 \geqslant \frac{c^8}{128}.$$

Для доказательства введём элементарные симметрические многочлены $\sigma_1 = a+b$ и $\sigma_2 = ab$. Мы имеем:

$$s_2 = a^2+b^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = \sigma_1^2 - 2\cdot\frac{1}{4}(\sigma_1^2 - z) = \frac{1}{2}\sigma_1^2 + \frac{1}{2}z.$$

Так как $z \geqslant 0$, а по условию задачи $\sigma_1 \geqslant c$, то $s_2 \geqslant \frac{1}{2}c^2$, т. е.

$$a^2+b^2 \geqslant \frac{1}{2}c^2.$$

Применяя к полученному неравенству то же рассуждение, находим:

$$a^4+b^4 \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}c^2\right)^2 = \frac{1}{8}c^4.$$

Аналогично находим, что

$$a^8+b^8 \geqslant \frac{1}{128}c^8.$$

Применяя метод математической индукции, можно таким путём доказать, что

Если $a+b \geqslant c$ и n — произвольное натуральное число, то

$$a^{2^n}+b^{2^n} \geqslant \frac{1}{2^{2^n-1}}\cdot c^{2^n}.$$

2°. Доказать, что если a и b — действительные числа, удовлетворяющие неравенству $a+b \geqslant 1$, то $a^4+b^4 \geqslant \frac{1}{8}$.

Доказываемое неравенство является частным случаем неравенства $a^4+b^4 \geqslant \frac{1}{8}c^4$, установленного в предыдущем примере. Там мы для получения этого неравенства дважды применили один и тот же приём: применили неравенство $a^2+b^2 \geqslant \frac{1}{2}c^2$. Но если бы мы и не догадались применить этот приём, можно было бы непосредственно установить требуемое неравенство. Мы имеем:

$$a^4+b^4=s_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2=$$

$$=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\cdot\frac{1}{4}(\sigma_1^2-z)+2\left(\frac{1}{4}(\sigma_1^2-z)\right)^2=\frac{1}{8}\sigma_1^4+\frac{3}{4}\sigma_1^2z+\frac{1}{8}z^2\geqslant\frac{1}{8}\sigma_1^4$$

(ибо $z\geqslant 0$). Так как по условию задачи $\sigma_1\geqslant 1$, то неравенство $a^4+b^4\geqslant$ $\geqslant\frac{1}{8}$ доказано.

УПРАЖНЕНИЯ

Доказать, что при любых действительных a и b справедливы неравенства:

1) $5a^2-6ab+5b^2\geqslant 0$;

2) $8(a^4+b^4)\geqslant(a+b)^4$;

3) $a^4+b^4\geqslant a^3b+ab^3$;

4) $a^2+b^2+1\geqslant ab+a+b$;

5) $a^6+b^6\geqslant a^5b+ab^5$.

Доказать, что при любых неотрицательных a и b справедливы следующие неравенства:

6) $\sqrt{\frac{a^2}{b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$;

7) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^8\geqslant 64ab(a+b)^2$;

8) $a^4+2a^3b+2ab^3+b^4\geqslant 6a^2b^2$;

9) $\frac{a^3+b^3}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^3$.

10) Какое наибольшее значение может принимать выражение $xy(x-y)^2$ при условии, что $x+y=a$?

11) Доказать, что если положительные числа a, b удовлетворяют соотношению $a+b=1$, то

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geqslant\frac{25}{2}.$$

12) Доказать, что для любых положительных чисел x, y справедливо неравенство

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant 2.$$

13) Доказать, что для положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ справедливо неравенство

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)\geqslant n^2.$$

11. Возвратные уравнения. Симметрические многочлены можно с успехом применять и для решения некоторых уравнений высших степеней. В этом пункте мы рассмотрим так называемые *возвратные* уравнения.

Назовём многочлен

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n\quad(a_0\neq 0)\tag{*}$$

возвратным, если в нём коэффициенты, равноудалённые от концов, совпадают, т. е. $a_0 = a_n$, $a_1 = a_{n-1}$, $a_2 = a_{n-2}$, ... Например, возвратными являются многочлены

$$z^5 - 3z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 3z + 1,$$
$$2z^8 + z^7 - 6z^5 - 6z^3 + z + 2,$$
$$z^n + 1.$$

Уравнение $f(z) = 0$, левая часть которого представляет собой возвратный многочлен, называется *возвратным*.

В основе решения возвратных уравнений лежит следующая

Теорема. Всякий возвратный многочлен

$$f(z) = a_0 z^{2k} + a_1 z^{2k-1} + \ \ldots \ + a_{2k-1} z + a_{2k}$$

чётной степени $2k$ представляется в виде

$$f(z) = z^k h(\sigma),$$

где $\sigma = z + \frac{1}{z}$ и $h(\sigma)$ — некоторый многочлен степени k от σ.

Всякий возвратный многочлен $f(z)$ нечётной степени делится на $z + 1$, причём частное представляет собой возвратный многочлен чётной степени.

Доказательство. Рассмотрим сначала многочлен $f(z)$ чётной степени $2k$. Вынося в этом многочлене за скобки z^k, получим:

$$f(z) = z^k \left(a_0 z^k + a_1 z^{k-1} + \ \ldots \ + a_{2k-1} \frac{1}{z^{k-1}} + a_{2k} \frac{1}{z^k} \right),$$

или, принимая во внимание равенства $a_0 = a_{2k}$, $a_1 = a_{2k-1}$, ...,

$$f(z) = z^k \left(a_0 \left(z^k + \frac{1}{z^k} \right) + a_1 \left(z^{k-1} + \frac{1}{z^{k-1}} \right) + \ \ldots \ + a_k \right).$$

Нам осталось доказать, что двучлены $z^k + \frac{1}{z^k}$, $z^{k-1} + \frac{1}{z^{k-1}}$, ... можно выразить через $\sigma = z + \frac{1}{z}$. Но эта задача сводится к рассмотренной выше задаче о выражении степенной суммы $s_k = x^k + y^k$ через элементарные симметрические многочлены $\sigma_1 = x + y$ и $\sigma_2 = xy$. В самом деле, если мы положим $x = z$, $y = \frac{1}{z}$, то степенная сумма $s_k = x^k + y^k$ превратится в выражение $z^k + \frac{1}{z^k}$, элементарный симметрический многочлен

$\sigma_1 = x + y$ — в $\sigma = z + \frac{1}{z}$, а элементарный симметрический многочлен $\sigma_2 = xy$ примет значение 1. Поэтому, подставляя в выражение степенной суммы s_k через σ_1 и σ_2 значения $\sigma_1 = \sigma = z + \frac{1}{z}$, $\sigma_2 = 1$, мы получим искомое выражение двучлена $z^k + \frac{1}{z^k}$ через σ. Практически для этого удобно использовать формулы из табл. 1 на стр. 12. Полагая в этих формулах $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = 1$, получаем:

$$
\begin{aligned}
z^2 + \frac{1}{z^2} &= \sigma^2 - 2,\\
z^3 + \frac{1}{z^3} &= \sigma^3 - 3\sigma,\\
z^4 + \frac{1}{z^4} &= \sigma^4 - 4\sigma^2 + 2,\\
z^5 + \frac{1}{z^5} &= \sigma^5 - 5\sigma^3 + 5\sigma,\\
z^6 + \frac{1}{z^6} &= \sigma^6 - 6\sigma^4 + 9\sigma^2 - 2,\\
z^7 + \frac{1}{z^7} &= \sigma^7 - 7\sigma^5 + 14\sigma^3 - 7\sigma,\\
z^8 + \frac{1}{z^8} &= \sigma^8 - 8\sigma^6 + 20\sigma^4 - 16\sigma^2 + 2,\\
z^9 + \frac{1}{z^9} &= \sigma^9 - 9\sigma^7 + 27\sigma^5 - 30\sigma^3 + 9\sigma,\\
z^{10} + \frac{1}{z^{10}} &= \sigma^{10} - 10\sigma^8 + 35\sigma^6 - 50\sigma^4 + 25\sigma^2 - 2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Итак, первое утверждение теоремы (касающееся возвратных многочленов чётной степени) доказано.

Рассмотрим теперь случай возвратного многочлена нечётной степени $2k+1$:

$$f(z) = a_0 z^{2k+1} + a_1 z^{2k} + \ldots + a_{2k} z + a_{2k+1}.$$

Так как этот многочлен является возвратным, т. е. выполнены равенства

$$a_0 = a_{2k+1}, \quad a_1 = a_{2k}, \quad a_2 = a_{2k-1}, \quad \ldots,$$

то его можно записать в следующем виде:

$$f(z) = a_0(z^{2k+1} + 1) + a_1(z^{2k} + z) + a_2(z^{2k-1} + z^2) + \ldots + a_k(z^{k+1} + z^k) =$$
$$= a_0(z^{2k+1} + 1) + a_1 z(z^{2k-1} + 1) + a_2 z^2(z^{2k-3} + 1) + \ \ldots \ + a_k z^k(z + 1).$$

В каждом двучлене, стоящем в скобках, можно выделить множитель $z + 1$, воспользовавшись следующим хорошо известным равенством:

$$z^{2m+1} + 1 = (z + 1)\,(z^{2m} - z^{2m-1} + z^{2m-2} - \ \ldots \ + z^2 - z + 1).$$

Мы получим:

$$a_0(z^{2k+1} + 1) = a_0(z + 1)\,(z^{2k} - z^{2k-1} + z^{2k-2} - \ \ldots \ + z^2 - z + 1),$$
$$a_1 z(z^{2k-1} + 1) = a_1 z(z + 1)\,(z^{2k-2} - z^{2k-3} + \ \ldots \ - z + 1) =$$
$$= a_1(z + 1)\,(z^{2k-1} - z^{2k-2} + \ \ldots \ - z^2 + z),$$
$$a_2 z^2(z^{2k-3} + 1) = a_2 z^2(z + 1)\,(z^{2k-4} - \ \ldots \ + 1) = a_2(z + 1)\,(z^{2k-2} - \ \ldots \ + z^2);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_k z^k(z + 1) = a_k(z + 1) \cdot z^k.$$

Складывая полученные выражения почленно и вынося в правой части множитель $z + 1$ за скобки, мы получим:

$$f(z) = (z + 1)\ g(z),$$

где $g(z)$ — многочлен, являющийся суммой следующих многочленов:

$$a_0(z^{2k} - z^{2k-1} + z^{2k-2} - \ \ldots \ + z^2 - z + 1),$$
$$a_1(z^{2k-1} - z^{2k-2} + \ \ldots \ - z^2 + z),$$
$$a_2(z^{2k-2} - \ \ldots \ + z^2),$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$a_k z^k.$$

Непосредственно видно, что во всех этих многочленах коэффициенты, равноудалённые от концов, совпадают, и потому их сумма $g(z)$ является в о з в р а т н ы м многочленом (чётной степени $2k$). Тем самым доказано и второе утверждение теоремы, касающееся возвратных многочленов нечётной степени. (Ниже, в упражнениях 9) и 10), будет намечен другой путь доказательства второй части теоремы.)

Приведём примеры применения доказанной теоремы к решению возвратных уравнений.

1°. Решить уравнение

$$12z^4-16z^3-11z^2-16z+12=0.$$

Рассматриваемое уравнение является возвратным и имеет степень 4. Левая часть этого уравнения преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned}&12z^4-16z^3-11z^2-16z+12=\\&\quad=z^2\left(12z^2-16z-11-16\frac{1}{z}+12\frac{1}{z^2}\right)=z^2\left(12\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)-16\left(z+\frac{1}{z}\right)-11\right)=\\&\qquad\qquad=z^2(12(\sigma^2-2)-16\sigma-11)=z^2(12\sigma^2-16\sigma-35).\end{aligned}$$

Так как $z=0$ не является корнем исходного уравнения, то мы приходим к квадратному уравнению относительно σ:

$$12\sigma^2-16\sigma-35=0.$$

Решая его, находим два корня: $\sigma=-\frac{7}{6}$ и $\sigma=\frac{5}{2}$. Таким образом, для нахождения корней первоначального уравнения мы получаем два уравнения:

$$z+\frac{1}{z}=-\frac{7}{6},\qquad z+\frac{1}{z}=\frac{5}{2}.$$

Решая их, находим четыре корня первоначального уравнения:

$$z_{1,2}=\frac{-7\pm i\sqrt{95}}{12},\qquad z_3=2,\qquad z_4=\frac{1}{2}.$$

2°. Решить уравнение

$$4z^{11}+4z^{10}-21z^9-21z^8+17z^7+17z^6+17z^5+17z^4-21z^3-21z^2+4z+4=0.$$

Это возвратное уравнение имеет нечётную степень 11. Согласно теореме его левая часть делится на $z+1$. Осуществляя деление, находим:

$$\begin{aligned}&4z^{11}+4z^{10}-21z^9-21z^8+17z^7+17z^6+17z^5+17z^4-21z^3-21z^2+4z+4=\\&\qquad=(z+1)(4z^{10}-21z^8+17z^6+17z^4-21z^2+4).\end{aligned}$$

Таким образом, наше уравнение распадается на два:

$$z+1=0,$$
$$4z^{10}-21z^8+17z^6+17z^4-21z^2+4=0.$$

Первое из этих уравнений даёт корень $z_1=-1$. Второе представляет собой возвратное уравнение чётной степени. Преобразуем его левую часть*):

$$4z^{10}-21z^8+17z^6+17z^4-21z^2+4=$$

$$=z^5\left(4z^5-21z^3+17z+17\cdot\frac{1}{z}-21\cdot\frac{1}{z^3}+4\cdot\frac{1}{z^5}\right)=$$

$$=z^5\left(4\left(z^5+\frac{1}{z^5}\right)-21\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)+17\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)=$$

$$=z^5(4(\sigma^5-5\sigma^3+5\sigma)-21(\sigma^3-3\sigma)+17\sigma)=$$

$$=z^5(4\sigma^5-41\sigma^3+100\sigma).$$

Так как $z=0$ не является корнем исходного уравнения, то мы приходим к следующему уравнению относительно σ:

$$\sigma(4\sigma^4-41\sigma^2+100)=0.$$

Следовательно, мы имеем корень $\sigma=0$ и ещё четыре корня, которые легко найти, решая биквадратное уравнение

$$4\sigma^4-41\sigma^2+100=0.$$

В результате мы находим пять значений для σ:

$$\sigma=0,\quad \sigma=-\frac{5}{2},\quad \sigma=\frac{5}{2},\quad \sigma=2,\quad \sigma=-2.$$

Это означает, что для нахождения корней первоначального уравнения мы имеет пять уравнений:

$$z+\frac{1}{z}=0,\quad z+\frac{1}{z}=-\frac{5}{2},\quad z+\frac{1}{z}=\frac{5}{2},$$

$$z+\frac{1}{z}=2,\quad z+\frac{1}{z}=-2.$$

Решая их и учитывая найденный ранее корень $z_1=-1$, получаем одиннадцать корней исходного уравнения:

$$z_1=-1,\quad z_2=i,\quad z_3=-i,\quad z_4=-2,\quad z_5=-\frac{1}{2},$$

$$z_6=2,\quad z_7=-\frac{1}{2},\quad z_8=z_9=-1,\quad z_{10}=z_{11}=1.$$

---

*) Указанное уравнение можно решить также с помощью замены $z^2=u$, после чего мы получим возвратное уравнение степени 5 относительно u.

УПРАЖНЕНИЯ

Решить следующие уравнения:

1) $9z^6 - 18z^5 - 73z^4 + 164z^3 - 73z^2 - 18z + 9 = 0$;

2) $z^8 + 4z^6 - 10z^4 + 4z^2 + 1 = 0$;

3) $10z^6 + z^5 - 47z^4 - 47z^3 + z^2 + 10z = 0$;

4) $10z^6 + 19z^5 - 19z^4 - 20z^3 - 19z^2 + 19z + 10 = 0$;

5) $2z^{11} + 7z^{10} + 15z^9 + 14z^8 - 16z^7 - 22z^6 - 22z^5 - 16z^4 + 14z^3 + 15z^2 + 7z + 2 = 0$.

6) Доказать, что все корни возвратного уравнения степени 4

$$az^4 + bz^3 + cz^2 + bz + a = 0 \quad (a \neq 0)$$

могут быть найдены при помощи четырёх арифметических действий и извлечения квадратного корня.

7) Доказать, что все корни возвратного уравнения степени 5

$$az^5 + bz^4 + cz^3 + cz^2 + bz + a = 0 \quad (a \neq 0)$$

могут быть найдены при помощи четырёх арифметических действий и извлечения квадратного корня.

8) Доказать, что если известен один корень возвратного уравнения шестой степени (или отличный от -1 корень возвратного уравнения седьмой степени), то остальные корни могут быть найдены при помощи четырёх арифметических действий и извлечения квадратного корня.

9) Пользуясь теоремой Безу, дать другое доказательство того факта, что возвратный многочлен нечётной степени делится на $z + 1$.

10) Доказать, что многочлен $f(z)$ степени n (с отличным от нуля свободным членом) в том и только том случае является возвратным, если выполнено соотношение

$$z^n f\left(\frac{1}{z}\right) = f(z).$$

Вывести отсюда новое доказательство второй части теоремы, сформулированной на стр. 32.

11) Доказать, что если $f(z)$ и $g(z)$ — возвратные многочлены и $f(z)$ делится без остатка на $g(z)$, то частное $h(z) = \dfrac{f(z)}{g(z)}$ также является возвратным многочленом.

12. Разложение симметрических многочленов на множители. В этом пункте мы рассмотрим два приёма разложения однородных симметричных многочленов на множители. Мы покажем применение этих приёмов на примере симметрических многочленов *четвёртой* степени.

Первый приём заключается в том, что рассматриваемый симметрический многочлен выражают через σ_1 и σ_2 и затем полученное выражение разлагают на множители. При выражении симметрического многочлена *четвёртой* степени через σ_1 и σ_2 получается многочлен *второй* степени относительно σ_2. Для разложения его на множители достаточно найти корни полученного многочлена второй степени.

Рассмотрим примеры.

1°. Разложить на множители многочлен

$$f(x, y) = 10x^4 - 27x^3y - 110x^2y^2 - 27xy^3 + 10y^4.$$

Мы имеем:

$$f(x, y) = 10(x^4 + y^4) - 27xy(x^2 + y^2) - 110x^2y^2 = 10s_4 - 27\sigma_2 s_2 - 110\sigma_2^2.$$

По табл. 1, приведённой на стр. 12, находим:

$$f(x, y) = 10\sigma_1^4 - 67\sigma_1^2\sigma_2 - 36\sigma_2^2.$$

Этот многочлен второй степени относительно σ_2 легко разложить на множители. Так как он имеет корни $\sigma_2 = -2\sigma_1^2$ и $\sigma_2 = \frac{5}{36}\sigma_1^2$, то

$$f(x, y) = -36(\sigma_2 + 2\sigma_1^2)\left(\sigma_2 - \frac{5}{36}\sigma_1^2\right) = (2\sigma_1^2 + \sigma_2)(5\sigma_1^2 - 36\sigma_2).$$

Подставляя вместо σ_1 и σ_2 их значения $\sigma_1 = x + y$, $\sigma_2 = xy$, получаем:

$$f(x, y) = (2(x+y)^2 + xy)(5(x+y)^2 - 36xy) = \\ = (2x^2 + 5xy + 2y^2)(5x^2 - 26xy + 5y^2).$$

Каждый из двух квадратных трехчленов, стоящих в правой части, снова можно разложить на множители. Например, первый из них, т. е. $2x^2 + 5xy + 2y^2$, рассматриваемый как квадратный многочлен относительно x, имеет корни $x = -\frac{1}{2}y$, $x = -2y$, и потому

$$2x^2 + 5xy + 2y^2 = 2\left(x + \frac{1}{2}y\right)(x + 2y) = (2x + y)(x + 2y).$$

Аналогично находим:

$$5x^2 - 26xy + 5y^2 = (x - 5y)(5x - y).$$

Таким образом, окончательно получаем:

$$f(x, y) = 10x^4 - 27x^3y - 110x^2y^2 - 27xy^3 + 10y^4 = \\ = (2x + y)(x + 2y)(x - 5y)(5x - y).$$

2°. Разложить на множители многочлен

$$f(x, y) = 6x^4 - 11x^3y - 18x^2y^2 - 11xy^3 + 6y^4.$$

Выражая симметрический многочлен $f(x, y)$ через σ_1 и σ_2, находим

$$f(x, y) = 6\sigma_1^4 - 35\sigma_1^2\sigma_2 + 16\sigma_2^2.$$

Полученный квадратный многочлен (относительно σ_2) имеет корни $\sigma_2=2\sigma_1^2$ и $\sigma_2=\frac{3}{16}\sigma_1^2$ и потому следующим образом разлагается на множители:

$$f(x, y) = 16(\sigma_2-2\sigma_1^2)\left(\sigma_2-\frac{3}{16}\sigma_1^2\right) = (2\sigma_1^2-\sigma_2)(3\sigma_1^2-16\sigma_2).$$

Отсюда, возвращаясь к первоначальным переменным x, y, получаем:

$$f(x, y) = (2(x+y)^2-xy)(3(x+y)^2-16xy) = \\ = (2x^2+3xy+2y^2)(3x^2-10xy+3y^2).$$

Первый множитель в правой части имеет *комплексные* корни, и мы его оставим без изменения (т. е. не будем рассматривать разложение на множители с комплексными коэффициентами). Второй же множитель легко разлагается:

$$3x^2-10xy+3y^2=(x-3y)(3x-y).$$

Таким образом, окончательно находим:

$$f(x, y) = 6x^4-11x^3y-18x^2y^2-11xy^3+6y^4= \\ = (2x^2+3xy+2y^2)(x-3y)(3x-y).$$

3°. Разложить на множители многочлен

$$f(x, y) = 2x^4-x^3y+3x^2y^2-xy^3+2y^4.$$

Мы имеем:

$$f(x, y) = 2\sigma_1^4-9\sigma_1^2\sigma_2+9\sigma_2^2=(\sigma_1^2-3\sigma_2)(2\sigma_1^2-3\sigma_2).$$

Подставляя вместо σ_1 и σ_2 их выражения, получаем:

$$f(x, y) = ((x+y)^2-3xy)(2(x+y)^2-3xy) = (x^2-xy+y^2)(2x^2+xy+2y^2).$$

Оба множителя в правой части имеют комплексные корни и далее не разлагаются (на множители с действительными коэффициентами).

Если при выражении симметрического многочлена $f(x, y)$ через σ_1 и σ_2 получается многочлен второй степени относительно σ_2, имеющий *комплексные* корни, то указанный приём приводит к разложению на множители с комплексными коэффициентами. Можно доказать, однако (мы не приводим доказательства), что именно в этом случае применим другой приём, позволяющий разложить многочлен $f(x, y)$ на два множителя с действительными коэффициентами.

Приём этот заключается в том, что рассматриваемый симметрический многочлен четвёртой степени представляется в виде произведения двух несимметричных множителей, каждый из которых представляет собой «отражение» другого множителя, т. е. получается из него перестановкой переменных x и y. Иными словами, следует представить заданный симметрический многочлен четвёртой степени в виде

$$(Ax^2+Bxy+Cy^2)(Cx^2+Bxy+Ay^2),$$

где A, B, C — какие-то пока неизвестные (или, как говорят, «неопределённые») коэффициенты. Этот приём, при котором ищется представление заданного многочлена в некотором, заранее определённом виде, но с неизвестными коэффициентами, носит название *метода неопределённых коэффициентов.*

Как же определить значения неизвестных коэффициентов A, B, C? Мы рассмотрим это на следующем примере.

4°. Разложить на множители многочлен

$$f(x,\, y)=2x^4+3x^3y+6x^2y^2+3xy^3+2y^4.$$

Выражение этого многочлена через элементарные симметрические многочлены σ_1, σ_2 имеет следующий вид:

$$f(x,\, y)=2\sigma_1^4-5\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_2^2.$$

Этот многочлен второй степени относительно σ_2 имеет к о м п л е к с н ы е корни. Поэтому применим второй приём, т. е. попытаемся представить заданный многочлен в виде

$$2x^4+3x^3y+6x^2y^2+3xy^3+2y^4=(Ax^2+Bxy+Cy^2)(Cx^2+Bxy+Ay^2). \quad (*)$$

Для нахождения коэффициентов A, B, C заметим, что соотношение (*) должно представлять собой т о ж д е с т в о, т. е. должно быть верным при любых значениях переменных x и y. Поэтому мы можем применить *метод частных значений*, т. е. можем для нахождения коэффициентов A, B, C подставлять в соотношение (*) вместо x, y какие-либо числовые значения. Так, положив $x=y=1$, находим:

$$16=(A+B+C)^2,$$

откуда $A+B+C=\pm 4$. Заметим теперь, что коэффициенты A, B, C определены лишь с точностью до знака, так как если изменить у всех трёх чисел A, B, C знаки на противоположные, то соотношение

(*) останется справедливым. Поэтому, не теряя общности, мы можем считать, что

$$A + B + C = 4.$$

Далее, полагая $x = 1$, $y = -1$, получаем из равенства (*):

$$4 = (A - B + C)^2,$$

откуда

$$A - B + C = \pm 2.$$

Наконец, полагая $x = 0$, $y = 1$, получаем $AC = 2$.

Итак, для определения коэффициентов A, B, C мы получили следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} A + B + C = 4, \\ A - B + C = \pm 2, \\ \qquad\quad AC = 2. \end{cases}$$

Если в правой части второго уравнения взять знак «+» мы легко найдём из первых двух уравнений: $B = 1$, $A + C = 3$. Теперь, учитывая третье уравнение, имеем $A = 1$, $C = 2$ (или $C = 1$, $A = 2$). В результате мы получим:

$$2x^4 + 3x^3y + 6x^2y^2 + 3xy^3 + 2y^4 = (x^2 + xy + 2y^2)(2x^2 + xy + y^2).$$

Это равенство получено в предположении, что искомое разложение (*) существует. Раскрывая скобки в правой части, убеждаемся в справедливости полученного равенства.

Если бы в правой части второго уравнения мы взяли знак «−», то получили бы систему, имеющую комплексные решения. Поэтому здесь мы не получаем разложения на действительные множители (т. е. заданный многочлен можно и другим способом разложить на множители, но они уже будут иметь комплексные коэффициенты).

УПРАЖНЕНИЯ

Разложить на множители следующие многочлены:

1) $2x^4 + 7x^3y + 9x^2y^2 + 7xy^3 + 2y^4$; **2)** $2x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + 2y^4$;

3) $18a^4 - 21a^3b - 94a^2b^2 - 21ab^3 + 18b^4$; **4)** $3x^4 - 8x^3y + 14x^2y^2 - 8xy^3 + 3y^4$.

13. Разные задачи. Симметрические многочлены можно с успехом применять и при решении разнообразных задач других видов. Рассмотрим следующий пример.

Исключить x и y из уравнений

$$\begin{cases} x \ \ + y \ \ = a, \\ x^2 + y^2 = b, \\ x^3 + y^3 = c. \end{cases}$$

Эту задачу надо понимать следующим образом. Так как для двух неизвестных x и y мы имеем три уравнения, то рассматриваемая система имеет решения не при любых значениях a, b, c. Требуется найти соотношение между a, b, c, при котором эта система разрешима.

Для решения этой задачи можно из первых двух уравнений найти значения x и y (т. е. выразить их через a и b) и подставить найденные значения в третье уравнение. Этот метод приводит к громоздким вычислениям. Проще воспользоваться тем, что левые части уравнений симметрично зависят от x и y. Поэтому их можно выразить через элементарные симметрические многочлены $\sigma_1 = x + y$, $\sigma_2 = xy$. Тогда данная система примет вид

$$\begin{cases} \sigma_1 = a, \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = b, \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = c. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений получаем: $\sigma_1 = a$, $\sigma_2 = \frac{1}{2}(a^2 - b)$. Поэтому, в силу третьего уравнения,

$$a^3 - \frac{3}{2}a(a^2 - b) = c,$$

или

$$a^3 - 3ab + 2c = 0.$$

Это и есть искомое соотношение между a, b, c, т. е. результат исключения x и y из данной системы уравнений.

УПРАЖНЕНИЯ

Упростить выражения:

1) $\dfrac{(x+y)^7 - x^7 - y^7}{(x+y)^5 - x^5 - y^5}$;

2) $\dfrac{1}{(a+b)^2}\left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}\right) + \dfrac{2}{(a+b)^3}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)$;

3) $\dfrac{1}{(p+q)^3}\left(\dfrac{1}{p^3} + \dfrac{1}{q^3}\right) + \dfrac{3}{(p+q)^4}\left(\dfrac{1}{p^2} + \dfrac{1}{q^2}\right) + \dfrac{6}{(p+q)^5}\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}\right)$.

Доказать тождества:

4) $(x+y)^3 + 3xy(1 - x - y) - 1 = (x + y - 1)(x^2 + y^2 - xy + x + y + 1)$;

5) $(x+y)^4+x^4+y^4=2(x^2+xy+y^2)^2$;

6) $(x+y)^5-x^5-y^5=5xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$;

7) $(x+y)^7-x^7-y^7=7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2$.

8) Решить в целых положительных числах уравнение

$$x^3+y^3+1=3xy.$$

9) Доказать, что однородный симметрический многочлен от x, y в том и только том случае делится на x^2+xy+y^2, если при выражении его через σ_1 и σ_2 получается многочлен, сумма коэффициентов которого равна нулю.

10) Доказать, что при $n=6k\pm 1$ многочлен $(x+y)^n-x^n-y^n$ делится на x^2+xy+y^2.

11) При каком условии многочлен $x^{2n}+x^n+1$ делится на x^2+x+1?

12) При каком условии многочлен $(x+1)^n+x^n+1$ делится на x^2+x+1?

13) При каком условии многочлен $(x+1)^n-x^n-1$ делится на x^2+x+1?

14) Доказать, что если числа u, v, x, y удовлетворяют соотношениям $u+v=x+y$, $u^2+v^2=x^2+y^2$, то при любом натуральном n справедливо равенство $u^n+v^n=x^n+y^n$.

15) Решить в целых числах уравнение

$$x+y=x^2-xy+y^2.$$

16) Доказать, что если n — нечётное число, делящееся на 3, то выражение

$$(a+b)^n-a^n-b^n-3(ab)^{\frac{n-1}{2}}(a+b)$$

делится на a^2+ab+b^2.

§ 3. СИММЕТРИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ ОТ ТРЁХ ПЕРЕМЕННЫХ

14. Определение и примеры. В § 1 мы рассмотрели симметрические многочлены от двух переменных x, y, т. е. многочлены, которые не меняются при перестановке местами x и y. В многочлене от трёх переменных x, y, z таких перестановок можно сделать не одну, а три: можно поменять местами x и y, или x и z, или, наконец, y и z. Назовём многочлен $f(x, y, z)$ от трёх переменных x, y, z *симметрическим*, если при любой из этих трёх перестановок он остаётся неизменным. (По поводу этого определения см. также стр. 91.)

Условие симметричности многочлена $f(x, y, z)$ записывается следующим образом:

$$f(x, y, z)=f(y, x, z)=f(z, y, x)=f(x, z, y).$$

Примеры симметрических многочленов от трёх переменных можно строить по аналогии со случаем двух переменных. Например, из коммутативности сложения вытекает, что симметричным является многочлен $x+y+z$, а из коммутативности умножения следует симметричность многочлена xyz.

Симметричны и *степенные суммы*, т. е. многочлены

$$s_k = x^k + y^k + z^k.$$

Вот ещё примеры симметрических многочленов от трёх переменных:

$$xy + yz + xz, \quad x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz,$$
$$(x+y)(x+z)(y+z), \quad x(y^4+z^4) + y(x^4+z^4) + z(x^4+y^4).$$

Напротив, многочлен

$$x^2z + y^2z$$

не является симметрическим. Правда, при перестановке переменных x и y он не меняется:

$$x^2z + y^2z = y^2z + x^2z.$$

Но перестановка переменных x и z меняет вид этого многочлена — он переходит в многочлен

$$z^2x + y^2x \not\equiv x^2z + y^2z.$$

Наиболее простыми являются симметрические многочлены

$$x + y + z, \quad xy + xz + yz, \quad xyz.$$

Их называют *элементарными симметрическими многочленами* от трёх переменных x, y, z и обозначают через σ_1, σ_2, σ_3:

$$\sigma_1 = x + y + z,$$
$$\sigma_2 = xy + xz + yz,$$
$$\sigma_3 = xyz.$$

Заметим, что σ_1 — многочлен первой степени, σ_2 — второй степени и σ_3 — третьей.

15. Основная теорема о симметрических многочленах от трёх переменных. Как и в случае двух переменных, существует простой способ строить симметрические многочлены от трёх переменных. Для этого нужно взять любой (вообще говоря, не симметрический) многочлен от переменных σ_1, σ_2, σ_3 и заменить в нём σ_1 на $x+y+z$, σ_2 — на $xy+xz+yz$ и σ_3 — на xyz. В результате мы получим многочлен, симметрично зависящий от x, y, z. Например, из многочлена

$$\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3$$

мы получим таким путём многочлен

$$f(x, y, z) = (x+y+z)^3 - 3(x+y+z)(xy+xz+yz) - xyz.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем симметрический многочлен

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 4xyz.$$

Как и в случае двух переменных, описанный способ позволяет получить все симметрические многочлены от трёх переменных. Иными словами, справедлива следующая

Теорема. Любой симметрический многочлен от x, y, z можно представить в виде многочлена от $\sigma_1 = x + y + z$, $\sigma_2 = xy + xz + yz$, $\sigma_3 = xyz$.

Мы докажем эту теорему*) почти так же, как и для случая двух переменных, разумеется, с некоторыми усложнениями, вызванными увеличением числа переменных.

План доказательства таков. Сначала (как и в случае двух переменных) мы покажем, что любая степенная сумма s_k может быть выражена через элементарные симметрические многочлены σ_1, σ_2, σ_3. Затем мы рассмотрим более сложные симметрические многочлены, каждый из которых получается из некоторого одночлена всевозможными перестановками переменных и суммированием получившихся результатов. Такие симметрические многочлены будем называть *орбитами* соответствующих одночленов. Мы покажем, что каждая орбита выражается через степенные суммы, а значит, в конечном итоге, через

---

*) Читатель, которому приводимое ниже доказательство покажется утомительным, может пропустить его без большого ущерба для понимания дальнейшего. Дело в том, что для решения большинства приводимых ниже задач эта теорема в общем виде не нужна, а нужно лишь уметь выражать симметрические многочлены второй, третьей и четвёртой степени через σ_1, σ_2, σ_3. Для этого достаточно иметь следующие формулы:

$$\begin{aligned}
&x^2 + y^2 + z^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2,\\
&x^3 + y^3 + z^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3,\\
&x^4 + y^4 + z^4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3,\\
&x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 = \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3,\\
&x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 = \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3,\\
&x^3y + xy^3 + x^3z + xz^3 + y^3z + yz^3 = \sigma_1^2\sigma_2 - 2\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_3.
\end{aligned}$$

Справедливость этих формул можно просто проверить непосредственно, подставив значения σ_1, σ_2, σ_3.

Итак, читатель, желающий оставить теоретические тонкости в стороне, может выписать на листок эти формулы и сразу переходить к чтению § 4 (стр. 55). Впрочем, мы рекомендуем ещё прочитать определение *орбиты* (стр. 48) и взглянуть на табл. 2 и 3, приведённые на стр. 47 и 51.

σ_1, σ_2, σ_3. Наконец, будет установлено, что всякий симметрический многочлен представляется в виде суммы орбит. Из этого и вытекает справедливость сформулированной теоремы.

16. Выражение степенных сумм через σ_1, σ_2, σ_3. Итак, прежде всего мы докажем, что

каждую степенную сумму $s_k = x^k + y^k + z^k$ можно представить в виде многочлена от σ_1, σ_2, σ_3.

В случае многочленов от двух переменных x, y мы воспользовались для доказательства аналогичного утверждения формулой (1), выражающей каждую степенную сумму через предыдущие (см. стр. 11). Аналогичная формула (формула Ньютона) существует и для многочленов от трёх переменных x, y и z:

$$s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2} + \sigma_3 s_{k-3}. \tag{3}$$

Эту формулу мы не будем «выводить», а прямо проверим. Подставляя в правую часть соотношения (3) вместо величин s_{k-1}, s_{k-2}, s_{k-3}, а также σ_1, σ_2, σ_3 их выражения через x, y, z и производя очевидные преобразования, получаем:

$$\begin{aligned}\sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2} + \sigma_3 s_{k-3} &= (x+y+z)(x^{k-1}+y^{k-1}+z^{k-1}) - \\ &- (xy+xz+yz)(x^{k-2}+y^{k-2}+z^{k-2}) + xyz(x^{k-3}+y^{k-3}+z^{k-3}) = \\ &= (x^k+y^k+z^k+xy^{k-1}+x^{k-1}y+xz^{k-1}+x^{k-1}z+yz^{k-1}+y^{k-1}z) - \\ &- (x^{k-1}y+xy^{k-1}+x^{k-1}z+xz^{k-1}+y^{k-1}z+yz^{k-1}+xyz^{k-2}+xy^{k-2}z+x^{k-2}yz) + \\ &+ (x^{k-2}yz+xy^{k-2}z+xyz^{k-2}) = x^k+y^k+z^k = s_k.\end{aligned}$$

Таким образом, правильность формулы (3) проверена.

Из этой формулы и вытекает справедливость нашего утверждения.

В самом деле, легко видеть, что степенные суммы s_0, s_1, s_2*)

---

*) Читателя не должно удивлять, что мы здесь использовали в качестве исходных формул выражения степенных сумм s_0, s_1, s_2, а не s_1, s_2, s_3, как, возможно, казалось бы естественнее. Дело в том, что формула (3), как видно из её проверки справедлива для **любого** k (в частности, на стр. 54 мы будем применять её к вычислению степенных сумм с отрицательными показателями). Поэтому использование степенной суммы s_0 вполне обосновано. В то же время это существенно упрощает вычисления: искать «подбором» выражение степенной суммы s_3 через σ_1, σ_2, σ_3 было бы не очень приятно!

выражаются через σ_1, σ_2, σ_3:

$$s_0 = x^0 + y^0 + z^0 = 1 + 1 + 1 = 3;$$
$$s_1 = x + y + z = \sigma_1;$$
$$s_2 = x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2.$$

После этого формула (3) позволяет последовательно находить выражения следующих степенных сумм через σ_1, σ_2, σ_3: сначала s_3, затем s_4, s_5 и т. д. Иными словами, имея выражение степенных сумм s_0, s_1, s_2 через σ_1, σ_2, σ_3, мы с помощью метода математической индукции (на основе формулы (3)) заключаем, что любая степенная сумма s_k выражается через σ_1, σ_2, σ_3. Таким образом, наше утверждение доказано.

Так же как и в случае двух переменных, формула (3) не только доказывает возможность выразить степенные суммы через σ_1, σ_2, σ_3, но и позволяет фактически находить эти выражения.

Иными словами, проведённое выше доказательство конструктивно, т. е. оно указывает вполне определённую последовательность действий (или, как говорят, алгоритм), позволяющую за конечное число шагов добраться до выражения произвольной степенной суммы s_k через σ_1, σ_2, σ_3. В табл. 2 сведены выражения степенных сумм (до s_{10}) через σ_1, σ_2, σ_3 (читатель легко может построить эту таблицу самостоятельно):

Таблица 2

Выражения степенных сумм $s_n = x^n + y^n + z^n$ через σ_1, σ_2, σ_3

s_0	3	s_8	$\sigma_1^8 - 8\sigma_1^6\sigma_2 + 20\sigma_1^4\sigma_2^2 - 16\sigma_1^2\sigma_2^3 + 2\sigma_2^4 + 8\sigma_1^5\sigma_3 - 32\sigma_1^3\sigma_2\sigma_3 + 12\sigma_1^2\sigma_3^2 + 24\sigma_1\sigma_2^2\sigma_3 - 8\sigma_2\sigma_3^2$
s_1	σ_1		
s_2	$\sigma_1^2 - 2\sigma_2$	s_9	$\sigma_1^9 - 9\sigma_1^7\sigma_2 + 27\sigma_1^5\sigma_2^2 - 30\sigma_1^3\sigma_2^3 + 9\sigma_1\sigma_2^4 + 9\sigma_1^6\sigma_3 - 45\sigma_1^4\sigma_2\sigma_3 + 54\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_3 + 18\sigma_1^3\sigma_3^2 - 9\sigma_2^3\sigma_3 - 27\sigma_1\sigma_2\sigma_3^2 + 3\sigma_3^3$
s_3	$\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$		
s_4	$\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3$		
s_5	$\sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 + 5\sigma_1^2\sigma_3 - 5\sigma_2\sigma_3$	s_{10}	$\sigma_1^{10} - 10\sigma_1^8\sigma_2 + 35\sigma_1^6\sigma_2^2 - 50\sigma_1^4\sigma_2^3 + 25\sigma_1^2\sigma_2^4 - 2\sigma_2^5 + 10\sigma_1^7\sigma_3 - 60\sigma_1^5\sigma_2\sigma_3 + 100\sigma_1^3\sigma_2^2\sigma_3 + 25\sigma_1^4\sigma_3^2 - 40\sigma_1\sigma_2^3\sigma_3 - 60\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3^2 + 10\sigma_1\sigma_3^3 + 15\sigma_2^2\sigma_3^2$
s_6	$\sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3 + 6\sigma_1^3\sigma_3 - 12\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 3\sigma_3^2$		
s_7	$\sigma_1^7 - 7\sigma_1^5\sigma_2 + 14\sigma_1^3\sigma_2^2 - 7\sigma_1\sigma_2^3 + 7\sigma_1^4\sigma_3 - 21\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3 + 7\sigma_1\sigma_3^2 + 7\sigma_2^2\sigma_3$	. . .	. . . .

17. Орбиты одночленов. Итак, нам удалось выразить степенные суммы s_n через элементарные симметрические многочлены σ_1, σ_2, σ_3. Теперь мы покажем, что симметрические многочлены значительно более широкого класса — так называемые орбиты одночленов —

выражаются через степенные суммы, а значит, в конечном итоге, через σ_1, σ_2, σ_3.

Существуют одночлены, не меняющиеся при перестановках переменных, т. е. симметрические. Легко видеть, что в такой одночлен все переменные должны входить в одной и той же степени, т. е. этот одночлен должен совпадать с произведением $x^k y^k z^k$ (взятым с некоторым числовым коэффициентом).

Если же среди показателей одночлена $x^k y^l z^m$ имеются различные, то этот одночлен уже не будет симметрическим. Чтобы получить симметрический многочлен, одним из слагаемых которого является одночлен $x^k y^l z^m$, надо добавить к нему другие одночлены. Многочлен с наименьшим числом членов, одним из слагаемых которого является одночлен $x^k y^l z^m$, назовём *орбитой* этого одночлена и обозначим через $O(x^k y^l z^m)$.

Ясно, что для получения орбиты одночлена $x^k y^l z^m$ надо прибавить к нему одночлены, получающиеся перестановкой переменных x, y, z. Если все три показателя k, l, m различны, то орбита $O(x^k y^l z^m)$ будет содержать шесть членов, получающихся из одночлена $x^k y^l z^m$ перестановками переменных. Например:

$$O(x^5y^2)z = x^5y^2z + x^5yz^2 + x^2y^5z + x^2yz^5 + xy^5z^2 + xy^2z^5;$$
$$O(x^3y) = O(x^3yz^0) = x^3y + xy^3 + x^3z + xz^3 + y^3z + yz^3.$$

Если же в одночлене $x^k y^l z^m$ два показателя совпадают, а третий отличен от них, скажем $k = l$ (но $k \neq m$), то перестановка переменных x, y не меняет одночлена $x^k y^l z^m$. В этом случае орбита содержит только три члена:

$$O(x^k y^l z^m) = x^k y^k z^m + x^k y^m z^k + x^m y^k z^k$$

$(m \neq k)$. Например,

$$O(xyz^5) = xyz^5 + xy^5z + x^5yz,$$
$$O(xy) = xy + xz + yz,$$
$$O(x^3y^3) = x^3y^3 + x^3z^3 + y^3z^3.$$

Частными случаями таких орбит являются степенные суммы:

$$O(x^k) = O(x^k y^0 z^0) = x^k + y^k + z^k = s_k.$$

Наконец, если $k = l = m$, то орбита является одночленом:

$$O(x^k y^k z^k) = x^k y^k z^k.$$

Мы покажем теперь, что орбита любого одночлена выражается через σ_3 и степенные суммы. А так как любая степенная сумма выражается через σ_1, σ_2, σ_3, то отсюда будет следовать, что орбита любого одночлена выражается через σ_1, σ_2, σ_3. Это будет вторым шагом в доказательстве основной теоремы.

Если одночлен $x^k y^l z^m$ зависит только от одного переменного x (т. е. $l=m=0$), наше утверждение очевидно: в этом случае орбита $O(x^k)=s_k$ сама являетя степенной суммой.

Перейдём к случаю, когда одночлен зависит от д в у х переменных, т. е. имеет вид $x^k y^l$. Если $k \neq l$, то имеет место формула

$$O(x^k y^l) = O(x^k)O(x^l) - O(x^{k+l}) \quad (k \neq l). \tag{4}$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} O(x^k)O(x^l) - O(x^{k+l}) &= (x^k+y^k+z^k)(x^l+y^l+z^l) - (x^{k+l}+y^{k+l}+z^{k+l}) = \\ &= (x^{k+l}+y^{k+l}+z^{k+l}+x^ky^l+x^ly^k+x^kz^l+x^lz^k+y^kz^l+y^lz^k) - (x^{k+l}+y^{k+l}+z^{k+l}) = \\ &= x^ky^l+x^ly^k+x^kz^l+x^lz^k+y^kz^l+y^lz^k = O(x^ky^l). \end{aligned}$$

Если же $k=l$, то формула (4) заменяется следующей:

$$O(x^k y^k) = \frac{1}{2}\left((O(x^k))^2 - O(x^{2k})\right). \tag{5}$$

(Иными словами, в формуле (4) надо положить $k=l$ и правую часть р а з д е л и т ь н а 2; последнее объясняется тем, что орбита $O(x^k y^k)$ состоит не из шести, а лишь из трёх слагаемых.) Справедливость формулы (5) также устанавливается непосредственной проверкой.

Наконец, если одночлен $x^k y^l z^m$ зависит от всех трёх переменных x, y, z (т. е. все три показателя k, l, m отличны от нуля), то одночлен $x^k y^l z^m$ делится на некоторую степень одночлена xyz. Поэтому в многочлене $O(x^k y^l z^m)$ можно вынести за скобки некоторую степень одночлена xyz, после чего останется в скобках орбита некоторого одночлена, зависящего меньше чем от трёх переменных x, y, z. Например,

$$\begin{aligned} O(x^2y^3z^4) &= x^2y^3z^4+x^2y^4z^3+x^3y^2z^4+x^3y^4z^2+x^4y^2z^3+x^4y^3z^2 = \\ &= (xyz)^2\cdot(yz^2+y^2z+xz^2+xy^2+x^2z+x^2y) = (xyz)^2\cdot O(x^2y), \\ O(x^3y^5z^5) &= x^3y^5z^5+x^5y^3z^5+x^5y^5z^3 = \\ &= (xyz)^3\cdot(y^2z^2+x^2z^2+x^2y^2) = (xyz)^3\cdot O(x^2y^2) \end{aligned}$$

и т. п. Вообще, если, например, $k \geqslant m$, $l \geqslant m$ (т. е. m — наименьшее из трёх чисел k, l, m), то

$$O(x^k y^l z^m) = (xyz)^m \cdot O(x^{k-m} y^{l-m}) = \sigma_3^m \cdot O(x^{k-m} y^{l-m}). \tag{6}$$

Итак, если одночлен $x^k y^l z^m$ зависит только от одного переменного, то орбита $O(x^k y^l z^m)$ является степенной суммой; если он зависит от двух переменных, то орбита $O(x^k y^l z^m)$ выражается через степенные суммы (см. (4), (5)); наконец, случай, когда этот одночлен зависит от всех трёх переменных x, y, z, сводится к предыдущим, если в многочлене $O(x^k y^l z^m)$ вынести за скобки общий множитель всех его членов (представляющий собой некоторую степень величины σ_3). Мы видим, что, действительно, орбита любого одночлена выражается через σ_3 и степенные суммы.

В приведённом доказательстве несколько неприятно то обстоятельство, что имеются две разные формулы (4), (5) для выражения орбиты $O(x^k y^l)$ через степенные суммы при $k \neq l$ и $k = l$. Однако это различие легко может быть устранено, если несколько видоизменить определение орбиты.

В случае, когда все три показателя k, l, m различны, орбита $O(x^k y^l z^m)$ представляет собой сумму шести членов:

$$O(x^k y^l z^m) = x^k y^l z^m + x^k y^m z^l + x^l y^k z^m + x^l y^m z^k + x^m y^k z^l + x^m y^l z^k \tag{*}$$

($k \neq l \neq m \neq k$). Правая часть формулы (*), разумеется, может рассматриваться и при совпадении двух или даже всех трёх показателей. Эту правую часть мы назовём *полной орбитой* одночлена $x^k y^l z^m$ и обозначим через $O_\Pi(x^k y^l z^m)$:

$$O_\Pi(x^k y^l z^m) = x^k y^l z^m + x^k y^m z^l + x^l y^k z^m + x^l y^m z^k + x^m y^k z^l + x^m y^l z^k. \tag{**}$$

Таким образом, если все три показателя k, l, m различны, то полная орбита совпадает с обычной орбитой, определённой ранее.

В случае, когда $k = l \neq m$, полная орбита принимает вид

$$O_\Pi(x^k y^k z^m) = x^k y^k z^m + x^k y^m z^k + x^k y^k z^m + x^k y^m z^k + x^m y^k z^k + x^m y^k z^k = 2(x^k y^k z^m + x^k y^m z^k + x^m y^k z^k).$$

Выражение, стоящее в скобках, есть не что иное, как обычная орбита $O(x^k y^k z^m)$. Таким образом, $O_\Pi(x^k y^k z^m) = 2 \cdot O(x^k y^k z^m)$ при $k \neq m$. Наконец, при $k = l = m$ мы имеем, очевидно,

$$O_\Pi(x^k y^k z^k) = 6 x^k y^k z^k = 6 \cdot O(x^k y^k z^k).$$

Мы видим, что во всех случаях полная орбита отличается от обычной лишь числовым множителем:

$O_\Pi(x^k y^l z^m) = O(x^k y^l z^m)$, если все три показателя k, l, m различны;
$O_\Pi(x^k y^k z^m) = 2 \cdot O(x^k y^k z^m)$ при $k \neq m$;
$O_\Pi(x^k y^k z^k) = 6 \cdot O(x^k y^k z^k)$.

Наличие единой формулы (**) приводит к тому, что для полных орбит формулы (4), (5) заменяются одной формулой, справедливой во всех случаях:

$$O_\Pi(x^k y^l) = s_k s_l - s_{k+l}. \tag{4'}$$

В рассматриваемом случае т р ё х переменных удобство использования полных орбит не является особенно убедительным, поскольку замена единой формулы (4′) двумя формулами (4), (5) не сильно усложняет изложение. Но в случае симметрических многочленов от n переменных (см. стр. 107) использование неполных орбит чрезмерно усложнило бы изложение.

В дальнейшем мы будем, как правило, пользоваться обычными (т. е. определёнными в основном тексте) орбитами и лишь на стр. 50 перейдём к рассмотрению полных орбит.

Проведённое выше доказательство также конструктивно: мы не только доказали в о з м о ж н о с т ь выразить каждую орбиту одночлена через σ_1, σ_2, σ_3, но и получили вполне определённый алгоритм, позволяющий для любой конкретно заданной орбиты найти её выражение через σ_1, σ_2, σ_3. Основой этого алгоритма служат формулы (4), (5), (6) и найденное в предыдущем пункте выражение степенных сумм через σ_1, σ_2, σ_3.

Например,

$$O(x^2y^2) = \frac{1}{2}\left(O(x^2)^2 - O(x^4)\right) = \frac{1}{2}(s_2^2 - s_4) =$$
$$= \frac{1}{2}\left((\sigma_1^2 - 2\sigma_2)^2 - (\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3\right) = \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3$$

(здесь мы применили формулу (5));

$$O(x^4y^2z) = \sigma_3 \cdot O(x^3y) = \sigma_3\left(O(x^3)O(x) - O(x^4)\right) =$$
$$= \sigma_3(s_3s_1 - s_4) = \sigma_3(\sigma_1(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3) - (\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3)) =$$
$$= \sigma_3(\sigma_1^2\sigma_2 - 2\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_3)$$

(применены формулы (4) и (6)).

В табл. 3 приведены выражения некоторых орбит $O(x^ky^l)$ через σ_1, σ_2, σ_3 (читатель легко может составить сам такую таблицу на основании формул (4) и (5)):

Т а б л и ц а 3

Выражения орбит $O(x^ky^l)$ через σ_1, σ_2, σ_3

$O(xy)$	σ_2	$O(x^3y^2)$	$\sigma_1\sigma_2^2 - 2\sigma_1^2\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3$
$O(x^2y)$	$\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3$	$O(x^5y)$	$\sigma_1^4\sigma_2 - 4\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_1^3\sigma_3 + 7\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 2\sigma_2^3 - 3\sigma_3^2$
$O(x^3y)$	$\sigma_1^2\sigma_2 - 2\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_3$	$O(x^4y^2)$	$\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3 - 2\sigma_1^3\sigma_3 + 4\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 3\sigma_3^2$
$O(x^2y^2)$	$\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3$	$O(x^3y^3)$	$\sigma_2^3 + 3\sigma_3^2 - 3\sigma_1\sigma_2\sigma_3$
$O(x^4y)$	$\sigma_1^3\sigma_2 - 3\sigma_1\sigma_2^2 - \sigma_1^2\sigma_3 + 5\sigma_2\sigma_3$	. . . . .	. . . .

18. Доказательство основной теоремы. Теперь нетрудно завершить доказательство теоремы, сформулированной на стр. 45.

Пусть $f(x, y, z)$ — симметрический многочлен и $ax^k y^l z^m$ — одно из его слагаемых. В силу симметричности многочлена $f(x, y, z)$, он содержит вместе с этим слагаемым и всю орбиту $O(x^k y^l z^m)$, взятую с коэффициентом a. Таким образом,

$$f(x, y, z) = a \cdot O(x^k y^l z^m) + f_1(x, y, z),$$

где $f_1(x, y, z)$ — некоторый многочлен, который, очевидно, симметричен и содержит м е н ь ш е членов, чем $f(x, y, z)$. Из $f_1(x, y, z)$ можно также выделить орбиту одного из его членов и т. д. После конечного числа шагов мы разложим многочлен $f(x, y, z)$ на сумму орбит отдельных одночленов.

Итак,

любой симметрический многочлен $f(x, y, z)$ есть сумма конечного числа орбит одночленов.

А так как каждая орбита, в силу доказанного выше, выражается через σ_1, σ_2, σ_3, то и любой симметрический многочлен может быть выражен через σ_1, σ_2, σ_3. Тем самым основная теорема полностью доказана.

Всё доказательство в целом также является конструктивным: оно содержит сравнительно несложный алгоритм, позволяющий любой симметрический многочлен выразить через σ_1, σ_2, σ_3.

В качестве примера найдём выражение симметрического многочлена

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 4xyz + 2x^2y + 2xy^2 + 2x^2z + 2xz^2 + 2y^2z + 2yz^2$$

через σ_1, σ_2, σ_3. Мы имеем:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= O(x^3) - 4 \cdot O(xyz) + 2 \cdot O(x^2y) = \\ &= (\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3) - 4\sigma_3 + 2(\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3) = \sigma_1^3 - \sigma_1\sigma_2 - 7\sigma_3. \end{aligned}$$

УПРАЖНЕНИЯ

Выразить через σ_1, σ_2, σ_3 следующие симметрические многочлены:

1) $x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2$;

2) $x^5y^2 + x^5z^2 + x^2y^5 + x^2z^5 + y^5z^2 + y^2z^5$;

3) $(x + y)(x + z)(y + z)$;

4) $(x^2 + y^2)(x^2 + z^2)(y^2 + z^2)$;

5) $(x - y)^2(y - z)^2(z - x)^2$;

6) $x^6 + y^6 + z^6 + 2x^5y + 2x^5z + 2xy^5 + 2xz^5 + 2y^5z + 2yz^5 - 3x^4y^2 - 3x^4z^2 - 3x^2y^4 - 3x^2z^4 - 3y^4z^2 - 3y^2z^4 + x^3y^3 + x^3z^3 + y^3z^3$.

7) Найти площадь треугольника, зная его периметр, сумму квадратов длин сторон и сумму кубов длин сторон.

19. Формула Варинга*). Доказанная в п. 16 формула (3) является рекуррентным соотношением — она позволяет найти выражение степенной суммы s_k через σ_1, σ_2, σ_3, лишь предварительно найдя выражения для предыдущих степенных сумм. Однако с её помощью можно получить явное выражение степенной суммы s_k через σ_1, σ_2, σ_3. Это выражение (ф о р м у л а В а р и н г а) имеет следующий вид:

$$\frac{1}{k}s_k = \sum \frac{(-1)^{k-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-1)!}{\lambda_1!\lambda_2!\lambda_3!}\sigma_1^{\lambda_1}\sigma_2^{\lambda_2}\sigma_3^{\lambda_3}.$$

В этой формуле суммирование распространено на все наборы неотрицательных целых чисел λ_1, λ_2, λ_3, для которых $\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=k$. При этом символу 0!, если он встречается, приписывается значение 1. Соотношение

$$\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=k,$$

налагаемое на показатели λ_1, λ_2, λ_3 в формуле Варинга, связано со следующим обстоятельством. Симметрический многочлен σ_1 имеет п е р в у ю степень относительно x, y, z, многочлен σ_2 — в т о р у ю, многочлен σ_3 — т р е т ь ю степень. Поэтому, если подставить в одночлен $\sigma_1^{\lambda_1}\sigma_2^{\lambda_2}\sigma_3^{\lambda_3}$ вместо элементарных симметрических многочленов σ_1, σ_2, σ_3 их выражения через x, y, z, то получим однородный многочлен относительно x, y, z, степень которого равна $\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3$. Отсюда ясно, что в разложение степенной суммы s_k могут входить лишь те одночлены $\sigma_1^{\lambda_1}\sigma_2^{\lambda_2}\sigma_3^{\lambda_3}$, для которых $\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=k$.

Доказательство формулы Варинга нетрудно провести по индукции, если воспользоваться соотношением (3). При этом приходится использовать следующее легко доказываемое тождество:

$$k\frac{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-1)!}{\lambda_1!\lambda_2!\lambda_3!} = (k-1)\frac{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-2)!}{(\lambda_1-1)!\lambda_2!\lambda_3!} + (k-2)\frac{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-2)!}{\lambda_1!(\lambda_2-1)!\lambda_3!} + (k-3)\frac{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-2)!}{\lambda_1!\lambda_2!(\lambda_3-1)!},$$

где $k=\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3$. Детальное проведение доказательства мы предоставляем читателю.

В качестве примера найдём выражение степенной суммы s_6 через элементарные симметрические многочлены. По формуле Варинга сначала надо взять всевозможные целые неотрицательные решения уравнения

$$\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=6.$$

Это уравнение имеет семь решений, указанных в табл. 4:

Т а б л и ц а 4

λ_1	λ_2	λ_3	λ_1	λ_2	λ_3	λ_1	λ_2	λ_3
6	0	0	2	2	0	1	1	1
4	1	0	0	3	0	0	0	2
			3	0	1			

*) Этот пункт может быть пропущен при первом чтении.

Поэтому

$$\frac{1}{6}s_6=\frac{(-1)^{6-6-0-0}(6+0+0-1)!}{6!0!0!}\sigma_1^6\sigma_2^0\sigma_3^0+\frac{(-1)^{6-4-1-0}(4+1+0-1)!}{4!1!0!}\sigma_1^4\sigma_2^1\sigma_3^0+$$
$$+\frac{(-1)^{6-2-2-0}(2+2+0-1)!}{2!2!0!}\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_3^0+\frac{(-1)^{6-0-3-0}(0+3+0-1)!}{0!3!0!}\sigma_1^0\sigma_2^3\sigma_3^0+$$
$$+\frac{(-1)^{6-3-0-1}(3+0+1-1)!}{3!0!1!}\sigma_1^3\sigma_2^0\sigma_3^1+\frac{(-1)^{6-1-1-1}(1+1+1-1)!}{1!1!1!}\sigma_1^1\sigma_2^1\sigma_3^1+$$
$$+\frac{(-1)^{6-0-0-2}(0+0+2-1)!}{0!0!2!}\sigma_1^0\sigma_2^0\sigma_3^2=\frac{5!}{6!}\sigma_1^6-\frac{4!}{4!}\sigma_1^4\sigma_2+\frac{3!}{2!2!}\sigma_1^2\sigma_2^2-\frac{2!}{3!}\sigma_2^3+$$
$$+\frac{3!}{3!}\sigma_1^3\sigma_3-\frac{2!}{1!}\sigma_1\sigma_2\sigma_3+\frac{1!}{2!}\sigma_3^2=\frac{1}{6}\sigma_1^6-\sigma_1^4\sigma_2+\frac{3}{2}\sigma_1^2\sigma_2^2-\frac{1}{3}\sigma_2^3+\sigma_1^3\sigma_3-2\sigma_1\sigma_2\sigma_3+\frac{1}{2}\sigma_3^2.$$

Умножая на 6, находим окончательно:

$$s_6=\sigma_1^6-6\sigma_1^4\sigma_2+9\sigma_1^2\sigma_2^2-2\sigma_2^3+6\sigma_1^3\sigma_3-12\sigma_1\sigma_2\sigma_3+3\sigma_3^2$$

(в полном соответствии с табл. 2, приведённой на стр. 47).

20. Обратные степенные суммы. Степенные суммы, соответствующие отрицательным показателям, т. е. выражения

$$s_{-k}=x^{-k}+y^{-k}+z^{-k}=\frac{1}{x^k}+\frac{1}{y^k}+\frac{1}{z^k}$$

(где $k=1, 2, 3, \ldots$), иногда называют *обратными степенными суммами.* Их легко выразить через σ_1, σ_2, σ_3, если заметить, что

$$s_{-k}=\frac{1}{x^k}+\frac{1}{y^k}+\frac{1}{z^k}=\frac{y^kz^k+x^kz^k+x^ky^k}{x^ky^kz^k}=\frac{O(x^ky^k)}{\sigma_3^k}. \qquad (*)$$

Однако можно поступить и по-другому. Достаточно заметить, что формула (3) (стр. 46) справедлива для любых значений k (в том числе и отрицательных), поскольку при выводе этой формулы никаких предположений относительно k не было сделано. Заменяя в формуле (3) k на $l+3$, легко находим:

$$s_l=\frac{\sigma_2}{\sigma_3}s_{l+1}-\frac{\sigma_1}{\sigma_3}s_{l+2}+\frac{1}{\sigma_3}s_{l+3}. \qquad (3')$$

С помощью полученной формулы (3′) можно последовательно находить значения обратных степенных сумм:

$$s_{-1}=\frac{\sigma_2}{\sigma_3}s_0-\frac{\sigma_1}{\sigma_3}s_1+\frac{1}{\sigma_3}s_2=\frac{\sigma_2}{\sigma_3}\cdot 3-\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\cdot\sigma_1+\frac{1}{\sigma_3}(\sigma_1^2-2\sigma_2)=\frac{\sigma_2}{\sigma_3};$$
$$s_{-2}=\frac{\sigma_2}{\sigma_3}s_{-1}-\frac{\sigma_1}{\sigma_3}s_0+\frac{1}{\sigma_3}s_1=\frac{\sigma_2}{\sigma_3}\cdot\frac{\sigma_2}{\sigma_3}-\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\cdot 3+\frac{1}{\sigma_3}\cdot\sigma_1=\frac{\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3}{\sigma_3^2};$$

$$s_{-3}=\frac{\sigma_2}{\sigma_3}s_{-2}-\frac{\sigma_1}{\sigma_3}s_{-1}+\frac{1}{\sigma_3}s_0=\frac{\sigma_2}{\sigma_3}\cdot\frac{\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3}{\sigma_3^2}-\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\cdot\frac{\sigma_2}{\sigma_3}+\frac{1}{\sigma_3}\cdot 3=\frac{\sigma_2^3-3\sigma_1\sigma_2\sigma_3+3\sigma_3^2}{\sigma_3^3};$$

$$s_{-4}=\frac{\sigma_2}{\sigma_3}s_{-3}-\frac{\sigma_1}{\sigma_3}s_{-2}+\frac{1}{\sigma_3}s_{-1}=\frac{\sigma_2}{\sigma_3}\cdot\frac{\sigma_2^3-3\sigma_1\sigma_2\sigma_3+3\sigma_3^2}{\sigma_3^3}-\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\cdot\frac{\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3}{\sigma_3^2}+\frac{1}{\sigma_3}\cdot\frac{\sigma_2}{\sigma_3}=$$

$$=\frac{\sigma_2^4-4\sigma_1\sigma_2^2\sigma_3+4\sigma_2\sigma_3^2+2\sigma_1^2\sigma_3^2}{\sigma_3^4}$$

и т. д. Наоборот, имея вычисленные таким образом значения обратных степенных сумм, можно легко находить орбиты $O(x^ky^k)$, пользуясь формулой (*):

$$O(x^2y^2)=\sigma_3^2s_{-2}=\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3;$$
$$O(x^3y^3)=\sigma_3^3\cdot s_{-3}=\sigma_2^3-3\sigma_1\sigma_2\sigma_3+3\sigma_3^2;$$
$$O(x^4y^4)=\sigma_3^4\cdot s_{-4}=\sigma_2^4-4\sigma_1\sigma_2^2\sigma_3+4\sigma_2\sigma_3^2+2\sigma_1^2\sigma_3^2$$

и т. д.

§ 4. ПРИМЕНЕНИЯ К ЭЛЕМЕНТАРНОЙ АЛГЕБРЕ. II

21. Решение систем уравнений с тремя неизвестными. Результаты предыдущего параграфа позволяют решать некоторые системы алгебраических уравнений с тремя неизвестными. Если левые части уравнений симметрично зависят от неизвестных x, y, z, то удобно принять σ_1, σ_2, σ_3 за новые неизвестные (в силу основной теоремы левые части можно выразить через σ_1, σ_2, σ_3). Выгода такой замены неизвестных заключается в том, что степени уравнений после замены уменьшаются (поскольку $\sigma_2=xy+xz+yz$ — многочлен второй степени, а $\sigma_3=xyz$ — многочлен третьей степени). Иными словами, как правило, решение системы относительно новых неизвестных σ_1, σ_2, σ_3 проще, чем решение первоначальной системы.

После того как найдены значения величин σ_1, σ_2, σ_3, нужно найти значения первоначальных неизвестных x, y, z. Это может быть сделано с помощью следующей теоремы.

Теорема. Пусть σ_1, σ_2, σ_3 — три произвольных числа. Кубическое уравнение

$$u_3-\sigma_1u^2+\sigma_2u-\sigma_3=0 \qquad (*)$$

и система уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=\sigma_1, \\ xy+yz+xz=\sigma_2, \\ xyz=\sigma_3 \end{cases} \qquad (**)$$

связаны друг с другом следующим образом: если u_1, u_2, u_3 — корни кубического уравнения, (*) *), то система уравнений (**) имеет шесть решений

$$\begin{cases} x_1 = u_1, \\ y_1 = u_2, \\ z_1 = u_3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = u_1, \\ y_2 = u_3, \\ z_2 = u_2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = u_2, \\ y_3 = u_1, \\ z_3 = u_3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = u_2, \\ y_4 = u_3, \\ z_4 = u_1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_5 = u_3, \\ y_5 = u_1, \\ z_5 = u_2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_6 = u_3, \\ y_6 = u_2, \\ z_6 = u_1; \end{cases}$$

(получающихся друг из друга перестановками) и других решений не имеет; обратно, если $x = a$, $y = b$, $z = c$ — решение системы (**), то числа, a, b, c являются корнями кубического уравнения (*).

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующее вспомогательное предложение.

Л е м м а. Если u_1, u_2, u_3 — корни кубического уравнения $u^3 + pu^2 + qu + r = 0$, то имеют место соотношения:

$$u_1 + u_2 + u_3 = -p,$$
$$u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3 = q, \qquad u_1u_2u_3 = -r.$$

Эти соотношения называются ф о р м у л а м и В и е т а для кубического уравнения. В дальнейшем (стр. 113) мы укажем формулы Виета для уравнения любой степени, но здесь нам будет нужен лишь случай кубического уравнения. Покажем, откуда эти формулы вытекают. Итак, пусть u_1, u_2, u_3 — корни кубического уравнения $u^3 + pu^2 + qu + r = 0$; числа u_1, u_2, u_3 могут быть действительными или комплексными. Тогда многочлен $u^3 + pu^2 + qu + r$ следующим образом разлагается на множители:

$$u^3 + pu^2 + qu + r = (u - u_1)(u - u_2)(u - u_3) \text{**)}. \qquad (***)$$

*) Всякое кубическое уравнение имеет т р и корня, среди которых, однако, могут быть два или три совпадающих. По поводу доказательства, а также точного определения числа «совпадающих» корней см. дополнение (стр. 144).

**) Это равенство (вполне аналогичное разложению на множители квадратного трёхчлена, если известны его корни) в школе не доказывается. Общее доказательство такого разложения (для уравнения n-й степени) приведено на стр. 142.

Для кубического уравнения, у которого все три корня u_1, u_2, u_3 р а з л и ч н ы, доказательство можно провести значительно проще. В самом деле, по теореме Безу (стр. 136) многочлен $u^3 + pu^2 + qu + r$ делится без остатка на $u - u_1$ (так как число u_1

Раскрывая скобки в правой части, находим:

$$u^3+pu^2+qu+r=u^3-(u_1+u_2+u_3)u^2+(u_1u_2+u_1u_3+u_2u_3)u-u_1u_2u_3.$$

Написанное равенство означает, что слева и справа стоит один и тот же многочлен, т. е. что соответствующие коэффициенты в левой и правой частях совпадают. Иными словами,

$$\begin{aligned}-(u_1+u_2+u_3)&=p,\\ u_1u_2+u_1u_3+u_2u_3&=q,\\ -u_1u_2u_3&=r,\end{aligned}$$

что и доказывает лемму.

Доказательство теоремы. Если u_1, u_2, u_3 — корни кубического уравнения (*), то, согласно лемме, имеют место соотношения

$$\begin{aligned}u_1+u_2+u_3&=\sigma_1,\\ u_1u_2+u_1u_3+u_2u_3&=\sigma_2,\\ u_1u_2u_3&=\sigma_3.\end{aligned}$$

Но это и означает, что числа $x=u_1$, $y=u_2$, $z=u_3$ составляют решение системы (**). Ещё пять решений получаются из этого перестановками значений неизвестных. То, что других решений система (**) не имеет, вытекает из последнего утверждения теоремы, которое мы сейчас докажем.

