

Министерство образования Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

М.Ю. Баландин Э.П. Шурина

ВЕКТОРНЫЙ МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Утверждено Редакционно-издательским советом в
качестве учебного пособия для студентов факультета
прикладной математики (направление 510200,
специализации магистерской подготовки 510202, 510204)

Новосибирск
2001

УДК 519.61 (075.8)
Б201

Б201 **Баландин М. Ю., Шурина Э. П.** Векторный метод конечных элементов: Учеб. пособие. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2001. — 69 стр., илл.

В учебном пособии на примере задач электромагнетизма рассматривается векторный метод конечных элементов (МКЭ) для двумерного случая. Описаны элементы первого порядка на прямоугольниках и треугольниках, дан обзор необходимых сведений из функционального анализа и теории узлового МКЭ.

Пособие предназначено для студентов старших курсов специальности “Прикладная математика”, магистрантов и аспирантов, активно применяющих численные методы математической физики.

Рецензенты: *Лаевский Ю.М.*, д-р.физ.-мат.наук, профессор
Соловейчик Ю.Г., д-р.техн.наук, профессор

Работа подготовлена на кафедре прикладной математики
в системе $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$; иллюстрации выполнены в XaraX.

© Новосибирский государственный
технический университет, 2001 г.

Введение

За последние четыре десятилетия метод конечных элементов стал одним из наиболее активно используемых методов решения краевых задач математической физики. Теоретические основы и анализ результатов его применения при решении конкретных прикладных задач широко освещены в отечественных и зарубежных публикациях. Однако для решения проблем, возникающих при моделировании процессов, описываемых векторными переменными (например, электромагнитные поля, задачи газо- и гидродинамики), до сих пор не существует такого единообразия методов и подходов, как при решении скалярных задач.

В 1980 году появилась статья Ж.С.Неделека [13], в которой были представлены новые семейства неконформных конечных элементов в \mathbb{R}^3 ; эти два семейства (конечные элементы на кубах и тетраэдрах) являются конформными в пространствах¹ $\mathbb{H}(\text{rot}, \Omega)$ и $\mathbb{H}(\text{div}, \Omega)$, что позволило предложить использование этих элементов для аппроксимации уравнений Максвелла и уравнений эластичности. В области электромагнетизма эти векторные конечные элементы наиболее широко исследовались в работах А.Боссавита [11] и Дж.Перуджиа.

В данном учебном пособии впервые в русскоязычной публикации рассматриваются в основном технологические аспекты применения векторных конечных элементов при решении уравнений Максвелла, а именно: вариационные постановки, вычисление локальных матриц на прямоугольниках и треугольниках, ассемблирование глобальных систем линейных алгебраических уравнений.

В пособии приведены примеры как для узлового, так и для векторного метода конечных элементов.

Используемые обозначения и соглашения

Области, в которых рассматриваются краевые задачи, будем обозначать Ω , а их границы $\partial\Omega$. Точки, принадлежащие области Ω и ее подобластям, будем обозначать $\bar{x} : \bar{x} \in \Omega$.

Пусть $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ — правая тройка векторов, образующих канонический ортонормальный базис в пространстве \mathbb{R}^3 . Все остальные вектор-

¹Описываемых далее в разд. 1.3.

ные величины условимся обозначать жирным шрифтом прямого начертания с явным указанием их векторной природы: $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{p}}$ и т.д. Компоненты этих векторов будем обозначать теми же буквами, но без надбуквенных значков и с указанием индексов:

$$\vec{\mathbf{a}} = (\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z)^T = \mathbf{a}_x \mathbf{i} + \mathbf{a}_y \mathbf{j} + \mathbf{a}_z \mathbf{k}.$$

Введем в пространстве \mathbb{R}^3 операции скалярного и векторного произведения:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} &= \mathbf{u}_x \mathbf{v}_x + \mathbf{u}_y \mathbf{v}_y + \mathbf{u}_z \mathbf{v}_z; \\ \vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \mathbf{v}_x & \mathbf{v}_y & \mathbf{v}_z \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Определим через них дифференциальные операторы вычисления градиента, дивергенции и ротора²:

$$\text{grad } f = \nabla f; \quad (1)$$

$$\text{div } \vec{\mathbf{F}} = \nabla \cdot \vec{\mathbf{F}}; \quad (2)$$

$$\text{rot } \vec{\mathbf{F}} = \nabla \times \vec{\mathbf{F}}, \quad (3)$$

где $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})^T$ — символический оператор вычисления частных производных (оператор Гамильтона).

Единичный вектор нормали к границам областей и подобластей обозначим символом $\vec{\mathbf{n}}$, указывая при необходимости его направленность внутрь или вовне той или иной области.

Во введенных обозначениях будем записывать интегралы от скалярных функций по множествам в виде

$$\int_{\Omega} f \, d\Omega,$$

а интегралы второго рода от векторных функций по многообразиям — в виде

$$\int_S (\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}) \, dS \quad \text{или} \quad \int_S \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{S}.$$

²В англоязычной литературе для ротора наряду с обозначением $\text{rot } \vec{\mathbf{F}}$ встречается также обозначение $\text{curl } \vec{\mathbf{F}}$.

Матрицы будем обозначать прописными буквами прямого начертания, а их элементы — такими же строчными буквами с указанием индексов:

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}.$$

Основные соотношения, связывающие введенные дифференциальные операторы и интегралы от них, приведены в приложении 1.

1. Некоторые сведения из функционального анализа

В данной главе будут рассмотрены лишь основные теоремы и принципы, лежащие в основе метода конечных элементов. Более подробные обсуждения теории МКЭ приведены в специальных работах, таких как [3, 9, 10].

Предполагается, что читатель знаком с понятиями гильбертова пространства и задачи наилучшего приближения, линейного функционала, билинейной формы и сопряженного пространства, линейного самосопряженного оператора. Гильбертовы пространства будем обозначать буквой \mathbb{H} , вводя при необходимости индексы. По определению, в них могут быть введены скалярные произведения $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{H}}$.

1.1. Теоремы Рисса и Лакса–Мильграма

Важную роль в функциональном анализе играет *теорема Рисса* [4, 5] о представлении линейных функционалов в гильбертовых пространствах:

Теорема Рисса. Пусть $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ — линейный ограниченный функционал, определенный всюду на \mathbb{H} . Тогда в \mathbb{H} существует и единственен элемент $y \in \mathbb{H}$, для которого справедливо представление

$$\forall x \in \mathbb{H} : f(x) = (y, x), \quad (4)$$

причем его норма совпадает с нормой функционала: $\|f\| = \|y\|_{\mathbb{H}}$.

Важнейшим следствием из теоремы Рисса является лежащая в основе теории МКЭ *теорема Лакса–Мильграма*.

Теорема Лакса–Мильграма. Пусть $a(u, v)$ — билинейная форма в гильбертовом пространстве \mathbb{H} , причем для нее выполняются условия ограниченности (5) и эллиптичности (6):

$$\exists r > 0 \quad \forall u, v \in \mathbb{H} : |a(u, v)| \leq r \|u\| \|v\| ; \quad (5)$$

$$\exists s > 0 \quad \forall u \in \mathbb{H} : a(u, u) \geq s \|u\|^2 . \quad (6)$$

Тогда любой линейный ограниченный функционал $f \in \mathbb{H}^*$ единственным образом представим в виде

$$f(v) = a(u, v), \quad u \in \mathbb{H} .$$

Кроме того, существует и единственен такой ограниченный и непрерывно обратимый линейный оператор A , для которого

$$a(u, v) = (Au, v),$$

причем $\|A\| \leq r, \|A^{-1}\| \leq s^{-1}$.

Доказательство. При любом фиксированном u форма $a(u, v)$ представляет собой линейный ограниченный функционал из \mathbb{H}^* . Согласно теореме Рисса, существует и единственен элемент $w_u \in \mathbb{H}$, для которого $a(u, v) = (w_u, v)$. Элемент w_u можно поставить в соответствие каждому $u \in \mathbb{H}$, причем очевидно, что это соответствие будет линейным оператором³: $w_u = Au$.

Область значений этого оператора $R(A)$ будет совпадать со всем пространством \mathbb{H} . Действительно, если это не так, то найдется элемент $q \in \mathbb{H}$ такой, что $q \notin R(A)$. Представим его в виде суммы $q = z + y$, где $y \in R(A)^\perp$; очевидно что $y \neq 0$. Тогда

$$a(y, y) = (Ay, y) = 0 \quad \text{при } y \neq 0,$$

что противоречит (6).

Воспользуемся соотношением (5):

$$\|Au\|^2 = (Au, Au) = a(u, Au) \leq r \|Au\| \|u\| ,$$

откуда следует что $\|Au\| \leq r \|u\|$, т.е. $\|A\| \leq r$. С другой стороны, на основании (6) имеем

$$s \|u\|^2 \leq a(u, u) = (Au, u) \leq \|Au\| \|u\| ,$$

³Это следует из билинейности формы $a(u, v)$.

откуда $\|Au\| \geq s\|u\|$, а следовательно, оператор A является обратимым⁴ и $\|A^{-1}\| \leq s^{-1}$. В силу того что $R(A) = \mathbb{H}$, оператор обратим непрерывно.

Рассмотрим теперь произвольный линейный ограниченный функционал $f \in \mathbb{H}^*$. Согласно теореме Рисса, существует и единственен такой элемент $w \in \mathbb{H}$, что $f(v) = (w, v)$. Далее достаточно взять $u = A^{-1}w$, и тогда

$$f(v) = (w, v) = (Au, v) = a(u, v).$$

Тем самым теорема доказана.

1.2. Методы Галёркина и Ритца

Рассмотрим операторное уравнение

$$Au = f, \tag{7}$$

где $A : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ — линейный оператор и $f \in \mathbb{H}$. Оператор A и пространство \mathbb{H} могут иметь произвольную природу: для конечномерных пространств задача (7) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, для дифференциального оператора в пространстве функций — дифференциальное уравнение или их систему и т.д.

Умножая скалярно обе части на произвольный элемент $v \in \mathbb{H}$, получим новую задачу

$$(Au, v) = (f, v), \quad \forall v \in \mathbb{H}. \tag{8}$$

Очевидно, решение исходной задачи будет и ее решением; задачу (8) называют *слабой формой постановки задачи (7)*.

Согласно теореме Рисса, правая часть (8) представляет собой некоторый линейный ограниченный функционал $f(v) \in \mathbb{H}^*$, а левую часть можно определить как билинейную форму $a(u, v) = (Au, v)$.

Пусть оператор A ограничен и $\|A\| = \alpha$, тогда

$$|a(u, v)| = |(Au, v)| \leq \|Au\| \|v\| \leq \|A\| \|u\| \|v\| = \alpha \|u\| \|v\|.$$

⁴В курсе функционального анализа доказывается теорема [4, 5], утверждающая что A^{-1} существует и ограничен тогда и только тогда, когда $\|Ax\| \geq m\|x\|$, $m > 0$. При этом $\|A^{-1}\| \leq m^{-1}$.

Если, кроме того, потребовать чтобы оператор A был положительно определенным⁵, то

$$a(u, u) = (Au, u) \geq \gamma^2(u, u) = \gamma^2\|u\|^2.$$

Эти два неравенства показывают, что для $a(u, v)$ выполняются условия ограниченности и эллиптичности.

Таким образом, из теоремы Лакса–Мильграма следует, что для ограниченного и положительно определенного оператора A уравнение (7) в слабой форме (8) имеет решение, и притом единственное [3, 10].

Предположим далее, что помимо ограниченности и положительной определенности, оператор A является самосопряженным, и следовательно $(Au, v) = (u, Av)$. Пусть u — это решение задачи (8), а v — произвольный элемент из \mathbb{H} . Рассмотрим форму $a(v - u, v - u)$.

Вследствие эллиптичности (6), эта форма неотрицательна, выпукла и обращается в ноль лишь при $v = u$. Воспользуемся свойствами скалярного произведения:

$$\begin{aligned} a(v - u, v - u) &= (A(v - u), v - u) = (Av, v - u) - (Au, v - u) = \\ &= (Av, v) - (Av, u) - (Au, v) + (Au, u) = \\ &= (Av, v) - 2(Au, v) + (Au, u) = \\ &= (Av, v) - 2(f, v) + (Au, u). \end{aligned}$$

Заметим, что последнее слагаемое в этой сумме является некоторой константой, не зависящей от v .

Итак, при самосопряженности, ограниченности и положительной определенности оператора A решение задачи (7) в слабой форме (8) существует, единственно, и эквивалентно задаче поиска минимума⁶ квадратичного функционала

$$v = \arg \min_{v \in \mathbb{H}} \mathfrak{F}(v), \quad \mathfrak{F}(v) = (Av, v) - 2(f, v). \quad (9)$$

Решение задач (8) и (9) будем искать не во всем пространстве \mathbb{H} (которое может быть и бесконечномерным), а в некотором вложенном в него подпространстве $\mathbb{H}_0 \subset \mathbb{H}$. Соответствующая модификация

⁵Т.е., $(Ax, x) \geq \gamma^2(x, x)$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

⁶Равного $\min_{\mathbb{H}} \mathfrak{F} = -(Au, u)$.

задачи (8) называется *задачей Галёркина*, а задачи (9) — *задачей Рунца*. Потребуем, чтобы подпространство \mathbb{H}_0 было конечномерным.

Пусть в \mathbb{H}_0 выбран базис $\{v_i\}_{i=1}^n$. Представим искомое решение в виде линейной комбинации

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

и подставим его в функционал (9):

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(v) &= \left(A \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right), \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right) - 2 \left(f, \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j (A v_i, v_j) - 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i (f, v_i), \end{aligned} \quad (10)$$

или, в матрично-векторной форме,

$$\mathfrak{F}(v) = \bar{\alpha}^T W \bar{\alpha} - 2 \mathbf{f}^T \bar{\alpha}; \quad (11)$$

$$W_{ij} = (A v_i, v_j), \quad \mathbf{f}_i = (f, v_i).$$

В силу выпуклости функционала \mathfrak{F} для нахождения его минимума достаточно найти стационарную точку:

$$\text{grad } \mathfrak{F}(\bar{\alpha}) = 2W\bar{\alpha} - 2\mathbf{f} = 0,$$

и, таким образом, задача нахождения коэффициентов $\bar{\alpha}$ сводится к решению СЛАУ

$$W\bar{\alpha} = \mathbf{f}. \quad (12)$$

Иногда функционал \mathfrak{F} сразу записывают в виде

$$\mathfrak{F}(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (f, v),$$

так как его домножение на положительное число не влияет на точку минимума.

1.3. Пространства Неделека

В 1980 г. Ж.Неделека ввел в рассмотрение [13] пространства векторных функций, оказавшиеся в ряде случаев удобным выбором для \mathbb{H}_0 (см. предыдущий раздел). Дальнейшее развитие соответствующей теории и привело впоследствии к появлению векторного МКЭ. В данном разделе мы коротко рассмотрим основные положения этой работы для векторных полей в \mathbb{R}^2 .

Пусть $\bar{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$. Обозначим $\mathbb{H}(\Omega)$ гильбертово пространство всевозможных векторных функций $\vec{p}(\bar{x}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, удовлетворяющих условию интегрируемости с квадратом по Лебегу на области Ω :

$$\mathbb{H}(\Omega) = \{ \vec{p} \mid \vec{p} \in L_2(\Omega) \}.$$

Если, кроме того, и $\operatorname{div} \vec{p}$ удовлетворяет этому же условию, то такое пространство будем обозначать $\mathbb{H}(\operatorname{div}, \Omega)$:

$$\mathbb{H}(\operatorname{div}, \Omega) = \{ \vec{p} \mid \vec{p} \in \mathbb{H}(\Omega), \operatorname{div} \vec{p} \in L_2(\Omega) \} \subset \mathbb{H}(\Omega);$$

аналогично вводится пространство $\mathbb{H}(\operatorname{rot}, \Omega)$:

$$\mathbb{H}(\operatorname{rot}, \Omega) = \{ \vec{p} \mid \vec{p} \in \mathbb{H}(\Omega), \operatorname{rot} \vec{p} \in L_2(\Omega) \} \subset \mathbb{H}(\Omega).$$

Далее, пусть $P_n(\Omega)$ — пространство полиномов степени не выше n , определенных на Ω .

Предположим, что $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$, но общие точки этих двух областей лежат лишь на их границах $\partial\Omega_i$. Пусть $\vec{u} \in (C(\Omega_i))^2$. Требуется построить такой интерполянт $\Pi\vec{u} \in P_n$, что $\Pi_{\Omega_i}\vec{u} \in \mathbb{H}(\operatorname{rot}, \Omega_1 \cup \Omega_2)$.

В [13] показано, что необходимым условием, накладываемым на такой интерполянт, является

$$\left(\Pi_{\Omega_1}\vec{u} \mid_{\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2} \right)_\tau = \left(\Pi_{\Omega_2}\vec{u} \mid_{\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2} \right)_\tau, \quad (13)$$

то есть поле $\Pi\vec{u}$ должно иметь непрерывную тангенциальную компоненту на общей части границы областей Ω_1 и Ω_2 ⁷.

Рассмотрим случай $\Pi\vec{u} \in P_1$ и предположим, что области Ω_1 и Ω_2 являются треугольниками с общей стороной. Потребуем, чтобы вдоль

⁷См. разд. 3.2, где аналогичное требование возникает по физическим соображениям.

каждой из сторон каждого треугольника поле $\vec{v} = \text{П}\vec{u}$ имело *постоянную* тангенциальную компоненту, тогда нетрудно обеспечить выполнение равенства (13).