Итак, пусть $x=a$, $y=b$, $z=c$ — решение системы (**), т. е.

$$\begin{aligned}a+b+c&=\sigma_1,\\ ab+ac+bc&=\sigma_2,\\ abc&=\sigma_3.\end{aligned}$$

является его корнем); иными словами,

$$u^3+pu^2+qu+r=(u-u_1)(u^2+ku+l) \qquad (****)$$

(то, что у квадратного трёхчлена, стоящего в правой части, коэффициент при u^2 должен быть равен единице, становится ясным, если в правой части раскрыть скобки и сравнить в обеих частях равенства старшие члены).

Подставим теперь в равенство (****) значение $u=u_2$. В левой части мы получим нуль (поскольку u_2 есть корень). В правой получится $(u_2-u_1)(u_2^2+ku_2+l)$. Так как $u_2-u_1\neq 0$ (поскольку корни u_1, u_2, u_3 различны!), то обращается в нуль вторая скобка: $u_2^2+ku_2+l=0$, т. е. u_2 является корнем квадратного трёхчлена u^2+ku+l. Аналогично устанавливается, что и u_3 является корнем этого трёхчлена. Так как нам теперь известны корни u_2, u_3 квадратного трёхчлена u^2+ku+l, то

$$u^2+ku+l=(u-u_2)(u-u_3).$$

Подставляя это выражение трёхчлена в формулу (****), мы и получаем указанное в тексте разложение (***).

Тогда мы имеем:

$$z^3 - \sigma_1 z^2 + \sigma_2 z - \sigma_3 = z^3 - (a+b+c)z^2 + (ab+ac+bc)z - abc =$$
$$= (z-a)(z-b)(z-c).$$

Но это означает, что числа a, b, c являются корнями кубического уравнения (*). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Доказанная теорема показывает также, что если уже найдены значения величин σ_1, σ_2, σ_3, то для нахождения значений первоначальных неизвестных x, y, z (т. е. для решения системы (**)) достаточно составить кубическое уравнение (*) и найти его корни. В учебниках высшей алгебры можно найти формулы для решения кубических уравнений. Однако формулы эти сложны и на практике редко применяются. Чаще всего пытаются найти (хотя бы подбором, ср. стр. 137) один корень кубического уравнения, после чего пользуются теоремой Безу (стр. 136). Подчеркнём ещё раз, что, решив кубическое уравнение (*), мы находим сразу ш е с т ь решений для первоначальных неизвестных x, y, z: так как в систему (**) неизвестные x, y, z входят симметрично, то можно переставлять их и в решении.

Рассмотрим пример.

1°. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = a, \\ x^2 + y^2 + z^2 = b^2, \\ x^3 + y^3 + z^3 = a^3. \end{cases}$$

Введём новые неизвестные σ_1, σ_2, σ_3, положив

$$x + y + z = \sigma_1,$$
$$xy + xz + yz = \sigma_2,$$
$$xyz = \sigma_3$$

В силу формул, приведённых в табл. 2 на стр. 47, мы имеем для новых неизвестных систему уравнений:

$$\begin{cases} \sigma_1 = a, \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = b^2, \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = a^3. \end{cases}$$

Из этой системы находим:

$$\begin{cases} \sigma_1 = a, \\ \sigma_2 = \dfrac{1}{2}(a^2 - b^2), \\ \sigma_3 = \dfrac{1}{2}a(a^2 - b^2). \end{cases}$$

В развёрнутом виде эта система записывается так:

$$\begin{cases} x + y + z = a, \\ xy + xz + yz = \dfrac{1}{2}(a^2 - b^2), \\ xyz = \dfrac{1}{2}a(a^2 - b^2). \end{cases}$$

Для решения этой системы составляем (согласно теореме на стр. 55) кубическое уравнение

$$u^3 - au^2 + \frac{1}{2}(a^2 - b^2)u - \frac{1}{2}a(a^2 - b^2) = 0.$$

Левая часть уравнения разлагается на множители:

$$u^3 - au^2 + \frac{1}{2}(a^2 - b^2)u - \frac{1}{2}a(a^2 - b^2) = (u - a)\left(u^2 + \frac{1}{2}(a^2 - b^2)\right).$$

Следовательно, корнями этого уравнения являются числа

$$u_1 = a, \quad u_2 = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}}, \quad u_3 = -\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}}.$$

Поэтому наша исходная система имеет шесть решений, получающихся перестановками из решения

$$x = a, \quad y = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}}, \quad z = -\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}}.$$

Заметим ещё, что в некоторых случаях несложная предварительная замена переменных позволяет свести несимметричную систему к симметричной. Рассмотрим пример.

2°. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = a, \\ x^2 + 4y^2 + 9z^2 = b^2, \\ x^3 + 8y^3 - 27z^3 = a^3. \end{cases}$$

Положим $x=u$, $2y=v$, $-3z=w$. Тогда система уравнений принимает симметричный вид

$$\begin{cases} u+v+w=a \\ u^2+v^2+w^2=b^2, \\ u^3+v^3+w^3=a^3. \end{cases}$$

Такую систему мы уже решали (см. предыдущий пример). Там было найдено, что одним из решений является

$$u=a, \quad v=\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}}, \quad w=-\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}},$$

а остальные пять решений получаются перестановками значений неизвестных u, v, w. Поэтому для первоначальных неизвестных мы получаем следующие шесть решений:

1) $x=a,\quad y=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}},\quad z=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}};$

2) $x=a,\quad y=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}},\quad z=-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}};$

3) $x=\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}},\quad y=\frac{a}{2},\quad z=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}};$

4) $x=\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}},\quad y=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}},\quad z=-\frac{a}{3};$

5) $x=-\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}},\quad y=\frac{a}{2},\quad z=-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}};$

6) $x=-\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}},\quad y=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}},\quad z=-\frac{a}{3}.$

Иногда бывает целесообразным несколько усложнить одно из уравнений системы (например, возвести в квадрат), чтобы привести это уравнение к симметричному виду. Следующий пример иллюстрирует сказанное.

3°. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=6, \\ xy+xz+yz=11, \\ (x-y)(x-z)(y-z)=-2. \end{cases}$$

Перейдём и здесь к переменным σ_1, σ_2, σ_3. Первые два уравнения системы примут вид $\sigma_1=6$, $\sigma_2=11$.

Если бы левая часть третьего уравнения была симметрическим многочленом, то, выразив его через σ_1, σ_2, σ_3 и подставив известные нам значения σ_1, σ_2, мы получили бы уравнение с одним неизвестным σ_3. Это позволило бы найти σ_3, а потом x, y, z. Однако левая часть третьего уравнения не является симметрическим многочленом. Чтобы привести уравнение к симметричному виду, возведём обе части уравнения в квадрат. Мы получим

$$(x-y)^2(x-z)^2(y-z)^2=4.$$

Теперь уже левая часть стала симметрической:

$$\begin{aligned}&(x-y)^2(x-z)^2(y-z)^2=(x^2+y^2-2xy)(x^2+z^2-2xz)(y^2+z^2-2yz)=\\&=O(x^4y^2)+2x^2y^2z^2-2\cdot O(x^4yz)-\\&\qquad-2\cdot O(x^3y^2z)-2\cdot O(x^3y^3)+4\cdot O(x^3y^2z)-8x^2y^2z^2=\\&=O(x^4y^2)-6x^2y^2z^2-2xyz\cdot O(x^3)-2\cdot O(x^3y^3)+\\&\qquad+2xyz\cdot O(x^2y)=(\sigma_1^2\sigma_2^2-2\sigma_2^3-2\sigma_1^3\sigma_3+4\sigma_1\sigma_2\sigma_3-3\sigma_3^2)-6\sigma_3^2-\\&\qquad-2\sigma_3(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3)-2(\sigma_2^3+3\sigma_3^2-3\sigma_1\sigma_2\sigma_3)+2\sigma_3(\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3)=\\&\qquad=\sigma_1^2\sigma_2^2-4\sigma_2^3-4\sigma_1^3\sigma_3+18\sigma_1\sigma_2\sigma_3-27\sigma_3^2.\end{aligned}$$

Таким образом, третье уравнение принимает вид

$$-4\sigma_1^3\sigma_3+\sigma_1^2\sigma_2^2+18\sigma_1\sigma_2\sigma_3-4\sigma_2^3-27\sigma_3^2=4.$$

Подставляя значения $\sigma_1=6$, $\sigma_2=11$, получаем квадратное уравнение для σ_3:

$$\sigma_3^2-12\sigma_3+36=0.$$

Из этого уравнения находим $\sigma_3=6$.

Итак, $\sigma_1=6$, $\sigma_2=11$, $\sigma_3=6$. Чтобы найти x, y, z, составим кубическое уравнение

$$u^3-6u^2+11u-6=0.$$

Его корнями являются $u_1=1$, $u_2=2$, $u_3=3$.

Найденным значениям u_1, u_2, u_3 соответствуют шесть систем значений x, y, z. Они получаются перестановками из значений $x=1$, $y=2$, $z=3$. Однако не все эти системы значений удовлетворяют исходной системе уравнений. При возведении третьего уравнения в квадрат могли появиться посторонние решения. Проверка показывает, что решениями исходной системы являются

$$\begin{cases}x_1=1,\\y_1=2,\\z_1=3;\end{cases}\qquad\begin{cases}x_2=2,\\y_2=3,\\z_2=1;\end{cases}\qquad\begin{cases}x_3=3,\\y_3=1,\\z_3=2.\end{cases}$$

УПРАЖНЕНИЯ

Решить следующие системы уравнений:

1) $\begin{cases} x+y+z=2, \\ x^2+y^2+z^2=6, \\ x^3+y^3+z^3=8; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y+z=a, \\ x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x^3+y^3+z^3=a^3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y+z=9, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1, \\ xy+xz+yz=27; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+y+z=a, \\ xy+xz+yz=a^2, \\ xyz=a^3; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x+y+z=2, \\ (x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y)=1, \\ x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)=-6; \end{cases}$

6) $\begin{cases} xy+xz+yz=11, \\ xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)=48, \\ xy(x^2+y^2)+yz(y^2+z^2)+zx(z^2+x^2)=118; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^3+y^3+z^3=\dfrac{73}{8}, \\ xy+xz+yz=x+y+z, \\ xyz=1; \end{cases}$

8) $\begin{cases} x+y+z=\dfrac{13}{3}, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{13}{3}, \\ xyz=1; \end{cases}$

9) $\begin{cases} x+y+z=0, \\ x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3, \\ xyz=2; \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^5+y^5+z^5-u^5=210, \\ x^3+y^3+z^3-u^3=18, \\ x^2+y^2+z^2-u^2=6, \\ x+y+z-u=0; \end{cases}$

11) $\begin{cases} 3xyz-x^3-y^3-z^3=b^3, \\ x+y+z=2b, \\ x^2+y^2-z^2=b^2. \end{cases}$

12) Составить кубическое уравнение, корнями которого являются квадраты корней уравнения $u^3-2u^2+u-12=0$.

13) Составить кубическое уравнение, корнями которого являются кубы корней уравнения $u^3-2u^2+u-12=0$.

14) Доказать, что если $a^3+pa+q=b^3+pb+q=c^3+pc+q=0$, причём числа a, b и c попарно различны, то

$$a+b+c=0.$$

22. Разложение на множители. Переход к элементарным симметрическим многочленам σ_1, σ_2, σ_3 удобен не только для решения систем алгебраических уравнений, но и в других алгебраических задачах. В этом пункте мы рассмотрим задачи о разложении на множители.

Пусть $f(x, y, z)$ — симметрический многочлен от трёх переменных. Чтобы разложить этот многочлен на множители, можно выразить его через σ_1, σ_2, σ_3 и попытаться разложить на множители получившийся многочлен от σ_1, σ_2, σ_3.

Если это удастся, то, подставляя значения $\sigma_1 = x + y + z$, $\sigma_2 = xy + xz + yz$, $\sigma_3 = xyz$, мы получим разложение на множители исходного многочлена $f(x, y, z)$.

Рассмотрим примеры.

1°. Разложить на множители многочлен

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

Согласно табл. 2 на стр. 47 имеем

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= s_3 - 3\sigma_3 = \\ &= (\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3) - 3\sigma_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = \sigma_1(\sigma_1^2 - 3\sigma_2) = \\ &= (x + y + z)((x + y + z)^2 - 3(xy + xz + yz)) = \\ &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz). \end{aligned}$$

2°. Разложить на множители многочлен

$$2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 - x^4 - y^4 - z^4.$$

В силу формул, приведённых в табл. 2 и 3 на стр. 47 и 51, наш многочлен можно записать в виде

$$\begin{aligned} 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 - x^4 - y^4 - z^4 &= 2 \cdot O(x^2y^2) - s_4 = \\ &= 2(\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3) - (\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3) = \\ &= -\sigma_1^4 + 4\sigma_1^2\sigma_2 - 8\sigma_1\sigma_3 = \sigma_1(4\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1^3 - 8\sigma_3). \end{aligned}$$

Таким образом, наш многочлен делится на $\sigma_1 = x + y + z$. Но так как исходный многочлен содержит только чётные степени переменных, x, y, z, то он не меняется при замене x на $-x$ (или y на $-y$, или же z на $-z$). Поэтому он должен делиться не только на $x + y + z$, но также и на $-x + y + z$, на $x - y + z$ и на $x + y - z$. Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 - x^4 - y^4 - z^4 &= \\ &= (x + y + z)(-x + y + z)(x - y + z)(x + y - z) \cdot P, \qquad (*) \end{aligned}$$

где P — некоторый многочлен. Сравнивая степени многочленов слева и справа, мы видим, что P — многочлен нулевой степени, т. е. P является некоторым числом. Чтобы найти это число, мы воспользуемся методом частных значений. Ведь соотношение (*) представляет собой тождество, т. е. оно справедливо при любых значениях величин x, y, z. Положим в этом тождестве $x = y = z = 1$; мы получим $3 = 3P$, т. е. $P = 1$. Таким образом, соотношение (*) принимает следующий окончательный вид:

$$2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 - x^4 - y^4 - z^4 =$$
$$= (x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y=z).$$

Иногда, прежде чем выразить симметрический многочлен от x, y, z через элементарные симметрические многочлены $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, приходится производить раскрытие скобок, приведение подобных членов и другие тождественные преобразования. В таких случаях нередко бывает очень полезным до раскрытия скобок упростить заданное выражение частичным введением симметрических многочленов $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Иными словами, бывает удобно ввести $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ в некоторых частях заданного выражения, сохраняя ещё в других частях выражения первоначальные переменные x, y, z. Рассмотрим пример.

3°. Разложить на множители многочлен

$$a(b+c-a)^2 + b(c+a-b)^2 + c(a+b-c)^2 + (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$$

Заданный многочлен преобразовывается следующим образом:

$$a(\sigma_1 - 2a)^2 + b(\sigma_1 - 2b)^2 + c(\sigma_1 - 2c)^2 + (\sigma_1 - 2a)(\sigma_1 - 2b)(\sigma_1 - 2c) =$$
$$= (a+b+c)\sigma_1^2 - 4\sigma_1(a^2+b^2+c^2) + 4(a^3+b^3+c^3 + \sigma_1^3 - 2\sigma_1^2(a+b+c) +$$
$$+ 4\sigma_1(ab+ac+bc) - 8abc = \sigma_1^3 - 4\sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) + 4(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3) +$$
$$+ \sigma_1^3 - 2\sigma_1^3 + 4\sigma_1\sigma_2 - 8\sigma_3 = 4\sigma_3 = 4abc.$$

Указанные приёмы пригодны лишь в том случае, если симметрический многочлен удаётся разложить на симметрические множители. Более общий вопрос о разложении симметрических многочленов на любые (в том числе и несимметрические) множители будет рассмотрен в п. 34.

УПРАЖНЕНИЯ

Разложить на множители следующие многочлены:

1) $(x+y)(x+z)(y+z) + xyz$;
2) $2(a^3+b^3+c^3) + a^2b + a^2c + ab^2 + ac^2 + b^2c + bc^2 - 3abc$;
3) $a^3(b+c) + b^3(c+a) + c^3(a+b) + abc(a+b+c)$;
4) $c^2(b+c)^2 + b^2(c+a)^2 + c^2(a+b)^2 + 2abc(a+b+c) + (a^2+b^2+c^2)(ab+ac+bc)$;
5) $(a+b+c)^3 - (b+c-a)^3 - (c+a-b)^3 - (a+b-c)^3$;
6) $(x+y+z)^4 - (y+z)^4 - (z+x)^4 - (x+y)^4 + x^4 + y^4 + z^4$;
7) $(a+b+c)^5 - (-a+b+c)^5 - (a-b+c)^5 - (a+b-c)^5$;
8) $(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)^2 - (a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2)$.

Упростить следующие выражения:

9) $\dfrac{a^3+b^3+c^3-3abc}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}$; **10)** $\dfrac{bc-a^2+ca-b^2+ab-c^2}{a(bc-a^2)+b(ca-b^2)+c(ab-c^2)}$.

11) Доказать, что при любом натуральном n многочлен

$$(x+y+z)^{2n}-(y+z)^{2n}-(x+z)^{2n}-(x+y)^{2n}+x^{2n}+y^{2n}+z^{2n}$$

делится на $(x+y+z)^4-(y+z)^4-(z+x)^4-(x+y)^4+x^4+y^4+z^4$.

12) Доказать, что многочлен

$$a^4(b^2+c^2-a^2)^3+b^4(c^2+a^2-b^2)^3+c^4(a^2+b^2-c^2)^3$$

делится на $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2$.

13) Доказать, что если a, b, c — целые числа и $a+b+c$ делится на 6, то число $a^3+b^3+c^3$ тоже делится на 6.

23. Доказательство тождеств. В целом ряде задач на доказательство тождеств также с успехом могут быть применены элементарные симметрические многочлены. Рассмотрим примеры.

1°. Доказать тождество

$$(x+y+z)(xy+xz+yz)-xyz=(x+y)(x+z)(y+z).$$

Левая часть тождества есть не что иное, как $\sigma_1\sigma_2-\sigma_3$. В правой части раскроем скобки. Мы получаем (см. табл. 3 на стр. 51):

$$(x+y)(x+z)(y+z)=x^2y+x^2z+y^2x+xz^2+y^2z+yz^2+2xyz=$$
$$=O(x^2y)+2\sigma_3=(\sigma_1\sigma_2-3\sigma_2)+2\sigma_3=\sigma_1\sigma_2-\sigma_3.$$

2°. Доказать, что если $x+y+z=0$, то

$$x^4+y^4+z^4=2(xy+xz+yz)^2.$$

Согласно табл. 2, приведённой на стр. 47, мы имеем:

$$x^4+y^4+z^4=s_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3.$$

По условию $\sigma_1=x+y+z=0$, и потому

$$x^4+y^4+z^4=2\sigma_2^2=2(xy+xz+yz)^2.$$

3°. Доказать, что если

$$x+y+z=x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3=1,$$

то $xyz=0$.

Условие задачи записывается в виде

$$\begin{cases} \sigma_1 = 1, \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 1, \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = 1. \end{cases}$$

Из этой системы равенств находим, что $\sigma_2 = 0$ и $\sigma_3 = 0$. Равенство $\sigma_3 = 0$ и означает, что $xyz = 0$.

4°. Доказать, что если числа, x, y, z, u, v, w удовлетворяют соотношениям

$$x + y + z = u + v + w,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2 + v^2 + w^2,$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = u^3 + v^3 + w^3,$$

то при любом натуральном n

$$x^n + y^n + z^n = u^n + v^n + w^n.$$

Обозначим элементарные симметрические многочлены от x, y, z через $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, а от u, v, w — через τ_1, τ_2, τ_3. Тогда заданная система соотношений примет вид

$$\sigma_1 = \tau_1,$$
$$\sigma_1^2 - 2\sigma_2 = \tau_1^2 - 2\tau_2,$$
$$\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = \tau_1^3 - 3\tau_1\tau_2 + 3\tau_3$$

(см. табл. 2 на стр. 47). Отсюда вытекает, что

$$\sigma_1 = \tau_1, \quad \sigma_2 = \tau_2, \quad \sigma_3 = \tau_3.$$

Но тогда для любого многочлена $\varphi(t_1, t_2, t_3)$ имеем:

$$\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \varphi(\tau_1, \tau_2, \tau_3).$$

В силу теоремы на стр. 45, отсюда вытекает, что если $f(x, y, z)$ — любой симметрический многочлен, то $f(x, y, z) = f(u, v, w)$. В частности, при любом n

$$x^n + y^n + z^n = u^n + v^n + w^n.$$

В примере 2° нам понадобилось вычислить значение степенной суммы $s_4 = x^4 + y^4 + z^4$ при условии, что $\sigma_1 = x + y + z = 0$. Ниже, в приводимых упражнениях, имеется ряд других примеров, в которых нужно знать выражение степенных сумм через σ_2, σ_3 при условии, что $\sigma_1 = 0$. Эти выражения (получающиеся из формул, приведённых в табл. 2 на стр. 47, если в них положить $\sigma_1 = 0$) приведены в следующей таблице:

Таблица 5

Выражения степенных сумм $s_k = x^k + y^k + z^k$ через σ_2, σ_3 при выполнении условия $\sigma_1 = 0$

s_1	0	s_5	$-5\sigma_2\sigma_3$	s_9	$3\sigma_3^3 - 9\sigma_2^3\sigma_3$
s_2	$-2\sigma_2$	s_6	$3\sigma_3^2 - 2\sigma_2^3$	s_{10}	$-2\sigma_2^5 + 15\sigma_2^2\sigma_3^2$
s_3	$3\sigma_3$	s_7	$7\sigma_2^2\sigma_3$	...	....
s_4	$2\sigma_2^2$	s_8	$2\sigma_2^4 - 8\sigma_2\sigma_3^2$		

Из этих формул с помощью соотношений (4), (5) (стр. 49) легко получить выражения орбит $O(x^k y^l)$ через σ_2, σ_3 при условии, что $\sigma_1 = 0$. Например,

$$O(x^5y^2) = O(x^5) \cdot O(x^2) - O(x^7) = s_5 s_2 - s_7 =$$
$$= (-5\sigma_2\sigma_3) \cdot (-2\sigma_2) - 7\sigma_2^2\sigma_3 = 3\sigma_2^2\sigma_3 \quad (\text{при } \sigma_1 = 0).$$

Приведём примеры применения этих формул.

5°. Доказать, что если $x + y + z = 0$ и $xy + xz + yz = 0$, то справедливо равенство

$$3(x^3y^3 + x^3z^3 + y^3z^3) = (x^3 + y^3 + z^3)^2.$$

Из табл. 3, приведённой на стр. 51, легко находим (при условии $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 0$):

$$x^3y^3 + x^3z^3 + y^3z^3 = O(x^3y^3) = 3\sigma_3^2;$$

кроме того, согласно табл. 5,

$$x^3 + y^3 + z^3 = s_3 = 3\sigma_3 \quad (\text{при } \sigma_1 = 0).$$

Из этих соотношений непосредственно вытекает доказываемое равенство.

6°. Доказать, тождество

$$\frac{a + b)^7 - a^7 - b^7}{(a + b)^3 - a^3 - b^3} = \frac{7}{6}((a + b)^4 + a^4 + b^4).$$

Для доказательства обозначим число $-a - b$ через с:

$$c = -a - b.$$

Тогда $a + b + c = 0$ и можно применить формулы, приведённые в табл. 5. Левая часть доказываемого тождества преобразуется следующим образом:

$$\frac{(a + b)^7 - a^7 - b^7}{(a + b)^3 - a^3 - b^3} = \frac{(-c)^7 - a^7 - b^7}{(-c)^3 - a^3 - b^3} = \frac{a^7 + b^7 + c^7}{a^3 + b^3 + c^3} = \frac{s_7}{s_3} = \frac{7\sigma_2^2\sigma_3}{3\sigma_3} = \frac{7}{3}\sigma_2^2,$$

а правая — следующим образом:

$$\frac{7}{6}((a+b)^4+a^4+b^4)=\frac{7}{6}((-c)^4+a^4+b^4)=$$
$$=\frac{7}{6}(a^4+b^4+c^4)=\frac{7}{6}s_4=\frac{7}{6}\cdot 2\sigma_2^2=\frac{7}{3}\sigma_2^2.$$

Таким образом, доказываемое равенство справедливо.

Указанные способы доказательства тождеств нередко применяются в сочетании со следующим приёмом: если обе части доказываемого тождества выражаются через разности $a-b$, $b-c$, $c-a$, то удобно сделать замену $x=a-b$, $y=b-c$, $z=c-a$, тогда

$$x+y+z=(a-b)+(b-c)+(c-a)=0,$$

и потому можно применять формулы, приведённые в табл. 5. Тот же приём можно применять при разложении на множители многочленов, выражающихся через разности $a-b$, $b-c$, $c-a$.

Рассмотрим два примера.

7°. Доказать тождество

$$(a-b)^6+(b-c)^6+(c-a)^6-9(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2=$$
$$=2(a-b)^3(a-c)^3+2(b-c)^3(b-a)^3+2(c-a)^3(c-b)^3.$$

Замена $x=a-b$, $y=b-c$, $z=c-a$ превращает доказываемое тождество в следующее:

$$x^6+y^6+z^6-9x^2y^2z^2=-2x^3z^3-2x^3y^3-2y^3z^3,$$

или, иначе,

$$s_6-9\sigma_3^2=-2\cdot O(x^3y^3). \qquad (*)$$

Так как $\sigma_1=x+y+z=0$, то применимы формулы, приведённые в табл. 5; в частности,

$$s_6=3\sigma_3^2-2\sigma_2^3, \qquad O(x^3y^3)=\sigma_2^3+3\sigma_3^2.$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что тождество (*) справедливо.

8°. Разложить на множители многочлен

$$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3.$$

Полагая $x=a-b$, $y=b-c$, $z=c-a$, находим:

$$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=x^3+y^3+z^3=s_3=$$
$$=3\sigma_3=3xyz=3(a-b)(b-c)(c-a)$$

(мы воспользовались формулой $s_3=3\sigma_3$, приведённой в табл. 5 на стр. 67).

УПРАЖНЕНИЯ

Доказать следующие тождества:

1) $(a+b+c)^3-(-a+b+c)^3-(a-b+c)^3-(a+b-c)^3=24abc$;

2) $a(-a+b+c)^2+b(a-b+c)^2+c(a+b-c)^2+(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)=4abc$;

3) $(a+b+c)^4-(b+c)^4-(c+a)^4-(a+b)^4+a^4+b^4+c^4=12abc(a+b+c)$;

4) $(a+b+c)^4+(-a+b+c)^4+(a-b+c)^4+(a+b-c)^4=$
$$=4(a^4+b^4+c^4)+24(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2);$$

5) $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc=(b+c)(c+a)(a+b)$;

6) $(b+c)^3+(c+a)^3+(a+b)^3-3(a+b)(a+c)(b+c)=2(a^3+b^3+c^3-3abc)$;

7) $(ab+ac+bc)^2+(a^2-bc)^2+(b^2-ac)^2+(c^2-ab)^2=(a^2+b^2+c^2)^2$;

8) $(-a+b+c)^3+(a-b+c)^3+(a+b-c)^3-3(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)=$
$$=4(a^3+b^3+c^3-3abc);$$

9) $(a+b)^2(b+c)^2(a+c)^2+2a^2b^2c^2-a^4(b+c)^2-b^4(a+c)^2-c^4(a+b)^2=2(ab+ac+bc)^3$;

10) $(x^2-1)(y^2-1)(z^2-1)+(x+yz)(y+zx)(z+xy)=(xyz+1)(x^2+y^2+z^2+2xyz-1)$;

11) $xyz(z+y+z)^3-(yz+zx+xy)^3=(x^2-yz)(y^2-zx)(z^2-xy)$;

12) $(x+y+z)^5-(-x+y+z)^5-(x-y+z)^5-(x+y-z)^5=80xyz(x^2+y^2+z^2)$;

13) $(x-y)^4+(y-z)^4+(z-x)^4=2(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)^2$;

14) $((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2)^2=4((x-y)^2(y-z)^2+(y-z)^2(z-x)^2+(z-x)^2(x-y)^2)$.

Доказать, что при $a+b+c=0$ справедливы следующие тождества:

15) $a^3+b^3+c^3=3abc$;

16) $a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)=0$;

17) $a^2(b+c)^2+b^2(c+a)^2+c^2(a+b)^2+(a^2+b^2+c^2)(ab+ac+bc)=0$;

18) $a^4+b^4+c^4=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$;

19) $2(a^4+b^4+c^4)=(a^2+b^2+c^2)^2$;

20) $2(a^5+b^5+c^5)=5abc(a^2+b^2+c^2)$;

21) $\dfrac{a^5+b^5+c^5}{5}=\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}\cdot\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}$;

22) $\dfrac{a^7+b^7+c^7}{7}=\dfrac{a^5+b^5+c^5}{5}\cdot\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}$;

23) $\dfrac{a^7+b^7+c^7}{7}=\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}\cdot\dfrac{a^4+b^4+c^4}{2}$;

24) $\dfrac{a^7+b^7+c^7}{7}\cdot\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}=\left(\dfrac{a^5+b^5+c^5}{5}\right)^2$;

25) $\left(\dfrac{a^7+b^7+c^7}{7}\right)^2=\left(\dfrac{a^5+b^5+c^5}{5}\right)^2\cdot\dfrac{a^4+b^4+c^4}{2}$.

26) Доказать тождества 5)—7), указанные на стр. 43, с помощью приёма, использованного при решении примера 6° (стр. 67).

Доказать следующие тождества:

27) $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3-3(b-c)(c-a)(a-b)=0$;

28) $25((b-c)^7+(c-a)^7+(a-b)^7)((b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3)=$
$$=21((b-c)^5+(c-a)^5+(a-b)^5)^2;$$

29) $(y-z)^4+(z-x)^4+(x-y)^4=2((y-z)^2(z-x)^2+(z-x)^2(x-y)^2+(x-y)^2(y-z)^2)$.

30) Разложить на множители многочлен
$$(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5.$$

31) Доказать, что при $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ справедливо тождество

$$a(s-b)(s-c)+b(s-a)(s-c)+c(s-a)(s-b)+2(s-a)(s-b)(s-c)=abc.$$

32) Доказать, что при $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ справедливо тождество

$$(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3+3abc=s^3.$$

33) Доказать, что если $xy+xz+yz=0$, то

$$(x+y)^2(x+z)^2(y+z)^2+2x^2y^2z^2=x^4(y+z)^2+y^4(x+z)^2+z^4(x+y)^2.$$

34) Показать, что если $xy+xz+yz=1$, то

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}=\frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}.$$

35) Доказать, что если $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ и $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=0$, то

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

36) Вычислить сумму $a^4+b^4+c^4$, если известно, что

$$a+b+c=0 \quad \text{и} \quad a^2+b^2+c^2=1.$$

37) Доказать, что если $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c}$, то для любого нечётного n справедливо тождество

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^n=\frac{1}{a^n+b^n+c^n}=\frac{1}{(a+b+c)^n}.$$

38) Доказать, что при $n=6k\pm1$ многочлен $(x+y)^n-x^n-y^n$ делится на x^2+xy+y^2, а при $n=6k+1$ он делится на $(x^2+xy+y^2)^2$.

39) Доказать, что если

$$u=x+y+z+a(y+z-2x), \qquad v=x+y+z+a(x+z-2y),$$
$$w=x+y+z+a(x+y-2z),$$

то справедливо соотношение

$$u^3+v^3+w^3-3uvw=27a^2(x^3+y^3+z^3-3xyz).$$

40) Доказать, что если $y^2+yz+z^2=a^2$, $z^2+zx+x^2=b^2$, $x^2+xy+y^2=c^2$, $yz+zx+xy=0$, то имеет место соотношение

$$(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)=0.$$

41) Доказать, что если числа x, y, z действительны, то из равенства

$$(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2=(y+z-2x)^2+(z+x-2y)^2+(x+y-2z)^2$$

следует $x=y=z$.

42) Доказать, что если $a+b+c+d=0$, то справедливо тождество

$$ad(a+d)^2+bc(a-d)^2+ab(a+b)^2+cd(a-b)^2+ac(a+c)^2+bd(a-c)^2+4abcd=0.$$

24. Неравенства. Ясно, что для любых действительных чисел x, y, z справедливо неравенство

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geqslant 0,$$

причём равенство достигается лишь в случае, когда $x=y=z$. Левая часть написанного неравенства является симметрическим многочленом от x, y, z. Раскрывая скобки, мы без труда перепишем это неравенство в виде $2s_2-2\sigma_2 \geqslant 0$ или, используя формулы, приведённые в табл. 2 на стр. 47

$$\sigma_1^2 \geqslant 3\sigma_2. \tag{7}$$

Итак, для любых действительных чисел x, y, z справедливо неравенство (7); равенство достигается лишь при $x=y=z$.

Из соотношения (7) можно получить целый ряд других неравенств. Рассмотрим примеры.

1°. Доказать, что для любых действительных чисел a, b, c справедливо неравенство $\sigma_2^2 \geqslant 3\sigma_1\sigma_3$.

Неравенство (7) имеет вид

$$(x+y+z)^2 \geqslant 3(xy+xz+yz).$$

Полагая здесь $x=ab$, $y=ac$, $z=bc$, получаем:

$$(ab+ac+bc)^2 \geqslant 3(a^2bc+ab^2c+abc^2),$$

или

$$(ab+ac+bc)^2 \geqslant 3abc(a+b+c),$$

а это и есть доказываемое неравенство. (Равенство $\sigma_2^2=3\sigma_1\sigma_3$ достигается лишь в случае, если $a=b=c$ или если среди чисел a, b, c какие-либо два равны нулю.)

2°. Доказать, что для любых положительных чисел x, y, z справедливо неравенство $\sigma_1\sigma_2 \geqslant 9\sigma_3$.

Так как числа x, y, z положительны, то $\sigma_1>0$, $\sigma_2>0$, $\sigma_3>0$. Поэтому неравенства $\sigma_1^2 \geqslant 3\sigma_2$, $\sigma_2^2 \geqslant 3\sigma_1\sigma_3$ можно перемножить. Мы получаем $\sigma_1^2\sigma_2^2 \geqslant 9\sigma_1\sigma_2\sigma_3$. Сокращая на положительную величину $\sigma_1\sigma_2$, мы и получаем требуемое неравенство $\sigma_1\sigma_2 \geqslant 9\sigma_3$. (Равенство $\sigma_1\sigma_2=9\sigma_3$ достигается лишь в случае, если $x=y=z$.)

Требуемое неравенство можно установить и иначе. Воспользуемся для этого результатом задачи 13) на стр. 31. При $n=3$ мы получим

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geqslant 9,$$

или, после приведения к общему знаменателю, $\sigma_1 \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_3} \geqslant 9$, что и требовалось.

3°. Доказать, что для любых положительных чисел x, y, z справедливо неравенство $\sigma_1^3 \geqslant 27\sigma_3$.

Используя неравенство (7) и неравенство примера 2°, находим:

$$\sigma_1^3 = \sigma_1^3 \cdot \sigma_1^2 \geqslant \sigma_1^3 \cdot 3\sigma_2 = 3\sigma_1\sigma_2 \geqslant 3 \cdot 9\sigma_3 = 27\sigma_3.$$

(Равенство $\sigma_1^3 = 27\sigma_3$ достигается лишь в случае, если $x = y = z$.)

4°. Доказать, что для любых положительных чисел, x, y, z справедливо неравенство $\sigma_2^3 \geqslant 27\sigma_3^2$.

Мы имеем:

$$\sigma_2^3 = \sigma_2 \cdot \sigma_2^2 \geqslant \sigma_2 \cdot 3\sigma_1\sigma_3 = 3\sigma_3(\sigma_1\sigma_2) \geqslant 3\sigma_3 \cdot 9\sigma_3 = 27\sigma_3^2.$$

УПРАЖНЕНИЯ

Доказать, что для любых действительных чисел a, b, c, x, y, z справедливы следующие неравенства:

1) $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + xz + yz$;

2) $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant \frac{1}{3}(x + y + z)^2$;

3) $3(ab + ac + bc) \leqslant (a + b + c)^2$;

4) $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geqslant abc(a + b + c)$;

5) $(bc + ca + ab)^2 \geqslant 3abc(a + b + c)$;

6) $a^2 + b^2 + 1 \geqslant ab + a + b$.

Доказать, что для любых положительных чисел a, b, c, x, y, z справедливы следующие неравенства:

7) $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqslant 9$;

8) $a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3abc$;

9) $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geqslant 9abc$;

10) $\frac{a + b + c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$;

11) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ac}} + \frac{1}{\sqrt{ab}}$;

12) $ab(a + b - 2c) + bc(b + c - 2a) + ac(a + c - 2b) \geqslant 0$;

13) $ab(a + b) + ac(a + c) + bc(b + c) \geqslant 6abc$;

14) $(a + b)(b + c)(a + c) \geqslant 8abc$;

15) $xyz \geqslant (x + y - z)(x + z - y)(y + z - x)$;

16) $\sigma_1^3 - 4\sigma_1\sigma_2 + 9\sigma_3 \geqslant 0$, где $\sigma_1 = x + y + z$, $\sigma_2 = xy + xz + yz$, $\sigma_3 = xyz$;

17) $2(a^3 + b^3 + c^3) \geqslant ab(a + b) + bc(b + c) + ac(a + c)$;

18) $\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} \geqslant \frac{3}{2}$;

19) $\frac{2}{b + c} + \frac{2}{c + a} + \frac{2}{a + b} \geqslant \frac{9}{a + b + c}$;

20) $2(a^3 + b^3 + c^3) \geqslant a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b)$;

21) $\dfrac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2} \geqslant \dfrac{x+y+z}{3}$;

22) $3(a^3+b^3+c^3) \geqslant (a+b+c)(ab+ac+bc)$;

23) $(x+y+z)^3 \leqslant 9(x^3+y^3+z^3)$;

24) $8(a^3+b^3+c^3) \geqslant 3(a+b)(a+c)(b+c)$;

25) $a^4+b^4+c^4 \geqslant abc(a+b+c)$.

26) Доказать, что при $x, y, z \geqslant -\dfrac{1}{4}$ и $x+y+z=1$ выполнено неравенство $\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}+\sqrt{4z+1}<5$.

27) Доказать, что если попарно различные числа a, b, c удовлетворяют соотношению

$$\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0,$$

то

$$\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=0.$$

Верно ли обратное?

Доказать, что если a, b, c — длины сторон треугольника, то справедливы следующие неравенства:

28) $2(ab+ac+bc) > a^2+b^2+c^2$;

29) $(a^2+b^2+c^2)(a+b+c) > 2(a^3+b^3+c^3)$.

30) Доказать, что если $a+b+c=0$, то $ab+ac+bc \leqslant 0$.

31) Решить в целых числах уравнение

$$\frac{xy}{z}+\frac{xz}{y}+\frac{yz}{x}=3.$$

32) Доказать, что из всех треугольников периметра σ_1 равносторонний треугольник имеет наибольшую площадь.

33) Найти наибольшее возможное значение выражения $(1+u)(1+v)(1+w)$, если $u+v+w=1$ и $0 \leqslant u, v, w \leqslant \dfrac{7}{16}$.

34) Доказать, что если положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению $a+b+c=1$, то $(1-a)(1-b)(1-c) \geqslant 8abc$.

25. Освобождение от иррациональности в знаменателе. Симметрические многочлены позволяют решать многие трудные задачи на освобождение от иррациональности в знаменателе.

В случае, когда знаменатель имеет вид $a \pm \sqrt[n]{b}$ или $\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$, эту задачу можно решить и без применения симметрических многочленов. Для этого достаточно использовать формулы

$$(x+y)(x-y)=x^2-y^2,$$
$$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\ldots+y^{n-1});$$
$$x^{2k+1}+y^{2k+1}=(x+y)(x^{2k}-x^{2k-1}y+x^{2k-2}y^2-\ldots+y^{2k}).$$

10—1990

Например, если надо освободиться от иррациональности в знаменателе выражения

$$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt[12]{5}+\sqrt[12]{3}},$$

то сначала умножаем числитель и знаменатель на «сопряжённое выражение» $\sqrt[12]{5}-\sqrt[12]{3}$ $\left(\text{что приводит знаменатель к виду } \sqrt[6]{5}-\sqrt[6]{3}\right)$, а потом — на $\sqrt[6]{5}+\sqrt[6]{3}$. Мы получаем:

$$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt[12]{5}+\sqrt[12]{3}}=\frac{\sqrt{7}\left(\sqrt[12]{5}-\sqrt[12]{3}\right)\left(\sqrt[6]{5}+\sqrt[6]{3}\right)}{\left(\sqrt[12]{5}+\sqrt[12]{3}\right)\left(\sqrt[12]{5}-\sqrt[12]{3}\right)\left(\sqrt[6]{5}+\sqrt[6]{3}\right)}=\frac{\sqrt{7}\left(\sqrt[12]{5}-\sqrt[12]{3}\right)\left(\sqrt[6]{5}+\sqrt[6]{3}\right)}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}}.$$

Теперь уже можно использовать вторую из приведённых выше формул. Положим в ней $x=\sqrt[3]{5}$, $y=\sqrt[3]{3}$. Тогда ясно, что надо умножить числитель и знаменатель на выражение

$$x^2+xy+y^2=\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}.$$

После умножения получим:

$$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt[12]{5}+\sqrt[12]{3}}=\frac{\sqrt{7}\left(\sqrt[12]{5}-\sqrt[12]{3}\right)\left(\sqrt[6]{5}+\sqrt[6]{3}\right)\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}\right)}{\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{7}\left(\sqrt[12]{5}-\sqrt[12]{3}\right)\left(\sqrt[6]{5}+\sqrt[6]{3}\right)\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}\right)}{\left(\sqrt[3]{5}\right)^3-\left(\sqrt[3]{3}\right)^3}=$$

$$=\frac{\sqrt{7}\left(\sqrt[12]{5}-\sqrt[12]{3}\right)\left(\sqrt[6]{5}+\sqrt[6]{3}\right)\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}\right)}{2}.$$

Сложнее обстоит дело, если знаменатель состоит из трёх или большего числа иррациональных слагаемых. Здесь-то и могут помочь симметрические многочлены. Рассмотрим следующие примеры.

1°. Освободиться от иррациональности в знаменателе выражения

$$\frac{q}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}.$$

Положим $\sqrt{a}=x$, $\sqrt{b}=y$, $\sqrt{c}=z$. Тогда знаменатель является не чем иным, как элементарным симметрическим многочленом $\sigma_1=x+y+z$.

Попробуем подыскать множитель, после умножения на который знаменатель удастся выразить через степенные суммы s_2 и s_4. Так как эти степенные суммы имеют вид

$$s_2 = x^2 + y^2 + z^2 = a + b + c,$$
$$s_4 = x^4 + y^4 + z^4 = a^2 + b^2 + c^2,$$

знаменатель станет рациональным выражением.

Для разыскания этого множителя используем формулы

$$s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2, \qquad s_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2^2$$

(см. табл. 2 на стр. 47). Мы видим, что в обеих степенных суммах лишь последнее слагаемое (в правой части) не делится на σ_1. Но очень легко скомбинировать эти степенные суммы так, чтобы мешающие нам последние слагаемые взаимно уничтожились. Для этого возведём сумму s_2 в квадрат

$$s_2^2 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_2^2$$

и вычтем из этого квадрата удвоенную сумму s_4. Мы получим:

$$s_2^2 - 2s_4 = -\sigma_1^4 + 4\sigma_1^2\sigma_2 - 8\sigma_1\sigma_3 = \sigma_1(4\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1^3 - 8\sigma_3),$$

откуда

$$\frac{1}{\sigma_1} = \frac{4\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1^3 - 8\sigma_3}{s_2^2 - 2s_4}. \qquad (*)$$

Вспоминая, что $x = \sqrt{a}$, $y = \sqrt{b}$, $z = \sqrt{c}$, мы находим (используя указанные выше соотношения $s_2 = x^2 + y^2 + z^2 = a + b + c$, $s_4 = x^4 + y^4 + z^4 = a^2 + b^2 + c^2$):

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{4\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}\right) - \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^3 - 8\sqrt{abc}}{(a+b+c)^2 - 2\left(a^2+b^2+c^2\right)}.$$

Остаётся умножить обе части полученного равенства на q — и наша задача решена.

З а м е ч а н и е. Чтобы избежать несколько неприятного (при раскрытии скобок в числителе) выражения $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^3$, можно было бы сначала преобразовать числитель в правой части формулы (*). Именно, используя соотношение

$$s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3,$$

мы можем переписать формулу (*) в виде

$$\frac{1}{\sigma_1}=\frac{\sigma_1\sigma_2-s_3-5\sigma_3}{s_2^2-2s_4}.$$

Отсюда $\left(\text{полагая, как и раньше, } x=\sqrt{a},\ y=\sqrt{b},\ z=\sqrt{c}\right)$, получаем решение задачи в более удобном виде:

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}\right)-\left(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}\right)-5\sqrt{abc}}{2(ab+ac+bc)-(a^2+b^2+c^2)}.$$

2°. Освободиться от иррациональности в знаменателе выражения

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}.$$

Напишем выражение степенной суммы s_3:

$$s_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3.$$

Здесь в правой части только последнее слагаемое $3\sigma_3$ не делится на σ_1. Перенося его в левую часть, получаем:

$$s_3-3\sigma_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2=\sigma_1\left(\sigma_1^2-3\sigma_2\right),$$

откуда

$$\frac{1}{\sigma_1}=\frac{\sigma_1^2-3\sigma_2}{s_3-3\sigma_3}=\frac{s_2-\sigma_2}{s_3-3\sigma_3}.$$

Полагая здесь $x=\sqrt[3]{a}$, $y=\sqrt[3]{b}$, $z=\sqrt[3]{c}$, находим:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}-\sqrt[3]{bc}}{(a+b+c)-3\sqrt[3]{abc}}.$$

Мы видим, таким образом, что если знаменатель дроби имеет вид $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$, то после умножения числителя и знаменателя на выражение

$$\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}-\sqrt[3]{bc}$$

в знаменателе получится выражение

$$a+b+c-3\sqrt[3]{abc}.$$

Теперь для освобождения от иррациональности достаточно использовать формулу

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2).$$

Именно, надо умножить числитель и знаменатель на выражение

$$(a+b+c)^2+3(a+b+c)\sqrt[3]{abc}+9\sqrt[3]{(abc)^2}.$$

В результате мы получим:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}=\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}-\sqrt[3]{bc}\right)\times$$

$$\times\frac{(a+b+c)^2+3(a+b+c)\sqrt[3]{abc}+9\sqrt[3]{(abc)^2}}{(a+b+c)^3-27abc}.$$

Рассмотренные примеры являются частными случаями следующей задачи. Пусть нужно избавиться от иррациональности в знаменателе выражения

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}.$$

Иными словами, мы должны представить данное выражение в виде

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}=\frac{A}{B},$$

где A может быть сколь угодно сложным иррациональным выражением, но знаменатель B должен быть р а ц и о н а л ь н ы м. Ясно, что знаменатель будет рациональным, если в него сами корни $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, $\sqrt[n]{c}$ не входят, а входят лишь их n-е с т е п е н и. Иными словами, обозначив $\sqrt[n]{a}=x$, $\sqrt[n]{b}=y$, $\sqrt[n]{c}=z$, мы должны отыскать тождество вида

$$\frac{1}{x+y+z}=\frac{f(x, y, z)}{g(x^n, y^n, z^n)},$$

где f и g — некоторые многочлены. Это равенство переписывается в виде $g(x^n, y^n, z^n) = \sigma_1 f(x, y, z)$. Итак, нам надо найти такой многочлен от трёх переменных, что $g(x^n, y^n, z^n)$ д е л и т с я на $\sigma_1=x+y+z$.

Как же найти такой многочлен g? Попробуем использовать симметрические многочлены. Простейшими примерами симметрических многочленов, зависящих только от n-х с т е п е н е й переменных x, y, z, могут служить степенные суммы

$$s_n=x^n+y^n+z^n, \quad s_{2n}=x^{2n}+y^{2n}+z^{2n}, \quad s_{3n}=x^{3n}+y^{3n}+z^{3n}$$

и т. д. Если нам удастся скомбинировать эти степенные суммы так, чтобы построенный из них многочлен g делился на σ_1, то наша задача решена. Именно таким образом мы и поступили в примере 1°.

Иногда бывает трудно скомбинировать степенные суммы s_n, s_{2n}, s_{3n}, ..., чтобы полученный из них многочлен делился на σ_1. В этом случае может помочь следующий приём. Попытаемся использовать (для получения выражения, делящегося на σ_1) не только степенные суммы s_n, s_{2n}, s_{3n}, ..., но также и величину σ_3. Ведь при $x=\sqrt[n]{a}$, $y=\sqrt[n]{b}$, $z=\sqrt[n]{c}$ мы имеем $\sigma_3=xyz=\sqrt[n]{abc}$, т. е. к р а ц и о н а л ь н ы м выражениям s_n, s_{2n}, s_{3n},... мы добавляем л и ш ь о д н у иррациональность $\sigma_3=\sqrt[n]{abc}$. Для освобождения от этой оставшейся иррациональности можно воспользоваться способами, указанными в начале этого пункта. (Сравните пример 2°.)

В качестве примера на применение этих общих методов рассмотрим следующую задачу.

3°. Освободиться от иррациональности в знаменателе выражения

$$\frac{1}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{c}}.$$

Мы здесь наметим лишь основную идею решения, оставив детали вычислений читателю. Из табл. 2, приведённой на стр. 47, мы видим, что выражения степенных сумм s_4 и s_8 имеют следующий вид (многоточием обозначены члены, делящиеся на σ_1):

$$s_4 = \ldots + 2\sigma_2^2, \quad s_8 = \ldots + 2\sigma_2^4 - 8\sigma_2\sigma_3^2.$$

Следовательно,

$$2s_8 - s_4^2 = \ldots - 16\sigma_2\sigma_3^2.$$

Перенося члены, содержащие σ_1, из правой части в левую и возводя в квадрат, получаем:

$$\left(2s_8 - s_4^2 - \ldots\right)^2 = 256\sigma_2^2\sigma_3^4.$$

Если теперь раскрыть скобки, то мы получим:

$$\left(2s_8 - s_4^2\right)^2 + \ldots = 256\sigma_2^2\sigma_3^4.$$

Наконец, так как $s_4 = \ldots + 2\sigma_2^2$, то $256\sigma_2^2\sigma_3^4 = 128s_4\sigma_3^4 + \ldots$ (где по-прежнему многоточием обозначены члены, делящиеся на σ_1), и потому, перенося в правую часть все члены, делящиеся на σ_1, получаем:

$$\left(2s_8 - s_4^2\right)^2 - 128s_4\sigma_3^4 = \ldots$$

Иными словами, выражение $\left(2s_8 - s_4^2\right)^2 - 128s_4\sigma_3^4$ делится на σ_1:

$$\left(2s_8 - s_4^2\right)^2 - 128s_4\sigma_3^4 = \sigma_1 A, \tag{**}$$

где A — некоторый симметрический многочлен. (Если читателю будет интересно найти явный вид многочлена A, незачем подробно проводить все указанные выше рассуждения: достаточно в полученную окончательную формулу (**) подставить значения степенных сумм s_4 и s_8 из табл. 2 на стр. 47.) Полагая, наконец, $x = \sqrt[4]{a}$, $y = \sqrt[4]{b}$, $z = \sqrt[4]{c}$ $\left(\text{так что } s_4 = a + b + c,\ s_8 = a^2 + b^2 + c^2,\ \sigma_3 = \sqrt[4]{abc}\right)$, мы находим

$$\frac{1}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{c}} = \frac{1}{\sigma_1} = \frac{A}{\left(2s_8 - s_4^2\right)^2 - 128s_4\sigma_3^4} =$$

$$= \frac{A}{(a^2+b^2+c^2-2ab-2ac-2bc)^2 - 128(a+b+c)abc}.$$

К сожалению, описанный метод всё же обладает весьма ограниченными возможностями, так как с увеличением показателей корней степенные суммы s_n, s_{2n}, ... всё сложнее выражаются через σ_1, σ_2, σ_3 и подобрать нужную комбинацию этих степенных сумм становится очень трудно. Кроме того, этот метод пригоден лишь в том случае, когда в знаменателе число корней не больше трёх. В § 7 (см. п. 43) мы расскажем об общем методе решения таких задач, который указывает стандартный путь решения любой задачи об уничтожении иррациональности в знаменателе (хотя и приводит к сложным выкладкам).

В заключение этого параграфа мы рассмотрим ещё один тип задач на освобождение от иррациональности, тесно связанный с задачами рассмотренного типа. В общем виде задача, о которой идёт речь, может быть сформулирована следующим образом: избавиться от иррациональности в соотношении

$$\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}=0.$$

Иными словами, требуется найти р а ц и о н а л ь н о е соотношение между a, b и c, которое непременно должно выполняться, если справедливо равенство $\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}=0$. Нетрудно понять, как связана эта задача с рассмотренными выше. Положим $x=\sqrt[n]{a}$, $y=\sqrt[n]{b}$, $z=\sqrt[n]{c}$. Тогда по условию $\sigma_1=x+y+z=\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}=0$. Если теперь нам удалось (например, комбинируя выражения для степенных сумм s_n, s_{2n}, ...) найти такой многочлен g, что $g(x^n, y^n, z^n)=\sigma_1 f(x, y, z)$, то, в силу соотношения $\sigma_1=0$, мы получаем $g(x^n, y^n, z^n)=0$. Это и есть искомое р а ц и о н а л ь н о е соотношение (ибо $x^n=a$, $y^n=b$, $z^n=c$). Заметим ещё, что, в силу соотношения $\sigma_1=0$, можно для вычисления степенных сумм s_n, s_{2n}, ... пользоваться табл. 5, приведённой на стр. 67 (а не табл. 2 на стр. 47), что существенно упрощает вычисления. Рассмотрим пример.

4°. Освободиться от иррациональности в соотношении

$$\sqrt[4]{a}+\sqrt{b}+c=0.$$

Для решения положим $\sqrt[4]{a}=x$, $\sqrt{b}=y$, $c=z$, так что данное соотношение принимает вид

$$\sigma_1=x+y+z=\sqrt[4]{a}+\sqrt{b}+c=0.$$

Так как $\sigma_1=0$, то соотношение (**) сводится к

$$\left(2s_8-s_4^2\right)^2-128s_4\sigma_3^4=0.$$

Поскольку $s_4=x^4+y^4+z^4=a+b^2+c^4$, $s_8=a^2+b^4+c^8$, $\sigma_3^4=ab^2c^4$, мы получаем:

$$(a^2+b^4+c^8-2ab^2-2ac^4-2b^2c^4)^2-128(a+b^2+c^4)ab^2c^4=0.$$

Это и есть искомое рациональное соотношение между величинами a, b, c.

УПРАЖНЕНИЯ

Уничтожить иррациональность в знаменателях следующих выражений:

1) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; **2)** $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}}$.

Избавиться от иррациональности в следующих соотношениях:

3) $\sqrt{a}+\sqrt{b}+1=0$; **4)** $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}+b=0$;

5) $p\sqrt[3]{a^2}+q\sqrt[3]{a}+r=0$; **6)** $\sqrt[3]{a}+\sqrt{b}+c=0$;

7) $(ax)^{2/3}+(by)^{2/3}=c^{4/3}$; **8)** $\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt[4]{a^2+b^2}=0$.

§ 5. АНТИСИММЕТРИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ ОТ ТРЁХ ПЕРЕМЕННЫХ

26. Определение и примеры. До сих пор мы рассматривали симметрические многочлены, т. е. многочлены, не изменяющиеся при перестановке любых двух переменных. Теперь мы рассмотрим другой, очень близкий класс многочленов — *антисимметрические многочлены*. Так называют многочлены, меняющие знак при перестановке любых двух переменных.

Рассмотрим сначала антисимметрические многочлены от двух переменных. Примерами таким многочленов являются $x-y$, x^3-y^3, x^4y-xy^4. В самом деле, если, например, в многочлене x^3-y^3 поменять местами x и y, то он превратится в многочлен y^3-x^3. Так как

$$y^3-x^3=-(x^3-y^3),$$

то многочлен x^3-y^3 является антисимметрическим. Точно так же доказывается антисимметричность многочленов $x-y$ и x^4y-xy^4.

Примером антисимметрического многочлена от трёх переменных может служить многочлен

$$(x-y)(x-z)(y-z).$$

В самом деле, если поменять местами x и y, то он превратится в многочлен

$$(y-x)(y-z)(x-z)=-(x-y)(x-z)(y-z).$$

Точно так же он меняет знак при перестановке любых других двух переменных.

Отметим следующее важное для дальнейшего свойство антисимметрических многочленов:

квадрат антисимметрического многочлена является симметрическим многочленом.

В самом деле, после перестановки любых двух переменных антисимметрический многочлен меняет знак. Но это оставляет неизменным квадрат многочлена. Значит, квадрат антисимметрического многочлена не меняется при любой перестановке двух переменных, т. е. является симметрическим многочленом.

Но не только квадрат антисимметрического многочлена симметричен. Если мы перемножим два произвольных антисимметрических многочлена, то получим в произведении симметрический многочлен. Ведь при перестановке любых двух переменных оба сомножителя меняют знаки, а потому произведение остаётся неизменным.

Наконец,

при умножении симметрического многочлена на антисимметрический получается антисимметрический многочлен.

В этом случае при перестановке двух переменных один множитель меняет знак, а второй не меняется.

27. Основная теорема об антисимметрических многочленах. Выясним теперь, как устроен произвольный антисимметрический многочлен. Последнее замечание предыдущего пункта указывает способ, с помощью которого можно построить сколько угодно антисимметрических многочленов. Достаточно взять какой-нибудь один такой многочлен и умножать его на всевозможные симметрические многочлены; в произведении мы будем получать антисимметрические многочлены.

Возникает естественный вопрос: можно ли найти такой антисимметрический многочлен, что, умножая его на всевозможные симметрические многочлены, мы получим все антисимметрические многочлены (от данного числа переменных)? Мы увидим, что ответ на этот вопрос утвердителен.

Начнём с многочленов от двух переменных. Покажем, что в этом случае искомым антисимметрическим многочленом является многочлен $x-y$. Иными словами, верна следующая

Теорема. Любой антисимметрический многочлен $f(x, y)$ от двух переменных x, y имеет вид

$$f(x, y)=(x-y)g(x, y), \tag{8}$$

где $g(x, y)$ — симметрический многочлен от x и y.

Прежде чем доказывать эту теорему, мы установим следующую лемму.

Лемма. Если $f(x, y)$ — антисимметрический многочлен, то $f(x, x)=0$.

Иными словами, при совпадающих значениях переменных x и y антисимметрический многочлен обращается в нуль.

Для доказательства достаточно заметить, что условие антисимметричности многочлена $f(x, y)$ можно записать в виде

$$f(x, y)=-f(y, x).$$

Положив в этом равенстве $y=x$, получим соотношение $f(x, x)=-f(x, x)$, которое может иметь место лишь в том случае, если $f(x, x)=0$.

Доказанную лемму можно сформулировать несколько иначе.

С этой целью расположим многочлен $f(x, y)$ по степеням x, а переменную y включим в коэффициенты. Например, если антисимметрический многочлен $f(x, y)$ имеет вид

$$f(x, y) = x^4y^2 - y^4x^2 + x^4y - y^4x + x^3y^2 - x^2y^3,$$

то запишем его в виде

$$f(x, y) = (y^2 + y)x^4 + y^2x^3 - (y^4 + y^3)x^2 - y^4x.$$

Из доказанной леммы вытекает, что если положить в нашем многочлене $x = y$, то он обратится в нуль. Иными словами, значение $x = y$ является **корнем** антисимметрического многочлена $f(x, y)$, рассматриваемого как функция от x.

Но тогда, в силу теоремы Безу (см. стр. 136), многочлен $f(x, y)$ делится без остатка на $x - y$, т. е.

$$f(x, y) = (x - y)g(x, y),$$

где $g(x, y)$ — некоторый многочлен.

Чтобы закончить теперь доказательство теоремы, нам осталось показать, что многочлен $g(x, y)$ симметричен. Для этого поменяем в соотношении (8) местами x и y:

$$f(y, x) = (y - x)g(y, x).$$

Такая замена допустима, поскольку соотношение (8) является **тождеством**, т. е. справедливо при **любых** значениях переменных x, y. Так как по условию $f(x, y) = -f(y, x)$ и так как $(x - y) = -(y - x)$, то отсюда вытекает, что

$$f(x, y) = (x - y)g(y, x).$$

Сравнивая это соотношение с равенством (8), находим, что $(x - y)g(x, y) = (x - y)g(y, x)$, и потому при $x \neq y$ справедливо равенство $g(y, x) = g(x, y)$. При $x = y$ последнее равенство принимает вид $g(x, x) = g(x, x)$ и также, очевидно, справедливо. Итак, при любых x, y имеет место равенство $g(y, x) = g(x, y)$, т. е. $g(x, y)$ — симметрический многочлен. Теорема доказана.

Итак, строение антисимметрических многочленов от двух переменных полностью выяснено: каждый из них делится на $x - y$, причём в частном получается симметрический многочлен.

Случай многочленов от трёх переменных рассматривается точно так же. Сначала устанавливается, что антисимметрический многочлен обращается в нуль, если какие-нибудь два переменных совпадают. Иными словами,

$$f(x, x, z) = f(x, y, x) = f(x, y, y) = 0$$

для любого антисимметрического многочлена $f(x, y, z)$.

После этого, применяя теорему Безу, выводим, что каждый антисимметрический многочлен от трёх переменных делится на выражения $x-y$, $x-z$ и $y-z$. Но тогда он должен делиться и на произведение этих выражений, т. е. на антисимметрический многочлен

$$T = (x-y)(x-z)(y-z).$$

Таким образом, каждый антисимметрический многочлен $f(x, y, z)$ можно записать в виде

$$f(x, y, z) = (x-y)(x-z)(y-z)g(x, y, z), \tag{9}$$

где $g(x, y, z)$ — некоторый многочлен. Как и для многочленов от двух переменных, мы затем убеждаемся в симметричности многочлена $g(x, y, z)$. Подробное проведение этих рассуждений мы предоставляем читателю.

Итак, для антисимметрических многочленов от трёх переменных имеет место следующее утверждение.

Теорема. Любой антисимметрический многочлен $f(x, y, z)$ от трёх переменных x, y, z является произведением многочлена

$$T = (x-y)(x-z)(y-z)$$

на некоторый симметрический многочлен $g(x, y, z)$ от переменных x, y, z (см. (9)).

УПРАЖНЕНИЯ

1) Доказать, что если симметрический многочлен $f(x, y)$ делится на $x-y$, то он делится и на $(x-y)^2$.

2) Доказать, что если симметрический многочлен $f(x, y, z)$ делится на $x-y$, то он делится и на многочлен $\Delta(x, y, z) = (x-y)^2(x-z)^2(y-z)^2$.

28. Дискриминант и его применение к исследованию корней уравнения. Мы видели, что в теории антисимметрических многочленов важную роль играют простейшие антисимметрические многочлены, а именно, многочлен $x-y$ для двух переменных и многочлен $T = (x-y)(x-z)(y-z)$ для трёх переменных. Квадрат простейшего антисимметрического многочлена называют *дискриминантом*. Таким образом, в случае двух переменных дискриминант равен $\Delta = (x-y)^2$, а в случае трёх переменных он равен $\Delta = (x-y)^2(x-z)^2(y-z)^2$. Выше мы уже видели, что дискриминант является симметрическим многочленом, и нашли его выражение через элементарные симметрические многочлены. В случае двух переменных это выражение имеет вид

$$\Delta = \sigma_1^2 - 4\sigma_2$$

(см. стр. 29), а в случае трёх переменных — вид

$$\Delta = -4\sigma_1^3\sigma_3 + \sigma_1^2\sigma_2^2 + 18\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 4\sigma_2^3 - 27\sigma_3^2 \tag{10}$$

(см. пример 3° на стр. 60).

Для сравнения мы приведём здесь другой вывод формулы (10) с помощью метода частных значений. Дискриминант $\Delta(x, y, z)$ является однородным многочленом шестой степени. Поэтому в его выражение через σ_1, σ_2, σ_3 могут входить (с некоторыми коэффициентами) лишь такие одночлены $\sigma_1^m\sigma_2^n\sigma_3^p$, для которых $m+2n+3p=6$ (так как σ_1 — многочлен первой степени, σ_2 — второй и σ_3 — третьей). Уравнение $m+2n+3p=6$ имеет в целых неотрицательных числах семь решений, указанных в табл. 6.

Таблица 6

m	n	p	m	n	p	m	n	p
6 4	0 1	0 0	3 2 1	0 2 1	1 0 1	0 0	3 0	0 2

Иными словами, выражение дискриминанта $\Delta(x, y, z)$ через σ_1, σ_2, σ_3 имеет вид

$$\Delta(x, y, z) = A\sigma_1^6 + B\sigma_1^4\sigma_2 + C\sigma_1^3\sigma_3 + D\sigma_1^2\sigma_2^2 + E\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + F\sigma_2^3 + G\sigma_3^2, \tag{*}$$

где A, B, C, D, E, F, G — некоторые коэффициенты. Так как соотношение (*) представляет собой тождество, то мы можем подставлять в это соотношение любые значения x, y, z.

Положим $x=1$, $y=z=0$; в этом случае $\sigma_1=1$, $\sigma_2=\sigma_3=0$ и $\Delta(1, 0, 0) = (1-0)^2(0-0)^2(0-1)^2=0$. Поэтому равенство (*) принимает вид $0=A$. Итак, коэффициент A найден.

Теперь положим $x=0$, $y=1$, $z=-1$; в этом случае $\sigma_1=0$, $\sigma_2=-1$, $\sigma_3=0$, $\Delta=4$, и соотношение (*) принимает вид $4=F(-1)^3$, т. е. $F=-4$.

При $x=2$, $y=z=-1$ (т. е. $\sigma_1=0$, $\sigma_2=-3$, $\sigma_3=2$) получаем из соотношения (*): $(-4)\cdot(-3)^3+4G=0$, откуда находим $G=-27$.

Затем мы положим $x=0$, $y=z=1$ (т. е. $\sigma_1=2$, $\sigma_2=1$, $\sigma_3=0$) и, кроме того, $x=0$, $y=1$, $z=2$ (т. е. $\sigma_1=3$, $\sigma_2=2$, $\sigma_3=0$). Это даст нам (учитывая, что $A=0$, $F=-4$) следующие два соотношения:

$$\begin{cases} 16B+\ \ 4D-\ \ 4=0, \\ 162B+36D-32=4. \end{cases}$$

Рассматривая эти соотношения как систему уравнений относительно неизвестных B и D, легко находим: $B=0$, $D=1$.

Наконец, придадим величинам x, y, z ещё две системы значений: $x=y=z=1$ и $x=y=1$, $z=-1$. Мы получим тогда (учитывая, что коэффициенты A, B, D, F, G нам уже известны) следующие соотношения:

$$\begin{cases} 27C+81+9E-108-27=0, \\ -C+\ \ 1+\ \ E+\ \ \ \ 4-27=0, \end{cases}$$

откуда без труда находим $C=-4$, $E=18$.

Итак, все коэффициенты A, B, C, D, E, F, G определены. Подставляя в соотношение (*) найденные значения этих коэффициентов, мы и получаем формулу (10).

Дискриминант играет важную роль в теории алгебраических уравнений. С его помощью можно узнавать, совпадают ли их корни, исследовать число действительных корней и т. д.

Начнём с хорошо известного читателю случая квадратного уравнения. Пусть x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения

$$x^2+px+q=0$$

с действительными коэффициентами p и q. По формулам Виета имеем: $\sigma_1=x_1+x_2=-p$ и $\sigma_2=x_1x_2=q$. Поэтому

$$\Delta=(x_1-x_2)^2=\sigma_1^2-4\sigma_2=p^2-4q. \tag{11}$$

Мы ограничимся рассмотрением уравнений с действительными коэффициентами. В этом случае могут быть три возможности:

а) корни уравнения действительны и различны,

б) корни уравнения действительны и совпадают,

в) корни уравнения комплексно сопряжены.

Дискриминант позволяет ответить на вопрос, какой же из этих случаев имеет место. Проще всего выяснить, совпадают ли корни нашего уравнения. Ведь если они совпадают, т. е. если $x_1=x_2$, то

$\Delta = (x_1 - x_2)^2 = 0$, и наоборот. Пользуясь формулой (11), получаем следующий ответ: корни квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ совпадают тогда и только тогда, когда $p^2 - 4q = 0$. Ясно, что если корни совпадают, то они действительны (поскольку $x_1 + x_2 = -p$). Пусть теперь корни x_1 и x_2 различны, т. е. $\Delta \neq 0$. Выясним, когда корни действительны, а когда они комплексно сопряжены. Если корни x_1 и x_2 действительны, то число $x_1 - x_2$ тоже действительно, и потому $\Delta = (x_1 - x_2)^2$ — положительное число. Если же корни x_1 и x_2 комплексно сопряжены, т. е. $x_1 = \alpha + \beta i$, $x_2 = \alpha - \beta i$, то $x_1 - x_2 = 2\beta i$, и потому $\Delta = (x_1 - x_2)^2 = -4\beta^2$ является отрицательным числом. Вспоминая, что $\Delta = p^2 - 4q$ (см. (11)), мы получаем следующий результат:

Пусть $x^2 + px + q = 0$ — квадратное уравнение с действительными коэффициентами. Тогда

а) если $\Delta = p^2 - 4q > 0$, то корни уравнения действительны и различны;

б) если $\Delta = p^2 - 4q = 0$, то корни уравнения действительны и совпадают;

в) если $\Delta = p^2 - 4q < 0$, то корни уравнения комплексно сопряжены.

Таким образом, в случае квадратного уравнения дискриминант позволяет полностью различить случаи, когда уравнение $x^2 + px + q = 0$ с действительными коэффициентами имеет действительные разные, действительные совпадающие и комплексные корни. С этим связано и происхождение термина «дискриминант»: по-латыни discriminatio означает *различение* (вспомните слово «дискриминация»)*).

Рассмотрим теперь кубическое уравнение

$$x^3 + nx^2 + px + q = 0$$

с действительными коэффициентами n, p, q. Здесь могут встретиться такие случаи:

а) все три корня уравнения действительны и различны между собой;

б) все три корня уравнения действительны, причём два из них совпадают, а третий отличен от них;

в) все три корня уравнения совпадают (и действительны);

г) один корень уравнения действительный, а два других комплексно сопряжены.

Иных случаев быть не может.

Чтобы отличить эти случаи друг от друга, снова образуем дискриминант трёх корней x_1, x_2, x_3 нашего уравнения, т. е. выражение

$$\Delta = (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2. \qquad (**)$$

*) Дальнейшую часть этого и следующего пунктов, если она покажется трудной, можно без ущерба пропустить.

В силу формул Виета для кубического уравнения (стр. 56), имеем:

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -n,$$
$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = p,$$
$$\sigma_3 = x_1x_2x_3 = -q,$$

и потому, согласно формуле (10),

$$\Delta = -4n^3q + n^2p^2 + 18npq - 4p^3 - 27q^2.$$

Ясно, что если какие-нибудь два корня уравнения совпадают, то в выражении (**) одна скобка обращается в нуль, а тогда и дискриминант равен нулю. Если же все корни попарно различны (т. е. среди них нет ни одной пары совпадающих), то все скобки в выражении (**) отличны от нуля, а потому и дискриминант отличен от нуля. Итак, для того чтобы среди корней уравнения

$$x^3 + nx^2 + px + q = 0$$

были хотя бы два совпадающих, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\Delta = 0$.

Пусть теперь все корни кубического уравнения действительны и различны. Тогда $T = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$ является отличным от нуля действительным числом, а значит, $\Delta = (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2$ — положительное число.

Наконец, пусть корень x_1 — действительный, а корни $x_2 = \alpha + \beta i$ и $x_3 = \alpha - \beta i$ комплексно сопряжены. Тогда выражение $T = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$ принимает вид

$$T = (x_1 - \alpha - \beta i)(x_1 - \alpha + \beta i) \cdot 2\beta i = 2((x_1 - \alpha)^2 + \beta^2)\beta i.$$

Поэтому

$$\Delta = T^2 = -4((x_1 - \alpha^2) + \beta^2)^2\beta^2 < 0.$$

Итак, мы доказали следующее утверждение.

Пусть

$$x^3 + nx^2 + px + q = 0$$

— кубическое уравнение с действительными коэффициентами и

$$\Delta = -4n^3q + n^2p^2 + 18npq - 4p^3 - 27q^2$$

— дискриминант этого уравнения. Тогда:

а) если $\Delta > 0$, то все три корня x_1, x_2, x_3 действительны и различны;

б) если $\Delta = 0$, то среди корней уравнения есть по крайней мере два совпадающих;

в) если $\Delta < 0$, то один корень уравнения действительный, а два другие комплексно сопряжены.

Проведённое исследование не полно. Мы не научились ещё отличать случай, когда д в а корня уравнения совпадают, а третий отличен от них, от случая, когда равны друг другу все три корня. Здесь уже дискриминант отказывается дать ответ и надо искать другой симметрический многочлен. Проще всего взять в этом случае в помощь дискриминанту симметрический многочлен

$$\Delta_1 = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 = 2(\sigma_1^2 - 3\sigma_2) = 2(n^2 - 3p).$$

Ясно, что если корни x_1, x_2, x_3 действительны, то выражение Δ_1 лишь тогда обращается в нуль, когда все три корня x_1, x_2, x_3 совпадают.

Таким образом,

если дискриминант Δ кубического уравнения $x^3+nx^2+px+q=0$ обращается в нуль, то при $n^2-3p\neq 0$ два корня этого уравнения совпадают, а третий отличен от них, а при $n^2-3p=0$ все три корня уравнения равны между собой.

Заметим в заключение, что если в произвольный кубический многочлен x^3+nx^2+px+q ввести новое неизвестное y по формуле $x=y-\dfrac{n}{3}$, то этот кубический многочлен примет вид y^3+Py+Q, т. е. в нём исчезнет член, содержащий квадрат неизвестного. (Мы не выписываем формулы, по которым новые коэффициенты P и Q выражаются через n, p, q, — получение этих формул не представляет труда.) Таким образом, любое кубическое уравнение может быть указанной заменой приведено к виду

$$y^3+Py+Q=0.$$

Если уравнение уже приведено к такому виду, то выражения для Δ и Δ_1 значительно упрощаются:

$$\Delta=-4P^3-27Q^2, \qquad \Delta_1=-6P.$$

УПРАЖНЕНИЕ

Доказать, что если корни кубического уравнения

$$x^3-px-2q=0$$

(где p, q — целые) являются целыми числами, то p^3-27q^2 — точный квадрат.

29. Применение дискриминанта к доказательству неравенств. Из результатов предыдущего пункта сразу вытекает следующая

Теорема. Пусть σ_1, σ_2, σ_3 — действительные числа. Для того чтобы все три числа x, y, z, определяемые из системы уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=\sigma_1, \\ xy+xz+yz=\sigma_2, \\ xyz=\sigma_3, \end{cases}$$

были действительными, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант $\Delta(x, y, z)$ (см. (10)) был неотрицательным. (Равенство $\Delta(x, y, z)=0$ имеет место лишь в том случае, если среди чисел x, y, z имеются хотя бы два совпадающих.)

Доказательство. Согласно теореме, приведённой на стр. 55, числа x, y, z являются корнями кубического уравнения

$$u^3-\sigma_1u^2+\sigma_2u-\sigma_3=0,$$

все коэффициенты которого действительны. Поэтому из теоремы на стр. 87 следует, что эти числа действительны тогда и только тогда, когда $\Delta(x, y, z)\geqslant 0$.

Следствие. Для того чтобы все три числа x, y, z были не только действительными, но и неотрицательными, необходимо и достаточно, чтобы, кроме условия $\Delta(x, y, z)\geqslant 0$, выполнялись соотношения

$$\sigma_1\geqslant 0, \qquad \sigma_2\geqslant 0, \qquad \sigma_3\geqslant 0. \tag{12}$$

В самом деле, очевидно, что если числа x, y, z неотрицательны, то соотношения (12) выполняется.

Обратно, пусть для действительных чисел x, y, z выполнены неравенства (12). Покажем, что в этом случае они неотрицательны. Числа x, y, z являются корнями уравнения

$$u^3 - \sigma_1 u^2 + \sigma_2 u - \sigma_3 = 0. \qquad (*)$$

Следовательно, достаточно доказать, что у этого уравнения нет отрицательных корней. Положим $u = -v$. Мы получим кубическое уравнение

$$v^3 + \sigma_1 v^2 + \sigma_2 v + \sigma_3 = 0.$$

Так как $\sigma_1 \geqslant 0$, $\sigma_2 \geqslant 0$, $\sigma_3 \geqslant 0$, то при любом положительном значении v левая часть этого уравнения *положительна*. Значит, оно не имеет положительных корней. Так как $u = -v$, то отсюда и следует, что уравнение (*) не имеет отрицательных корней. Утверждение доказано.

Заметим, что поскольку выполнение неравенства $\Delta(x, y, z) \geqslant 0$ является *необходимым и достаточным* условием действительности всех трёх чисел x, y, z, то любой факт, касающийся величин σ_1, σ_2, σ_3 и имеющий место при *любых* действительных x, y, z, должен вытекать из неравенства $\Delta(x, y, z) \geqslant 0$. В частности, любое неравенство, связывающее величины σ_1, σ_2, σ_3 и справедливое при любых действительных x, y, z, можно вывести из неравенства $\Delta(x, y, z) \geqslant 0$. Точно так же любое неравенство, связывающее величины σ_1, σ_2, σ_3 и справедливое при любых *неотрицательных* x, y, z, может быть выведено из соотношения $\Delta(x, y, z) \geqslant 0$ и неравенств (12). В этом смысле использование соотношения $\Delta(x, y, z) \geqslant 0$ и неравенств (12) может служить *общим методом* доказательства неравенств. Однако этот метод доказательства, как правило, приводит к очень сложным и заранее неочевидным выкладкам. Вот почему мы не рекомендовали в п. 24 пользоваться этим общим методом, а пользовались другими, более простыми приёмами.

Для примера покажем, как из соотношения $\Delta(x, y, z) \geqslant 0$ вывести неравенство (7). (Заметим, что все остальные неравенства, приведённые в п. 24, мы вывели из неравенства (7).) Пользуясь соотношением (10), перепишем неравенство $\Delta(x, y, z) \geqslant 0$, справедливое для любых действительных x, y, z, в виде

$$\sigma_1^2\sigma_2^2 - 4\sigma_2^3 - 4\sigma_1^3\sigma_3 + 18\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 27\sigma_3^2 \geqslant 0.$$

Далее, в левой части этого неравенства, рассматриваемой как *квадратный многочлен* относительно σ_3, вынесем за скобку -27 и выделим полный квадрат:

$$\Delta(x, y, z) = \sigma_1^2\sigma_2^2 - 4\sigma_2^3 - 4\sigma_1^3\sigma_3 + 18\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 27\sigma_3^2 =$$

$$= -27\left(\sigma_3^2 + \left(\frac{4}{27}\sigma_1^3 - \frac{2}{3}\sigma_1\sigma_2\right)\sigma_3 + \left(\frac{4}{27}\sigma_2^3 - \frac{1}{27}\sigma_1^2\sigma_2^2\right)\right) =$$

$$= -27\left(\left(\sigma_3 + \left(\frac{2}{27}\sigma_1^3 - \frac{1}{3}\sigma_1\sigma_2\right)\right)^2 + \left(\frac{4}{27}\sigma_2^3 - \frac{1}{27}\sigma_1^2\sigma_2^2\right) -\right.$$

$$\left. - \left(\frac{2}{27}\sigma_1^3 - \frac{1}{3}\sigma_1\sigma_2\right)^2\right) = -27\left(\sigma_3 + \frac{2}{27}\sigma_1^3 - \frac{1}{3}\sigma_1\sigma_2\right)^2 +$$

$$+ \left(\frac{4}{27}\sigma_1^6 - \frac{4}{3}\sigma_1^4\sigma_2 + 4\sigma_1^2\sigma_2^2 - 4\sigma_2^3\right) = -27\left(\sigma_3 + \frac{2}{27}\sigma_1^3 - \frac{1}{3}\sigma_1\sigma_2\right)^2 + \frac{4}{27}(\sigma_1^2 - 3\sigma_2)^3.$$

А так как $\Delta(x, y, z) \geqslant 0$, то мы имеем:

$$-27\left(\sigma_3 + \frac{2}{27}\sigma_1^3 - \frac{1}{3}\sigma_1\sigma_2\right)^2 + \frac{4}{27}(\sigma_1^2 - 3\sigma_2)^3 \geqslant 0$$

или

$$\frac{4}{27}(\sigma_1^2-3\sigma_2)^3 \geqslant 27\left(\sigma_3+\frac{2}{27}\sigma_1^3-\frac{1}{3}\sigma_1\sigma_2\right)^2.$$

Правая часть последнего неравенства, очевидно, неотрицательна. Поэтому

$$\frac{4}{27}(\sigma_1^2-3\sigma_2)^3 \geqslant 0 \quad \text{или} \quad (\sigma_1^2-3\sigma_2)^3 \geqslant 0.$$

Наконец, извлекая кубический корень (эта операция не меняет знака неравенства), получаем требуемое соотношение $\sigma_1^2-3\sigma_2 \geqslant 0$.

УПРАЖНЕНИЕ

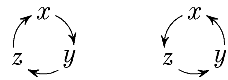
Доказать, что если действительные числа a, b, c удовлетворяют условиям $abc>0$, $a+b+c>0$, то $a^n+b^n+c^n>0$ при любом натуральном n.

30. Чётные и нечётные перестановки. Определение симметрических многочленов от трёх переменных x, y, z, данное на стр. 43, можно сформулировать в несколько иной форме. Рассмотрим произвольную *перестановку* переменных x, y, z. Таких перестановок существует шесть: x может перейти при перестановке в любое из трёх переменных x, y, z, затем в каждом из этих трёх случаев y может перейти в какое-либо из двух оставшихся переменных. Это и даёт шесть возможностей для получения перестановок (при этом, если уже известно, во что переходят x и y, то для z остаётся только одна возможность: оно должно перейти в третье, оставшееся переменное). Все эти шесть возможных перестановок переменных x, y, z показаны на следующей диаграмме:

$$\begin{array}{ccc} x\ y\ z & x\ y\ z & x\ y\ z \\ \downarrow\downarrow\downarrow & \downarrow\downarrow\downarrow & \downarrow\downarrow\downarrow \\ x\ z\ y & z\ y\ x & y\ x\ z \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} x\ y\ z & x\ y\ z & x\ y\ z \\ \downarrow\downarrow\downarrow & \downarrow\downarrow\downarrow & \downarrow\downarrow\downarrow \\ x\ y\ z & y\ z\ x & z\ x\ y \end{array}$$

Первые три перестановки (верхняя строка) заключаются в том, что некоторые два переменных меняются местами, а третье переменное не меняется. Иными словами, верхняя строка даёт нам всевозможные перестановки двух переменных. Первая перестановка в нижней строке является тождественной, т. е. ни одно переменное не меняется. Две другие перестановки, указанные в нижней строке, называются *циклическими*. Название это объясняется тем, что переменные последовательно заменяются одно другим (например, во второй перестановке нижней строки x переходит в y, y переходит в z, а z — в x), т. е. эти перестановки можно схематически изобразить в виде кольца или, как говорят математики, цикла:



Таким образом, при циклической перестановке каждое переменное переходит по кругу в следующее.

По определению, многочлен $f(x, y, z)$ называется симметрическим, если он не меняется при перестановке любых двух переменных, т. е. если он не меняется при перестановках, изображённых в верхней строке приведённой выше диаграммы. Разумеется, симметрический многочлен (да и вообще любой многочлен) не меняется при тождественной перестановке, когда ни одно переменное x, y, z не меняет своего значения.

Возникает вопрос, остаётся ли симметрический многочлен неизменным и при циклических перестановках? Оказывается, что остаётся. Дело в том, что каждая из циклических перестановок может быть получена, если выполнить одну за другой две перестановки, меняющие местами два переменных. Например, если сначала поменять местами x и y, а после этого поменять местами x и z, то в результате x перейдёт в y, y в z, а z в x, т. е. получится циклическая перестановка. Но каждая перестановка двух переменных оставляет симметрический многочлен неизменным. Поэтому он не меняется, если д в а раза произвести перестановку двух переменных, а значит, не меняется и при циклических перестановках:

$$f(x, y, z) = f(y, z, x) = f(z, x, y).$$

Итак, определение симметрического многочлена от трёх переменных можно сформулировать следующим образом: многочлен от трёх переменных называется *симметрическим*, если он не изменяется ни при какой перестановке переменных.

Перестановки, изображённые в верхней строке приведённой выше диаграммы, называются *нечётными*, а перестановки, указанные в нижней строке — *чётными*. Объясняются эти названия тем, что для получения перестановок нижней строки нужно произвести чётное число раз перестановку двух переменных (для циклических перестановок — 2 раза, а для тождественной — 0 раз), а перестановки верхней строки получаются, если н е ч ё т н о е число раз (а именно, 1 раз) переставить местами два переменных. (Можно было бы показать — нам это не понадобится, — что вообще, если мы произвольное чётное число раз будем менять местами два переменных, то получим в результате одну из перестановок нижней строки, а если нечётное число раз, то получим какую-либо перестановку верхней строки.)

Как же ведут себя при различных перестановках антисимметрические многочлены? По определению, они меняют знак при нечётных перестановках (т. е. при перестановке двух каких-либо переменных — верхняя строка диаграммы). При чётных же перестановках антисимметрические многочлены не меняются: ведь если мы чётное число раз произведём перестановку двух переменных, то антисимметрический многочлен чётное число раз изменит знак, т. е. в результате он совсем не изменится.

Итак,

и симметрические и антисимметрические многочлены не изменяются при чётных перестановках переменных x, y, z. (При этом симметрические многочлены не меняются также и при нечётных перестановках, а антисимметрические при таких перестановках меняют знак.)

31. Чётно-симметрические многочлены. Естественно рассмотреть класс многочленов, объединяющий симметрические и антисимметрические многочлены. Именно, назовём многочлен *чётно-симметрическим,* если он не изменяется ни при какой чётной перестановке переменных x, y, z. Как мы видели, к числу чётно-симметрических многочленов относятся и симметрические и антисимметрические многочлены.

Возникает вопрос, насколько же широкий класс многочленов у нас получился? Оказывается, расширение не слишком велико:

Любой чётно-симметрический многочлен является суммой симметрического и антисимметрического многочленов.

Для доказательства возьмём произвольный чётно-симметрический многочлен $P(x, y, z)$ и переставим в нём переменные x и y. При этом получится, вообще говоря, другой многочлен $Q(x, y, z)$. Но если сделать перестановку любых двух переменных в многочлене $Q(x, y, z)$, то по условию снова получится многочлен $P(x, y, z)$ (ибо две выполненные одна за другой перестановки двух переменных равносильны чётной перестановке переменных x, y, z, а при чётной перестановке многочлен $P(x, y, z)$ не меняется). С другой стороны, при перестановке в многочлене $P(x, y, z)$ любых других двух переменных получится тот же самый многочлен $Q(x, y, z)$, что и при перестановке переменных x и y (докажите!).

Итак, любая перестановка двух переменных превращает многочлен P в Q, а многочлен Q — в P. Но тогда многочлен

$$F(x, y, z) = P(x, y, z) + Q(x, y, z)$$

не меняется ни при какой перестановке двух переменных (лишь меняются местами слагаемые). Поэтому он симметричен. Многочлен же

$$H(x, y, z) = P(x, y, z) - Q(x, y, z)$$

антисимметричен. Но ясно, что

$$P(x, y, z) = \frac{1}{2}F(x, y, z) + \frac{1}{2}H(x, y, z).$$

Тем самым доказано, что любой чётно-симметрический многочлен $P(x, y, z)$ является суммой симметрического и антисимметрического многочленов.

Поскольку мы знаем строение и симметрических и антисимметрических многочленов, получаем следующий результат:

Любой чётно-симметрический многочлен от трёх переменных x, y, z может быть представлен в виде некоторого многочлена от многочленов σ_1, σ_2, σ_3 и $T = (x-y)(x-z)(y-z)$. При этом многочлен T входит в выражение не более чем в первой степени, так как многочлен $T^2 = \Delta$ является симметрическим и потому может быть выражен через σ_1, σ_2, σ_3.

Заметим, что всё сказанное справедливо и для многочленов от двух переменных x, y. В этом случае существует только две перестановки:

$$\begin{matrix} x\ y \\ \downarrow\ \downarrow \\ y\ x \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x\ y \\ \downarrow\ \downarrow \\ x\ y, \end{matrix}$$

первая из которых (переставляющая местами x и y) нечётна, а вторая (тождественная) чётна. Так как чётной является лишь *тождественная* перестановка, то чётно-симметрическим будет многочлен, не меняющийся при тождественной перестановке. Иными словами, *любой* многочлен от двух переменных следует считать чётно-симметрическим. Сформулированная выше теорема, таким образом, приобретает в случае двух переменных следующий вид:

Любой многочлен $P(x, y)$ от двух переменных x, y является суммой симметрического и антисимметрического многочленов.

Иными словами,

$$P(x, y) = f(x, y) + (x - y)g(x, y),$$

где f и g — симметрические многочлены. Доказательство проводится так же, как и для случая трёх переменных.

§ 6. ПРИМЕНЕНИЯ К ЭЛЕМЕНТАРНОЙ АЛГЕБРЕ. III

32. Разложение на множители. Доказанная в п. 27 основная теорема об антисимметрических многочленах позволяет значительно упростить решение целого ряда задач элементарной алгебры. Так как любой антисимметрический многочлен от трёх переменных x, y, z делится на многочлен

$$T(x, y, z) = (x - y)(x - z)(y - z),$$

то мы сразу же получаем возможность разложить любой антисимметрический многочлен $f(x, y, z)$ на множители:

$$f(x, y, z) = T(x, y, z) \cdot g(x, y, z), \qquad (*)$$

где $g(x, y, z)$ — симметрический многочлен. В свою очередь, симметрический многочлен $g(x, y, z)$ также иногда может быть разложен на множители (см. п. 22). Заметим, что для отыскания частного

$$g(x, y, z) = \frac{f(x, y, z)}{T(x, y, z)}$$

н е ц е л е с о о б р а з н о производить деление («в столбик») антисимметрического многочлена $f(x, y, z)$ на кубический многочлен $T(x, y, z)$. Более удобным (когда степень многочлена $f(x, y, z)$ не слишком высока) является *метод частных значений.*

Именно, если антисимметрический многочлен $f(x, y, z)$ имеет т р е т ь ю степень, то частное

$$\frac{f(x, y, z)}{T(x, y, z)} \qquad (**)$$

является многочленом н у л е в о й степени, т. е. числом:

$$f(x, y, z) = k \cdot T(x, y, z).$$

Это соотношение является т о ж д е с т в о м, т. е. справедливо при любых значениях x, y, z. Поэтому для определения числа k достаточно в последнем равенстве придать x, y, z какие-либо (попарно различные) числовые значения; отсюда и определится число k.

Если антисимметрический многочлен $f(x, y, z)$ является однородным многочленом четвёртой степени, то частное (**) является однородным симметрическим многочленом первой степени, т. е. имеет вид $k\sigma_1$:

$$f(x, y, z) = T(x, y, z) \cdot k\sigma_1$$

(k — число). И здесь для определения неизвестного коэффициента k достаточно придать x, y, z какие-либо числовые значения.

Аналогично, если $f(x, y, z)$ — однородный антисимметрический многочлен пятой степени, то частное (**) является однородным симметрическим многочленом второй степени, т. е. имеет вид $k\sigma_1^2 + l\sigma_2$, где k и l — неизвестные коэффициенты:

$$f(x, y, z) = T(x, y, z) \cdot (k\sigma_1^2 + l\sigma_2).$$

Для нахождения двух неизвестных коэффициентов k, l мы должны дважды придать x, y, z некоторые числовые значения.

Если $f(x, y, z)$ — однородный антисимметрический многочлен шестой степени, то

$$f(x, y, z) = T(x, y, z) \cdot (k\sigma_1^3 + l\sigma_1\sigma_2 + m\sigma_3),$$

и т. д.

Рассмотрим примеры.

1°. Разложить на множители многочлен

$$f(x, y, z) = (x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3.$$

Ясно, что этот многочлен — антисимметрический. Так как, кроме того, он имеет третью степень, то $f(x, y, z) = k \cdot T(x, y, z)$. Чтобы найти коэффициент k, положим $x=0$, $y=1$, $z=2$. Мы получим $6 = -2k$, и потому $k=-3$. Таким образом,

$$(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = -3(x-y)(x-z)(y-z) = 3(x-y)(y-z)(z-x).$$

2°. Разложить на множители многочлен

$$f(x, y, z) = yz(y^2-z^2) + xz(z^2-x^2) + xy(x^2-y^2).$$

Согласно сказанному выше, мы имеем:

$$f(x, y, z) = T(x, y, z) \cdot k\sigma_1,$$

т. е.

$$yz(y^2-z^2) + xz(z^2-x^2) + xy(x^2-y^2) = k(x+y+z)(x-y)(x-z)(y-z).$$

Чтобы найти коэффициент k, положим $x=0$, $y=1$, $z=2$. Мы получим, что $k=1$, и потому

$$yz(y^2-z^2)+xz(z^2-x^2)+xy(x^2-y^2)=(x+y+z)(x-y)(x-z)(y-z).$$

3°. Разложить на множители многочлен

$$f(x,y,z)=x^3(y^2-z^2)+y^3(z^2-x^2)+z^3(x^2-y^2).$$

Этот антисимметрический многочлен имеет *пятую* степень, и потому

$$f(x,y,z)=T(x,y,z)\cdot(k\sigma_1^2+l\sigma_2).$$

Положим в этом тождестве сначала $x=-1$, $y=0$, $z=1$. Тогда $\sigma_1=0$, $\sigma_2=-1$, $f(x,y,z)=2$, $T(x,y,z)=-2$, и потому $2=-2\cdot(-l)$, откуда $l=1$. Точно так же, полагая $x=0$, $y=1$, $z=2$, находим $-4=-2(9k+2l)$. Так как $l=1$, то отсюда получаем $k=0$. Таким образом,

$$f(x,y,z)=x^3(y^2-z^2)+y^3(z^2-x^2)+z^3(x^2-y^2)=$$
$$=(x-y)(x-z)(y-z)(xy+xz+yz).$$

УПРАЖНЕНИЯ

Разложить на множители следующие антисимметрические многочлены:

1) $x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)$;

2) $(b-c)(a-b+c)(a+b-c)+(c-a)(a+b-c)\times$
$\times(-a+b+c)+(a-b)(-a+b+c)(a-b+c)$;

3) $(b-c)(b+c)^2+(c-a)(c+a)^2+(a-b)(a+b)^2$;

4) $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$;

5) $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$;

6) $x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)$;

7) $x(y+z)(y^2-z^2)+y(z+x)(z^2-x^2)+z(x+y)(x^2-y^2)$;

8) $(b-c)(b+c)^3+(c-a)(c+a)^3+(a-b)(a+b)^3$;

9) $(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5$;

10) $(b-c)(b+c)^4+(c-a)(c+a)^4+(a-b)(a+b)^4$;

11) $a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)$;

12) $a^2(a+b)(a+c)(b-c)+b^2(b+c)(b+a)(c-a)+c^2(c+a)(c+b)(a-b)$;

13) $x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)$;

14) $a^2(b-c)(c+a-b)(a+b-c)+b^2(c-a)(a+b-c)\times$
$\times(b+c-a)+c^2(a-b)(b+c-a)(c+a-b)$.

15) Доказать, что при любых натуральных q и r многочлен

$$x^qy^r+y^qz^r+z^qx^r-x^ry^q-y^rz^q-z^rx^q$$

делится на $(x-y)(x-z)(y-z)$.

16) Доказать, что при любых натуральных p, q, r многочлен

$$x^p y^q z^r + y^p z^q x^r + z^p x^q y^r - x^r y^q z^p - y^r z^q x^p - z^r x^q y^p$$

делится на $(x-y)(x-z)(y-z)$.

17) Доказать, что если попарно различные числа x, y, z удовлетворяют соотношению

$$(y-z)\sqrt[3]{1-x^3} + (z-x)\sqrt[3]{1-y^3} + (x-y)\sqrt[3]{1-z^3} = 0,$$

то

$$(1-x^3)(1-y^3)(1-z^3) = (1-xyz)^3.$$

33. Доказательство тождеств и упрощение алгебраических выражений. Приёмы разложения на множители, рассмотренные в предыдущем пункте, удобно применять также и при решении некоторых других алгебраических задач. Например, эти приёмы с успехом применяются для доказательства тождеств, в левой и правой части которых состоят антисимметрические многочлены. Точно так же, если в числителе и знаменателе дроби стоят антисимметрические многочлены от трёх переменных, то дробь заведомо может быть сокращена на $T(x, y, z)$. Рассмотрим примеры.

1°. Доказать тождество

$$a^4(b^2-c^2) + b^4(c^2-a^2) + c^4(a^2-b^2) = \\ = (a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b))(a+b)(b+c)(c+a).$$

В обеих частях стоят антисимметрические многочлены шестой степени. Левую часть можно представить в виде

$$a^4(b^2-c^2) + b^4(c^2-a^2) + c^4(a^2-b^2) = T(a, b, c)\cdot(k\sigma_1^3 + l\sigma_1\sigma_2 + m\sigma_3),$$

где $T(a, b, c) = (a-b)(a-c)(b-c)$, а k, l, m — неизвестные коэффициенты. Полагая $a=-1$, $b=-2$, $c=3$, мы найдём из написанного равенства $-120 = 20\cdot 6m$, откуда $m=-1$. Далее, полагая $a=1$, $b=2$, $c=-\frac{2}{3}$ (эти значения взяты так, чтобы было $\sigma_2=0$), получим $-\frac{160}{27} = -\frac{40}{9}\cdot\left(\frac{343}{27}k - \frac{4}{3}m\right)$, откуда, учитывая найденное значение $m=-1$, имеем $k=0$. Наконец, полагая $a=0$, $b=1$, $c=2$, легко найдём последний неизвестный коэффициент: $l=1$. Итак, левая часть имеет вид

$$T(a, b, c)\cdot(\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3).$$

Обратимся теперь к правой части доказываемого тождества. Выражение $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$ представляет собой антисимметрический многочлен третьей степени, и потому оно равно $p\cdot T(a, b, c)$, где p — некоторый коэффициент. Придавая величинам a, b, c какие-либо значения (например, $a=0$, $b=1$, $c=2$), легко найдём, что $p=1$. Таким образом, это выражение равно $T(a, b, c)$. Для доказательства тождества остаётся установить, что второй множитель в правой части равен $\sigma_1\sigma_2-\sigma_3$, т. е.

$$(a+b)(b+c)(c+a)=\sigma_1\sigma_2-\sigma_3.$$

Это уже не составляет труда (см. пример 1° на стр. 65).

2°. Упростить выражение

$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}.$$

Приводя к одному знаменателю, получаем:

$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}=$$
$$=\frac{(a-b)(b+c)(c+a)+(b-c)(a+b)(c+a)+(c-a)(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Числитель правой части является антисимметрическим многочленом третьей степени и потому пропорционален многочлену $T(a, b, c)=$ $=(a-b)(a-c)(b-c)$, т. е.

$$(a-b)(b+c)(c+a)+(b-c)(a+b)(c+a)+$$
$$+(c-a)(a+b)(b+c)=k(a-b)(a-c)(b-c).$$

Как и выше, находим, что $k=1$, а потому

$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}=\frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1) Доказать, что при $a+b+c=0$ справедливо следующее тождество:

$$\left(\frac{a^2}{b-c}+\frac{b^2}{c-a}+\frac{c^2}{a-b}\right)\left(\frac{b-c}{a^2}+\frac{c-a}{b^2}+\frac{a-b}{c^2}\right)=4abc\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^3.$$

Упростить следующие выражения:

2) $\dfrac{b-c}{b+c}+\dfrac{c-a}{c+a}+\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{(b-c)(c-a)(a-b)}{(b+c)(c+a)(a+b)}$;

3) $\dfrac{x^3(y^2-z^2)+y^3(z^2-x^2)+z^3(x^2-y^2)}{x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)}$;

4) $\dfrac{(a^2-b^2)^3+(b^2-c^2)^3+(c^2-a^2)^3}{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3}$;

5) $\dfrac{x^4(y-z)+y^4(z-x)+z^4(x-y)}{(y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2}$;

6) $\dfrac{x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)}{x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)}$;

7) $\dfrac{x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)}{x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)}$;

8) $\dfrac{1}{a(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{b(b-a)(b-c)}+\dfrac{1}{c(c-a)(c-b)}$;

9) $\dfrac{1}{a^2(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{b^2(b-a)(b-c)}+\dfrac{1}{c^2(c-a)(c-b)}$;

10) $\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^3}{(c-a)(c-b)}$;

11) $\dfrac{a^4}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^4}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^4}{(c-a)(c-b)}$;

12) $\dfrac{a^2(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2(b+c)(b+a)}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)}$;

13) $\dfrac{\dfrac{b^2-c^2}{a}+\dfrac{c^2-a^2}{b}+\dfrac{a^2-b^2}{c}}{\dfrac{b-c}{a}+\dfrac{c-a}{b}+\dfrac{a-b}{c}}$.

14) Вычислить значение выражения

$$\left(\frac{y-z}{x}+\frac{z-x}{y}+\frac{x-y}{z}\right)\left(\frac{x}{y-z}+\frac{y}{z-x}+\frac{z}{x-y}\right),$$

если известно, что $x+y+z=0$.

15) Решить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} yz(y^2-z^2)+xz(z^2-x^2)+xy(x^2-y^2)=-12; \\ x^3(y^2-z^2)+y^3(z^2-x^2)+z^3(x^2-y^2)=-22; \\ (x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=6. \end{cases}$$

34. Разложение симметрических многочленов от трёх переменных на множители. И в случае трёх переменных симметрия многочлена значительно облегчает отыскание его разложения на множители. Как и в случае двух переменных (см. п. 12), в это разложение могут входить симметричные и несимметричные множители. При этом, если в разложение входит несимметричный множитель $h(x, y, z)$, то, в силу симметрии разлагаемого многочлена, должны входить и все множители, получаемые из $h(x, y, z)$ перестановкой переменных x, y, z.

Как мы уже знаем (см. п. 30), переменные x, y, z можно переставлять шестью различными способами. Поэтому, вообще говоря, вместе с несимметричным множителем $h(x, y, z)$ должны входить ещё пять множителей. Однако, если сам множитель $h(x, y, z)$ имеет частичную симметрию, то число добавочных множителей уменьшается.

Так, если множитель $h(x, y, z)$ симметричен относительно x и y, т. е. удовлетворяет условию

$$h(x, y, z) = h(y, x, z),$$

то при перестановках переменных x, y, z получатся ещё два отличающихся от него множителя $h(y, z, x)$ и $h(z, x, y)$. (Они получаются с помощью циклических перестановок.) Если же многочлен $h(x, y, z)$ чётно-симметричен, т. е. обладает тем свойством, что

$$h(x, y, z) = h(y, z, x) = h(z, x, y)$$

(см. п. 31), то в разложении с ним связан лишь один множитель $h(y, x, z)$.

Итак, в разложение на множители симметрического многочлена $f(x, y, z)$ могут входить следующие виды сомножителей:

1) симметричные множители $h(x, y, z)$;

2) произведения вида $h(x, y, z) \cdot h(y, x, z)$, где $h(x, y, z)$ — многочлен, не меняющийся при чётных перестановках;

3) произведения вида

$$h(x, y, z) \cdot h(y, z, x) \cdot h(z, x, y),$$

где $h(x, y, z)$ — многочлен, симметричный относительно x и y;

4) произведения вида

$$h(x, y, z) \cdot h(y, x, z) \cdot h(x, z, y) \cdot h(z, x, y) \cdot h(y, z, x) \cdot h(z, y, x),$$

где $h(x, y, z)$ — многочлен, не обладающий симметрией.

Покажем теперь, как сделанные замечания позволяют разлагать симметрические многочлены на множители. Разложение на симметричные множители было уже рассмотрено в п. 22. После того как многочлен разложен на симметричные множители, надо разлагать далее (пользуясь сделанными замечаниями) сами эти множители. Рассмотрим пример.

1°. Разложить на множители многочлен

$$f(x, y, z) = 2x^3 + 2y^3 + 2z^3 + 7x^2y + 7xy^2 + 7x^2z + 7xz^2 + 7y^2z + 7yz^2 + 16xyz.$$

Переход к элементарным симметрическим многочленам $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ здесь ничего не даёт. В самом деле, с помощью табл. 2 и 3 на стр. 47 и 51 легко находим:

$$f(x, y, z) = 2\sigma_1^3 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_3,$$

а этот многочлен на множители не разлагается.

Таким образом, рассматриваемый многочлен не имеет симметричных множителей. Поэтому надо искать разложение на несимметричные множители. Поскольку степень нашего многочлена равна трём, то он может разлагаться лишь в произведение трёх множителей первой степени, не имеющих свободного члена, причём эти множители должны быть симметричными относительно двух переменных (в противном случае мы получили бы не три, а шесть множителей и степень многочлена равнялась бы шести). Но многочлен первой степени от x, y, z, симметричный относительно x и y, должен иметь вид $ax+ay+bz$. Поэтому искомое разложение надо искать в следующем виде:

$$2x^3+2y^3+2z^3+7x^2y+7xy^2+7x^2z+7xz^2+7y^2z+7yz^2+16xyz = \\ =(ax+ay+bz)(ax+by+az)(bx+ay+az). \quad (*)$$

Нам осталось найти коэффициенты a и b. Для этого сначала положим в предполагаемом равенстве (*) $x=1$, $y=1$, $z=1$. Мы получим $64=(2a+b)^3$, откуда $2a+b=4$. Далее, полагая $x=y=1$, $z=-1$, находим:

$$(2a-b)b^2=0.$$

Наконец, при $x=1$, $y=z=0$ получаем соотношение $a^2b=2$. Отсюда ясно, что $b\neq 0$. Следовательно, из соотношения $(2a-b)b^2=0$ мы находим $2a-b=0$. Таким образом, для нахождения коэффициентов a и b мы имеем два соотношения:

$$\begin{cases} 2a+b=4, \\ 2a-b=0, \end{cases}$$

из которых легко находим $a=1$, $b=2$.

Теперь предполагаемое равенство (*) принимает вид

$$2x^3+2y^3+2z^3+7x^2y+7xy^2+7x^2z+7xz^2+7y^2z+7yz^2+16xyz = \\ =(x+y+2z)(x+2y+z)(2x+y+z).$$

Раскрывая скобки в правой части, убеждаемся в справедливости полученного разложения.

В следующих двух примерах рассматривается вопрос о невозможности разложения на множители.

2°. Доказать, что многочлен

$$x^4+y^4+z^4+3x^2y^2+3x^2z^2+3y^2z^2+8x^2yz+8xy^2z+8xyz^2$$

не разлагается на множители.

Так как заданный многочлен имеет четвёртую степень, то он не может разлагаться ни на три, ни на шесть множителей одинаковых степеней. Поэтому, если он и разлагается на множители, то либо среди этих множителей есть симметричные, либо эти множители являются многочленами второй степени, не меняющимися при циклических перестановках переменных. Однако во втором случае множители также должны быть симметричными, так как легко показать, что многочлен второй степени, не меняющийся при циклических перестановках переменных, является симметрическим.

Итак, нам осталось доказать, что многочлен $f(x, y, z)$ не имеет симметричных множителей. Для этого выразим его через элементарные симметрические многочлены:

$$f(x, y, z) = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 6\sigma_1\sigma_3 + 5\sigma_2^2.$$

Легко видеть, что полученный многочлен от σ_1, σ_2, σ_3 не разлагается на множители (хотя бы потому, что σ_3 имеется только в о д н о м члене), и потому заданный многочлен $f(x, y, z)$ не имеет и симметричных множителей.

3°. Доказать, что многочлен

$$x^3 + y^3 + z^3 - nxyz$$

разлагается на действительные множители лишь при $n = 3$.

Сначала будем искать симметричные множители. Мы имеем:

$$x^3 + y^3 + z^3 - nxyz = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + (3 - n)\sigma_3.$$

Но многочлен $\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + (3 - n)\sigma_3$ разлагается на множители, лишь если $3 - n = 0$, т. е. при $n = 3$.

Нам осталось показать, что многочлен $x^3 + y^3 + z^3 - nxyz$ нельзя разложить и в произведение трёх множителей первой степени. Так как эти множители должны быть симметричными относительно двух переменных, то искомое разложение должно было бы иметь вид

$$x^3 + y^3 + z^3 - nxyz = (ax + ay + bz)(ax + by + az)(bx + ay + az).$$

Сравнивая коэффициенты при x^2y, находим, что $a^3 + a^2b + ab^2 = 0$. Так как $a \neq 0$ (ибо, сравнивая коэффициенты при x^3, находим $a^2b = 1$), получаем отсюда $a^2 + ab + b^2 = 0$. Ясно, что это уравнение не имеет действительных ненулевых решений, и потому многочлен $x^3 + y^3 + z^3 - nxyz$ не разлагается на множители первой степени с действительными коэффициентами.

УПРАЖНЕНИЯ

1) Разложить на множители многочлен $(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$.

2) Разложить на множители многочлен $(x+y+z)^5 - x^5 - y^5 - z^5$.

3) Упростить выражение

$$\frac{bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{ac}{(b+c)(b+a)} + \frac{ab}{(c+a)(c+b)} + \frac{2abc}{(b+c)(c+a)(a+b)}.$$

4) Доказать, что если действительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = 1,$$

то из трёх дробей, стоящих в левой части этого соотношения, две равны $+1$, а третья равна -1.

5) Доказать, что если действительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = 1,$$

то

$$\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^{2n+1} + \left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)^{2n+1} + \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^{2n+1} = 1$$

для любого натурального n.

§ 7. СИММЕТРИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ ОТ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

35. Элементарные симметрические многочлены от нескольких переменных. Перейдём теперь к изучению симметрических многочленов от любого числа переменных. Основные их свойства видны уже на разобранных выше частных случаях симметрических многочленов от двух и трёх переменных. Но некоторые усложнения при переходе к большему числу переменных всё же возникают.

Определение симметрических многочленов в случае нескольких переменных формулируется точно так же, как и в случае трёх переменных: многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется *симметрическим*, если он не меняется при перестановке любых двух переменных. Можно это определение сформулировать и по-другому (ср. стр. 91): многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется симметрическим, если он не меняется ни при какой перестановке переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Иными словами,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}),$$

где $i_1, i_2, \ldots, i_n$ — это те же числа 1, 2, ..., n, но расположенные в любом другом порядке.

Большинство понятий, введённых в случае симметрических многочленов от двух и трёх переменных, таким же точно образом определяется и в общем случае. Например, степенной суммой степени k от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, называют выражение

$$s_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k.$$

Далее, *орбитой* одночлена $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ называют сумму всех одночленов, получаемых из $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ перестановками переменных. Например, в случае $n = 4$, т. е. в случае четырёх переменных x_1, x_2, x_3, x_4 имеем:

$$O(x_1^2 x_2^3) = x_1^2 x_2^3 + x_1^2 x_3^3 + x_1^2 x_4^3 + x_2^2 x_1^3 + x_2^2 x_3^3 + \\ + x_2^2 x_4^3 + x_3^2 x_1^3 + x_3^2 x_2^3 + x_3^2 x_4^3 + x_4^2 x_1^3 + x_4^2 x_2^3 + x_4^2 x_3^3.$$

В частности,

$$s_k = O(x_1^k).$$

Для дальнейшего полезно следующее замечание: чтобы получить орбиту одночлена $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots, x_n^{\alpha_n}$, можно переставлять не буквы $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а показатели $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Конечно, при этом в записи одночлена $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ надо указать и не входящие в него буквы (с нулевыми показателями). Например, в случае многочленов от четырёх переменных одночлен $x_1^2 x_2^3$, орбиту которого мы выше выписывали, следует записать в виде $x_1^2 x_3^2 x_3^0 x_4^0$ и затем уже производить всевозможные перестановки показателей.

Кроме того, отметим, что орбита одночлена порождается л ю б ы м из входящих в неё одночленов:

$$O(x_1^4 x_2^2 x_3^0) = O(x_1^0 x_2^4 x_3^2) = O(x_1^2 x_2^0 x_3^4) \quad \text{и т. д.}$$

Несколько сложнее определяются элементарные симметрические многочлены. Чтобы ввести соответствующее определение, вспомним, как определялись эти многочлены в случае трёх переменных. Мы имели в этом случае три многочлена:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= x_1 + x_2 + x_3, \\ \sigma_2 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3, \\ \sigma_3 &= x_1 x_2 x_3. \end{aligned}$$

Первый из них является суммой всех переменных x_1, x_2, x_3, т. е. орбитой одночлена x_1:

$$\sigma_1 = O(x_1).$$

Второй многочлен получается из одночлена x_1x_2 путём всевозможных перестановок переменных и суммирования полученных результатов. Иными словами, он является орбитой одночлена x_1x_2:

$$\sigma_2 = O(x_1x_2).$$

Наконец, σ_3 является орбитой одночлена $x_1x_2x_3$ (в данном случае эта орбита состоит из одного слагаемого).

По аналогии положим для случая нескольких переменных:

$$\begin{aligned} &\sigma_1 = O(x_1), \\ &\sigma_2 = O(x_1x_2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\sigma_k = O(x_1x_2\ldots x_k), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\sigma_n = O(x_1x_2\ldots x_n). \end{aligned}$$

Из этой записи видно, что число элементарных симметрических многочленов равно числу переменных.

В развёрнутом виде многочлены $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ выглядят следующим образом. Первый из них есть просто сумма всех n переменных:

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

Второй многочлен σ_2 есть сумма всех произведений переменных, взятых по два (при этом в произведениях сомножители располагаются в порядке возрастания значков). Таким образом,

$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3 + \ldots + x_2x_n + \ldots + x_{n-1}x_n,$$

или, короче

$$\sigma_2 = \sum_{\substack{i,\, j=1 \\ i<j}}^{n} x_ix_j$$

(знак $\sum$ обозначает сумму; внизу указано, что i и j меняются от 1 до n, причём в каждом произведении).

Точно так же третий многочлен σ_3 получается, если перемножить переменные по три (так, чтобы в каждом произведении значки увеличивались) и сложить получившиеся произведения. Таким образом,

$$\sigma_3 = \sum_{\substack{i,j,l=1 \\ i<j<l}}^{n} x_ix_jx_l.$$

Вообще k-й многочлен имеет вид

$$\sigma_k = \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1 \\ i_1 < i_2 < \ldots < i_k}}^{n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}.$$

Наконец, последний многочлен равен произведению всех переменных:

$$\sigma_n = x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Ясно, что k-й многочлен σ_k является однородным и имеет степень k относительно переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Пример. Если $n = 4$, то простейшие симметрические многочлены имеют вид

$$\begin{aligned}
&\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \\
&\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4, \\
&\sigma_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4, \\
&\sigma_4 = x_1x_2x_3x_4.
\end{aligned}$$

Для читателей, знакомых с комбинаторикой, укажем, что число слагаемых в элементарном симметрическом многочлене степени k от n переменных равно числу сочетаний из n по k, т. е. равно

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

36. Основная теорема о симметрических многочленах от нескольких переменных. Точно так же как и в случае двух и трёх переменных, любой симметрический многочлен от n переменных можно представить в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$. Точнее говоря, имеет место следующее утверждение.

Теорема. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — симметрический многочлен от n переменных. Тогда существует такой многочлен $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, что если подставить в него вместо $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ их выражения через $x_1, x_2, \ldots, x_n$, т. е.

$$\begin{aligned}
&\sigma_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\sigma_n = x_1 x_2 \ldots x_n,
\end{aligned}$$

то получится многочлен, тождественно равный $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Многочлен $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, обладающий указанным свойством, существует только один.

Эта теорема доказывается примерно так же, как и в случае многочленов от трёх переменных, но с некоторыми усложнениями, вызванными увеличением числа переменных.

Именно, сначала доказывают, что любая степенная сумма может быть выражена через элементарные симметрические многочлены. После этого доказывают, что орбита любого одночлена, содержащего k переменных, выражается через орбиты одночленов от меньшего числа переменных и, в конце концов, — через степенные суммы. Наконец, любой симметрический многочлен от n переменных разлагают на орбиты одночленов. Однако при проведении такого доказательства неудобно использовать те орбиты, которые были определены выше, а следует применять полные орбиты (ср. мелкий шрифт на стр. 50). Именно, если в одночлене $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}$ все показатели $k_1, k_2, \ldots, k_n$ различны, то орбита $O(x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n})$ содержит $n!$ членов, получающихся из рассмотренного одночлена всевозможными перестановками переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. (Как известно, существует $n!$ перестановок из n предметов $x_1, x_2, \ldots, x_n$.) Выпишем это выражение орбиты $O(x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n})$ и назовём его *полной орбитой* одночлена $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}$. Полную орбиту $O_\Pi(x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n})$ мы будем рассматривать не только в случае различных показателей $k_1, k_2, \ldots, k_n$ (когда она совпадает с обычной орбитой), но и в случае любых показателей. В любом случае полная орбита $O_\Pi(x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n})$ отличается от обычной орбиты $O(x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n})$ лишь числовым множителем, который легко найти, зная, что при любых показателях $k_1, k_2, \ldots, k_n$ сумма коэффициентов в полной орбите равна $n!$. Именно, если среди показателей $k_1, k_2, \ldots, k_n$ имеется n_1 совпадающих между собой, затем n_2 совпадающих показателей, отличных от первых, и т. д., вплоть до последней группы n_l равных между собой показателей, то

$$O_\Pi(x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n}) = n_1!n_2!\ldots n_l!O(x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n}).$$

Мы не будем давать детального доказательства теоремы — проведение такого доказательства по схеме, данной в случае трёх переменных, будет хорошим упражнением для читателя. Для контроля укажем те основные формулы, которые используются в этом доказательстве:

$$s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2} + \sigma_3 s_{k-3} - \ldots + (-1)^{k-1}k\sigma_k \qquad (13)$$

(в этой формуле слагаемые $(-1)^{i-1}s_{k-i}\sigma_i$, у которых $i > n$, считаются равными нулю),

$$O_\Pi(x_1^k x_2^l) = (n-2)!\,(s_k s_l - s_{k+l}),$$
$$(n-2)\,O_\Pi(x_1^k x_2^l x_3^m) = O_\Pi(x_1^k x_2^l)\,s_m - O_\Pi(x_1^{k+m} x_2^l) - O_\Pi(x_1^k x_2^{l+m})$$

и т. д.

Вообще, для любых показателей $k_1, \ldots, k_{r+1}$ справедливо соотношение

$$(n-r)\,O_\Pi(x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_r^{k_r} x_{r+1}^{k_{r+1}} = O_\Pi(x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_r^{k_r})\,s_{k_{r+1}} -$$
$$- O_\Pi(x_1^{k_1+k_{r+1}} x_2^{k_2} \ldots x_r^{k_r}) - O_\Pi(x_1^{k_1} x_2^{k_2+k_{r+1}} \ldots x_r^{k_r}) - \ldots - O_\Pi(x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_r^{k_r+k_{r+1}}).$$

Ниже, в п. 41, мы наметим иное доказательство основной теоремы.

37. Выражение степенных сумм через элементарные симметрические многочлены. Формула (13) даёт возможность последовательно, одну за другой, вычислять степенные суммы s_k точно так же, как и в случае многочленов от двух или трёх переменных. Формула эта справедлива для любого числа переменных; надо только помнить, что если рассматриваются многочлены от n переменных, то в формуле (13) должны быть вычеркнуты все члены, содержащие выражения σ_i с индексами i, большими чем n. Благодаря такому соглашению мы можем последовательно вычислять степенные суммы s_k, и получающиеся формулы годятся для многочленов от любого числа переменных. Именно, выпишем соотношение (13) для значений $k = 1, 2, \ldots$:

$$s_1 = 1 \cdot \sigma_1;$$
$$s_2 = \sigma_1 s_1 - 2\sigma_2;$$
$$s_3 = \sigma_1 s_2 - \sigma_2 s_1 + 3\sigma_3;$$
$$s_4 = \sigma_1 s_3 - \sigma_2 s_2 + \sigma_3 s_1 - 4\sigma_4;$$
$$s_5 = \sigma_1 s_4 - \sigma_2 s_3 + \sigma_3 s_2 - \sigma_4 s_1 + 5\sigma_5;$$
$$s_6 = \sigma_1 s_5 - \sigma_2 s_4 + \sigma_3 s_3 - \sigma_4 s_2 + \sigma_5 s_1 - 6\sigma_6;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Из этих формул мы последовательно находим значения степенных сумм:

$$s_1 = \sigma_1;$$
$$s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2;$$
$$s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3;$$

$$s_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3-4\sigma_4;$$
$$s_5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2+5\sigma_1^2\sigma_3-5\sigma_2\sigma_3-5\sigma_1\sigma_4+5\sigma_5;$$
$$s_6=\sigma_1^6-6\sigma_1^4\sigma_2+9\sigma_1^2\sigma_2^2-2\sigma_2^3+6\sigma_1^3\sigma_3-12\sigma_1\sigma_2\sigma_3+ \\ +3\sigma_3^2-6\sigma_1^2\sigma_4+6\sigma_2\sigma_4+6\sigma_1\sigma_5-6\sigma_6;$$
. . . .

Как и формула (13), эти выражения степенных сумм справедливы для любого числа переменных; надо только помнить, что если рассматриваются многочлены от n переменных, то в этих соотношениях должны быть вычеркнуты все члены, содержащие обозначения σ_i с индексами i, бóльшими чем n. Например, если в этих формулах вычеркнуть все члены, содержащие σ_4, σ_5, σ_6, . . ., то мы получим выражения степенных сумм от т р ё х переменных, т. е. получим формулы, приведённые в табл. 2 на стр. 47. Если же мы вычеркнем ещё и члены, содержащие σ_3, то получим выражения степенных сумм от д в у х переменных, т. е. формулы, собранные в табл. 1 на стр. 12.

Далее, для ч е т ы р ё х переменных x_1, x_2, x_3, x_4 мы имеем формулы:

$$s_1=\sigma_1;$$
$$s_2=\sigma_1^2-2\sigma_2;$$
$$s_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3;$$
$$s_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3-4\sigma_4;$$
$$s_5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2+5\sigma_1^2\sigma_3-5\sigma_2\sigma_3-5\sigma_1\sigma_4;$$
$$s_6=\sigma_1^6-6\sigma_1^4\sigma_2+9\sigma_1^2\sigma_2^2-2\sigma_2^3+6\sigma_1^3\sigma_3-12\sigma_1\sigma_2\sigma_3+3\sigma_3^2-6\sigma_1^2\sigma_4+6\sigma_2\sigma_4;$$
. . . .

(они получаются из написанных выше общих формул, если в них вычеркнуть члены, содержащие σ_5, σ_6, . . .).

Формула Варинга также может быть написана для выражения степенных сумм от любого числа переменных.

Она имеет вид

$$\frac{1}{k}s_k=\sum(-1)^{k-\lambda_1-\lambda_2-\ldots-\lambda_k}\frac{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_k-1)!}{\lambda_1!\lambda_2!\ldots\lambda_k!}\sigma_1^{\lambda_1}\sigma_2^{\lambda_2}\ldots\sigma_k^{\lambda_k};$$

суммирование здесь распространено на все наборы неотрицательных целых чисел, удовлетворяющие условию

$$\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+k\lambda_k=k,$$

а символу 0!, если он встречается, приписывается значение 1. Доказательство формулы Варинга проводится методом математической индукции на основании соотношения (13).

УПРАЖНЕНИЯ

1) Произвести умножение:

$$(a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2-ab-ac-ad-bc-bd-cd).$$

2) Доказать, что если $a+b+c+d=0$, то справедливо тождество

$$(a^3+b^3+c^3+d^3)^2=9(bcd+acd+abd+abc)^2.$$

3) Доказать, что если $a+b+c+d=0$, то справедливо тождество

$$a^4+b^4+c^4+d^4=2(ab-cd)^2+2(ac-bd)^2+2(ad-bc)^2+4abcd.$$

4) Выразить симметрический многочлен от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\sum_{i<j}(x_i-x_j)^2=(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+\ldots+(x_{n-1}-x_n)^2$$

через элементарные симметрические многочлены.

5) Доказать, что для симметрических многочленов от n переменных справедливо (при действительных значениях переменных) неравенство

$$(n-1)\sigma_1^2\geqslant 2n\sigma_2.$$

6) Доказать неравенство

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\geqslant\frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2.$$

7) Доказать, что для положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ справедливо неравенство

$$\sum_{i<j}\sqrt{a_ia_j}\leqslant\frac{n-1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i.$$

8) Доказать, что если $a_1+a_2+\ldots+a_n=0$, то справедливо неравенство

$$\sum_{i<j}^{n}a_ia_j\leqslant 0.$$

9) Разложить на множители многочлен

$$x^3+y^3+z^3+t^3-3xyz-3xyt-3xzt-3yzt.$$

10) Доказать, что при любом натуральном n многочлен

$$(x+y+z)^{2n+1}-x^{2n+1}-y^{2n+1}-z^{2n+1}$$

делится на $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$.

11) Решить уравнение

$$(x+b+c)(x+a+c)(x+a+b)(a+b+c)-abcx=0.$$

12) Доказать, что для любых положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ справедливо неравенство $\sigma_1\sigma_{n-1} \geqslant n^2\sigma_n$.

13) Доказать, что для любых положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ справедливо неравенство

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_1 - x_1} + \frac{\sigma_1}{\sigma_1 - x_2} + \ldots + \frac{\sigma_1}{\sigma_1 - x_n} \geqslant \frac{n^2}{n-1}.$$

14) Доказать, что для любых положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ справедливо неравенство

$$\sigma_k\sigma_{n-k} \geqslant (C_n^k)^2\sigma_n,$$

где $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

38. Элементарные симметрические многочлены от *n* переменных и алгебраические уравнения *n*-й степени. Формулы Виета. Мы видели в пп. 7 и 21, что элементарные симметрические многочлены от двух переменных связаны с квадратными уравнениями, а элементарные симметрические многочлены от трёх переменных — с кубическими уравнениями. Точно такая же связь существует между элементарными симметрическими многочленами от n переменных и алгебраическими уравнениями n-й степени. Именно, справедлива следующая

Теорема. Пусть $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ — произвольные числа. Алгебраическое уравнение n-й степени

$$u^n - \sigma_1 u^{n-1} + \sigma_2 u^{n-2} - \ldots + (-1)^n\sigma_n = 0 \quad (*)$$

и система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \sigma_1, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \sigma_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1x_2\ldots x_n = \sigma_n \end{cases} \qquad (**)$$

связаны друг с другом следующим образом: если $u_1, u_2, \ldots, u_n$ — корни уравнения (*), то система (**) имеет $n!$ решений, а именно, решение

$$x_1 = u_1, \quad x_2 = u_2, \quad \ldots, \quad x_n = u_n$$

и все решения, получаемые из него перестановками корней u_1, u_2, ..., u_n. Других решений система (**) не имеет. Обратно, если $x_1 = u_1, x_2 = u_2, \ldots, x_n = u_n$ — решение системы (**), то числа $u_1, u_2, \ldots, u_n$ являются корнями уравнения (*).

Доказательство. Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_n$ — корни уравнения (*). Тогда многочлен

$$f(u) = u^n - \sigma_1 u^{n-1} + \sigma_2 u^{n-2} - \ldots + (-1)^n\sigma_n$$

следующим образом разлагается на множители:

$$f(u) = (u - u_1)(u - u_2)\ldots(u - u_n)$$

(см. стр. 144).

Раскроем скобки в правой части последнего равенства. Ясно, что страшим членом будет u^n. Чтобы найти коэффициент при u^{n-1}, заметим, что члены, содержащие u^{n-1}, получаются следующим образом: из $n-1$ скобок, скажем, из всех скобок, кроме k-й, надо взять слагаемое u и из оставшейся k-й скобки — слагаемое $-u_k$. В результате мы получаем произведение $-u_k \cdot u^{n-1}$. Суммируя эти произведения, мы получим выражение $-(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)u^{n-1}$. Таким образом, коэффициент при u^{n-1} равен $-(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)$. Точно так же доказывается, что коэффициентом при u^{n-2} будет сумма $u_1u_2 + u_1u_3 + \ldots + u_{n-1}u_n$ и т. д. Свободный член равен $(-1)^n u_1 u_2 \ldots u_n$, он получается при перемножении n множителей вида $-u_k$.

Вспоминая выражение многочлена $f(u)$, получаем:

$$u^n - \sigma_1 u^{n-1} + \sigma_2 u^{n-2} - \ldots + (-1)^n \sigma_n = u^n - (u_1 + u_2 + \ldots + u_n)u^{n-1} + \\ + (u_1u_2 + u_1u_3 + \ldots + u_{n-1}u_n)u^{n-2} + \ldots + (-1)^n u_1u_2\ldots u_n.$$

Так как это равенство является тождеством (т. е. выполняется при всех значениях переменного u), то коэффициенты при одинаковых степенях u слева и справа должны совпадать, т. е.

$$\begin{aligned} &u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sigma_1, \\ &u_1u_2 + u_1u_3 + \ldots + u_{n-1}u_n = \sigma_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &u_1u_2\ldots u_n = \sigma_n. \end{aligned}$$

Но это и означает, что числа $x_1 = u_1, x_2 = u_2, \ldots, x_n = u_n$ составляют решение системы (**). Любая перестановка значений $u_1, u_2, \ldots, u_n$ снова даёт решение, поскольку неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ входят в систему (**) симметрично. То, что других решений нет, вытекает из последнего утверждения теоремы, которое доказывается точно так же, как и в случае трёх неизвестных (см. стр. 57).

Доказанная теорема позволяет свести решение системы (**) к решению уравнения n-й степени. Именно, если известны значения величин $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, то для нахождения первоначальных неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (т. е. для решения системы (**)) достаточно составить уравнение (*) и найти его корни. Решив это уравнение, мы находим n корней $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Это даёт одно решение

$$x_1 = u_1, \quad x_2 = u_2, \quad \ldots, \quad x_n = u_n$$

системы (**). Переставляя всеми возможными способами числа u_1, $u_2, \ldots, u_n$, получаем остальные решения этой системы.

Следствие. Если $u_1, u_2, \ldots, u_n$ — корни уравнения n-й степени

$$u^n + a_1 u^{n-1} + a_2 u^{n-2} + \ldots + a_n = 0,$$

то имеют место соотношения

$$\begin{gathered} u_1 + u_2 + \ldots + u_n = -a_1, \\ u_1u_2 + u_1u_3 + \ldots + u_{n-1}u_n = a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_1u_2\ldots u_n = (-1)^n a_n \end{gathered}$$

(формулы Виета для алгебраического уравнения n-й степени).

Применяя основную теорему о симметрических многочленах, получаем также следующий важный вывод: пусть $u_1, u_2, \ldots, u_n$ — корни многочлена $g(u) = u^n + a_1u^{n-1} + \ldots + a_n$, а $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — произвольный симметрический многочлен. Тогда значение этого многочлена при $x_1 = u_1, \ldots, x_n = u_n$ выражается в виде многочлена от коэффициентов $a_1, \ldots, a_n$ исходного многочлена $g(u)$. В самом деле, по основой теореме о симметрических многочленах мы можем выразить $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ через элементарные симметрические многочлены $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$. Но значения этих многочленов при $x_1 = u_1, \ldots, x_n = u_n$, в силу формула Виета, разве лишь знаком отличаются от коэффициентов $a_1, \ldots, a_n$ многочлена $g(u)$. Тем самым утверждение доказано.

УПРАЖНЕНИЯ

Решить системы уравнений:

1) $\begin{cases} x + y + z + u = a, \\ x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = a^2, \\ x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = a^3, \\ x^4 + y^4 + z^4 + u^4 = a^4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a, \\ x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = a^2, \\ x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 = a^3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n = a^n; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y + z + u = 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 9, \\ x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = 1, \\ x^4 + y^4 + z^4 + u^4 = 33. \end{cases}$

39. Метод неопределённых коэффициентов. Намеченное в п. 36 доказательство основной теоремы о симметрических многочленах даёт и путь для нахождения многочлена $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$. Однако в случае многочленов от нескольких переменных этот путь становится уже довольно громоздким, так как приходится несколько раз выражать орбиты одночленов через орбиты одночленов от меньшего числа переменных. Поэтому в случае, когда число переменных больше трёх, для нахождения многочлена $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ используют иной метод, называемый *методом неопределённых коэффициентов*. Разумеется, этот метод можно применять и для многочленов от трёх и двух переменных, но в этом случае он не даёт ощутимого выигрыша. Впрочем, в п. 33 мы уже применяли метод неопределённых коэффициентов, и там он значительно упрощал вычисления (поскольку у нас не было явного выражения симметрического многочлена $g(x, y, z)$). Применялся метод неопределённых коэффициентов и в других пунктах.

Метод неопределённых коэффициентов в своём общем виде основан на изучении того, какие одночлены $\sigma_1^{\lambda_1}\sigma_2^{\lambda_2}\ldots\sigma_n^{\lambda_n}$ могут входить в искомое выражение симметрического многочлена $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ через $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ (т. е. входить в многочлен $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$; см. формулировку теоремы на стр. 106). Поскольку любой симметрический многочлен без труда разлагается на орбиты одночленов, мы можем, не теряя общности, считать, что многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является орбитой некоторого одночлена:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = O(x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}).$$

Отбор слагаемых $\sigma_1^{\lambda_1}\sigma_2^{\lambda_2}\ldots\sigma_n^{\lambda_n}$, входящих в многочлен $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, мы проведём сначала совсем грубо, учитывая только степень одночлена $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}$ Пусть эта степень равна N, т. е. $N = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$. Ясно, что тогда в выражение многочлена $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ через $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ могут входить лишь одночлены, степень которых относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равна N.

Поэтому нам надо выяснить, какой степени получится многочлен, если подставить в одночлен $\sigma_1^{\lambda_1}\sigma_2^{\lambda_2}\ldots\sigma_n^{\lambda_n}$ вместо $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ их выражения $\sigma_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, $\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n$ и т. д. Так как степень многочлена σ_k относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равна k, то ясно, что степень одночлена $\sigma_1^{\lambda_1}\sigma_2^{\lambda_2}\ldots\sigma_n^{\lambda_n}$ относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равна $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n$. Так как, с другой стороны, эта степень должна равняться N, то числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ должны удовлетворять соотношению

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = N.$$

Это соотношение, рассматриваемое как уравнение относительно

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, имеет бесчисленное множество решений. Нам, однако, нужны не все его решения, поскольку $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — целые неотрицательные числа. Целых же неотрицательных решений у рассматриваемого уравнения имеется лишь конечное число.

Итак, в выражение $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ симметрического многочлена $O(x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n})$ через $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ входят лишь слагаемые вида $\sigma_1^{\lambda_1}\sigma_2^{\lambda_2}\ldots\sigma_n^{\lambda_n}$, где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — целые неотрицательные решения уравнения

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = N$$

(здесь $N = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ — степень многочлена $O(x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n})$).

Например, чтобы найти, какие слагаемые могут входить в выражение многочлена $O(x_1^4x_2^3x_3)$ от четырёх переменных через $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$, надо найти целые неотрицательные решения уравнения

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + 4\lambda_4 = 8.$$

Эти решения указаны в табл. 7.

Таблица 7

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
8	0	0	0	3	1	1	0	1	0	1	1
6	1	0	0	2	3	0	0	0	4	0	0
5	0	1	0	2	1	0	1	0	2	0	1
4	2	0	0	2	0	2	0	0	1	2	0
4	0	0	1	1	2	1	0	0	0	0	2

Поэтому в выражение многочлена $O(x_1^4x_2^3x_3)$ через $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ входят лишь члены следующих видов:

$$\begin{array}{ccccc} \sigma_1^8; & \sigma_1^6\sigma_2; & \sigma_1^5\sigma_3; & \sigma_1^4\sigma_2^2; & \sigma_1^4\sigma_4; \\ \sigma_1^3\sigma_2\sigma_3; & \sigma_1^2\sigma_2^3; & \sigma_1^2\sigma_2\sigma_4; & \sigma_1^2\sigma_3^2; & \sigma_1\sigma_2^2\sigma_3; \\ \sigma_1\sigma_3\sigma_4; & \sigma_2^4; & \sigma_2^2\sigma_4; & \sigma_2\sigma_3^2; & \sigma_4^2. \end{array}$$

Иными словами, это выражение записывается так:

$$O(x_1^4x_2^3x_3) = A_1\sigma_1^8 + A_2\sigma_1^6\sigma_2 + A_3\sigma_1^5\sigma_3 + A_4\sigma_1^4\sigma_2^2 + \\ + A_5\sigma_1^4\sigma_4 + A_6\sigma_1^3\sigma_2\sigma_3 + A_7\sigma_1^2\sigma_2^3 + A_8\sigma_1^2\sigma_2\sigma_4 + A_9\sigma_1^2\sigma_3^2 + \\ + A_{10}\sigma_1\sigma_2^2\sigma_3 + A_{11}\sigma_1\sigma_3\sigma_4 + A_{12}\sigma_2^4 + A_{13}\sigma_2^2\sigma_4 + A_{14}\sigma_2\sigma_3^2 + A_{15}\sigma_4^2.$$

Мы нашли, таким образом, вид, который должен иметь многочлен $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$. Однако нам ещё неизвестны коэффициенты $A_1, \ldots, A_{15}$. Поэтому описанный метод называют *методом неопределённых коэффициентов.*

Чтобы закончить решение поставленной задачи, т. е. найти многочлен $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, превращающийся в $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ при замене многочленов $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ их выражениями через $x_1, x_2, \ldots, x_n$, осталось найти неопределённые коэффициенты. Это делается проще всего с помощью метода частных значений, который мы поясним на следующем примере (см. также стр. 84).

Выразить многочлен $O(x_1^4x_2^2x_3^0)$ от трёх переменных x_1, x_2, x_3 через $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

С помощью описанного выше метода неопределённых коэффициентов находим, что это выражение должно иметь вид

$$O(x_1^4x_2^2x_3^0) = A_1\sigma_1^6 + A_2\sigma_1^4\sigma_2 + A_3\sigma_1^3\sigma_3 + A_4\sigma_1^2\sigma_2^2 + A_5\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + A_6\sigma_2^3 + A_7\sigma_3^2. \quad (*)$$

Это равенство должно иметь место при любых значениях x_1, x_2, x_3. Поэтому, если выбрать некоторые значения x_1, x_2, x_3, найти, чему равны при этих значениях элементарные симметрически многочлены $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, и подставить полученные результаты в равенство (*), то получится уравнение относительно коэффициентов $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$. Выбрав несколько систем частных значений, мы можем получить некоторое число уравнений, достаточное для того, чтобы найти эти коэффициенты.

Частные значения переменных удобно подбирать так, чтобы некоторые из элементарных симметрических многочленов обращались при этих значениях в нуль. Например, положим $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. При этих значениях имеем:

$$\begin{aligned} &\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ &\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0, \\ &\sigma_3 = x_1x_2x_3 = 0. \end{aligned}$$

Кроме того, в орбите $O(x_1^4x_2^2)$ все члены обращаются в нуль, так как в каждое слагаемое входит множителем или x_2, или x_3. В результате мы получаем, что $A_1 = 0$.

Теперь положим $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$. В этом случае имеет $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -1$, $\sigma_3 = 0$ и $O(x_1^4x_2^2) = 2$. Отсюда вытекает равенство $A_6 = -2$. Точно так же, полагая $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, находим:

$$16A_2 + 4A_4 + A_6 = 2.$$

Так как $A_6 = -2$, то получаем уравнение

$$4A_2 + A_4 = 1.$$

Если же положить $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, то получим уравнение

$$9A_2 + 2A_4 = 2.$$

Из этих двух уравнений следует, что $A_2 = 0$, $A_4 = 1$.

А теперь положим $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$. Эти числа подобраны так, чтобы значение многочлена σ_1 обратилось в нуль. Мы придём к уравнению

$$-27A_6 + 4A_7 = 42.$$

Поскольку $A_6 = -2$, то $A_7 = -3$.

Коэффициенты A_3 и A_5 ищутся точно так же. Для их отыскания удобно положить $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$, а затем $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$. Получаем $A_3 = -2$, $A_5 = 4$.

Мы нашли все коэффициенты A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7. Подставляя их значения, находим искомое выражение орбиты $O(x_1^4x_2^2)$ через элементарные симметрические многочлены σ_1, σ_2, σ_3:

$$O(x_1^4x_2^2) = \sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_1^3\sigma_3 + 4\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 2\sigma_2^3 - 3\sigma_3^2,$$

в полном соответствии с формулой, из табл. 3 на стр. 51.

УПРАЖНЕНИЯ

Следующие симметрические многочлены от четырёх переменных x_1, x_2, x_3, x_4 выразить через σ_1, σ_2, σ_3, σ_4:

1) $(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_3)(x_2 + x_4)(x_3 + x_4)$;

2) $(x_1x_2 + x_3x_4)(x_1x_3 + x_2x_4)(x_1x_4 + x_2x_3)$.

3) Доказать тождество:

$$(b+c)^3 + (c+a)^3 + (a+b)^3 + (a+d)^3 + (b+d)^3 + (c+d)^3 = 3(a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2).$$

4) Доказать тождество:

$$\begin{aligned}(a+b+c+d)^5 &- ((b+c+d)^5 + (a+c+d)^5 + (a+b+d)^5 + (a+b+c)^5) + \\ &+ ((b+c)^5 + (a+d)^5 + (a+b)^5 + (c+d)^5 + (b+d)^5 + (a+c)^5) - (a^5+b^5+c^5+d^5) = \\ &= 60abcd(a+b+c+d).\end{aligned}$$

40. Словарное расположение многочленов. Старшие члены. Описанный в предыдущем пункте метод отбора одночленов $\sigma_1^{\lambda_1}\sigma_2^{\lambda_2}\ldots\sigma_n^{\lambda_n}$ является сравнительно грубым: он учитывает лишь степень одночлена $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}$, орбитой которого является данный симметрический многочлен. Из-за этого приходиться брать много лишних одночленов и лишь после длительных расчётов убеждаться, что коэффициенты при них равны нулю (как, например, коэффициенты A_1 и A_2 в примере на стр. 116). Сейчас мы укажем способ, позволяющий несколько сократить число отбираемых одночленов.