Ж.Неделек показал, что для этого необходимо и достаточно, чтобы поле \vec{v} удовлетворяло условию

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = 0, \quad i, j \in \{1, 2\}. \quad (14)$$

Решая эти уравнения в пространстве P_1 , получаем

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta x_2 \\ \alpha_2 - \beta x_1 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Рассмотрим в качестве примера область Ω , изображенную на рис. 1. Для нее $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ и

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_3 &= (1, 0)^T; & \vec{\tau}_2 &= (0, -1)^T; \\ \vec{\tau}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)^T; & \vec{n}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T. \end{aligned}$$

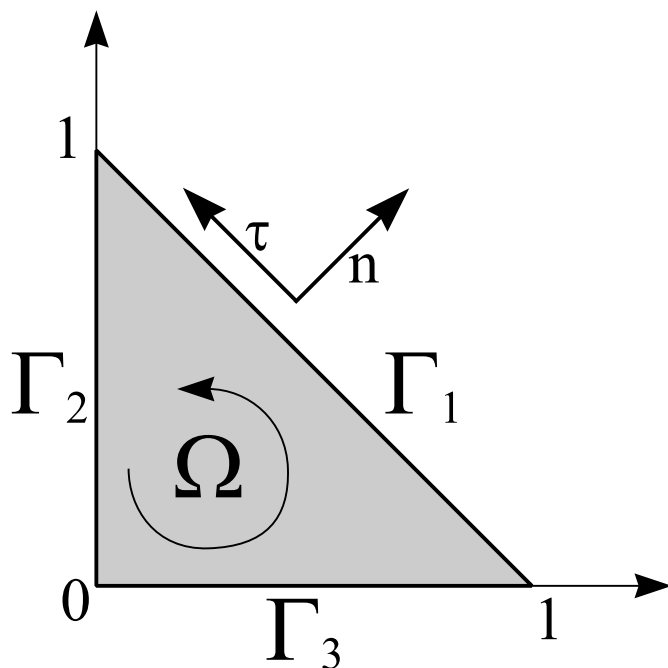


Рис. 1. Треугольная область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Для Γ_2 и Γ_3 имеем:

$$\vec{v} \big|_{\Gamma_2} = (\alpha_1 - \beta x_2, \alpha_2)^T \Rightarrow \left(\vec{v} \big|_{\Gamma_2} \right)_\tau = -\alpha_2;$$

$$\vec{v} \big|_{\Gamma_3} = (\alpha_1, \alpha_2 + \beta x_2)^T \Rightarrow \left(\vec{v} \big|_{\Gamma_3} \right)_\tau = \alpha_1.$$

Для Γ_1 , где $x_1 + x_2 = 1$, имеем

$$\vec{v} \big|_{\Gamma_3} = \begin{bmatrix} (\alpha_1 - \beta) + \beta x_1 \\ \alpha_2 + \beta x_1 \end{bmatrix}.$$

Представив это выражение в виде суммы

$$\begin{bmatrix} (\alpha_1 - \beta) + \beta x_1 \\ \alpha_2 + \beta x_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \alpha_1 - \alpha_1 - \beta \\ \beta - \alpha_1 + \alpha_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \beta}{2} + \beta x_1 \\ \frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \beta}{2} + \beta x_1 \end{bmatrix},$$

нетрудно заметить, что первое из слагаемых в правой части есть вектор, сонаправленный с $\vec{\tau}_1$, а второе — с \vec{n}_1 . Отсюда следует, что

$$\left(\vec{v} \big|_{\Gamma_1} \right)_\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta - \alpha_1 + \alpha_2).$$

Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ и постоянными тангенциальными компонентами поля вдоль сторон треугольника. Для произвольного случая, когда стороны не сонаправлены с координатными осями, эта связь выводится в разд. 5.3.

Непосредственным вычислением можно убедиться, что поле (15) удовлетворяет условию

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

Пространство таких функций принято обозначать $\mathbb{H}(\operatorname{div}^0, \Omega)$:

$$\mathbb{H}(\operatorname{div}^0, \Omega) = \{ \vec{v} \mid \vec{v} \in \mathbb{H}(\operatorname{rot}, \Omega), \operatorname{div} \vec{v} = 0 \} \subset \mathbb{H}(\operatorname{rot}, \Omega).$$

По аналогии нетрудно построить пространство $\mathbb{H}(\operatorname{rot}^0, \Omega)$:

$$\mathbb{H}(\operatorname{rot}^0, \Omega) = \{ \vec{v} \mid \vec{v} \in \mathbb{H}(\operatorname{div}, \Omega), \operatorname{rot} \vec{v} = 0 \} \subset \mathbb{H}(\operatorname{div}, \Omega).$$

Пространства $\mathbb{H}(\text{div}, \Omega)$, $\mathbb{H}(\text{rot}, \Omega)$, $\mathbb{H}(\text{div}^0, \Omega)$, $\mathbb{H}(\text{rot}^0, \Omega)$ в настоящее время называют *пространствами Неделека*. Их взаимосвязь и вложенность можно изобразить следующей диаграммой:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbb{H}(\text{div}^0, \Omega) \xrightarrow{\text{div } \vec{v}=0} \left[P_1(\Omega) \right] \xrightarrow{\mathbf{v}_i \in P_1} \mathbb{H}(\text{rot}, \Omega) \xrightarrow{\text{rot } \vec{v} \in \mathbb{L}_2(\Omega)} \\ \mathbb{H}(\text{rot}^0, \Omega) \xrightarrow{\text{rot } \vec{v}=0} \left[P_1(\Omega) \right] \xrightarrow{\mathbf{v}_i \in P_1} \mathbb{H}(\text{div}, \Omega) \xrightarrow{\text{div } \vec{v} \in \mathbb{L}_2(\Omega)} \end{array} \right\} \subset \mathbb{H}(\Omega).$$

2. Технологические аспекты узлового МКЭ

Несмотря на имеющиеся различия, узловой и векторный методы конечных элементов имеют общую идеологию, поэтому для понимания векторного МКЭ (который значительно более сложен в реализации) необходимо полное представление об узловом МКЭ. В данной главе рассматривается схема решения эллиптической краевой задачи для скалярной функции.

Решение краевой задачи методом конечных элементов (как скалярным, так и векторным), состоит из следующих этапов:

- переход от исходной постановки к эквивалентной вариационной;
- дискретизация области решения (т.е., её разбиение на геометрические конечные элементы);
- выбор интерполяционных функций, определяющих свойства решения;
- генерация СЛАУ;
- решение СЛАУ.

Методы решения СЛАУ, возникающих при МКЭ-моделировании, описаны в [2]. Остальные этапы будут рассмотрены в следующих разделах.

2.1. Переход к вариационной постановке

Рассмотрим следующую эллиптическую краевую задачу.

Пусть в области Ω с границей $\Gamma = \partial\Omega$ необходимо найти функцию $u(\bar{x}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющую уравнению

$$-\operatorname{div}(a \cdot \operatorname{grad} u) + \beta u = f \quad (16)$$

с краевыми условиями

$$u(\bar{x})|_{\Gamma_1} = g(\bar{x}); \quad (17)$$

$$a \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} - \Theta = 0; \quad (18)$$

$$a \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_3} + \gamma(u|_{\Gamma_3} - p) = 0, \quad (19)$$

где $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 = \Gamma$, $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$ при $i \neq j$.

Переход к вариационной постановке основан на (9); в частности, для задачи (16)–(19) имеет место следующая теорема [7]:

Решение задачи (16)–(19) эквивалентно задаче минимизации выпуклого функционала: $u = \arg \min_v \mathfrak{F}(v)$, где

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(v) = & \int_{\Omega} [a(\operatorname{grad} v)^2 + \beta v^2] d\Omega + \int_{\Gamma_3} \gamma v^2 d\Gamma - 2 \int_{\Gamma_3} \gamma p v d\Gamma - \\ & - 2 \int_{\Gamma_2} \Theta v d\Gamma - 2 \int_{\Omega} f v d\Omega \end{aligned} \quad (20)$$

на множестве функций, удовлетворяющих условиям Дирихле (17).

Пусть, например, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, а $\Gamma_3 = \emptyset$ (т.е., на границе имеют место только краевые условия Дирихле и Неймана). Если условия Неймана однородны ($\Theta = 0$), то функционал (20) принимает вид

$$\mathfrak{F}(v) = \int_{\Omega} \left[a \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + a \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \beta v^2 \right] d\Omega - 2 \int_{\Omega} f v d\Omega. \quad (21)$$

Минимум функционала ищется на множестве функций, образованных всевозможными линейными комбинациями некоторых базисных функций $\phi_i(\bar{x})$:

$$v(\bar{x}) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi_i(\bar{x}), \quad \alpha_i \in \mathbb{R},$$

то есть строится проекция решения задачи на некоторое подпространство.

2.2. Дискретизация области

Для дискретизации областей сложной формы выполняется их разбиение на треугольники (в двумерном случае) или тетраэдры (в трехмерном случае). Использование конечных элементов на прямоугольниках, хотя и приводит к значительному упрощению расчетов, возможно лишь в случае достаточно простых областей.

Пусть, как и в предыдущем разделе, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Пусть разбиение области на треугольные элементы выполнено таким образом, что два различных треугольника имеют либо общую вершину, либо общее ребро, либо совсем не имеют общих точек. Будем также полагать, что треугольники разбиения *не вырождаются*, то есть существует такое $\theta \gg 0$, что любой угол любого треугольника не меньше чем θ , а число тупых углов сведено к минимуму.

Обозначим число треугольников разбиения N , а число вершин этих треугольников n .

Объединим все вершины треугольников дискретизации в множество $V = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$. Каждому треугольнику сопоставим номер от 1 до N . Тогда элементам множества треугольников $E = \{e | 1 \leq e \leq N\}$ соответствуют тройки элементов множества V :

$$e \leftrightarrow \langle v_1^e, v_2^e, v_3^e \rangle, \quad e \in E; v_i^e \in V; v_i^e \neq v_j^e, i \neq j. \quad (22)$$

Поскольку каждая вершина треугольника может принадлежать также и соседним треугольникам, будем говорить о *локальной* и *глобальной* нумерации вершин. Под локальной нумерацией подразумевается упорядочивание вершин в *каждом конкретном треугольнике*

(т.е., нижний индекс в тройке $\langle v_1^e, v_2^e, v_3^e \rangle$), а под глобальной — их порядок на множестве⁸ V .

Пример дискретизации области и соответствия между V и E приведен на рис. 2 и в таблице 1.

Итак, для решения задачи методом конечных элементов необходимо иметь:

- координаты всех вершин треугольников и тройки $\langle v_1^e, v_2^e, v_3^e \rangle$, описывающие дискретизацию области;
- значения коэффициентов a, β, f уравнения (16) на каждом треугольнике;
- значения функции g из (17) в узлах, лежащих на той части границы, где заданы краевые условия первого рода (Γ_1);
- значения коэффициентов γ, p, Θ вдоль ребер, соединяющих узлы в той части границы, где заданы краевые условия второго и третьего рода (Γ_2 и Γ_3).

Краевые условия второго и третьего рода учитываются в функционале (20) явным образом; учет краевых условий первого рода, не входящих непосредственно в функционал, будет рассмотрен позднее в разд. 2.5.

2.3. Выбор интерполяционных функций (функций формы)

Как отмечалось в разд. 2.1, минимум функционала (20) ищется среди функций, являющихся всевозможными линейными комбинациями некоторых базисных функций. Метод конечных элементов, таким образом, является *методом оптимального проектирования на гильбертовы подпространства* [4], а найденное с его помощью решение оказывается интерполяцией точного решения задачи в некотором базисе. Выбор базисных (интерполяционных) функций, очевидно,

⁸При программной реализации множества хранятся как массивы; соответственно, глобальная нумерация определяет позиции вершин треугольника в массиве точек дискретизации.

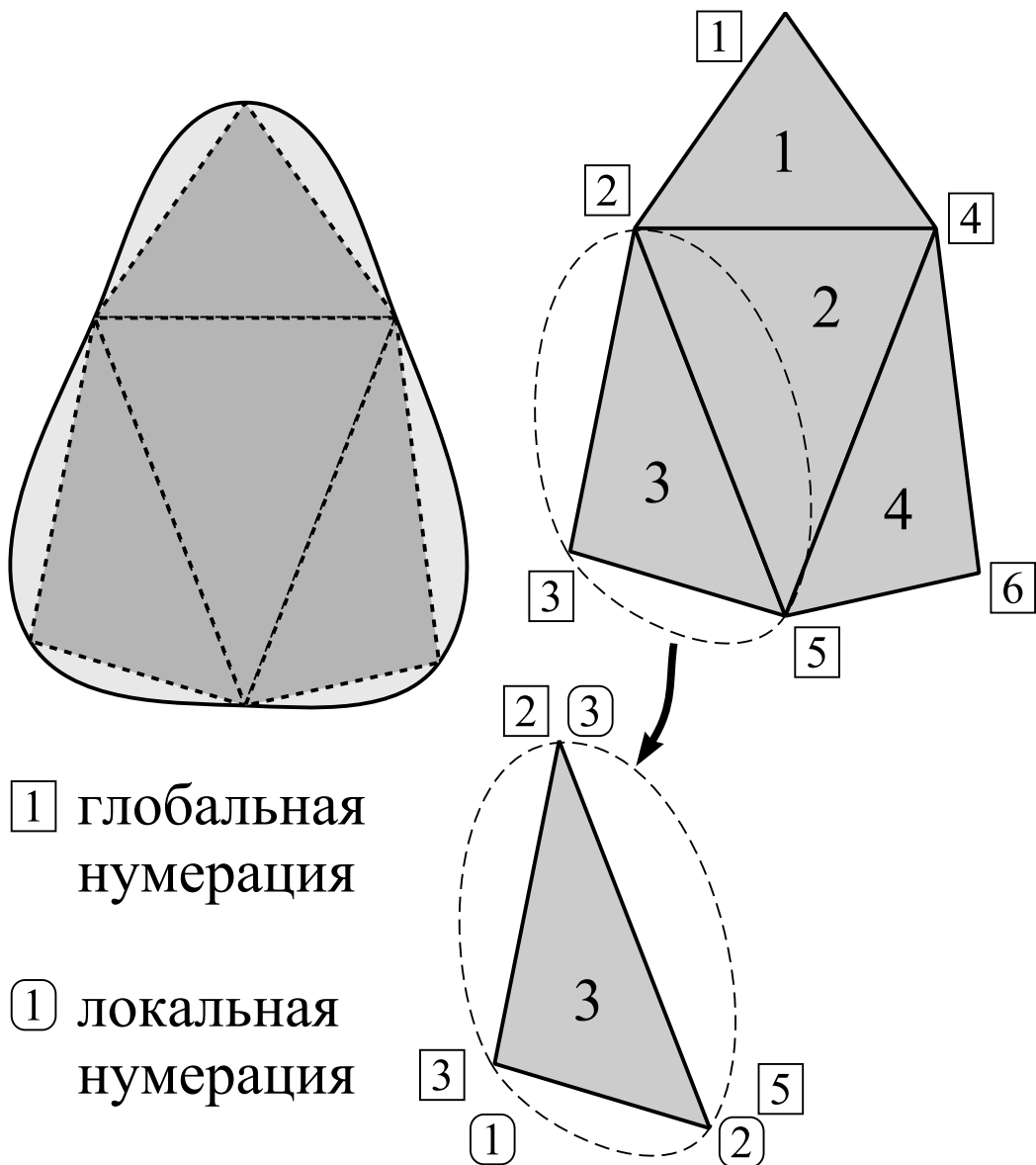


Рис. 2. Дискретизация области, локальная и глобальная нумерация.

| $e \in E$ | v_1^e | v_2^e | v_3^e |
|-----------|---------|---------|---------|
| 1 | 2 | 4 | 1 |
| 2 | 5 | 4 | 2 |
| 3 | 3 | 5 | 2 |
| 4 | 5 | 6 | 4 |

Таблица 1. Соответствие между V и E для дискретизации рис. 2.

должен осуществляться исходя из требований, предъявляемых к решению (точность, гладкость и т.д.).

Рассмотрим конечные элементы первого порядка, т.е. будем предполагать, что на каждом треугольнике искомое решение u представляет собой линейную функцию

$$u^e(\bar{x}) = u^e(x, y) = a^e + b^e x + c^e y. \quad (23)$$

Правую часть (23) можно записать в виде

$$\alpha_1^e \phi_1^e(\bar{x}) + \alpha_2^e \phi_2^e(\bar{x}) + \alpha_3^e \phi_3^e(\bar{x}), \quad (24)$$

где $\alpha_i^e = u^e(v_i^e)$, а функции $\phi_i^e(\bar{x})$ равны нулю всюду кроме e -го треугольника. На треугольнике же $\phi_i^e(\bar{x})$ линейны и равны 1 в вершине v_i^e , а в двух других вершинах обращаются в нуль⁹.

Такое представление удобно тем, что коэффициенты α сразу без всякого пересчета дают значения функции u в узлах дискретизации ($\alpha_i = u_i$), при этом автоматически обеспечивается непрерывность искомого решения¹⁰.

Присутствующие в (24) функции ϕ называются *функциями формы*, одна из таких функций изображена на рис. 18, стр. 62. Эти функции финитны, поскольку они отличны от нуля лишь на одном из КЭ дискретизации¹¹.

Финитность базисных функций оказывается очень удобной для работы с функционалом (20), требующим вычисления интегралов по области Ω (а следовательно, и по каждому из конечных элементов). Она позволяет вычислять интегралы отдельно по каждому КЭ, причем число интегрируемых функций невелико (в данном случае оно равно трем).

Само интегрирование функций ϕ , однако, оказывается затрудненным из-за того, что области интегрирования (треугольники) могут быть произвольными и их описание в декартовых координатах весьма трудоемко. Для упрощения вычислений вводятся так называемые *L-координаты*, подробно описанные в приложении 2.

⁹ Функция $\phi_1^e(\bar{x})$ геометрически представляет собой плоскость, проведенную через три точки $(x_1^e, y_1^e, 1)$, $(x_2^e, y_2^e, 0)$ и $(x_3^e, y_3^e, 0)$, аналогично определяются $\phi_2^e(\bar{x})$ и $\phi_3^e(\bar{x})$.

¹⁰ Следствие того факта, что через две различные точки можно провести одну и только одну прямую.

¹¹ Финитные функции также называют *функциями с конечным носителем*, именно отсюда происходит название метода конечных элементов.

2.4. Генерация СЛАУ

Рассмотрим процесс генерации конечноэлементной СЛАУ для функционала (21), соответствующего несколько упрощенной по сравнению с (16)–(19) задаче.

Как было показано в предыдущем разделе, $\phi_i^e(\bar{x}) = L_i^e(\bar{x})$, где функции L_i^e определяются соотношениями (122)–(125). Формулы (23)–(24) тогда можно записать в виде

$$u^e(\bar{x}) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i^e L_i^e(\bar{x}). \quad (25)$$

Поскольку $\Omega = \bigcup_{j=1}^N \Omega_j$, где Ω_j — треугольники дискретизации, функционал (21) можно записать в виде

$$\mathfrak{F}(v) = \sum_{e=1}^N \mathfrak{F}(v^e), \quad (26)$$

где $\mathfrak{F}(v^e)$ — локальный функционал, определяемый формулой

$$\mathfrak{F}(v^e) = \int_{\Omega_e} \left[a \left(\frac{\partial v^e}{\partial x} \right)^2 + a \left(\frac{\partial v^e}{\partial y} \right)^2 + \beta (v^e)^2 \right] d\Omega - 2 \int_{\Omega_e} f v^e d\Omega. \quad (27)$$

Подставив в (27) вместо v^e выражение (25) и продифференцировав результат¹² по α^e , получим три выражения для производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{F}(v^e)}{\partial \alpha^e} = \sum_{i=1}^3 \left\{ \alpha_i^e \int_{\Omega_e} \left[a \frac{\partial L_i^e}{\partial x} \frac{\partial L_k^e}{\partial x} + a \frac{\partial L_i^e}{\partial y} \frac{\partial L_k^e}{\partial y} + \right. \right. \\ \left. \left. + \beta L_i^e L_k^e \right] d\Omega - \int_{\Omega_e} f L_k^e d\Omega \right\}, \quad k = \overline{1, 3}, \end{aligned} \quad (28)$$

или, в матрично-векторной записи,

$$\left\{ \frac{\partial \mathfrak{F}(v^e)}{\partial \alpha^e} \right\} = K^e \{ \alpha^e \} - q^e. \quad (29)$$

¹²Очевидно, он будет являться квадратичной формой относительно коэффициентов α^e .