Нам понадобится для этого расположить слагаемые многочлена в определённом порядке. Расставить слагаемые по порядку легко в случае, когда многочлен зависит только от одного переменного — тогда можно расположить их по возрастающим или убывающим степеням буквы x. А как быть, если у нас несколько переменных: что поставить раньше, x^4y^2 или xy^5?

С этой же трудностью сталкиваются и составители словарей. Возьмём, например, слова «восток» и «звезда». Первая буква слова «восток» предшествует первой букве слова «звезда», зато вторая буква идёт после второй буквы слова «звезда». Мы знаем, что в словарях расставляют слова сначала по первой букве, а уж потом смотрят на вторую, третью и т. д. буквы. Поэтому в словаре слово «восток» предшествует слову «звезда».

Точно так же поступают и математики. Они нумеруют переменные и, сравнивания два одночлена $x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n}$ и $x_1^{l_1}\ldots x_n^{l_n}$, смотрят сначала только на степени первого переменного, т. е. на числа k_1 и l_1. Если $k_1 > l_1$, то первый одночлен считают старше или, как ещё говорят, выше второго, если $k_1 < l_1$, то — младше (или ниже). В случае, когда $k_1 = l_1$, переходят к рассмотрению степеней буквы x_2. Если при $k_1 = l_1$ имеем $k_2 > l_2$, то первый одночлен старше второго, а если $k_2 < l_2$, то младше. Вообще, если $k_1 = l_1, \ldots, x_{s-1} = l_{s-1}$, то при $k_s > l_s$ старше первый одночлен, а при $k_s < l_s$ — второй. В случае, когда в одном одночлене имеются переменные, отсутствующие во втором, их дописывают во второй одночлен с нулевыми показателями (это можно сделать, так как $x_k^0 = 1$).

Сравним, например, одночлены $x_1^3x_2^4x_3^2$ и $x_1^3x_2^4x_4^5$. Для сравнения запишем их в виде

$$x_1^3x_2^4x_3^2x_4^0 \quad \text{и} \quad x_1^3x_2^4x_3^0x_4^5.$$

Так как показатели степеней при x_1 и x_2 в обоих одночленах одинаковы, а показатель при x_3 больше в первом одночлене, то первый одночлен старше.

Пусть, например, требуется расположить в словарном порядке многочлен

$$x_2^3x_3^2 + x_1^5x_2 + x_1^3x_2x_3 + x_1^3x_2^2.$$

Второй член является старшим, так как в нём наивысший показатель степени переменного x_1. В третьем и четвёртом членах показатели степеней переменного x_1 одинаковы. Сравнение показателей при x_2 показывает, что старше четвёртый член. Наконец, первый член является самым младшим, поскольку в него x_1 не входит (т. е. показатель степени при x_1 равен нулю). Таким образом, после расположения в словарном порядке данный многочлен принимает вид

$$x_1^5x_2 + x_1^3x_2^2 + x_1^3x_2x_3 + x_2^3x_3^2.$$

Выясним теперь, какой вид имеет старший член в орбите одночлена $O(x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n})$ (некоторые из показателей $k_1, \ldots, k_n$ могут равняться нулю). В одночлене вместо перестановки переменных можно переставлять показатели. Ясно, что в старшем члене показатель при x_1 должен иметь наибольшее из возможных значений. Иными словами, он должен быть равен наибольшему из показателей $k_1, \ldots, k_n$. В противном случае с помощью перестановки показателей мы могли бы получить более высокий член нашей орбиты. По тем же соображениям показатель при x_2 в старшем члене должен принимать второе по величине возможное значение и т. д.

Таким образом, старший член орбиты одночлена $O(x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n})$ имеет вид $x_1^{j_1}\ldots x_n^{j_n}$, где $j_1, \ldots, j_n$ — это те же самые числа $k_1, \ldots, k_n$, но расположенные в порядке убывания. Например, старшим членом орбиты одночлена $O(x_1^2x_3^4x_4^5) \equiv O(x_1^2x_2^0x_3^4x_4^5)$ является $x_1^5x_2^4x_3^2$.

Сделаем ещё следующее полезное замечание. Если $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены от одного переменного, то старший член их произведения равен произведению старших членов сомножителей. Это правило остаётся верным и для многочленов от нескольких переменных — старший член произведения всегда равен произведению старших членов сомножителей. Мы не будем доказывать это почти очевидное утверждение.

41. Отбор слагаемых многочлена $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ с помощью старших членов. Понятие старшего члена позволяет уточнить, какие же слагаемые могут входить в $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$. Выясним сначала, каким образом следует подобрать показатели $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, чтобы старший член выражения $\sigma_1^{\lambda_1}\sigma_2^{\lambda_2}\ldots\sigma_n^{\lambda_n}$ совпадал со старшим членом орбиты $O(x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n})$.

Старшим членом многочлена $\sigma_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ является, очевидно, x_1. Точно так же старшим членом многочлена σ_2 является x_1x_2, и вообще старшим членом многочлена σ_k является $x_1x_2\ldots x_k$.

Из теоремы о старшем члене произведения получаем поэтому, что старший член выражения $\sigma_1^{\lambda_1}\sigma_2^{\lambda_2}\ldots\sigma_n^{\lambda_n}$ имеет следующий вид:

$$x_1^{\lambda_1}(x_1x_2)^{\lambda_2}(x_1x_2x_3)^{\lambda_3}\ldots(x_1x_2\ldots x_n)^{\lambda_n}.$$

Следовательно, x_1 входит в этот член с показателем $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n$, переменная x_2 — с показателем $\lambda_2+\ldots+\lambda_n$, далее, x_3 — с показателем $\lambda_3+\ldots+\lambda_n$, наконец, x_n — с показателем λ_n. Поэтому старший член многочлена $\sigma_1^{\lambda_1}\sigma_2^{\lambda_2}\ldots\sigma_n^{\lambda_n}$ имеет вид

$$x_1^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}x_2^{\lambda_2+\ldots+\lambda_n}\ldots x_n^{\lambda_n}.$$

Подберём числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ таким образом, чтобы этот старший член совпадал со старшим членом орбиты $O(x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n})$. Как мы уже видели, в старшем члене орбиты показатели идут, не возрастая. Не теряя общности, можно считать, что орбита порождена своим старшим членом, т. е. что $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_n$.

Сравнивая показатели в равенстве

$$x_1^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}x_2^{\lambda_2+\ldots+\lambda_n}\ldots x_n^{\lambda_n} = x_n^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n},$$

мы получаем:

$$\begin{aligned} \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n &= k_1, \\ \lambda_2+\ldots+\lambda_n &= k_2, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \lambda_n &= k_n. \end{aligned}$$

Поэтому $\lambda_1 = k_1 - k_2$, $\lambda_2 = k_2 - k_3$, $\ldots$, $\lambda_{n-1} = k_{n-1} - k_n$, $\lambda_n = k_n$. Иными словами, числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ являются разностями между показателями степеней соседних множителей в старшем члене орбиты.

Вычтем теперь из орбиты $O(x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n})$ выражение $\sigma_1^{k_1-k_2}\sigma_2^{k_2-k_3}\ldots$ $\ldots\sigma_n^{k_n}$, т. е. рассмотрим симметрический многочлен

$$O(x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}) - \sigma_1^{k_1-k_2}\sigma_2^{k_2-k_3}\ldots\sigma_n^{k_n}.$$

Если вместо $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ подставить их выражения через x_1, $x_2, \ldots, x_n$, то старшие члены уменьшаемого и вычитаемого будут одинаковыми. Поэтому при вычитании они взаимно уничтожатся, и мы получим выражение, у которого старший член н и ж е, чем у $O(x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n})$. Разлагая это выражение в сумму орбит одночленов и повторяя описанный процесс, мы получим через несколько шагов выражение многочлена $O(x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n})$ через элементарные симметрические многочлены.

Ясно, что в это выражение войдут только слагаемые, старшие члены которых не выше старшего члена орбиты. Это замечание и позволяет провести отбор слагаемых многочлена $\varphi(\sigma_1, \sigma_2 \ldots, \sigma_n)$. Именно, найдя все целые неотрицательные решения уравнения

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = N$$

(где, напомним, $N = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$), надо для каждого решения написать соответствующий старший член. Этот старший член выписывается по формуле

$$x_1^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n} x_2^{\lambda_2+\ldots+\lambda_n} \ldots x_n^{\lambda_n}.$$

Если полученный старший член окажется выше старшего члена орбиты, то соответствующее решение отбрасывается. Если же он равен или ниже старшего члена орбиты, то решение сохраняется.

Рассмотрим, например, ещё раз симметрический многочлен $O(x_1^4x_2^3x_3x_4^0)$ (см. стр. 115). Решая уравнение

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + 4\lambda_4 = 8,$$

мы нашли 15 целых неотрицательных решений. Соответствующие им старшие члены имеют следующий вид:

$$\begin{array}{lllll}
x_1^8; & x_1^7x_2; & x_1^6x_2x_3; & x_1^6x_2^2; & x_1^5x_2x_3x_4; \\
x_1^5x_2^2x_3; & x_1^5x_2^3; & x_1^4x_2^2x_3x_4; & x_1^4x_2^2x_3^2; & \\
x_1^4x_2^3x_3; & x_1^3x_2^2x_3^2x_4; & x_1^4x_2^4; & x_1^3x_2^3x_3x_4; & \\
x_1^3x_2^3x_3^2; & x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2. & & &
\end{array}$$

Сравнивая эти старшие члены с $x_1^4x_2^3x_3$, мы видим, что многие из них в ы ш е, чем $x_1^4x_2^3x_3$, и потому должны быть отброшены. Остаются лишь семь старших членов:

$$\begin{array}{llll}
x_1^4x_2^3x_3; & x_1^4x_2^2x_3^2; & x_1^4x_2^2x_3x_4; & x_1^3x_2^2x_3^2x_4; \\
x_1^3x_2^3x_3x_4; & x_1^3x_2^3x_3^2; & x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2; &
\end{array}$$

Следовательно, в выражение орбиты $O(x_1^4x_2^3x_3)$ через элементарные симметрические многочлены войдут лишь слагаемые вида

$$\begin{array}{llll}
\sigma_1\sigma_2^2\sigma_3, & \sigma_1^2\sigma_3^2, & \sigma_1^2\sigma_2\sigma_4, & \sigma_1\sigma_3\sigma_4, \\
\sigma_2^2\sigma_4, & \sigma_2\sigma_3^2, & \sigma_4^2. &
\end{array}$$

Иными словами,

$$O(x_1^4x_2^3x_3) = B_1\sigma_1\sigma_2^2\sigma_3 + B_2\sigma_1^2\sigma_3^2 + B_3\sigma_1^2\sigma_2\sigma_4 + \\ + B_4\sigma_1\sigma_3\sigma_4 + B_5\sigma_2^2\sigma_4 + B_6\sigma_2\sigma_3^2 + B_7\sigma_4^2.$$

Теперь нам надо искать лишь семь коэффициентов, а не 15, как на стр. 115. Нахождение коэффициентов выполняется снова с помощью метода частных значений.

Заметим, что в рассуждениях этого пункта содержится *новое доказательство* основной теоремы о симметрических многочленах (ср. п. 36). Именно, пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — симметрический многочлен от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}$ — его старший член. Тогда непременно $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_n$. Разность $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - a\sigma_1^{k_1-k_2}\sigma_2^{k_2-k_3}\ldots\sigma_n^{k_n}$ представляет собой (если вместо $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ подставить их выражения через $x_1, x_2, \ldots, x_n$, раскрыть скобки и привести подобные члены) симметрический многочлен, у которого старший член *ниже*, чем $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}$. К этому симметрическому многочлену снова можно применить тот же приём и получить симметрический многочлен с ещё более низким старшим членом и т. д. Иными словами, последовательно вычитая из симметрического многочлена выражения вида $a\sigma_1^{k_1-k_2}\sigma_2^{k_2-k_3}\ldots\sigma_n^{k_n}$ (где показатели определяются с помощью старших членов), можно добиваться того, чтобы старшие члены становились всё ниже и ниже. А так как *ниже* старшего члена исходного симметрического многочлена может существовать лишь *конечное* число членов, то после конечного числа шагов мы получим многочлен, совсем не содержащий членов, т. е. равный нулю. Иными словами, мы получим равенство

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - a\sigma_1^{k_1-k_2}\sigma_2^{k_2-k_3}\ldots\sigma_n^{k_n} - b\sigma_1^{l_1-l_2}\sigma_2^{l_2-l_3}\ldots\sigma_n^{l_n} - \ldots = 0,$$

где многоточием обозначена (конечная) сумма членов того же вида. Перенося все члены, кроме $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, в правую часть, мы получим соотношение

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a\sigma_1^{k_1-k_2}\sigma_2^{k_2-k_3}\ldots\sigma_n^{k_n} + b\sigma_1^{l_1-l_2}\sigma_2^{l_2-l_3}\ldots\sigma_n^{l_n} + \ldots,$$

т. е. получим искомое выражение симметрического многочлена $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ через $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$.

В изложенном доказательстве основную роль играет понятие старшего члена. Пользуясь этим понятием, можно было бы также получить доказательство теоремы единственности: любой симметрический многочлен от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ можно лишь единственным способом представить в виде многочлена $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ (ср. п. 4). Мы на этом не останавливаемся.

42. Антисимметрические многочлены от *n* переменных. Антисимметрические многочлены от n переменных определяются точно так же, как и в случае двух и трёх переменных. Именно, многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется антисимметрическим, если он меняет знак при любой перестановке *двух* переменных.

Все утверждения, доказанные нами в п. 27 об антисимметрических многочленах от трёх переменных, без изменений переносятся на случай многочленов большего числа переменных. Сложнее становится лишь структура простейшего антисимметрического многочлена. В случае трёх переменных он имел вид $(x-y)(x-z)(y-z)$. Иными словами, в него входили в качестве сомножителей все разности между переменными x, y, z и идущими за ними переменными (т. е. разности $x-y$, $x-z$ и $y-z$).

Обобщая это правило на большее число переменных, получаем выражением следующего вида (знак $\prod$ означает произведение):

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i<j}(x_i - x_j) =$$
$$= (x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_n)\ldots(x_{n-1}-x_n).$$

$\Big($Здесь в правой части имеется $\dfrac{n(n-1)}{2}$ множителей.$\Big)$ Например, в случае четырёх переменных мы получаем многочлен

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_3-x_4).$$

Непосредственно проверяется, что указанный многочлен $T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является антисимметрическим, т. е. меняет знак при перестановке любых двух переменных. Он называется *простейшим* антисимметрическим многочленом от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Название это объясняется тем, что, как и в случае трёх переменных,

любой антисимметрический многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно представить в виде

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = T(x_1, x_2, \ldots, x_n)g(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — симметрический многочлен

(основная теорема об антисимметрических многочленах от n переменных). Доказывается это утверждение дословно так же, как и для случая трёх переменных (см. п. 27).

Квадрат многочлена $T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называют *дискриминантом* переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и обозначают через $\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i<j}(x_i - x_j)^2.$$

Так как дискриминант Δ является квадратом антисимметрического многочлена $T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то он симметричен и, следовательно, выражается через элементарные симметрические многочлены

$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$. Поэтому, если числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ являются корнями алгебраического уравнения

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots, + a_n = 0,$$

то $\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ выражается через коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$ того уравнения. В п. 28 мы получили такое выражение для случая трёх переменных. Ниже мы укажем формулу, дающую выражение дискриминанта через степенные суммы, что позволяет (с помощью формулы Варинга) написать явное выражение его через $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$.

Из выражения дискриминанта видно, что он обращается в нуль тогда и только тогда, когда хотя бы два переменных принимают одинаковые значения. Таким образом, дискриминант позволяет узнавать, не решая алгебраического уравнения, есть ли среди его корней хотя бы два совпадающих, т. е. имеет ли это уравнение, как говорят, *кратные* корни.

Для читателей, знакомых с теорией определителей, укажем красивое выражение дискриминанта в виде определителя, составленного из степенных сумм. Рассмотрим сначала случай трёх переменных x, y, z. Возьмём так называемый *определитель Вандермонда*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}.$$

Если $x = y$, то два столбца этого определителя совпадают и он обращается в нуль. Поэтому определитель Вандермонда делится на $x - y$. Точно так же доказывается, что он делится на $x - z$ и $y - z$. Но, раскрывая этот определитель, мы получаем многочлен *третьей* степени от x, y, z. Отсюда ясно, что

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = k(x-y)(x-z)(y-z).$$

Значение k получаем, сравнив коэффициенты при yz^2 слева и справа. Мы находим $k = -1$, и потому

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = -(x-y)(x-z)(y-z).$$

Итак, с точностью до знака определитель Вандермонда совпадает с простейшим антисимметрическим многочленом $T(x, y, z)$ от переменных x, y, z. Следовательно, его квадрат равен дискриминанту $\Delta(x, y, z)$. Но значение определителя не меняется при перемене ролями строк и столбцов. Поэтому

$$\Delta(x, y, z) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & x & z^2 \end{vmatrix}.$$

Применяя правило умножения определителей (строка на столбец), выводим отсюда, что

$$\Delta(x, y, z) = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}.$$

где положено $s_0 = x^0 + y^0 + z^0 = 3$.

Раскрывая этот определитель и заменяя степенные суммы их выражениями через σ_1, σ_2, σ_3, мы снова найдём выражение дискриминанта $\Delta(x, y, z)$ через элементарные симметрические многочлены.

Совершенно аналогичные рассуждения можно провести, если число переменных больше трёх. В этом случае дискриминант задаётся формулой

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i<j} (x_i - x_j)^2.$$

Производя такие же преобразования, что и при $n = 3$, можно выразить дискриминант в виде определителя, составленного из степенных сумм. Это выражение имеет следующий вид:

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n-1} & s_n & \ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

Разложить на множители:

1) $a^3(b-c)(c-d)(d-b) - b^3(c-d)(d-a)(a-c) +$
$+ c^3(d-a)(a-b)(b-d) - d^3(a-b)(b-c)(c-a)$;

2) $(b+c-a-d)^4(b-c)(a-d) +$
$+ (c+a-b-d)^4(c-a)(b-d) + (a+b-c-d)^4(a-b)(c-d)$;

3) $x^2y^2(z-t)(x-y) + x^2z^2(t-y)(x-z) + x^2t^2(y-z)(x-t) +$
$+ y^2z^2(x-t)(y-z) + y^2t^2(z-x)(y-t) + z^2t^2(x-y)(z-t)$;

4) $x^4(z-y)(y-t)(z-t) + y^4(x-z)(x-t)(z-t) +$
$+ z^4(y-x)(y-t)(x-t) - t^2 \cdot (x^2(z-y)(y-t)(z-t) +$
$+ y^2(x-z)(x-t)(z-t) + z^2(y-x)(y-t)(x-t))$;

5) $x^3y^3(z-t)(x-y) + x^3z^3(t-y)(x-z) + x^3t^3(y-z)(x-t) +$
$+ y^3z^3(x-t)(y-z) + y^3t^3(z-x)(y-t) + z^3t^3(x-y)(z-t)$.

Доказать тождества:

6) $(x^2+y^2)(z-t)(x-y) + (x^2+z^2)(t-y)(x-z) + (x^2+t^2)(y-z)(x-t) +$
$+ (y^2+z^2)(x-t)(y-z) + (y^2+t^2)(z-x)(y-t) + (z^2+t^2)(x-y)(z-t) = 0$;

7) $(b^2c^2(a+d) + a^2d^2(b+c))(b-c)(a-d) + (c^2a^2(b+d) + b^2d^2(c+a))(c-a)(b-d) +$
$+ (a^2b^2(c+d) + c^2d^2(a+b))(a-b)(c-d) = 0$.

Упростить выражения:

8) $$\frac{1}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)(b-d)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\frac{1}{(d-a)(d-b)(d-c)};$$

9) $$\frac{a}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{b}{(b-a)(b-c)(b-d)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\frac{d}{(d-a)(d-b)(d-c)};$$

10) $$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{b^2}{(b-a)(b-c)(b-d)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\frac{d^2}{(d-a)(d-b)(d-c)};$$

11) $$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{b^3}{(b-a)(b-c)(b-d)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\frac{d^3}{(d-a)(d-b)(d-c)};$$

12) $$\frac{a^4}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{b^4}{(b-a)(b-c)(b-d)}+\frac{c^4}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\frac{d^4}{(d-a)(d-b)(d-c)};$$

13) $$\frac{a^2b^2c^2}{(a-d)(b-d)(c-d)}+\frac{a^2b^2d^2}{(a-c)(b-c)(d-c)}+\frac{a^2c^2d^2}{(a-b)(c-b)(d-b)}+\frac{b^2c^2d^2}{(b-a)(c-a)(d-a)}.$$

43. Общий метод освобождения от иррациональности в знаменателе. В п. 25 был описан один частный метод избавления от иррациональности в знаменателе. Сейчас будет рассмотрен общий метод. Он основан на связи между элементарными симметрическими многочленами от n переменных и элементарными симметрическими многочленами от $n-1$ переменных.

Обозначим через $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n-1}$ элементарные симметрические многочлены от переменных $x_2, \ldots, x_n$. Иными словами, положим:

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= x_2+x_3+\ldots+x_n,\\
\tau_2 &= x_2x_3+\ldots+x_2x_n+\ldots+x_{n-1}x_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\tau_{n-1} &= x_2x_3\ldots x_n.
\end{aligned}$$

Через $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, как и ранее, будем обозначать элементарные симметрические многочлены от n переменных:

$$\begin{aligned}
&\sigma_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n,\\
&\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\sigma_n = x_1x_2 \ldots x_n.
\end{aligned}$$

Ясно, что

$$\sigma_1 = x_1 + \tau_1.$$

Соберём, далее, в σ_2 все члены, содержащие x_1. Эти члены имеют вид

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n = x_1(x_2 + x_3 + \ldots + x_n) = x_1\tau_1.$$

Оставшиеся же члены образуют элементарный симметрический многочлен второй степени от $n-1$ переменных $x_2, x_3, \ldots, x_n$, т. е. дают τ_2. Таким образом,

$$\sigma_2 = x_1\tau_1 + \tau_2.$$

Точно так же доказывается, что

$$\sigma_3 = x_1\tau_2 + \tau_3,$$

и вообще

$$\sigma_k = x_1\tau_{k-1} + \tau_k, \qquad k = 2, 3, \ldots, n-1.$$

(Так как число многочленов τ_k равно лишь $n-1$, то эта формула при $k=n$ неприменима; но для многочлена σ_n мы, очевидно, имеем $\sigma_n = x_1\tau_{n-1}$.)

Из выписанных соотношений находим:

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \sigma_1 - x_1,\\
\tau_2 &= \sigma_2 - x_1\tau_1,\\
\tau_3 &= \sigma_3 - x_1\tau_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\tau_{n-1} &= \sigma_{n-1} - x_1\tau_{n-2}.
\end{aligned}$$

Эти формулы позволяют выразить $\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$ через $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ и x_1.

Особенно простой вид принимают написанные формулы, если $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 0$, $\ldots$, $\sigma_{n-1} = 0$. В этом случае имеем:

$$\tau_1 = -x_1, \quad \tau_2 = x_1^2, \quad \ldots, \quad \tau_{n-1} = (-1)^{n-1}x_1^{n-1}. \tag{14}$$

Формулами (14) мы и воспользуемся в дальнейшем.

Перейдём теперь к нашему основному вопросу — об уничтожении иррациональности в знаменателе. Пусть знаменатель является многочленом от радикала $x_1 = \sqrt[n]{a}$. Иными словами, пусть он имеет вид

$b_0x_1^{n-1}+b_1x_1^{n-2}+\ \ldots\ +b_{n-1}$, где b_0, b_1, $\ldots$, b_{n-1} — некоторые коэффициенты и $x_1^n=a$. Пусть, далее, числителем дроби является некоторый другой многочлен от x_1. Таким образом, дробь имеет вид

$$\frac{g(x_1)}{f(x_1)},$$

где $g(x_1)$ и $f(x_1)$ — многочлены от x_1 и $x_1^n-a=0$.

Обозначим через x_2, $\ldots$, x_n остальные корни уравнения $x^n-a=0$ (как станет ясно из дальнейшего, нам не понадобится искать эти корни в явном виде, поскольку ответ выразится через x_1). Чтобы освободиться от иррациональности в знаменателе, умножим числитель и знаменатель дроби на выражение $f(x_2)\ \ldots f(x_n)$. Мы получим:

$$\frac{g(x_1)}{f(x_1)}=\frac{g(x_1)f(x_2)\ldots f(x_n)}{f(x_1)f(x_2)\ldots f(x_n)}.$$

Ясно, что знаменатель полученной дроби не меняется ни при какой перестановке корней x_1, x_2, $\ldots$, x_n, т. е. является *симметрическим* многочленом от x_1, x_2, $\ldots$, x_n. Но тогда, по основной теореме, его можно выразить через σ_1, σ_2, $\ldots$, σ_n. Далее, так как числа x_1, x_2, $\ldots$, x_n являются корнями многочлена x^n-a, то, по формулам Виета, имеем:

$$\sigma_1=0,\quad \sigma_2=0,\quad \ldots,\quad \sigma_{n-1}=0,\quad \sigma_n=(-1)^{n+1}a.$$

Подставляя эти значения σ_1, σ_2, $\ldots$, σ_n в выражение для знаменателя, получим некоторый многочлен от a, b_0, b_1, $\ldots$, b_{n-1}, т. е. получим выражение, не содержащее радикала x_1. Таким образом, мы уже освободились от иррациональности $x_1=\sqrt[n]{a}$ в знаменателе. Чтобы завершить решение задачи, надо ещё выразить числитель через известный нам радикал $x_1=\sqrt[n]{a}$. Это делается следующим образом. Множитель $g(x_1)$ уже имеет нужный вид. Поэтому всё сводится к тому, чтобы найти выражение для произведения

$$f(x_2)\ \ldots f(x_n).$$

Но это произведение не меняется ни при какой перестановке переменных x_2, $\ldots$, x_n. Поэтому оно является симметрическим многочленом от x_2, $\ldots$, x_n, т. е. выражается в виде многочлена от τ_1, $\ldots$, τ_{n-1} — элементарных симметрических многочленов от $n-1$ переменных. Так как в нашем случае $\sigma_1=0$, $\ldots$, $\sigma_{n-1}=0$, то τ_1, $\ldots$, τ_{n-1} выражаются через x_1 по очень простым формулам (14):

$$\tau_k=(-1)^k x_1^k.$$

Подставляя эти выражения, мы и получим значение числителя. Его можно ещё упростить, если принять во внимание, что $x_1^n = a$.

На первый взгляд может показаться, что описанный приём применим лишь в том случае, если в знаменателе имеется только о д и н радикал $x_1 = \sqrt[n]{a}$, взятый в различных степенях. В действительности, однако, мы можем считать, что коэффициенты b_0, b_1, ..., b_{n-1} и число a сами выражаются через некоторые д р у г и е радикалы. Описанный приём позволит тогда освободиться в знаменателе от одного радикала $x_1 = \sqrt[n]{a}$. Другие же радикалы (через которые выражались b_0, b_1, ..., b_{n-1}, a), возможно, ещё останутся. Затем мы применим тот же приём к следующему радикалу и т. д. После нескольких таких шагов мы полностью освободимся от иррациональности в знаменателе. Как правило, этот приём приводит к громоздким вычислениям, но зато позволяет справиться с любой задачей об освобождении от иррациональности в знаменателе.

Рассмотрим два примера.

1°. Освободиться от иррациональности в знаменателе выражения

$$A = \frac{1}{1 - \sqrt[4]{2} + 2\sqrt{2} + \sqrt[4]{8}}.$$

Полагая здесь $x_1 = \sqrt[4]{2}$, мы можем записать данное нам выражение в виде

$$A = \frac{1}{1 - x_1 + 2x_1^2 + x_1^3} = \frac{1}{f(x_1)}.$$

Остальные корни уравнения $x^4 - 2 = 0$ обозначим через x_2, x_3, x_4 и рассмотрим элементарные симметрические многочлены σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 и τ_1, τ_2, τ_3. Мы имеем:

$$A = \frac{f(x_2)f(x_3)f(x_4)}{f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4)}.$$

Выразим числитель и знаменатель через элементарные симметрические многочлены:

$$f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4) = (1 - x_1 + 2x_1^2 + x_1^3)(1 - x_2 + 2x_2^2 + x_2^3) \times$$
$$\times (1 - x_3 + 2x_3^2 + x_3^3)(1 - x_4 + 2x_4^2 + x_4^3) = 1 + a\sigma_4 + b\sigma_4^2 + c\sigma_4^3$$

(напомним, что $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$). Вычисления (которые мы опускаем) дают следующие значения коэффициентов a, b и c:

$$f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4) = 1 - 3\sigma_4 + 42\sigma_4^2 + \sigma_4^3.$$

Вспоминая, наконец, что $\sigma_4 = x_1x_2x_3x_4 = -2$ (в силу формул Виета), мы получаем окончательно следующее значение знаменателя:

$$f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4) = 1 - 3\cdot(-2) + 42\cdot(-2)^2 + (-2)^3 = 167.$$

Далее, по формулам, указанным в табл. 2 на стр. 51

$$\begin{aligned}
f(x_2)f(x_3)f(x_4) &= (1 - x_2 + 2x_2^2 + x_2^3)(1 - x_3 + 2x_3^2 + x_3^3)(1 - x_4 + 2x_4^2 + x_4^3) = \\
&= 1 - O(x_2) + 2\cdot O(x_2^2) + O(x_2^3) + O(x_2x_3) - \\
&\quad - 2\cdot O(x_2^2x_3) - O(x_2^3x_3) + 4\cdot O(x_2^2x_3^2) + 2\cdot O(x_2^3x_3^2) + \\
&\quad + O(x_2^3x_3^3) - O(x_2x_3x_4) + 2\cdot O(x_2^2x_3x_4) + O(x_2^3x_3x_4) - \\
&\quad - 4\cdot O(x_2^2x_3^2x_4) - 2\cdot O(x_2^3x_3^2x_4) - O(x_2^3x_3^3x_4) + \\
&\quad + 8\cdot O(x_2^2x_3^2x_4^2) + 4\cdot O(x_2^3x_3^2x_4^2) + 2\cdot O(x_2^3x_3^3x_4^2) + O(x_2^3x_3^3x_4^3) = \\
&= 1 - \tau_1 + 2(\tau_1^2 - 2\tau_2) + (\tau_1^3 - 3\tau_1\tau_2 + 3\tau_3) + \tau_2 - 2(\tau_1\tau_2 - 3\tau_3) - \\
&\quad - (\tau_1^2\tau_2 - 2\tau_2^2 - \tau_1\tau_3) + 4(\tau_2^2 - 2\tau_1\tau_3) + 2(\tau_1\tau_2^2 - 2\tau_1^2\tau_3 - \tau_2\tau_3) + \\
&\quad + (\tau_2^3 + 3\tau_3^2 - 3\tau_1\tau_2\tau_3) - \tau_3 + 2\tau_1\tau_3 + \tau_3(\tau_1^2 - 2\tau_2) - \\
&\quad - 4\tau_2\tau_3 - 2\tau_3(\tau_1\tau_2 - 3\tau_3) - \tau_3(\tau_2^2 - 2\tau_1\tau_3) + 8\tau_3^2 + 4\tau_1\tau_3^2 + 2\tau_2\tau_3^2 + \tau_3^3.
\end{aligned}$$

Так как $\tau_1 = -x_1$, $\tau_2 = x_1^2$, $\tau_3 = -x_1^3$ и $x_1^4 = 2$, то мы находим окончательно следующее выражение числителя:

$$f(x_2)f(x_3)f(x_4) = 9 + 15x_1 + 25x_1^2 - 14x_1^3 = 9 + 15\sqrt[4]{2} + 25\sqrt{2} - 14\sqrt[4]{8}.$$

В результате получаем следующий ответ:

$$A = \frac{1}{1 - \sqrt[4]{2} + 2\sqrt{2} + \sqrt[4]{8}} = \frac{9 + 15\sqrt[4]{2} + 25\sqrt{2} - 14\sqrt[4]{8}}{167}.$$

2°. Освободиться от иррациональности в знаменателе выражения

$$A = \frac{1}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}}$$

(ср. пример 2° на стр. 76).

Полагая (временно) $\alpha = \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$, $x_1 = \sqrt[3]{a}$, запишем наше выражение в виде

$$A = \frac{1}{\alpha + x_1} = \frac{1}{f(x_1)},$$

где x_1 — корень уравнения $x^3 - a = 0$. Пусть x_2, x_3 — два других корня этого уравнения.

Тогда

$$A=\frac{f(x_2)f(x_3)}{f(x_1)f(x_2)f(x_3)}.$$

Мы имеем:

$$\begin{aligned}f(x_1)f(x_2)f(x_3)&=(\alpha+x_1)(\alpha+x_2)(\alpha+x_3)=\\&=\alpha^3+\alpha^2(x_1+x_2+x_3)+\alpha(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+x_1x_2x_3=\\&=\alpha^3+\sigma_1\alpha^2+\sigma_2\alpha+\sigma_3.\end{aligned}$$

Так как, по формулам Виета, $\sigma_1=0$, $\sigma_2=0$, $\sigma_3=a$, то получаем:

$$f(x_1)f(x_2)f(x_3)=\alpha^3+a=(\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})^3+a=a+b+c+3\sqrt[3]{b^2c}+3\sqrt[3]{bc^2}.$$

Далее,

$$f(x_2)f(x_3)=(\alpha+x_2)(\alpha+x_3)=\alpha^2+\alpha(x_2+x_3)+x_2x_3=\alpha^2+\tau_1\alpha+\tau_2,$$

и потому, в силу соотношений (14),

$$\begin{aligned}f(x_2)f(x_3)&=\alpha^2-x_1\alpha+x_1^2=(\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})^2-\sqrt[3]{a}(\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})+(\sqrt[3]{a})^2=\\&=\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}+2\sqrt[3]{bc}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}.\end{aligned}$$

Таким образом, наше выражение принимает вид

$$A=\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}+2\sqrt[3]{bc}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}}{a+b+c+3\sqrt[3]{b^2c}+3\sqrt[3]{bc^2}},$$

где уже отсутствует в знаменателе один из радикалов (а именно, $\sqrt[3]{a}$).

Теперь, полагая $\sqrt[3]{b}=y_1$, мы перепишем выражение A в виде

$$A=\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}+2\sqrt[3]{bc}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}}{\beta+\gamma y_1+\delta y_1^2}=\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}+2\sqrt[3]{bc}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}}{g(y_1)},$$

где $\beta=a+b+c$, $\gamma=3\sqrt[3]{c^2}$, $\delta=3\sqrt[3]{c}$. Умножив числитель и знаменатель на $g(y_2)\ g(y_3)$, получим:

$$A=\frac{(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}+2\sqrt[3]{bc}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac})\ g(y_2)\ g(y_3)}{g(y_1)\ g(y_2)\ g(y_3)}.$$

Будем теперь обозначать через σ_1', σ_2', σ_3' элементарные симметрические многочлены от y_1, y_2, y_3, а через τ_1', τ_2' — элементарные симметрические многочлены от y_2, y_3. Тогда

$$g(y_1)\, g(y_2)\, g(y_3) = (\beta + \gamma y_1 + \delta y_1^2)(\beta + \gamma y_2 + \delta y_2^2)(\beta + \gamma y_3 + \delta y_3^2) =$$
$$= \beta^3 + \beta^2\gamma\sigma_1' + \beta^2\delta(\sigma_1'^2 - 2\sigma_2') + \beta\gamma^2\sigma_2' + \beta\gamma\delta(\sigma_1'\sigma_2' - 3\sigma_3') +$$
$$+ \beta\delta^2(\sigma_2'^2 - 2\sigma_1'\sigma_3') + \gamma^3\sigma_3' + \gamma^2\delta\sigma_1'\sigma_3' + \gamma\delta^2\sigma_2'\sigma_3' + \delta^3\sigma_3'^2.$$

Так как, по формулам Виета, $\sigma_1' = 0$, $\sigma_2' = 0$, $\sigma_3' = b$, то мы получаем:

$$g(y_1)\, g(y_2)\, g(y_3) = \beta^3 - 3\beta\gamma\delta \cdot b + \gamma^3 \cdot b + \delta^3 \cdot b^2 =$$
$$= (a+b+c)^3 - 27(a+b+c)bc + 27bc^2 + 27b^2c = (a+b+c)^3 - 27abc.$$

Далее,

$$g(y_2)\, g(y_3) = (\beta + \gamma y_2 + \delta y_2^2)(\beta + \gamma y_3 + \delta y_3^2) =$$
$$= \beta^2 + \beta\gamma\tau_1' + \beta\delta(\tau_1'^2 - 2\tau_2') + \gamma^2\tau_2' + \gamma\delta\tau_1'\tau_2' + \delta^2\tau_2'^2,$$

и потому, в силу соотношений (14),

$$g(y_2)\, g(y_3) = (a+b+c)^2 - 3(a+b+c)\sqrt[3]{bc^2} +$$
$$+ 3(a+b+c)\sqrt[3]{c}(\sqrt[3]{b^2} - 2\sqrt[3]{b^2}) + 9c\sqrt[3]{cb^2} - 9cb + 9\sqrt[3]{c^2} \cdot b\sqrt[3]{b} =$$
$$= (a+b+c)^2 - 9bc - 3(a-2b+c)\sqrt[3]{bc^2} - 3(a+b-2c)\sqrt[3]{b^2c}.$$

Окончательно получаем:

$$A = \left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2} + 2\sqrt[3]{bc} - \sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{ac}\right) \times$$
$$\times \frac{(a+b+c)^2 - 9bc - 3(a-2b+c)\sqrt[3]{bc^2} - 3(a+b-2c)\sqrt[3]{b^2c}}{(a+b+c)^3 - 27abc}.$$

Это выражение совпадает с тем, которое было получено на стр. 77 (в чём можно убедиться, раскрывая скобки в числителе). Как видите, на стр. 76—77 мы проще получили решение этого примера. Таким образом, изложенный в этом пункте метод не всегда даёт наиболее короткий путь решения, хотя и является общим.

44. Извлечение корней с помощью симметрических многочленов. Школьникам хорошо известен способ извлечения квадратных корней. Однако удобных способов извлечения корней более высокой степени (если не считать пользования таблицами, например логарифмическими) в школе не изучают. Извлечение корней можно сравнительно несложно выполнить с помощью так называемого метода последовательных приближений. Мы не будем подробно рассказывать об этом методе (см. Н. Я. Виленкин, «Метод последовательных приближений», М.: Физматгиз, 1961), а опишем один способ построения последовательных приближений, связанный с симметрическими многочленами.

Пусть надо вычислить $\sqrt[k]{N}$, где N — некоторое положительное число. В качестве «нулевых приближений» выберем произвольные положительные числа $a_1^{(0)}$, $a_2^{(0)}$, ..., $a_{k-1}^{(0)}$ и добавим к ним число $a_k^{(0)} = \dfrac{N}{a_1^{(0)}a_2^{(0)}\ldots a_{k-1}^{(0)}}$. Взятые числа обладают тем свойством, что их произведение $\sigma_k = a_1^{(0)}a_2^{(0)}\ldots a_k^{(0)}$ равно N. Вычислим теперь элементарные симметрические многочлены σ_1, σ_2,..., σ_k от чисел $a_1^{(0)}$, $a_1^{(0)}$, ..., $a_k^{(0)}$, составляющих нулевое приближение, и в качестве **первого** приближения возьмём числа

$$a_1^{(1)} = \frac{\sigma_1}{k}, \quad a_2^{(1)} = \frac{2\sigma_2}{(k-1)\sigma_1}, \quad a_3^{(1)} = \frac{3\sigma_3}{(k-2)\sigma_2}, \quad \ldots, \quad a_k^{(1)} = \frac{k\sigma_k}{1\cdot\sigma_{k-1}}.$$

Произведение всех чисел первого приближения равно

$$\frac{k!\ \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}{k!\ \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{k-1}} = \sigma_k,$$

т. е. по-прежнему равно N.

Теперь составим элементарные симметрические многочлены σ_1, σ_2, ..., σ_k от чисел $a_1^{(1)}$, $a_2^{(1)}$, ..., $a_k^{(1)}$, составляющих первое приближение, и по ним точно так же найдём следующее, второе, приближение:

$$a_1^{(2)} = \frac{\sigma_1}{k}, \quad a_2^{(2)} = \frac{2\sigma_2}{(k-1)\sigma_1}, \quad a_3^{(2)} = \frac{3\sigma_3}{(k-2)\sigma_2}, \quad dots, \quad a_k^{(2)} = \frac{k\sigma_k}{1\cdot\sigma_{k-1}}.$$

Произведение всех чисел второго приближения опять равно N. Затем по числам второго приближения составим третье приближение $a_1^{(3)}$, $a_2^{(3)}$, ..., $a_k^{(3)}$ и т. д.

Можно доказать, что при $n \to \infty$ каждая из величин $a_1^{(n)}$, ..., $a_k^{(n)}$, составляющих n-е приближение, стремится к $\sqrt[k]{N}$.

Рассмотрим два примера.

1°. При $k=2$, т. е. при извлечении квадратного корня мы имеем такие формулы:

$$a_2^{(0)} = \frac{N}{a_1^{(0)}}; \qquad a_1^{(1)} = \frac{\sigma_1}{2} = \frac{a_1^{(0)} + a_2^{(0)}}{2}, \qquad a_2^{(1)} = \frac{N}{a_1^{(1)}},$$

и вообще

$$a_1^{(n)} = \frac{a_1^{(n-1)} + a_2^{(n-1)}}{2}, \qquad a_2^{(n)} = \frac{N}{a_1^{(n)}}.$$

Пусть, например, требуется вычислить $\sqrt{3}$. Примем за $a_1^{(0)}$ число 2. Тогда получаем последовательно:

$$\begin{aligned}
&a_1^{(0)} = 2, && a_2^{(0)} = \frac{3}{2};\\
&a_1^{(1)} = \frac{2 + \frac{3}{2}}{2} = \frac{7}{4}, && a_2^{(1)} = \frac{3\cdot 4}{7} = \frac{12}{7};\\
&a_1^{(2)} = \frac{\frac{7}{4} + \frac{12}{7}}{2} = \frac{97}{56}, && a_2^{(2)} = \frac{3\cdot 56}{97} = \frac{168}{97};\\
&a_1^{(3)} = \frac{\frac{97}{56} + \frac{168}{97}}{2} = \frac{18\,817}{10\,864}, && a_2^{(3)} = \frac{3\cdot 10\,864}{18\,817} = \frac{32\,592}{18\,817};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Переводя простые дроби в десятичные, имеем:

$$a_1^{(3)} = 1{,}73205081\ldots, \qquad a_2^{(3)} = 1{,}73205080\ldots,$$

т. е. третье приближение даёт уже семь верных знаков после запятой! (Легко видеть, что одно из чисел $a_1^{(n)}$, $a_2^{(n)}$ даёт приближение числа $\sqrt{N}$ с избытком, а другое — с недостатком, ибо их произведение равно N.)

2°. При $k=3$, т. е. при извлечении кубического корня, формулы будут следующими:

$$a_3^{(0)} = \frac{N}{a_1^{(0)} a_2^{(0)}};$$

$$a_1^{(1)} = \frac{\sigma_1}{3} = \frac{a_1^{(0)} + a_2^{(0)} + a_3^{(0)}}{3},$$

$$a_2^{(1)} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{a_1^{(0)} a_2^{(0)} + a_1^{(0)} a_3^{(0)} + a_2^{(0)} a_3^{(0)}}{a_1^{(0)} + a_2^{(0)} + a_3^{(0)}}, \qquad a_3^{(1)} = \frac{N}{a_1^{(1)} a_2^{(1)}},$$

и вообще

$$a_1^{(n)}=\frac{a_1^{(n-1)}+a_2^{(n-1)}+a_3^{(n-1)}}{3},$$
$$a_2^{(n)}=\frac{a_1^{(n-1)}a_2^{(n-1)}+a_1^{(n-1)}a_3^{(n-1)}+a_2^{(n-1)}a_3^{(n-1)}}{a_1^{(n-1)}+a_2^{(n-1)}+a_3^{(n-1)}},\qquad a_3^{(n)}=\frac{N}{a_1^{(n)}a_2^{(n)}}.$$

Пусть, например, требуется вычислить $\sqrt[3]{2}$. Положим $a_1^{(0)}=a_2^{(0)}=$ $=1$. Тогда получаем последовательно:

$$a_1^{(0)}=1,\qquad a_2^{(0)}=1,\qquad a_3^{(0)}=\frac{2}{1\cdot 1}=2;$$

$$a_1^{(1)}=\frac{1+1+2}{3}=\frac{4}{3},\qquad a_2^{(1)}=\frac{1\cdot 1+1\cdot 2+1\cdot 2}{1+1+2}=\frac{5}{4},\qquad a_3^{(1)}=\frac{2}{\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}}=\frac{6}{5};$$

$$a_1^{(2)}=\frac{\frac{4}{3}+\frac{5}{4}+\frac{6}{5}}{3}=\frac{227}{180},\qquad a_2^{(2)}=\frac{\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}+\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}+\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}}{\frac{4}{3}+\frac{5}{4}+\frac{6}{5}}=\frac{286}{227},$$

$$a_3^{(2)}=\frac{2}{\frac{227}{180}\cdot\frac{286}{227}}=\frac{360}{286}.$$

Переводя обыкновенные дроби в десятичные, имеем:

$$a_1^{(2)}=1{,}2611111\ldots,\qquad a_2^{(2)}=1{,}2599118\ldots,\qquad a_3^{(2)}=1{,}2587412\ldots$$

Следующее приближение начнётся с числа

$$a_1^{(3)}=\frac{a_1^{(2)}+a_2^{(2)}+a_3^{(2)}}{3}=1{,}2599217\ldots$$

Если вычислить $a_2^{(3)}$ и $a_3^{(3)}$, то мы убедимся, что пять знаков здесь верные.

Д О П О Л Н Е Н И Е

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ

Встречаясь в этой книге с уравнениями третьей и более высоких степеней, мы опирались на некоторые утверждения, оставшиеся недоказанными. Здесь мы приведём доказательства этих утверждений и покажем, как искать целые корни многочленов с целочисленными коэффициентами.

45. Теорема Безу. При решении уравнений высших степеней оказывается полезной следующая теорема, называемая теоремой Безу.

Т е о р е м а. Остаток от деления многочлена

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

на $x - \alpha$ равен значению этого многочлена при $x = \alpha$, т. е. равен числу

$$f(\alpha) = a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Чтобы доказать эту теорему, разделим многочлен $f(x)$ на $x - \alpha$. Мы получим частное, которое обозначим через $q(x)$, и некоторый остаток $r(x)$. Этот остаток является многочленом, степень которого м е н ь ш е степени делителя $x - \alpha$, т. е. равна нулю. Поэтому $r(x) = r$ является числом. Итак,

$$f(x) = (x - \alpha)q(x) + r.$$

Чтобы найти число r, положим в этом равенстве $x = \alpha$. Мы получим $f(\alpha) = r$. Теорема Безу доказана.

С л е д с т в и е. Если число α является корнем многочлена $f(x)$ (т. е. если $f(\alpha) = 0$), то этот многочлен без остатка делится на $x - \alpha$.

Например, отсюда следует, что многочлен $x^n - a^n$ делится без остатка на $x - a$. В самом деле, заменяя x на a, получаем $f(a) = a^n - a^n = 0$. Предоставляем читателю доказать, что многочлены $x^{2n} - a^{2n}$ и $x^{2n+1} + a^{2n+1}$ делятся на $x + a$ (ср. стр. 73).

УПРАЖНЕНИЯ

1) Найти остаток от деления многочлена $x^{2n}+a^{2n}$ на $x+a$.

2) Доказать, что при любом натуральном n многочлен

$$(x+y+z)^{2n+1}-x^{2n+1}-y^{2n+1}-z^{2n+1}$$

делится на $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$.

46. Нахождение целых корней многочленов с целыми коэффициентами.

Теорема. Пусть все коэффициенты многочлена

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

являются целыми числами и α — целый корень этого многочлена. Тогда α является делителем свободного члена a_n.

В самом деле, по условию имеем:

$$f(\alpha)=a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\alpha+a_n=0,$$

и, значит,

$$a_n=-\alpha(a_0\alpha^{n-1}+a_1\alpha^{n-2}+\ldots+a_{n-1}).$$

Так как выражение в скобках является целым числом (все коэффициенты a_k, так же как и число α, — целые), то a_n делится на α.

Доказанное утверждение значительно облегчает отыскание целых корней многочленов с целыми коэффициентами. Именно, надо взять свободный член многочлена и выписать все его делители (как положительные, так и отрицательные). После этого, подставляя найденные делители в многочлен, посмотреть, какие из них обращают его в нуль. Если же окажется, что ни один делитель свободного члена не обращает многочлен в нуль, то этот многочлен не имеет целых корней.

Если свободный член a_n имеет слишком много делителей, то описанный метод может привести к большим вычислениям. В этом случае можно сократить объём вычислений с помощью следующего приёма. Заменим в многочлене

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

переменное x на $y+k$. Мы получим новый многочлен относительно y:

$$F(y)=a_0(y+k)^n+a_1(y+k)^{n-1}+\ldots+a_{n-1}(y+k)+a_n.$$

Раскрывая скобки, найдём, что свободный член нового многочлена равен $f(k)$, т. е. имеет вид

$$a_0k^n + a_1k^{n-1} + \ldots + a_{n-1}k + a_n$$

(в этом легко убедиться и с помощью теоремы Безу).

Так как $y = x - k$, то если многочлен $f(x)$ имеет корень α, многочлен $F(y)$ имеет корень $\alpha - k$. Но тогда, как было ранее доказано, свободный член многочлена $F(y)$, т. е. число $f(k)$, должен делиться на $\alpha - k$.

Итак, мы доказали следующее утверждение:

Пусть

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

— некоторый многочлен с целыми коэффициентами и α — его целый корень. Тогда для любого целого k число $\alpha - k$ является делителем числа $f(k)$.

Это утверждение позволяет значительно сократить объём работы. Именно, если уже найдены делители $b_1, \ldots, b_s$ свободного члена a_n многочлена $f(x)$, то надо взять какое-нибудь целое число k и посмотреть, для каких из этих делителей число $b_j - k$ является делителем числа $f(k)$. Только эти делители могут быть корнями многочлена $f(x)$. В качестве k удобнее брать небольшие числа, скажем, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$

Рассмотрим следующий пример.

Найти корни многочлена

$$f(x) = x^4 + 3x^3 - 15x^2 - 37x - 60.$$

Сначала выпишем все делители свободного члена -60:

$$1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5, 6, -6, 10,$$
$$-10, 12, -12, 15, -15, 20, -20, 30, -30, 60, -60.$$

Далее, положим $k = 1$ и составим числа $b_j - 1$:

$$0, -2, 1, -3, 2, -4, 3, -5, 4, -6, 5, -7, 9, -11,$$
$$11, -13, 14, -16, 19, -21, 29, -31, 59, -61.$$

Так как $f(1) = -108$, а число 108 не делится на 0, -5, 5, -7, -11, 11, -13, 14, -16, 19, -21, 29, -31, 59, -61, то из первоначально выбранных делителей остаются лишь числа -1, 2, -2, 3, -3, 4, 5, -5, 10. Чтобы ещё уменьшить число возможных целочисленных корней, положим $k = 2$ и составим числа $b_j - 2$. Ими будут числа -3, 0, -4, 1, -5, 2, 3, -7, 8. Но $f(2) = -154$, а 154 не делится на -3, 0, -4, -5, 3, 8. Остаются лишь три делителя свободного члена, которые могут претендовать на роль целого корня нашего многочлена: 3, 4 и -5.

Подстановка показывает, что числа 4 и −5 являются корнями заданного многочлена. По теореме Безу он делится на

$$(x-4)(x-5).$$

Выполнив деление, получим:

$$x^4+3x^3-15x^2-37x-60=(x-4)(x+5)(x^2+2x+3).$$

Значит, ещё два корня нашего многочлена получатся при решении квадратного уравнения

$$x^2+2x+3=0.$$

Этими корнями являются

$$x_{3,4}=-1\pm\sqrt{-2}=-1\pm i\sqrt{2}.$$

Метод, применённый для нахождения целых корней многочлена, годится и для отыскания рациональных корней многочлена

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

с целыми коэффициентами.

Почти так же как и в случае целых корней, доказываем следующее утверждение:

рациональные корни многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами могут иметь лишь вид $\frac{p}{q}$, где p — делитель свободного члена a_n, а q — делитель коэффициента a_0 при старшем члене. При этом, если $\frac{p}{q}$ — корень многочлена $f(x)$, то при любом целом значении k число $p-kq$ является делителем числа $f(k)$.

Из этого утверждения следует, в частности, что *приведённый* многочлен с целыми коэффициентами, т. е. многочлен, у которого коэффициент a_0 при старшем члене равен 1, не может иметь рациональных, но не целых корней.

Впрочем, иногда удобнее свести отыскание рациональных корней многочлена $f(x)$ к отысканию целых корней некоторого другого многочлена с целыми коэффициентами. Это делается следующим образом. Умножим многочлен $f(x)$ на a_0^{n-1} (от этого его корни не изменятся) и положим $a_0x=y$. Мы получим тогда приведённый многочлен

$$F(y)=y^n+a_1y^{n-1}+a_2a_0y^{n-2}+\ldots+a_na_0^{n-1}$$

с целыми коэффициентами.

УПРАЖНЕНИЯ

Найти корни следующих многочленов:

1) $x^4 - 4x^3 - 13x^2 + 28x + 12$;

2) $x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 12$;

3) $x^5 + 2x^4 - 10x^3 - 20x^2 + 9x + 18$;

4) $x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 9x^2 - 11x - 6$;

5) $x^6 - x^5 - 8x^4 + 14x^3 + x^2 - 13x + 6$;

6) $4x^4 + 8x^3 - x^2 - 8x - 3$.

47. Нахождение целых комплексных корней. Метод, похожий на описанный в предыдущем пункте, позволяет искать и комплексные корни вида $\alpha + \beta i$, для которых α и β — целые числа. Именно, справедливо следующее утверждение:

Пусть

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

— многочлен с целыми действительными коэффициентами и $\alpha + \beta i$ — его целый комплексный корень ($\beta \neq 0$). Тогда свободный член a_n делится на $\alpha^2 + \beta^2$.

В самом деле, поскольку коэффициенты многочлена $f(x)$ действительны, то, кроме корня $\alpha + \beta i$, он имеет ещё сопряжённый с ним корень $\alpha - \beta i$. Поэтому, в силу теоремы Безу, многочлен $f(x)$ должен делиться на квадратный трёхчлен

$$(x - \alpha - \beta i)(x - \alpha + \beta i) = (x - \alpha)^2 + \beta^2 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2.$$

Итак,

$$f(x) = (x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)\, q(x),$$

где частное $q(x)$ представляет собой некоторый многочлен степени $n - 2$. При этом, как следует из правила деления многочлена на многочлен, все коэффициенты многочлена $q(x)$ являются целыми действительными числами. Но свободный член произведения равен произведению свободных членов сомножителей, и значит,

$$a_n = (\alpha^2 + \beta^2)\, b_{n-2},$$

где b_{n-2} — свободный член частного $q(x)$. Тем самым наше утверждение доказано.

Отыскание целых комплексных корней несколько сложнее отыскания целых действительных корней. Именно, сначала надо выписать все положительные делители свободного члена, потом выяснить все способы, которыми эти делители представляются в виде суммы двух квадратов $\alpha^2 + \beta^2$, и, наконец, посмотреть, какие из комплексных чисел $\pm\alpha \pm \beta i$ (для найденных значений α и β) являются корнями многочлена.

Но и здесь дело значительно облегчается следующим замечанием: если $\alpha + \beta i$ — целый комплексный корень многочлена

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

с целыми коэффициентами ($\beta \neq 0$), то для любого целого k число $f(k)$ делится на $(\alpha - k)^2 + \beta^2$.

Это утверждение доказывается точно так же, как и для целых действительных корней. Пользуясь этим замечанием, можно отсеять многие возможности. Рассмотрим пример.

Найти целые комплексные корни многочлена

$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 27x^2 - 50x + 50.$$

Свободный член равен 50 и имеет следующие положительные целые делители: 1, 2, 5, 10, 25, 50. Разложение этих делителей на сумму двух квадратов $\alpha^2+\beta^2$, где $\beta \neq 0$, имеет вид

$$
\begin{aligned}
1 &= 0^2 + 1^2;\\
2 &= 1^2 + 1^2;\\
5 &= 2^2 + 1^2 = 1^2 + 2^2;\\
10 &= 3^2 + 1^2 = 1^2 + 3^2;\\
25 &= 4^2 + 3^2 = 3^2 + 4^2 = 0^2 + 5^2;\\
50 &= 7^2 + 1^2 = 5^2 + 5^2 = 1^2 + 7^2.
\end{aligned}
$$

Значит, наше уравнение может иметь лишь следующие целые корни (как действительные, так и комплексные)

$$1;\ -1;\ 2;\ -2;\ 5;\ -5;\ 10;\ -10;\ 25;\ -25;\ 50;\ -50;\ i;\ -i;\ 1+i;\ 1-i;\ -1+i;\ -1-i;$$
$$2+i;\ 2-i;\ -2+i;\ -2-i;\ 1+2i;\ 1-2i;\ -1+2i;\ -1-2i;$$
$$3+i;\ 3-i;\ -3+i;\ -3-i;\ 1+3i;\ 1-3i;\ -1+3i;\ -1-3i;$$
$$4+3i;\ 4-3i;\ -4+3i;\ -4-3i;\ 3+4i;\ 3-4i;$$
$$-3+4i;\ -3-4i;\ 5i;\ -5i;\ 7+i;\ 7-i;\ -7+i;\ -7-i;$$
$$1+7i;\ 1-7i;\ -1+7i;\ -1-7i;\ 5+5i;\ 5-5i;\ -5+5i;\ -5-5i.$$

Мы получили 56 чисел, которые могут оказаться корнями нашего многочлена. Чтобы отсеять часть из них, положим $k=1$. Так как $f(1)=20$, то годятся лишь те комплексные корни $\alpha+\beta i$, для которых $(\alpha-1)^2+\beta^2$ является делителем числа 20 (и те действительные корни α, для которых $\alpha-1$ является делителем числа 20). Проверка показывает, что остаются лишь следующие 20 возможных корней:

$$-1;\ 2;\ 5;\ i;\ -i;\ 1+i;\ 1-i;\ -1+i;\ -1-i;\ 2+i;$$
$$2-i;\ -2+i;\ -2-i;\ 1+2i;\ 1-2i;\ 3+i;$$
$$3-i;\ 5;\ 3+4i;\ 3-4i.$$

Положим теперь $k=-1$ и отберём такие из этих чисел, для которых $(\alpha+1)^2+\beta^2$ является делителем числа $f(-1)$, т. е. числа 136. Теперь останутся лишь 10 чисел:

$$i;\ -i;\ -1+i;\ -1-i;\ -2+i;\ -2-i;$$
$$1+2i;\ 1-2i;\ 3+i;\ 3-i.$$

Наконец, возьмём $k=3$ и отберём числа, для которых $(\alpha-3)^2+\beta^2$ является делителем числа $f(3)=8$. Это будут числа

$$1+2i;\ 1-2i;\ 3+i;\ 3-i.$$

(Можно было бы взять $k=2$ и $k=-2$, но при этом «лишние» корни отсеивались бы медленнее.)

Проверка показывает, что найденные четыре числа и являются корнями нашего многочлена.

УПРАЖНЕНИЯ

Найти корни следующих многочленов:

1) $x^4+2x^3-6x^2-22x+65$; **2)** $x^6+2x^5+11x^4-4x^3+75x^2-6x+65$;
3) $x^4-7x^3+10x^2+26x-60$; **4)** $x^5+5x^3+20x^2-6x-20$;
5) $x^5-3x^4+12x^3-34x^2+104x-8$.

48. Основная теорема алгебры и разложение многочленов на множители первой степени. В п. 21 (стр. 56) мы рассматривали разложение кубического многочлена на множители первой степени. Таким разложением обладает вообще любой многочлен, степень которого отлична от нуля. Именно, справедлива следующая

Теорема. Любой многочлен

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

степень которого отлична от нуля, может быть представлен в виде произведения

$$f(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n). \qquad (*)$$

Это разложение единственно с точностью до порядка сомножителей.

Доказательство основано на следующей теореме, которую называют основной теоремой алгебры:

Любой многочлен $f(x)$, степень которого отлична от нуля, имеет по крайней мере один корень.

Здесь коэффициенты и корни многочлена могут быть как действительными, так и комплексными числами.

Хотя по своей формулировке основная теорема алгебры имеет чисто алгебраический характер, по методам доказательства она является неалгебраической теоремой. Известны доказательства основной теоремы алгебры, полученные методами математического анализа, топологии и других разделов математики. Но во всех этих доказательствах в той или иной форме используется неалгебраическая идея непрерывности. «Чисто алгебраического» доказательства основной теоремы алгебры, т. е. доказательства, проведённого целиком в терминах алгебры многочленов, не существует. Вот почему в этой книге, не выходящей за рамки алгебры многочленов, мы не будем приводить доказательства основной теоремы алгебры. Идею её доказательства читатель может найти в книге Р. Куранта и Г. Роббинса «Что такое математика» (МЦНМО, 2001, стр. 127—129), а подробно проведённое доказательство — в учебниках высшей алгебры (А. Г. Курош, «Курс высшей алгебры»; Л. Я. Окунев, «Высшая алгебра», и др.).

Итак, примем здесь основную теорему алгебры без доказательства. Перейдём теперь к доказательству теоремы о разложении многочлена на множители первой степени. Мы проведём его с помощью индукции по степени n многочлена $f(x)$. Любой многочлен первой степени имеет вид

$$f(x) = a_0x + a_1 \quad (a_0 \neq 0),$$

и потому

$$f(x) = a_0 \left(x + \frac{a_1}{a_0}\right).$$

Единственность разложения в этом случае очевидна. Таким образом, для многочленов первой степени теорема доказана.

Предположим теперь, что эта теорема доказана для всех многочленов, имеющих степень, м е н ь ш у ю чем n. Возьмём произвольный многочлен

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

степени n. Согласно основной теореме алгебры, он имеет хотя бы один корень α_1. Но тогда, по теореме Безу, многочлен $f(x)$ делится без остатка на $x - \alpha_1$, т. е.

$$f(x) = (x - \alpha_1)q(x),$$

где $q(x)$ — некоторый многочлен степени $n - 1$. Ясно, что старший член многочлена $q(x)$ равен a_0x^{n-1}. Но по предположению индукции, многочлен $q(x)$ можно следующим образом разложить на множители:

$$q(x) = a_0(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n)$$

где ($\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — некоторые числа). Следовательно,

$$f(x) = (x - \alpha_1)q(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n).$$

Мы доказали, что многочлен $f(x)$ разлагается на множители первой степени. Осталось доказать, что это разложение единственно (с точностью до перестановки сомножителей).

Предположим, что

$$a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n) = b_0(x - \beta_1)(x - \beta_2)\ldots(x - \beta_n). \qquad (**)$$

Сравнивая коэффициенты при x^n слева и справа, убеждаемся, что $a_0 = b_0$.

Далее, заметим, что при $x = \alpha_1$ левая часть равенства (**) обращается в нуль. Следовательно, должна обращаться в нуль и правая часть этого же равенства. Но тогда одно из чисел $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ должно быть равно α_1: в противном случае в правой части мы имели бы произведение n отличных от нуля разностей $\alpha_1 - \beta_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть, например, $\beta_1 = \alpha_1$. Тогда обе части равенства (**) можно сократить на $x - \alpha_1$. Мы получим:

$$(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n) = (x-\beta_2)\ldots(x-\beta_n).$$

Но теперь обе части равенства являются уже многочленами степени $n-1$ и, по предположению индукции, множители первой степени слева и справа могут отличаться лишь порядком следования. Тем самым доказано, что и в равенстве (**) множители справа и слева могут отличаться лишь порядком следования. Теорема доказана.

Итак, для каждого многочлена n-й степени $f(x)$ однозначно определяется совокупность n чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, позволяющая записать этот многочлен в виде (*) (см. формулировку теоремы). Заметим, что числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ могут оказаться попарно различными, а может случиться и так, что среди них есть совпадающие. Сразу видно, что числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ являются корнями многочлена $f(x)$. Других же корней у многочлена $f(x)$ нет: ведь если в соотношение (*) подставить вместо x любое число, не совпадающее ни с одним из чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, то ни один из множителей в правой части не обратится в нуль, т. е. будет $f(x) \neq 0$.

Теперь мы имеем возможность дать точное определение термина «совокупность всех корней многочлена $f(x)$»: по определению под совокупностью всех корней мы условливаемся понимать числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Если среди них имеются совпадающие, то мы говорим, что у многочлена есть *кратные* корни. Именно, если среди чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ встречается k раз число α, а все остальные из этих чисел отличны от α, то число α называется *k-кратным* корнем многочлена $f(x)$. Такое понимание, при котором каждый корень считается столько раз, какова его кратность, позволяет утверждать, что

каждое уравнение n-й степени имеет равно n корней.

Это значительно уточняет основную теорему алгебры.

РЕШЕНИЯ УПРАЖНЕНИЙ

К стр. 22.

1) Введение новых неизвестных $\sigma_1 = x + y$, $\sigma_2 = xy$ превращает исходную систему в следующую вспомогательную систему:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 5, \\ \sigma_1^2 - 3\sigma_2 = 7. \end{cases}$$

Её решение $\sigma_1 = 5$, $\sigma_2 = 6$. Это даёт два решения исходной системы:

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 3, \\ y_2 = 2. \end{cases}$$

2) После домножения второго уравнения на xy и введения новых неизвестных σ_1, σ_2, получаем следующую вспомогательную систему:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 7, \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = \dfrac{25}{12}\sigma_2. \end{cases}$$

Её решение $\sigma_1 = 7$, $\sigma_2 = 12$. Исходная система имеет два решения:

$$\begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 4, \\ y_2 = 3. \end{cases}$$

3) Вспомогательная система:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 1, \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 0. \end{cases}$$

Её решение $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = \dfrac{1}{2}$. Решения исходной системы:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2}, \\ y_1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{i}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{i}{2}, \\ y_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2}. \end{cases}$$

19—1990

4) Вспомогательная система:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 5, \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 65. \end{cases}$$

Её решение $\sigma_1 = 5$, $\sigma_2 = 4$. Решения исходной системы:

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 4, \\ y_2 = 1. \end{cases}$$

5) Вспомогательная система:

$$\begin{cases} 4\sigma_1 = 3\sigma_2, \\ \sigma_1 + \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 26. \end{cases}$$

Исключая σ_2, получаем квадратное уравнение $3\sigma_1^2 - 5\sigma_1 - 78 = 0$. Отсюда находим два решения вспомогательной системы:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 6, \\ \sigma_2 = 8; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = -\dfrac{13}{3}, \\ \sigma_2 = -\dfrac{52}{9}. \end{cases}$$

Каждое из них даёт два решения исходной системы:

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 4, \\ y_2 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \dfrac{-13 + \sqrt{377}}{6}, \\ y_3 = \dfrac{-13 - \sqrt{377}}{6}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = \dfrac{-13 - \sqrt{377}}{6}, \\ y_4 = \dfrac{-13 + \sqrt{377}}{6}. \end{cases}$$

6) Вспомогательная система:

$$\begin{cases} \sigma_1^2 - 2\sigma_2 + \sigma_1 = 32, \\ 12\sigma_1 = 7\sigma_2. \end{cases}$$

Исключая σ_2, получаем квадратное уравнение $7\sigma_1^2 - 17\sigma_1 - 224 = 0$. Отсюда находим два решения вспомогательной системы:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 7, \\ \sigma_2 = 12; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = -\dfrac{32}{7}, \\ \sigma_2 = -\dfrac{384}{49}. \end{cases}$$

Каждое из них даёт два решения исходной системы:

$$\begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 4, \\ y_2 = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \dfrac{-16 + 8\sqrt{10}}{7}, \\ y_3 = \dfrac{-16 - 8\sqrt{10}}{7}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = \dfrac{-16 - 8\sqrt{10}}{7}, \\ y_4 = \dfrac{-16 + 8\sqrt{10}}{7}. \end{cases}$$

7) Вспомогательная система:

$$\begin{cases} \sigma_2 = 15, \\ \sigma_1 + \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 42. \end{cases}$$

Исключая σ_2, получаем квадратное уравнение $\sigma_1^2+\sigma_1-72=0$. Отсюда находим два решения вспомогательной системы:

$$\begin{cases}\sigma_1=8,\\ \sigma_2=15;\end{cases}\quad \begin{cases}\sigma_1=-9,\\ \sigma_2=15.\end{cases}$$

Каждое из них даёт два решения исходной системы:

$$\begin{cases}x_1=3,\\ y_1=5;\end{cases}\quad \begin{cases}x_2=5,\\ y_2=3;\end{cases}\quad \begin{cases}x_3=\dfrac{-9+\sqrt{21}}{2},\\ y_3=\dfrac{-9-\sqrt{21}}{2};\end{cases}\quad \begin{cases}x_4=\dfrac{-9-\sqrt{21}}{2},\\ y_4=\dfrac{-9+\sqrt{21}}{2}.\end{cases}$$

8) Вспомогательная система:

$$\begin{cases}\sigma_1+\sigma_2=7,\\ \sigma_1^2-\sigma_2=13.\end{cases}$$

Складывая, получаем квадратное уравнение $\sigma_1^2+\sigma_1-20=0$. Отсюда находим два решения вспомогательной системы:

$$\begin{cases}\sigma_1=4,\\ \sigma_2=3;\end{cases}\quad \begin{cases}\sigma_1=-5,\\ \sigma_2=12.\end{cases}$$

Каждое из них даёт два решения исходной системы:

$$\begin{cases}x_1=1,\\ y_1=3;\end{cases}\quad \begin{cases}x_2=3,\\ y_2=1;\end{cases}\quad \begin{cases}x_3=\dfrac{-5+i\sqrt{23}}{2},\\ y_3=\dfrac{-5-i\sqrt{23}}{2};\end{cases}\quad \begin{cases}x_4=\dfrac{-5-i\sqrt{23}}{2},\\ y_4=\dfrac{-5+i\sqrt{23}}{2}.\end{cases}$$

9) Вспомогательная система:

$$\begin{cases}\sigma_1^2-3\sigma_2=19,\\ \sigma_1-\sigma_2=7.\end{cases}$$

Исключая σ_2, получаем квадратное уравнение $\sigma_1^2-3\sigma_1+2=0$. Отсюда находим два решения вспомогательной системы:

$$\begin{cases}\sigma_1=1,\\ \sigma_2=-6;\end{cases}\quad \begin{cases}\sigma_1=2,\\ \sigma_2=-5.\end{cases}$$

Каждое из них даёт два решения исходной системы:

$$\begin{cases}x_1=3,\\ y_1=-2;\end{cases}\quad \begin{cases}x_2=-2,\\ y_2=3;\end{cases}\quad \begin{cases}x_3=1+\sqrt{6},\\ y_3=1-\sqrt{6};\end{cases}\quad \begin{cases}x_4=1-\sqrt{6},\\ y_4=1+\sqrt{6}.\end{cases}$$

10) Если $x=y$, то первое уравнение удовлетворяется тождественно, а второе принимает вид $2x^3=14x$. Отсюда легко находим три решения исходной системы:

$$\begin{cases}x_1=0,\\ y_1=0;\end{cases}\quad \begin{cases}x_2=\sqrt{7},\\ y_2=\sqrt{7};\end{cases}\quad \begin{cases}x_3=-\sqrt{7},\\ y_3=-\sqrt{7}.\end{cases}$$

Аналогично, если $x=-y$, то второе уравнение удовлетворяется тождественно, а первое принимает вид $2x^3=38x$. Это даёт ещё два решения:

$$\begin{cases} x_4=\sqrt{19}, \\ y_4=-\sqrt{19}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_5=-\sqrt{19}, \\ y_5=\sqrt{19}. \end{cases}$$

Наконец, если $x \neq \pm y$, то обе части первого уравнения можно сократить на $x-y$, а обе части второго — на $x+y$. Получаем систему:

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=19, \\ x^2-xy+y^2=7. \end{cases}$$

Вспомогательная система имеет вид

$$\begin{cases} \sigma_1^2-\sigma_2=19, \\ \sigma_1^2-3\sigma_2=7. \end{cases}$$

Отсюда находим: $\sigma_1^2=25$, $\sigma_2=6$, и потому вспомогательная система имеет два решения:

$$\begin{cases} \sigma_1=5, \\ \sigma_2=6; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_1=-5, \\ \sigma_2=6. \end{cases}$$

Каждое из них даёт ещё два решения исходной системы:

$$\begin{cases} x_6=2, \\ y_6=3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_7=3, \\ y_7=2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_8=-2, \\ y_8=-3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_9=-3, \\ y_9=-2. \end{cases}$$

11) Освобождаясь от знаменателей и вводя вспомогательные неизвестные σ_1, σ_2, получаем вспомогательную систему

$$\begin{cases} \sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2=12\sigma_2, \\ 3\sigma_1=\sigma_2. \end{cases}$$

Исключая σ_2, получаем кубическое уравнение $\sigma_1^3-9\sigma_1^2-36\sigma_1=0$. Отсюда легко находим три решения вспомогательной системы:

$$\begin{cases} \sigma_1=0, \\ \sigma_2=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_1=12, \\ \sigma_2=36; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_1=-3, \\ \sigma_2=-9. \end{cases}$$

Первое из них даёт $x=y=0$, что, очевидно, не является решением исходной системы. Второе даёт два совпадающих решения:

$$\begin{cases} x_1=6, \\ y_1=6; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=6, \\ y_2=6. \end{cases}$$

Наконец, третье даёт ещё два решения:

$$\begin{cases} x_3=\dfrac{-3+3\sqrt{5}}{2}, \\ y_3=\dfrac{-3-3\sqrt{5}}{2}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4=\dfrac{-3-3\sqrt{5}}{2}, \\ y_4=\dfrac{-3+3\sqrt{5}}{2}. \end{cases}$$

12) Освобождаясь от знаменателей и вводя вспомогательные неизвестные σ_1, σ_2, получаем систему

$$\begin{cases} \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 18\sigma_2, \\ \sigma_1 = 12, \end{cases}$$

из которой легко находим $\sigma_1 = 12$, $\sigma_2 = 32$. Это даёт два решения исходной системы:

$$\begin{cases} x_1 = 4, \\ y_1 = 8; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 8, \\ y_2 = 4. \end{cases}$$

13) Вспомогательная система имеет вид

$$\begin{cases} \sigma_1 = a, \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = b(\sigma_1^2 - 2\sigma_2), \end{cases}$$

откуда находим $(3a - 2b)\sigma_2 = a^3 - a^2b$. Если число $3a - 2b$ отлично от нуля, то мы получаем единственное значение для σ_2:

$$\sigma_2 = \frac{a^3 - a^2b}{3a - 2b}.$$

В этом случае исходная система имеет два решения:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a}{2} + \sqrt{\dfrac{-a^3 + 2a^2b}{4(3a - 2b)}}, \\ y_1 = \dfrac{a}{2} - \sqrt{\dfrac{-a^3 + 2a^2b}{4(3a - 2b)}}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \dfrac{a}{2} - \sqrt{\dfrac{-a^3 + 2a^2b}{4(3a - 2b)}}, \\ y_2 = \dfrac{a}{2} - \sqrt{\dfrac{-a^3 + 2a^2b}{4(3a - 2b)}}. \end{cases}$$

Если $3a - 2b = 0$, но $a^3 - a^2b \neq 0$, то вспомогательная система (а значит, и исходная система) решений не имеет. Наконец, если $3a - 2b = 0$ и $a^3 - a^2b = 0$, т. е. $a = b = 0$, то при $\sigma_1 = 0$ и л ю б о м σ_2 мы получаем решение вспомогательной системы. Следовательно, в этом случае, любая пара чисел x, y, удовлетворяющая условию $x + y = 0$, служит решением исходной системы.

14) После освобождения от знаменателей и введения новых неизвестных получаем вспомогательную систему

$$\begin{cases} \sigma_1\sigma_2 = 30, \\ 6\sigma_1 = 5\sigma_2. \end{cases}$$

Эта система имеет два решения

$$\begin{cases} \sigma_1 = 5, \\ \sigma_2 = 6; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = -5, \\ \sigma_2 = -6, \end{cases}$$

каждое из которых даёт два решения исходной системы:

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 3, \\ y_2 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -6, \\ y_3 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = 1, \\ y_4 = -6. \end{cases}$$

15) Вспомогательная система

$$\begin{cases} \sigma_1\sigma_2 = 20, \\ 4\sigma_1 = 5\sigma_2 \end{cases}$$

имеет два решения

$$\begin{cases} \sigma_1 = 5, \\ \sigma_2 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = -5, \\ \sigma_2 = -4, \end{cases}$$

каждое из которых даёт два решения исходной системы:

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 4, \\ y_2 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \dfrac{-5+\sqrt{41}}{2}, \\ y_3 = \dfrac{-5-\sqrt{41}}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = \dfrac{-5-\sqrt{41}}{2}, \\ y_4 = \dfrac{-5+\sqrt{41}}{2}. \end{cases}$$

16) Вспомогательная система:

$$\begin{cases} \sigma_1^2 - 2\sigma_2 + 2\sigma_1 = 23, \\ \sigma_1^2 - \sigma_2 = 19. \end{cases}$$

Исключая σ_2, получаем квадратное уравнение $\sigma_1^2 - 2\sigma_1 - 15 = 0$. Отсюда находим два решения вспомогательной системы:

$$\begin{cases} \sigma_1 = -3, \\ \sigma_2 = -10; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = 5, \\ \sigma_2 = 6. \end{cases}$$

Каждое из них даёт два решения исходной системы:

$$\begin{cases} x_1 = -5, \\ y_1 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 2, \\ y_2 = -5; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 2, \\ y_3 = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = 3, \\ y_4 = 2. \end{cases}$$

17) Вспомогательная система:

$$\begin{cases} \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + \sigma_2^2 = 1153, \\ \sigma_1^2 - 3\sigma_2 = 33. \end{cases}$$

Исключая σ_1, получаем квадратное уравнение $\sigma_2^2 - 33\sigma_2 + 32 = 0$. Отсюда находим четыре решения вспомогательной системы:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \pm 6, \\ \sigma_2 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = \pm\sqrt{129}, \\ \sigma_2 = 32. \end{cases}$$

Каждое из них даёт два решения исходной системы:

$$\begin{cases} x_1 = 3+\sqrt{8}, \\ y_1 = 3-\sqrt{8}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 3-\sqrt{8}, \\ y_2 = 3+\sqrt{8}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -3+\sqrt{8}, \\ y_3 = -3-\sqrt{8}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -3-\sqrt{8}, \\ y_4 = -3+\sqrt{8}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_5 = \dfrac{\sqrt{129}+1}{2}, \\ y_5 = \dfrac{\sqrt{129}-1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_6 = \dfrac{\sqrt{129}-1}{2}, \\ y_6 = \dfrac{\sqrt{129}+1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_7 = \dfrac{-\sqrt{129}+1}{2}, \\ y_7 = \dfrac{-\sqrt{129}-1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_8 = \dfrac{-\sqrt{129}-1}{2}, \\ y_8 = \dfrac{-\sqrt{129}+1}{2}. \end{cases}$$

18) Освобождаясь от знаменателей и вводя новые неизвестные σ_1, σ_2, получаем вспомогательную систему

$$\begin{cases} 7(\sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2) = 31(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2), \\ \sigma_1^2 - \sigma_2 = 3. \end{cases}$$

Сокращая первое уравнение на σ_1 (что, как легко видеть, не ведёт к потере решений) и подставляя вместо σ_2 его значение из второго уравнения, получаем биквадратное уравнение $7\sigma_1^4 - 43\sigma_1^2 + 36 = 0$. Отсюда находим четыре решения вспомогательной системы:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \pm 1, \\ \sigma_2 = -2; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_1 = \pm \dfrac{6}{\sqrt{7}}, \\ \sigma_2 = \dfrac{15}{7}. \end{cases}$$

Каждое из них даёт два решения исходной системы:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -2, \\ y_3 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = 1, \\ y_4 = -2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_5 = \dfrac{3 + i\sqrt{6}}{\sqrt{7}}, \\ y_5 = \dfrac{3 - i\sqrt{6}}{\sqrt{7}}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_6 = \dfrac{3 - i\sqrt{6}}{\sqrt{7}}, \\ y_6 = \dfrac{3 + i\sqrt{6}}{\sqrt{7}}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_7 = \dfrac{-3 + i\sqrt{6}}{\sqrt{7}}, \\ y_7 = \dfrac{-3 - i\sqrt{6}}{\sqrt{7}}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_8 = \dfrac{-3 - i\sqrt{6}}{\sqrt{7}}, \\ y_8 = \dfrac{-3 + i\sqrt{6}}{\sqrt{7}}. \end{cases}$$

19) Вспомогательная система:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 4, \\ \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 = 82. \end{cases}$$

Её решения:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 4, \\ \sigma_2 = 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_1 = 4, \\ \sigma_2 = 29. \end{cases}$$

Каждое из них даёт два решения исходной системы:

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 2 + 5i, \\ y_3 = 2 - 5i; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = 2 - 5i, \\ y_4 = 2 + 5i. \end{cases}$$

20) Вспомогательная система:

$$\begin{cases} \sigma_1 = a, \\ \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 = a^4. \end{cases}$$

Её решения:

$$\begin{cases} \sigma_1 = a, \\ \sigma_2 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_1 = a, \\ \sigma_2 = 2a^2. \end{cases}$$

Каждое из них даёт два решения исходной системы:

$$\begin{cases} x_1 = a, \\ y_1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 0, \\ y_2 = a; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \dfrac{a}{2}(1 + i\sqrt{7}), \\ y_3 = \dfrac{a}{2}(1 - i\sqrt{7}); \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = \dfrac{a}{2}(1 - i\sqrt{7}), \\ y_4 = \dfrac{a}{2}(1 + i\sqrt{7}). \end{cases}$$

21) Вспомогательная система:

$$\begin{cases} \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 = a^4, \\ \sigma_1 = b. \end{cases}$$

Её решения:

$$\begin{cases} \sigma_1 = b, \\ \sigma_2 = b^2 \pm \sqrt{\dfrac{a^4+b^4}{2}}. \end{cases}$$

Каждое из них даёт два решения исходной системы:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b}{2} + \sqrt{-\dfrac{3}{4}b^2 + \sqrt{\dfrac{a^4+b^4}{2}}}, \\ y_1 = \dfrac{b}{2} - \sqrt{-\dfrac{3}{4}b^2 + \sqrt{\dfrac{a^4+b^4}{2}}}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \dfrac{b}{2} - \sqrt{-\dfrac{3}{4}b^2 + \sqrt{\dfrac{a^4+b^4}{2}}}, \\ y_2 = \dfrac{b}{2} + \sqrt{-\dfrac{3}{4}b^2 + \sqrt{\dfrac{a^4+b^4}{2}}}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = \dfrac{b}{2} + \sqrt{-\dfrac{3}{4}b^2 - \sqrt{\dfrac{a^4+b^4}{2}}}, \\ y_3 = \dfrac{b}{2} - \sqrt{-\dfrac{3}{4}b^2 - \sqrt{\dfrac{a^4+b^4}{2}}}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = \dfrac{b}{2} - \sqrt{-\dfrac{3}{4}b^2 - \sqrt{\dfrac{a^4+b^4}{2}}}, \\ y_4 = \dfrac{b}{2} + \sqrt{-\dfrac{3}{4}b^2 - \sqrt{\dfrac{a^4+b^4}{2}}}. \end{cases}$$

22) Вспомогательная система:

$$\begin{cases} \sigma_1 = a, \\ \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 - 12\sigma_2^2 = 0. \end{cases}$$

Её решения:

$$\begin{cases} \sigma_1 = a, \\ \sigma_2 = \dfrac{a^2}{6}; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = a, \\ \sigma_2 = -\dfrac{a^2}{2}. \end{cases}$$

Каждое из них даёт два решения исходной системы:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a}{2}\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right), \\ y_1 = \dfrac{a}{2}\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right); \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \dfrac{a}{2}\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right), \\ y_2 = \dfrac{a}{2}\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right); \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \dfrac{a}{2}(1+\sqrt{3}), \\ y_3 = \dfrac{a}{2}(1-\sqrt{3}); \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = \dfrac{a}{2}(1-\sqrt{3}), \\ y_4 = \dfrac{a}{2}(1+\sqrt{3}). \end{cases}$$

23) Вспомогательная система:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 0, \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 + \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 = b. \end{cases}$$

Её решения:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 0, \\ \sigma_2 = \dfrac{1}{2} \pm \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{b}{2}}. \end{cases}$$

Каждое из них даёт два решения исходной системы:

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{1+2b}}{2}}, \\ y_1 = -\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{1+2b}}{2}}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = -\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{1+2b}}{2}}, \\ y_2 = \sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{1+2b}}{2}}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = \sqrt{\dfrac{-1-\sqrt{1+2b}}{2}}, \\ y_3 = -\sqrt{\dfrac{-1-\sqrt{1+2b}}{2}}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4 = -\sqrt{\dfrac{-1-\sqrt{1+2b}}{2}}, \\ y_4 = \sqrt{\dfrac{-1-\sqrt{1+2b}}{2}}. \end{cases}$$

24) Вспомогательная система:

$$\begin{cases} \sigma_1 = a, \\ \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 = b^5. \end{cases}$$

Её решения:

$$\begin{cases} \sigma_1 = a, \\ \sigma_2 = \dfrac{a^2}{2} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a^5+4b^5}{5a}}. \end{cases}$$

Каждое из них даёт два решения исходной системы:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a}{2} + \sqrt{-\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a^5+4b^5}{5a}}}, \\ y_1 = \dfrac{a}{2} - \sqrt{-\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a^5+4b^5}{5a}}}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = \dfrac{a}{2} - \sqrt{-\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a^5+4b^5}{5a}}}, \\ y_2 = \dfrac{a}{2} + \sqrt{-\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a^5+4b^5}{5a}}}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = \dfrac{a}{2} + \sqrt{-\dfrac{a^2}{4} - \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a^5+4b^5}{5a}}}, \\ y_3 = \dfrac{a}{2} - \sqrt{-\dfrac{a^2}{4} - \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a^5+4b^5}{5a}}}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4 = \dfrac{a}{2} - \sqrt{-\dfrac{a^2}{4} - \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a^5+4b^5}{5a}}}, \\ y_4 = \dfrac{a}{2} + \sqrt{-\dfrac{a^2}{4} - \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a^5+4b^5}{5a}}}. \end{cases}$$

25) Вспомогательная система:

$$\begin{cases} (\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2)(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) = 2b^5, \\ \sigma_1 = b. \end{cases}$$

Подставляя значение $\sigma_1 = b$ в первое уравнение, получаем квадратное уравнение $6\sigma_2^2 - 5b^2\sigma_2 - b^4 = 0$. Отсюда находим два решения:

$$\begin{cases} \sigma_1 = b, \\ \sigma_2 = b^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_1 = b, \\ \sigma_2 = -\dfrac{1}{6}b^2. \end{cases}$$

Каждое из них даёт два решения исходной системы:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b}{2}(1 + i\sqrt{3}), \\ y_1 = \dfrac{b}{2}(1 - i\sqrt{3}); \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \dfrac{b}{2}(1 - i\sqrt{3}), \\ y_2 = \dfrac{b}{2}(1 + i\sqrt{3}); \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \dfrac{b}{2}\left(1 + \sqrt{\dfrac{5}{3}}\right), \\ y_3 = \dfrac{b}{2}\left(1 - \sqrt{\dfrac{5}{3}}\right); \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = \dfrac{b}{2}\left(1 - \sqrt{\dfrac{5}{3}}\right), \\ y_4 = \dfrac{b}{2}\left(1 + \sqrt{\dfrac{5}{3}}\right). \end{cases}$$

26) Вспомогательная система:

$$\begin{cases} \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 9, \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 5. \end{cases}$$

Исключая σ_2, получаем кубическое уравнение: $\sigma_1^3 - 15\sigma_1 + 18 = 0$. Замечая, что $\sigma_1 = 3$ является корнем этого уравнения, и применяя теорему Безу, найдём два других корня: $\sigma_1 = -\dfrac{3}{2} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{33}$. Таким образом, мы имеем три решения вспомогательной системы:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 3, \\ \sigma_2 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{33}, \\ \sigma_2 = \dfrac{11}{4} - \dfrac{3}{4}\sqrt{33}; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{33}, \\ \sigma_2 = \dfrac{11}{4} + \dfrac{3}{4}\sqrt{33}. \end{cases}$$

Каждое из них даёт два решения исходной системы:

$$\begin{cases} x_1 = 1; \\ y_1 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 2, \\ y_2 = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = -\dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{33}}{4} + \sqrt{\dfrac{3}{8}\sqrt{33} - \dfrac{1}{8}}, \\ y_3 = -\dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{33}}{4} - \sqrt{\dfrac{3}{8}\sqrt{33} - \dfrac{1}{8}}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -\dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{33}}{4} - \sqrt{\dfrac{3}{8}\sqrt{33} - \dfrac{1}{8}}, \\ y_4 = -\dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{33}}{4} + \sqrt{\dfrac{3}{8}\sqrt{33} - \dfrac{1}{8}}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_5 = -\dfrac{3}{4} - \dfrac{\sqrt{33}}{4} + i\sqrt{\dfrac{3}{8}\sqrt{33} + \dfrac{1}{8}}, \\ y_5 = -\dfrac{3}{4} - \dfrac{\sqrt{33}}{4} - i\sqrt{\dfrac{3}{8}\sqrt{33} + \dfrac{1}{8}}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_6 = -\dfrac{3}{4} - \dfrac{\sqrt{33}}{4} - i\sqrt{\dfrac{3}{8}\sqrt{33} + \dfrac{1}{8}}, \\ y_6 = -\dfrac{3}{4} - \dfrac{\sqrt{33}}{4} + i\sqrt{\dfrac{3}{8}\sqrt{33} + \dfrac{1}{8}}. \end{cases}$$

27) Вспомогательная система:

$$\begin{cases} \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 7 + \sigma_2, \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 6\sigma_2 - 1. \end{cases}$$

Находя значение σ_2 из первого уравнения и подставляя его во второе, получаем квадратное уравнение $2\sigma_1^2 - 7\sigma_1 - 15 = 0$. Отсюда легко находим два решения вспомогательной системы:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 5, \\ \sigma_2 = 6; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_1 = -\dfrac{3}{2}, \\ \sigma_2 = -\dfrac{19}{12}. \end{cases}$$

Каждое из них даёт два решения исходной системы:

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 3, \\ y_2 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{103}{3}}, \\ y_3 = -\dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{103}{3}}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -\dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{103}{3}}, \\ y_4 = -\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{103}{3}}. \end{cases}$$

28) Вспомогательная система:

$$\begin{cases} \sigma_1^4 - 4\sigma_2^1\sigma_2 + 3\sigma_2^2 = 133, \\ \sigma_1^2 - 3\sigma_2 = 7. \end{cases}$$

Находя из второго уравнения σ_2 и подставляя его в первое уравнение, получаем $\sigma_1^2 = 25$. Отсюда находим два решения:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \pm 5, \\ \sigma_2 = 6. \end{cases}$$

Каждое из них даёт два решения исходной системы:

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 3, \\ y_2 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -2, \\ y_3 = -3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -3, \\ y_4 = -2. \end{cases}$$

29) Вспомогательная система:

$$\begin{cases} \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 3\sigma_2^2 = a^2, \\ \sigma_1^2 - \sigma_2 = 1. \end{cases}$$

Находя из второго уравнения σ_2 и подставляя его в первое уравнение, получаем $2\sigma_1^2 = 3 - a^2$. Отсюда находим два решения

$$\begin{cases} \sigma_1 = \pm\sqrt{\dfrac{3 - a^2}{2}}, \\ \sigma_2 = \dfrac{1 - a^2}{2}. \end{cases}$$

Каждое из них даёт два решения исходной системы:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3-a^2}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3a^2-1}{2}}, \\ y_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3-a^2}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3a^2-1}{2}}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3-a^2}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3a^2-1}{2}}, \\ y_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3-a^2}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3a^2-1}{2}}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3-a^2}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3a^2-1}{2}}, \\ y_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3-a^2}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3a^2-1}{2}}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3-a^2}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3a^2-1}{2}}, \\ y_4 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3-a^2}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3a^2-1}{2}}. \end{cases}$$

30) Вспомогательная система:

$$\begin{cases} \sigma_1^2 - \sigma_2 = 49, \\ \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 3\sigma_2^2 = 931. \end{cases}$$

Находя из первого уравнения σ_2 и подставляя его во второе уравнение, получаем $\sigma_1^2 = 64$. Отсюда находим два решения:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \pm 8, \\ \sigma_2 = 15. \end{cases}$$

Каждое из них даёт два решения исходной системы:

$$\begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 5, \\ y_2 = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -3, \\ y_3 = -5; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -5, \\ y_4 = -3. \end{cases}$$

31) Вспомогательная система:

$$\begin{cases} \sigma_1^2 - \sigma_2 = 39, \\ \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 - \sigma_1^2 + 2\sigma_2 = 612. \end{cases}$$

Исключая σ_2, получаем биквадратное уравнение $\sigma_1^4 - \sigma_1^2 - 2352 = 0$. Отсюда находим четыре решения вспомогательной системы:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \pm 7, \\ \sigma_2 = 10; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = \pm i\sqrt{48}, \\ \sigma_2 = -87. \end{cases}$$

Каждое из них даёт два решения исходной системы:

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 5, \\ y_2 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -2, \\ y_3 = -5; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -5, \\ y_4 = -2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_5 = \sqrt{3}(2i+5), \\ y_5 = \sqrt{3}(2i-5); \end{cases} \quad \begin{cases} x_6 = \sqrt{3}(2i-5), \\ y_6 = \sqrt{3}(2i+5); \end{cases} \quad \begin{cases} x_7 = \sqrt{3}(-2i+5), \\ y_7 = \sqrt{3}(-2i-5); \end{cases} \quad \begin{cases} x_8 = \sqrt{3}(-2i-5), \\ y_8 = \sqrt{3}(-2i+5). \end{cases}$$

32) Вспомогательная система:

$$\begin{cases} \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 - \sigma_1^2 + 2\sigma_2 = 84, \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 + \sigma_2^2 = 49. \end{cases}$$

Находя σ_1^2 из второго уравнения и подставляя его в первое, получаем биквадратное уравнение $\sigma_2^4 - 99\sigma_2^2 + 2268 = 0$. Теперь легко найти все решения вспомогательной системы. Их восемь:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \pm 5, \\ \sigma_2 = 6; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = \pm 1, \\ \sigma_2 = -6; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = \pm\sqrt{2\sqrt{63} - 14}, \\ \sigma_2 = \sqrt{63}; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = \pm i\sqrt{2\sqrt{63} + 14}, \\ \sigma_2 = -\sqrt{63}. \end{cases}$$

Каждое из них даёт два решения исходной системы:

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 3, \\ y_2 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -2, \\ y_3 = -3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -3, \\ y_4 = -2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_5 = 3, \\ y_5 = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_6 = -2, \\ y_6 = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_7 = -3, \\ y_7 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_8 = 2, \\ y_8 = -3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_9 = \sqrt{\dfrac{\sqrt{63} - 7}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{63} + 7}{2}}, \\ y_9 = \sqrt{\dfrac{\sqrt{63} - 7}{2}} - i\sqrt{\dfrac{\sqrt{63} + 7}{2}}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_{10} = \sqrt{\dfrac{\sqrt{63} - 7}{2}} - i\sqrt{\dfrac{\sqrt{63} + 7}{2}}, \\ y_{10} = \sqrt{\dfrac{\sqrt{63} - 7}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{63} + 7}{2}}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{11} = -\sqrt{\dfrac{\sqrt{63} - 7}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{63} + 7}{2}}, \\ y_{11} = -\sqrt{\dfrac{\sqrt{63} - 7}{2}} - i\sqrt{\dfrac{\sqrt{63} + 7}{2}}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_{12} = -\sqrt{\dfrac{\sqrt{63} - 7}{2}} - i\sqrt{\dfrac{\sqrt{63} + 7}{2}}, \\ y_{12} = -\sqrt{\dfrac{\sqrt{63} - 7}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{63} + 7}{2}}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{13} = \sqrt{\dfrac{\sqrt{63} - 7}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{63} + 7}{2}}, \\ y_{13} = -\sqrt{\dfrac{\sqrt{63} - 7}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{63} + 7}{2}}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_{14} = -\sqrt{\dfrac{\sqrt{63} - 7}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{63} + 7}{2}}, \\ y_{14} = \sqrt{\dfrac{\sqrt{63} - 7}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{63} + 7}{2}}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{15} = \sqrt{\dfrac{\sqrt{63} - 7}{2}} - i\sqrt{\dfrac{\sqrt{63} + 7}{2}}, \\ y_{15} = -\sqrt{\dfrac{\sqrt{63} - 7}{2}} - i\sqrt{\dfrac{\sqrt{63} + 7}{2}}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_{16} = -\sqrt{\dfrac{\sqrt{63} - 7}{2}} - i\sqrt{\dfrac{\sqrt{63} + 7}{2}}, \\ y_{16} = \sqrt{\dfrac{\sqrt{63} - 7}{2}} - i\sqrt{\dfrac{\sqrt{63} + 7}{2}}. \end{cases}$$

33) Вспомогательная система:

$$\begin{cases} \sigma_1^3 - 2\sigma_1\sigma_2 = 13, \\ \sigma_2^2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) = 468. \end{cases}$$

Разделив второе уравнение почленно на первое и сократив на величину $\sigma_1^2 - 2\sigma_2$ (очевидно, не равную нулю), получим $\sigma_2^2 = 36\sigma_1$. Подставляя получаемое отсюда значение σ_1 в первое уравнение, получим $\sigma_2^6 - 2 \cdot 36^2\sigma_2^3 - 13 \cdot 36^3 = 0$. Это — квадратное уравнение относительно σ_2^3. Решая его, получаем шесть решений вспомогательной системы:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 1, \\ \sigma_2 = -6; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \\ \sigma_2 = 3(1+i\sqrt{3}); \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}, \\ \sigma_2 = 3(1-i\sqrt{3}); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sqrt[3]{169}, \\ \sigma_2 = 6\sqrt[3]{13}; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = \sqrt[3]{169}\cdot\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \\ \sigma_2 = -3\sqrt[3]{13}(1+i\sqrt{3}); \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = \sqrt[3]{169}\cdot\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}, \\ \sigma_2 = -3\sqrt[3]{13}(1-i\sqrt{3}). \end{cases}$$

Каждое из них даёт два решения исходной системы:

$$\begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -2, \\ y_2 = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \dfrac{3}{2}(-1+i\sqrt{3}), \\ y_3 = 1-i\sqrt{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = 1-i\sqrt{3}, \\ y_4 = \dfrac{3}{2}(-1+i\sqrt{3}); \end{cases} \quad \begin{cases} x_5 = \dfrac{3}{2}(-1-i\sqrt{3}), \\ y_5 = 1+i\sqrt{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_6 = 1+i\sqrt{3}, \\ y_6 = \dfrac{3}{2}(-1-i\sqrt{3}); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_7 = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{169} + \dfrac{i}{2}\sqrt{11\sqrt[3]{13}}, \\ y_7 = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{169} - \dfrac{i}{2}\sqrt{11\sqrt[3]{13}}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_8 = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{169} - \dfrac{i}{2}\sqrt{11\sqrt[3]{13}}, \\ y_8 = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{169} + \dfrac{i}{2}\sqrt{11\sqrt[3]{13}}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_9 = -\dfrac{1}{4}\left(\sqrt[3]{169} + \sqrt{33\sqrt[3]{13}}\right) - \dfrac{i}{4}\left(\sqrt{11\sqrt[3]{13}} - \sqrt{3}\sqrt[3]{169}\right), \\ y_9 = -\dfrac{1}{4}\left(\sqrt[3]{169} - \sqrt{33\sqrt[3]{13}}\right) + \dfrac{i}{4}\left(\sqrt{11\sqrt[3]{13}} + \sqrt{3}\sqrt[3]{169}\right); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{10} = -\dfrac{1}{4}\left(\sqrt[3]{169} - \sqrt{33\sqrt[3]{13}}\right) + \dfrac{i}{4}\left(\sqrt{11\sqrt[3]{13}} + \sqrt{3}\sqrt[3]{169}\right), \\ y_{10} = -\dfrac{1}{4}\left(\sqrt[3]{169} + \sqrt{33\sqrt[3]{13}}\right) - \dfrac{i}{4}\left(\sqrt{11\sqrt[3]{13}} - \sqrt{3}\sqrt[3]{169}\right); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{11} = -\dfrac{1}{4}\left(\sqrt[3]{169} + \sqrt{33\sqrt[3]{13}}\right) - \dfrac{i}{4}\left(\sqrt{3}\sqrt[3]{169} - \sqrt{11\sqrt[3]{13}}\right), \\ y_{11} = -\dfrac{1}{4}\left(\sqrt[3]{169} - \sqrt{33\sqrt[3]{13}}\right) - \dfrac{i}{4}\left(\sqrt{3}\sqrt[3]{169} + \sqrt{11\sqrt[3]{13}}\right); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{12} = -\dfrac{1}{4}\left(\sqrt[3]{169} - \sqrt{33\sqrt[3]{13}}\right) - \dfrac{i}{4}\left(\sqrt{3}\sqrt[3]{169} + \sqrt{11\sqrt[3]{13}}\right), \\ y_{12} = -\dfrac{1}{4}\left(\sqrt[3]{169} + \sqrt{33\sqrt[3]{13}}\right) - \dfrac{i}{4}\left(\sqrt{3}\sqrt[3]{169} - \sqrt{11\sqrt[3]{13}}\right). \end{cases}$$

34) Вспомогательная система:

$$\begin{cases} \sigma_1^3 - 4\sigma_1\sigma_2 = 16, \\ \sigma_1^3 - 2\sigma_1\sigma_2 = 40. \end{cases}$$

Исключая σ_2, находим $\sigma_1^3 = 64$. Отсюда получаем три решения вспомогательной системы:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 4, \\ \sigma_2 = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = 2(-1+i\sqrt{3}), \\ \sigma_2 = \dfrac{3}{2}(-1-i\sqrt{3}), \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = 2(-1-i\sqrt{3}), \\ \sigma_2 = \dfrac{3}{2}(-1+i\sqrt{3}). \end{cases}$$

Каждое из них даёт два решения исходной системы:

$$\begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = \frac{3}{2}(-1 + i\sqrt{3}), \\ y_3 = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}); \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}), \\ y_4 = \frac{3}{2}(-1 + i\sqrt{3}); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_5 = \frac{3}{2}(-1 - i\sqrt{3}), \\ y_5 = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}); \end{cases} \quad \begin{cases} x_6 = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}), \\ y_6 = \frac{3}{2}(-1 - i\sqrt{3}). \end{cases}$$

35) Вспомогательная система:

$$\begin{cases} \sigma_1\sigma_2 = 30, \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 35. \end{cases}$$

Исключая σ_2, находим $\sigma_1^3 = 125$. Отсюда получаем три решения вспомогательной системы:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 5, \\ \sigma_2 = 6; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = \frac{5}{2}(-1 + i\sqrt{3}), \\ \sigma_2 = 3(-1 - i\sqrt{3}); \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = \frac{5}{2}(-1 - i\sqrt{3}), \\ \sigma_2 = 3(-1 + i\sqrt{3}). \end{cases}$$

Каждое из них даёт два решения исходной системы:

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 3, \\ y_2 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -1 + i\sqrt{3}, \\ y_3 = \frac{3}{2}(-1 + i\sqrt{3}); \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = \frac{3}{2}(-1 + i\sqrt{3}), \\ y_4 = -1 + i\sqrt{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_5 = -1 - i\sqrt{3}, \\ y_5 = \frac{3}{2}(-1 - i\sqrt{3}); \end{cases} \quad \begin{cases} x_6 = \frac{3}{2}(-1 - i\sqrt{3}), \\ y_6 = -1 - i\sqrt{3}. \end{cases}$$

36) Вспомогательная система:

$$\begin{cases} \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = \sigma_1^2, \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = \sigma_1 + a. \end{cases}$$

Находя значение σ_2 из второго уравнения и подставляя его в первое уравнение, получаем $\sigma_1^3 - \sigma_1^2 - 3\sigma_1 a = 0$. Отсюда находим три решения вспомогательной системы:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 0, \\ \sigma_2 = -\frac{a}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 3a}, \\ \sigma_2 = a; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + 3a}, \\ \sigma_2 = a. \end{cases}$$

Каждое из них даёт два решения исходной системы:

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{\dfrac{a}{2}}, \\ y_1 = -\sqrt{\dfrac{a}{2}}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = -\sqrt{\dfrac{a}{2}}, \\ y_2 = \sqrt{\dfrac{a}{2}}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}\sqrt{12a+1} + \dfrac{1}{4}\sqrt{2-4a+2\sqrt{12a+1}}, \\ y_3 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}\sqrt{12a+1} - \dfrac{1}{4}\sqrt{2-4a+2\sqrt{12a+1}}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}\sqrt{12a+1} - \dfrac{1}{4}\sqrt{2-4a+2\sqrt{12a+1}}, \\ y_4 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}\sqrt{12a+1} + \dfrac{1}{4}\sqrt{2-4a+2\sqrt{12a+1}}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_5 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\sqrt{12a+1} + \dfrac{1}{4}\sqrt{2-4a-2\sqrt{12a+1}}, \\ y_5 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\sqrt{12a+1} - \dfrac{1}{4}\sqrt{2-4a-2\sqrt{12a+1}}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_6 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\sqrt{12a+1} - \dfrac{1}{4}\sqrt{2-4a-2\sqrt{12a+1}}, \\ y_6 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\sqrt{12a+1} + \dfrac{1}{4}\sqrt{2-4a-2\sqrt{12a+1}}. \end{cases}$$

37) Вспомогательная система:

$$\begin{cases} \sigma_2 = a^2 - b^2, \\ \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 = 2(a^4 + 6a^2b^2 + b^4). \end{cases}$$

Подставляя значение σ_2 во второе уравнение, имеем биквадратное уравнение $\sigma_1^4 - 4(a^2-b^2)\sigma_1^2 - 16a^2b^2 = 0$. Отсюда находим четыре решения вспомогательной системы:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \pm 2a, \\ \sigma_2 = a^2 - b^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_1 = \pm 2bi, \\ \sigma_2 = a^2 - b^2. \end{cases}$$

Каждое из них даёт два решения исходной системы:

$$\begin{cases} x_1 = -a+b, \\ y_1 = -a-b; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -a-b, \\ y_2 = -a+b; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = a+b, \\ y_3 = a-b; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = a-b, \\ y_4 = a+b; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_5 = -bi+ai, \\ y_5 = -bi-ai; \end{cases} \quad \begin{cases} x_6 = -bi-ai, \\ y_6 = -bi+ai; \end{cases} \quad \begin{cases} x_7 = bi+ai, \\ y_7 = bi-ai; \end{cases} \quad \begin{cases} x_8 = bi-ai, \\ y_8 = bi+ai. \end{cases}$$

38) Вспомогательная система:

$$\begin{cases} \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = a, \\ \sigma_1\sigma_2 = b. \end{cases}$$

Её решения:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sqrt[3]{a+3b}, \\ \sigma_2 = \dfrac{b}{\sqrt[3]{a+3b}}; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = \sqrt[3]{a+3b} \cdot \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \\ \sigma_2 = \dfrac{b}{\sqrt[3]{a+3b}} \cdot \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = \sqrt[3]{a+3b} \cdot \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}, \\ \sigma_2 = \dfrac{b}{\sqrt[3]{a+3b}} \cdot \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Каждое из них даёт два решения исходной системы:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{a+3b} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a+3b}}}, \\ y_1 = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{a+3b} - \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a+3b}}}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = y_1, \\ y_2 = x_1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = x_1\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \\ y_3 = y_1\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = x_2\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \\ y_4 = y_2\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_5 = x_1\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}, \\ y_5 = y_1\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_6 = x_2\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}, \\ y_6 = y_2\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

39) Вспомогательная система:

$$\begin{cases} \sigma_1 = a, \\ \sigma_1^7 - 7\sigma_1^5\sigma_2 + 14\sigma_1^3\sigma_2^2 - 7\sigma_1\sigma_2^3 = a^7. \end{cases}$$

Подставляя значение σ_1 во второе уравнение, получаем кубическое уравнение: $a\sigma_2^3 - 2a^3\sigma_2^2 + a^5\sigma_2 = 0$. Если $a \neq 0$, мы получаем отсюда три решения вспомогательной системы:

$$\begin{cases} \sigma_1 = a, \\ \sigma_2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = a, \\ \sigma_2 = a^2; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = a, \\ \sigma_2 = a^2. \end{cases}$$

Каждое из них даёт два решения исходной системы:

$$\begin{cases} x_1 = a, \\ y_1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 0, \\ y_2 = a, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \dfrac{a}{2}(1+i\sqrt{3}), \\ y_3 = \dfrac{a}{2}(1-i\sqrt{3}); \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = y_3, \\ y_4 = x_3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_5 = x_3, \\ y_5 = y_3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_6 = x_4, \\ y_6 = y_4. \end{cases}$$

Если же $a = 0$, то любые два числа x, y, удовлетворяющие условию $x + y = 0$, дают решение исходной системы.

40) Вводя новые неизвестные $\sigma_1 = x + y$, $\sigma_2 = xy$, получаем вспомогательную систему:

$$\begin{cases} \sigma_1 - z = 7, \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 - z^2 = 37, \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 - z^3 = 1. \end{cases}$$

Подставляя в третье уравнение значение σ_2 из второго уравнения, а затем значение z из первого уравнения, получаем $18\sigma_1 = 342$. Теперь легко находим решение вспомогательной системы:

$$\sigma_1 = 19, \quad \sigma_2 = 90, \quad z = 12.$$

Отсюда находим два решения исходной системы:

$$\begin{cases} x_1 = 9, \\ y_1 = 10, \\ z_1 = 12, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 10, \\ y_2 = 9, \\ z_2 = 12, \end{cases}$$

41) Вспомогательная система:

$$\begin{cases} \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 8\sigma_2^2 = 353, \\ \sigma_1^2\sigma_2 - 2\sigma_2^2 = 68. \end{cases}$$

Умножая второе уравнение на 4 и прибавляя его к первому уравнению, получаем $\sigma_1^4 = 625$. Отсюда находим восемь решений вспомогательной системы:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \pm 5, \\ \sigma_2 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = \pm 5, \\ \sigma_2 = \dfrac{17}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = \pm 5i, \\ \sigma_2 = -4; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = \pm 5i, \\ \sigma_2 = -\dfrac{17}{2}. \end{cases}$$

Каждое из них даёт два решения исходной системы:

$$\begin{cases} x_1 = 4, \\ y_1 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -4, \\ y_3 = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -1, \\ y_4 = -4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_5 = \dfrac{5}{2} + \dfrac{3}{2}i, \\ y_5 = \dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{2}i; \end{cases} \quad \begin{cases} x_6 = \dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{2}i, \\ y_6 = \dfrac{5}{2} + \dfrac{3}{2}i; \end{cases} \quad \begin{cases} x_7 = -\dfrac{5}{2} + \dfrac{3}{2}i, \\ y_7 = -\dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{2}i; \end{cases} \quad \begin{cases} x_8 = -\dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{2}i, \\ y_8 = -\dfrac{5}{2} + \dfrac{3}{2}i; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_9 = i, \\ y_9 = 4i; \end{cases} \quad \begin{cases} x_{10} = 4i, \\ y_{10} = i; \end{cases} \quad \begin{cases} x_{11} = -i, \\ y_{11} = -4i; \end{cases} \quad \begin{cases} x_{12} = -4i, \\ y_{12} = -i; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{13} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{2}i, \\ y_{13} = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{2}i; \end{cases} \quad \begin{cases} x_{14} = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{2}i, \\ y_{14} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{2}i; \end{cases} \quad \begin{cases} x_{15} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{5}{2}i, \\ y_{15} = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{5}{2}i; \end{cases} \quad \begin{cases} x_{16} = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{5}{2}i, \\ y_{16} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{5}{2}i. \end{cases}$$

42) Вспомогательная система:

$$\sigma_1^2 - 2\sigma_2 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2.$$

Найдя σ_2 из первого равенства и подставляя его во второе, получаем уравнение

$$\sigma_1^3(\sigma_1^4 - 3\sigma_1^3 + \sigma_1^2 + 3\sigma_1 - 2) = 0.$$

Корнями его являются числа 0, 0, 0, 1, 1, -1, 2. Таким образом, мы получаем следующие семь решений вспомогательной системы:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 0, \\ \sigma_2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = 0, \\ \sigma_2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = 0, \\ \sigma_2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = 1, \\ \sigma_2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = 1, \\ \sigma_2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = -1, \\ \sigma_2 = \dfrac{2}{5}; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = 2, \\ \sigma_2 = 1. \end{cases}$$

Каждое из них даёт два решения исходной системы:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0, \\ y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = y_5 = y_6 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_7 = 0, \\ y_7 = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_8 = 1, \\ y_8 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_9 = 0, \\ y_9 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_{10} = 1, \\ y_{10} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{11} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{10}\sqrt{15}, \\ y_{11} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{i}{10}\sqrt{15}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_{12} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{i}{10}\sqrt{15}, \\ y_{12} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{10}\sqrt{15}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_{13} = x_{14} = 1, \\ y_{13} = y_{14} = 1. \end{cases}$$

43) Составим сумму и разность уравнений исходной системы:

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = (a+b)(x^2+y^2), \\ x^4 - y^4 = (a-b)(x^2-y^2). \end{cases}$$

Если $x^2 - y^2 \neq 0$, то второе уравнение можно сократить на $x^2 - y^2$, и мы получаем симметричную систему:

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = (a+b)(x^2+y^2), \\ x^2 + y^2 = a - b. \end{cases}$$

Вспомогательная система для неё имеет вид

$$\begin{cases} \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 = (a+b)(\sigma_1^2 - 2\sigma_2), \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = a - b. \end{cases}$$

Исключая σ_2, получаем биквадратное уравнение

$$\sigma_1^4 - 2(a-b)\sigma_1^2 + a^2 + 2ab - 3b^2 = 0.$$

Теперь легко находим четыре решения вспомогательной системы:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \pm\sqrt{(a-b) + 2\sqrt{b^2 - ab}}, \\ \sigma_2 = \sqrt{b^2 - ab}; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = \pm\sqrt{(a-b) - 2\sqrt{b^2 - ab}}, \\ \sigma_2 = -\sqrt{b^2 - ab}. \end{cases}$$

Каждое из них даёт два решения исходной системы:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}\sqrt{a - b + 2\sqrt{b^2 - ab}} + \dfrac{1}{2}\sqrt{a - b - 2\sqrt{b^2 - ab}}, \\ y_1 = \dfrac{1}{2}\sqrt{a - b + 2\sqrt{b^2 - ab}} - \dfrac{1}{2}\sqrt{a - b - 2\sqrt{b^2 - ab}}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = y_1, \\ y_2 = x_1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -x_1, \\ y_3 = -y_1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -x_2, \\ y_4 = -y_2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_5 = -x_1, \\ y_5 = y_1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_6 = -x_2, \\ y_6 = y_2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_7 = -x_3, \\ y_7 = y_3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_8 = -x_4, \\ y_8 = y_4. \end{cases}$$

Если же $x^2 = y^2$, то уравнения исходной системы принимают вид $x^4 = (a+b)x^2$, и это даёт ещё восемь решений:

$$\begin{cases} x_9 = x_{10} = x_{11} = x_{12} = 0, \\ y_9 = y_{10} = y_{11} = y_{12} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_{13} = \sqrt{a+b}, \\ y_{13} = \sqrt{a+b}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_{14} = x_{13}, \\ y_{14} = -y_{13}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_{15} = -x_{13}, \\ y_{15} = y_{13}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_{16} = -x_{13}, \\ y_{16} = -y_{13}. \end{cases}$$

44) Введя новые неизвестные $\sigma_1 = x + y$, $\sigma_2 = xy$; $\tau_1 = z + u$, $\tau_2 = zu$, мы перепишем исходную систему в виде

$$\begin{cases} 16(\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + \tau_1^4 - 4\tau_1^2\tau_2 + 2\tau_2^2) = 289, \\ \sigma_2 - \tau_2 = \dfrac{3}{2}, \\ \sigma_1 = 3, \\ \tau_1 = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Подставляя известные значения σ_1, τ_1 в первое уравнение, получаем систему:

$$\begin{cases} 68 - 36\sigma_2 + 2\sigma_2^2 - 9\tau_2 + 2\tau_2^2 = 0, \\ \sigma_2 - \tau_2 = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Исключая σ_2, получаем квадратное уравнение $8\tau_2^2 - 78\tau_2 + 37 = 0$. В результате мы находим два решения вспомогательной системы:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 3, \\ \sigma_2 = 2, \\ \tau_1 = \dfrac{3}{2}, \\ \tau_2 = \dfrac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = 3, \\ \sigma_2 = \dfrac{43}{4}, \\ \tau_1 = \dfrac{3}{2}, \\ \tau_2 = \dfrac{37}{4}. \end{cases}$$

Каждое из них даёт четыре решения исходной системы:

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 2, \\ z_1 = 1, \\ u_1 = \dfrac{1}{2}; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 2, \\ y_2 = 1, \\ z_2 = 1, \\ u_2 = \dfrac{1}{2}; \end{cases} \begin{cases} x_3 = 1, \\ y_3 = 2, \\ z_3 = \dfrac{1}{2}, \\ u_3 = 1; \end{cases} \begin{cases} x_4 = 2, \\ y_4 = 1, \\ z_4 = \dfrac{1}{2}, \\ u_4 = 1; \end{cases} \begin{cases} x_5 = \dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{34}}{2}, \\ y_5 = \dfrac{3}{2} - i\dfrac{\sqrt{34}}{2}, \\ z_5 = \dfrac{3}{4} + i\dfrac{\sqrt{139}}{4}, \\ u_5 = \dfrac{3}{4} - i\dfrac{\sqrt{139}}{4}; \end{cases} \begin{cases} x_6 = y_5, \\ y_6 = x_5, \\ z_6 = z_5, \\ u_6 = u_5; \end{cases} \begin{cases} x_7 = x_5, \\ y_7 = y_5, \\ z_7 = u_5, \\ u_7 = z_5; \end{cases} \begin{cases} x_8 = y_5, \\ y_8 = x_5, \\ z_8 = u_5, \\ u_8 = z_5. \end{cases}$$

К стр. 25.

1) Подстановка $\dfrac{x}{a} = u$, $\dfrac{y}{b} = v$ приводит рассматриваемую систему к симметричному виду:

$$\begin{cases} u + v = 1, \\ \dfrac{1}{u} + \dfrac{1}{v} = 4. \end{cases}$$

Вводя неизвестные $\sigma_1 = u + v$, $\sigma_2 = uv$, получаем систему

$$\begin{cases} \sigma_1 = 1, \\ \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2} = 4, \end{cases}$$

откуда $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = \dfrac{1}{4}$. Это даёт нам единственное решение (точнее, два совпадающих решения) $u = v = \dfrac{1}{2}$. Отсюда для исходной системы получаем решение: $x = \dfrac{a}{2}$, $y = \dfrac{b}{2}$.

2) Подстановка $y = -z$ приводит систему к симметричному виду:

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = -\dfrac{5}{2}xz, \\ x + z = -\dfrac{1}{4}xz. \end{cases}$$

Вводя неизвестные $\sigma_1 = x + z$, $\sigma_2 = xz$, получаем систему

$$\begin{cases} \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = -\dfrac{5}{2}\sigma_2, \\ \sigma_1 = -\dfrac{1}{4}\sigma_2. \end{cases}$$

Она имеет два решения:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 0, \\ \sigma_2 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_1 = 2, \\ \sigma_2 = -8. \end{cases}$$

Каждое из них даёт два решения симметричной системы:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = 0, \\ z_1 = z_2 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = 4, \\ z_3 = -2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4 = -2, \\ z_4 = 4. \end{cases}$$

Наконец, отсюда получаем четыре решения исходной системы:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = 0, \\ y_1 = y_2 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = 4, \\ y_3 = 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4 = -2, \\ y_4 = -4. \end{cases}$$

3) Подстановка $y = -z$ приводит систему к симметричному виду:

$$\begin{cases} x + z = 2, \\ x^3 + z^3 = 8. \end{cases}$$

Вспомогательная система:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 2, \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 8. \end{cases}$$

Её решение: $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 0$. Отсюда получаем два решения симметричной системы:

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ z_1 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 0, \\ z_2 = 2. \end{cases}$$

Наконец, исходная система имеет следующие два решения:

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 0, \\ y_2 = -2. \end{cases}$$

4) Подстановка $y = -z$ приводит систему к симметричному виду:

$$\begin{cases} x^5 + z^5 = 3093, \\ x + z = 3. \end{cases}$$

Вспомогательная система:

$$\begin{cases} \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 = 3093, \\ \sigma_1 = 3. \end{cases}$$

Её решения:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 3, \\ \sigma_2 = -10; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_1 = 3, \\ \sigma_2 = 19. \end{cases}$$

Каждое из них даёт два решения симметричной системы:

$$\begin{cases} x_1 = 5, \\ z_1 = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -2, \\ z_2 = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{67}}{2}, \\ z_3 = \dfrac{3}{2} - i\dfrac{\sqrt{67}}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = \dfrac{3}{2} - i\dfrac{\sqrt{67}}{2}, \\ z_4 = \dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{67}}{2}. \end{cases}$$

Наконец, исходная система имеет следующие четыре решения:

$$\begin{cases} x_1 = 5, \\ y_1 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -2, \\ y_2 = -5; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{67}}{2}, \\ y_3 = -\dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{67}}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = \dfrac{3}{2} - i\dfrac{\sqrt{67}}{2}, \\ y_4 = -\dfrac{3}{2} - i\dfrac{\sqrt{67}}{2}. \end{cases}$$

5) Подстановка $y = -z$ приводит систему к симметричному виду:

$$\begin{cases} x^5 + z^5 = b^5; \\ x + z = a. \end{cases}$$

Эту систему мы уже рассматривали (см. упражнение 24) на стр. 23). Таким образом, исходная система имеет следующие четыре решения:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a}{2} + \sqrt{-\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a^5 + 4b^5}{5a}}}, \\ y_1 = -\dfrac{a}{2} + \sqrt{-\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a^5 + 4b^5}{5a}}}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = -y_1, \\ y_2 = -x_1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = \dfrac{a}{2} + \sqrt{-\dfrac{a^2}{4} - \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a^5 + 4b^5}{5a}}}, \\ y_3 = -\dfrac{a}{2} + \sqrt{-\dfrac{a^2}{4} - \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a^5 + 4b^5}{5a}}}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4 = -y_3, \\ y_4 = -x_3. \end{cases}$$

6) Подстановка $x^2=z$ приводит систему к симметричному виду:

$$\begin{cases} y+z=5, \\ y^3+z^3=65. \end{cases}$$

Эту систему уже рассматривали (упражнение 4) на стр. 146). Таким образом, исходная система имеет следующие четыре решения:

$$\begin{cases} x_1=1, \\ y_1=4; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=-1, \\ y_2=4; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3=2, \\ y_3=1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4=-2, \\ y_4=1. \end{cases}$$

(См. также пример 1° на стр. 19.)

7) Подстановка $\sqrt{x}=u$, $\sqrt{y}=v$ приводит систему к симметричному виду:

$$\begin{cases} u+v=\dfrac{5}{6}uv, \\ u^2+v^2=13. \end{cases}$$

Вспомогательная система:

$$\begin{cases} 6\sigma_1=5\sigma_2, \\ \sigma_1^2-2\sigma_2=13. \end{cases}$$

Её решения:

$$\begin{cases} \sigma_1=5, \\ \sigma_2=6; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1=-\dfrac{13}{5}, \\ \sigma_2=-\dfrac{78}{25}. \end{cases}$$

Заметим, что нам годятся только неотрицательные решения u, v, поскольку $u=\sqrt{x}$, $v=\sqrt{y}$ должны представлять собой арифметические значения корня. Поэтому число $\sigma_2=uv$ должно быть неотрицательным. Следовательно, нам пригодно лишь первое решение вспомогательной системы. Оно даёт два решения симметричной системы:

$$\begin{cases} u_1=2, \\ v_1=3; \end{cases} \quad \begin{cases} u_2=3, \\ v_2=2; \end{cases} \quad \begin{cases} u_3=-\dfrac{13}{10}+\dfrac{\sqrt{481}}{10}, \\ v_3=-\dfrac{13}{10}-\dfrac{\sqrt{481}}{10}; \end{cases} \quad \begin{cases} u_4=v_3, \\ v_4=u_3. \end{cases}$$

В результате мы получаем два решения исходной системы:

$$\begin{cases} x_1=4, \\ y_1=9; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=9, \\ y_2=4. \end{cases}$$

8) Подстановка $\sqrt{x}=u$, $\sqrt{y}=v$ приводит систему к симметричному виду:

$$\begin{cases} u^2v+v^2u=a, \\ \dfrac{u^4}{v}+\dfrac{v^4}{u}=b. \end{cases}$$

Вспомогательная система:

$$\begin{cases} \sigma_1\sigma_2=a, \\ \sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2=b\sigma_2. \end{cases}$$

Находя из первого уравнения значение σ_2 и подставляя его во второе уравнение, получаем (после домножения на σ_1):

$$\sigma_1^6 - 5a\sigma_1^3 + (5a^2 - ab) = 0.$$

Это — квадратное уравнение относительно σ_1^3. Решая его, находим два решения:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sqrt[3]{\dfrac{5}{2}a + \sqrt{\dfrac{5}{4}a^2 + ab}}, \\ \sigma_2 = \dfrac{a}{\sigma_1}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_1 = \sqrt[3]{\dfrac{5}{2}a - \sqrt{\dfrac{5}{4}a^2 + ab}}, \\ \sigma_2 = \dfrac{a}{\sigma_1}. \end{cases}$$

(Ещё четыре решения, являющихся комплексными, мы отбрасываем, поскольку $u = \sqrt{x}$, $v = \sqrt{y}$ — неотрицательные числа, а значит, σ_1 и σ_2 также должны быть неотрицательными числами.) Каждое из этих решений даёт возможность получить два решения u, v написанной выше симметричной системы: для этого нужно рассмотреть квадратное уравнение

$$z^2 - \sigma_1 z + \frac{a}{\sigma_1} = 0. \qquad (*).$$

Нам пригодны лишь неотрицательные решения u, v этого уравнения, так что его дискриминант должен быть неотрицательным:

$$\sigma_1^2 - \frac{4a}{\sigma_1} \geqslant 0,$$

или $\sigma_1^3 \geqslant 4a$ (напомним, что должно быть $\sigma_1 > 0$). Но второе решение этому условию не удовлетворяет: для него

$$\sigma_1^3 = \frac{5}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}a^2 + ab} \leqslant \frac{5}{2}a < 4a$$

(число a положительно, так как $a = \sigma_1\sigma_2 \geqslant 0$, а значение $a = 0$, как легко видеть, непригодно). Чтобы первое решение удовлетворяло этому условию, должно быть:

$$\frac{5}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2 + ab} \geqslant 4a, \quad \text{т. е.} \quad \sqrt{\frac{5}{4}a^2 + ab} \geqslant \frac{3}{2}a,$$

откуда легко находим, что должно быть выполнено соотношение $b \geqslant a$.

Решая уравнение (*), находим два решения симметричной системы:

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{\dfrac{5}{2}a + \sqrt{\dfrac{5}{4}a^2 + ab}} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\sqrt{\dfrac{5}{4}a^2 + ab} - \dfrac{3}{2}a}{\sqrt[3]{\dfrac{5}{2}a + \sqrt{\dfrac{5}{4}a^2 + ab}}}}, \\ v_1 = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{\dfrac{5}{2}a + \sqrt{\dfrac{5}{4}a^2 + ab}} - \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\sqrt{\dfrac{5}{4}a^2 + ab} - \dfrac{3}{2}a}{\sqrt[3]{\dfrac{5}{2}a + \sqrt{\dfrac{5}{4}a^2 + ab}}}}; \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2 = v_1, \\ v_2 = u_1. \end{cases}$$

Наконец, решения исходной системы (при условии $b \geqslant a > 0$) имеют вид

$$\begin{cases} x_1 = u_1^2, \\ y_1 = v_1^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = u_2^2, \\ y_2 = v_2^2. \end{cases}$$

9) Замена $\sqrt{x} = u$, $\sqrt{y} = -v$ сводит систему к симметричному виду:

$$\begin{cases} u + v = -2uv, \\ u^2 + v^2 = 20. \end{cases}$$

Вспомогательная система:

$$\begin{cases} \sigma_1 = -2\sigma_2, \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 20. \end{cases}$$

Её решения:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 4, \\ \sigma_2 = -2; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_1 = -5, \\ \sigma_2 = \dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

Так как $u = \sqrt{x} \geqslant 0$, $v = -\sqrt{y} \leqslant 0$, то должно быть $\sigma_2 = uv \leqslant 0$, и потому второе решение непригодно. Первое решение даёт нам два решения симметричной системы:

$$\begin{cases} u_1 = 2 + \sqrt{6}, \\ v_1 = 2 - \sqrt{6}; \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2 = 2 - \sqrt{6}, \\ v_2 = 2 + \sqrt{6}. \end{cases}$$

Второе из этих решений непригодно, поскольку оно не удовлетворяет условию $u \geqslant 0$, $v \leqslant 0$. Остаётся только первое решение. Оно даёт нам следующее решение исходной системы:

$$\begin{cases} x = u_1^2 = (2 + \sqrt{6})^2 = 10 + 4\sqrt{6}, \\ y = v_1^2 = (2 - \sqrt{6})^2 = 10 - 4\sqrt{6}. \end{cases}$$

10) Из рассмотрения системы видно, что числа x, y отличны от нуля и имеют одинаковый знак. Если они оба положительны, мы можем применить замену $\sqrt{x} = u$, $\sqrt{y} = v$. Если же x и y отрицательны, можно применить замену $\sqrt{-x} = u$, $\sqrt{-y} = v$. В обоих случаях исходная система приводится указанной заменой к симметричному виду:

$$\begin{cases} \dfrac{u}{v} + \dfrac{v}{u} = \dfrac{7}{uv} + 1, \\ u^3 v + v^3 u = 78. \end{cases}$$

Вспомогательная система:

$$\begin{cases} \sigma_1^2 - 3\sigma_2 = 7, \\ \sigma_2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) = 78. \end{cases}$$

Подставляя значение σ_1^2 из первого уравнения во второе, получаем квадратное уравнение $\sigma_2^2 + 7\sigma_2 - 78 = 0$. Таким образом, находим четыре решения вспомогательной системы:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 5, \\ \sigma_2 = 6; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = -5, \\ \sigma_2 = 6; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = 4\sqrt{2}i, \\ \sigma_2 = -13; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = -4\sqrt{2}i, \\ \sigma_2 = -13; \end{cases}$$

Так как $u = \sqrt{\pm x}$, $v = \sqrt{\pm y}$ — положительные числа, то должно быть $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, т. е. для нас пригодно лишь первое из этих решений. Оно даёт нам два решения симметричной системы:

$$\begin{cases} u_1 = 2, \\ v_1 = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} u_2 = 3, \\ v_2 = 2. \end{cases}$$

Переходя к первоначальным неизвестным x, y (с помощью замены $\sqrt{x} = u$, $\sqrt{y} = v$ или $\sqrt{-x} = u$, $\sqrt{-y} = v$), получаем четыре решения исходной системы:

$$\begin{cases} x_1 = 4, \\ y_1 = 9; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 9, \\ y_2 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -4, \\ y_3 = -9; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -9, \\ y_4 = -4. \end{cases}$$

11) Из второго уравнения видно, что числа x и y имеют одинаковые знаки, и потому, в силу первого уравнения, оба они положительны. Замена $\sqrt{x} = u$, $\sqrt{y} = v$ приводит систему к симметричному виду:

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 10, \\ \dfrac{u}{v} + \dfrac{v}{u} = \dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

Вспомогательная система:

$$\begin{cases} \sigma_1^2 - 2\sigma^2 = 10, \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = \dfrac{5}{2}\sigma_2. \end{cases}$$

Её решения:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 3\sqrt{2}, \\ \sigma_2 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = -3\sqrt{2}, \\ \sigma_2 = 4. \end{cases}$$

Второе решение непригодно, первое даёт два решения симметричной системы:

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2}, \\ v_1 = 2\sqrt{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} u_2 = 2\sqrt{2}, \\ v_2 = \sqrt{2}. \end{cases}$$

Окончательно находим два решения исходной системы:

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 8; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 8, \\ y_2 = 2. \end{cases}$$

12) Числа x, y должны иметь одинаковые знаки. Если оба они положительны, положим $\sqrt{x} = u$, $\sqrt{y} = v$, а если оба отрицательны, то $\sqrt{-x} = u$, $\sqrt{-y} = v$. В первом случае получаем симметричную систему:

$$\begin{cases} u^2 + uv + v^2 = a, \\ u^6 + 2u^3v^3 + v^6 = a^3. \end{cases}$$

Из второго уравнения (в левой части которого стоит квадрат суммы) видно, что a — неотрицательное число. Вспомогательная система:

$$\begin{cases} \sigma_1^2 - \sigma_2 = a, \\ \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 = a^3. \end{cases}$$

Подставляя значение σ_1^2 из первого уравнения во второе, получаем кубическое уравнение $4\sigma_2^3-3a^2\sigma_2=0$. Отсюда находим шесть решений вспомогательной системы. Условию $\sigma_1\geqslant 0$, $\sigma_2\geqslant 0$ удовлетворяют два из них:

$$\begin{cases}\sigma_1=\sqrt{a},\\ \sigma_2=0;\end{cases}\qquad \begin{cases}\sigma_1=\sqrt{a\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)},\\ \sigma_2=a\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$$

Второе из этих решений даёт комплексные значения для u, v. Первое решение даёт следующие два решения симметричной системы:

$$\begin{cases}u_1=\sqrt{a},\\ v_1=0;\end{cases}\qquad \begin{cases}u_2=0,\\ v_2=\sqrt{a}.\end{cases}$$

В результате мы находим два решения исходной системы (при $a\geqslant 0$):

$$\begin{cases}x_1=a,\\ y_1=0;\end{cases}\qquad \begin{cases}x_2=0,\\ y_2=a.\end{cases}$$

Если же x и y отрицательны, то получаем систему

$$\begin{cases}-u^2-v^2+uv=a,\\ -u^6-v^6+2u^3v^3=a^3.\end{cases}$$

Из второго уравнения видно, что число a — н е п о л о ж и т е л ь н о е. Вспомогательная система:

$$\begin{cases}\sigma_1^2-3\sigma_2=-a,\\ \sigma_1^6-6\sigma_1^4\sigma_2+9\sigma_1^2\sigma_2^2-4\sigma_2^3=-a^3.\end{cases}$$

Подставляя значение σ_1^2 из первого уравнения во второе, получаем $4\sigma_2^3-3a^2\sigma_2=0$. Отсюда находим два решения вспомогательной системы, удовлетворяющие условию $\sigma_1\geqslant 0$, $\sigma_2\geqslant 0$:

$$\begin{cases}\sigma_1=\sqrt{-a},\\ \sigma_2=0;\end{cases}\qquad \begin{cases}\sigma_1=\sqrt{-a\left(1+\dfrac{3}{2}\sqrt{3}\right)},\\ \sigma_2=-a\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$$

Каждое из них даёт два решения симметричной системы:

$$\begin{cases}u_1=\sqrt{-a},\\ v_1=0;\end{cases}\qquad \begin{cases}u_2=0,\\ v_2=\sqrt{-a};\end{cases}$$

$$\begin{cases}u_3=\dfrac{1}{2}\sqrt{-a\left(1+\dfrac{3}{2}\sqrt{3}\right)}+\dfrac{1}{2}\sqrt{-a\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)},\\ v_3=\dfrac{1}{2}\sqrt{-a\left(1+\dfrac{3}{2}\sqrt{3}\right)}-\dfrac{1}{2}\sqrt{-a\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)},\end{cases}\qquad \begin{cases}u_4=v_3,\\ v_4=u_3.\end{cases}$$

Возвращаясь к первоначальным неизвестным, находим (при $a<0$) четыре решения исходной системы:

$$\begin{cases} x_1=a, \\ y_1=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=0, \\ y_2=a; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3=\dfrac{a}{2}+\dfrac{1}{4}a\sqrt{3}-\dfrac{1}{4}a\sqrt{4\sqrt{3}-5}, \\ y_3=\dfrac{a}{2}+\dfrac{1}{4}a\sqrt{3}+\dfrac{1}{4}a\sqrt{4\sqrt{3}-5}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4=y_3, \\ y_4=x_3. \end{cases}$$

13) Из первого уравнения видно, что x, y — числа одного и того же знака и потому они оба неотрицательны (ибо $x+y=7+\sqrt{xy}$). Замена $\sqrt{x}=u$, $\sqrt{y}=v$ приводит систему к симметричному виду:

$$\begin{cases} u^2+v^2-uv=7. \\ u^4+v^4+u^2v^2=133. \end{cases}$$

Эту систему мы уже решали (упражнение 28) на стр. 155). Условию $u\geqslant 0$, $v\geqslant 0$ удовлетворяют два её решения:

$$\begin{cases} u_1=2, \\ v_1=3; \end{cases} \quad \begin{cases} u_2=3, \\ v_2=2. \end{cases}$$

Таким образом, исходная система имеет следующие два решения:

$$\begin{cases} x_1=4, \\ y_1=9; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=9, \\ y_2=4. \end{cases}$$

14) Из первого уравнения видно, что числа x, y имеют одинаковые знаки. Более того, они оба положительны, ибо в противном случае (т. е. при $x\leqslant 0$, $y\leqslant 0$) мы имели бы $14=x+y+\sqrt{xy}<x+y+2\sqrt{xy}=-(\sqrt{-x}-\sqrt{-y})^2\leqslant 0$. Замена $\sqrt{x}=u$, $\sqrt{y}=v$ приводит систему к симметричному виду:

$$\begin{cases} u^2+uv+v^2=14, \\ u^4+u^2v^2+v^4=84. \end{cases}$$

Решая эту систему (ср. упражнение 30) на стр. 156), мы находим два решения, удовлетворяющих условию $u\geqslant 0$, $v\geqslant 0$:

$$\begin{cases} u_1=\sqrt{2}, \\ v_1=2\sqrt{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} u_2=2\sqrt{2}, \\ v_2=\sqrt{2}. \end{cases}$$

Таким образом, исходная система имеет следующие два решения:

$$\begin{cases} x_1=2, \\ y_1=8; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=8, \\ y_2=2. \end{cases}$$

15) Замена $x^{1/4}=u$, $y^{1/5}=v$ приводит систему к симметричному виду:

$$\begin{cases} u^3+v^3=35, \\ u+v=5. \end{cases}$$

Эту систему мы уже рассматривали (пример 1° на стр. 19):

$$\begin{cases} u_1=2, \\ v_1=3; \end{cases} \quad \begin{cases} u_2=3, \\ v_2=2. \end{cases}$$

Отсюда получаем два решения исходной системы:

$$\begin{cases} x_1 = 16, \\ y_1 = 243; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 81, \\ y_2 = 32. \end{cases}$$

16) Ясно, что оба числа x, y должны иметь одинаковый знак. Поэтому применима замена $\sqrt[4]{x} = u$, $\sqrt[4]{y} = v$ или замена $\sqrt[4]{-x} = u$, $\sqrt[4]{-y} = v$. В обоих случаях исходная система приводится к симметричному виду:

$$\begin{cases} \dfrac{u^2}{v^2} + \dfrac{v^2}{u^2} = \dfrac{61}{u^2v^2} + 1, \\ u^2v + v^3u = 78. \end{cases}$$

Вспомогательная система:

$$\begin{cases} \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + \sigma_2^2 = 61, \\ \quad \sigma_2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) = 78. \end{cases}$$

Находя σ_1^2 из второго уравнения и подставляя его в первое уравнение, получаем (после домножения на σ_2^2) биквадратное уравнение $3\sigma_2^4 + 61\sigma_2^2 - 78^2 = 0$. Теперь нетрудно найти решения вспомогательной системы; однако лишь одно из них удовлетворяет необходимому условию $\sigma_1 \geqslant 0$, $\sigma_2 \geqslant 0$:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 5, \\ \sigma_2 = 6. \end{cases}$$

Наконец, находим два решения симметричной системы:

$$\begin{cases} u_1 = 2, \\ v_1 = 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2 = 3, \\ v_2 = 2. \end{cases}$$

а отсюда — четыре решения исходной системы:

$$\begin{cases} x_1 = 16, \\ y_1 = 81; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 81, \\ y_2 = 16; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -16, \\ y_3 = -81; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -81, \\ y_4 = -16. \end{cases}$$

17) Замена $\sqrt[3]{x} = u$, $\sqrt[3]{y} = v$ приводит систему к симметричному виду:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = 72, \\ u + v = 6. \end{cases}$$

Вспомогательная система:

$$\begin{cases} \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 72, \\ \qquad\quad \sigma_1 = 6. \end{cases}$$

Её решение: $\sigma_1 = 6$, $\sigma_2 = 8$. Отсюда получаем два решения симметричной системы:

$$\begin{cases} u_1 = 2, \\ v_1 = 4; \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2 = 4, \\ v_2 = 2. \end{cases}$$

Таким образом, исходная система имеет следующие два решения:

$$\begin{cases} x_1 = 8, \\ y_1 = 64; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 64, \\ y_2 = 8. \end{cases}$$

18) Подстановка $\sqrt[3]{x} = u$, $\sqrt[3]{y} = v$ приводит систему к симметричному виду

$$\begin{cases} u^3 + u^3v^3 + v^3 = 12, \\ u + uv + v = 0. \end{cases}$$

Вспомогательная система:

$$\begin{cases} \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^3 = 12, \\ \sigma_1 + \sigma_2 = 0. \end{cases}$$

Исключая σ_2, получаем уравнение $\sigma_1^2 = 4$, откуда находим два решения вспомогательной системы:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 2, \\ \sigma_2 = -2; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_1 = -2, \\ \sigma_2 = 2. \end{cases}$$

Второму из них соответствуют комплексные решения симметричной системы, первое даёт два действительных решения:

$$\begin{cases} u_1 = 1 + \sqrt{3}, \\ v_1 = 1 - \sqrt{3}; \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2 = 1 - \sqrt{3}, \\ v_2 = 1 + \sqrt{3}. \end{cases}$$

Таким образом, исходная система имеет следующие два решения:

$$\begin{cases} x_1 = 10 + 6\sqrt{3}, \\ y_1 = 10 - 6\sqrt{3}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 10 - 6\sqrt{3}, \\ y_2 = 10 + 6\sqrt{3}. \end{cases}$$

19) Подстановка $\sqrt{x} = u$, $\sqrt[4]{y^3 - 1} = v$ приводит систему к симметричному виду

$$\begin{cases} u + v = 3, \\ u^4 + (v^4 + 1) = 82. \end{cases}$$

Вспомогательная система:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 3, \\ \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 = 81. \end{cases}$$

Она имеет два решения:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 3, \\ \sigma_2 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_1 = 3, \\ \sigma_2 = 18, \end{cases}$$

первому из которых соответствуют действительные решения симметричной системы

$$\begin{cases} u_1 = 3, \\ v_1 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2 = 0, \\ v_2 = 3, \end{cases}$$

а второму — комплексные. Таким образом, исходная система имеет следующие два решения (получаемые по формулам $\sqrt{x} = u$, $\sqrt[4]{y^3 - 1 = v}$):

$$\begin{cases} x_1 = 9, \\ y_1 = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 0, \\ y_2 = \sqrt[3]{82}. \end{cases}$$

20) Подстановка $\sqrt[3]{x} = u$, $\sqrt[3]{y} = v$ приводит систему к симметричному виду

$$\begin{cases} u + v = 3, \\ u^3v^3 = 8. \end{cases}$$

Вспомогательная система

$$\begin{cases} \sigma_1 = 3, \\ \sigma_2^3 = 8 \end{cases}$$

имеет только одно действительное решение $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = 2$. Таким образом, симметричная система имеет следующие два решения:

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ v_3 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} u_2 = 2, \\ v_2 = 1, \end{cases}$$

а исходная система — решения

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 8; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 8, \\ y_2 = 1. \end{cases}$$

21) Ясно, что x и y — числа одного знака и притом (как видно из второго уравнения) положительные. Поэтому можно применить подстановку $\sqrt[6]{x} = u$, $\sqrt[6]{y} = v$. Она приводит систему к симметричному виду:

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = \dfrac{5}{2}uv, \\ u^6 + v^6 = 10. \end{cases}$$

Вспомогательная система:

$$\begin{cases} \sigma_1^2 = \dfrac{9}{2}\sigma_2, \\ \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3 = 10. \end{cases}$$

Подстановка значения σ_1^2 во второе уравнение даёт кубическое уравнение $13\sigma_2^3 = 16$. Таким образом, вспомогательная система имеет только одно решение, удовлетворяющее условию $\sigma_1 \geqslant 0$, $\sigma_2 \geqslant 0$;

$$\begin{cases} \sigma_1 = 3\sqrt[6]{\dfrac{2}{13}}, \\ \sigma_2 = 2\sqrt[3]{\dfrac{2}{13}}. \end{cases}$$

Отсюда находим два решения симметричной системы:

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt[6]{\dfrac{2}{13}}, \\ v_1 = 2\sqrt[6]{\dfrac{2}{13}}; \end{cases} \quad \begin{cases} u_2 = 2\sqrt[6]{\dfrac{2}{13}}, \\ v_2 = \sqrt[6]{\dfrac{2}{13}} \end{cases}$$

и два решения исходной системы:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{13}, \\ y_1 = \dfrac{128}{13}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \dfrac{128}{13}, \\ y_2 = \dfrac{2}{13}. \end{cases}$$

22) Подстановка $\sqrt[3]{x}=u$, $\sqrt[3]{y}=v$ приводит систему к симметричному виду:

$$\begin{cases} \dfrac{u}{v}+\dfrac{v}{u}=a, \\ u^3+v^3=b. \end{cases}$$

Вспомогательная система:

$$\begin{cases} \sigma_1^2=(a+2)\sigma_2, \\ \sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2=b. \end{cases}$$

Исключая σ_2, получаем кубическое уравнение $(a-1)\sigma_1^3=b(a+2)$. Таким образом, при $a\neq 1$, $a\neq -2$ мы имеем единственное действительное решение вспомогательной системы:

$$\begin{cases} \sigma_1=\sqrt[3]{\dfrac{b(a+2)}{a-1}}, \\ \sigma_2=\sqrt[3]{\dfrac{b^2}{(a+2)(a-1)^2}}. \end{cases}$$

Отсюда получаем два решения симметричной системы

$$\begin{cases} u_1=\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{\dfrac{b(a+2)}{a-1}}\left(1+\sqrt{\dfrac{a-2}{a+2}}\right), \\ v_1=\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{\dfrac{b(a+2)}{a-1}}\left(1-\sqrt{\dfrac{a-2}{a+2}}\right); \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2=v_1, \\ v_2=u_1. \end{cases}$$

Они будут действительными, если $a-2$ и $a+2$ — число одного знака, причём $a+2\neq 0$, иными словами, при $a\geqslant 2$ и при $a<-2$. Таким образом, при $a\geqslant 2$ и при $a<-2$ мы имеем следующие два решения исходной системы:

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b}{2}+\dfrac{b(a+1)}{2(a-1)}\sqrt{\dfrac{a-2}{a+2}}, \\ y_1=\dfrac{b}{2}-\dfrac{b(a+1)}{2(a-1)}\sqrt{\dfrac{a-2}{a+2}}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=y_1, \\ y_2=x_1. \end{cases}$$

Если $a=1$, но $b\neq 0$, вспомогательная система (а значит, и исходная система) решений не имеет. Если, далее, $a=1$, $b=0$, то вспомогательная система сводится к одному соотношению $\sigma_1^2=3\sigma_2$, которое соответствует комплексным решениям симметричной системы (ибо дискриминант квадратного уравнения $z^2-\sigma_1 z+\sigma_2=0$ отрицателен). Таким образом, при $a=1$ исходная система решений не имеет.