Элементы матрицы K и вектора q определяются по формулам

$$K_{ik}^e = \int_{\Omega_e} \left[a \frac{\partial L_i^e}{\partial x} \frac{\partial L_k^e}{\partial x} + a \frac{\partial L_i^e}{\partial y} \frac{\partial L_k^e}{\partial y} + \beta L_i^e L_k^e \right] dx dy; \quad (30)$$

$$q_k^e = \int_{\Omega_e} f L_k^e dx dy, \quad i, k = \overline{1, 3}. \quad (31)$$

Матрица K , очевидно, является симметричной.

Если предположить, что на элементе e коэффициенты a , β и f постоянны, то интегралы (30)–(31) могут быть вычислены аналитически по формуле (126).

Пусть j -ая вершина треугольника имеет координаты (X_j, Y_j) . Введем следующие обозначения:

$$b_1 = Y_2 - Y_3; \quad c_1 = X_3 - X_2; \quad (32)$$

$$b_2 = Y_1 - Y_3; \quad c_2 = X_3 - X_1; \quad (33)$$

$$b_3 = Y_1 - Y_2; \quad c_3 = X_2 - X_1. \quad (34)$$

Тогда, применяя к (30)–(31) формулу (126) и учитывая формулы (122)–(125), получаем

$$K_{ik}^e = \frac{1}{4D^e} (a^e b_i b_k + a^e c_i c_k) + \frac{D^e}{12} \beta^e (1 + \delta_{ik}); \quad (35)$$

$$q_k^e = \frac{D^e}{3} f^e, \quad (36)$$

где δ_{ik} — символ Кронекера-Капелли.

Матрица K^e и вектор q^e называются *локальной матрицей* и *локальной правой частью* элемента e .

Поскольку функционал \mathfrak{F} является выпуклым, для нахождения его минимума достаточно найти стационарную точку, то есть решить систему уравнений

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \alpha_j} = 0 \quad j = \overline{1, n},$$

или, в матрично-векторной форме, $K\alpha = q$.

В соответствии с (26) далее необходимо ассемблировать локальные матрицы и локальные правые части всех элементов дискретизации области. При этом, очевидно, результирующая СЛАУ (называемая *глобальной*) должна иметь размерность 6×6 по числу узлов.

Суммирование выполняется по следующему правилу: локальные матрицы и локальные правые части расширяются нулевыми строками и столбцами до размеров глобальной СЛАУ, при этом позиции, остающиеся ненулевыми, определяются по соответствию локальной и глобальной нумерации узлов дискретизации области.

Процесс построения глобальной СЛАУ подробно показан в таблицах 2–6.

Матрица глобальной СЛАУ получается разреженной, поэтому для ее хранения используются специальные способы, рассмотренные, например, в [2].

2.5. Учет краевых условий Дирихле

Вернемся к краевым условиям Дирихле (17). Функции v , среди которых ищется минимум функционала (20), должны удовлетворять этим условиям.

Это означает, что для всех узлов дискретизации v_j , лежащих на части границы Γ_1 , соответствующие коэффициенты $\alpha_j = u_j$ должны принимать значения $g(v_j)$.

Естественный способ обеспечить выполнение данного требования заключается в следующем изменении ассемблированной глобальной СЛАУ.

Пусть для некоторого j -го узла необходимо обеспечить равенство $u_j = g(v_j) = g_j$. Обнулим все коэффициенты j -й строки матрицы K за исключением K_{jj} , который положим равным единице. Одновременно присвоим значение g_j коэффициенту q_j вектора правой части. Тогда измененное j -е уравнение будет равносильно требуемому равенству.

В таблице 7 приведена глобальная СЛАУ, измененная описанным образом в предположении, что условия Дирихле поставлены на участке границы между вершинами 3–5–6. Эта СЛАУ, вообще говоря, может быть уменьшена до размерности 3×3 :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{24} \\ K_{41} & K_{42} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 - g_3 K_{23} - g_5 K_{25} \\ q_4 - g_5 K_{45} - g_6 K_{46} \end{bmatrix},$$

однако при работе с разреженными матрицами соответствующие изменения списковых структур весьма сложны и на практике не выпол-

| $i \backslash k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|------------|------------|---|------------|---|---|
| 1 | K_{33}^1 | K_{31}^1 | 0 | K_{32}^1 | 0 | 0 |
| 2 | K_{13}^1 | K_{11}^1 | 0 | K_{12}^1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | K_{23}^1 | K_{21}^1 | 0 | K_{22}^1 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Таблица 2. Локальная матрица K^1 , расширенная до размеров глобальной.

| $i \backslash k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|------------|-----------------------|---|-----------------------|------------|---|
| 1 | K_{33}^1 | K_{31}^1 | 0 | K_{32}^1 | 0 | 0 |
| 2 | K_{13}^1 | $K_{11}^1 + K_{33}^2$ | 0 | $K_{12}^1 + K_{32}^2$ | K_{31}^2 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | K_{23}^1 | $K_{21}^1 + K_{23}^2$ | 0 | $K_{22}^1 + K_{22}^2$ | K_{21}^2 | 0 |
| 5 | 0 | K_{13}^2 | 0 | K_{12}^2 | K_{11}^2 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Таблица 3. Глобальная матрица после добавления K^2 .

| $i \backslash k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|------------|----------------------------------|------------|-----------------------|-----------------------|---|
| 1 | K_{33}^1 | K_{31}^1 | 0 | K_{32}^1 | 0 | 0 |
| 2 | K_{13}^1 | $K_{11}^1 + K_{33}^2 + K_{33}^3$ | K_{31}^3 | $K_{12}^1 + K_{32}^2$ | $K_{31}^2 + K_{32}^3$ | 0 |
| 3 | 0 | K_{13}^3 | K_{11}^3 | 0 | K_{12}^3 | 0 |
| 4 | K_{23}^1 | $K_{21}^1 + K_{23}^2$ | 0 | $K_{22}^1 + K_{22}^2$ | K_{21}^2 | 0 |
| 5 | 0 | $K_{13}^2 + K_{23}^3$ | K_{21}^3 | K_{12}^2 | $K_{11}^2 + K_{22}^3$ | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Таблица 4. Глобальная матрица после добавления K^3 .

$$\begin{bmatrix} K_{33}^1 & K_{31}^1 & 0 & K_{32}^1 & 0 & 0 \\ K_{13}^1 & K_{11}^1 + K_{33}^2 + K_{33}^3 & K_{31}^3 & K_{12}^1 + K_{32}^2 & K_{31}^2 + K_{32}^3 & 0 \\ 0 & K_{13}^3 & K_{11}^3 & 0 & K_{12}^3 & 0 \\ K_{23}^1 & K_{21}^1 + K_{23}^2 & 0 & K_{22}^1 + K_{22}^2 + K_{33}^4 & K_{21}^2 + K_{31}^4 & K_{32}^4 \\ 0 & K_{13}^2 + K_{23}^3 & K_{21}^3 & K_{12}^2 + K_{13}^4 & K_{11}^2 + K_{22}^3 + K_{11}^4 & K_{12}^4 \\ 0 & 0 & 0 & K_{23}^4 & K_{21}^4 & K_{22}^4 \end{bmatrix}$$

Таблица 5. Матрица K глобальной СЛАУ.

| q | q ¹ | q ¹ + q ² | q ¹ + q ² + q ³ | q ¹ + q ² + q ³ + q ⁴ |
|------------------|-----------------------------|-----------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| q ₁ = | q ₃ ¹ | q ₃ ¹ | q ₃ ¹ | q ₃ ¹ |
| q ₂ = | q ₁ ¹ | q ₁ ¹ + q ₃ ² | q ₁ ¹ + q ₃ ² + q ₃ ³ | q ₁ ¹ + q ₃ ² + q ₃ ³ |
| q ₃ = | 0 | 0 | q ₁ ³ | q ₁ ³ |
| q ₄ = | q ₂ ¹ | q ₂ ¹ + q ₂ ² | q ₂ ¹ + q ₂ ² | q ₂ ¹ + q ₂ ² + q ₃ ⁴ |
| q ₅ = | 0 | q ₁ ² | q ₁ ² + q ₂ ³ | q ₁ ² + q ₂ ³ + q ₁ ⁴ |
| q ₆ = | 0 | 0 | 0 | q ₂ ⁴ |
| Результат | | | | |

Таблица 6. Формирование правой части глобальной СЛАУ.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & K_{14} & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ K_{41} & K_{42} & 0 & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ g_3 \\ q_4 \\ g_5 \\ g_6 \end{bmatrix}$$

Таблица 7. Глобальная СЛАУ после учета краевых условий Дирихле. Ненулевые коэффициенты K_{ij} берутся из таблицы 5, коэффициенты q_i — из таблицы 6.

няются. Алгоритм изменения строки разреженной матрицы описан в [2], разд. 2.3.

3. Вариационные формулировки для векторных полей

3.1. Уравнения Максвелла

Система уравнений Максвелла, описывающих процессы электромагнетизма, имеет вид:

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (\text{закон Фарадея}); \quad (37)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J} \quad (\text{закон Максвелла–Ампера}); \quad (38)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (\text{закон Гаусса}); \quad (39)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (\text{закон Гаусса для магнитного поля}) \quad (40)$$

со следующими обозначениями:

- \vec{E} – напряженность электрического поля (В/м);
- \vec{D} – электрическая индукция (Кл/м²);
- \vec{B} – магнитная индукция (Вб/м², Тл);
- \vec{H} – напряженность магнитного поля (А/м);
- \vec{J} – плотность электрического тока (А/м²);
- ρ – плотность электрических зарядов (Кл/м³).

Кроме того, имеет место уравнение неразрывности, или уравнение сохранения заряда:

$$\operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (41)$$

Из этих пяти уравнений только уравнения (37), (38) и (41) могут быть выбраны как *независимые*.

Необходимо также добавить к (37)–(41) так называемые соотношения состояния, определяемые свойствами среды:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}; \quad (42)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}; \quad (43)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}, \quad (44)$$

где ε — диэлектрическая проницаемость, μ — магнитная проницаемость, σ — электрическая проводимость.

3.2. Условия на контактных границах

Предположим, что область Ω состоит из подобластей, в каждой из которых заданы свои значения параметров ε , μ и σ . Это соответствует задаче расчета электромагнитных полей в конструкции, собранной из разных материалов (рис. 3).

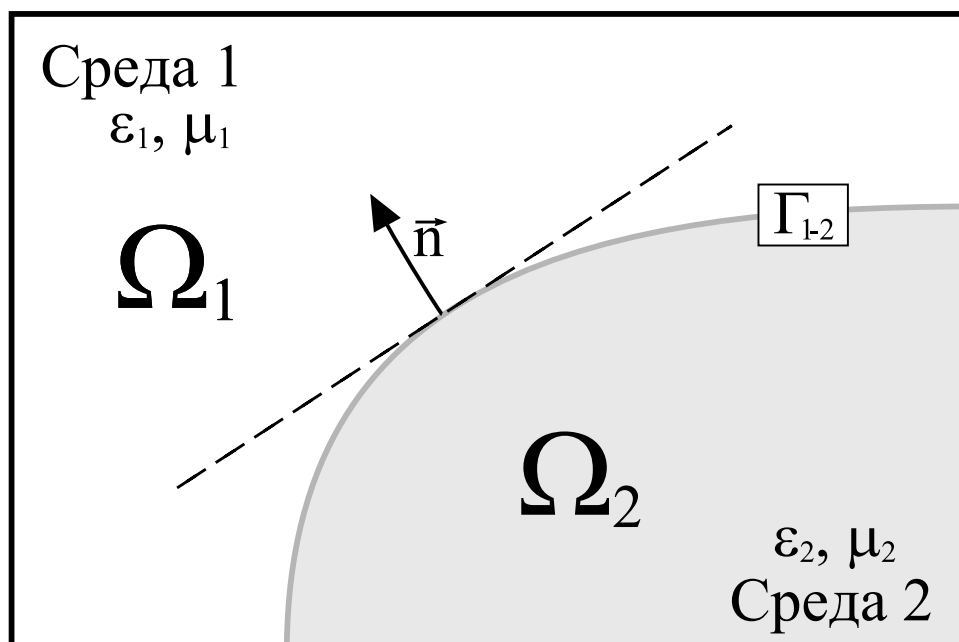


Рис. 3. Составная область Ω

Для границы Γ_{1-2} , разделяющей подобласти Ω_1 и Ω_2 , математическая формализация физических условий сопряжения векторных по-

лей имеет следующий вид:

$$\vec{n} \times (\vec{\mathbf{E}}_1 - \vec{\mathbf{E}}_2) \Big|_{\Gamma_{1-2}} = 0; \quad (45)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{\mathbf{D}}_1 - \vec{\mathbf{D}}_2) \Big|_{\Gamma_{1-2}} = 0; \quad (46)$$

$$\vec{n} \times (\vec{\mathbf{H}}_1 - \vec{\mathbf{H}}_2) \Big|_{\Gamma_{1-2}} = 0; \quad (47)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{\mathbf{B}}_1 - \vec{\mathbf{B}}_2) \Big|_{\Gamma_{1-2}} = 0. \quad (48)$$

Если, кроме того, предположить, что на границе Γ_{1-2} существуют поверхностные заряды или токи (ρ_Γ и $\vec{\mathbf{J}}_\Gamma$ соответственно), то условия (46) и (47) становятся неоднородными, принимая вид

$$\vec{n} \cdot (\vec{\mathbf{D}}_1 - \vec{\mathbf{D}}_2) \Big|_{\Gamma_{1-2}} = \rho_\Gamma; \quad (49)$$

$$\vec{n} \times (\vec{\mathbf{H}}_1 - \vec{\mathbf{H}}_2) \Big|_{\Gamma_{1-2}} = \vec{\mathbf{J}}_\Gamma. \quad (50)$$

Таким образом, при расчетах необходимо выполнение условия непрерывности тангенциальной составляющей полей на межэлементных границах (ср. разд. 1.3).

Реализация этого требования при использовании обычных скалярных узловых конечных элементов (КЭ) может быть достаточно сложной.

3.3. Уравнение Гельмгольца

Предположим, что область Ω , в которой решается краевая задача, может быть разбита на конечное число подобластей, в каждой из которых параметры ε , μ и σ , присутствующие в уравнениях (42)–(44), постоянны.

Тогда, объединяя уравнения (37) и (43), получим

$$\text{rot } \vec{\mathbf{E}} = -\mu \frac{\partial \vec{\mathbf{H}}}{\partial t},$$

и, после вычисления ротора от обеих частей,

$$\text{rot rot } \vec{\mathbf{E}} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{\mathbf{H}}. \quad (51)$$

Объединим теперь уравнения (38), (42) и (44):

$$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{H}} = \varepsilon \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} + \sigma \vec{\mathbf{E}}. \quad (52)$$

Подставляя (52) в (51), получим уравнение для $\vec{\mathbf{E}}$:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\mathbf{E}} = -\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}. \quad (53)$$

Предположим теперь, что поля $\vec{\mathbf{E}}$ и $\vec{\mathbf{H}}$ зависят от времени следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{E}}(\vec{x}, t) &= \vec{\mathbf{E}}(\vec{x}) e^{j\omega t}; \\ \vec{\mathbf{H}}(\vec{x}, t) &= \vec{\mathbf{H}}(\vec{x}) e^{j\omega t}, \end{aligned}$$

где j — мнимая единица, $j^2 = -1$. (В соответствии с формулой Эйлера $e^{j\phi} = \cos \phi + j \sin \phi$, множитель $e^{j\omega t}$ определяет гармонический характер изменения полей $\vec{\mathbf{E}}$ и $\vec{\mathbf{H}}$ во времени с частотой ω .) Тогда

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} = j\omega \vec{\mathbf{E}}, \quad \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{\mathbf{E}}$$

и (53) принимает вид

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\mathbf{E}} + [j\omega\sigma\mu - \omega^2\varepsilon\mu] \vec{\mathbf{E}} = 0. \quad (54)$$

Введем обозначение $k^2 = (j\omega\sigma\mu - \omega^2\varepsilon\mu)$. Для непроводящих сред, когда $\sigma = 0$, эта величина является вещественной.

Эллиптическое уравнение

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\mathbf{E}} + k^2 \vec{\mathbf{E}} = 0 \quad (55)$$

называется *уравнением Гельмгольца*, а присутствующая в нем величина k^2 — *волновым числом*.

3.4. Вариационная постановка для уравнения Гельмгольца

Введем в рассмотрение дифференциальный оператор \mathfrak{L} , определяемый следующим образом:

$$\mathfrak{L}\vec{\mathbf{u}} = [\operatorname{rot} \operatorname{rot} - k^2] \vec{\mathbf{u}}. \quad (56)$$

Тогда уравнение Гельмгольца (55) может быть записано в виде $\mathfrak{L}\vec{\mathbf{E}} = 0$.

Для комплекснозначных векторных функций, определенных на области Ω , введем скалярное произведение¹³

$$\langle \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \rangle = \int_{\Omega} \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}^* d\Omega.$$

Рассмотрим вопрос о самосопряженности оператора (56). Пусть $\vec{\mathbf{F}}$ — произвольная векторная функция. Тогда

$$\langle \mathfrak{L}\vec{\mathbf{E}}, \vec{\mathbf{F}} \rangle = \int_{\Omega} \vec{\mathbf{F}}^* \cdot [\text{rot rot } \vec{\mathbf{E}} - k^2 \vec{\mathbf{E}}] d\Omega. \quad (57)$$

Применим к (57) вторую векторную теорему Грина (см. стр. 59), положив в ней $p = 1$, $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{F}}^*$, $\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{E}}$:

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{L}\vec{\mathbf{E}}, \vec{\mathbf{F}} \rangle &= \int_{\Omega} \vec{\mathbf{E}} \cdot [\text{rot rot } \vec{\mathbf{F}}^* - k^2 \vec{\mathbf{F}}^*] d\Omega + \\ &+ \underbrace{\int_S [\vec{\mathbf{E}} \times \text{rot } \vec{\mathbf{F}}^* - \vec{\mathbf{F}}^* \times \text{rot } \vec{\mathbf{E}}] \cdot \vec{\mathbf{n}} dS}_{I_S}. \end{aligned} \quad (58)$$

Воспользуемся теперь соотношением (см. стр. 57)

$$[\vec{\mathbf{E}} \times \text{rot } \vec{\mathbf{F}}^*] \cdot \vec{\mathbf{n}} = [\vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{E}}] \cdot \text{rot } \vec{\mathbf{F}}^* = -\vec{\mathbf{E}} \cdot [\vec{\mathbf{n}} \times \text{rot } \vec{\mathbf{F}}^*].$$

Очевидно, что если функция $\vec{\mathbf{E}}$ и функция $\vec{\mathbf{F}}$ обе удовлетворяют однородным условиям Дирихле

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{E}}|_{S_1} = 0 \\ \vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{F}}|_{S_1} = 0 \end{cases} \quad (59)$$

и однородным условиям Неймана третьего рода

$$\begin{cases} [\vec{\mathbf{n}} \times \text{rot } \vec{\mathbf{E}} + \alpha \vec{\mathbf{n}} \times (\vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{E}})]|_{S_2} = 0 \\ [\vec{\mathbf{n}} \times \text{rot } \vec{\mathbf{F}} + \alpha \vec{\mathbf{n}} \times (\vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{F}})]|_{S_2} = 0 \end{cases}, \quad (60)$$

¹³Вообще говоря, скалярное произведение должно вводиться более сложным образом [15]. Данная форма записи справедлива лишь в случае $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{H}(\text{div}^0, \Omega)$. Иными словами, при использовании выводимой в данном разделе вариационной постановки решение можно искать только в пространстве Неделека $\mathbb{H}(\text{div}^0, \Omega)$, описанном в разд. 1.3.