Наконец, при $a=-2$ вспомогательная система принимает вид

$$\begin{cases} \sigma_1=0, \\ \sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2=b. \end{cases}$$

Эта система может иметь решения лишь при $b=0$. Её решением служит значение $\sigma_1=0$ и любое значение σ_2. Поэтому при $a=-2$, $b=0$ любые (отличные от нуля) числа x, y, удовлетворяющие условию $x+y=0$, дают решение исходной системы.

23) Положим $\frac{x+a}{2}=u$, $\frac{a-x}{2}=v$. Тогда $u+v=a$, и мы получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} u\ +v\ =a, \\ u^6+v^6=a^6. \end{cases}$$

Вспомогательная система:

$$\begin{cases} \sigma_1=a, \\ \sigma_1^6-6\sigma_1^4\sigma_2+9\sigma_1^2\sigma_2^2-2\sigma_2^3=a^6. \end{cases}$$

Исключая σ_1, получаем кубическое уравнение $2\sigma_2^3-9a^2\sigma_2^2+6a^4\sigma_2=0$. Теперь мы легко находим три решения вспомогательной системы:

$$\begin{cases} \sigma_1=a, \\ \sigma_2=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_1=a, \\ \sigma_2=a^2\dfrac{9\pm\sqrt{33}}{4}. \end{cases}$$

Заметим теперь, что $x=u-v$, т. е. $x^2=(u+v)^2-4uv=\sigma_1^2-4\sigma^2$. Поэтому

$$x^2=a^2 \quad \text{или} \quad x^2=a^2-a^2(9\pm\sqrt{33}).$$

Таким образом, мы получаем следующие шесть решений исходного уравнения:

$$x_1=a, \quad x_2=-a,$$

$$x_3=ia\sqrt{8-\sqrt{33}}, \quad x_4=-ia\sqrt{8-\sqrt{33}}, \quad x_5=ia\sqrt{8+\sqrt{33}}, \quad x_6=-ia\sqrt{8+\sqrt{33}}.$$

24) Положим $ax^2+bx+c=u$, $ax^2+bx+d=-v$. Тогда $u+v=c-d$ и мы получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} u\ +v\ =c-d, \\ u^5+v^5=e. \end{cases}$$

Эту систему мы уже рассматривали (упражнение 24) на стр. 153). Её решения (выписываем только значения u):

$$u_{1,2}=\frac{c-d}{2}\pm\sqrt{-\frac{(c-d)^2}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(c-d)^5+4e}{5(c-d)}}},$$

$$u_{3,4}=\frac{c-d}{2}\pm\sqrt{-\frac{(c-d)^2}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(c-d)^5+4e}{5(c-d)}}}.$$

Решения исходного уравнения получаются теперь из решения четырёх квадратных уравнений $ax^2+bx+c=u_i$, $i=1, 2, 3, 4$. Таким образом, имеем восемь решений исходного уравнения (беря любые комбинации указанных знаков):

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-2a(c+d)\pm2a\sqrt{-(c-d)^2\pm2\sqrt{\frac{(c-d)^5+4e}{5(c-d)}}}}.$$

25) Положим $z^2+1=u$, $z^2-1=-v$. Тогда $u+v=2$, и мы получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} u\ +v\ =2, \\ u^7+v^7=2^7. \end{cases}$$

Вспоминая решение упражнения 39) на стр. 161, находим следующие шесть решений этой системы (выписываем только значения u):

$$u_1 = 2, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 1 + i\sqrt{3}, \quad u_4 = 1 - i\sqrt{3}, \quad u_5 = u_3, \quad u_6 = u_4.$$

Решения исходного уравнения получаются теперь из решений шести квадратных уравнений $z^2 + 1 = u_i$, $i = 1, 2, \ldots, 6$. Таким образом, получаем 12 решений исходного уравнения:

$$z_1 = 1; \quad z_2 = -1; \quad z_3 = i; \quad z_4 = -i;$$

$$z_5 = z_6 = (1 + i)\sqrt[4]{\frac{3}{4}}; \quad z_7 = z_8 = (1 - i)\sqrt[4]{\frac{3}{4}};$$

$$z_9 = z_{10} = (-1 + i)\sqrt[4]{\frac{3}{4}}; \quad z_{11} = z_{12} = (-1 - i)\sqrt[4]{\frac{3}{4}}.$$

26) Положим $y = 1 - z$. Тогда $y + z = 1$ и мы получаем следующую симметричную систему:

$$\begin{cases} y + z = 1, \\ y^4 + z^4 = 1. \end{cases}$$

Вспоминая решение упражнения 20) на стр. 151, находим следующие четыре решения исходного уравнения:

$$z_1 = 1, \quad z_2 = 0, \quad z_3 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{7}), \quad z_4 = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{7}).$$

27) Положим $x + a + b = u$, $-x = v$. Тогда $u + v = a + b$ и мы получаем следующую симметричную систему:

$$\begin{cases} u + v = a + b, \\ u^5 + v^5 = a^5 + b^5. \end{cases}$$

Вспоминая решение упражнения 24) на стр. 153, получаем при $a + b \neq 0$ следующие четыре решения этой системы (выписываем только значения v):

$$v = \frac{a+b}{2} \pm \sqrt{-\frac{(a+b)^2}{4} \pm \frac{1}{2}(a^2 + b^2)}.$$

Наконец, так как $x = -v$, то мы получаем отсюда следующие четыре решения исходного уравнения:

$$x_1 = -a, \quad x_2 = -b, \quad x_{3,4} = -\frac{a+b}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{3a^2 + 3b^2 + 2ab}.$$

Если $a + b = 0$, то исходному уравнению удовлетворяет любое значение x.

28) Поскольку выражение $(a - \sqrt{x})^2$ неотрицательно при всех действительных x, написанное уравнение эквивалентно следующему:

$$1 - x^2 = (a - \sqrt{x})^4.$$

Положим $\sqrt{x}=u$, $a-\sqrt{x}=u$. Тогда $u+v=a$, а написанное уравнение имеет вид $1-u^4=v^4$. Таким образом, мы имеем симметричную систему:

$$\begin{cases} u\ +v\ =a, \\ u^4+v^4=1. \end{cases}$$

Вспоминая решение упражнения 21) на стр. 151, имеем следующие четыре решения этой системы (выписываем только значения u):

$$u=\frac{a}{2}\pm\sqrt{-\frac{3}{4}a^2\pm\sqrt{\frac{a^4+1}{2}}}.$$

Так как число $u=\sqrt{x}$ должно быть неотрицательным, то подкоренное выражение должно быть положительным. Следовательно, под корнем нужно взять знак «+» и должно быть выполнено неравенство

$$\sqrt{\frac{a^4+1}{2}}\geqslant\frac{3}{4}a^2,$$

откуда легко находим $|a|\leqslant\sqrt[4]{8}$. Далее, неравенство

$$\left|\frac{a}{2}\right|\leqslant\sqrt{-\frac{3}{4}a^2+\sqrt{\frac{a^4+1}{2}}}$$

равносильно, как легко видеть, соотношению $|a|\leqslant 1$. Таким образом выражение

$$u_1=\frac{a}{2}+\sqrt{-\frac{3}{4}a^2+\sqrt{\frac{a^4+1}{2}}}$$

будет неотрицательным при $-1\leqslant a\leqslant\sqrt[4]{8}$. Значение же

$$u_2=\frac{a}{2}-\sqrt{-\frac{3}{4}a^2+\sqrt{\frac{a^4+1}{2}}}$$

будет неотрицательным при $1\leqslant a\leqslant\sqrt[4]{8}$. Возводя в квадрат, получаем два решения исходного уравнения:

$$x_1=-\frac{a^2}{2}+\sqrt{\frac{a^4+1}{2}}+a\sqrt{-\frac{3}{4}a^2+\sqrt{\frac{a^4+1}{2}}}\quad\text{при }\ -1\leqslant a\leqslant\sqrt[4]{8};$$

$$x_2=-\frac{a^2}{2}+\sqrt{\frac{a^4+1}{2}}-a\sqrt{-\frac{3}{4}a^2+\sqrt{\frac{a^4+1}{2}}}\quad\text{при }\ 1\leqslant a\leqslant\sqrt[4]{8}.$$

29) Положим

$$\sqrt[5]{\frac{1}{2}+x}=u,\qquad\sqrt[5]{\frac{1}{2}-x}=v.$$

Тогда $u^5=\frac{1}{2}+x$, $v^5=\frac{1}{2}-x$ и мы получаем симметричную систему:

$$\begin{cases} u \ +v \ =1, \\ u^5+v^5=1. \end{cases}$$

Её решения (см. упражнение 24) на стр. 153):

$$\begin{cases} u_1=1, \\ v_1=0; \end{cases} \quad \begin{cases} u_2=0, \\ v_2=1 \end{cases}$$

(нас интересуют только действительные решения). Соотношение $u^5=\frac{1}{2}+x$ даёт два решения исходного уравнения:

$$x_1=\frac{1}{2}, \qquad x_2=-\frac{1}{2}.$$

30) Положим $y=\sqrt{17-x^2}$. Тогда мы имеем симметричную систему:

$$\begin{cases} x^2+y^2 \quad\ =17, \\ x+y+xy=9. \end{cases}$$

Вспомогательная система:

$$\begin{cases} \sigma_1^2-2\sigma_2=17, \\ \sigma_1+\sigma_2 \quad =9. \end{cases}$$

Её решения:

$$\begin{cases} \sigma_1=5, \\ \sigma_2=4; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_1=-7, \\ \sigma_2=16. \end{cases}$$

Второе из них даёт комплексные значения x, y, которые нас не устраивают. Первое дает два решения симметричной системы

$$\begin{cases} x_1=1, \\ y_1=4; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=4, \\ y_2=1. \end{cases}$$

Таким образом, исходное уравнение имеет два корня: $x_1=1$, $x_2=4$.

31) Полагая $\sqrt[3]{35-x^3}=y$, получаем симметричную систему:

$$\begin{cases} x^3+y^3 \quad\ =35, \\ xy(x+y)=30. \end{cases}$$

Эту систему мы уже рассматривали выше (упражнение 35) на стр. 159). Ограничиваясь действительными значениями, находим два решения исходного уравнения: $x_1=2$, $x_2=3$.

32) Полагая $\frac{19-x}{x+1}=y$, т. е. $19-x=xy+y$, получаем симметричную систему:

$$\begin{cases} x+y+xy=19, \\ xy(x+y) \ =84. \end{cases}$$

Вспомогательная система:

$$\begin{cases} \sigma_1+\sigma_2=19, \\ \sigma_1\sigma_2 \quad =84. \end{cases}$$

Её решения:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 7, \\ \sigma_2 = 12; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_1 = 12, \\ \sigma_2 = 7. \end{cases}$$

Каждое из них даёт два решения симметричной системы:

$$\begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = 4; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 4, \\ y_2 = 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = 6 + \sqrt{29}, \\ y_3 = 6 - \sqrt{29}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4 = 6 - \sqrt{29}, \\ y_4 = 6 + \sqrt{29}. \end{cases}$$

Таким образом, исходное уравнение имеет следующие четыре решения:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 6 + \sqrt{29}, \quad x_4 = 6 - \sqrt{29}.$$

33) Возводя обе части уравнения в куб, получаем $(a - y)^6 = a^6 - y^6$. Полагая $a - y = x$, получаем симметричную систему

$$\begin{cases} x \ + y \ = a, \\ x^6 + y^6 = a^6. \end{cases}$$

Вспомогательная система:

$$\begin{cases} \sigma_1 = a, \\ \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3 = a^6. \end{cases}$$

Её решения:

$$\begin{cases} \sigma_1 = a, \\ \sigma_2 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_1 = a, \\ \sigma_2 = a^2 \left(\dfrac{9}{4} \pm \dfrac{\sqrt{33}}{4} \right). \end{cases}$$

Из них лишь первому соответствуют действительные решения симметричной системы:

$$\begin{cases} x_1 = a, \\ y_1 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 0, \\ y_2 = a. \end{cases}$$

Таким образом, исходное уравнение имеет два решения: $y_1 = 0$; $y_2 = a$.

34) Полагая $\sin x = u$, $\cos x = v$, имеем симметричную систему:

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 1, \\ u^3 + v^3 = 1. \end{cases}$$

Вспомогательная система:

$$\begin{cases} \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 1, \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 1. \end{cases}$$

Исключая σ_2, получаем кубическое уравнение $\sigma_1^3 - 3\sigma_1 + 2 = 0$. Это уравнение имеет корень $\sigma_1 = 1$. Применяя теорему Безу, найдём два других корня. Таким образом, получаем три решения вспомогательной системы:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 1, \\ \sigma_2 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_1 = 1, \\ \sigma_2 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_1 = -2, \\ \sigma_2 = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Последнему из них соответствуют комплексные значения u, v (что недопустимо, поскольку $u = \sin x$, $v = \cos x$). Остаётся одно решение (кратности 2): $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 0$, которое даёт два решения симметричной системы:

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ v_1 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2 = 0, \\ v_2 = 1. \end{cases}$$

Мы получаем, таким образом, две системы:

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos x = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = 1. \end{cases}$$

Таким образом, исходное уравнение имеет следующие решения:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad x = 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

35) Положим $\sqrt[4]{629 - x} = u$, $\sqrt[4]{77 + x} = v$. Тогда мы имеем следующую симметричную систему:

$$\begin{cases} u + v = 8, \\ u^4 + v^4 = 706. \end{cases}$$

Её действительные решения (см. решение упражнения 21) на стр. 151):

$$\begin{cases} u_1 = 3, \\ v_1 = 5; \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2 = 5, \\ v_2 = 3. \end{cases}$$

Учитывая соотношение $\sqrt[4]{629 - x} = u$, получаем отсюда два решения исходного уравнения $x_1 = 548$, $x_2 = 4$.

36) Положим $\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}} = u$, $\sqrt[3]{1 - \sqrt{x}} = v$. Тогда мы имеем следующую симметричную систему:

$$\begin{cases} u + v = 2, \\ u^3 + v^3 = 2. \end{cases}$$

Вспомогательная система:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 2, \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 2. \end{cases}$$

Её решение:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 2, \\ \sigma_2 = 1. \end{cases}$$

Отсюда получаем одно (двукратное) решение симметричной системы: $u = v = 1$. Вспоминая, что $u = \sqrt[3]{1 + \sqrt{x}}$, находим теперь единственное решение исходного уравнения: $x = 0$.

37) Полагая $\sqrt[3]{8 + x} = u$, $\sqrt[3]{8 - x} = v$, получаем симметричную систему:

$$\begin{cases} u + v = 1, \\ u^3 + v^3 = 16. \end{cases}$$

Вспомогательная система:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 1, \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 16. \end{cases}$$

Её решение:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 1, \\ \sigma_2 = -5. \end{cases}$$

Отсюда получаем следующие два решения симметричной системы:

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{21}}{2}, \\ v_1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{21}}{2}; \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{21}}{2}, \\ v_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{21}}{2}. \end{cases}$$

Вспоминая теперь, что $\sqrt[3]{8+x} = u$, находим отсюда два решения исходного уравнения: $x_1 = 3\sqrt{21}$, $x_2 = -3\sqrt{21}$.

38) Положим $\sqrt{1-x^2} = y$. Тогда мы имеем симметричную систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{35}{12}. \end{cases}$$

Вспомогательная система:

$$\begin{cases} \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 1, \\ 12\sigma_1 = 35\sigma_2. \end{cases}$$

Её решения:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{7}{5}, \\ \sigma_2 = \dfrac{12}{25}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_1 = -\dfrac{5}{7}, \\ \sigma_2 = -\dfrac{12}{49}. \end{cases}$$

Отсюда находим четыре решения симметричной системы. Условию $y \geqslant 0$ удовлетворяют следующие три из них:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{4}{5}, \\ y_1 = \dfrac{3}{5}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = \dfrac{3}{5}, \\ y_2 = \dfrac{4}{5}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = -\dfrac{5}{14} - \dfrac{\sqrt{73}}{14}, \\ y_3 = -\dfrac{5}{14} + \dfrac{\sqrt{73}}{14}. \end{cases}$$

Таким образом, исходная система имеет следующие три решения:

$$x_1 = \frac{4}{5}, \quad x_2 = \frac{3}{5}, \quad x_3 = -\frac{5}{14} - \frac{\sqrt{73}}{14}.$$

39) Положим $\dfrac{1}{x} = u$, $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x} = v$. Тогда мы имеем симметричную систему:

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 1, \\ \dfrac{1}{u} + \dfrac{1}{v} = \dfrac{35}{12}. \end{cases}$$

Мы уже решали эту систему в предыдущем упражнении. Нужно взять лишь те решения этой системы, в которых u и v имеют одинаковые знаки. Таких решений два (выписываем только значения u):

$$u_1 = \frac{4}{5}, \qquad u_2 = \frac{3}{5}.$$

Отсюда находим два решения исходного уравнения:

$$x_1 = \frac{5}{4}, \qquad x_2 = \frac{5}{3}.$$

40) Положим $\sqrt[3]{54+\sqrt{x}} = u$, $\sqrt[3]{54-\sqrt{x}} = v$. Тогда мы имеем симметричную систему:

$$\begin{cases} u + v = \sqrt[3]{18}, \\ u^3 + v^3 = 108. \end{cases}$$

Вспомогательная система:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sqrt[3]{18}, \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 108. \end{cases}$$

Её решение:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sqrt[3]{18}, \\ \sigma_2 = -\dfrac{30}{\sqrt[3]{18}}. \end{cases}$$

Ему соответствуют следующие два решения симметричной системы:

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt[3]{18}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{23}}{12}\right), \\ v_1 = \sqrt[3]{18}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{23}}{12}\right); \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2 = v_1, \\ v_2 = u_1. \end{cases}$$

Вспоминая соотношение $\sqrt[3]{54+\sqrt{x}} = u$, находим отсюда следующие два уравнения:

$$\sqrt{x} = 8\sqrt{69}, \qquad \sqrt{x} = -8\sqrt{69}.$$

Второе из них решений не имеет; первое даёт единственное решение исходного уравнения: $x = 64 \cdot 69 = 4416$.

41) Разделяя корни и возводя в четвёртую степень, имеем:

$$\sqrt[3]{24+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{30-\sqrt{x}} = 6.$$

Полагая $\sqrt[3]{24+\sqrt{x}} = u$, $\sqrt[3]{30-\sqrt{x}} = v$, получаем симметричную систему:

$$\begin{cases} u + v = 6, \\ u^3 + v^3 = 54. \end{cases}$$

Вспомогательная система:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 6, \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 54. \end{cases}$$

Её решение: $\sigma_1 = 6$, $\sigma_2 = 9$. Этому решению соответствует одно (двукратное) решение симметричной системы:

$$u = v = 3.$$

Вспоминая соотношение $\sqrt[3]{24 + \sqrt{x}} = u$, находим теперь $x = 9$. Проверка показывает, что это значение удовлетворяет исходному уравнению.

42) Полагая $\sqrt[3]{10 - x} = u$, $\sqrt[3]{3 - x} = -v$, получаем симметричную систему:

$$\begin{cases} u + v = 1, \\ u^3 + v^3 = 7. \end{cases}$$

Вспомогательная система

$$\begin{cases} \sigma_1 = 1, \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 7 \end{cases}$$

имеет единственное решение $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = -2$. Ему соответствуют два решения симметричной системы:

$$\begin{cases} u_1 = 2, \\ v_1 = -1; \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2 = -1, \\ v_2 = 2. \end{cases}$$

Вспоминая, наконец, соотношение $u = \sqrt[3]{10 - x}$, находим два решения исходного уравнения: $x_1 = 2$, $x_2 = 11$.

43) Полагая $\sqrt[4]{41 + x} = u$, $\sqrt[4]{41 - x} = v$, получаем симметричную систему:

$$\begin{cases} u + v = 2, \\ u^4 + v^4 = 82. \end{cases}$$

Её действительные решения (см. упражнение 21) на стр. 151):

$$\begin{cases} u_1 = 3, \\ v_1 = -1; \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2 = -1, \\ v_2 = 3. \end{cases}$$

Ни одно из этих решений не удовлетворяет необходимому условию $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$. Таким образом, исходное уравнение решений не имеет.

44) Полагая $\sqrt[5]{a + x} = u$, $\sqrt[5]{a - x} = v$, получаем симметричную систему:

$$\begin{cases} u + v = \sqrt[5]{2a}, \\ u^5 + v^5 = 2a. \end{cases}$$

Её действительные решения (см. упражнение 24) на стр. 153):

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt[5]{2a}, \\ v_1 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2 = 0, \\ v_2 = \sqrt[5]{2a}. \end{cases}$$

Вспоминая соотношение $\sqrt[5]{a + x} = u$, находим два решения исходной системы: $x_1 = a$, $x_2 = -a$.

45) Полагая $\sqrt[7]{a - x} = u$, $\sqrt[7]{x} = v$, получаем симметричную систему:

$$\begin{cases} u + v = \sqrt[7]{a}, \\ u^7 + v^7 = a. \end{cases}$$

Её действительные решения (см. упражнение 39) на стр. 161):

$$\begin{cases} u_1=\sqrt[7]{a}, \\ v_1=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2=0, \\ v_2=\sqrt[7]{a}. \end{cases}$$

Вспоминая соотношение $\sqrt[7]{x}=v$, получаем отсюда два решения исходного уравнения: $x_1=0$, $x_2=a$.

46) Полагая $\sqrt[4]{x}=u$, $\sqrt[4]{a-x}=v$, получаем симметричную систему:

$$\begin{cases} u\ +v\ =\sqrt[4]{b}, \\ u^4+v^4=a. \end{cases}$$

Действительными могут быть только следующие два её решения (см. упражнение 21) на стр. 151):

$$\begin{cases} u_1=\dfrac{\sqrt[4]{b}}{2}+\sqrt{-\dfrac{3}{4}\sqrt{b}+\sqrt{\dfrac{a+b}{2}}}, \\ v_1=\dfrac{\sqrt[4]{b}}{2}-\sqrt{-\dfrac{3}{4}\sqrt{b}+\sqrt{\dfrac{a+b}{2}}}; \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2=v_1, \\ v_2=u_1. \end{cases}$$

Подкоренные выражения будут неотрицательными при условии $8a\geqslant b\geqslant 0$. Так как пригодны лишь решения, для которых $u\geqslant 0$, $v\geqslant 0$, то должно быть выполнено ещё одно условие:

$$\frac{\sqrt[4]{b}}{2}\geqslant\sqrt{-\frac{3}{4}\sqrt{b}+\sqrt{\frac{a+b}{2}}},$$

которое легко приводится к виду $b\geqslant a$. Итак, решения симметричной системы будут положительными при выполнении условий $b\geqslant a\geqslant\dfrac{b}{8}\geqslant 0$. Вспоминая соотношение $\sqrt[4]{x}=u$, получаем при $b\geqslant a\geqslant\dfrac{b}{8}\geqslant 0$ два решения исходного уравнения:

$$x_{1,\,2}=\frac{a}{2}\pm\sqrt[4]{b}\left(\sqrt{2(a+b)}-\sqrt{b}\right)\sqrt{-\frac{3}{4}\sqrt{b}+\sqrt{\frac{a+b}{2}}}.$$

47) Полагая $\sqrt[4]{8-x}=u$, $\sqrt[4]{89+x}=v$, получаем симметричную систему:

$$\begin{cases} u\ +v\ =5, \\ u^4+v^4=97. \end{cases}$$

Её решения, удовлетворяющие условию $u\geqslant 0$, $v\geqslant 0$ имеют следующий вид (см. пример на стр. 24):

$$\begin{cases} u_1=2, \\ v_1=3; \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2=3, \\ v_2=2. \end{cases}$$

Вспоминая соотношение $\sqrt[4]{8-x}=u$, получаем отсюда два решения: $x_1=-8$, $x_2=-73$ исходного уравнения.

48) Полагая $x+a=u$, $x+b=-v$, получаем симметричную систему:

$$\begin{cases} u\ +v\ =a-b, \\ u^4+v^4=c^4. \end{cases}$$

Её решения (см. упражнение 21) на стр. 151) имеют следующий вид (выписываем только значения u):

$$u=\frac{a-b}{2}\pm\sqrt{-\frac{3}{4}(a-b)^2\pm\sqrt{\frac{(a-b)^4+c^4}{2}}}.$$

Вспоминая теперь, что $x+a=u$, получаем следующие четыре решения исходного уравнения:

$$x=-\frac{a+b}{2}\pm\sqrt{-\frac{3}{4}(a-b)^2\pm\sqrt{\frac{(a-b)^4+c^4}{2}}}.$$

К стр. 27.

1) Мы имеем $\sigma_1=x_1+x_2=-6$, $\sigma_2=x_1x_2=10$. Искомое уравнение $z^2+pz+q=0$ имеет корни $z_1=x_1^3$, $z_2=x_2^3$. Поэтому

$$-p=z_1+z_2=x_1^3+x_2^3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2=(-6)^3-3(-6)\cdot 10=-36,$$
$$q=z_1z_2=x_1^3x_2^3=\sigma_2^3=1000.$$

Таким образом, искомое уравнение имеет вид $z^2+36z+1000=0$.

2) Мы имеем $\sigma_1=x_1+x_2=-1$, $\sigma_2=x_1x_2=-3$. Искомое уравнение $z^2+pz+q=0$ имеет корни $z_1=x_1^{10}$, $z_2=x_2^{10}$. Поэтому

$$-p=z_1+z_2=x_1^{10}+x_2^{10}=\sigma_1^{10}-10\sigma_1^8\sigma_2+35\sigma_1^6\sigma_2^2-50\sigma_1^4\sigma_2^3+25\sigma_1^2\sigma_2^4-2\sigma_2^5=4207,$$
$$q=z_1z_2=x_1^{10}x_2^{10}=\sigma_2^{10}=59\ 049.$$

Таким образом, искомое уравнение имеет вид $z^2-4207z+59\ 049=0$.

3) Мы имеем $\sigma_1=x_1+x_2=-p$, $\sigma_2=x_1x_2=q$. Поэтому

$$x_1+x_2=\sigma_1=-p;$$
$$x_1^2+x_2^2=s_2=\sigma_1^2-2\sigma_2=p^2-2q;$$
$$x_1^3+x_2^3=s_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2=-p^3+3pq;$$
$$x_1^4+x_2^4=s_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2=p^4-4p^2q+2q^2;$$
$$x_1^5+x_2^5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2=-p^5+5p^3q-5pq^2.$$

Далее,

$$x_1^{-1}+x_2^{-1}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{s_1}{\sigma_2}=-\frac{p}{q},$$
$$x_1^{-2}+x_2^{-2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2x_2^2}=\frac{s_2}{\sigma_2^2}=\frac{p^2-2q}{q^2},$$
$$x_1^{-3}+x_2^{-3}=\frac{x_1^3+x_2^3}{x_1^3x_2^3}=\frac{s_3}{\sigma_2^3}=\frac{-p^3+3pq}{q^3},$$
$$x_1^{-4}+x_2^{-4}=\frac{x_1^4+x_2^4}{x_1^4x_2^4}=\frac{s_4}{\sigma_2^4}=\frac{p^4-4p^2q+2q^2}{q^4},$$
$$x_1^{-5}+x_2^{-5}=\frac{x_1^5+x_2^5}{x_1^5x_2^5}=\frac{s_5}{\sigma_2^5}=\frac{-p^5+5p^3q-5pq^2}{q^5}.$$

4) Пусть искомое уравнение имеет вид $x^2+px+q=0$. Тогда мы имеем $-p=$ $=x_1+x_2=\sigma_1$, $q=x_1x_2=\sigma_2$. Заданные соотношения $x_1^5+x_2^5=31$, $x_1+x_2=1$ переписываются в виде системы

$$\begin{cases} \sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2=31, \\ \sigma_1=1, \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} -p^5+5p^3q-5pq^2=31, \\ p=-1. \end{cases}$$

Отсюда получаем квадратное уравнение $5q^2-5q-30=0$, имеющее корни $q_1=3$, $q_2=$ $=-2$. Таким образом, требованиям задачи удовлетворяют следующие два квадратных уравнения (первое из которых имеет комплексные корни):

$$x^2-x+3=0, \quad x^2-x-2=0.$$

5) Мы имеем $\sigma_1=x_1+x_2=-p$, $\sigma_2=x_1x_2=q$. Поэтому формула (1) на стр. 11 переписывается в виде

$$(x_1^n+x_2^n)=-p(x_1^{n-1}+x_2^{n-1})-q(x_1^{n-2}+x_2^{n-2}).$$

Таким образом, если уже установлено, что числа $x_1^{n-2}+x_2^{n-2}$ и $x_1^{n-1}+x_2^{n-1}$ являются целыми, то, как видно из этой формулы, число $x_1^n+x_2^n$ также является целым. Итак, для проведения индукции достаточно установить, что число $x_1^n+x_2^n$ является целым при начальных значениях $n=1$, 2. Это не представляет труда:

$$x_1^1+x_2^1=x_1+x_2=\sigma_1=-p,$$
$$x_1^2+x_2^2=s_2=\sigma_1^2-2\sigma_2=p^2-2q.$$

6) Мы имеем $\sigma_1=x_1+x_2=a-2$, $\sigma_2=x_1x_2=-(a+1)$. Сумма квадратов корней имеет вид

$$x_1^2+x_2^2=s_2=\sigma_1^2-2\sigma_2=(a-2)^2+2(a+1)=a^2-2a+6=(a-1)^2+5.$$

Отсюда ясно, что эта сумма квадратов принимает наименьшее значение (а именно, значение 5) при $a=1$.

7) То, что сумма $x_1^n+x_2^n$ является при любом натуральном n целым числом, вытекает из решения задачи 5). Далее, так как

$$\sigma_1=x_1+x_2=6, \quad \sigma_2=x_1x_2=1,$$

то формула (1) на стр. 11 переписывается в виде

$$s_n=6s_{n-1}-s_{n-2}.$$

Точно так же

$$s_{n-1}=6s_{n-2}-s_{n-3}.$$

Подставляя это значение s_{n-1} в предыдущую формулу, получаем:

$$s_n=35s_{n-2}-6s_{n-3}=-s_{n-3}+5(7s_{n-2}-s_{n-3}).$$

Отсюда видно, что числа s_n и s_{n-3} одновременно делятся или не делятся на 5. Таким образом, если бы s_n делилось на 5, то на 5 делились бы и числа s_{n-3}, s_{n-6}, s_{n-9}, . . . В конце концов, мы получили бы, что на 5 делится одно из чисел s_1, s_2 или s_3. Но, как легко подсчитать $s_1=6$, $s_2=34$, $s_3=198$, т. е. ни одно из этих чисел на 5 не делится. Следовательно, сумма $s_n=x_1^n+x_2^n$ ни при каком натуральном n на 5 не делится.

8) Положим $\sqrt[4]{\alpha}=u$, $\sqrt[4]{\beta}=v$. Тогда, по условию задачи,

$$-p=\alpha+\beta=u^4+v^4, \quad q=\alpha\beta=u^4v^4,$$

и по этим данным мы должны вычислить величину $\sqrt[4]{\alpha}+\sqrt[4]{\beta}=u+v$. Полагая $u+v=\sigma_1$, $uv=\sigma_2$, мы сможем переписать указанные соотношения в виде

$$-p=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2, \quad q=\sigma_2^4.$$

Исключая σ_2, находим биквадратное уравнение

$$\sigma_1^4-4\sqrt[4]{q}\sigma_1^2+2\sqrt{q}+p=0$$

для нахождения искомой величины $\sigma_1=u+v$. Поскольку по смыслу задачи рассматриваются арифметические значения корней $\sqrt[4]{\alpha}$ и $\sqrt[4]{\beta}$, то величина $\sigma_1=\sqrt[4]{\alpha}+\sqrt[4]{\beta}$ должна быть положительной. Выписанное биквадратное уравнение имеет четыре корня:

$$\pm\sqrt{2\sqrt[4]{q}\pm\sqrt{2\sqrt{q}-p}}.$$

Из этих четырех корнёй положительным будет только один (соответствующий двум знакам «+»). В самом деле, из соотношений $\alpha>0$, $\beta>0$ вытекает, что $p<0$, $q>0$ и $p^2-4q\geqslant 0$. Поэтому $|p|\geqslant 2\sqrt{q}$, т. е. $-p\geqslant 2\sqrt{q}$ и, значит, $\sqrt{2\sqrt{q}-p}\geqslant\sqrt{4\sqrt{q}}=2\sqrt[4]{q}$. Таким образом, под корнем следует выбрать знак «+».

Итак,

$$\sqrt[4]{\alpha}+\sqrt[4]{\beta}=\sigma_1=\sqrt{2\sqrt[4]{q}+\sqrt{2\sqrt{q}-p}}.$$

К стр. 31.

1) Мы имеем:

$$5a^2-6ab+5b^2=5s_2-6\sigma_2=5(\sigma_1^2-2\sigma_2)-6\sigma_2=5\sigma_1^2-16\sigma_2=5\sigma_1^2-16\cdot\frac{1}{4}(\sigma_1^2-z)=\sigma_1^2+4z\geqslant 0.$$

2) Это неравенство непосредственно вытекает из неравенства $a^4+b^4\geqslant\frac{1}{8}c^4$ при $a+b\geqslant c$ (см. пример 1° на стр. 29), если положить в нём $c=a+b$. Можно предложить и непосредственное доказательство:

$$8(a^4+b^4)-(a+b)^4=8s_4-\sigma_1^4=8(\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2)-\sigma_1^4=$$
$$=7\sigma_1^4-32\sigma_1^2\cdot\frac{1}{4}(\sigma_1^2-z)+16\cdot\frac{1}{16}(\sigma_1^2-z)^2=6\sigma_1^2z+z^2\geqslant 0.$$

3) Имеем:

$$a^4+b^4-a^3b-ab^3=a^4+b^4-ab(a^2+b^2)=s_4-\sigma_2s_2=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2-\sigma_2(\sigma_1^2-2\sigma_2)=$$
$$=\sigma_1^4-5\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_2^2=\sigma_1^4-5\sigma_1^2\cdot\frac{1}{4}(\sigma_1^2-z)+4\cdot\frac{1}{16}(\sigma_1^2-z)^2=\frac{3}{4}\sigma_1^2z+\frac{1}{4}z^2\geqslant 0.$$

4) Имеем:

$$a^2+b^2+1-ab-a-b=\sigma_1^2-3\sigma_2-\sigma_1+1=$$
$$=\sigma_1^2-3\cdot\frac{1}{4}(\sigma_1^2-z)-\sigma_1+1=\frac{1}{4}\sigma_1^2-\sigma_1+1+\frac{3}{4}z=\left(\frac{1}{2}\sigma_1-1\right)^2+\frac{3}{4}z\geqslant 0.$$

5) Имеем:

$$a^6+b^6-a^5b-ab^5=s_6-\sigma_2 s_4=\sigma_1^6-6\sigma_1^4\sigma_2+9\sigma_1^2\sigma_2^2-2\sigma_2^3-\sigma_2(\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2)=$$

$$=\sigma_1^6-7\sigma_1^4\sigma_2+13\sigma_1^2\sigma_2^2-4\sigma_2^3=\sigma_1^6-7\sigma_1^4\cdot\frac{1}{4}(\sigma_1^2-z)+13\sigma_1^2\cdot\frac{1}{16}(\sigma_1^2-z)^2-$$

$$-4\cdot\frac{1}{64}(\sigma_1^2-z)^3=\frac{5}{16}\sigma_1^4 z+\frac{5}{8}\sigma_1^2 z^2+\frac{1}{16}z^3\geqslant 0.$$

6) Положим $\sqrt{a}=u$, $\sqrt{b}=v$. Тогда доказываемое неравенство примет вид

$$\frac{u^2}{v}+\frac{v^2}{u}\geqslant u+v,$$

или $u^3+v^3\geqslant uv(u+v)$. Мы должны доказать справедливость этого неравенства при $u\geqslant 0$, $v\geqslant 0$. Имеем:

$$u^3+v^3-uv(u+v)=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2-\sigma_1\sigma_2=\sigma_1^3-4\sigma_1\sigma_2=\sigma_1(\sigma_1^2-4\sigma_2).$$

Последнее выражение в самом деле неотрицательно, так как $\sigma_1\geqslant 0$, $\sigma_1^4-4\sigma_2\geqslant 0$ (см. теорему на стр. 28).

7) Положим $\sqrt{a}=u$, $\sqrt{b}=v$. Тогда доказываемое неравенство примет вид

$$(u+v)^8\geqslant 64u^2v^2(u^2+v^2)^2.$$

Поскольку u, v неотрицательны, достаточно доказать неравенство, получающееся, если из обеих частей извлечь квадратный корень:

$$(u+v)^4\geqslant 8uv(u^2+v^2).$$

Мы имеем:

$$(u+v)^4-8uv(u^2+v^2)=\sigma_1^4-8\sigma_2(\sigma_1^2-2\sigma_2)=\sigma_1^4-8\sigma_1^2\sigma_2+16\sigma_2^2=$$

$$=\sigma_1^4-8\sigma_1^2\cdot\frac{1}{4}(\sigma_1^2-z)+16\cdot\frac{1}{16}(\sigma_1^2-z)^2=z^2\geqslant 0.$$

8) Мы имеем:

$$a^4+2a^3b+2ab^3+b^4-6a^2b^2=s_4+2\sigma_2 s_2-6\sigma_2^2=$$

$$=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+2\sigma_2(\sigma_1^2-2\sigma_2)-6\sigma_2^2=\sigma_1^4-2\sigma_1^2\sigma_2-8\sigma_2^2=$$

$$=(z+4\sigma_2)^2-2(z+4\sigma_2)\sigma_2-8\sigma_2^2=z^2+6\sigma_2 z.$$

Так как a, $b\geqslant 0$, то $\sigma_2\geqslant 0$ и $z\geqslant 0$ (см. теорему на стр. 28), и доказываемое неравенство очевидно.

9) Мы имеем:

$$\frac{a^3+b^3}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^3=\frac{1}{2}(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2)-\frac{1}{8}\sigma_1^3=\frac{3}{8}\sigma_1^3-\frac{3}{2}\sigma_1\sigma_2=\frac{3}{8}\sigma_1 z\geqslant 0.$$

10) Имеем:

$$xy(x-y)^2=\sigma_2(\sigma_1^2-4\sigma_2)=\sigma_2 z=\frac{1}{4}(\sigma_1^2-z)z=\frac{1}{4}(a^2-z)z=\frac{1}{4}(-z^2+a^2z)=\frac{1}{4}\left(-\left(z-\frac{a^2}{2}\right)^2+\frac{a^4}{4}\right).$$

Отсюда ясно, что написанное выражение не превосходит $\frac{a^4}{16}$ и принимает это наибольшее значение при $z-\frac{a^2}{2}=0$ $\left(\text{т. е. при } \sigma_1=a,\ \sigma_1^2-4\sigma_2=\frac{a^2}{2}\right.$, откуда легко находим, что x и y являются двумя корнями квадратного уравнения $\left.z^2-az+\frac{a^2}{8}=0\right)$.

11) Мы имеем:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2-\frac{25}{2}=a^2+b^2+\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}-\frac{17}{2}=(\sigma_1^2-2\sigma_2)+\frac{\sigma_1^2-2\sigma_2}{\sigma_2^2}-\frac{17}{2}=$$

$$=1-2\sigma_2+\frac{1-2\sigma_2}{\sigma_2^2}-\frac{17}{2}=\frac{1}{2\sigma_2^2}(-4\sigma_2^3-15\sigma_2^2-4\sigma_2+2).$$

Нам нужно доказать, что выражение в скобках неотрицательно, т. е.

$$4\sigma_2^3+15\sigma_2^2+4\sigma_2\leqslant 2. \qquad (*)$$

Так как $a, b>0$, то $\sigma_2>0$; кроме того, $z=\sigma_1^2-4\sigma_2\geqslant 0$, т. е. $1-4\sigma_2\geqslant 0$, откуда $\sigma_2\leqslant\frac{1}{4}$. Итак, $0<\sigma_2\leqslant\frac{1}{4}$. Многочлен $4\sigma_2^3+15\sigma_2^2+4\sigma_2$, все коэффициенты которого положительны, принимает своё наибольшее значение на отрезке $0<\sigma_2\leqslant\frac{1}{4}$ при $\sigma_2=\frac{1}{4}$; это значение равно двум. Таким образом, неравенство (*) установлено.

12) Указанное неравенство можно переписать в виде $x^2+y^2\geqslant 2xy$, т. е. $\sigma_1^2-2\sigma_2\geqslant$ $\geqslant 2\sigma_2$. Оно вытекает из неравенства $\sigma_1^2\geqslant 4\sigma_2$, указанного в теореме на стр. 28. Равенство имеет место лишь при $x=y$.

13) Раскрыв скобки в левой части, мы получим сумму

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{x_i}{x_j}.$$

В ней будет n слагаемых $\frac{x_k}{x_k}$, равных единице, и, кроме того, будут входить парные слагаемые

$$\frac{x_k}{x_l}+\frac{x_l}{x_k}, \qquad (*)$$

причём число таких пар равно, очевидно, числу сочетаний из n по 2, т. е. $\frac{n(n-1)}{2}$. Так как каждое выражение (*) не меньше чем 2 (см. предыдущее упражнение), то вся написанная сумма не меньше, чем

$$n+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2=n^2,$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что равенство

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)=n^2$$

будет иметь место только в том случае, если каждое из выражений (*) равно 2, т. е. если $x_k = x_l$ для всех k, l. Иными словами, это равенство имеет место лишь при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

К стр. 37.

1) Имеем:

$$9z^6 - 18z^5 - 73z^4 + 164z^3 - 73z^2 - 18z + 9 = z^3\left(9\left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) - 18\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) - 73\left(z + \frac{1}{z}\right) + 164\right) =$$

$$= z^3(9(\sigma^3 - 3\sigma) - 18(\sigma^2 - 2) - 73\sigma + 164) = z^3(9\sigma^3 - 18\sigma^2 - 100\sigma + 200).$$

Так как $z = 0$ не является корнем исходного уравнения, то мы приходим к кубическому уравнению относительно σ:

$$9\sigma^3 - 18\sigma^2 - 100\sigma + 200 = 0.$$

Левая часть легко разлагается на множители:

$$(\sigma - 2)(9\sigma^2 - 100) = 0$$

(можно было также подбором найти корень $\sigma = 2$ и затем применить теорему Безу). Теперь легко находим три корня:

$$\sigma = 2, \quad \sigma = \frac{10}{3}, \quad \sigma = -\frac{10}{3}.$$

Таким образом, для нахождения корней первоначального уравнения мы получаем три уравнения:

$$z + \frac{1}{z} = 2, \quad z + \frac{1}{z} = \frac{10}{3}, \quad z + \frac{1}{z} = -\frac{10}{3}.$$

Решая их, находим шесть корней первоначального уравнения:

$$z_1 = 1, \quad z_2 = 1, \quad z_3 = 3, \quad z_4 = \frac{1}{3}, \quad z_5 = -3, \quad z_6 = -\frac{1}{3}.$$

2) Имеем:

$$z^8 + 4z^6 - 10z^4 + 4z^2 + 1 = z^4\left(\left(z^4 + \frac{1}{z^4}\right) + 4\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) - 10\right) =$$

$$= z^4((\sigma^4 - 4\sigma^2 + 2) + 4(\sigma^2 - 2) - 10)) = z^4(\sigma^4 - 16) = 0.$$

Получаем двучленное уравнение $\sigma^4 - 16 = 0$. Его корни:

$$\sigma = 2, \quad \sigma = -2, \quad \sigma = 2i, \quad \sigma = -2i.$$

Для нахождения корней первоначального уравнения имеем четыре уравнения:

$$z + \frac{1}{z} = 2, \quad z + \frac{1}{z} = -2, \quad z + \frac{1}{z} = 2i, \quad z + \frac{1}{z} = -2i.$$

Решая их, находим восемь корней первоначального уравнения:

$$z_1 = z_2 = 1, \quad z_3 = z_4 = -1, \quad z_5 = i(1 + \sqrt{2}),$$

$$z_6 = i(1 - \sqrt{2}), \quad z_7 = i(-1 + \sqrt{2}), \quad z_8 = i(-1 - \sqrt{2}).$$

3) Имеем:

$$10z^6+z^5-47z^4-47z^3+z^2+10z=z(10z^5+z^4-47z^3-47z^2+z+10).$$

В скобках стоит возвратный многочлен нечётной (пятой) степени с отличным от нуля свободным членом. По теореме на стр. 32, этот многочлен делится на $z+1$. Осуществляя деление, получаем:

$$10z^6+z^5-47z^4-47z^3+z^2+10z=z(z+1)(10z^4-9z^3-38z^2-9z+10)=$$
$$=z^3(z+1)\left(10\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)-9\left(z+\frac{1}{z}\right)-38\right)=$$
$$=z^3(z+1)(10(\sigma^2-2)-9z-38)=z^3(z+1)(10\sigma^2-9\sigma-58).$$

Приравнивая последнее выражение нулю, мы находим два корня $z_1=0$, $z_2=-1$ исходного уравнения и, кроме того, квадратное уравнение

$$10\sigma^2-9\sigma-58=0.$$

Корни

$$\sigma=-2,\quad \sigma=\frac{29}{10}$$

этого уравнения приводят к следующим двум уравнениям:

$$z+\frac{1}{z}=-2,\quad z+\frac{1}{z}=\frac{29}{10}.$$

Таким образом, вместе с двумя ранее найденными корнями мы получаем шесть корней исходного уравнения:

$$z_1=0,\quad z_2=-1,\quad z_3=-1,\quad z_4=-1,\quad z_5=\frac{5}{2},\quad z_6=\frac{2}{5}.$$

4) Имеем:

$$10z^6+19z^5-19z^4-20z^3-19z^2+19z+10=z^3\left(10\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)+19\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)-19\left(z+\frac{1}{z}\right)-20\right)=$$
$$=z^3(10(\sigma^3-3\sigma)+19(\sigma^2-2)-19\sigma-20)=z^3(10\sigma^3+19\sigma^2-49\sigma-58).$$

Уравнение $10\sigma^3+19\sigma^2-49\sigma-58=0$ имеет корни

$$\sigma=-1,\quad \sigma=2,\quad \sigma=-\frac{29}{10}$$

(один находим подбором, затем применяем теорему Безу). Мы приходим к следующим трём уравнениям:

$$z+\frac{1}{z}=-1,\quad z+\frac{1}{z}=2,\quad z+\frac{1}{z}=-\frac{29}{10}.$$

Решая их, находим шесть корней исходного уравнения:

$$z_1=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\quad z_2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},\quad z_3=z_4=1,\quad z_5=-\frac{5}{2},\quad z_6=-\frac{2}{5}.$$

5) Имеем:

$$2z^{11}+7z^{10}+15z^9+14z^8-16z^7-22z^6-22z^5-16z^4+14z^3+15z^2+7z+2=$$
$$=(z+1)\,(2z^{10}+5z^9+10z^8+4z^7-20z^6-2z^5-20z^4+4z^3+10z^2+5z+2)=$$
$$=z^5(z+1)\,\left(2\,\left(z^5+\frac{1}{z^5}\right)+5\,\left(z^4+\frac{1}{z^4}\right)+10\,\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)+4\,\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)-20\,\left(z+\frac{1}{z}\right)-2\right)=$$
$$=z^5(z+1)\,(2\sigma^5+5\sigma^4-16\sigma^2-40\sigma).$$

Множитель z^5 не даёт корней исходного уравнения; множитель $z+1$ даёт корень $z_1=-1$. Остаётся решить уравнение

$$2\sigma^5+5\sigma^4-16\sigma^2-40\sigma=0.$$

Разлагая левую часть на множители, получаем:

$$\sigma(2\sigma+5)\,(\sigma-2)\,(\sigma^2+2\sigma+4)=0,$$

откуда находим пять корней:

$$\sigma=0,\quad \sigma=-\frac{5}{2},\quad \sigma=2,\quad \sigma=-1+i\sqrt{3},\quad \sigma=-1-i\sqrt{3}.$$

Таким образом, ещё десять корней исходного уравнения мы получаем с помощью следующих пяти уравнений:

$$z+\frac{1}{z}=0,\quad z+\frac{1}{z}=-\frac{5}{2},\quad z+\frac{1}{z}=2,$$
$$z+\frac{1}{z}=-1+i\sqrt{3},\quad z+\frac{1}{z}=-1-i\sqrt{3}.$$

Всего получаем 11 корней исходного уравнения:

$$z_1=-1,\quad z_2=i,\quad z_3=-i,\quad z_4=-2,\quad z_5=-\frac{1}{2},\quad z_6=z_7=1,$$
$$z_{8,9}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\pm\sqrt[4]{3}\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}}\cdot\frac{-1-i\sqrt{3}}{2};$$
$$z_{10,11}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\pm\sqrt[4]{3}\cdot\frac{1-i}{\sqrt{2}}\cdot\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}.$$

6) Мы имеем:

$$az^4+bz^3+cz^2+bz+a=z^2\,\left(a\,\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+b\,\left(z+\frac{1}{z}\right)+c\right)=$$
$$=z^2\,\left(a(\sigma^2-2)+b\sigma+c\right)=z^2\,\left(a\sigma^2+b\sigma+(c-2a)\right).$$

Так как $a\neq 0$, то $z=0$ не является корнем исходного уравнения, и мы приходим к квадратному уравнению относительно σ:

$$a\sigma^2+b\sigma+(c-2a)=0.$$

Его решение выполняется, как известно, с помощью четырёх арифметических действий и извлечения квадратного корня. Теперь решение исходного уравнения сводится к решению двух уравнений

$$z + \frac{1}{z} = \sigma,$$

где σ — первый или второй корень рассмотренного выше квадратного уравнения. Решение этих двух уравнений также выполняется с помощью четырёх арифметических действий и извлечения квадратного корня.

7) Левая часть написанного уравнения делится на $z+1$ (теорема на стр. 32), и частное представляет собой возвратный многочлен четвёртой степени (со старшим коэффициентом a). Поэтому из результата предыдущего упражнения вытекает, что решение рассматриваемого уравнения выражается с помощью четырёх арифметических действий и извлечения квадратного корня.

8) Введением нового неизвестного $\sigma = z + \frac{1}{z}$ возвратное уравнение шестой степени с отличным от нуля свободным членом сводится к кубическому уравнению относительно σ. Если теперь z_1 — известный корень исходного уравнения шестой степени ($z_1 \neq 0$), то $\sigma = z_1 + \frac{1}{z_1}$ есть корень рассматриваемого кубического уравнения относительно σ. Применяя теперь теорему Безу, мы приведём (с помощью четырёх арифметических действий) рассматриваемое кубическое уравнение относительно σ к квадратному, которое затем сможем решить (применяя четыре арифметических действия и извлечение квадратного корня).

Далее, если рассматривается возвратное уравнение седьмой степени (с отличным от нуля свободным членом), то его левая часть делится на $z+1$ и частное представляет собой возвратный многочлен шестой степени. Так как известный корень отличен от -1, то он является корнем этого многочлена шестой степени, и задача сводится к только что разобранной.

9) Возвратный многочлен нечётной степени (со свободным членом $a_0 \neq 0$) можно записать в виде

$$f(z) = a_0(z^{2k+1} + 1) + a_1(z^{2k} + z) + a_2(z^{2k-1} + z^2) + \ldots$$

(стр. 34). Найдём значение этого многочлена при $z = -1$:

$$f(-1) = a_0(-1+1) + a_1(1-1) + a_2(-1+1) + \ldots = 0.$$

Так как $f(-1) = 0$, то, по теореме Безу, рассматриваемый многочлен делится на $z+1$.

10) Пусть $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$ $(a_n \neq 0)$ — произвольный многочлен n-й степени с отличным от нуля свободным членом. Мы имеем:

$$z^n f\left(\frac{1}{z}\right) = z^n \left(a_0 \left(\frac{1}{z}\right)^n + a_1 \left(\frac{1}{z}\right)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\frac{1}{z} + a_n\right) =$$

$$= a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0.$$

Равенство $f(z) = z^n f\left(\frac{1}{z}\right)$ имеет место в том и только том случае, если соответствующие коэффициенты многочленов

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$$

и

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

совпадают, т. е. если

$$a_0 = a_n, \quad a_1 = a_{n-1}, \quad \ldots$$

Иными словами, равенство $f(z) = z^n f\left(\frac{1}{z}\right)$ имеет место в том и только том случае, если многочлен $f(z)$ — возвратный.

Докажем теперь второе утверждение теоремы, сформулированной на стр. 32. Пусть $f(z)$ — возвратный многочлен нечётной степени $n = 2k+1$ с отличным от нуля свободным членом. В силу результата предыдущего упражнения, он делится на $z+1$, т. е. $f(z) = (z+1)g(z)$, где $g(z)$ — многочлен степени $2k$. Поэтому нужно лишь доказать, что многочлен $g(z)$ также является возвратным. Так как $f(z)$ — возвратный многочлен (с отличным от нуля свободным членом), то $f(z) = z^{2k+1} f\left(\frac{1}{z}\right)$. Вспоминая, что $f(z) = (z+1)\ g(z)$, мы сможем переписать это соотношение в виде

$$(z+1)g(z) = z^{2k+1}\left(\frac{1}{z} + 1\right) g\left(\frac{1}{z}\right).$$

После очевидных упрощений это соотношение принимает вид

$$g(z) = z^{2k} g\left(\frac{1}{z}\right),$$

а это и означает, что $g(z)$ — возвратный многочлен.

11) Обозначим степени многочленов f и g соответственно через m и n, так что многочлен $h(z)$ имеет степень $m-n$. Так как многочлены f и g возвратные (с отличными от нуля свободными членами), то, в силу результата предыдущего упражнения,

$$f(z) = z^m f\left(\frac{1}{z}\right), \quad g(z) = z^n g\left(\frac{1}{z}\right).$$

Разделив почленно первое из этих равенств на второе, получим:

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{z^m f\left(\frac{1}{z}\right)}{z^n g\left(\frac{1}{z}\right)} = z^{m-n} \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)}.$$

Вспоминая теперь, что $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$, мы перепишем это соотношение в виде

$$h(z) = z^{m-n} h\left(\frac{1}{z}\right).$$

Но это и означает, что $h(z)$ — возвратный многочлен.

К стр. 41.

1) Имеем:

$$
\begin{aligned}
&2x^4+7x^3y+9x^2y^2+7xy^3+2y^4=\\
&\qquad =2s_4+7\sigma_2s_2+9\sigma_2^2=2(\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2)+7\sigma_2(\sigma_1^2-2\sigma_2)+9\sigma_2^2=\\
&\qquad =2\sigma_1^4-\sigma_1^2\sigma_2-\sigma_2^2=(\sigma_2+2\sigma_1^2)(\sigma_1^2-\sigma_2)=\\
&\qquad =(xy+2(x+y)^2)((x+y)^2-xy)=(2x^2+5xy+2y^2)(x^2+xy+y^2)=\\
&\qquad =(x+2y)(2x+y)(x^2+xy+y^2)
\end{aligned}
$$

(последняя скобка представляет собой квадратный трёхчлен, не разлагающийся на множители с действительными коэффициентами).

2) Имеем:

$$
\begin{aligned}
&2x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+2y^4=2s_4-\sigma_2s_2+\sigma_2^2=\\
&\quad =2(\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2)-\sigma_2(\sigma_1^2-2\sigma_2)+\sigma_2^2=2\sigma_1^4-9\sigma_1^2\sigma_2+7\sigma_2^2=(\sigma_1^2-\sigma_2)(2\sigma_1^2-7\sigma_2)=\\
&\quad =((x+y)^2-xy)(2(x+y)^2-7xy)=(x^2+xy+y^2)(2x^2-3xy+2y^2).
\end{aligned}
$$

Полученные трёхчлены не разлагаются на множители с действительными коэффициентами.

3) Имеем:

$$
\begin{aligned}
&18a^4-21a^3b-94a^2b^2-21ab^3+18b^4=18s_4-21\sigma_2s_2-94\sigma_2^2=\\
&\qquad =18(\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2)-21\sigma_2(\sigma_1^2-2\sigma_2)-94\sigma_2^2=\\
&\qquad =18\sigma_1^4-93\sigma_1^2\sigma_2-16\sigma_2^2=(3\sigma_1^2-16\sigma_2)(6\sigma_1^2+\sigma_2)=\\
&\qquad =(3(x+y)^2-16xy)(6(x+y)^2+xy)=(3x^2-10xy+3y^2)(6x^2+13xy+6y^2)=\\
&\qquad =(x-3y)(3x-y)(2x+3y)(3x+2y).
\end{aligned}
$$

4) Имеем:

$$
\begin{aligned}
&3x^4-8x^3y+14x^2y^2-8xy^3+3y^4=3s_4-8\sigma_2s_2+14\sigma_2^2=\\
&\quad =3(\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2)-8\sigma_2(\sigma_1^2-2\sigma_2)+14\sigma_2^2=3\sigma_1^4-20\sigma_1^2\sigma_2+36\sigma_2^2.
\end{aligned}
$$

Полученный квадратный трёхчлен (относительно σ_2) имеет *комплексные* корни. Поэтому следует применить второй способ разложения на множители (метод неопределённых коэффициентов). Положим

$$3x^4-8x^3y+14x^2y^2-8xy^3+3y^4=(Ax^2+Bxy+Cy^2)(Cx^2+Bxy+Ay^2).$$

Подставляя значения $x=y=1$, получаем $(A+B+C)^2=4$, т. е. $A+B+C=\pm 2$. Как и в примере 4° на стр. 40, мы можем считать, не теряя общности, что $A+B+C=2$. Далее, при $x=0$, $y=1$ находим $AC=3$. Наконец, при $x=1$, $y=-1$ получаем $(A-B+C)^2=36$, т. е. $A-B+C=\pm 6$. Итак, имеем систему:

$$\begin{cases} A+B+C=2,\\ A-B+C=\pm 6,\\ AC=3.\end{cases}$$

Если в правой части второго уравнения взять знак «+», то получим из первых двух уравнений $B=-2$. Затем легко найдём $A=1$, $C=3$ (или $C=1$, $A=3$). В результате получаем разложение

$$3x^4-8x^3y+14x^2y^2-8xy^3+3y^4=(x^2-2xy+3y^2)(3x^2-2xy+y^2).$$

(Знак «$-$» во втором уравнении приводит к системе, имеющей комплексные решения.)

К стр. 42.

1) $$\frac{(x+y)^7-x^7-y^7}{(x+y)^5-x^5-y^5}=\frac{\sigma_1^7-s_7}{\sigma_1^5-s_5}=\frac{7\sigma_1^5\sigma_2-14\sigma_1^3\sigma_2^2+7\sigma_1\sigma_2^3}{5\sigma_1^3\sigma_2-5\sigma_1\sigma_2^2}=$$
$$=\frac{7\sigma_1\sigma_2(\sigma_1^4-2\sigma_1^2\sigma_2+\sigma_2^2)}{5\sigma_1\sigma_2(\sigma_1^2-\sigma_2)}=\frac{7\sigma_1\sigma_2(\sigma_1^2-\sigma_2)^2}{5\sigma_1\sigma_2(\sigma_1^2-\sigma_2)}=\frac{7}{5}(\sigma_1^2-\sigma_2)=$$
$$=\frac{7}{5}((x+y)^2-xy)=\frac{7}{5}(x^2+xy+y^2).$$

2) $$\frac{1}{(a+b)^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\frac{2}{(a+b)^3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{\sigma_1^2}\frac{s_2}{\sigma_2^2}+\frac{2}{\sigma_1^3}\frac{\sigma_1}{\sigma_2}=$$
$$=\frac{\sigma_1^2-2\sigma_2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}+\frac{2}{\sigma_1^2\sigma_2}=\frac{\sigma_1^2-2\sigma_2+2\sigma_2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}=\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}=\frac{1}{\sigma_2^2}=\frac{1}{a^2b^2}.$$

3) $$\frac{1}{(p+q)^3}\left(\frac{1}{p^3}+\frac{1}{q^3}\right)+\frac{3}{(p+q)^4}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}\right)+\frac{6}{(p+q)^5}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)=$$
$$=\frac{1}{\sigma_1^3}\cdot\frac{s_3}{\sigma_2^3}+\frac{3}{\sigma_1^4}\frac{s_2}{\sigma_2^2}+\frac{6}{\sigma_1^5}\frac{\sigma_1}{\sigma_2}=\frac{\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^3\sigma_2^3}+\frac{3(\sigma_1^2-2\sigma_2)}{\sigma_1^4\sigma_2^2}+\frac{6}{\sigma_1^4\sigma_2}=$$
$$=\frac{\sigma_1(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2)+3\sigma_2(\sigma_1^2-2\sigma_2)+6\sigma_2^2}{\sigma_1^4\sigma_2^3}=\frac{\sigma_1^4}{\sigma_1^4\sigma_2^3}=\frac{1}{\sigma_2^3}=\frac{1}{p^3q^3}.$$

4) Преобразуем левую часть написанного соотношения:

$$(x+y)^3+3xy(1-x-y)-1=\sigma_1^3+3\sigma_2(1-\sigma_1)-1=\sigma_1^3+3\sigma_2-3\sigma_1\sigma_2-1.$$

Точно так же имеем:

$$(x+y-1)(x^2+y^2-xy+x+y+1)=(\sigma_1-1)(\sigma_1^2-3\sigma_2+\sigma_1+1)=$$
$$=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+\sigma_1^2+\sigma_1-\sigma_1^2+3\sigma_2-\sigma_1-1=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_2-1.$$

Результат одинаков, и требуемое равенство доказано.

5) $$(x+y)^4+x^4+y^4=\sigma_1^4+s_4=\sigma_1^4+\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2=$$
$$=2\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2=2(\sigma_1^4-2\sigma_1^2\sigma_2+\sigma_2^2)=2(\sigma_1^2-\sigma_2)^2=2(x^2+y^2+xy)^2.$$

6) $$(x+y)^5-x^5-y^5=\sigma_1^5-s_5=\sigma_1^5-(\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2)=$$
$$=5\sigma_1^3\sigma_2-5\sigma_1\sigma_2^2=5\sigma_1\sigma_2(\sigma_1^2-\sigma_2)=5xy(x+y)(x^2+y^2+xy).$$

7) $$(x+y)^7-x^7-y^7=\sigma_1^7-s_7=\sigma_1^7-(\sigma_1^7-7\sigma_1^5\sigma_2+14\sigma_1^3\sigma_2^2-7\sigma_1\sigma_2^3)=$$
$$=7\sigma_1^5\sigma_2-14\sigma_1^3\sigma_2^2+7\sigma_1\sigma_2^3=7\sigma_1\sigma_2(\sigma_1^4-2\sigma_1^2\sigma_2+\sigma_2^2)=$$
$$=7\sigma_1\sigma_2(\sigma_1^2-\sigma_2)^2=7xy(x+y)(x^2+y^2+xy)^2.$$

8) Перенося все члены уравнения в левую часть и вводя элементарные симметрические многочлены σ_1, σ_2, перепишем заданное уравнение в виде

$$\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+1-3\sigma_2=0$$

или

$$(\sigma_1+1)(\sigma_1^2-\sigma_1+1-3\sigma_2)=0.$$

Так как должно быть $x>0$, $y>0$, то $\sigma_1>0$, и потому σ_1+1 не может быть равным нулю. Остаётся рассмотреть уравнение

$$\sigma_1^2-\sigma_1+1-3\sigma_2=0.$$

Следовательно, x и y мы должны определить из системы

$$\begin{cases} x+y=\sigma_1, \\ xy=\sigma_2=\dfrac{1}{3}\left(\sigma_1^2-\sigma_1+1\right). \end{cases}$$

Для этого, в силу теоремы на стр. 18, надо решить квадратное уравнение

$$z^2-\sigma_1 z+\frac{1}{3}\left(\sigma_1^2-\sigma_1+1\right)=0.$$

Его корни

$$z_{1,2}=\frac{\sigma_1}{2}\pm\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{4}-\frac{1}{3}(\sigma_1^2-\sigma_1+1)}=\frac{\sigma_1}{2}\pm\sqrt{-\frac{1}{12}(\sigma_1^2-4\sigma_1+4)}=\frac{\sigma_1}{2}\pm\sqrt{-\frac{1}{12}(\sigma_1-2)^2}.$$

Так как корни этого уравнения (т. е. x и y) должны быть действительными, то подкоренное выражение должно быть неотрицательным, а это возможно лишь в случае, когда $\sigma_1=2$ (и подкоренное выражение равно нулю). Итак, $\sigma_1=x+y=2$, откуда следует, что возможно только одно решение в целых положительных числах, а именно $x=y=1$. Проверка показывает, что оно действительно удовлетворяет исходному уравнению.

Второе решение. Как и выше, получаем уравнение

$$\sigma_1^2-\sigma_1+1-3\sigma_2=0.$$

Так как $4\sigma_2\leqslant\sigma_1^2$ (см. теорему на стр. 28), то из этого уравнения получаем:

$$\sigma_1^2-\sigma_1+1=3\sigma_2\leqslant\frac{3}{4}\sigma_1^2,$$

откуда

$$\frac{1}{4}\sigma_1^2-\sigma_1+1\leqslant 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{1}{4}(\sigma_1-2)^2\leqslant 0.$$

Это возможно только при $\sigma_1=2$, и мы снова получаем единственное решение.

9) Пусть симметрический многочлен $f(x, y)$ делится на x^2+xy+y^2, т. е. $f(x, y)=(x^2+xy+y^2)\,g(x, y)$, где $g(x, y)$ — симметрический многочлен. Мы имеем $x^2+xy+y^2=\sigma_1^2-\sigma_2$. Пусть, далее, $g(x, y)=\varphi(\sigma_1, \sigma_2)$ — представление многочлена $g(x, y)$ через σ_1 и σ_2. Тогда для $f(x, y)$ получаем представление

$$f(x, y)=(x^2+xy+y^2)g(x, y)=(\sigma_1^2-\sigma_2)\varphi(\sigma_1, \sigma_2).$$

Положив $\sigma_1=\sigma_2=1$, получим в правой части $(1-1)\varphi(1, 1)=0$. Таким образом, при выражении многочлена $f(x, y)$ через σ_1, σ_2 получаем многочлен $(\sigma_1^2-\sigma_2)\varphi(\sigma_1, \sigma_2)$, который при $\sigma_1=\sigma_2=1$ обращается в нуль. Но это и означает, что сумма коэффициентов многочлена $(\sigma_1^2-\sigma_2)\varphi(\sigma_1-\sigma_2)$ равна нулю.

Обратно, пусть

$$f(x,y)=\sigma_1^n+b_1\sigma_1^{n-2}\sigma_2+b_2\sigma_1^{n-4}\sigma_2^2+b_3\sigma_1^{n-6}\sigma_2^3+\ldots$$

— выражение симметрического многочлена $f(x,y)$ через σ_1, σ_2 и пусть сумма коэффициентов многочлена, стоящего в правой части, равна нулю. Вынося σ_1^n за скобки, можно переписать выражение многочлена $f(x,y)$ в виде

$$f(x,y)=\sigma_1^n\left(1+b_1\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1^2}\right)+b_2\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1^2}\right)^2+b_3\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1^2}\right)^3+\ldots\right),$$

причём степень k многочлена, стоящего в скобках, не превосходит $\frac{n}{2}$.

Сумма коэффициентов многочлена, стоящего в квадратных скобках, по-прежнему равна нулю. Это означает, что многочлен $1+b_1z+b_2z^2+b_3z^3+\ldots$ обращается в нуль при $z=1$ и, следовательно, согласно теореме Безу этот многочлен делится на $1-z$. Таким образом,

$$1+b_1z+b_2z^2+b_3z^3+\ldots=(1-z)h(z),$$

где степень многочлена $h(z)$ равна $k-1$. Поэтому

$$f(x,y)=\sigma_1^n\left(1+b_1\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1^2}\right)+b_2\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1^2}\right)^2+b_3\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1^2}\right)^3+\ldots\right)=$$

$$=\sigma_1^n\left(1-\frac{\sigma_2}{\sigma_1^2}\right)h\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1^2}\right)=(\sigma_1^2-\sigma_2)\cdot\sigma_1^{n-2}h\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1^2}\right).$$

Если теперь $n=2m+1$, то $k\leqslant m$, значит степень многочлена $h(z)$ не превосходит $m-1$, а число $n-2=2m-1$ больше, чем удвоенная степень многочлена $h(z)$. Если же $n=2m$, то $k\leqslant m$, значит степень многочлена $h(z)$ не превосходит $m-1$, и потому число $n-2=2m-2$ не менее, чем удвоенная степень многочлена $h(z)$. Итак, в любом случае число $n-2$ не меньше, чем удвоенная степень многочлена $h(z)$, и потому выражение $\sigma_1^{n-2}h\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1^2}\right)$ не содержит σ_1 в знаменателе, т. е. является многочленом от σ_1, σ_2. Мы видим, что

$$f(x,y)=(\sigma_1^2-\sigma_2)\psi(\sigma_1,\sigma_2),$$

где $\psi(\sigma_1,\sigma_2)=\sigma_1^{n-2}h\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1^2}\right)$ — некоторый многочлен. Следовательно, многочлен $f(x)$ делится без остатка на $\sigma_1^2-\sigma_2=x^2+y^2+xy$.

10) Обозначим через a_n значение суммы s_n при $\sigma_1=\sigma_2=1$. Подставляя в формулу (1) на стр. 11 $\sigma_1=\sigma_2=1$, получим:

$$a_n=a_{n-1}-a_{n-2}.$$

Точно так же

$$a_{n-1}=a_{n-2}-a_{n-3};$$

складывая, получаем $a_n=-a_{n-3}$. Аналогично $a_{n-3}=-a_{n-6}$, и потому получаем соотношение

$$a_n=a_{n-6}\quad(n>6).$$

Для того чтобы многочлен $(x+y)^n - x^n - y^n = \sigma_1^n - s_n$ делился на x^2+xy+y^2, необходимо и достаточно, чтобы при $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ он обращался в нуль (см. предыдущее упражнение), т. е. чтобы было $1 - a_n = 0$, или, иными словами, $a_n = 1$.

Теперь имеем (в силу соотношений $a_n = a_{n-6} = a_{n-12} = \ldots$):

$$\begin{aligned}
a_{6k+1} &= a_1 = s_1 \big|_{\text{при } \sigma_1=\sigma_2=1} = 1,\\
a_{6k+2} &= a_2 = s_2 \big|_{\text{при } \sigma_1=\sigma_2=1} = -1,\\
a_{6k+3} &= a_3 = s_3 \big|_{\text{при } \sigma_1=\sigma_2=1} = -2,\\
a_{6k+4} &= a_4 = -a_1 = -1,\\
a_{6k+5} &= -a_2 = 1,\\
a_{6k} &= a_6 = -a_3 = 2.
\end{aligned}$$

Итак, соотношение $a_n = 1$ имеет место в том и только в том случае, если n имеет вид $6k+1$ или $6k+5$ (или, что то же самое, $6k \pm 1$).

11) Пусть многочлен $f(x)$ степени m делится на x^2+x+1, т. е.

$$f(x) = (x^2+x+1)g(x),$$

где $g(x)$ — многочлен степени $m-2$. Тогда

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{x}{y} + 1\right) g\left(\frac{x}{y}\right).$$

Умножив обе части равенства на y^m, получим

$$y^m f\left(\frac{x}{y}\right) = (x^2+xy+y^2)y^{m-2} g\left(\frac{x}{y}\right).$$

Оба выражения $y^m f\left(\frac{x}{y}\right)$ и $y^{m-2} g\left(\frac{x}{y}\right)$ не содержат y в знаменателе, т. е. являются многочленами. Итак, многочлен $y^m f\left(\frac{x}{y}\right)$ делится без остатка на x^2+xy+y^2. Обратно, если $y^m f\left(\frac{x}{y}\right)$ делится без остатка на x^2+xy+y^2, то отсюда при $y=1$ получаем, что многочлен $f(x)$ делится без остатка на x^2+x+1. Таким образом, для того чтобы многочлен $f(x)$ степени m делился на x^2+x+1, необходимо и достаточно, чтобы многочлен $y^m f\left(\frac{x}{y}\right)$ делился на x^2+xy+y^2.

Итак, мы должны узнать, при каких n многочлен $x^{2n}+x^ny^n+y^{2n}$ делится на x^2+xy+y^2. Но

$$x^{2n}+x^ny^n+y^{2n} = s_{2n} + \sigma_2^n,$$

и для того чтобы этот многочлен делился на x^2+xy+y^2, необходимо и достаточно, чтобы при $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ этот многочлен обращался в нуль, т. е. чтобы было $a_{2n}+1=0$ или $a_{2n} = -1$ (см. решение предыдущего упражнения). Следовательно, должно быть $2n = 6k+2$ или $2n = 6k+4$. Иными словами, должно быть $n = 3k+1$ или $n = 3k+2$. Таким образом, многочлен $x^{2n}+x^n+1$ делится на x^2+x+1 в том и только том случае, если n не кратно трём.

12) Мы должны узнать, при таких n многочлен $(x+y)^n - x^n - y^n$ делится на x^2+xy+y^2 (см. начало решения предыдущего упражнения). В силу результата упражнения 10) это имеет место в том и только том случае, если $n = 6k \pm 1$.

13) Мы должны узнать, при каких n многочлен $(x+y)^n + x^n + y^n = \sigma_1^n + s_n$ делится на x^2+xy+y^2. Согласно результату упражнения 9), это будет в том и только том случае, если многочлен $\sigma_1^n + s_n$ обращается в нуль при $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, т. е. если $1 + a_n = 0$ (см. решение упражнения 10)). Итак, нужно узнать, при каких n выполняется равенство $a_n = -1$. Согласно решению упражнения 10) это будет в том и только том случае, если $n = 6k+2$ или $n = 6k+4$ (или, что то же самое, если $n = 6k \pm 2$).

14) Обозначим элементарные симметрические многочлены от x, y через σ_1, σ_2, а от u, v — через τ_1, τ_2:

$$\sigma_1 = x+y, \quad \sigma_2 = xy, \quad \tau_1 = u+v, \quad \tau_2 = uv.$$

По условию задачи

$$\sigma_1 = \tau_1 \quad \text{и} \quad \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = \tau_1^2 - 2\tau_2.$$

Отсюда получаем: $\sigma_1 = \tau_1$, $\sigma_2 = \tau_2$. Но тогда для любого многочлена $\varphi(z_1, z_2)$ имеем:

$$\varphi(\sigma_1, \sigma_2) = \varphi(\tau_1, \tau_2).$$

В силу основной теоремы (стр. 10), отсюда вытекает, что если $f(x, y)$ — любой симметрический многочлен и $f(x, y) = \varphi(\sigma_1, \sigma_2)$ — его выражение через элементарные симметрические многочлены, то

$$f(x, y) = \varphi(\sigma_1, \sigma_2) = \varphi(\tau_1, \tau_2) = f(u, v).$$

В частности, при любом n

$$x^n + y^n = u^n + v^n.$$

15) Заданное уравнение можно записать в виде

$$\sigma_1 = \sigma_1^2 - 3\sigma_2.$$

Так как числа x, y должны быть действительными, то $4\sigma_2 \leqslant \sigma_1^2$ (см. теорему на стр. 28), и потому

$$\sigma_1^2 - \sigma_1 = 3\sigma_2 \leqslant \frac{3}{4}\sigma_1^2,$$

т. е.

$$\frac{1}{4}\sigma_1^2 - \sigma_1 \leqslant 0 \quad \text{или} \quad \sigma_1(\sigma_1 - 4) \leqslant 0.$$

Из этого следует, что σ_1 должно заключаться в пределах $0 \leqslant \sigma_1 \leqslant 4$. Вспоминая теперь, что $3\sigma_2 = \sigma_1^2 - \sigma_1$, получаем следующие возможности:

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_1 = 2, \quad \sigma_2 = \frac{2}{3}; \quad \sigma_1 = 3, \quad \sigma_2 = 2; \quad \sigma_1 = 4, \quad \sigma_2 = 4.$$

Третий случай отпадает, поскольку x, y, а значит и σ_1, σ_2, должны быть целыми. Остальные случаи дают следующие четыре системы:

$$\begin{cases} x+y=0, \\ xy=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=1, \\ xy=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=3, \\ xy=2; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=4, \\ xy=4. \end{cases}$$

Решая их, находим следующие возможные решения исходного уравнения:

$$\begin{cases} x_1=0, \\ y_1=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=1, \\ y_2=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3=0, \\ y_3=1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4=2, \\ y_4=1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_5=1, \\ y_5=2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_6=2, \\ y_6=2. \end{cases}$$

Проверка показывает, что все они удовлетворяют исходному уравнению.

16) Мы должны доказать, что симметрический многочлен

$$(a+b)^n - a^n - b^n - 3(ab)^{\frac{n-1}{2}}(a+b)$$

при $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ обращается в нуль (см. решение упражнения 9) на стр. 199), т. е. что

$$1 - a_n - 3 = 0.$$

Но так как $n = 6k+3$, то $a_n = -2$ (см. решение упражнения 10)), и доказываемое равенство очевидно.

К стр. 52.

1) $x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2 = s_4 - 2O(x^2y^2) =$

$$= \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3 - 2(\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3) = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 8\sigma_1\sigma_3.$$

2) $x^5y^2 + x^5z^2 + x^2y^5 + x^2z^5 + y^5z^2 + y^2z^5 = O(x^5y^2) = O(x^5)O(x^2) - O(x^7) = s_5s_2 - s_7 =$

$$= (\sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 + 5\sigma_1^2\sigma_3 - 5\sigma_2\sigma_3)(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) -$$
$$-(\sigma_1^7 - 7\sigma_1^5\sigma_2 + 14\sigma_1^3\sigma_2^2 - 7\sigma_1\sigma_2^3 + 7\sigma_1^4\sigma_3 - 21\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3 + 7\sigma_1\sigma_3^2 + 7\sigma_2^2\sigma_3) =$$
$$= -2\sigma_1^4\sigma_3 + \sigma_1^3\sigma_2^2 + 6\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3 - 3\sigma_1\sigma_2^2 - 7\sigma_1\sigma_3^2 + 3\sigma_2^2\sigma_3.$$

3) $(x+y)(x+z)(y+z) = (\sigma_1 - x)(\sigma_1 - y)(\sigma_1 - z) =$

$$= \sigma_1^3 - \sigma_1^2(x+y+z) + \sigma_1(xy+yz+xz) - xyz = \sigma_1^3 - \sigma_1^3 + \sigma_1\sigma_2 - \sigma_3 = \sigma_1\sigma_2 - \sigma_3.$$

4) $(x^2+y^2)(x^2+z^2)(y^2+z^2) = O(x^4y^2) + 2x^2y^2z^2 = \sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3 - 2\sigma_1^3\sigma_3 + 4\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - \sigma_3^2.$

5) См. стр. 61.

6) $x^6 + y^6 + z^6 + 2x^5y + 2x^5z + 2xy^5 + 2xz^5 + 2y^5z + 2yz^5 -$

$$-3x^4y^2 - 3x^4z^2 - 3x^2y^4 - 3x^2z^4 - 3y^4z^2 - 3y^2z^4 + x^3y^3 + x^3z^3 + y^3z^3 =$$
$$= s_6 + 2O(x^5y) - 3O(x^4y^2) + O(x^3y^3) = \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 -$$
$$-2\sigma_2^3 + 6\sigma_1^3\sigma_3 - 12\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 3\sigma_3^2 + 2(\sigma_1^4\sigma_2 - 4\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_1^3\sigma_3 + 7\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + +2\sigma_2^3 - 3\sigma_3^2) -$$
$$-3(\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3 - 2\sigma_1^3\sigma_3 + 4\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 3\sigma_3^2) + \sigma_2^3 + 3\sigma_3^2 - 3\sigma_1\sigma_2\sigma_3 =$$
$$= \sigma_1^6 - 4\sigma_1^4\sigma_2 - 2\sigma_1^2\sigma_2^2 + 9\sigma_2^3 + 10\sigma_1^3\sigma_3 - 13\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 9\sigma_3^2.$$

7) Нам известны величины

$$a+b+c = s_1, \quad a^2+b^2+c^2 = s_2, \quad a^3+b^3+c^3 = s_3.$$

Но, согласно табл. 2 на стр. 47,

$$s_1 = \sigma_1, \quad s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2, \quad s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3.$$

Отсюда находим:

$$\sigma_1 = s_1, \quad \sigma_2 = \frac{1}{2}\left(s_1^2 - s_2\right), \quad \sigma_3 = \frac{1}{6}s_1^3 - \frac{1}{2}s_1s_2 + \frac{1}{3}s_3.$$

Наконец, в силу формулы Герона, имеем:

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) = p^4 - p^3(a+b+c) + p^2(ab+ac+bc) - pabc =$$
$$= \left(\frac{s_1}{2}\right)^4 - \left(\frac{s_1}{2}\right)^3 \cdot \sigma_1 + \left(\frac{s_1}{2}\right)^2 \cdot \sigma_2 - \frac{s_1}{2}\cdot\sigma_3 = \frac{1}{16}s_1^4 - \frac{1}{8}s_1^3\cdot s_1 + \frac{1}{4}s_1^2\cdot\frac{1}{2}\left(s_1^2 - s_2\right) -$$
$$-\frac{1}{2}s_1\left(\frac{1}{6}s_1^3 - \frac{1}{2}s_1s_2 + \frac{1}{3}s_3\right) = -\frac{1}{48}s_1^4 + \frac{1}{8}s_1^2s_2 - \frac{1}{6}s_1s_3.$$

Окончательно,

$$S = \sqrt{\frac{1}{48}\left(-s_1^4 + 6s_1^2 s_2 - 8s_1 s_3\right)}.$$

К стр. 62.

1) Рассматриваемая система является частным случаем системы, рассмотренной в примере 1° на стр. 58; здесь $a = 2$, $b = \sqrt{6}$. Следовательно, одно из решений системы имеет вид $x = 2$, $y = 1$, $z = -1$, а остальные пять получаются из него перестановками.

2) Рассматриваемая система является частным случаем системы, рассмотренной в примере 1° на стр. 58; здесь $b = a$. Следовательно, одно из решений системы имеет вид $x = a$, $y = 0$, $z = 0$, а другие два получаются из него перестановками. (Каждое из полученных решений имеет кратность 2, т. е. всего имеется шесть решений, но они по два совпадают.)

3) Заданная система может быть записана в виде

$$\begin{cases} \sigma_1 = 9, \\ \dfrac{\sigma_2}{\sigma_3} = 1, \\ \sigma_2 = 27. \end{cases}$$

Таким образом, $\sigma_1 = 9$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 27$. Для решения этой системы составляем кубическое уравнение $u^3 - 9u^2 + 27u - 27 = 0$. Оно записывается в виде $(u-3)^3 = 0$ и потому имеет три совпадающих корня $u_1 = u_2 = u_3 = 3$. Следовательно, в силу теоремы на стр. 55, исходная система имеет шесть совпадающих решений: $x = y = z = 3$.

4) Заданная система имеет вид $\sigma_1 = a$, $\sigma_2 = a^2$, $\sigma_3 = a^3$. Соответствующее кубическое уравнение $u^3 - au^2 + a^2u - a^3 = 0$, может быть записано в виде $(u-a)(u^2+a^2) = 0$. Его корни: $u_1 = a$, $u_2 = ai$, $u_3 = -ai$. Таким образом, исходная система имеет шесть решений, получающихся перестановками из решения $x = a$, $y = ai$, $z = -ai$.

5) Мы имеем:

$$(x+y)(y+z) + (y+z)(z+x) + (z+x)(x+y) = (\sigma_2 + y^2) + (\sigma_2 + z^2) + (\sigma_2 + x^2) = 3\sigma_2 + s_2 = \sigma_1^2 + \sigma_2.$$

Далее, $O(x^2y) = \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3$. Поэтому заданная система записывается в виде

$$\begin{cases} \sigma_1 = 2, \\ \sigma_1^2 + \sigma_2 = 1, \\ \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3 = -6. \end{cases}$$

Отсюда легко находим: $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = -3$, $\sigma_3 = 0$. Соответствующее кубическое уравнение $u^3 - 2u^2 - 3u = 0$ имеет корни $u_1 = 0$, $u_2 = 3$, $u_3 = -1$. Таким образом, исходная система имеет шесть решений, получающихся перестановками из решения $x = 0$, $y = 3$, $z = -1$.

6) Имеем:

$$xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x) = O(x^2y) = \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3,$$
$$xy(x^2+y^2) + yz(y^2+z^2) + zx(z^2+x^2) = O(x^3y) = \sigma_1^2\sigma_2 - 2\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_3.$$

Поэтому заданная система записывается в виде

$$\begin{cases} \sigma_2 = 11, \\ \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3 = 48, \\ \sigma_1\sigma_2\sigma_2 - 2\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_3 = 118. \end{cases}$$

Подставляя значение σ_2 во второе и третье уравнения, получаем систему

$$\begin{cases} 11\sigma_1 - 3\sigma_3 = 48, \\ 11\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_3 = 360. \end{cases}$$

Исключая σ_3, получаем квадратное уравнение $22\sigma_1^2 + 48\sigma_1 - 1080 = 0$, имеющее корни 6 и $-\frac{90}{11}$. Таким образом, мы получаем следующие два решения вспомогательной системы: $\sigma_1 = 6$, $\sigma_2 = 11$, $\sigma_3 = 6$ и $\sigma_1 = -\frac{90}{11}$, $\sigma_2 = 11$, $\sigma_3 = -46$. Им соответствуют два кубических уравнения:

$$u^3 - 6u^2 + 11u - 6 = 0 \quad \text{и} \quad u^3 + \frac{90}{11}u^2 + 11u + 46 = 0.$$

Первое из этих уравнений имеет корни $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 3$. Решений второго уравнения мы не выписываем (оно не имеет рациональных корней и корней, выражающихся через квадратные корни; корни этого уравнения можно выписать по формулам для решения кубических уравнений, имеющимся в учебниках высшей алгебры).

Итак, исходная система имеет шесть решений, получающихся перестановками из решения $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, и ещё шесть решений, получающихся с помощью кубического уравнения $u^3 + \frac{90}{11}u^2 + 11u + 46 = 0$.

7) Вспомогательная система имеет вид

$$\begin{cases} s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = \frac{73}{8}, \\ \sigma_2 = \sigma_1, \\ \sigma_3 = 1. \end{cases}$$

Подставляя значения σ_2 и σ_3 из второго и третьего уравнений в первое, получаем кубическое уравнение $\sigma_1^3 - 3\sigma_1^2 - \frac{49}{8} = 0$. Записав его в виде $(2\sigma_1)^3 - 6(2\sigma_1)^2 - 49 = 0$, найдём (подбором) корень $2\sigma_1 = 7$, т. е. $\sigma_1 = \frac{7}{2}$. Теперь с помощью теоремы Безу мы сможем представить кубическое уравнение в виде $\left(\sigma_1 - \frac{7}{2}\right)\left(\sigma_1^2 + \frac{1}{2}\sigma_1 + \frac{7}{4}\right) = 0$ и найти все его корни: $\sigma_1 = \frac{7}{2}$, $\sigma_1 = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}\sqrt{3}i$. Таким образом, имеем три решения вспомогательной системы: $\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{7}{2}$, $\sigma_3 = 1$ и $\sigma_1 = \sigma_2 = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}\sqrt{3}i$, $\sigma_3 = 1$. Им соответствуют три кубических уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
&u^3-\frac{7}{2}u^2+\frac{7}{2}u-1=0,\\
&u^3+\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\sqrt{3}i\right)u^2-\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\sqrt{3}i\right)u-1=0,\\
&u^3+\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\sqrt{3}i\right)u^2-\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\sqrt{3}i\right)u-1=0.
\end{aligned}\right\}\qquad (*)$$

Первое уравнение можно представить в виде $u^3-1-\frac{7}{2}(u^2-u)=0$, или $(u-1)\times$ $\times\left(u^2-\frac{5}{2}u+1\right)=0$. Его корни: $u_1=1$, $u_2=2$, $u_3=\frac{1}{2}$. Таким образом, исходная система имеет шесть решений, получающихся перестановками из решения $x=1$, $y=2$, $z=\frac{1}{2}$, и ещё 12 комплексных решений, получающихся из рассмотрения кубических уравнений (*) (их нетрудно выписать с помощью формул для решения кубических уравнений).

8) Вспомогательная система имеет вид

$$\begin{cases}
\sigma_1=\dfrac{13}{3},\\
\dfrac{\sigma_2}{\sigma_3}=\dfrac{13}{3},\\
\sigma_3=1,
\end{cases}$$

т. е. $\sigma_1=\frac{13}{3}$, $\sigma_2=\frac{13}{3}$, $\sigma_3=1$. Этим значениям соответствует кубическое уравнение $u^3-\frac{13}{3}u^2+\frac{13}{3}u-1=0$, или $(u-1)\left(u^2-\frac{10}{3}u+1\right)=0$. Его корни: $u_1=1$, $u_2=3$, $u_3=\frac{1}{3}$. Таким образом, исходная система имеет шесть решений, получающихся перестановками из решения $x=1$, $y=3$, $z=\frac{1}{3}$.

9) Заданная система записывается в виде

$$\begin{cases}
\sigma_1=0,\\
s_2=s_3,\\
\sigma_3=2,
\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}
\sigma_1=0,\\
\sigma_1^2-2\sigma_2=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3,\\
\sigma_3=2.
\end{cases}$$

Отсюда находим: $\sigma_1=0$, $\sigma_2=-3$, $\sigma_3=2$. Найденному решению вспомогательной системы соответствует кубическое уравнение $u^3-3u-2=0$. Его корни (один находим подбором, затем применяем теорему Безу): $u_1=u_2=-1$, $u_3=2$. Таким образом, исходная система имеет три (точнее, шесть совпадающих по два) решения, получающихся перестановками из решения $x=y=-1$, $z=2$.

10) Из последнего уравнения находим $u = x + y + z = \sigma_1$. Поэтому три первых уравнения переписываются в виде

$$\begin{cases} s_5 - \sigma_1^5 = 210, \\ s_3 - \sigma_1^3 = 18, \\ s_2 - \sigma_1^2 = 6, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} -5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 + 5\sigma_1^2\sigma_3 - 5\sigma_2\sigma_3 = 210, \\ -3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = 18, \\ -2\sigma_2 = 6. \end{cases}$$

Второе уравнение имеет вид

$$\sigma_3 - \sigma_1\sigma_2 = 6.$$

Первое уравнение можно сократить на 5 и разложить его левую часть на множители: $(\sigma_1^2 - \sigma_2)(\sigma_3 - \sigma_1\sigma_2) = 42$. Так как $\sigma_3 - \sigma_1\sigma_2 = 6$, то получаем отсюда: $\sigma_1^2 - \sigma_2 = 7$. Наконец, так как $\sigma_2 = -3$ (третье уравнение), то $\sigma_1^2 = 4$. Таким образом, вспомогательная система имеет два решения:

$$\sigma_1 = 2, \quad \sigma_2 = -3, \quad \sigma_3 = 0; \quad \sigma_1 = -2, \quad \sigma_2 = -3, \quad \sigma_3 = 12.$$

Им соответствуют два кубических уравнения:

$$u^3 - 2u^2 - 3u = 0, \quad u^3 + 2u^2 - 3u - 12 = 0.$$

Первое из них имеет корни $u_1 = 0$, $u_2 = 3$, $u_3 = -1$. Второе уравнение не имеет рациональных корней или корней, выражающихся при помощи квадратных радикалов. Итак, исходная система имеет 12 решений, шесть из которых получаются перестановками из решения $x = 0$, $y = 3$, $z = -1$, а остальные шесть получаются при решении кубического уравнения $u^3 + 2u^2 - 3u - 12 = 0$.

11) Несмотря на то, что третье уравнение не является симметричным, здесь можно с успехом применить симметрические многочлены. Первые два уравнения записываются в виде

$$3\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1^3 = b^3, \quad \sigma_1 = 2b,$$

откуда находим:

$$\sigma_1 = 2b, \quad \sigma_2 = \frac{3}{2}b^2. \qquad (*)$$

Теперь запишем третье уравнение в виде $x^2 + y^2 + z^2 = b^2 + 2z^2$, или $\sigma_1^2 - 2\sigma_2 = b^2 + 2z^2$. Подставляя сюда найденные значения σ_1 и σ_2, получаем $z^2 = 0$, т. е. $z = 0$. Теперь соотношения (*), т. е.

$$x + y = 2b, \quad xy = \frac{3}{2}b^2$$

позволяют найти два решения:

$$\begin{cases} x_1 = b\left(1 + \dfrac{i}{\sqrt{2}}\right), \\ y_1 = b\left(1 - \dfrac{i}{\sqrt{2}}\right), \\ z_1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = b\left(1 - \dfrac{i}{\sqrt{2}}\right), \\ y_2 = b\left(1 + \dfrac{i}{\sqrt{2}}\right), \\ z_2 = 0. \end{cases}$$

(Точнее говоря, имеются четыре решения, по два совпадающие с указанными.)

12) Пусть u_1, u_2, u_3 — корни данного уравнения. Искомое уравнение запишем в виде $t^3+pt^2+qt+r=0$, а его корни обозначим через t_1, t_2, t_3. По формулам Виета для кубических уравнений (стр. 56) имеем:

$$\begin{cases} \sigma_1 = u_1+u_2+u_3 = 2, \\ \sigma_2 = u_1u_2+u_1u_3+u_2u_3 = 1, \\ \sigma_3 = u_1u_2u_3 = 12 \end{cases}$$

и, точно так же,

$$t_1+t_2+t_3=-p, \quad t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3=q, \quad t_1t_2t_3=-r.$$

Но по условию задачи $t_1=u_1^2$, $t_2=u_2^2$, $t_3=u_3^2$, и потому

$$\begin{aligned} &p=-(t_1+t_2+t_3)=-(u_1^2+u_2^2+u_3^2)=-s_2=-(\sigma_1^2-2\sigma_2)=-2, \\ &q=t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3=u_1^2u_2^2+u_1^2u_3^2+u_2^2u_3^2=O(u_1^2u_2^2)=\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3=-47, \\ &r=-t_1t_2t_3=-u_1^2u_2^2u_3^2=-\sigma_3^2=-144. \end{aligned}$$

Таким образом, искомое кубическое уравнение имеет вид

$$t^3-2t^2-47t-144=0.$$

13) Сохраним обозначения, введённые при решении предыдущего упражнения. Тогда, по условию задачи, $t_1=u_1^3$, $t_2=u_2^3$, $t_3=u_3^3$, и потому

$$\begin{aligned} &p=-(t_1+t_2+t_3)=-(u_1^3+u_2^3+u_3^3)=-s_3=-(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3)=-38, \\ &q=t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3=u_1^3u_2^3+u_1^3u_3^3+u_2^3u_3^3=O(u_1^3u_2^3)=\sigma_2^3+3\sigma_3^2-3\sigma_1\sigma_2\sigma_3=361, \\ &r=-t_1t_2t_3=-u_1^3u_2^3u_3^3=-\sigma_3^3=-1728. \end{aligned}$$

Таким образом, искомое кубическое уравнение имеет вид

$$t^3-38t^2+361t-1728=0.$$

14) Заданные соотношения означают, что a, b, c являются тремя (различными) корнями кубического уравнения $u^3+pu+q=0$. Следовательно, в силу теоремы на стр. 55,

$$a+b+c=\sigma_1=0, \quad ab+ac+bc=\sigma_2=p, \quad abc=\sigma_3=-q.$$

Первое из этих соотношений и решает поставленную задачу.

К стр. 64.

1) $(x+y)(x+z)(y+z)+xyz=(\sigma_1-z)(\sigma_1-y)(\sigma_1-x)+\sigma_3=\sigma_1^3-\sigma_1^2(x+y+z)+$
$+\sigma_1(xy+yz+xz)-xyz+\sigma_3=\sigma_1^3-\sigma_1^3+\sigma_1\sigma_2-\sigma_3+\sigma_3=\sigma_1\sigma_2=(x+y+z)(xy+xz+yz).$

2) $2(a^3+b^3+c^3)+a^2b+a^2c+ab^2+ac^2+b^2c+bc^2-3abc=2s_3+O(a^2b)-3\sigma_3=$
$=2(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3)+(\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3)-3\sigma_3=2\sigma_1^3-5\sigma_1\sigma_2=\sigma_1(2\sigma_1^2-5\sigma_2)=$
$=(x+y+z)(2x^2+2y^2+2z^2-xy-xz-yz).$

3) $a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)+abc(a+b+c)=O(a^3b)+\sigma_1\sigma_3=$
$=(\sigma_1^2\sigma_2-2\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_3)+\sigma_1\sigma_3=\sigma_1^2\sigma_2-2\sigma_2^2=\sigma_2(\sigma_1^2-2\sigma_2)=\sigma_2s_2=(ab+ac+bc)(a^2+b^2+c^2).$

4) $a^2(b+c)^2+b^2(c+a)^2+c^2(a+b)^2+2abc(a+b+c)+(a^2+b^2+c^2)(ab+ac+bc)=$
$=2O(a^2b^2)+2O(a^2bc)+2\sigma_1\sigma_3+s_2\sigma_2=2(\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3)+2\sigma_1\sigma_3+2\sigma_1\sigma_3+\sigma_2(\sigma_1^2-2\sigma_2)=$
$=\sigma_1^2\sigma_2=(a+b+c)^2(ab+ac+bc).$

5) $(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3-(a+b-c)^3=\sigma_1^3-(\sigma_1-2a)^3-(\sigma_1-2b)^3-$
$-(\sigma_1-2c)^3=\sigma_1^3-3\sigma_1^3+3\sigma_1^2(2a+2b+2c)-3\sigma_1(4a^2+4b^2+4c^2)+8(a^3+b^3+c^3)=$
$=\sigma_1^3-3\sigma_1^3+6\sigma_1^3-12\sigma_1(\sigma_1^2-2\sigma_2)+8(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3)=24\sigma_3=24abc.$

6) $(x+y+z)^4-(y+z)^4-(z+x)^4-(x+y)^4+x^4+y^4+z^4=\sigma_1^4-(\sigma_1-x)^4-$
$-(\sigma_1-y)^4-(\sigma_1-z)^4+s_4=\sigma_1^4-3\sigma_1^4+4\sigma_1^3(x+y+z)-6\sigma_1^2(x^2+y^2+z^2)+4\sigma_1(x^3+y^3+z^3)-$
$-(x^4+y^4+z^4)+s_4=\sigma_1^4-3\sigma_1^4+4\sigma_1^4-6\sigma_1^2s_2+4\sigma_1s_3-s_4+s_4=$
$=2\sigma_1^4-6\sigma_1^2(\sigma_1^2-2\sigma_2)+4\sigma_1(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3)=12\sigma_1\sigma_3=12xyz(x+y+z).$

7) $(a+b+c)^5-(-a+b+c)^5-(a-b+c)^5-(a+b-c)^5=\sigma_1^5-(\sigma_1-2a)^5-(\sigma_1-2b)^5-$
$-(\sigma_1-2c)^5=\sigma_1^5-3\sigma_1^5+5\sigma_1^4(2a+2b+2c)-10\sigma_1^3(4a^2+4b^2+4c^2)+10\sigma_1^2(8a^3+8b^3+8c^3)-$
$-5\sigma_1(16a^4+16b^4+16c^4)+32(a^5+b^5+c^5)=\sigma_1^5-3\sigma_1^5+10\sigma_1^5-40\sigma_1^3s_2+$
$+80\sigma_1^2s_3-80\sigma_1s_4+32s_5=8\sigma_1^5-40\sigma_1^3(\sigma_1^2-2\sigma_2)+80\sigma_1^2(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3)-$
$-80\sigma_1(\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3)+32(\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2+5\sigma_1^2\sigma_3-5\sigma_2\sigma_3)=$
$=80\sigma_1^2\sigma_3-160\sigma_2\sigma_3=80\sigma_3(\sigma_1^2-2\sigma_2)=80\sigma_3s_2=80abc(a^2+b^2+c^2).$

8) $(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)^2-(a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2)=$
$=(s^2+\sigma_2)^2-\sigma_1^2s_2=(\sigma_1^2-\sigma_2)^2-\sigma_1^2(\sigma_1^2-2\sigma_2)=\sigma_2^2=(ab+ac+bc)^2.$

9) Числитель дроби имеет вид

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$

(см. пример 1° на стр. 63). Знаменатель имеет вид

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2s_2-2\sigma_2=2(s_2-\sigma_2)=2(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc).$$

Таким образом заданное выражение оказывается равным

$$\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)}{2(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)}=\frac{a+b+c}{2}.$$

10) $$\frac{bc-a^2+ca-b^2+ab-c^2}{a(bc-a^2)+b(ca-b^2)+c(ab-c^2)}=\frac{\sigma_2-s_2}{3\sigma_2-s_3}=\frac{\sigma_2-(\sigma_1^2-2\sigma_2)}{3\sigma_3-(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3)}=$$
$$=\frac{3\sigma_2-\sigma_1^2}{3\sigma_1\sigma_2-\sigma_1^3}=\frac{3\sigma_2-\sigma_1^2}{\sigma_1(3\sigma_2-\sigma_1^2)}=\frac{1}{\sigma_1}=\frac{1}{a+b+c}.$$

11) Поскольку

$$(x+y+z)^4-(y+z)^4-(z+x)^4-(x+y)^4+x^4+y^4+z^4=12xyz(x+y+z)$$

(см. выше, упражнение 6)), мы должны установить, что многочлен

$$\varphi(x,y,z)=(x+y+z)^{2n}-(y+z)^{2n}-(x+z)^{2n}-(x+y)^{2n}+x^{2n}+y^{2n}+z^{2n}$$

делится на x, на y, на z и на $x+y+z$. При $x=0$ многочлен $\varphi(x+y+z)$ принимает вид

$$(y+z)^{2n}-(y+z)^{2n}-z^{2n}-y^{2n}+y^{2n}+z^{2n}=0.$$

Следовательно, многочлен $\varphi(x, y, z)$ делится на x. Аналогично устанавливается, что он делится на y и на z. Остаётся доказать, что рассматриваемый многочлен делится на $x+y+z$. Будем рассматривать $\varphi(x, y, z)$ как многочлен относительно x (включая y и z в коэффициенты). Чтобы доказать, что этот многочлен делится на $x+y+z$, достаточно, в силу теоремы Безу, установить, что значение $x=-y-z$ является корнем этого многочлена. В самом деле, при $x=-y-z$ многочлен $\varphi(x, y, z)$ принимает вид

$$0^{2n}-(y+z)^{2n}-(-y-z+z)^{2n}-(-y-z+y)^{2n}+(-y-z)^{2n}+y^{2n}+z^{2n}=$$
$$=-(y+z)^{2n}-y^{2n}-z^{2n}+(y+z)^{2n}+y^{2n}+z^{2n}=0.$$

12) Поскольку

$$a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2=-(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$$

(см. пример 2° на стр. 63), нам нужно установить, что многочлен

$$\varphi(a, b, c)=a^4(b^2+c^2-a^2)^3+b^4(c^2+a^2-b^2)^3+c^4(a^2+b^2-c^2)^3$$

делится на каждый из многочленов $a+b+c$, $-a+b+c$, $a-b+c$, $a+b-c$. Иными словами, достаточно установить, что при $a=\pm b\pm c$ (четыре комбинации знаков) многочлен $\varphi(a, b, c)$ обращается в нуль. Это устанавливается простым подсчётом. Например, при $a=b-c$ многочлен $\varphi(a, b, c)$ принимает вид

$$(b-c)^4(b^2+c^2-(b-c)^2)^3+b^4(c^2-b^2+(b-c)^2)^3+c^4((b-c)^2+b^2-c^2)^3=$$
$$=(b-c)^4\cdot(2bc)^3+b^4(2c^2-2bc)^3+c^4(2b^2-2bc)^3=$$
$$=(b-c)^4\cdot 8b^3c^3+8b^4c^3(c-b)^3+8c^4b^3(b-c)^3=8b^3c^3(b-c)^3((b-c)-b+c)=0.$$

13) Если число $a+b+c$ делится на 6, то все три числа a, b, c не могут быть нечётными (иначе сумма тоже была бы нечётной). Следовательно, хотя бы одно из чисел a, b, c чётно. Теперь имеем:

$$a^3+b^3+c^3=s_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3=\sigma_1(\sigma_1^2-3\sigma_2)+3\sigma_3.$$

Число $\sigma_1=a+b+c$ по условию делится на 6. Число $3\sigma_3=3abc$ также делится на 6, поскольку хотя бы одно из чисел a, b, c чётно. Следовательно, и сумма

$$\sigma_1(\sigma_1^2-3\sigma_2)+3\sigma_3=a^3+b^3+c^3$$

делится на 6.

К стр. 69.

1) См. решение упражнения 5) на стр. 209.
2) См. пример 3° на стр. 64.
3) См. решение упражнения 6) на стр. 209.
4) Левая часть доказываемого равенства имеет вид

$$\sigma_1^4+(\sigma_1-2a)^4+(\sigma_1-2b)^4+(\sigma_1-2c)^4=$$
$$=\sigma_1^4+3\sigma_1^4-4\sigma_1^3(2a+2b+2c)+6\sigma_1^2(4a^2+4b^2+4c^2)-4\sigma_1(8a^3+8b^3+8c^3)+16a^4+16b^4+16c^4=$$
$$=\sigma_1^4+3\sigma_1^4-8\sigma_1^4+24\sigma_1^2s_2-32\sigma_1s_3+16s_4=$$
$$=-4\sigma_1^4+24\sigma_1^2(\sigma_1^2-2\sigma_2)-32\sigma_1(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3)+16(\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3)=$$
$$=4\sigma_1^4-16\sigma_1^2\sigma_2-32\sigma_1\sigma_3+32\sigma_2^2.$$

Преобразуем правую часть:

$$4s_4 + 24O(a^2b^2) = 4(\sigma_1^2 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3) + 24(\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3) = 4\sigma_1^4 - 16\sigma_1^2\sigma_2 - 32\sigma_1\sigma_3 + 32\sigma_2^2.$$

Таким образом, требуемое равенство доказано.

5) Преобразуем левую часть:

$$a(b+c)^2 + b(c+a)^2 + c(a+b)^2 - 4abc = a(\sigma_1 - a)^2 + b(\sigma_1 - b)^2 + c(\sigma_1 - c)^2 - 4\sigma_3 =$$
$$= \sigma_1^2(a+b+c) - 2\sigma_1(a^2+b^2+c^2) + (a^3+b^3+c^3) - 4\sigma_3 =$$
$$= \sigma_1^3 - 2\sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) + (\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3) - 4\sigma_3 = \sigma_1\sigma_2 - \sigma_3.$$

То же значение имеет и правая часть (ср. пример 1°).

6) Левая часть имеет вид (ср. пример 1° на стр. 65)

$$(\sigma_1 - a)^3 + (\sigma_1 - b)^3 + (\sigma_1 - c)^3 - 3(\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3) =$$
$$= 3\sigma_1^3 - 3\sigma_1^2(a+b+c) + 3\sigma_1(a^2+b^2+c^2) - (a^3+b^3+c^3) - 3(\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3) =$$
$$= 3\sigma_1^3 - 3\sigma_1^3 + 3\sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - (\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3) - 3(\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3) = 2\sigma_1^3 - 6\sigma_1\sigma_2 = 2\sigma_1(\sigma_1^2 - 3\sigma_2).$$

То же значение имеет и правая часть (см. пример 1° на стр. 63).

7) Имеем:

$$(ab+ac+bc)^2 + (a^2-bc)^2 + (b^2-ac)^2 + (c^2-ab)^2 = \sigma_2^2 + s_4 - 2O(a^2bc) + O(a^2b^2) =$$
$$= \sigma_2^2 + (\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3) - 2\sigma_1\sigma_3 + (\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3) =$$
$$= \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_2^2 = (\sigma_1^2 - 2\sigma_2)^2 = s_2^2 = (a^2+b^2+c^2)^2.$$

8) Левая часть равна (детали вычислений см. в примере 3° на стр. 64)

$$(\sigma_1^3 - 24\sigma_3) - 3(-\sigma_1^3 + 4\sigma_1\sigma_2 - 8\sigma_3) = 4\sigma_1^3 - 12\sigma_1\sigma_2 = 4(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2) = 4(x^3+y^3+z^3-3xyz)$$

(см. пример 3° на стр. 70).

9) Левая часть преобразуется следующим образом:

$$((\sigma_1 - a)(\sigma_1 - b)(\sigma_1 - c))^2 + 2\sigma_3^2 - O(a^4b^2) - 2O(a^4bc) =$$
$$= (\sigma_1^3 - \sigma_1(a+b+c) + \sigma_1(ab+ac+bc) - abc)^2 + 2\sigma_3^2 - O(a^4b^2) - 2\sigma_3O(a^3) =$$
$$= (\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3)^2 + 2\sigma_3^2 - (\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3 - 2\sigma_1^3\sigma_3 + 4\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 3\sigma_3^2) -$$
$$- 2\sigma_3(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3) = 2\sigma_2^3 = 2(ab+ac+bc)^3.$$

10) Левая часть преобразуется следующим образом:

$$(\sigma_3^2 - O(x^2y^2) + s_2 - 1) + (\sigma_3 + O(x^2y^2) + O(x^3yz) + \sigma_3^2) =$$
$$= 2\sigma_3^2 + \sigma_3 - 1 + s_2 + O(x^3yz) = 2\sigma_3^2 + \sigma_3 - 1 + \sigma_1^2 - 2\sigma_2 + \sigma_3(\sigma_1^2 - 2\sigma_2).$$

Преобразуем теперь правую часть:

$$(\sigma_3 + 1)(\sigma_1^2 - 2\sigma_2 + 2\sigma_3 - 1) = \sigma_3\sigma_1^2 - 2\sigma_2\sigma_3 + 2\sigma_3^2 - \sigma_3 + \sigma_1^2 - 2\sigma_2 + 2\sigma_3 - 1.$$

Совпадение обоих выражений проверяется непосредственно.

11) Левая часть имеет вид $\sigma_1^3\sigma_3 - \sigma_2^3$; преобразуем правую часть:

$$(x^2 - yz)(y^2 - zx)(z^2 - xy) = \sigma_3^2 - O(x^3y^3) + O(x^4yz) - \sigma_3^2 = \sigma_3O(x^3) - O(x^3y^3) =$$
$$= \sigma_3(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3) - (\sigma_2^3 + 3\sigma_3^2 - 3\sigma_1\sigma_2\sigma_3) = \sigma_1^3\sigma_3 - \sigma_2^3.$$

12) См. решение упражнения 7) на стр. 209.

13) $(x-y)^4+(y-z)^4+(z-x)^4=2s_4-4\cdot O(x^3y)+6\cdot O(x^2y^2)=$

$$=2(\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3)-4(\sigma_1^2\sigma_2-2\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_3)+6(\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3)=$$

$$=2\sigma_1^4-12\sigma_1^2\sigma_2+18\sigma_2^2=2(\sigma_1^4-6\sigma_1^2\sigma_2+9\sigma_2^2)=$$

$$=2(\sigma_1^2-3\sigma_2)^2=2(s_2-\sigma_2)^2=2(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)^2.$$

14) Положим $x-y=a$, $y-z=b$, $z-x=c$. Тогда $a+b+c=0$. Доказываемое тождество принимает вид

$$(a^2+b^2+c^2)^2=4(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2),$$

или $s_2^2=4\cdot O(a^2b^2)$. Это равенство действительно имеет место, поскольку при $\sigma_1=0$ мы имеем $s_2=-2\sigma_2$, $O(a^2b^2)=\sigma_2^2$.

15) В силу формул, приведённых в табл. 5 на стр. 67

$$a^3+b^3+c^3=3\sigma_3=3abc.$$

16) Левая часть имеет вид (см. пример 1° на стр. 65)

$$s_3+3(\sigma_1\sigma_2-\sigma_3)=3\sigma_3-3\sigma_3=0.$$

17) Левая часть имеет вид (учитывая, что $\sigma_1=0$)

$$2\cdot O(a^2b^2)+2\cdot O(a^2bc)+s_2\sigma_2=2\sigma_2^2-2\cdot 0+(-2\sigma_2)\cdot\sigma_2=0.$$

18) $a^4+b^4+c^4=s_4=2\sigma_2^2$; $2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=2\cdot O(a^2b^2)=2\sigma_2^2$.

19) $2(a^4+b^4+c^4)=2s_4=4\sigma_2^2$; $(a^2+b^2+c^2)^2=s_2^2=(-2\sigma_2)^2=4\sigma_2^2$.

20) $2(a^5+b^5+c^5)=2s_5=-10\sigma_2\sigma_3$; $5abc(a^2+b^2+c^2)=5\sigma_3s_2=-10\sigma_2\sigma_3$.

21) $\dfrac{a^5+b^5+c^5}{5}=\dfrac{s^5}{5}=-\sigma_2\sigma_3$; $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}\cdot\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}=\dfrac{s_3}{3}\cdot\dfrac{s_2}{2}=\sigma_3(-\sigma_2)=-\sigma_2\sigma_3$.

22) $\dfrac{a^7+b^7+c^7}{7}=\dfrac{s_7}{7}=\sigma_2^2\sigma_3$; $\dfrac{a^5+b^5+c^5}{5}\cdot\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}=\dfrac{s_5}{5}\cdot\dfrac{s_2}{2}=(-\sigma_2\sigma_3)(-\sigma_2)=\sigma_2^2\sigma_3$.

23) $\dfrac{a^7+b^7+c^7}{7}=\dfrac{s_7}{7}=\sigma_2^2\sigma_3$; $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}\cdot\dfrac{a^4+b^4+c^4}{2}=\dfrac{s_3}{3}\cdot\dfrac{s_4}{2}=\sigma_3\sigma_2^2=\sigma_2^2\sigma_3$.

24) $\dfrac{a^7+b^7+c^7}{7}\cdot\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}=\dfrac{s_7}{7}\cdot\dfrac{s_3}{3}=\sigma_2^2\sigma_3\sigma_3=\sigma_2^2\sigma_3^2$;

$$\left(\frac{a^5+b^5+c^5}{5}\right)^2=\left(\frac{s_5}{5}\right)^2=(-\sigma_2\sigma_3)^2=\sigma_2^2\sigma_3^2.$$

25) $\left(\dfrac{a^7+b^7+c^7}{7}\right)=\left(\dfrac{s_7}{7}\right)^2=(\sigma_2^2\sigma_3)^2=\sigma_2^4\sigma_3^2$;

$$\left(\frac{a^5+b^5+c^5}{5}\right)^2\cdot\frac{a^4+b^4+c^4}{2}=\left(\frac{s_5}{5}\right)^2\frac{s_4}{2}=(-\sigma_2\sigma_3)^2\cdot\sigma_2^2=\sigma_2^4\sigma_3^2.$$

26) Положим $z = -x - y$. Тогда

$$(x+y)^4 + x^4 + y^4 = (-z)^4 + x^4 + y^4 = z^4 + x^4 + y^4 =$$
$$= s_4 = 2\sigma_2^2 = 2(xy + xz + yz)^2 = 2(xy - (x+y)^2) = 2(xy + x^2 + y^2)^2;$$
$$(x+y)^5 - x^5 - y^5 = (-z)^5 - x^5 - y^5 = -s_5 = 5\sigma_2\sigma_3 = 5(xy + xz + yz)xyz =$$
$$= 5xy(-x-y)(-x^2 - y^2 - xy) = 5xy(x+y)(x^2 + xy + y^2);$$
$$(x+y)^7 - x^7 - y^7 = -s_7 = -7\sigma_2^2\sigma_3 = -7xyz(xy + xz + yz)^2 = 7xy(x+y)(xy + x^2 + y^2)^2.$$

27) См. пример 8° на стр. 68.

28) Положим $a - b = x$, $b - c = y$, $c - a = z$. Тогда $x + y + z = 0$; доказываемое тождество принимает вид

$$25(x^7 + y^7 + z^7)(x^3 + y^3 + z^3) = 21(x^5 + y^5 + z^5)$$

(см. упражнение 24)).

29) Положим $x - y = a$, $y - z = b$, $z - x = c$. Тогда $a + b + c = 0$; доказываемое равенство принимает вид

$$a^4 + b^4 + c^4 = 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2),$$

т. е. $s_4 = 2 \cdot O(a^2b^2)$. Оно действительно имеет место, поскольку $s_4 = 2\sigma_2^2$, $O(a^2b^2) = \sigma_2^2$.

30) Положим $x - y = a$, $y - z = b$, $z - x = c$. Тогда $a + b + c = 0$ и мы имеем:

$$(y-z)^5 + (z-x)^5 + (x-y)^5 = a^5 + b^5 + c^5 = s_5 = -5\sigma_2\sigma_3 = \frac{5}{2}(-2\sigma_2)\sigma_3 =$$
$$= \frac{5}{2}s_3\sigma_5 = \frac{5}{2}(x-y)(y-z)(z-x)((x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2) =$$
$$= 5(x-y)(y-z)(z-x)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz).$$

31) Левая часть имеет вид

$$s^2(a+b+c) - 2s(ab + ac + bc) + 3abc + 2(s^3 - s^2(a+b+c) + s(ab + ac + bc) - abc) =$$
$$= \left(\frac{\sigma_1}{2}\right)^2 \sigma_1 - \sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 + 2\left(-\frac{\sigma_1^3}{8} + \frac{\sigma_1}{2}\sigma_2 - \sigma_3\right) = \sigma_3 = abc.$$

32) Доказываемое равенство имеет вид

$$\left(\frac{-a+b+c}{2}\right)^3 + \left(\frac{a-b+c}{2}\right)^3 + \left(\frac{a+b-c}{2}\right)^3 + 3abc = \left(\frac{a+b+c}{2}\right)^3$$

и вытекает из тождества примера 1° на стр. 69.

33) Левая часть имеет вид (учитывая, что $\sigma_2 = 0$)

$$((\sigma_1 - x)(\sigma_1 - y)(\sigma_1 - z))^2 + 2\sigma_3^2 = (-\sigma_3)^2 + 2\sigma_3^2 = 3\sigma_3^2.$$

Вычислим правую часть:

$$x^4(y+z)^2 + y^4(z+x)^2 + z^4(x+y)^2 = O(x^4y^2) + 2 \cdot O(x^4yz) = (-2\sigma_1^3\sigma_3 - 3\sigma_3^2) + 2\sigma_3(\sigma_1^3 + 3\sigma_3) = 3\sigma_3^2.$$

34) Доказываемое тождество после освобождения от знаменателей принимает вид

$$x(1-y^2)(1-z^2) + y(1-z^2)(1-x^2) + z(1-x^2)(1-y^2) = 4xyz.$$

Преобразуем левую часть (учитывая, что $\sigma_2 = 1$):

$$O(x) - O(x^2y) + O(x^2y^2z) = \sigma_1 - (\sigma_1 - 3\sigma_3) + \sigma_3 = 4\sigma_3 = 4xyz.$$

35) Положим $\frac{x}{a}=u$, $\frac{y}{b}=v$, $\frac{z}{c}=w$. Тогда заданные соотношения имеют вид $\sigma_1 = u+v+w=1$ и

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=0,$$

т. е. $\frac{\sigma_2}{\sigma_3}=0$, и потому $\sigma_2=0$. Итак, $\sigma_1=1$, $\sigma_2=0$, и потому

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=u^2+v^2+w^2=s_2=\sigma_1^2-2\sigma_2=1.$$

36) Соотношения $\sigma_1=0$, $s_2=1$, т. е. $\sigma_1^2-2\sigma_2=1$, дают нам $\sigma_1=0$, $\sigma_2=-\frac{1}{2}$. Теперь находим:

$$a^4+b^4+c^4=s_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3=2\sigma_2^2=\frac{1}{2}.$$

37) Равенство

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$$

можно записать в виде $\frac{\sigma_2}{\sigma_3}=\frac{1}{\sigma_1}$, т. е. $\sigma_1\sigma_2-\sigma_3=0$, или, наконец (см. пример 1° на стр. 65),

$$(a+b)(a+c)(b+c)=0.$$

Таким образом, хотя бы одно из выражений $a+b$, $a+c$, $b+c$ равно нулю, т. е. имеет место хотя бы одно из равенства $a=-b$, $b=-c$, $c=-a$. Но в таком случае равенства

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^n=\frac{1}{a^n+b^n+c^n}=\frac{1}{(a+b+c)^n}$$

при нечётном n очевидны.

38) Положим $z=-x-y$. Тогда $x+y+z=0$ и (при нечётном n) имеем:

$$(x+y)^n-x^n-y^n=-z^n-x^n-y^n=-s_n,$$
$$x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy=-z(x+y)-xy=-\sigma_2.$$

Таким образом, мы должны доказать, что в случае $\sigma_1=0$ степенная сумма $s_n=x^n+y^n+z^n$ делится при $n=6k\pm1$ на σ_2, а при $n=6k+1$ на σ_2^2. Выразим степенную сумму s_n через элементарные симметрические многочлены σ_1, σ_2, σ_3. Так как $\sigma_1=0$, то s_n представится в виде многочлена от σ_2 и σ_3. Пусть $k\sigma_2^\alpha\sigma_3^\beta$ — какой-либо член этого многочлена. Если бы было $\alpha=0$, то этот член имел бы (относительно x, y, z) степень 3β, т. е. степень, кратную трём. Значит, при $n=6k\pm1$ каждый член рассматриваемого многочлена (выражающего s_n) должен содержать множитель σ_2 хотя бы в первой степени, и потому s_n делится на σ_2. Пусть теперь рассматриваемый член $k\sigma_2^\alpha\sigma_3^\beta$ содержит σ_2 только в первой степени, т. е. $\alpha=1$. Тогда рассматриваемый член имеет (относительно x, y, z) степень $3\beta+2$, т. е. степень, дающую при делении на 3 остаток 2. Значит, при $n=6k+1$ каждый член рассматриваемого многочлена содержит σ_2 не менее чем во второй степени, т. е. s_n делится на σ_2.

39) Обозначим элементарные симметрические многочлены от x, y, z через σ_1, σ_2, σ_3, а от u, v, w — через τ_1, τ_2, τ_3. Мы имеем:

$$u=(a+1)\sigma_1-3ax,\quad v=(a+1)\sigma_1-3ay,\quad w=(a+1)\sigma_1-3az,$$

откуда легко находим:

$$\tau_1 = 3(a+1)\sigma_1 - 3a\sigma_1 = 3\sigma_1;$$
$$\tau_2 = 3(a+1)^2\sigma_1^2 - 6a(a+1)\sigma_1^2 + 9a^2\sigma_2 = 3(1-a^2)\sigma_1^2 + 9a^2\sigma_2.$$

Теперь получаем:

$$u^3+v^3+w^3-3uvw = (\tau_1^3 - 3\tau_1\tau_2 + 3\tau_3) - 3\tau_3 = \tau_1^3 - 3\tau_1\tau_2 = 27\sigma_1^3 - 3\cdot 3\sigma_1(3(1-a^2)\sigma_1^2 + 9a^2\sigma_2) =$$
$$= 27a^2\sigma_1^3 - 81a^2\sigma_1\sigma_2 = 27a^2(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2) = 27a^2(x^3+y^3+z^3-3xyz).$$

40) Произведение $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)$ равно симметрическому многочлену

$$a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2$$

(см. пример 2° на стр. 63). Так как значения a^2, b^2, c^2 заданы, то мы можем выразить этот симметрический многочлен через x, y, z. Получим следующий симметрический многочлен от x, y, z:

$$(y^2+yz+z^2)^2 + (z^2+zx+x^2)^2 + (x^2+xy+y^2)^2 - 2(y^2+yz+z^2)(z^2+zx+x^2) -$$
$$- 2(y^2+yz+z^2)(x^2+xy+y^2) - 2(z^2+zx+x^2)(x^2+xy+y^2).$$

Остаётся доказать, что при $\sigma_2 = 0$ последний симметрический многочлен обращается в нуль. Предоставляем читателю выразить этот многочлен через σ_1, σ_2, σ_3 и убедиться, что в каждый его член входит множитель σ_2.

41) Положим $a = x-y$, $b = y-z$, $c = z-x$. Тогда $a+b+c=0$; заданное равенство принимает вид

$$a^2+b^2+c^2 = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$$

или

$$a^2+b^2+c^2 = 2(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc).$$

Переходя к элементарным симметрическим многочленам, получаем отсюда:

$$\sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 2(\sigma_1^2 - 3\sigma_2),$$

и потому (в силу соотношения $\sigma_1 = 0$) имеем $\sigma_2 = 0$. Следовательно,

$$a^2+b^2+c^2 = s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 0.$$

Но равенство $a^2+b^2+c^2=0$ возможно лишь при $a=b=c=0$, т. е. $x-y=y-z=z-x=0$, или, наконец, $x=y=z$.

42) Левая часть доказываемого равенства симметрична относительно b, c, d. Обозначая через σ_1, σ_2, σ_3 элементарные симметрические многочлены от величин b, c, d, мы легко представим доказываемое равенство в виде

$$a^3\sigma_1 + 2a^2s_2 + as_3 + a^2\sigma_2 - 6a\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3 + 4a\sigma_3 = 0.$$

Так как $a+b+c+d=0$, то $a=-\sigma_1$. Остаётся подставить значения степенных сумм s_2, s_3 (см. табл. 2 на стр. 47) и значение $a=-\sigma_1$, после чего доказываемое равенство получится очевидным приведением подобных членов.

К стр. 72.

1) Указанное неравенство имеет вид $\sigma_1^2 - 2\sigma_2 \geqslant \sigma_2$, т. е. непосредственно сводится к неравенству $\sigma_1^2 \geqslant 3\sigma_2$ (см. (7), стр. 71).

2) Указанное неравенство имеет вид $\sigma_1^2 - 2\sigma_2 \geqslant \frac{1}{3}\sigma_1^2$, т. е. сводится к неравенству $\sigma_1^2 \geqslant 3\sigma_2$.

3) Указанное неравенство имеет вид $3\sigma_2 \leqslant \sigma_1^2$ (см. (7), стр. 71).

4) Указанное неравенство имеет вид $O(a^2b^2) \geqslant \sigma_1\sigma_3$, т. е. $\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3 \geqslant \sigma_1\sigma_3$, и потому непосредственно сводится к неравенству примера 1° на стр. 71.

5) Указанное неравенство имеет вид $\sigma_2^2 \geqslant 3\sigma_1\sigma_3$ (см. пример 1° на стр. 71).

6) Указанное неравенство является частным случаем неравенства $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + xz + yz$ (см. упражнение 1)), получающимся при $c = 1$.

7) Указанное неравенство можно переписать в виде $\sigma_1 \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_3} \geqslant 9$, т. е. (поскольку $\sigma_3 > 0$) $\sigma_1\sigma_2 \geqslant 9\sigma_3$ (см. пример 2° на стр. 71).

8) Указанное неравенство переписывается в виде $\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 \geqslant 3\sigma_3$, т. е. $\sigma_1^3 \geqslant 3\sigma_1\sigma_2$. Оно вытекает из неравенства $\sigma_1^2 \geqslant 3\sigma_2$ (см. (7), стр. 71), поскольку $\sigma_1 > 0$.

9) Указанное неравенство переписывается в виде

$$\sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) \geqslant 9\sigma_3, \quad \text{т. е.} \quad \sigma_1^3 \geqslant 2\sigma_1\sigma_2 + 9\sigma_3.$$

Оно получается при помощи сложения неравенств $\sigma_1^3 \geqslant 3\sigma_1\sigma_2$, $\sigma_1\sigma_2 \geqslant 9\sigma_3$.

10) После возведения в куб указанное неравенство принимает вид $\frac{1}{27}\sigma_1^3 \geqslant \sigma_3$ (см. пример 3° на стр. 72).

11) Положим $x = \frac{1}{\sqrt{a}}$, $y = \frac{1}{\sqrt{b}}$, $z = \frac{1}{\sqrt{c}}$. Тогда указанное неравенство перепишется в виде $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + xz + yz$ (см. упражнение 1)).

12) Левая часть переписывается в виде

$$ab(\sigma_1 - 3c) + bc(\sigma_1 - 3a) + ac(\sigma_1 - 3b) = \sigma_1\sigma_2 - 9\sigma_3.$$

Таким образом, указанное неравенство принимает вид $\sigma_1\sigma_2 \geqslant 9\sigma_3$ (см. пример 2° на стр. 71).

13) Указанное неравенство переписывается в виде $ab(\sigma_1 - c) + ac(\sigma_1 - b) + bc(\sigma_1 - a) \geqslant 6\sigma_3$, т. е. $\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3 \geqslant 6\sigma_3$ (см. пример 2° на стр. 71).

14) Доказываемое неравенство имеет вид (ср. пример 1° на стр. 65) $\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3 \geqslant 8\sigma_3$ (см. пример 2° на стр. 71).

15) Положим $a + b = x$, $b + c = y$, $c + a = z$, т. е.

$$a = \frac{x + z - y}{2}, \quad b = \frac{x + y - z}{2}, \quad c = \frac{y + z - x}{2}.$$

Если числа a, b, c положительны, то, в силу неравенства упражнения 14), мы имеем $xyz \geqslant (x + z - y)(x + y - z)(y + z - x)$, что и требовалось. Если же, скажем, $a \leqslant 0$, то $y \geqslant z + x$, значит, $y \geqslant z$, $y \geqslant x$, и потому оба числа b, c неотрицательны. Но тогда $abc \leqslant 0$ и неравенство $xyz \geqslant 8abc$ очевидно.

16) Для доказательства достаточно выразить левую и правую части неравенства, рассмотренного в упражнении 15), через σ_1.

17) Доказываемое неравенство имеет вид $2s_3 \geqslant O(a^2b)$, т. е. $2(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3) \geqslant \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3$, или, наконец, $2\sigma_1^3 - 7\sigma_1\sigma_2 + 9\sigma_3 \geqslant 0$. Это неравенство получается, если к неравенству предыдущего примера прибавить неравенство $\sigma_1^3 \geqslant 3\sigma_1\sigma_2$.

18) Освобождаясь от знаменателей, получим неравенство

$$a(a+b)(a+c)+b(b+c)(b+a)+c(c+a)(c+b)\geqslant\frac{3}{2}(b+c)(c+a)(a+b),$$

которое легко приводится к виду $s_3+O(a^2b)+3\sigma_3\geqslant\frac{3}{2}(\sigma_1\sigma_2-\sigma_3)$, или после упрощения, $\sigma_1^3-\frac{7}{2}\sigma_1\sigma_2+\frac{9}{2}\sigma_3\geqslant 0$. Это неравенство было рассмотрено в предыдущем упражнении.

19) Освобождаясь от знаменателей, получим неравенство

$$2(a+b+c)((c+a)(a+b)+(b+c)(a+b)+(b+c)(c+a))\geqslant 9(a+b)(b+c)(c+a),$$

или $2\sigma_1(s_2+3\sigma_2)\geqslant 9(\sigma_1\sigma_2-\sigma_3)$. После упрощения получаем неравенство $2\sigma_1^3-7\sigma_1\sigma_2+9\sigma_3\geqslant 0$, рассмотренное в упражнении 17).

20) Доказываемое неравенство совпадает с неравенством упражнения 17).

21) Освобождаясь от знаменателей, запишем доказываемое неравенство в виде $3s_3\geqslant s_1s_2$, т. е.

$$3(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3)\geqslant\sigma_1(\sigma_1^2-2\sigma_2).$$

После упрощения получаем неравенство $2\sigma_1^3-7\sigma_1\sigma_2+9\sigma_3\geqslant 0$, рассмотренное в упражнении 17).

22) Рассматриваемое неравенство имеет вид $3s_3\geqslant\sigma_1\sigma_2$, т. е. $3\sigma_1^3-10\sigma_1\sigma_2+9\sigma_3\geqslant 0$. Оно получается, если к неравенству упражнения 16) прибавить удвоенное неравенство $\sigma_1^3\geqslant 3\sigma_1\sigma_2$ (или к неравенству упражнения 17) прибавить неравенство $\sigma_1^3\geqslant 3\sigma_1\sigma_2$).

23) Рассматриваемое неравенство имеет вид $\sigma_1^3\leqslant 9s_3$, т. е. $8\sigma_1^3-27\sigma_1\sigma_2+27\sigma_3\geqslant 0$. Оно получается, если к утроенному неравенству упражнения 16) прибавить умноженное на 5 неравенство $\sigma_1^3\geqslant 3\sigma_1\sigma_2$.

24) Рассматриваемое неравенство имеет вид $8s_3\geqslant 3(\sigma_1\sigma_2-\sigma_3)$, т. е.

$$8\sigma_1^3-27\sigma_1\sigma_2+27\sigma_3\geqslant 0;$$

оно рассмотрено в предыдущем упражнении.

25) Доказываемое неравенство имеет вид $s_4\geqslant\sigma_1\sigma_3$, т. е. $\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+3\sigma_1\sigma_3\geqslant 0$. Оно получается, если к неравенству упражнения 16), умноженному на σ_1, прибавить удвоенное неравенство $\sigma_2^2\geqslant 3\sigma_1\sigma_3$.

26) В силу неравенств $x,\ y,\ z\geqslant-\frac{1}{4}$ подкоренные выражения неотрицательны. Положим $\sqrt{4x+1}=u$, $\sqrt{4y+1}=v$, $\sqrt{4z+1}=w$. Тогда соотношение $x+y+z=1$ примет вид $u^2+v^2+w^2=7$, и требуется установить, что $u+v+w<5$. Это легко вытекает из неравенства, рассмотренного в упражнении 2).

27) Освобождаясь от знаменателей в первом соотношении (все числа $b-c$, $c-a$, $a-b$ отличны от нуля), получаем:

$$a(c-a)(a-b)+b(b-c)(a-b)+c(b-c)(c-a)=0,$$

или $-s_3-3\sigma_3+O(a^2b)=0$. Таким образом, первое из заданных соотношений равносильно равенству

$$\sigma_1^3-4\sigma_1\sigma_2+9\sigma_3=0. \qquad (*)$$

Совершенно аналогично из второго заданного соотношения получаем:

$$a(c-a)^2(a-b)^2+b(b-c)^2(a-b)^2+c(b-c)^2(c-a)^2=0,$$

или $s_5 - 2\cdot O(a^4b) + O(a^3b^2) + 4\cdot O(a^3bc) - 3\cdot O(a^2b^2c) = 0$. Таким образом, второе из заданных соотношений равносильно равенству

$$\sigma_1^5 - 7\sigma_1^3\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_3 + 12\sigma_1\sigma_2^2 - 27\sigma_2\sigma_3 = 0. \qquad (**)$$

Разделив многочлен, стоящий в левой части равенства (**), на многочлен, стоящий в левой части равенства (*), мы увидим, что равенство (**) переписывается в виде

$$(\sigma_1^3 - 4\sigma_1\sigma_2 + 9\sigma_3)(\sigma_1^2 - 3\sigma_2) = 0. \qquad (***)$$

Ясно, что из равенства (*) вытекает равенство (***), т. е. (**). Иными словами доказано, что из первого соотношения, заданного в условии задачи, вытекает второе.

Если числа a, b, c действительны, то, поскольку они по условию различны, выражение $\sigma_1^2 - 3\sigma_2$ не равно нулю (см. (7), стр. 71). Таким образом, для действительных попарно различных чисел a, b, c второе из соотношений, заданных в условии задачи, влечёт за собой первое.

28) Так как a, b, c — стороны треугольника, то числа

$$x = a + b - c, \quad y = a - b + c, \quad z = -a + b + c$$

положительны. Выразим числа a, b, c через x, y, z:

$$a = \frac{x+y}{2}, \quad b = \frac{x+z}{2}, \quad c = \frac{y+z}{2}.$$

Таким образом, доказываемое неравенство равносильно неравенству

$$2\left(\frac{x+y}{2}\cdot\frac{x+z}{2} + \frac{x+y}{2}\cdot\frac{y+z}{2} + \frac{x+z}{2}\cdot\frac{y+z}{2}\right) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+z}{2}\right)^2 + \left(\frac{y+z}{2}\right)^2$$

для положительных x, y, z. Последнее неравенство имеет вид (после умножения на 4) $2(s_2 + 3\sigma_2) > 2s_2 + 2\sigma_2$, т. е. $4\sigma_2 > 0$. Это соотношение и в самом деле имеет место, поскольку x, y, z положительны, и, значит, $\sigma_2 = xy + xz + yz > 0$.