где $\alpha \in \mathbb{R}$ и $S = S_1 \cup S_2$, то интеграл I_S по многообразию в (58) становится равным нулю.

Выражение (58) при этом можно записать в виде

$$\langle \mathcal{L}\vec{\mathbf{E}}, \vec{\mathbf{F}} \rangle = \langle \vec{\mathbf{E}}, \mathcal{L}\vec{\mathbf{F}} \rangle,$$

то есть при выполнении условий (59)–(60) оператор \mathcal{L} будет самосопряженным.

Используя свойство самосопряженности \mathcal{L} , функционал \mathfrak{F} для вариационной постановки можно записать в виде¹⁴

$$\mathfrak{F}(\vec{\mathbf{E}}) = \langle \vec{\mathbf{E}}, \mathcal{L}\vec{\mathbf{E}} \rangle = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \vec{\mathbf{E}}^* \cdot [\text{rot rot } \vec{\mathbf{E}} - k^2 \vec{\mathbf{E}}] d\Omega. \quad (61)$$

Преобразуем его к виду, в котором были бы явно отражены краевые условия задачи.

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(\vec{\mathbf{E}}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\vec{\mathbf{E}}^* \cdot \text{rot rot } \vec{\mathbf{E}} - \text{rot } \vec{\mathbf{E}} \cdot \text{rot } \vec{\mathbf{E}}^* + \text{rot } \vec{\mathbf{E}} \cdot \text{rot } \vec{\mathbf{E}}^* - k^2 \vec{\mathbf{E}}^* \cdot \vec{\mathbf{E}} \right] d\Omega = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underbrace{\left[\vec{\mathbf{E}}^* \cdot \text{rot rot } \vec{\mathbf{E}} - \text{rot } \vec{\mathbf{E}} \cdot \text{rot } \vec{\mathbf{E}}^* \right]}_{I_1} d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\text{rot } \vec{\mathbf{E}} \cdot \text{rot } \vec{\mathbf{E}}^* - k^2 \vec{\mathbf{E}}^* \cdot \vec{\mathbf{E}} \right] d\Omega. \end{aligned}$$

Применим к интегралу I_1 первую векторную теорему Грина (см. стр. 59), положив в ней $p = 1$, $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{E}}$, $\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{E}}^*$:

$$\mathfrak{F}(\vec{\mathbf{E}}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\text{rot } \vec{\mathbf{E}} \cdot \text{rot } \vec{\mathbf{E}}^* - k^2 \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{E}}^* \right] d\Omega - \frac{1}{2} \int_S \underbrace{\left[(\vec{\mathbf{E}}^* \times \text{rot } \vec{\mathbf{E}}) \cdot \vec{\mathbf{n}} \right]}_{I_2} dS.$$

Воспользовавшись свойством смешанного векторно-скалярного произведения (стр. 57)

$$(\vec{\mathbf{E}}^* \times \text{rot } \vec{\mathbf{E}}) \cdot \vec{\mathbf{n}} = -(\vec{\mathbf{n}} \times \text{rot } \vec{\mathbf{E}}) \cdot \vec{\mathbf{E}}^* = (\vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{E}}^*) \cdot \text{rot } \vec{\mathbf{E}} = (\vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{E}})^* \cdot \text{rot } \vec{\mathbf{E}},$$

¹⁴ Коэффициент $1/2$ здесь оставлен для удобства дифференцирования при нахождении стационарной точки.

запишем интеграл I_2 в виде суммы двух:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(\vec{\mathbf{E}}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\text{rot } \vec{\mathbf{E}} \cdot \text{rot } \vec{\mathbf{E}}^* - k^2(\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{E}}^*)] d\Omega - \\ &\quad - \frac{1}{2} \underbrace{\int_{S_1} (\vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{E}})^* \cdot \text{rot } \vec{\mathbf{E}} dS}_{I_3} + \frac{1}{2} \underbrace{\int_{S_2} (\vec{\mathbf{n}} \times \text{rot } \vec{\mathbf{E}}) \cdot \vec{\mathbf{E}}^* dS}_{I_4} . \end{aligned}$$

Интеграл I_3 равен нулю в силу однородных краевых условий Дирихле (59). Для интеграла I_4 в силу условий Неймана (60) справедливо

$$(\vec{\mathbf{n}} \times \text{rot } \vec{\mathbf{E}}) \Big|_{S_2} = -\alpha \vec{\mathbf{n}} \times (\vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{E}}) \Big|_{S_2} ,$$

поэтому

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(\vec{\mathbf{E}}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\text{rot } \vec{\mathbf{E}} \cdot \text{rot } \vec{\mathbf{E}}^* - k^2(\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{E}}^*)] d\Omega - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{S_2} \alpha \vec{\mathbf{n}} \times (\vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{E}}) \cdot \vec{\mathbf{E}}^* dS . \end{aligned}$$

Снова воспользуемся свойствами смешанного произведения:

$$\vec{\mathbf{n}} \times (\vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{E}}) \cdot \vec{\mathbf{E}}^* = -(\vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{E}}^*) \cdot (\vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{E}}) .$$

Окончательно имеем:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(\vec{\mathbf{E}}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\text{rot } \vec{\mathbf{E}} \cdot \text{rot } \vec{\mathbf{E}}^* - k^2(\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{E}}^*)] d\Omega + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{S_2} \alpha (\vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{E}}) \cdot (\vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{E}}^*) dS . \end{aligned} \quad (62)$$

4. Векторный МКЭ на прямоугольных элементах

4.1. Векторные базисные функции на прямоугольниках

В данном разделе мы рассмотрим двумерные прямоугольные конечные элементы (КЭ) со сторонами, параллельными координатным осям (рис. 4).

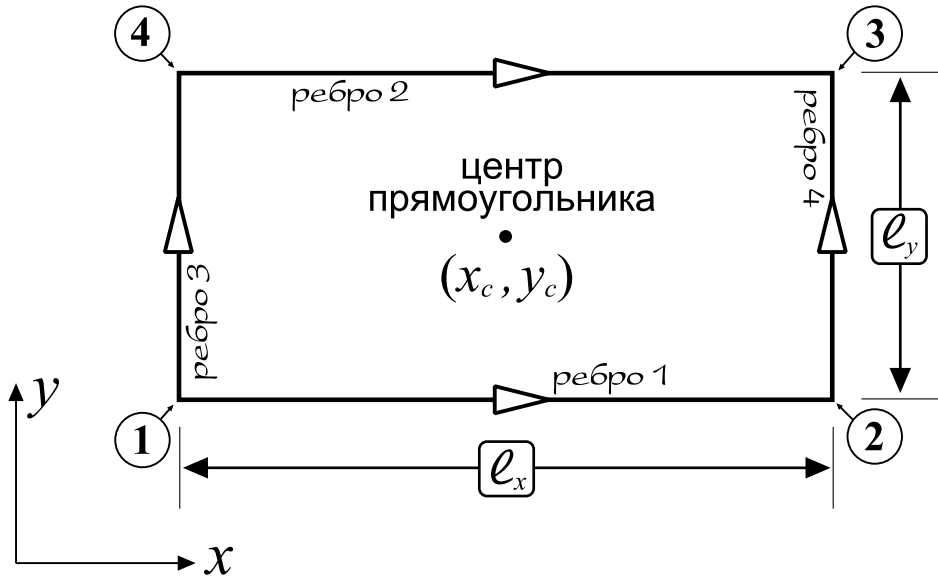


Рис. 4. Прямоугольный конечный элемент в пространстве \mathbb{R}^2 .

В отличие от узлового МКЭ [7, 8], будем ассоциировать базисные функции не с *вершинами*, а со *сторонами* прямоугольника. Построенные таким образом конечные элементы называются *рёберными*¹⁵.

Предположим, что поле $\vec{\mathbf{E}} = (\mathbf{E}_x, \mathbf{E}_y)^T$ на прямоугольном КЭ таково, что имеет постоянную тангенциальную компоненту вдоль каждой из сторон¹⁶. Пусть вдоль нижней стороны эта компонента равна \mathbf{E}_{x_1} , вдоль верхней — \mathbf{E}_{x_2} , а вдоль левой и правой сторон — \mathbf{E}_{y_1} и \mathbf{E}_{y_2} соответственно.

Если предположить линейный характер изменения поля вдоль линий $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$, то такое поле в любой точке прямоугольника может быть вычислено по формулам

$$\begin{cases} \mathbf{E}_x = \frac{1}{l_y} \left(\frac{l_y}{2} + (y_c - y) \right) \mathbf{E}_{x_1} + \frac{1}{l_y} \left(\frac{l_y}{2} + (y - y_c) \right) \mathbf{E}_{x_2} \\ \mathbf{E}_y = \frac{1}{l_x} \left(\frac{l_x}{2} + (x_c - x) \right) \mathbf{E}_{y_1} + \frac{1}{l_x} \left(\frac{l_x}{2} + (x - x_c) \right) \mathbf{E}_{y_2} \end{cases} \quad (63)$$

Введем в рассмотрение векторные функции $\vec{\mathbf{N}}_i$ ($1 \leq i \leq 4$). Определим их таким образом, чтобы поле $\vec{\mathbf{N}}_i$ имело нулевую тангенциальную составляющую вдоль всех сторон прямоугольника, за исключе-

¹⁵ Англ. Edge Elements, сокращенно EE.

¹⁶ Вдоль верхней и нижней сторон прямоугольника тангенциальной является i -компонента, а вдоль левой и правой — j -компонента.

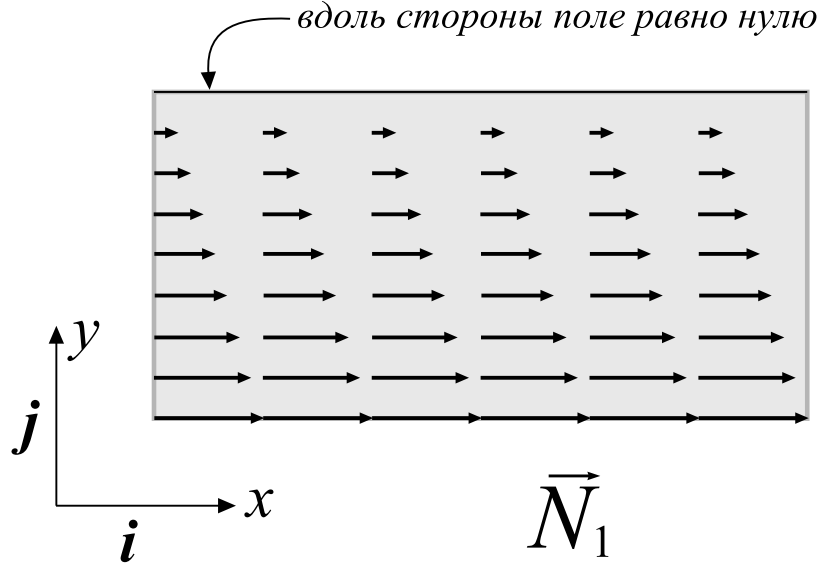


Рис. 5. Векторная базисная функция \vec{N}_1 на прямоугольнике.

нием i -ой, вдоль которой она должна быть равна единице. Если пронумеровать стороны (ребра) прямоугольника так, как на рис. 4, то

$$\vec{N}_1 = \frac{1}{l_y} \left(\frac{l_y}{2} + (y_c - y) \right) \mathbf{i}; \quad (64)$$

$$\vec{N}_2 = \frac{1}{l_y} \left(\frac{l_y}{2} + (y - y_c) \right) \mathbf{i}; \quad (65)$$

$$\vec{N}_3 = \frac{1}{l_x} \left(\frac{l_x}{2} + (x_c - x) \right) \mathbf{j}; \quad (66)$$

$$\vec{N}_4 = \frac{1}{l_x} \left(\frac{l_x}{2} + (x - x_c) \right) \mathbf{j}. \quad (67)$$

Векторное поле, определяемое одной из таких функций, показано на рис. 5.

Используя функции (64)–(67), формулу (63) можно переписать в виде

$$\vec{\mathbf{E}} = \sum_{i=1}^4 \vec{N}_i \mathbf{E}_{(i)}, \quad (68)$$

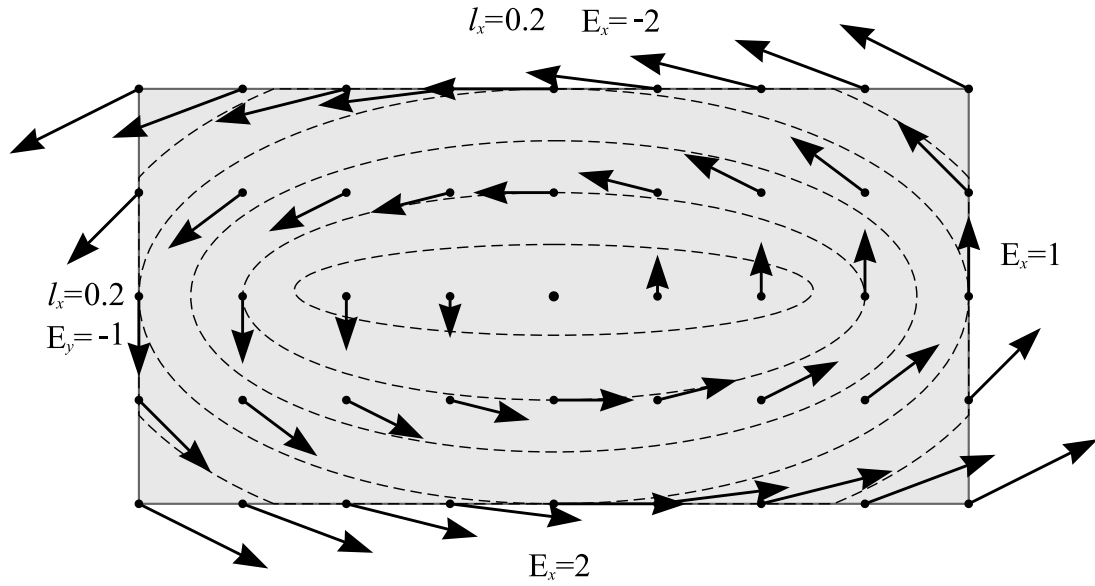


Рис. 6. Пример поля, определенного в соответствии с (68). Пунктиром показаны силовые линии.

где $\mathbf{E}_{(i)}$ — значение тангенциальной составляющей поля вдоль i -ой стороны (в данном случае $\mathbf{E}_{(1)} = \mathbf{E}_{x_1}$, $\mathbf{E}_{(2)} = \mathbf{E}_{x_2}$, $\mathbf{E}_{(3)} = \mathbf{E}_{y_1}$, $\mathbf{E}_{(4)} = \mathbf{E}_{y_2}$). Функции $\vec{\mathbf{N}}_i$, таким образом, выступают в роли базисных. На рис. 6 показано поле, определяемое (68) на прямоугольнике со сторонами $l_x = 0.2$ и $l_y = 0.1$, когда $\mathbf{E}_{(1)} = 2$, $\mathbf{E}_{(2)} = -2$, $\mathbf{E}_{(3)} = -1$, $\mathbf{E}_{(4)} = -1$.

Нетрудно заметить, что способ построения таких функций (вдоль любого ребра прямоугольника одна и только одна из них имеет ненулевую тангенциальную составляющую), позволяет легко обеспечить тангенциальную непрерывность поля на границах смежных конечных элементов (см. разд. 3.2).

Другим важнейшим свойством базисных функций $\vec{\mathbf{N}}_i$ является то, что все они удовлетворяют условию

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{N}}_i = 0, \quad (69)$$

и, таким образом, идеально подходят для представления векторных полей в областях, не содержащих источников.

Функции, удовлетворяющие (69), будем называть *дивергентно-свободными*¹⁷. Еще одним полезным их свойством является то, что

¹⁷ Англ. divergence-free functions.

ротор от них легко вычисляем и постоянен:

$$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{N}}_1 = \frac{1}{\ell_y} \mathbf{k}; \operatorname{rot} \vec{\mathbf{N}}_2 = -\frac{1}{\ell_y} \mathbf{k}; \operatorname{rot} \vec{\mathbf{N}}_3 = -\frac{1}{\ell_x} \mathbf{k}; \operatorname{rot} \vec{\mathbf{N}}_4 = \frac{1}{\ell_x} \mathbf{k}. \quad (70)$$

Следовательно,

$$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{E}} = \left(\frac{\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2}{\ell_y} - \frac{\mathbf{E}_3 - \mathbf{E}_4}{\ell_x} \right) \mathbf{k}.$$

Выполнение условий (69)–(70) означает, что $\vec{\mathbf{N}}_i \in \mathbb{H}(\operatorname{div}^0, \Omega)$.

Заметим, что если каждую из функций $\vec{\mathbf{N}}_i$ векторно домножить на \mathbf{k} , то полученные функции

$$\vec{\mathbf{M}}_i = \mathbf{k} \times \vec{\mathbf{N}}_i \quad (71)$$

будут обеспечивать непрерывность нормальных компонент поля на ребрах и вместо (69) будут удовлетворять свойству

$$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{M}}_i = 0. \quad (72)$$

Такие базисные функции называются *роторно-свободными*¹⁸ и идеально подходят для представления функций типа плотности электрического тока; для них имеет место $\vec{\mathbf{M}}_i \in \mathbb{H}(\operatorname{rot}^0, \Omega)$.

4.2. Вычисление локальных матриц

Выполним дискретизацию области Ω :

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^n \Omega_k,$$

где Ω_k — прямоугольники со сторонами, параллельными координатным осям.

Тогда поле $\vec{\mathbf{E}}$ в Ω может быть представлено в виде¹⁹

$$\vec{\mathbf{E}} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^4 \mathbf{E}_{(i)}^k \vec{\mathbf{N}}_i^k, \quad (73)$$

¹⁸ Англ. curl-free functions или rotor-free functions. Другой областью применения таких функций является решение интегральных уравнений.

¹⁹ Истинное число слагаемых в сумме (73) всегда меньше $4n$. Это связано с тем, что при переходе от локальной нумерации ребер к глобальной каждое общее для двух прямоугольников ребро будет занумеровано не два раза, а один.

где $\vec{\mathbf{N}}_i^k$ — векторные функции, определенные на прямоугольнике Ω_k в соответствии с формулами (64)–(67) и равные нулю в оставшейся части области Ω ; $\mathbf{E}_{(i)}^k$ — значение тангенциальной компоненты поля на i -ом ребре прямоугольника Ω_k .

Как видно, при вычислении функционала \mathfrak{F} , определяемого формулой (62), требуется нахождение интегралов

$$e_{ij}^{km} = \int_{\Omega} (\text{rot } \vec{\mathbf{N}}_i^k) \cdot (\text{rot } \vec{\mathbf{N}}_j^m) d\Omega \quad (74)$$

и

$$f_{ij}^{km} = \int_{\Omega} \vec{\mathbf{N}}_i^k \cdot \vec{\mathbf{N}}_j^m d\Omega. \quad (75)$$

Очевидно, при $k \neq m$ как (74), так и (75) обращаются в ноль, поскольку $\vec{\mathbf{N}}_i^k$ и $\vec{\mathbf{N}}_j^m$ определены на различных прямоугольниках Ω_k и Ω_m . Если же $k = m$, то (74) и (75) можно записать в виде

$$e_{ij}^k = e_{ij}^{kk} = \int_{\Omega_k} (\text{rot } \vec{\mathbf{N}}_i^k) \cdot (\text{rot } \vec{\mathbf{N}}_j^k) d\Omega; \quad (76)$$

$$f_{ij}^k = f_{ij}^{kk} = \int_{\Omega_k} \vec{\mathbf{N}}_i^k \cdot \vec{\mathbf{N}}_j^k d\Omega. \quad (77)$$

Объединим эти величины в локальные матрицы

$$\mathbf{E}_k = \{e_{ij}^k\}_{i,j=1}^4; \quad \mathbf{F}_k = \{f_{ij}^k\}_{i,j=1}^4,$$

которые в силу свойства коммутативности скалярного произведения будут симметричными: $e_{ij}^k = e_{ji}^k$ и $f_{ij}^k = f_{ji}^k$.

При вычислении матриц \mathbf{F}_k заметим, что $\vec{\mathbf{N}}_1^k \uparrow \mathbf{i}$ и $\vec{\mathbf{N}}_2^k \uparrow \mathbf{i}$, тогда как $\vec{\mathbf{N}}_3^k \uparrow \mathbf{j}$ и $\vec{\mathbf{N}}_4^k \uparrow \mathbf{j}$. Это означает, что $f_{ij}^k = 0$, если $i \in \{1, 2\}$ и $j \in \{3, 4\}$ ²⁰. Таким образом, \mathbf{F}_k имеет блочную структуру:

$$\mathbf{F}_k = \left[\begin{array}{cc|cc} \bullet & \bullet & & \\ \bullet & \bullet & & \\ \hline & & \bullet & \bullet \\ & & \bullet & \bullet \end{array} \right].$$

²⁰И, поскольку матрица симметрична, наоборот, при $i \in \{3, 4\}$ и $j \in \{1, 2\}$.

Учитывая что $i \cdot i = j \cdot j = 1$ и пользуясь формулами (64)–(67), вычислим интегралы (77):

$$f_{11}^k = \frac{1}{\ell_y^2} \int_{x_0^k}^{x_0^k + \ell_x} \int_{y_0^k}^{y_0^k + \ell_y} \left[\frac{\ell_y}{2} + (y_c - y) \right]^2 dy dx = \frac{\ell_x \ell_y}{3};$$

$$f_{22}^k = \frac{1}{\ell_y^2} \int_{x_0^k}^{x_0^k + \ell_x} \int_{y_0^k}^{y_0^k + \ell_y} \left[\frac{\ell_y}{2} + (y - y_c) \right]^2 dy dx = \frac{\ell_x \ell_y}{3};$$

$$f_{33}^k = \frac{1}{\ell_x^2} \int_{y_0^k}^{y_0^k + \ell_y} \int_{x_0^k}^{x_0^k + \ell_x} \left[\frac{\ell_x}{2} + (x_c - x) \right]^2 dx dy = \frac{\ell_x \ell_y}{3};$$

$$f_{44}^k = \frac{1}{\ell_x^2} \int_{y_0^k}^{y_0^k + \ell_y} \int_{x_0^k}^{x_0^k + \ell_x} \left[\frac{\ell_x}{2} + (x - x_c) \right]^2 dx dy = \frac{\ell_x \ell_y}{3};$$

$$f_{12}^k = \frac{1}{\ell_x \ell_y} \int_{x_0^k}^{x_0^k + \ell_x} \int_{y_0^k}^{y_0^k + \ell_y} \left[\frac{\ell_y}{2} + (y_c - y) \right] \left[\frac{\ell_y}{2} + (y - y_c) \right] dy dx = \frac{\ell_x \ell_y}{6};$$

$$f_{34}^k = \frac{1}{\ell_x \ell_y} \int_{y_0^k}^{y_0^k + \ell_y} \int_{x_0^k}^{x_0^k + \ell_x} \left[\frac{\ell_x}{2} + (x_c - x) \right] \left[\frac{\ell_x}{2} + (x - x_c) \right] dx dy = \frac{\ell_x \ell_y}{6},$$

(здесь $x_c = x_0^k + \ell_x/2$, $y_c = y_0^k + \ell_y/2$).

Таким образом,

$$F_k = \frac{\ell_x \ell_y}{6} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]. \quad (78)$$

Для нахождения матрицы \vec{E}_k достаточно заметить, что $\text{rot } \vec{N}_i^k = \text{const}$, причем $\text{rot } \vec{N}_i^k \uparrow \mathbf{k}$ (см. (70)). Поэтому интегралы (76) равны

$$e_{ij}^k = \|\text{rot } \vec{N}_i^k\| \|\text{rot } \vec{N}_j^k\| \text{mes } \Omega_k. \quad (79)$$

Для прямоугольных элементов $\text{mes } \Omega_k = l_x l_y$. Тогда, подставляя (70) в (79), получим

$$E_k = \left[\begin{array}{cc|cc} l_x/l_y & -l_x/l_y & -1 & 1 \\ -l_x/l_y & l_x/l_y & 1 & -1 \\ \hline -1 & 1 & l_y/l_x & -l_y/l_x \\ 1 & -1 & -l_y/l_x & l_y/l_x \end{array} \right]. \quad (80)$$

5. Векторный МКЭ на треугольных элементах

5.1. Векторные базисные функции на треугольниках

В случае, когда для дискретизации области Ω используются произвольные треугольники со сторонами, не параллельными координатным осям, построение векторных базисных функций оказывается более сложным.

Введем нумерацию вершин и ребер треугольника (рис. 7) и построим на нем систему барицентрических L-координат (см. приложение 2).

Рассмотрим векторные функции вида

$$\vec{W}_{ij} = L_i \text{grad } L_j - L_j \text{grad } L_i \quad (81)$$

и вычислим их дивергенцию и ротор.

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{W}_{ij} &= \text{div} (L_i \text{grad } L_j) - \text{div} (L_j \text{grad } L_i) = \\ &= L_i \text{div grad } L_j + (\text{grad } L_j) \cdot (\text{grad } L_i) - \\ &\quad - (L_j \text{div grad } L_i + (\text{grad } L_i) \cdot (\text{grad } L_j)) = \\ &= L_i \Delta L_j - L_j \Delta L_i = 0, \end{aligned} \quad (82)$$

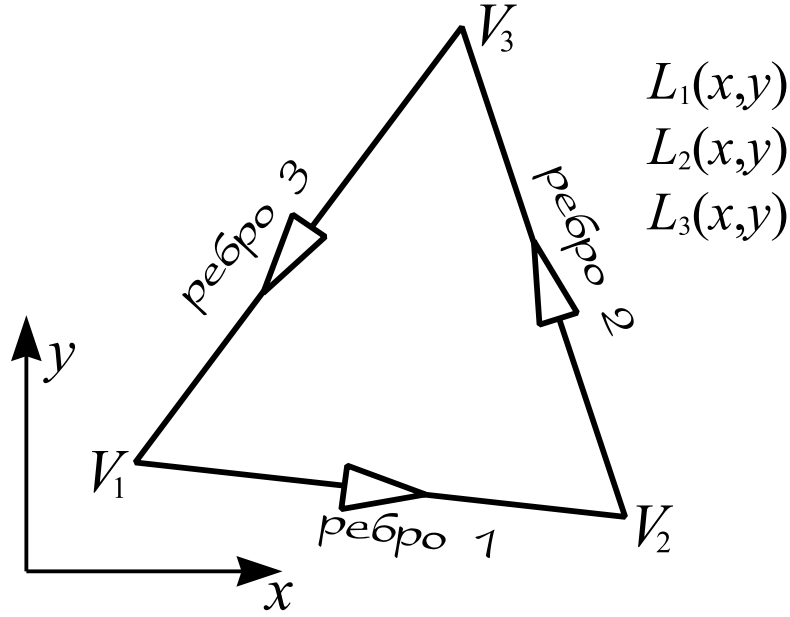


Рис. 7. Треугольный конечный элемент в пространстве \mathbb{R}^2 .

$$\begin{aligned}
 \text{rot } \vec{W}_{ij} &= \text{rot} (L_i \text{grad } L_j) - \text{rot} (L_j \text{grad } L_i) = \\
 &= \underbrace{L_i \text{rot grad } L_j}_0 + (\text{grad } L_i) \times (\text{grad } L_j) - \\
 &\quad - \underbrace{(L_j \text{rot grad } L_i)}_0 + (\text{grad } L_j) \times (\text{grad } L_i) = \\
 &= (\text{grad } L_i) \times (\text{grad } L_j) - (\text{grad } L_j) \times (\text{grad } L_i) = \\
 &= 2 (\text{grad } L_i) \times (\text{grad } L_j) = \text{const} . \tag{83}
 \end{aligned}$$

Исследуем поведение функций \vec{W} на ребрах треугольника. Рассмотрим, например, функцию \vec{W}_{12} .

Прежде всего заметим, что на ребре 3 обращается в ноль функция L_2 , а на ребре 2 — функция L_1 . Отсюда нетрудно видеть, что на этих двух ребрах $(\vec{W}_{12})_\tau \equiv 0$.

На оставшемся ребре 1 обращается в ноль функция L_3 , а потому справедливо соотношение

$$(L_1 + L_2) \Big|_{V_1-V_2} = 1 . \tag{84}$$

Ребро 1 связывает вершины 1 и 2. Пусть \vec{e}_1 — это вектор единичной длины, направленный от V_1 к V_2 . Функция L_1 линейно убывает от 1 в V_1 до 0 в V_2 (рис. 8), поэтому ее градиент постоянен и скалярное произведение $\vec{e}_1 \cdot \text{grad } L_1$ равно

$$\vec{e}_1 \cdot \text{grad } L_1 = -\frac{1}{|V_1 V_2|}. \quad (85)$$

Аналогично,

$$\vec{e}_1 \cdot \text{grad } L_2 = \frac{1}{|V_1 V_2|}. \quad (86)$$

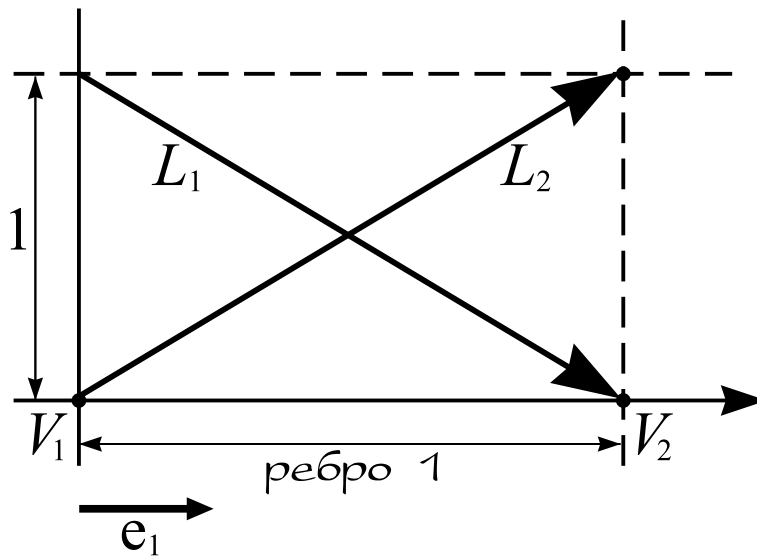


Рис. 8. L-координаты вдоль 1-го ребра.

Объединим формулы (81), (84), (85) и (86):

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{W}_{12} \Big|_{V_1 - V_2} = \frac{L_1 + L_2}{|V_1 V_2|} = \frac{1}{\ell_1}, \quad (87)$$

где ℓ_1 — длина 1-го ребра.

Соотношение (87) означает, что функция \vec{W}_{12} имеет вдоль одной из сторон треугольника постоянную ненулевую тангенциальную составляющую, тогда как вдоль двух других сторон эта составляющая обращается в ноль. Таким образом, $\vec{W}_{i,j} \in \mathbb{H}(\text{div}^0, \Omega)$.

Графическое изображение таких функций достаточно сложно, однако существует следующая простая интерпретация: силовые линии

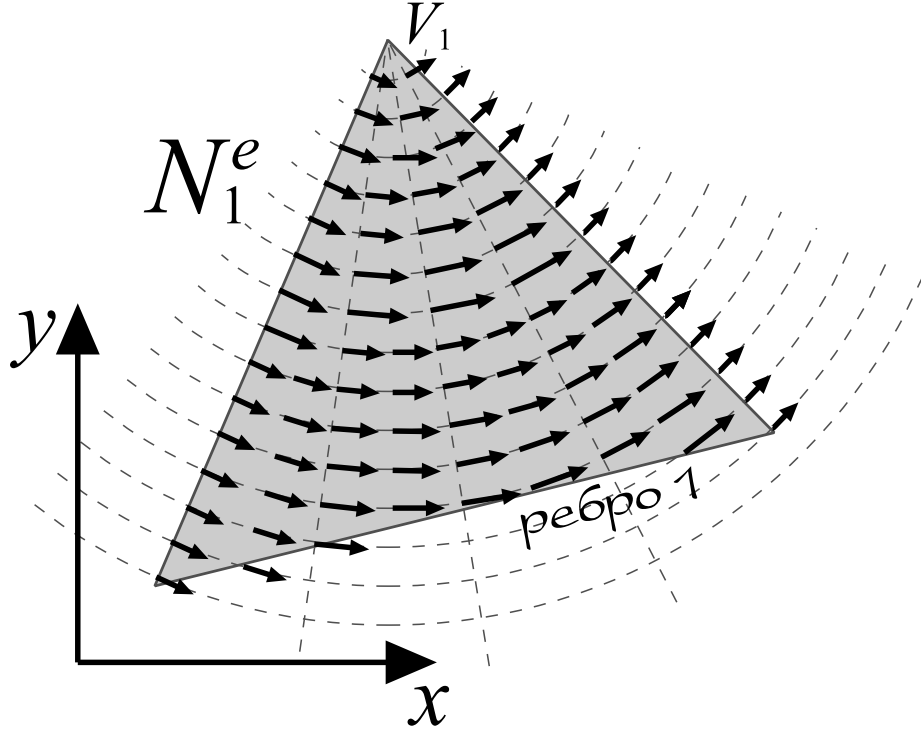


Рис. 9. Базисная векторная функция на треугольном конечном элементе.

(линии тока) поля, описываемого функциями \vec{W} , являются концентрическими окружностями с общим центром в вершине треугольника, противоположной той стороне, вдоль которой поле имеет ненулевую постоянную тангенциальную составляющую (рис. 9).

Домножим функции \vec{W}_{12} , \vec{W}_{23} и \vec{W}_{31} на длины соответствующих ребер, с тем чтобы обеспечить равенство единице постоянных тангенциальных компонент:

$$\vec{N}_1 = \vec{W}_{12} \ell_1; \quad (88)$$

$$\vec{N}_2 = \vec{W}_{23} \ell_2; \quad (89)$$

$$\vec{N}_3 = \vec{W}_{31} \ell_3. \quad (90)$$

Как было показано ранее (см. (82)), эти функции дивергентно-свободны и, следовательно, могут быть использованы в качестве базисных для представления поля на треугольном КЭ в виде

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^3 \vec{N}_i \vec{E}_{(i)}, \quad (91)$$

являющемся аналогом (68).

Домножение функций \vec{N} на орт \mathbf{k} даст функции

$$\vec{M}_i = \mathbf{k} \times \vec{N}_i, \quad (92)$$

которые являются *роторно-свободными* (аналог (71)).

Продолжая исследовать функцию \vec{W}_{12} и принимая во внимание геометрическую интерпретацию выражения (81), заметим, что это выражение может быть достаточно просто записано в полярных координатах.

Пусть центр координат (ϱ, φ) расположен в вершине V_3 . Тогда, если $\vec{\varphi}$ — это единичный вектор, направленный по касательной к окружности с центром в начале координат в направлении возрастания угла φ , то

$$\vec{N}_1 = \frac{\varrho}{h_3} \vec{\varphi}.$$

Аналогично,

$$\vec{M}_1 = -\frac{\varrho}{h_3} \vec{\varrho},$$

где $\vec{\varrho}$ — единичный вектор, направленный вдоль луча, исходящего из начала координат.

Подобным же образом определяются функции \vec{N}_2, \vec{N}_3 и \vec{M}_2, \vec{M}_3 .

Замечание. Хотя три компоненты $\mathbf{E}_{(1)}, \mathbf{E}_{(2)}, \mathbf{E}_{(3)}$ однозначно определяют поле $\vec{\mathbf{E}}$ на треугольном КЭ, для его представления в обычном виде $\vec{\mathbf{E}} = (\mathbf{E}_x, \mathbf{E}_y)^T$ необходимо вычисление проекций на орты \mathbf{i} и \mathbf{j} . В случае прямоугольных КЭ этого не требовалось, так как стороны прямоугольников полагались параллельными координатным осям и каждая из компонент $\mathbf{E}_{(k)}$ была сонаправлена с одним из ортов (см. сноску 16 на стр. 31). Подробнее см. разд. 5.3.

5.2. Вычисление локальных матриц

Рассуждения о вычислении локальных матриц конечных элементов остаются теми же, что в разд. 4.2; как и прежде, необходимо нахождение интегралов (76) и (77). Однако интегралы оказываются более сложными; кроме того, матрицы \mathbf{E}_k и \mathbf{F}_k теперь имеют размерность 3×3 , а не 4×4 .

Для вычисления E_k найдем ротор от базисных функций \vec{N} , воспользовавшись выражением (83).