29) Производя ту же замену, что и при решении предыдущей задачи, мы приходим к неравенству (при положительных x, y, z)

$$\left(\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+z}{2}\right)^2 + \left(\frac{y+z}{2}\right)^2\right)(x+y+z) > 2\left(\left(\frac{x+y}{2}\right)^3 + \left(\frac{x+z}{2}\right)^3 + \left(\frac{y+z}{2}\right)^3\right),$$

или (после умножения на 4) $(2s_2 + 2\sigma_2)\sigma_1 > (2s_3 + 3\cdot\, O(x^2y))$. После упрощения приходим к неравенству $\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 > 0$, которое очевидно.

30) Это утверждение непосредственно вытекает из неравенства упражнения **3**).

31) По написанию уравнения видно, что каждое из чисел x, y, z должно быть отлично от нуля. Положим

$$u = \frac{xy}{z}, \qquad v = \frac{xz}{y}, \qquad w = \frac{yz}{x}.$$

Тогда, по условию задачи, $\sigma_1 = u + v + w = 3$. Далее, $\sigma_2 = uv + uw + vw = x^2 + y^2 + z^2$. Из неравенства (7) (стр. 71) получаем теперь $9 \geqslant 3(x^2 + y^2 + z^2)$, т. е. $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 3$. Так как x, y, z — отличные от нуля целые числа, то из этого следует, что $|x| = |y| = |z| = 1$. Следовательно, каждое из чисел u, v, w равно ± 1. Но из соотношения $u + v + w = 3$ вытекает теперь, что $u = v = w = 1$. Таким образом, каждое из чисел x, y, z равно ± 1, причём число минусов чётно (т. е. произведение их равно +1). Мы получаем следующие четыре возможных решения:

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 1, \\ z_1 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = -1, \\ z_2 = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -1, \\ y_3 = 1, \\ z_3 = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -1, \\ y_4 = -1, \\ z_4 = 1. \end{cases}$$

Проверка показывает, что все эти решения удовлетворяют данному уравнению.

32) Согласно формуле Герона, площадь треугольника со сторонами a, b, c равна

$$S = \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{16}}.$$

Положим $x = a+b-c$, $y = a-b+c$, $z = -a+b+c$. Тогда числа x, y, z положительны, причём $x+y+z = a+b+c = \sigma_1$. Теперь имеем:

$$S = \sqrt{\frac{(x+y+z)xyz}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{\sigma_1\sigma_3},$$

и потому, в силу неравенства упражнения 3),

$$S \leqslant \frac{1}{4}\sqrt{\sigma_1 \frac{1}{27}\sigma_1^3} = \frac{1}{12\sqrt{3}}\sigma_1^2,$$

причём равенство достигается лишь при $x = y = z$ или, иначе, лишь при $a = b = c$. Итак, из всех треугольников периметра σ_1 наибольшую площадь, а именно $\frac{1}{12\sqrt{3}}\sigma_1^2$, имеет равносторонний треугольник.

33) Воспользовавшись неравенствами $\sigma_3 \leqslant \frac{1}{9}\sigma_1\sigma_2$ (см. пример 2° на стр. 71) и $\sigma_2 \leqslant \frac{1}{3}\sigma_1^2$ (см. (7), стр. 71), получаем:

$$(1+u)(1+v)(1+w) = 1 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 2 + \sigma_2 + \sigma_3 \leqslant 2 + \sigma_2 + \frac{1}{9}\sigma_1\sigma_2 =$$
$$= 2 + \sigma_2 + \frac{1}{9}\sigma_2 = 2 + \frac{10}{9}\sigma_2 \leqslant 2 + \frac{10}{9}\,\frac{1}{3}\sigma_1^2 = 2 + \frac{10}{27} = \frac{64}{27};$$

равенство достигается лишь при $u = v = w$, т. е. при $u = \frac{1}{3}$, $v = \frac{1}{3}$, $w = \frac{1}{3}$.

34) Заменяя единицу в каждой скобке на $a+b+c$, приходим к неравенству упражнения 14).

К стр. 79.

1) Это — частный случай примера 1°, рассмотренного на стр. 74. Можно повторить весь ход решения или воспользоваться окончательной формулой, полагая $x = 1$, $y = \sqrt{2}$, $z = -\sqrt{3}$.

О т в е т: $\dfrac{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

2) Это — частный случай примера 2° на стр. 76 ($x=1$, $y=\sqrt[3]{2}$, $z=2\sqrt[3]{4}$).

Ответ: $\dfrac{7\sqrt[3]{2}-3-\sqrt[3]{4}}{23}$.

3) В силу соотношения $s_2^2-2s_4=\sigma_1(4\sigma_1\sigma_2-\sigma_1^3-8\sigma_3)$, выведенного на стр. 75, искомое соотношение имеет вид $s_2^2-2s_4=0$, где положено $x=\sqrt{a}$, $y=\sqrt{b}$, $z=1$. Таким образом,

$$s_2=x^2+y^2+z^2=a+b+1,$$
$$s_4=x^4+y^4+z^4=a^2+b^2+1,$$

и, значит,

$$s_2^2-2s_4=(a+b+1)^2-2(a^2+b^2+1)=2ab+2a+2b-a^2-b^2-1.$$

Итак, искомое соотношение имеет вид

$$2ab-a^2-b^2+2a+2b-1=0.$$

4) Положим $x=\sqrt[3]{a}$, $y=\sqrt[3]{a^2}$, $z=b$. Так как $\sigma_3=xyz=ab$, то из соотношения $s_3-3\sigma_3=\sigma_1(\sigma_1^2-3\sigma_2)$ вытекает, что искомое соотношение имеет вид $s_3-3\sigma_3=0$. Но

$$s_3-3\sigma_3=x^3+y^3+z^3-3xyz=a+a^2+b^3-3ab,$$

поэтому получаем: $a+a^2+b^3-3ab=0$.

5) Решение аналогично предыдущему. Искомое соотношение имеет вид

$$a^2p^3+aq^3+r^3-3apqr=0.$$

6) Избавимся от квадратных корней, умножив заданное соотношение на $\sqrt[3]{a}-\sqrt{b}+c$. Мы получим: $(\sqrt[3]{a}+c)^2-b=0$, или $(c^2-b)+2c\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}=0$. Остаётся, положив $x=c^2-b$, $y=2c\sqrt[3]{a}$, $z=\sqrt[3]{a^2}$, составить выражение $s_3-3\sigma_3=x^3+y^3+z^3-3xyz$ (см. решение предыдущего упражнения). Таким образом, мы получаем соотношение $(c^2-b)^3+8ac^3+a^2-6ac(c^2-b)=0$, или $(c^2-b)^3+2ac^3+a^2+6abc=0$.

7) Полагая $u=(ax)^{2/3}$, $v=(by)^{2/3}$, $w=-c^{4/3}$, будем иметь $\sigma_1=u+v+w=0$. Так как выражение $s_3-3\sigma_3$ делится на σ_1, то получим $s_3-3\sigma_3=0$, или

$$(ax)^2+(by)^2-c^4+3(axbyc^2)^{2/3}=0.$$

Остаётся уединить оставшийся кубический корень и возвести обе части в куб. Мы получим: $(a^2x^2+b^2y^2-c^4)^3=-27(axbyc^2)^2$, или

$$a^6x^6+b^6y^6+3a^4b^2x^4y^2+3a^2b^4x^2y^4-3a^4c^4x^4-3b^4c^4y^4+21a^2b^2c^4x^2y^2+3a^2c^8y^2+3b^2c^8y^2-c^{12}=0.$$

8) Положим $\sqrt{a}=x$, $\sqrt{b}=y$, $-\sqrt[4]{a^2+b^2}=z$, так что данное соотношение принимает вид $\sigma_1=x+y+z=0$. Соотношение (**) (стр. 78) принимает вид $(2s_8-s_4^2)^2-128s_4\sigma_3^4=0$, или

$$2(a^4+b^4+(a^2+b^2)^2)-(a^2+b^2+a^2+b^2)^2)^2-128(a^2+b^2+a^2+b^2)a^2b^2(a^2+b^2)=0.$$

После упрощения получаем: $-16a^2b^2(4a^2+4b^2+ab)(4a^2+4b^2-ab)=0$. Это и есть искомое соотношение. Заметим, что оба трёхчлена, стоящие в скобках, обращаются в нуль (для действительных a, b) лишь при $a=b=0$:

$$4a^2+4b^2\pm ab=\frac{7}{2}(a^2+b^2)+\frac{1}{2}(a\pm b)^2\geqslant\frac{7}{8}(a^2+b^2).$$

Поэтому указанные множители можно опустить, и мы получаем $a^2b^2=0$ или $ab=0$. Отсюда ясно, что заданное соотношение может выполняться лишь в том случае, если хотя бы одно из чисел a, b равно нулю. Таким образом, окончательно можно считать, что результат освобождения от иррациональности в заданном соотношении имеет вид $ab=0$.

К стр. 83

1) Если симметрический многочлен $f(x, y)$ делится на $x-y$, то частное $\dfrac{f(x, y)}{x-y}$ представляет собой антисимметрический многочлен (при замене x на y и y на x числитель не меняется, а знаменатель меняет знак). Следовательно, в силу сказанного на стр. 81, многочлен $\dfrac{f(x, y)}{x-y}$ делится на $x-y$, т. е. многочлен $f(x, y)$ делится на $(x-y)^2$.

2) В силу симметричности, многочлен $f(x, y, z)$ делится не только на $x-y$, но и на $y-z$, и на $x-z$, т. е. он делится на многочлен $T(x, y, z)$. Частное $\dfrac{f(x, y, z)}{T(x, y, z)}$ представляет собой антисимметрический многочлен (ср. решение предыдущего упражнения) и потому делится на $T(x, y, z)$. Таким образом, многочлен $f(x, y, z)$ делится на $(T(x, y, z))^2$, т. е. на $\Delta(x, y, z)$.

К стр. 88.

Дискриминант рассматриваемого кубического уравнения равен

$$\Delta=-4(-p)^3-27(-2q)^2=4(p^3-27q^2).$$

Поскольку $\Delta=((x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3))^2$, где x_1, x_2, x_3 — корни уравнения, по предположению являющиеся целыми числами, то Δ есть точный квадрат. Итак, число $4(p^3-27q^2)$ является точным квадратом, а значит (поскольку p и q — целые), точным квадратом является и число p^3-27q^2.

К стр. 90.

Так как все три числа a, b, c действительны, то $\Delta(a, b, c)\geqslant 0$. Кроме того, по условию $\sigma_1>0$, $\sigma_3>0$. Если выполнено условие $\sigma_2\geqslant 0$, то, в силу следствия на стр. 88, все три числа a, b, c неотрицательны (причём они отличны от нуля, поскольку $\sigma_3>0$). Следовательно, сумма $s_n=a^n+b^n+c^n$ положительна. Если же условие $\sigma_2\geqslant 0$ не выполнено, т. е. $\sigma_2<0$, то в формуле

$$s_n=\sigma_1 s_{n-1}-\sigma_2 s_{n-2}+\sigma_3 s_{n-3}$$

все коэффициенты σ_1, $-\sigma_2$, σ_3 положительны, и для доказательства (по индукции) положительности всех степенных сумм s_n достаточно установить, что три начальные степенные суммы положительны.

В самом деле,

$$s_0=3>0, \quad s_1=\sigma_1>0, \quad s_2=a^2+b^2+c^2>0.$$

Таким образом, независимо от знака величины σ_2 степенные суммы s_n положительны.

К стр. 96.

1) Рассматриваемый многочлен является антисимметрическим и имеет степень 3. Следовательно,

$$x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)=k(x-y)(x-z)(y-z).$$

Полагая $x=-1$, $y=0$, $z=1$, легко находим $k=-1$.

2) Рассматриваемый антисимметрический многочлен имеет степень 3. Следовательно, он имеет вид $k(a-b)(a-c)(b-c)$. Полагая $a=-1$, $b=0$, $c=1$, легко находим $k=4$.

3) Рассматриваемый антисимметрический многочлен должен иметь вид $k(a-b)(a-c)(b-c)$. Полагая $a=-1$, $b=0$, $c=1$, легко находим $k=1$.

4) Рассматриваемый антисимметрический многочлен должен иметь вид $k(a-b)(a-c)(b-c)$. Здесь $k=1$.

5) Рассматриваемый антисимметрический многочлен имеет степень 4. Следовательно, этот многочлен должен иметь вид $k(a+b+c)(a-b)(a-c)(b-c)$. Полагая $a=0$, $b=1$, $c=2$, легко находим $k=-1$.

6) Рассматриваемый антисимметрический многочлен имеет степень 4. Следовательно, этот многочлен должен иметь вид $k(x+y+z)(x-y)(x-z)(y-z)$. Полагая $x=0$, $y=1$, $z=2$, легко находим $k=1$.

7) Рассматриваемый антисимметрический многочлен должен иметь вид $k(x+y+z)(x-y)(x-z)(y-z)$. Полагая $x=0$, $y=1$, $z=2$, легко находим $k=-1$.

8) Рассматриваемый антисимметрический многочлен должен иметь вид $k(a+b+c)(a-b)(a-c)(b-c)$. Полагая $a=0$, $b=1$, $c=2$, легко находим $k=2$.

9) Рассматриваемый антисимметрический многочлен имеет степень 5. Следовательно, этот многочлен должен иметь вид $(k\sigma_1^2+l\sigma_2)(x-y)(x-z)(y-z)$. Полагая $x=-1$, $y=0$, $z=1$, находим $l=15$. Полагая, далее, $x=0$, $y=1$, $z=2$, получаем $-18k-4l=30$, откуда $k=-5$. Так как

$$k\sigma_1^2+l\sigma_2=-5\sigma_1^2+15\sigma_2=-5(\sigma_1^2-3\sigma_2)=-5(s_2-\sigma_2),$$

то окончательно получаем следующее разложение заданного многочлена:

$$-5(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)(x-y)(x-z)(y-z)$$

(ср. упражнение 30 на стр. 70).

10) Рассматриваемый антисимметрический многочлен должен иметь вид $(k\sigma_1^2+l\sigma_2)(a-b)(a-c)(b-c)$. Полагая $a=-1$, $b=0$, $c=1$, находим $l=-1$. Полагая, далее, $a=0$, $b=1$, $c=2$, получаем $-18k-4l=-50$, откуда $k=3$. Так как

$$k\sigma_1^2+l\sigma_2=3\sigma_1^2-\sigma_2=3s_2+5\sigma_2=3a^2+3b^2+3c^2-5ab-5ac-5bc,$$

то окончательно получаем следующее значение заданного многочлена:

$$(3a^2+3b^2+3c^2-5ab-5ac-5bc)(a-b)(a-c)(b-c).$$

11) Рассматриваемый антисимметрический многочлен должен иметь вид $(k\sigma_1^2+l\sigma_2)(a-b)(a-c)(b-c)$. Подставляя те же значения, что и в предыдущем упражнении, находим $l=-1$, $k=1$. Таким образом, получаем следующее разложение заданного многочлена:

$$(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)(a-b)(a-c)(b-c).$$

12) Рассматриваемый антисимметрический многочлен должен иметь вид

$(k\sigma_1^2+l\sigma_2)(a-b)(a-c)(b-c)$. Как и в предыдущих упражнениях, находим $l=0$, $k=1$. Таким образом, получаем следующее разложение заданного многочлена:

$$(a+b+c)^2(a-b)(a-c)(b-c).$$

13) Рассматриваемый антисимметрический многочлен имеет степень 6. Следовательно, он должен иметь вид $(k\sigma_1^3+l\sigma_1\sigma_2+m\sigma_3)(x-y)(x-z)(y-z)$. Полагая $x=1$, $y=2$, $z=-3$ (так что $\sigma_1=0$), легко находим $m=-1$. Полагая, далее, $x=-2$, $y=3$, $z=6$ (так что $\sigma_2=0$), находим $k=0$. Наконец, полагая, $x=0$, $y=1$, $z=2$, получаем $l=1$. Таким образом,

$$k\sigma_1^3+l\sigma_1\sigma_2+m\sigma_3=\sigma_1\sigma_2-\sigma_3=(x+y)(x+z)(y+z)$$

(см. пример 1° на стр. 65). Таким образом, получаем следующее разложение заданного многочлена:

$$(x+y)(x+z)(y+z)(x-y)(x-z)(y-z).$$

Заметим, что этот же результат можно было бы получить проще: положив $x^2=u$, $y^2=v$, $z^2=w$ и записав заданный многочлен в виде $u^2(v-w)+v^2(w-u)+w^2(u-v)$, воспользоваться затем разложением последнего антисимметрического многочлена на множители.

14) Рассматриваемый антисимметрический многочлен (пятой степени) должен иметь вид $(k\sigma_1^2+l\sigma_2)(a-b)(a-c)(b-c)$. Полагая $a=-1$, $b=0$, $c=1$ и затем $a=0$, $b=1$, $c=2$, находим $l=0$, $k=1$. Таким образом, мы получаем следующее разложение заданного многочлена:

$$(a+b+c)^2(a-b)(a-c)(b-c).$$

15—16) Многочлен делится на $(x-y)(x-z)(y-z)$, так как он является антисимметрическим.

17) Положим $u=(y-z)\sqrt[3]{1-x^3}$, $v=(z-x)\sqrt[3]{1-y^3}$, $w=(x-y)\sqrt[3]{1-z^3}$, так что заданное соотношение имеет вид $\sigma_1=u+w+v=0$. Так как выражение $s_3-3\sigma_3$ делится на σ_1 (ср. стр. 76), то имеет место также соотношение $s_3-3\sigma_3=0$ (этим мы частично избавляемся от кубических иррациональностей), т. е.

$$(y-z)^3(1-x^3)+(z-x)^3(1-y^3)+(x-y)^3(1-z^3)=$$
$$=3(y-z)(z-x)(x-y)\sqrt[3]{(1-x^3)(1-y^3)(1-z^3)}.$$

Многочлен, стоящий в левой части соотношения, антисимметричен. Запишем его в виде

$$((y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3)-((y-z)^3x^3+(z-x)^3y^3+(x-y)^3z^3).$$

Выражение, стоящее в первой скобке, равно $-3(x-y)(x-z)(y-z)$, т. е. равно $-3T(x,y,z)$. Выражение во второй скобке имеет вид

$$(y-z)^3x^3+(z-x)^3y^3+(x-y)^3z^3=(k\sigma_1^3+l\sigma_1\sigma_2+m\sigma_3)(x-y)(x-z)(y-z).$$

Определяя коэффициенты k, l, m, как в упражнении 13), найдём: $k=l=0$, $m=-3$. Таким образом, многочлен, стоящий во второй скобке, равен $-3\sigma_3\cdot T(x,y,z)$. В результате написанное равенство принимает вид

$$-3T(x,y,z)+3\sigma_3T(x,y,z)=-3T(x,y,z)\sqrt[3]{(1-x^3)(1-y^3)(1-z^3)}.$$

Так как по условию все числа x, y, z различны, то $T(x, y, z) \neq 0$, и мы можем обе части равенства сократить на $3T(x, y, z)$. Получим:

$$1 - xyz = \sqrt[3]{(1-x^3)(1-y^3)(1-z^3)}.$$

Остаётся возвести обе части этого равенства в куб.

К стр. 98.

1) Преобразуем первую скобку:

$$\frac{a^2}{b-c} + \frac{b^2}{c-a} + \frac{c^2}{a-b} = \frac{a^2(c-a)(a-b) + b^2(b-c)(a-b) + c^2(b-c)(c-a)}{(b-c)(c-a)(a-b)}.$$

В числителе правой части стоит с и м м е т р и ч е с к и й многочлен четвёртой степени, который, следовательно, должен иметь вид $k\sigma_1^4 + l\sigma_1^2\sigma_2 + m\sigma_1\sigma_3 + n\sigma_2^2$. Поскольку в условии указано, что $\sigma_1 = 0$, то числитель оказывается равным $n\sigma_2^2$, и нам нужно лишь найти коэффициент n. Положим для этого в числителе правой части $a = -1$, $b = 0$, $c = 1$ (так что, действительно, $\sigma_1 = 0$). Числитель правой части принимает при этих условиях значение -4, а так как $\sigma_2 = ab + ac + bc = -1$, то мы получаем $-4 = n(-1)^2$, откуда $n = -4$. Итак, первая скобка при $\sigma_1 = 0$ принимает значение $\dfrac{-4\sigma_2^2}{-T(a, b, c)}$.

Вторая скобка имеет вид

$$\frac{b^2c^2(b-c) + a^2c^2(c-a) + a^2b^2(a-b)}{a^2b^2c^2} = \frac{T(a, b, c) \cdot (k_1\sigma_1^2 + l_1\sigma_2)}{\sigma_3^2}.$$

Полагая в числителе $a = -1$, $b = 0$, $c = 1$, находим $l_1 = 1$. Так как $\sigma_1 = 0$, то, следовательно, вторая скобка принимает значение $\dfrac{T(a, b, c) \cdot \sigma_2}{\sigma_3^2}$. Следовательно, при $\sigma_1 = 0$ левая часть принимает значение $\dfrac{4\sigma_2^3}{\sigma_2^3}$. Без труда проверяется, что и правая часть имеет то же значение.

2) Указанное выражение равно нулю (см. пример 2° на стр. 98).

3) В числителе и знаменателе стоят антисимметрические многочлены. Поэтому рассматриваемая дробь имеет вид

$$\frac{T(x, y, z) \cdot (k\sigma_1^2 + l\sigma_2)}{T(x, y, z(\cdot m\sigma_1}.$$

Полагая в числителе $x = -1$, $y = 0$, $z = 1$; затем $x = 0$, $y = 1$, $z = 2$, получим $l = 1$, $k = 0$. Аналогично имеем $m = 1$ (см. решение упражнения 6) на стр. 222). Подставляя эти значения коэффициентов, находим, что заданная дробь равна

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{xy + xz + yz}{x + y + z}.$$

4) Знаменатель имеет вид $-3T(a, b, c) = 3(a-b)(b-c)(c-a)$ (см. пример 1° на стр. 95). Из тех же соображений получаем, что числитель имеет значение

$-3T(a^2, b^2, c^2) = 3(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)$. Таким образом, заданная дробь имеет значение

$$\frac{3(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}{3(a-b)(b-c)(c-a)} = (a+b)(b+c)(c+a).$$

5) Числитель имеет значение $(x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz)(x-y)(x-z)(y-z)$ (см. решение упражнения 11) на стр. 222). Знаменатель, очевидно, равен $2(x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz)$. Таким образом, заданная дробь принимает после сокращения значение $\frac{(x-y)(x-z)(y-z)}{2}$.

6) Числитель дроби равен $(x+y+z)(x-y)(x-z)(y-z)$ (см. решение упражнения 6) на стр. 222). Знаменатель, как легко видеть, равен $(x-y)(x-z)(y-z)$. Таким образом, после сокращения заданная дробь оказывается равной $x+y+z$.

7) Числитель (см. решение упражнения 13) на стр. 223) имеет значение $(x+y)(x+z)(y+z)(x-y)(x-z)(y-z)$. Знаменатель равен $(x-y)(x-z)(y-z)$. Таким образом, заданная дробь оказывается равной $(x+y)(x+z)(y+z)$.

8) Приводят к общему знаменателю, получаем:

$$\frac{bc(b-c)+ac(c-a)+ab(a-b)}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}.$$

Числитель равен $(a-b)(a-c)(b-c)$ (см. решение упражнения 4) на стр. 222). Следовательно, заданное выражение оказывается равным $\frac{1}{abc}$.

9) Приводя к общему знаменателю, получаем:

$$\frac{b^2c^2(b-c)+a^2c^2(c-a)+a^2b^2(a-b)}{a^2b^2c^2(a-b)(a-c)(b-c)}.$$

Числитель равен $(k\sigma_1^2+l\sigma_2)(a-b)(a-c)(b-c)$, причём $l=1$ (см. решение упражнения 1) на стр. 224), а $k=0$ (это легко получается, если положить $a=0$, $b=1$, $c=2$). Таким образом, заданное выражение оказывается равным $\frac{\sigma_2}{a^2b^2c^2} = \frac{ab+ac+bc}{a^2b^2c^2}$.

10) Приводя к общему знаменателю, получаем:

$$\frac{a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}.$$

Числитель равен $(a+b+c)(a-b)(a-c)(b-c)$ (см. решение упражнения 6) на стр. 222). Таким образом, заданное выражение оказывается равным $a+b+c$.

11) Приводя к общему знаменателю, получаем:

$$\frac{a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}.$$

Числитель равен $(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)(a-b)(a-c)(b-c)$ (см. решение упражнения 11) на стр. 222). Таким образом, заданное выражение оказывается равным $a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc$.

12) Приводя к общему знаменателю получаем:

$$\frac{a^2(a+b)(a+c)(b-c)+b^2(b+c)(b+a)(c-a)+c^2(c+a)(c+b)(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}.$$

Числитель равен $(a+b+c)^2(a-b)(a-c)(b-c)$ (см. решение упражнения 12) на ср. 222). Таким образом, заданное выражение оказывается равным $(a+b+c)^2$.

13) Производя приведение к общему знаменателю (и в числителе и в знаменателе заданной дроби), получаем:

$$\frac{bc(b^2-c^2)+ac(c^2-a^2)+ab(a^2-b^2)}{bc(b-c)+ac(c-a)+ab(a-b)}.$$

Согласно решению примера 2° на стр. 95 и решение упражнения 4) на стр. 222, эта дробь оказывается равной

$$\frac{(a+b+c)(a-b)(a-c)(b-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=a+b+c.$$

14) Приводя к общему знаменателю, получаем:

$$\frac{yz(y-z)+xz(z-x)+xy(x-y)}{xyz}\cdot\frac{x(x-y)(x-z)+y(y-x)(y-z)+z(z-x)(z-y)}{(x-y)(x-z)(y-z)}.$$

Числитель первой дроби равен $(x-y)(x-z)(y-z)$. Числитель второй дроби представляет собой симметрический многочлен третьей степени; следовательно, он должен иметь вид $k\sigma_1^3+l\sigma_1\sigma_2+m\sigma_3$. Коэффициенты k и l нам не нужны (так как по условию $\sigma_1=0$). Для нахождения коэффициента m положим $x=1$, $y=2$, $z=-3$ (так что $\sigma_1=x+y+z=0$). Тогда равенство

$$x(x-y)(x-z)+y(y-x)(y-z)+z(z-x)(z-y)=k\sigma_1^3+l\sigma_1\sigma_2+m\sigma_3$$

примет вид $-54=-6m$, откуда $m=9$. Итак, при $x+y+z=0$ заданное выражение оказывается равным

$$\frac{(x-y)(x-z)(y-z)}{xyz}\cdot\frac{9\sigma_3}{(x-y)(x-z)(y-z)}=\frac{9xyz}{xyz}=9.$$

Можно предложить и другое решение. Так как числитель первой дроби есть антисимметрический многочлен степени 3, то он имеет вида $k(x-y)(x-z)(y-z)$. Так как, далее, числитель второй дроби является симметрическим многочленом степени 3, то он имеет вид $k\sigma_1^3+l\sigma_1\sigma_2+m\sigma_3$ или, при $\sigma_1=0$, вид $m\sigma_3$. Следовательно, все выражения, содержащие неизвестные, сокращаются, и заданное выражение представляет собой при $x+y+z=0$ некоторое ч и с л о. Остаётся подставить в исходное выражение любые значения x, y, z, удовлетворяющие условию $x+y+z=0$ (например, $x=1$, $y=2$, $z=-3$), и полученное число даст требуемый ответ.

15) Заданная система переписывается в виде

$$\begin{cases} (x+y+z)(x-y)(x-z)(y-z)=-12, \\ (xy+xz+yz)(x-y)(x-z)(y-z)=-22, \\ -3(x-y)(x-z)(y-z)=6 \end{cases}$$

(см. примеры 1°—3° на стр. 224—96). Из третьего уравнения находим:

$$(x-y)(x-z)(y-z)=-2, \qquad (*)$$

Подставляя это значение в первое и второе уравнения, получаем:

$$\begin{cases} \sigma_1=x+y+z=6, \\ \sigma_2=xy+xz+yz=11. \end{cases}$$

Последние три соотношения представляют собой систему уравнений, решённую в примере 3° на стр. 60.

К стр. 103.

1) Указанный многочлен имеет вид $\sigma_1^3 - s_3 = 3\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3$ и потому на симметричные множители не разлагается. Следовательно, остаётся возможность разложить его на три множителя первой степени, причём эти множители должны быть симметричными относительно двух переменных. Иначе говоря, разложение надо искать в виде

$$(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = (ka+kb+lc)(ka+lb+kc)(la+kb+kc), \qquad (*)$$

где k, l — искомые коэффициенты. Полагая в равенстве (*) $a=b=c=1$, получаем $24=(2k+l)^3$, откуда $2k+l=2\sqrt[3]{3}$. Далее, при $a=b=0$, $c=1$ получаем $k^2l=0$, т. е. одно из чисел k, l равно нулю. Наконец, при $a=1$, $b=1$, $c=0$ находим $6=2k(k+l)^2$, откуда видно, что $k \neq 0$. Следовательно, $l=0$, $k=\sqrt[3]{3}$. Мы получаем, таким образом, разложение

$$(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = (\sqrt[3]{3}a+\sqrt[3]{3}b)(\sqrt[3]{3}a+\sqrt[3]{3}c)(\sqrt[3]{3}b+\sqrt[3]{3}c).$$

Если теперь из каждой скобки вынести $\sqrt[3]{3}$, то мы получим:

$$(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a+b)(a+c)(b+c).$$

Проверка показывает правильность полученного разложения.

Заметим, что это разложение нам было известно и раньше, поскольку

$$(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3 = 3(\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3) = 3(a+b)(a+c)(b+c)$$

(см. пример 1° на стр. 65); однако там мы использовали заранее вычисленное выражение произведения $(a+b)(a+c)(b+c)$ через σ_1, σ_2, σ_3,в то время как здесь это разложение получено непосредственно.

2) Прежде всего попытаемся найти разложение на симметричные множители:

$$\begin{aligned}(x+y+z)^5 - x^5 - y^5 - z^5 &= \sigma_1^5 - s_5 = 5\sigma_1^3\sigma_2 - 5\sigma_1\sigma_2^2 - 5\sigma_1^2\sigma_3 + 5\sigma_2\sigma_3 = \\ &= (5\sigma_1^3\sigma_2 - 5\sigma_1^2\sigma_3) - (5\sigma_1\sigma_2^2 - 5\sigma_2\sigma_3) = 5(\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_1^2 - \sigma_2).\end{aligned}$$

Вспомнив теперь разложение на множители многочлена $\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3$, обсуждавшееся в предыдущем примере, получаем

$$(x+y+z)^5 - x^5 - y^5 - z^5 = 5(x+y)(x+z)(y+z)(x^2+y^2+z^2+zy+xz+yz).$$

3) Приводя к общему знаменателю получаем:

$$\frac{bc(b+c)+ac(c+a)+ab(a+b)+2abc}{(a+b)(a+c)(b+c)}.$$

Числитель имеет вид

$$O(a^2b) + 2\sigma_3 = (\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3) + 2\sigma_3 = \sigma_1\sigma_2 - \sigma_3 = (a+b)(a+c)(b+c).$$

Таким образом, данное выражение равно единице.

4) Освобождаясь от знаменателей и перенося все члены в левую часть, получаем,

$$a(b^2+c^2-a^2) + b(c^2+a^2-b^2) + c(a^2+b^2-c^2) - 2abc = 0,$$

или

$$O(a^2b) - s_3 - 2\sigma_3 = 0,$$

или

$$4\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1^3 - 8\sigma_3 = 0. \qquad (*)$$

Ясно, что этот многочлен на симметричные множители не разлагается. Остаётся возможность разложить его на множители первой степени, симметричные относительно двух переменных:

$$4\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1^3 - 8\sigma_3 = (ka + kb + lc)(ka + lb + kc)(la + kb + kc).$$

Полагая $a = b = c = 1$ (так что $\sigma_1 = \sigma_2 = 3$, $\sigma_3 = 1$), получаем $1 = (2k + l)^3$, откуда $2k + l = 1$. Далее, при $a = b = 0$, $c = 1$ (т. е. $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) получаем $-1 = k^2 l$. Наконец, при $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$ (т. е. $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$, $\sigma_3 = 0$) находим $2k(k + l)^2 = 0$. Так как $k \neq 0$ (ибо $k^2 l = -1$), то $k + l = 0$. Теперь из системы

$$\begin{cases} 2k + l = 1, \\ \;\; k + l = 0 \end{cases}$$

легко находим $k = 1$, $l = -1$. Мы получаем, таким образом, разложение

$$4\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1^3 - 8\sigma_3 = (a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c).$$

правильность которого непосредственно проверяется. В силу равенства (*), имеем теперь:

$$(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c) = 0,$$

т. е. какое-либо из чисел $a + b - c$, $a - b + c$, $-a + b + c$ должно обращаться в нуль. Пусть для определённости $a + b - c = 0$, т. е. $c = a + b$. Тогда

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + (a + b)^2 - a^2}{2b(a + b)} = \frac{2b^2 + 2ab}{2b^2 + 2ab} = 1,$$
$$\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{(a + b)^2 + a^2 - b^2}{2a(a + b)} = \frac{2a^2 + 2ab}{2a^2 + 2ab} = 1,$$
$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{a^2 + b^2 - (a + b)^2}{2ab} = -\frac{2ab}{2ab} = -1.$$

5) Это утверждение непосредственно вытекает из результата предыдущей задачи.

К стр. 110.

1) Имеем:

$$(a + b + c + d)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - ac - ad - bc - bd - cd) =$$
$$= \sigma_1(s_2 - \sigma_2) = \sigma_1(\sigma_1^2 - 3\sigma_2) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = (\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3) - 3\sigma_3 =$$
$$= s_3 - 3\sigma_3 = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 - 3(abc + abd + acd + bcd).$$

2) При $\sigma_1 = a + b + c + d = 0$ имеем:

$$(a^3 + b^3 + c^3 + d^3)^2 = s_3^2 = (\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3)^2 = (3\sigma_3)^2 = 9\sigma_3^2 = 9(bcd + acd + abd + abc)^2.$$

3) При $\sigma_1 = a + b + c + d = 0$ левая часть имеет значение

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = s_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4 = 2\sigma_2^2 - 4\sigma_4.$$

Упростим теперь правую часть:

$$2(ab-cd)^2+2(ac-bd)^2+2(ad-bc)^2+4abcd=$$

$$=2(O(a^2b^2)-6\sigma_4)+4\sigma_4=2\cdot O(a^2b^2)-8\sigma_4=2\cdot\frac{1}{2}(s_2^2-s_4)-8\sigma_4=s_2^2-s_4-8\sigma_4=$$

$$=(\sigma_1^2-2\sigma_2)^2-(\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3-4\sigma_4)-8\sigma_4=$$

$$=(-2\sigma_2)^2-(2\sigma_2^2-4\sigma_4)-8\sigma_4=2\sigma_2^2-4\sigma_4.$$

4) Если раскрыть скобки, то в полученную алгебраическую сумму член x_i^2 будет входить $n-1$ раз; удвоенные же произведения составят $-2\sigma_2$. Таким образом:

$$\sum_{i<j}(x_i-y_j)^2=(n-1)s_2-2\sigma_2=(n-1)(\sigma_1^2-2\sigma_2)-2\sigma_2=(n-1)\sigma_1^2-2n\sigma_2.$$

5) Из предыдущего упражнения непосредственно следует, что $(n-1)\sigma_1^2-2n\sigma_2\geqslant 0$, что и требуется.

6) Доказываемое неравенство имеет вид $s_2\geqslant\frac{1}{n}\sigma_1^2$, т. е. $\sigma_1^2-2\sigma_2\geqslant\frac{1}{n}\sigma_1^2$; оно непосредственно вытекает из неравенства упражнения 5).

7) Положим $\sqrt{a_i}=x_i$. Тогда доказываемое неравенство примет вид

$$\sum_{i<j}x_ix_j\leqslant\frac{n-1}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2,$$

или $\sigma_2\leqslant\frac{n-1}{2}s_2$, или, наконец, $\sigma_2\leqslant\frac{n-1}{2}(\sigma_1^2-2\sigma_2)$. Это непосредственно вытекает из неравенства упражнения 5).

8) Это неравенство непосредственно вытекает из неравенства упражнения 5).

9) Имеем:

$$x^3+y^3+z^3+t^3-3xyz-3xyt-3xzt-3yzt=$$

$$=s_3-3\sigma_3=(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3)-3\sigma_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2=\sigma_1(\sigma_1^2-3\sigma_2)=\sigma_1(s_2-\sigma_2)=$$

$$=(x+y+z+t)(x^2+y^2+z^2+t^2-xy-xz-xt-yz-yt-zt).$$

10) Положим $t=-x-y-z$. Тогда $\sigma_1=x+y+z+t=0$. Данные многочлены принимают при этом вид

$$(x+y+z)^{2n+1}-x^{2n+1}-y^{2n+1}-z^{2n+1}=-t^{2n+1}-x^{2n+1}-y^{2n+1}-z^{2n+1}=-s_{2n+1};$$

$$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=-t^3-x^3-y^3-z^3=-s_3=-(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3)=-3\sigma_3$$

(поскольку $\sigma_1=0$). Итак, нам остаётся доказать, что (для случая четырёх переменных x, y, z, t) степенная сумма s_{2n+1} делится при $\sigma_1=0$ на σ_3. Так как $\sigma_1=0$, то степенная сумма s_{2n+1} представляется в виде многочлена от σ_2, σ_3, σ_4. Ясно, что каждый член этого многочлена должен содержать множитель σ_3, так как s_{2n+1} имеет (относительно x, y, z, t) нечётную степень, а σ_2 и σ_4 имеют чётные степени. Следовательно, многочлен s_{2n+1} делится на σ_3.

11) Левая часть симметрична относительно a, b, c, x и легко может быть записана в виде

$$(\sigma_1-a)(\sigma_1-b)(\sigma_1-c)(\sigma_1-x)-\sigma_4=0,$$

или

$$(\sigma_1^4 - \sigma_1^4 + \sigma_1^2\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 + \sigma_4) - \sigma_4 = 0.$$

Таким образом, наше уравнение принимает вид $\sigma_1^2\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 = 0$, или

$$\sigma_1(\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3) = 0.$$

Возвращаясь снова к переменным a, b, c, x, получаем уравнение

$$(a+b+c+x)((a+b+c+x)(ab+ac+bc+ax+bx+cx) - (abc+abx+acx+bcx)) = 0.$$

Обозначая через τ_1, τ_2, τ_3 элементарные симметрические многочлены от a, b, c мы, наконец, перепишем заданное уравнение в виде

$$(\tau_1 + x)(\tau_1 x^2 + \tau_1^2 x + (\tau_1\tau_2 - \tau_3)) = 0.$$

Отсюда находим три корня:

$$x_1 = -\tau_1, \quad x_{2,3} = \frac{-\tau_1^2 \pm \sqrt{\tau_1^4 - 4\tau_1(\tau_1\tau_2 - \tau_3)}}{2\tau_1} = -\frac{\tau_1}{2} \pm \frac{1}{2\tau_1}\sqrt{s_4 - 2\tau_2^2}$$

(см. табл. 2 на стр. 47). Возвращаясь к исходным величинам a, b, c, получаем окончательно:

$$x_1 = -(a+b+c), \quad x_{2,3} = -\frac{a+b+c}{2} \pm \frac{1}{2(a+b+c)}\sqrt{a^4+b^4+c^4-2(ab+ac+bc)^2}.$$

12) Воспользуемся неравенством

$$(x_1 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \geqslant n^2$$

(см. упражнение 13) на стр. 31). Приводя к общему знаменателю, получаем $\sigma_1 \cdot \dfrac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n} \geqslant$ $\geqslant n^2$, что и требовалось.

Заметим, что при $n = 2$ доказанное неравенство принимает вид $\sigma_1^2 \geqslant 4\sigma_2$ (ср. теорему на стр. 28), а при $n = 3$ оно принимает вид $\sigma_1\sigma_2 \geqslant 9\sigma_3$ (см. пример 2° на стр. 71).

13) Положим

$$y_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 - x_1}, \quad y_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 - x_2}, \quad \ldots, \quad y_n = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 - x_n}.$$

Тогда

$$\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \ldots + \frac{1}{y_n} = \frac{\sigma_1 - x_1}{\sigma_1} + \frac{\sigma_1 - x_2}{\sigma_1} + \ldots + \frac{\sigma_1 - x_n}{\sigma_1} = n - \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{\sigma_1} = n - 1.$$

Неравенство

$$(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)\left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \ldots + \frac{1}{y_n}\right) \geqslant n^2$$

(см. упражнение 13) на стр. 31) принимает теперь вид

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_1 - x_1} + \frac{\sigma_1}{\sigma_1 - x_2} + \ldots + \frac{\sigma_1}{\sigma_1 - x_n}\right)(n-1) \geqslant n^2,$$

откуда и вытекает требуемое неравенство.

14) Рассмотрим всевозможные слагаемые, входящие в выражение $\sigma_k = O(x_1 x_2 \ldots x_k)$. Число m этих слагаемых равно C_n^k. Обозначим указанные слагаемые через $y_1, y_2, \ldots, y_m$ (где $m = C_n^k$). Тогда, как легко понять, числа $\frac{\sigma_n}{y_1}, \frac{\sigma_n}{y_2}, \ldots, \frac{\sigma_n}{y_n}$ будут как раз представлять собой все слагаемые, входящие в σ_{n-k}, т. е.

$$\frac{\sigma_n}{y_1} + \frac{\sigma_n}{y_2} + \ldots + \frac{\sigma_n}{y_m} = \sigma_{n-k}$$

или

$$\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \ldots + \frac{1}{y_m} = \frac{\sigma_{n-k}}{\sigma_n}.$$

Из равенства

$$(y_1 + y_2 + \ldots + y_m)\left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \ldots + \frac{1}{y_m}\right) \geqslant m^2$$

(см. упражнение 13) на стр. 31) получаем теперь $\sigma_k \frac{\sigma_{n-k}}{\sigma_n} \geqslant \left(C_n^k\right)^2$, что и требовалось.

К стр. 113.

1) Выражая левые части через $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$, получаем следующую вспомогательную систему:

$$\begin{cases} \sigma_1 = a, \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = a^2, \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = a^3, \\ \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4 = a^4. \end{cases}$$

Отсюда последовательно находим:

$$\sigma_1 = a, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 0, \quad \sigma_4 = 0.$$

Таким образом, для решения заданной системы нам достаточно решить уравнение четвёртой степени

$$u^4 - au^3 = 0.$$

Его корни:

$$u_1 = a, \quad u_2 = u_3 = u_4 = 0.$$

Следовательно, исходная система имеет решение

$$x = a, \quad y = z = t = 0$$

и ещё три решения, получающихся из него перестановками. (Точнее, имеется 24 решения, получающихся из решения $x = a$, $y = z = t = 0$ перестановками, но из них различными будут только четыре.)

2) Система имеет вид

$$\begin{cases} s_1 = a, \\ s_2 = a^2, \\ \quad \ldots . \\ s_n = a^n. \end{cases}$$

Докажем, что $\sigma_1 = a$, $\sigma_2 = \sigma_3 = \ldots = \sigma_n = 0$. В самом деле из соотношений

$$\sigma_1 = s_1 = a, \quad s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = a^2$$

следует, что $\sigma_2 = 0$. Пусть уже доказано, что $\sigma_1 = a$, $\sigma_2 = \ldots = \sigma_{k-1} = 0$ $(k \leqslant n)$. Тогда из уравнения $s_k = a^k$ мы имеем (в силу формулы (13) на стр. 107):

$$\sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2} + \sigma_3 s_{k-3} - \ldots + (-1)^{k-2}\sigma_{k-1}s_1 + (-1)^{k-1}k\sigma_k = a^k,$$

или $\sigma_1 s_{k-1} + (-1)^{k-1}k\sigma_k = a^k$, или, наконец, поскольку $s_{k-1} = a^{k-1}$, $\sigma_1 = a$,

$$(-1)^{k-1}k\sigma_k = 0.$$

Таким образом, $\sigma_k = 0$. Приведённая индукция доказывает соотношения

$$\sigma_1 = a, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = \ldots = \sigma_n = 0.$$

Для решения исходной системы мы должны теперь найти корни уравнения n-й степени

$$u^n - au^{n-1} = 0.$$

Они таковы:

$$u_1 = a, \quad u_2 = u_3 = \ldots = u_n = 0.$$

Следовательно, исходная система имеет решение

$$x_1 = a, \quad x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$$

и все решения, получающиеся из него перестановками.

3) Вспомогательная система:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 1, \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 9, \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = 1, \\ \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4 = 33. \end{cases}$$

Её решение:

$$\sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = -4, \quad \sigma_3 = -4, \quad \sigma_4 = 0.$$

Составляем уравнение четвёртой степени

$$u^4 - u^3 - 4u^2 + 4u = 0.$$

Его корни:

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 1, \quad u_3 = 2, \quad u_4 = -2.$$

Таким образом, исходная система имеет 24 решения, получающихся перестановками из решения

$$x = 0, \quad y = 1, \quad z = 2, \quad t = -2.$$

К стр. 117.

1) Так как рассматриваемый симметрический многочлен от x_1, x_2, x_3, x_4 имеет степень 6, то мы должны рассмотреть все неотрицательные целочисленные решения уравнения

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 + 4k_4 = 6;$$

этих решений девять:

k_1	k_2	k_3	k_4	k_1	k_2	k_3	k_4	k_1	k_2	k_3	k_4
6	0	0	0	2	2	0	0	0	3	0	0
4	1	0	0	2	0	0	1	0	1	0	1
3	0	1	0	1	1	1	0	0	0	2	0

Следовательно, должно иметь место разложение

$$(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_1+x_4)(x_2+x_3)(x_2+x_4)(x_3+x_4) =$$
$$= A\sigma_1^6 + B\sigma_1^4\sigma_2 + C\sigma_1^3\sigma_3 + D\sigma_1^2\sigma_2^2 + E\sigma_1^2\sigma_4 + F\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + G\sigma_2^3 + H\sigma_2\sigma_4 + K\sigma_3^2,$$

где A, B, ..., K — неопределённые коэффициенты. Для их нахождения воспользуемся методом частных значений. Именно, будем последовательно подставлять в левую и правую части написанного соотношения значения переменных x_1, x_2, x_3, x_4, указанные в приведённой ниже таблице (для удобства в этой же таблице приведены и соответствующие значения элементарных симметрических многочленов σ_1, σ_2, σ_3, σ_4):

x_1	x_2	x_3	x_4	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	−1	0	−1	0	0
0	0	1	1	2	1	0	0
0	0	1	2	3	2	0	0
0	1	1	−2	0	−3	−2	0
0	−2	3	6	7	0	−36	0
0	1	1	1	3	3	1	0
1	1	−1	−1	0	−2	0	1
1	1	1	1	4	6	4	1

Мы получим в результате следующую систему соотношений:

$$\begin{aligned}
0 &= A,\\
0 &= -G,\\
0 &= 2^6A + 16B + 4D + G,\\
0 &= 3^6A + 162B + 36D + 8G,\\
-4 &= -27G + 4K,\\
-36^2 &= 7^6A - 7^3\cdot 36C + 36^2K,\\
8 &= 3^6A + 3^5B + 3^3C + 3^4D + 9F + 3^3G + K,\\
0 &= -8G - 2H,\\
64 &= 4^6A + 6\cdot 4^4B + 4^4C + 4^2\cdot 6^2D + 16E + 6\cdot 16F + 6^3G + 6H + 16K.
\end{aligned}$$

Из этой системы соотношений легко находим:

$$A=0,\quad G=0,\quad B=0,\quad D=0,\quad K=-1,\quad C=0,\quad F=1,\quad H=0,\quad E=-1.$$

Окончательно получаем:

$$(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_1+x_4)(x_2+x_3)(x_2+x_4)(x_3+x_4)=-\sigma_1^2\sigma_4+\sigma_1\sigma_2\sigma_3-\sigma_3^2.$$

Заметим, что решение этого и следующего примеров заметно упростится, если использовать приём, описанный в пп. 40—41. Рекомендуем читателю вернуться к этим примерам после прочтения указанных пунктов.

2) Проводя дословно те же рассуждения (при тех же частных значениях переменных x_1, x_2, x_3, x_4), что и в предыдущем примере, получаем для предполагаемого равенства

$$(x_1x_2+x_3x_4)(x_1x_3+x_2x_4)(x_1x_4+x_2x_3)=$$
$$=A\sigma_1^6+B\sigma_1^4\sigma_2+C\sigma_1^3\sigma_3+D\sigma_1^2\sigma_2^2+E\sigma_1^2\sigma_4+F\sigma_1\sigma_2\sigma_3+G\sigma_2^3+H\sigma_2\sigma_4+K\sigma_3^2$$

следующую систему соотношений:

$$\begin{aligned}
0&=A,\\
0&=-G,\\
0&=2^6A+16B+4D+G,\\
0&=3^6A+162B+36D+8G,\\
4&=-27G+4K,\\
36^2&=7^6A-7^3\cdot 36C+36^2K,\\
1&=3^6A+3^5B+3^3C+3^4D+9F+3^3G+K,\\
8&=-8G-2H,\\
8&=4^6A+6\cdot 4^4B+4^4C+4^2\cdot 6^2D+16E+6\cdot 16F+6^3G+6H+16K.
\end{aligned}$$

Отсюда легко находим:

$$A=0,\quad G=0,\quad B=0,\quad D=0,\quad K=1,\quad C=0,\quad F=0,\quad H=-4,\quad E=1.$$

Окончательно получаем:

$$(x_1x_2+x_3x_4)(x_1x_3+x_2x_4)(x_1x_4+x_2x_3)=\sigma_1^2\sigma_4-4\sigma_2\sigma_4+\sigma_3^2.$$

3) Правая часть равна $3\sigma_1s_2=3\sigma_1(\sigma_1^2-2\sigma_2)=3\sigma_1^3-6\sigma_1\sigma_2$. Значение левой части определим методом неопределённых коэффициентов.

Имеем:

$$(b+c)^3+(c+a)^3+(a+b)^3+(a+d)^3+(b+d)^3+(c+d)^3=A\sigma_1^3+B\sigma_1\sigma_2+C\sigma_3.$$

Подставим следующие значения:

a	b	c	d	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	2	1	0	0
0	1	1	−2	0	−3	−2	0

Мы получим:

$$\begin{cases} 3 = A, \\ 12 = 8A + 2B, \\ 0 = -2C. \end{cases}$$

Таким образом, $A = 3$, $B = -6$, $C = 0$, т. е. левая часть равна $3\sigma_1^3 - 6\sigma_1\sigma_2$.

4) Правая часть равна $60\sigma_1\sigma_4$. Значение левой части определим методом неопределённых коэффициентов.

Имеем:

$$(a+b+c+d)^5 - ((b+c+d)^5 + (a+c+d)^5 + (a+b+d)^5 + (a+b+c)^5) + \\ + ((b+c)^5 + (a+d)^5 + (a+b)^5 + (c+d)^5 + (b+d)^5 + (a+c)^5) - \\ - (a^5 + b^5 + c^5 + d^5) = A\sigma_1^5 + B\sigma_1^3\sigma_2 + C\sigma_1^2\sigma_3 + D\sigma_1\sigma_2^2 + E\sigma_1\sigma_4 + F\sigma_2\sigma_3.$$

Подставим следующие значения:

a	b	c	d	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	2	1	0	0
0	0	1	2	3	2	0	0
0	−2	3	6	7	0	−36	0
0	1	1	1	3	3	1	0
1	1	1	1	4	6	4	1

Мы получим:

$$\begin{aligned} 0 &= A, \\ 0 &= 32A + 8B + 2D, \\ 0 &= 3^5A + 54B + 12D, \\ 0 &= 7^5A - 36 \cdot 7^2C, \\ 0 &= 3^5A + 3^4B + 3^2C + 3^3D + 3F, \\ 240 &= 4^5A + 6 \cdot 4^3B + 4^3C + 4 \cdot 6^2D + 4E + 24F. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = 0, \quad E = 60, \quad F = 0,$$

т. е. левая часть равна $60\sigma_1\sigma_4$.

К стр. 125.

1) Рассматриваемый многочлен является антисимметрическим и имеет шестую степень. Так как многочлен $T(a, b, c, d)$ также имеет шестую степень, то рассматриваемый многочлен должен быть равен $k \cdot T(a, b, c, d)$, где k — некоторое число. Положим $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$, $d = 3$. Тогда заданный многочлен принимает значение -12, а многочлен $T(a, b, c, d)$ принимает значение 12. Следовательно, $-12 = 12k$, т. е. $k = -1$. Таким образом, рассматриваемый многочлен равен

$$-(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d).$$

2) Дословно повторяя рассуждения предыдущего примера, находим $192 = 12k$, т. е. $k = 16$. Таким образом, рассматриваемый многочлен равен

$$16(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d).$$

3) Так же, как в упражнении 1), находим $12 = 12k$, т. е. $k = 1$. Таким образом, рассматриваемый многочлен равен

$$(x-y)(x-z)(x-t)(y-z)(y-t)(z-t).$$

4) Рассматриваемый многочлен является антисимметрическим и имеет степень 7. Следовательно, он должен быть равен

$$k\sigma_1 T(x, y, z, t).$$

Положим $x = 0$, $y = 1$, $z = 2$, $t = 3$. Тогда заданный многочлен принимает значение -72, а многочлен $\sigma_1 T(x, y, z, t)$ принимает значение 72; следовательно, $-72 = 72k$, т. е. $k = -1$. Таким образом, рассматриваемый многочлен равен

$$-(x+y+z+t)(x-y)(x-z)(x-t)(y-z)(y-t)(z-t).$$

5) Рассматриваемый многочлен является антисимметрическим и имеет степень 8. Следовательно, он должен быть равен

$$(k\sigma_1^2 + l\sigma_2)T(x, y, z, t).$$

Для нахождения коэффициентов k, l положим сначала $x = 0$, $y = 1$, $z = 2$, $t = 3$, а затем $x = -1$, $y = 0$, $z = 1$, $t = 2$. Мы получим два соотношения:

$$132 = 12(36k + 11l), \quad -12 = 12(4k - l),$$

из которых легко находим $k = 0$, $l = 1$. Таким образом, рассматриваемый многочлен равен

$$(xy + xz + xt + yz + yt + zt)(x-y)(x-z)(x-t)(y-z)(y-t)(z-t).$$

6) Левая часть является антисимметрическим многочленом четвёртой степени. Так как этот многочлен должен делиться на многочлен *шестой* степени $T(x, y, z, t)$, то он равен нулю.

7) Левая часть является антисимметрическим многочленом седьмой степени и, следовательно, представляется в виде

$$k \cdot \sigma_1 \cdot T(a, b, c, d).$$

Для установления требуемого тождества остаётся показать, что $k = 0$, а для этого достаточно проверить, что левая часть обращается в нуль при какой-либо *одной* системе частных значений a, b, c, d, которые попарно различны и удовлетворяют условию $\sigma_1 \neq 0$. Подставим значения $a = -1$, $b = 0$, $c = 1$, $d = 2$. Непосредственная проверка показывает, что левая часть обращается в нуль, чем и завершается доказательство.

8) Приводя к общему знаменателю, мы получаем дробь, числитель которой равен

$$(b-c)(b-d)(c-d) - (a-c)(a-d)(c-d) + (a-b)(a-d)(b-d) - (a-b)(a-c)(b-c).$$

Он представляет собой антисимметрический многочлен третьей степени. Так как этот многочлен должен делиться на многочлен $T(a, b, c, d)$, имеющий шестую степень, то он равен нулю. Итак, данное выражение равно нулю.

9) Приводя к общему знаменателю, получаем дробь, числитель которой представляет собой антисимметрический многочлен четвёртой степени. Поэтому числитель равен нулю, и, значит, исходное выражение также равно нулю.

10) Данное выражение равно нулю (ср. два предыдущих упражнения).

11) Приводя к общему знаменателю, получаем дробь, знаменатель которой равен $T(a, b, c, d)$, а числитель имеет вид

$$a^3(b-c)(b-d)(c-d)-b^3(a-c)(a-d)(c-d)+c^3(a-b)(a-d)(b-d)-d^3(a-b)(a-c)(b-c).$$

Этот многочлен равен $T(a, b, c, d)$ (см. решение упражнения 1) на стр. 235), и, значит, заданное выражение равно 1.

12) Приводя к общему знаменателю, получаем дробь, знаменатель которой равен $T(a, b, c, d)$, а числитель имеет вид

$$a^4(b-c)(b-d)(c-d)-b^4(a-c)(a-d)(c-d)+c^4(a-b)(a-d)(b-d)-d^4(a-b)(a-c)(b-c).$$

Этот многочлен является антисимметрическим и имеет степень 7. Следовательно, он равен $k\sigma_1 \cdot T(a, b, c, d)$, где k — некоторое число. Полагая $a=-1$, $b=0$, $c=1$, $d=2$, легко найдём, что $k=1$. Таким образом, заданное выражение равно $\sigma_1=a+b+c+d$.

13) Приводя к общему знаменателю, получаем дробь, знаменатель которой равен $T(a, b, c, d)$, а числитель имеет вид

$$a^2b^2c^2(a-b)(a-c)(b-c)-a^2b^2d^2(a-b)(a-d)(b-d)+a^2c^2d^2(a-c)(a-d)(c-d)-$$
$$-b^2c^2d^2(b-c)(b-d)(c-d).$$

Этот многочлен является антисимметрическим и имеет степень 9. Следовательно. он равен

$$(k\sigma_1^3+l\sigma_1\sigma_2+m\sigma_3)T(a, b, c, d),$$

где k, l, m — некоторые коэффициенты. Подставим частные значения, указанные в следующей таблице:

a	b	c	d	σ_1	σ_2	σ_3	$T(a, b, c, d)$
−3	0	1	2	0	−7	−6	120
0	1	2	3	6	11	6	12
−1	0	1	2	2	−1	−2	12

Тогда мы получим соотношения:

$$\begin{aligned} -720 &= -720m, \\ 72 &= 12(216k+66l+6m), \\ -24 &= 12(8k-2l-2m). \end{aligned}$$

Из этих соотношений легко находим:

$$m=1, \quad k=l=0.$$

Таким образом, числитель имеет вид

$$\sigma_3 \cdot T(a, b, c, d),$$

т. е. заданное выражение равно $\sigma_3=abc+abd+acd+bcd$.

К стр. 137.

1) Указанный остаток равен значению многочлена при $x = -a$, т. е. равен $(-a)^{2n} + a^{2n} = a^{2n} + a^{2n} = 2a^{2n}$.

2) Многочлен $(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$, как мы знаем, равен $3(x+y)(x+z)(y+z)$ (см. решение упражнения 1) на стр. 227). Поэтому мы должны доказать, что многочлен

$$f(x, y, z) = (x+y+z)^{2n+1} - x^{2n+1} - y^{2n+1} - z^{2n+1}$$

делится на $x+y$, на $x+z$ и на $y+z$. Доказательство совершенно аналогично во всех трёх случаях. Докажем, например, что $f(x, y, z)$ делится на $x+y$. Для этого надо установить, что многочлен $f(x, y, z)$ (рассматриваемый как многочлен от x) обращается в нуль при $x = -y$, т. е. что $f(-y, y, z) = 0$. В самом деле,

$$f(-y, y, z) = (-y+y+z)^{2n+1} - (-y)^{2n+1} - y^{2n+1} - z^{2n+1} = z^{2n+1} + y^{2n+1} - y^{2n+1} - z^{2n+1} = 0.$$

К стр. 140.

1) Свободный член 12 имеет делители 1, −1, 2, −2, 3, −3, 4, −4, 6, −6, 12, −12. Положим $k = 1$ и составим числа $b_j - 1$ (где b_j — выписанные делители). Мы получим числа 0, −2, 1, −3, 2, −4, 3, −5, 5, −7, 11, −13. Так как $f(1) = 24$, а число 24 не делится на 0, 5, −7, 11, −13, то из первоначально выбранных делителей остаются лишь −1, 2, −2, 3, −3, 4. Подстановка показывает, что числа 2 и −3 являются корнями заданного многочлена. По теореме Безу он делится на $(x-2)(x+3)$. Выполнив деление, получим:

$$x^4 - 4x^3 - 13x^2 + 28x + 12 = (x-2)(x+3)(x^2 - 5x - 2).$$

Теперь, решив квадратное уравнение $x^2 - 5x - 2 = 0$, найдём ещё два корня $\dfrac{5 \pm \sqrt{33}}{2}$.

Итак, заданный многочлен имеет корни $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_{3,4} = \dfrac{5}{2} \pm \dfrac{\sqrt{33}}{2}$.

2) Свободный член −12 имеет делители 1, −1, 2, −2, 3, −3, 4, −4, 6, −6, 12, −12. Положим $k = 1$ и составим числа $b_j - 1$. Мы получим числа 0, −2, 1, −3, 2, −4, 3, −5, 5, −7, 11, −13. Так как $f(1) = -24$, а число 24 не делится на 0, 5, −7, 11, −13, то из первоначально выбранных делителей остаются лишь −1, 2, −2, 3, −3, 4. Подстановка показывает, что корнями заданного многочлена являются числа

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -2, \quad x_4 = -3.$$

3) Свободный член 18 имеет делители 1, −1, 2, −2, 3, −3, 6, −6, 9, −9, 18, −18. Положим $k = 2$ и составим числа $b_j - 2$. Мы получим числа −1, −3, 0, −4, 1, −5, 4, −8, 7, −11, 16, −20. Так как $f(2) = -60$, а число 60 не делится на 0, −8, 7, −11, 16, то из первоначально выбранных делителей остаются лишь 1, −1, −2, 3, −3, 6, −18. Проверка показывает, что корнями заданного многочлена являются числа $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -2$, $x_4 = 3$, $x_5 = -3$.

4) Свободный член −6 имеет делители: 1, −1, 2, −2, 3, −3, 6, −6. Положим $k = 1$ и составим числа $b_j - 1$: 0, −2, 1, −3, 2, −4, 5, −7. Так как $f(1) = -24$, а число 24 не делится на 0, 5, −7, то из первоначально выбранных делителей остаются −1, 2, −2, 3, −3. Положим ещё $k = -2$ и составим числа $b_j + 2$: 1, 4, 0, 5, −1. Так как $f(-2) = 12$, а число 12 не делится на 0 и 5, то остаются лишь делители −1, 2, −3. Проверка показывает, что все они являются корнями данного многочлена. По теореме Безу он делится на $(x+1)(x-2)(x+3)$. Выполнив деление, получим:

$$x^5+3x^4-2x^3-9x^2-11x-6=(x+1)(x-2)(x+3)(x^2+x+1).$$

Решив квадратное уравнение $x^2+x+1=0$, получаем ещё два корня $\dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$. Итак, заданный многочлен имеет корни $x_1=-1$, $x_2=2$, $x_3=-3$, $x_{4,5}=-\dfrac{1}{2}\pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

5) Свободный член 6 имеет делители 1, −1, 2, −2, 3, −3, 6, 6. Проверка показывает, что числа 1, −1, 2, −3, являются корнями многочлена. Следовательно, этот многочлен делится на $(x-1)(x+1)(x-2)(x+3)$:

$$x^6-x^5-8x^4+14x^3+x^2-13x+6=(x-1)(x+1)(x-2)(x+3)(x^2-2x+1).$$

Отсюда ясны ещё два корня: 1 и 1. Таким образом, заданный многочлен имеет следующие корни: $x_1=x_2=x_3=1$, $x_4=-1$, $x_5=2$, $x_6=-3$.

6) Умножив заданный многочлен на 4 и, положив $y=2x$, мы получим многочлен $y^4+4y^3-y^2-16y-12$. Корнями этого многочлена являются числа: $y_1=-1$, $y_2=2$, $y_3=-2$, $y_4=-3$ (см. решение упражнения 2)). Так как $x=\dfrac{y}{2}$, то корнями исходного многочлена являются числа $x_1=-\dfrac{1}{2}$, $x_2=1$, $x_3=-1$, $x_4=-\dfrac{3}{2}$.

К стр. 141.

1) Свободный член 65 имеет положительные целые делители 1, 5, 13, 65. Эти делители следующим образом разлагаются на сумму двух квадратов

$$1=0^2+1^2;\qquad 13=2^2+3^2=3^2+2^2;$$
$$5=2^2+1^2=1^2+2^2;\qquad 65=1^2+8^2=4^2+7^2=7^2+4^2=8^2+1^2.$$

Значит, рассматриваемое уравнение может иметь лишь следующие целые корни (как действительные, так и комплексные): 1; -1; 5; -5; 13; -13; 65; -65; i; $-i$; $2+i$; $2-i$; $-2+i$; $-2-i$; $1+2i$; $1-2i$; $-1+2i$; $-1-2i$; $2+3i$; $2-3i$; $-2+3i$; $-2-3i$; $3+2i$; $3-2i$; $-3+2i$; $-3-2i$; $1+8i$; $1-8i$; $-1+8i$; $-1-8i$; $4+7i$; $4-7i$; $-4+7i$; $-4-7i$; $7+4i$; $7-4i$; $-7+4i$; $-7-4i$; $8+i$; $8-i$; $-8+i$; $-8-i$.

Чтобы отсеять часть из этих 42 чисел, положим $k=1$. Так как $f(1)=40$, то надо оставить лишь те действительные корни α, для которых $\alpha-1$ является делителем числа 40, и те комплексные корни $\alpha+\beta i$, для которых $(\alpha-1)^2+\beta^2$ является делителем числа 40. Остаются следующие возможные корни: -1; 5; i; $-i$; $2+i$; $2-i$; $-2+i$; $-2-i$; $1+2i$; $1-2i$; $-1+2i$; $-1-2i$; $2+3i$; $2-3i$; $3+2i$; $3-2i$; $-3+2i$; $-3-2i$.

Положим теперь $k=2$. Так как $f(2)=29$, то останутся лишь следующие возможные корни: $2+i$; $2-i$; $-3+2i$; $-3-2i$. Эти числа, как показывает проверка, и являются корнями рассматриваемого уравнения.

2) Возможные корни — те же, что и в предыдущем упражнении. Так как $f(2)=$ $=625$, то остаются лишь следующие возможные корни: 1; i; $-i$; $2+i$; $2-i$; $1+2i$; $1-2i$; $-2+3i$; $-2-3i$; $3+2i$; $3-2i$.

Положим далее $k=-2$. Так как $f(-2)=585$, то остаются возможные корни: 1; i; $-i$; $1+2i$; $1-2i$; $-2+3i$; $-2-3i$. Единица корнем не является, а остальные шесть комплексных чисел являются корнями рассматриваемого многочлена.

3) Положительные делители числа 60: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60. Эти делители следующим образом разлагаются на сумму двух квадратов:

$$1 = 0^2 + 1^2; \qquad 5 = 1^2 + 2^2 = 2^2 + 1^2;$$
$$2 = 1^2 + 1^2; \qquad 10 = 1^2 + 3^2 = 3^2 + 1^2;$$
$$4 = 0^2 + 2^2; \qquad 20 = 2^2 + 4^2 = 4^2 + 2^2.$$

Поэтому рассматриваемое уравнение может иметь следующие целые корни: 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4; 5; -5; 6; -6; 10; -10; 12; -12; 15; -15; 20; -20; 30; -30; 60; -60; $+i$; $-i$; $1+i$; $1-i$; $-1+i$; $-1-i$; $2i$; $-2i$; $1+2i$; $1-2i$; $-1+2i$; $-1-2i$; $2+i$; $2-i$; $-2+i$; $-2-i$; $1+3i$; $1-3i$; $-1+3i$; $-1-3i$; $3+i$; $3-i$; $-3+i$; $-3-i$; $2+4i$; $2-4i$; $-2+4i$; $-2-4i$; $4+2i$; $4-2i$; $-4+2i$; $-4-2i$.

Учитывая, что $f(1) = -30$ и $f(-1) = -68$, оставляем лишь следующие возможные корни: -2; 3; -5; $-i$; $-1+i$; $-1-i$; $-2+i$; $-2-i$; $3+i$; $3-i$. Далее положим $k = 2$. Так как $f(2) = -8$, то остаются лишь -2; 3; $3+i$; $3-i$. Эти числа, как показывает проверка, и являются корнями рассматриваемого многочлена.

4) Вычисляя $f(1), f(-1), f(2), f(-2)$, находим $f(1) = f(-1) = f(-2) = 0$, т. е. числа 1, -1, -2 являются корнями многочлена. Поэтому здесь проще всего воспользоваться тем, что заданный многочлен делится на $(x-1)(x+1)(x+2)$. Производя деление, получаем:

$$x^5 + 5x^3 + 20x^2 - 6x - 20 = (x-1)(x+1)(x+2)(x^2 - 2x + 10).$$

Таким образом, ещё два корня получим, решая квадратное уравнение $x^2 - 2x + 10 = 0$. Окончательно, имеем следующие пять корней заданного многочлена: 1, -1; -2; $1+3i$; $1-3i$.

5) Положительные делители числа -80: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80. Они следующим образом разлагаются на сумму двух квадратов:

$$1 = 0^2 + 1^2; \qquad 10 = 1^2 + 3^2 = 3^2 + 1^2;$$
$$2 = 1^2 + 1^2; \qquad 16 = 0^2 + 4^2;$$
$$4 = 0^2 + 2^2; \qquad 20 = 2^2 + 4^2 = 4^2 + 2^2;$$
$$5 = 1^2 + 2^2 = 2^2 + 1^2; \qquad 40 = 2^2 + 6^2 = 6^2 + 2^2;$$
$$8 = 2^2 + 2^2; \qquad 80 = 4^2 + 8^2 = 8^2 + 4^2.$$

Поэтому имеем следующие возможные корни: ±1; ±2; ±4; ±5; ±8; ±10; ±16; ±20; ±40; ±80; $\pm i$; $1\pm i$; $-1\pm i$; $\pm2i$; $1\pm2i$; $-1\pm2i$; $2\pm i$; $-2\pm i$; $2\pm2i$; $-2\pm2i$; $1\pm3i$; $-1\pm3i$; $3\pm i$; $-3\pm i$; $\pm4i$; $2\pm4i$; $-2\pm4i$; $4\pm2i$; $-4\pm2i$; $2\pm6i$; $-2\pm6i$; $6\pm2i$; $-6\pm2i$; $4\pm8i$; $-4\pm8i$; $8\pm4i$; $-8\pm4i$.

Учитывая, что $f(3) = 250$, оставляем лишь следующие из них: 1; ±2; 4; 5; 8; $\pm i$; $1\pm i$; $2\pm i$; $2\pm2i$; $-1\pm3i$; $3\pm i$; $\pm4i$; $4\pm2i$.

Далее, поскольку $f(-1) = -234$, из них остаются следующие: 1; ±2; 5; 8; $\pm i$; $2\pm2i$; $-1\pm3i$. Соотношения $f(2) = 72$, $f(-2) = -600$ уменьшают число возможных корней до шести: 1; 8; $2\pm2i$; $-1\pm3i$. Число 8 не является корнем многочлена, поскольку при $x = 8$ все члены, кроме последнего, делятся на 32. Остаются пять чисел 1; $2\pm2i$; $-1\pm3i$. Они и являются корнями данного многочлена.