Из формул (122)–(124) имеем

$$\text{grad } L_1 = \left(\frac{Y_2 - Y_3}{D}, \frac{X_3 - X_2}{D}, 0 \right)^T; \quad (93)$$

$$\text{grad } L_2 = \left(\frac{Y_3 - Y_1}{D}, \frac{X_1 - X_3}{D}, 0 \right)^T; \quad (94)$$

$$\text{grad } L_3 = \left(\frac{Y_1 - Y_2}{D}, \frac{X_2 - X_1}{D}, 0 \right)^T. \quad (95)$$

Тогда для функции \vec{N}_1

$$\begin{aligned} (\text{grad } L_1) \times (\text{grad } L_2) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{Y_2 - Y_3}{D} & \frac{X_3 - X_2}{D} & 0 \\ \frac{Y_3 - Y_1}{D} & \frac{X_1 - X_3}{D} & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{X_1(Y_2 - Y_3) + X_2(Y_3 - Y_1) + X_3(Y_1 - Y_2)}{D^2} \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Сравнивая выражение в числителе с (125), получаем

$$(\text{grad } L_1) \times (\text{grad } L_2) = \frac{1}{D} \mathbf{k},$$

откуда

$$\text{rot } \vec{N}_1 = 2\ell_1 (\text{grad } L_1) \times (\text{grad } L_2) = \frac{2\ell_1}{D} \mathbf{k}. \quad (96)$$

Аналогично,

$$\text{rot } \vec{N}_2 = \frac{2\ell_2}{D} \mathbf{k}; \quad (97)$$

$$\text{rot } \vec{N}_3 = \frac{2\ell_3}{D} \mathbf{k}. \quad (98)$$

Поскольку $\text{rot } \vec{N}_i = \text{const}$ и $\text{rot } \vec{N}_i \uparrow \mathbf{k}$, воспользуемся формулой (79). При этом учтем, что, согласно (128), $D^2 = |D|^2 = 4\text{mes}^2 \Omega_k$:

$$e_{ij}^k = \frac{4\ell_i \ell_j}{D^2} \text{mes } \Omega_k = \frac{4\ell_i \ell_j}{4\text{mes}^2 \Omega_k} \text{mes } \Omega_k = \frac{\ell_i \ell_j}{\text{mes } \Omega_k}.$$

Окончательно,

$$E_k = \frac{1}{\text{mes } \Omega_k} \begin{pmatrix} \ell_1^2 & \ell_1 \ell_2 & \ell_1 \ell_3 \\ \ell_1 \ell_2 & \ell_2^2 & \ell_2 \ell_3 \\ \ell_1 \ell_3 & \ell_2 \ell_3 & \ell_3^2 \end{pmatrix}. \quad (99)$$

Для вычисления F_k воспользуемся обозначениями (32)–(34), и введем новое обозначение

$$g_{ij} = b_i b_j + c_i c_j. \quad (100)$$

Тогда можно записать:

$$\text{grad } L_i = \frac{1}{D} (b_i, c_i, 0)^T. \quad (101)$$

$$(\text{grad } L_i) \cdot (\text{grad } L_j) = \frac{g_{ij}}{D^2} = \frac{g_{ij}}{4 \text{mes}^2 \Omega_k}. \quad (102)$$

Нам также понадобятся следующие выражения, выводимые из формулы (126):

$$\int_{\Omega_k} L_i L_j d\Omega = 2 \frac{1! 1! 0!}{(1 + 1 + 0 + 2)!} \text{mes } \Omega_k = \frac{\text{mes } \Omega_k}{12}, \quad i \neq j; \quad (103)$$

$$\int_{\Omega_k} L_i^2 d\Omega = 2 \frac{2! 0! 0!}{(2 + 0 + 0 + 2)!} \text{mes } \Omega_k = \frac{\text{mes } \Omega_k}{6}. \quad (104)$$

Найдем теперь элементы матрицы F_k , пользуясь формулами (81) и (88)–(90). Для краткости наряду с обозначением $\text{grad } L_i$ будем пользоваться записью ∇L_i .

Для элемента f_{11} имеем

$$\begin{aligned} \vec{N}_1 \cdot \vec{N}_1 &= \ell_1^2 (L_1 \nabla L_2 - L_2 \nabla L_1) \cdot (L_1 \nabla L_2 - L_2 \nabla L_1) = \\ &= \ell_1^2 (L_1^2 (\nabla L_1 \cdot \nabla L_1) - 2L_1 L_2 (\nabla L_1 \cdot \nabla L_2) + L_2^2 (\nabla L_2 \cdot \nabla L_2)) = \\ &= \frac{\ell_1^2}{4 \text{mes}^2 \Omega_k} (g_{11} L_1^2 - 2g_{12} L_1 L_2 + g_{22} L_2^2). \end{aligned}$$

Интегрируя это выражение²¹ по области Ω_k , с использованием формул (103)–(104) получаем

$$f_{11} = \int_{\Omega_k} \vec{N}_1 \cdot \vec{N}_1 d\Omega = \frac{\ell_1^2}{24 \text{mes } \Omega_k} (g_{11} - g_{12} + g_{22}).$$

²¹В нем $g_{ij} = \text{const}$.

Аналогично находим элементы f_{22} и f_{33} :

$$f_{22} = \frac{\ell_2^2}{24\text{mes } \Omega_k} (g_{22} - g_{23} + g_{33});$$

$$f_{33} = \frac{\ell_3^2}{24\text{mes } \Omega_k} (g_{33} - g_{31} + g_{11}).$$

Для элементов $f_{12} = f_{21}$ имеем

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{N}}_1 \cdot \vec{\mathbf{N}}_2 &= \ell_1 \ell_2 (L_1 \nabla L_2 - L_2 \nabla L_1) \cdot (L_2 \nabla L_3 - L_3 \nabla L_2) = \\ &= \ell_1 \ell_2 (L_1 L_2 (\nabla L_2 \cdot \nabla L_3) - L_1 L_3 (\nabla L_2 \cdot \nabla L_2) - \\ &\quad - L_2^2 (\nabla L_1 \cdot \nabla L_3) + L_2 L_3 (\nabla L_1 \cdot \nabla L_2)) = \\ &= \frac{\ell_1 \ell_2}{4\text{mes}^2 \Omega_k} (g_{23} L_1 L_2 - g_{22} L_1 L_3 - g_{13} L_2^2 + g_{12} L_2 L_3). \end{aligned}$$

Интегрируя по Ω_k , получаем

$$f_{12} = f_{21} = \int_{\Omega_k} \vec{\mathbf{N}}_1 \cdot \vec{\mathbf{N}}_2 d\Omega = \frac{\ell_1 \ell_2}{48\text{mes } \Omega_k} (g_{23} - g_{22} - 2g_{13} + g_{12}).$$

Аналогично находим остальные внедиагональные элементы:

$$f_{13} = f_{31} = \frac{\ell_1 \ell_3}{48\text{mes } \Omega_k} (g_{21} - 2g_{23} - g_{11} + g_{13}).$$

$$f_{23} = f_{32} = \frac{\ell_2 \ell_3}{48\text{mes } \Omega_k} (g_{13} - g_{33} - 2g_{12} + g_{23}).$$

5.3. Связь локального и глобального представлений поля

Формула (91) описывает локальное представление поля $\vec{\mathbf{E}}$ на треугольном КЭ. В этом представлении вектор поля задается тремя скалярными компонентами, каждый из которых определяет вклад одной из базисных функций $\vec{\mathbf{N}}$.

После генерации и решения глобальной СЛАУ ответ также будет найден для локальных представлений поля. Каждый из найденных коэффициентов вектора неизвестных равен норме вектора, направленного вдоль одного из ребер треугольников, образующих дискретизацию расчетной области.

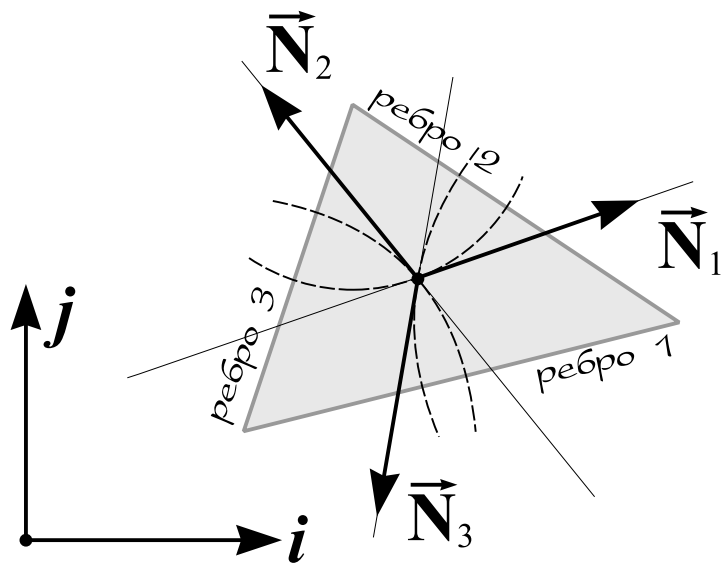


Рис. 10. Связь локального и глобального представления поля.

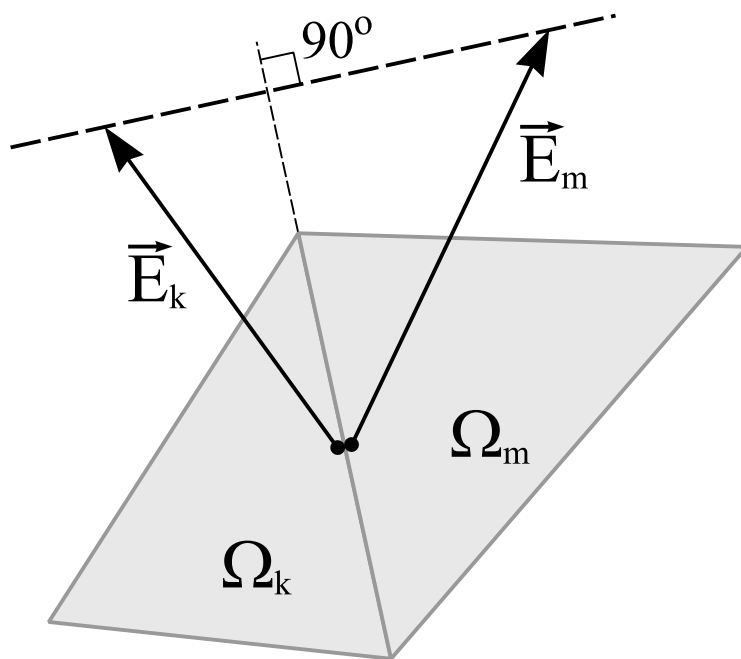


Рис. 11. Разрыв нормальной компоненты поля на межэлементной границе.

Однако для интерпретации и графического отображения полученных результатов необходимо представление поля не в виде (91), а в обычном виде

$$\vec{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_x \mathbf{i} + \mathbf{E}_y \mathbf{j},$$

который мы будем называть *глобальным представлением поля* (см. рис. 10).

Таким образом, возникает задача нахождения зависимости, позволяющей осуществить переход от $(\mathbf{E}_{(1)}, \mathbf{E}_{(2)}, \mathbf{E}_{(3)})^T$ к $(\mathbf{E}_x, \mathbf{E}_y)^T$. Для ее решения воспользуемся формулами (88)–(90) и (91):

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_x \\ \mathbf{E}_y \end{bmatrix} &= \vec{\mathbf{W}}_{12} \ell_1 \mathbf{E}_{(1)} + \vec{\mathbf{W}}_{23} \ell_2 \mathbf{E}_{(2)} + \vec{\mathbf{W}}_{31} \ell_3 \mathbf{E}_{(3)} = \\ &= \left[\vec{\mathbf{W}}_{12} \mid \vec{\mathbf{W}}_{23} \mid \vec{\mathbf{W}}_{31} \right] \begin{bmatrix} \ell_1 \mathbf{E}_{(1)} \\ \ell_2 \mathbf{E}_{(2)} \\ \ell_3 \mathbf{E}_{(3)} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (105)$$

Далее выразим функции $\vec{\mathbf{W}}$ не в L-координатах, а в декартовых координатах (x, y) . Для этого наряду с обозначениями (32)–(34) введем обозначение

$$d_{ij} = X_i Y_j - X_j Y_i. \quad (106)$$

Связь между декартовыми и L-координатами (122)–(124) тогда может быть записана в более простом виде:

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{D} (b_1 x + c_1 y + d_{23}); \\ L_2 &= \frac{1}{D} (b_2 x + c_2 y + d_{31}); \\ L_3 &= \frac{1}{D} (b_3 x + c_3 y + d_{12}); \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения и формулу для градиента (101)²² в (81), получим

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{W}}_{12} &= \frac{1}{D^2} \left\{ (b_1 x + c_1 y + d_{23}) \begin{bmatrix} b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} - (b_2 x + c_2 y + d_{31}) \begin{bmatrix} b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} \right\} = \\ &= \frac{1}{D^2} \begin{bmatrix} (b_2 c_1 - b_1 c_2) y + (b_2 d_{23} - b_1 d_{31}) \\ (b_1 c_2 - b_2 c_1) x + (c_2 d_{23} - c_1 d_{31}) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (107)$$

²²Последний нулевой коэффициент в этой формуле, который в предыдущем разделе был необходим для нахождения векторных произведений, сейчас можно опустить.

Аналогично,

$$\vec{W}_{23} = \frac{1}{D^2} \begin{bmatrix} (b_3c_2 - b_2c_3)y + (b_3d_{31} - b_2d_{12}) \\ (b_2c_3 - b_3c_2)x + (c_3d_{31} - c_2d_{12}) \end{bmatrix}; \quad (108)$$

$$\vec{W}_{31} = \frac{1}{D^2} \begin{bmatrix} (b_1c_3 - b_3c_1)y + (b_1d_{12} - b_3d_{23}) \\ (b_3c_1 - b_1c_3)x + (c_1d_{12} - c_3d_{23}) \end{bmatrix}. \quad (109)$$

Заметим, что в каждой из формул (107)–(109) коэффициент при x отличается от коэффициента при y только своим знаком.

Упростим все коэффициенты, раскрывая их согласно (32)–(34) и (106).

$$\begin{aligned} b_2c_1 - b_1c_2 &= (Y_3 - Y_1)(X_3 - X_2) - (Y_2 - Y_3)(X_1 - X_3) = \\ &= (\underline{X_3Y_3} - X_2Y_3 - X_3Y_1 + X_2Y_1) - \\ &\quad - (X_1Y_2 - X_3Y_2 - X_1Y_3 + \underline{X_3Y_3}) = \\ &= X_1(Y_3 - Y_2) + X_2(Y_1 - Y_3) + X_3(Y_2 - Y_1) \end{aligned}$$

Сравнивая правую часть этого выражения с (125), получаем

$$b_2c_1 - b_1c_2 = -D$$

Аналогично расписывая $(b_3c_2 - b_2c_3)$ и $(b_1c_3 - b_3c_1)$, обнаруживаем их равенство:

$$b_2c_1 - b_1c_2 = b_3c_2 - b_2c_3 = b_1c_3 - b_3c_1 = -D \quad (110)$$

Рассмотрим теперь свободные коэффициенты, зависящие от d_{ij} .

$$\begin{aligned} b_2d_{23} - b_1d_{31} &= (Y_3 - Y_1)(X_2Y_3 - X_3Y_2) - \\ &\quad - (Y_2 - Y_3)(X_3Y_1 - X_1Y_3) = \\ &= (X_2Y_3^2 - X_3Y_2Y_3 - X_2Y_1Y_3 + \underline{X_3Y_1Y_2}) - \\ &\quad - (\underline{X_3Y_1Y_2} - X_1Y_2Y_3 - X_3Y_1Y_3 + X_1Y_3^2) = \\ &= Y_3(X_2Y_3 - X_3Y_2 - X_2Y_1 + X_1Y_2 + X_3Y_1 - X_1Y_3) = \\ &= Y_3[X_1(Y_2 - Y_3) + X_2(Y_3 - Y_1) + X_3(Y_1 - Y_2)] = \\ &= DY_3. \end{aligned} \quad (111)$$

Аналогично,

$$b_3 d_{31} - b_2 d_{12} = DY_1; \quad (112)$$

$$b_1 d_{12} - b_3 d_{23} = DY_2. \quad (113)$$

Подобным же образом упрощаются оставшиеся коэффициенты:

$$c_2 d_{23} - c_1 d_{31} = -DX_3; \quad (114)$$

$$c_3 d_{31} - c_2 d_{12} = -DX_1; \quad (115)$$

$$c_1 d_{12} - c_3 d_{23} = -DX_2. \quad (116)$$

Заметим, что во всех коэффициентах присутствует D как множитель, в то время как в выражениях (107)–(109) D^2 присутствует как делитель. Их отношение $1/D$ запишем в виде²³

$$\frac{1}{D} = \frac{\operatorname{sgn} D}{|D|} = \frac{\operatorname{sgn} D}{2\operatorname{mes} \Omega}. \quad (117)$$

Подставляя выражения для коэффициентов (110)–(116) в функции (107)–(109); подставляя, в свою очередь, функции (107)–(109) в формулу (105) и учитывая запись (117), получаем искомую связь между локальным и глобальным представлениям поля:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_x \\ \mathbf{E}_y \end{bmatrix} = \frac{\operatorname{sgn} D}{2\operatorname{mes} \Omega} \begin{bmatrix} Y_3 - y & Y_1 - y & Y_2 - y \\ x - X_3 & x - X_1 & x - X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell_1 \mathbf{E}_{(1)} \\ \ell_2 \mathbf{E}_{(2)} \\ \ell_2 \mathbf{E}_{(2)} \end{bmatrix}. \quad (118)$$

Замечание 1. Множитель $\operatorname{sgn} D$ в (118) связан с ориентацией обхода вершин треугольника. Взаимная перестановка индексов двух вершин (переориентация обхода) означает перестановку двух строк в определителе D (125) и, как следствие, изменение его знака на противоположный. Вместе с этим изменяются на противоположные и направления векторов $\vec{\mathbf{N}}_i$.

Замечание 2. Формула (118) позволяет найти поле $\vec{\mathbf{E}}$ в любой точке треугольного КЭ, в том числе и на сторонах. Однако следует помнить, что способ построения базисных функций $\vec{\mathbf{N}}_i$ гарантирует непрерывность лишь тангенциальных компонент поля. Нормальная

²³Только из геометрических соображений, которые будут пояснены ниже; для программной реализации вид $1/D$ более удобен.

компонента на межэлементных границах терпит разрыв. Следовательно, если в некоторой точке общего для двух треугольников ребра найти поле относительно каждого из них, то результаты, вообще говоря, не совпадут²⁴. При этом разность векторов будет ортогональна к ребру (рис. 11).

Замечание 3. Формула (118) выведена в предположении, что связь между нумерацией ребер треугольника и его вершин именно такова, как на рис. 7 (ребро 1 соединяет V_1 и V_2 , ребро 2 — V_2 и V_3 , ребро 3 — V_3 и V_1). Следствием этой связи является тот факт, что в k -м столбце матрицы, присутствующей в (118), присутствуют координаты вершины, *противолежащей k -му ребру*. Если изменить связь между нумерацией вершин и ребер, столбцы матрицы должны быть соответствующим образом переставлены.

6. Структуры данных и ассемблирование глобальных матриц

Несмотря на то, что идеологии узлового и векторного МКЭ достаточно схожи, между ними имеется существенное геометрическое различие: в узловом МКЭ неизвестные величины ассоциированы с *вершинами* (т.е., точками дискретизации области), а в векторном — с *ребрами* (т.е., отрезками, соединяющими точки дискретизации).

Как следствие, возникает необходимость в использовании других структур данных и других методов работы с ними. Наиболее сложным оказывается случай, когда для дискретизации области применяется нерегулярная триангуляция.

6.1. Треугольные элементы

Рассмотрим отличия в представлении дискретизации области по сравнению с разд. 2.2, возникающие при использовании векторных КЭ.

Сразу же заметим, что от локальной и глобальной нумерации вершин треугольников необходимо перейти к локальной и глобальной

²⁴Разрыв одной из компонент поля происходит на границе раздела сред с различными физическими свойствами.

нумерации их ребер.

Построение локальной нумерации не вызывает особых проблем. В дополнение к множествам E и V , описанным в разд. 2.2, введем множество R , образованное ребрами треугольников дискретизации. Тогда, если имеется соответствие (22), для ребер можно ввести следующую локальную нумерацию:

$$e \leftrightarrow \langle v_1^e, v_2^e, v_3^e \rangle, \langle r_1^e, r_2^e, r_3^e \rangle, r_i^e = (v_i^e, v_{(i+1) \bmod 3}^e), \quad e \in E; v_i^e \in V; r_i^e \in R. \quad (119)$$

При такой нумерации сохраняется направление обхода треугольника, заданное порядком перечисления его вершин (рис. 12).

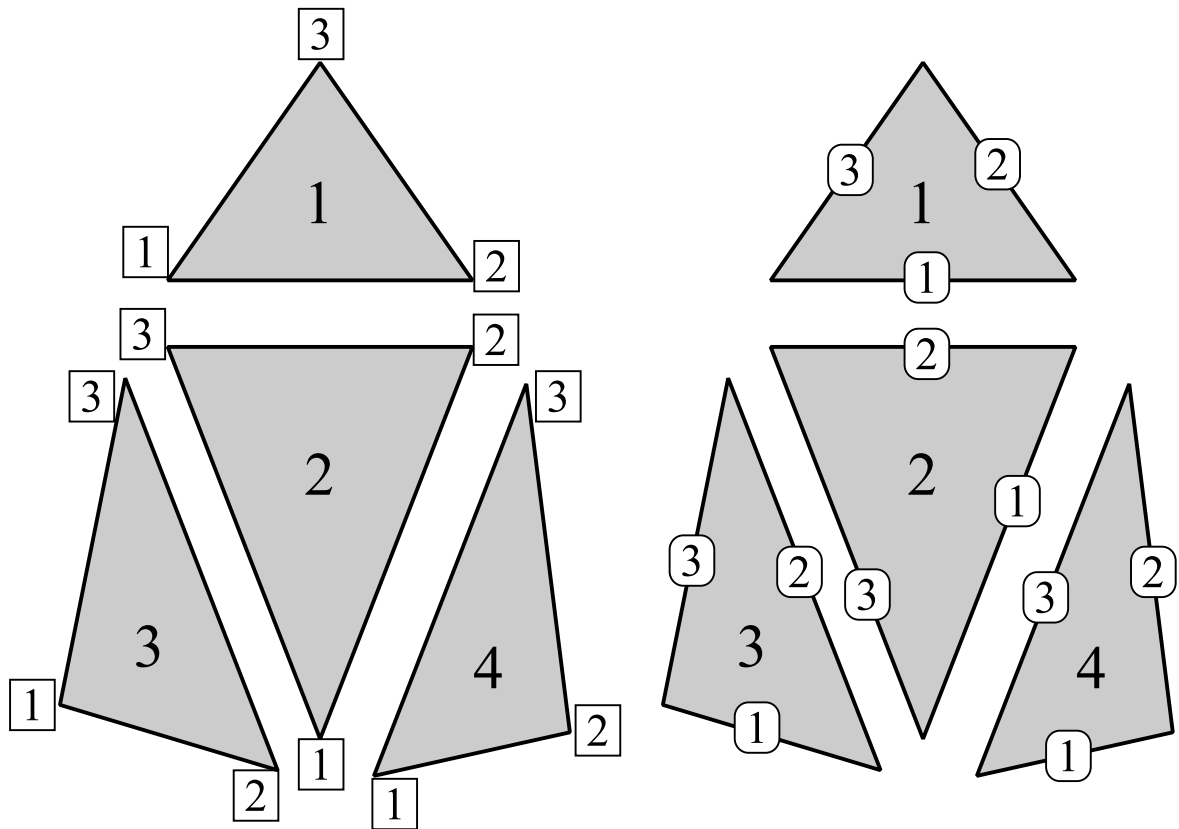
Процесс построения глобальной нумерации ребер сложнее. Если триангуляция нерегулярная, то построить какой-либо простой порядок их обхода нельзя. Один из возможных алгоритмов приведен на рис. 13; естественно, что различные алгоритмы обхода будут приводить к различным портретам глобальной СЛАУ, что, вообще говоря, может сказаться на эффективности процедур предобуславливания [2].

Результат применения приведенного алгоритма показан на рис. 14. Структура данных, описывающая дискретизацию области для векторного МКЭ, приведена в таблице 8.

Принцип ассемблирования глобальной матрицы остается тем же, что и в разд. 2.2: локальные матрицы расширяются до размеров глобальной и суммируются, при этом позиции ненулевых элементов определяются по соответствию локальной и глобальной нумерации. Однако число неизвестных (и, как следствие, размерность СЛАУ) меняется (в данном случае 9×9 по числу ребер). Результат ассемблирования приведен в таблице 9. Заметим, что ни один из коэффициентов не содержит более двух слагаемых — это является отражением того факта, что на плоскости одно ребро не может быть общим более чем для двух треугольников.

Краевые условия Дирихле учитываются таким же образом, как и в разд. 2.2, путем обнуления всех внедиагональных элементов соответствующих строк.

После решения глобальной СЛАУ для перехода от локального задания векторного поля к глобальному необходимо использовать соотношение (118).



□ локальная нумерация вершин

○ локальная нумерация ребер

| | | | |
|-----------------|------------------|------------------|------------------|
| $e \in \bar{E}$ | v_1^e | v_2^e | v_3^e |
| $r \in R$ | (v_1^e, v_2^e) | (v_2^e, v_3^e) | (v_3^e, v_1^e) |

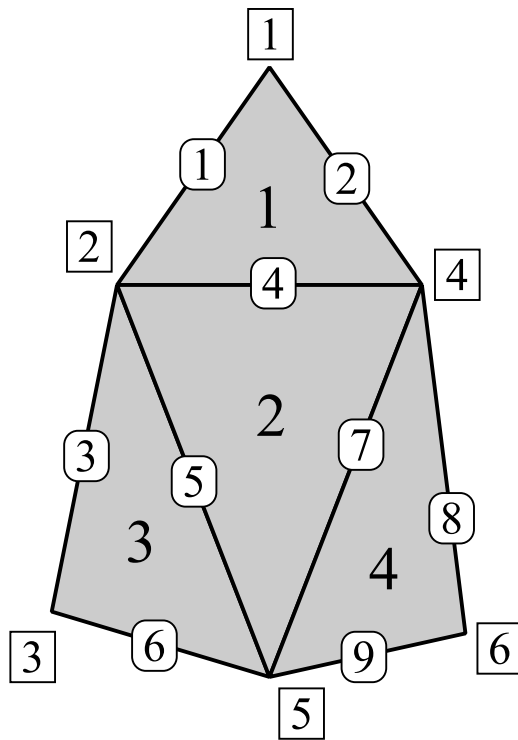
Рис. 12. Переход от локальной нумерации вершин треугольников к локальной нумерации ребер.

$k := 1$
 Для $i = \overline{1, n}$
 Построить список U_i вершин, смежных с i -ой
 Для всех $e \in U_i$
 Если ребро $(v_i, v_e) = (v_e, v_i)$ еще не занумеровано
 то занумеровать его числом k
 $k := k + 1$
 Продолжить перебор по списку U_i
 увеличить i

Рис. 13. Алгоритм построения глобальной нумерации ребер.

| Вершины | Ребра | Треугольники |
|--------------------|--------------------|------------------------------------|
| Всего: 6 | Всего: 9 | Всего: 4 |
| $v_1 = (x_1, y_1)$ | $r_1 = (v_1, v_2)$ | $(v_2, v_4, v_1), (r_4, r_2, r_1)$ |
| $v_2 = (x_2, y_2)$ | $r_2 = (v_1, v_4)$ | $(v_5, v_4, v_2), (r_7, r_4, r_5)$ |
| $v_3 = (x_3, y_3)$ | $r_3 = (v_2, v_3)$ | $(v_3, v_5, v_2), (r_6, r_5, r_3)$ |
| $v_4 = (x_4, y_4)$ | $r_4 = (v_2, v_4)$ | $(v_5, v_6, v_4), (r_9, r_8, r_7)$ |
| $v_5 = (x_5, y_5)$ | $r_5 = (v_2, v_5)$ | |
| $v_6 = (x_6, y_6)$ | $r_6 = (v_3, v_5)$ | |
| | $r_7 = (v_4, v_5)$ | |
| | $r_8 = (v_4, v_6)$ | |
| | $r_9 = (v_5, v_6)$ | |

Таблица 8. Структура данных, описывающая дискретизацию области.



- 1 глобальная нумерация вершин
- 1 глобальная нумерация ребер

| i | U_i |
|-----|---------|
| 1 | 2,4 |
| 2 | 1,3,4,5 |
| 3 | 2,5 |
| 4 | 1,2,5,6 |
| 5 | 2,3,4,6 |
| 6 | 4,5 |

Рис. 14. Построение глобальной нумерации ребер согласно алгоритму рис. 13.

$$\begin{bmatrix} K_{33}^1 & K_{32}^1 & 0 & K_{31}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{23}^1 & K_{22}^1 & 0 & K_{21}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{33}^3 & 0 & K_{32}^3 & K_{31}^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{13}^1 & K_{12}^1 & 0 & K_{11}^1 + K_{22}^2 & K_{23}^2 & 0 & K_{21}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{23}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^3 + K_{22}^3 & K_{21}^3 & K_{31}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{13}^3 & 0 & K_{12}^3 & K_{11}^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{12}^2 & K_{13}^2 & 0 & K_{11}^2 + K_{33}^4 & K_{32}^4 & K_{31}^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{23}^4 & K_{22}^4 & K_{21}^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{13}^4 & K_{12}^4 & K_{11}^4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[q_3^1 \quad q_2^1 \quad q_3^3 \quad q_1^1 + q_2^2 \quad q_3^2 + q_2^3 \quad q_1^3 \quad q_1^2 + q_3^4 \quad q_2^4 \quad q_1^4 \right]$$

Таблица 9. Матрица и правая часть глобальной СЛАУ

6.2. Прямоугольные элементы

Использование прямоугольных КЭ оказывается более простым, так как дискретизация области в этом случае регулярна. Используемые структуры данных аналогичны рассмотренным в предыдущем разделе, за тем лишь исключением, что каждый элемент образован четырьмя вершинами и ребрами.

Построение локальной нумерации ребер по сравнению с (119) практически не меняется:

$$e \leftrightarrow \langle v_1^e, v_2^e, v_3^e, v_4^e \rangle, \langle r_1^e, r_2^e, r_3^e, r_4^e \rangle, r_i^e = (v_i^e, v_{(i+1) \bmod 4}^e),$$

при этом направление обхода также сохраняется.

Построение глобальной нумерации ребер также достаточно просто и сводится к заданию некоторого порядка обхода образующих дискретизацию прямоугольников. На рис. 15–16 показаны примеры двух обходов и приведены портреты матриц соответствующих глобальных СЛАУ.

Принцип ассемблирования матриц не изменяется; как и в предыдущем разделе, каждый коэффициент может быть образован не более чем двумя слагаемыми.

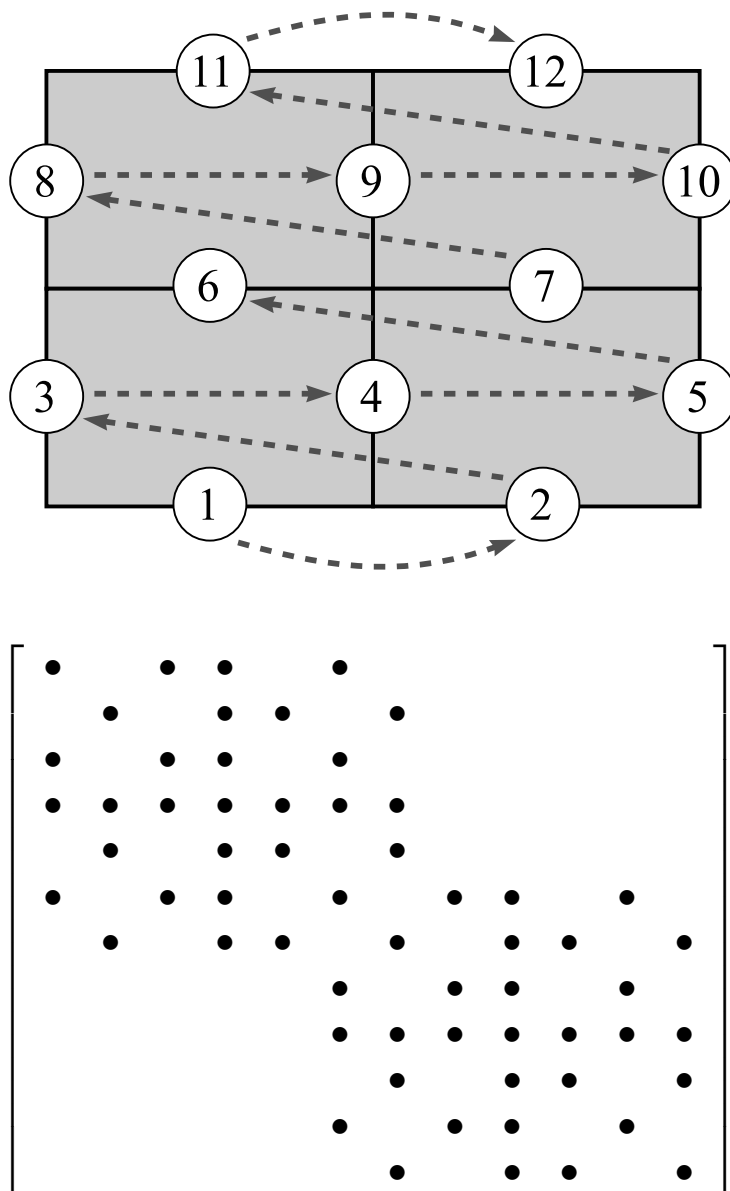


Рис. 15. Пример построения глобальной нумерации ребер для прямоугольников.

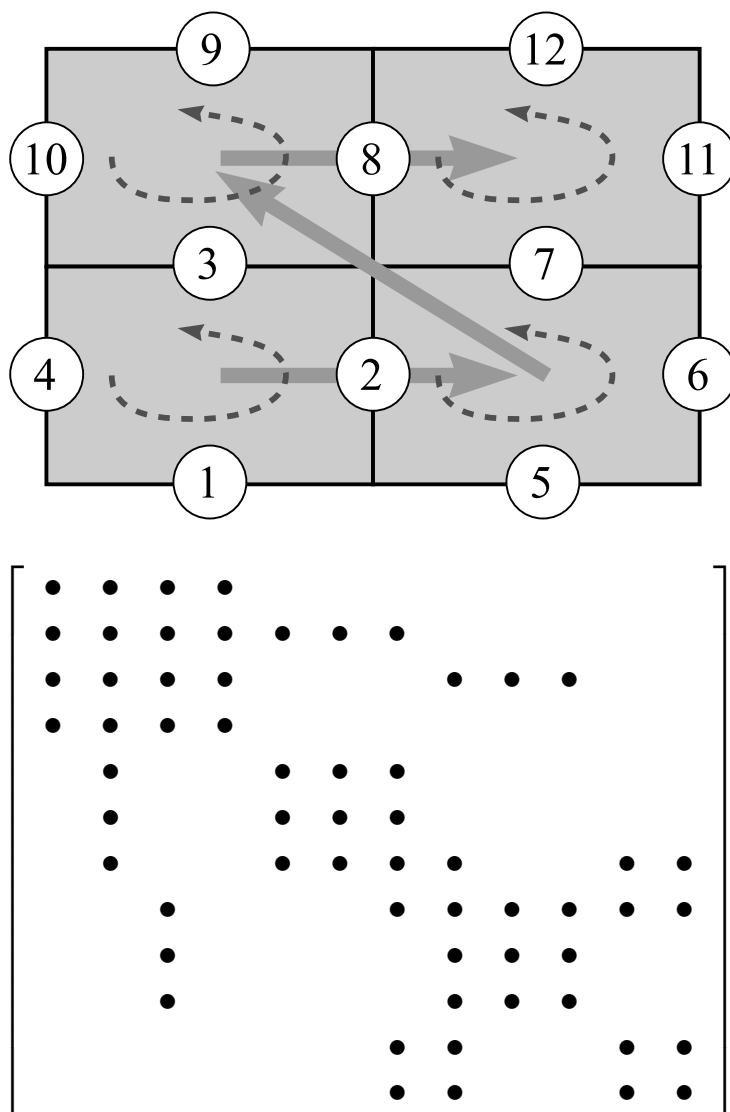


Рис. 16. Пример построения глобальной нумерации ребер для прямоугольников.

Приложение 1

Основные соотношения теории поля

В данном приложении приводятся формулы, описывающие свойства операций и операторов над векторными функциями. Эти свойства широко используются при выписывании вариационных постановок задач (см. например, разд. 3.4). Вывод таких соотношений можно найти, например, в [1].

Свойства скалярного и векторного произведения

Основные соотношения:

$$\begin{aligned}\vec{u} \times \vec{v} &= -\vec{v} \times \vec{u}; \quad \vec{u} \times \vec{u} \equiv 0; \\ \vec{u} \times (\vec{v} \pm \vec{w}) &= (\vec{u} \times \vec{v}) \pm (\vec{u} \times \vec{w}); \\ (\vec{u} \pm \vec{v}) \times \vec{w} &= (\vec{u} \times \vec{w}) \pm (\vec{v} \times \vec{w}).\end{aligned}$$

Тождество Якоби:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} + (\vec{v} \times \vec{w}) \times \vec{u} + (\vec{w} \times \vec{u}) \times \vec{v} \equiv 0.$$

Двойное произведение:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u}.$$

Смешанное произведение:

$$\begin{aligned}(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} &= (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u} = (\vec{w} \times \vec{u}) \cdot \vec{v} = \\ &= -(\vec{v} \times \vec{u}) \cdot \vec{w} = -(\vec{w} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = -(\vec{u} \times \vec{w}) \cdot \vec{v}.\end{aligned}$$

Свойства градиента

Для оператора градиента имеют место соотношения ($c = \text{const}$)

$$\text{grad}(u \pm v) = \text{grad } u \pm \text{grad } v;$$

$$\text{grad}(cu) = c \text{grad } u;$$

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}(uv) &= v \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} v ; \\ \operatorname{grad} \left(\frac{u}{v} \right) &= \frac{v \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v}{v^2} ; \\ \operatorname{grad} f(u) &= f'(u) \operatorname{grad} u .\end{aligned}$$

Свойства дивергенции

Для оператора дивергенции имеют место соотношения ($c = \text{const}$, $\vec{c} = \text{const}$)

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\vec{u} \pm \vec{v}) &= \operatorname{div} \vec{u} \pm \operatorname{div} \vec{v} ; \\ \operatorname{div}(c\vec{u}) &= c \operatorname{div} \vec{u} ; \\ \operatorname{div}(f\vec{u}) &= f \operatorname{div} \vec{u} + \vec{u} \cdot \operatorname{grad} f ; \\ \operatorname{div}(f\vec{c}) &= \vec{c} \cdot \operatorname{grad} f .\end{aligned}$$

Свойства ротора

Для оператора ротора имеют место соотношения

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\vec{u} \pm \vec{v}) &= \operatorname{rot} \vec{u} \pm \operatorname{rot} \vec{v} ; \\ \operatorname{rot}(f\vec{u}) &= f \operatorname{rot} \vec{u} + (\operatorname{grad} f) \times \vec{u} ; \\ \vec{v} \cdot \operatorname{rot} \vec{u} - \vec{u} \cdot \operatorname{rot} \vec{v} &= \operatorname{div}(\vec{u} \times \vec{v}) .\end{aligned}$$

Дифференциальные операции второго порядка

Оператором Лапласа (лапласианом) называется дифференциальный оператор

$$\Delta f = \nabla^2 f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f .$$

Операции, приводящие к тождественному нулю:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f \equiv 0 ; \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{u} \equiv 0 .$$

Связь двойного ротора с дивергенцией и градиентом:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} - (i\Delta u_x + j\Delta u_y + k\Delta u_z) .$$

Оператор Лапласа для векторной функции:

$$\Delta \vec{u} = i\Delta u_x + j\Delta u_y + k\Delta u_z = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} .$$

Векторные теоремы Грина

Первая теорема Грина:

$$\int_{\Omega} \left[p(\operatorname{rot} \vec{u} \cdot \operatorname{rot} \vec{v}) - \vec{u} \cdot \operatorname{rot} (p \operatorname{rot} \vec{v}) \right] d\Omega = \int_{\partial\Omega} p [(\vec{u} \times \operatorname{rot} \vec{v}) \cdot \vec{n}] dS.$$

Вторая теорема Грина:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[\vec{v} \cdot \operatorname{rot} (p \operatorname{rot} \vec{u}) - \vec{u} \cdot \operatorname{rot} (p \operatorname{rot} \vec{v}) \right] d\Omega = \\ = \int_{\partial\Omega} p \left[(\vec{u} \times \operatorname{rot} \vec{v} - \vec{v} \times \operatorname{rot} \vec{u}) \cdot \vec{n} \right] dS. \end{aligned}$$

Следствия из общей теоремы Стокса

Формула Стокса (S — незамкнутая гладкая поверхность в пространстве \mathbb{R}^3):

$$\int_S (\vec{n} \cdot \operatorname{rot} \vec{u}) dS = \int_{\partial S} \vec{u} \cdot d\vec{r}.$$

Формула Гаусса-Остроградского:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{u} d\Omega = \int_{\partial\Omega} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS.$$

Приложение 2

Барицентрические L-координаты

В МКЭ нахождение локальных матриц, требуемых для генерации глобальной СЛАУ, требует интегрирования функций по площади (в двумерном случае) или объему (в трехмерном случае) конечного элемента. В случае прямоугольных элементов интегрирование выполняется достаточно легко (см. разд. 4.2), однако для произвольных треугольников задание области интегрирования значительно усложняется.

Вычисления могут быть упрощены, если ввести локальную систему координат для каждого КЭ. Для треугольников и тетраэдров наиболее удобными оказываются L-координаты [6, 7].

Введем локальную нумерацию вершин и ребер треугольника (рис. 17). Пусть $[i]$ означает номер ребра, противоположного i -й вершине (для треугольника, изображенного на рис. 17, в этих обозначениях $[1] = 2$, $[2] = 3$, $[3] = 1$). Величины h_k будут обозначать высоты, опущенные из вершин k на сторону $[k]$.

Для произвольной точки m , расположенной внутри треугольника, определим расстояния $h_{[k]}^m$ от этой точки до каждой из сторон. Тогда величины

$$L_1 = \frac{h_{[1]}^m}{h_1}, \quad L_2 = \frac{h_{[2]}^m}{h_2}, \quad L_3 = \frac{h_{[3]}^m}{h_3} \quad (120)$$

называются L-координатами точки m .

Очевидно, каждая из величин L_k равна единице в вершине V_k и нулю на $[k]$ -м ребре. Если вершины V_k имеют координаты (X_k, Y_k) , то связь L-координат с декартовыми (x, y) выражается системой линейных уравнений

$$\begin{cases} x = X_1 L_1 + X_2 L_2 + X_3 L_3 \\ y = Y_1 L_1 + Y_2 L_2 + Y_3 L_3 \\ 1 = L_1 + L_2 + L_3 \end{cases} \quad (121)$$

Её решение относительно L_1, L_2, L_3 дает выражения

$$L_1 = \frac{1}{D} [x(Y_2 - Y_3) + y(X_3 - X_2) + (X_2 Y_3 - X_3 Y_2)]; \quad (122)$$

$$L_2 = \frac{1}{D} [x(Y_3 - Y_1) + y(X_1 - X_3) + (X_3 Y_1 - X_1 Y_3)]; \quad (123)$$

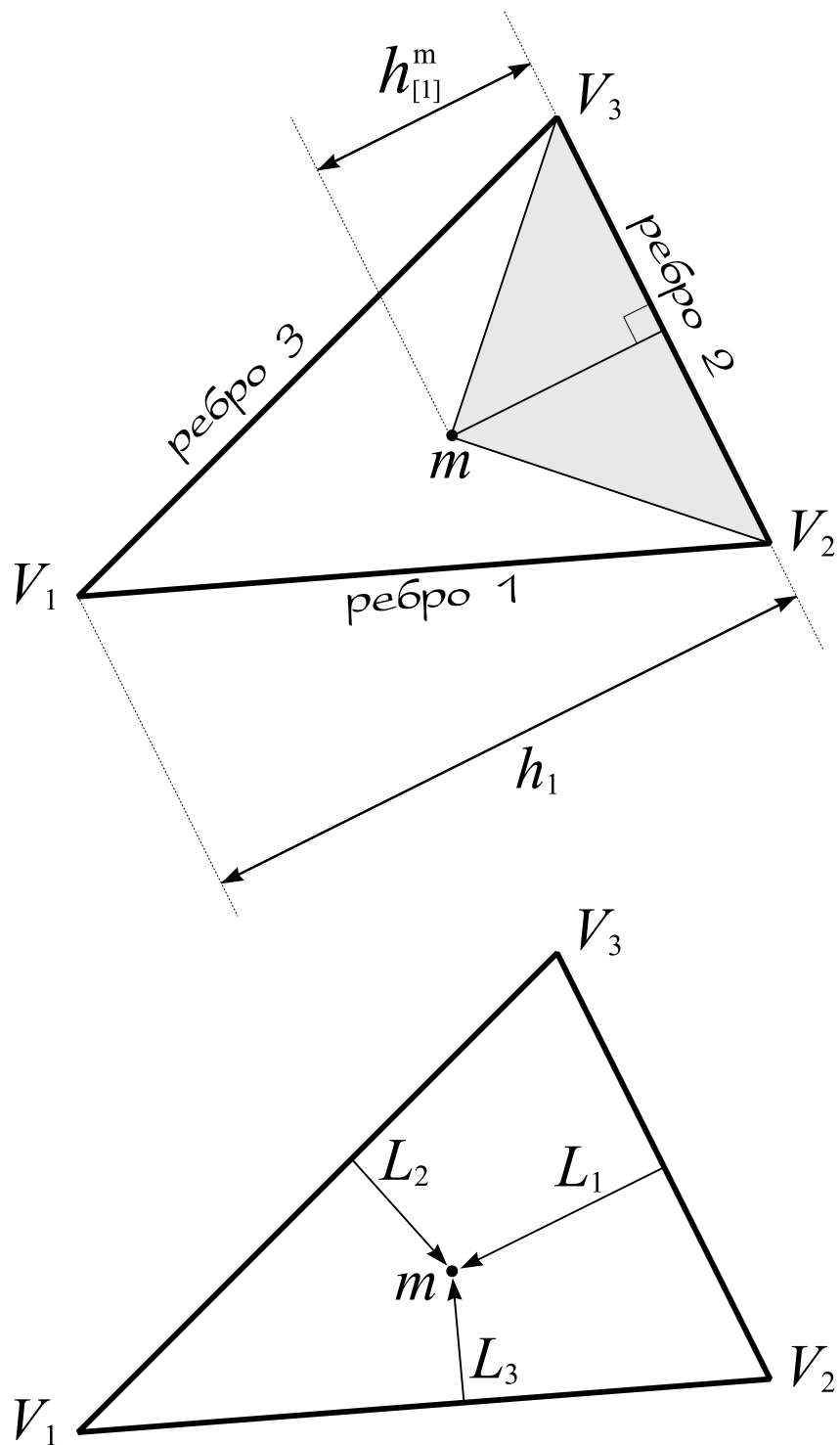


Рис. 17. Барицентрические L-координаты на треугольном КЭ

$$L_3 = \frac{1}{D} [x(Y_1 - Y_2) + y(X_2 - X_1) + (X_1 Y_2 - X_2 Y_1)], \quad (124)$$

где D – определитель матрицы системы

$$\begin{aligned} D &= \det \begin{pmatrix} 1 & X_1 & Y_1 \\ 1 & X_2 & Y_2 \\ 1 & X_3 & Y_3 \end{pmatrix} = \\ &= X_1(Y_2 - Y_3) + X_2(Y_3 - Y_1) + X_3(Y_1 - Y_2). \end{aligned} \quad (125)$$

Отсюда видно, что все L_k являются *линейными* функциями от (x, y) , а следовательно, $\text{grad } L_k = \text{const}$ и $\Delta L_k \equiv 0$. Кроме того, в силу (120) вектор $\text{grad } L_k$ ортогонален $[k]$ -му ребру треугольника.

Геометрический смысл L-координат можно установить следующим образом:

$$L_1 = \frac{h_{[1]}^m}{h_1} = \frac{\frac{1}{2}|V_2 V_3| h_{[1]}^m}{\frac{1}{2}|V_2 V_3| h_1} = \frac{S(\Delta V_2 m V_3)}{S(\Delta V_1 V_2 V_3)}.$$

Заметим также, что $L_k(x, y)$ представляют собой функции формы²⁵, используемые в узловом МКЭ (рис. 18).

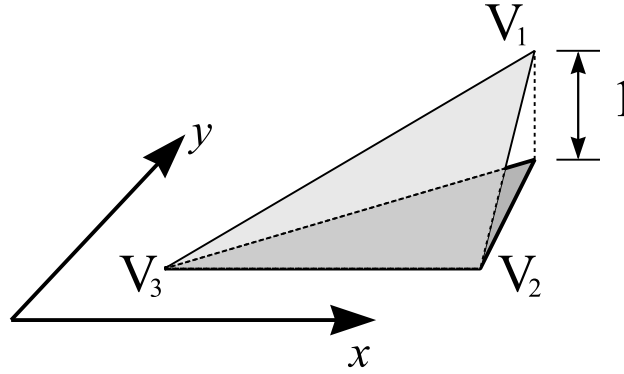


Рис. 18. Функция $L_1(x, y)$

Для интегрирования в L-координатах существуют следующие простые формулы:

$$\int_{\Omega} L_1^n L_2^m L_3^k d\Omega = 2 \frac{n! m! k!}{(n + m + k + 2)!} \text{mes } \Omega; \quad (126)$$

²⁵Для конечных элементов первого порядка, см. разд. 2.3.

$$\int_{V_i V_j} L_i^n L_j^m d\ell = \frac{n! m!}{(n + m + 1)!} |V_i V_j|. \quad (127)$$

Площадь треугольника в (126) может быть вычислена по формуле

$$\text{mes } \Omega = \frac{|D|}{2}. \quad (128)$$

(Если нумерация вершин треугольника такова, что его обход в порядке возрастания номеров происходит против часовой стрелки (как на рис. 17), то всегда $D > 0$. Обратно, при обходе треугольника по часовой стрелке всегда $D < 0$.)

L-координаты для трехмерного случая вводятся аналогично. Для них справедлива формула, являющаяся аналогом (126):

$$\int_{\Omega} L_1^n L_2^m L_3^k L_4^p d\Omega = 6 \frac{n! m! k! p!}{(n + m + k + p + 3)!} \text{mes } \Omega. \quad (129)$$

Приложение 3

Тестовая задача

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Рассмотрим в области Ω задачу

$$\operatorname{rot} \vec{u} = \vec{J} \quad (130)$$

с краевыми условиями

$$\vec{u} \Big|_{\partial\Omega} = \vec{u}_0. \quad (131)$$

Если в качестве функции \vec{u} выбрать

$$\vec{u}(x, y) = \begin{pmatrix} -\cos \pi x \sin \pi y \\ \sin \pi x \cos \pi y \end{pmatrix}, \quad (132)$$

то соответствующая ей правая часть \vec{J} будет иметь вид

$$\vec{J} = 2 \cos \pi x \cos \pi y \mathbf{k}. \quad (133)$$

Выбрав в качестве области Ω квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$, найдем значения функции \vec{u} на его сторонах:

$$\begin{aligned} \vec{u} \Big|_{x=0} &= -\sin \pi y \mathbf{i}; & \vec{u} \Big|_{x=1} &= \sin \pi y \mathbf{i}; \\ \vec{u} \Big|_{y=0} &= \sin \pi x \mathbf{j}; & \vec{u} \Big|_{y=1} &= -\sin \pi x \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что

$$\vec{n} \times \vec{u} \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (134)$$

Перейдем от уравнения (130) к новому уравнению

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} = \vec{F}, \quad (135)$$

где $\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{J}$. В операторном виде его можно записать как $\mathfrak{L}_0 \vec{u} = \vec{F}$, где $\mathfrak{L}_0 \vec{u} = [\operatorname{rot} \operatorname{rot}] \vec{u}$ — частный случай оператора (56) при $k = 0$.

Согласно выводам раздела 3.4, поскольку на всей границе выполняется однородное условие Дирихле (134), оператор \mathfrak{L}_0 будет являться самосопряженным. Правая часть уравнения (135), согласно (133), будет равна

$$\vec{F} = 2 \begin{pmatrix} -\cos \pi x \sin \pi y \\ \sin \pi x \cos \pi y \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (136)$$

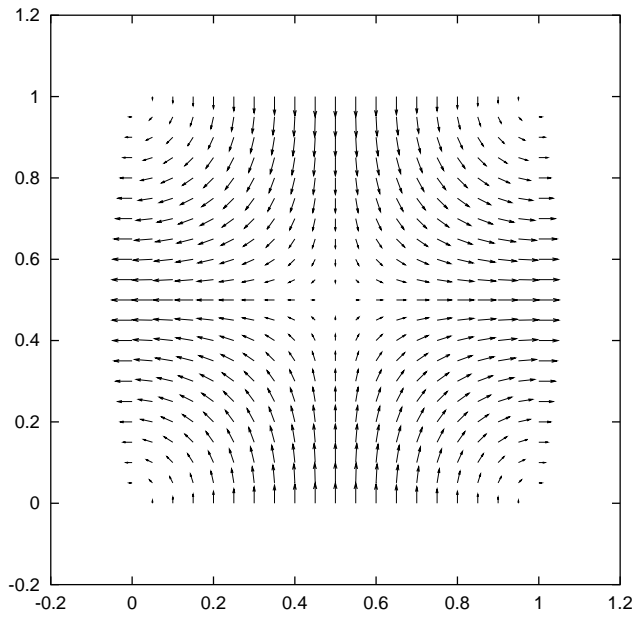


Рис. 19. Поле, описываемое формулой (132).

Задача (135)–(136) с краевыми условиями (134) и точным решением (132) может быть использована в качестве тестовой. Вариационная постановка для нее выводится такими же рассуждениями, как в разд. 3.4, однако в силу неоднородности уравнения (135) функционал будет иметь вид

$$\mathfrak{F}(\vec{v}) = \frac{1}{2} \langle \mathfrak{L}_0 \vec{v}, \vec{v} \rangle - \langle \vec{F}, \vec{v} \rangle.$$

Необходимые для решения локальные матрицы были выведены в разд. 4.2 (прямоугольные элементы) и 5.2 (треугольные элементы). Вид решения приведен на рис. 19.

Список литературы

- [1] Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. **Лекции по математическому анализу.** — М.: Высшая школа, 1999.
- [2] Баландин М. Ю., Шурина Э. П. **Методы решения СЛАУ большой размерности: Учеб. пособие.** — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2000.
- [3] Лаевский Ю. М. **Метод конечных элементов (основы теории, задачи).** — Новосибирск: Изд-во НГУ, 1999.
- [4] Лебедев В. И. **Функциональный анализ и вычислительная математика.** — М.: Физматлит, 2000.
- [5] Садовничий В.А. **Теория операторов.** — М.: Высшая школа, 1999.
- [6] Сегерлинд Л.Дж. **Применение метода конечных элементов.** — М.: Мир, 1979.
- [7] Соловейчик Ю.Г., Шурина Э.П. **Решение краевых задач в составных областях: Учеб. пособие.** — Новосибирск: Изд-во НЭТИ, 1986.
- [8] Рояк М.Э., Соловейчик Ю.Г., Шурина Э.П. **Сеточные методы решения задач математической физики: Учеб. пособие.** — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1998.
- [9] Стренг Г., Фикс Дж. **Теория метода конечных элементов.** — М.: Мир, 1977.
- [10] Сьярле Ф. **Метод конечных элементов для эллиптических задач.** — М.: Мир, 1982.
- [11] Bossavit A. **Computational Electromagnetism: Variational Formulations, Complementarity, Edge Elements.** — Academic Press, 1997.
- [12] Jianming J. **The Finite Element Method in Electromagnetics.** — John Wiley & Sons, 1993.

- [13] Nèdèlec J.C. **Mixed Finite Elements in \mathbb{R}^3** . — In: Numer. Math., Vol. 35, № 3 (1980), 315–341.
- [14] Nèdèlec J.C. **Èlèments finis mixtes incompressibles pour l'equation de Stokes dans \mathbb{R}^3** . — In: Numer. Math., Vol. 39 (1982), 97–112.
- [15] Ciarlet-Jr P., Jun Z. **Fully Discrete Finite Element Approaches for Time-Dependent Maxwell's Equations**. — In: Numer. Math., Vol. 82 (1999), 193–219.
- [16] Webb J.P. **Edge Elements and What They can do for You**. — In: IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 29, № 2, March 1993, 1460–1465.

Содержание

| | |
|---------------------------------------------------------------|-----------|
| Введение | 3 |
| Используемые обозначения и соглашения | 3 |
| 1 Некоторые сведения из функционального анализа | 5 |
| 1.1 Теоремы Рисса и Лакса–Мильграма | 5 |
| 1.2 Методы Галёркина и Ритца | 7 |
| 1.3 Пространства Неделека | 10 |
| 2 Технологические аспекты узлового МКЭ | 13 |
| 2.1 Переход к вариационной постановке | 14 |
| 2.2 Дискретизация области | 15 |
| 2.3 Выбор интерполяционных функций (функций формы) | 16 |
| 2.4 Генерация СЛАУ | 19 |
| 2.5 Учет краевых условий Дирихле | 21 |
| 3 Вариационные формулировки для векторных полей | 24 |
| 3.1 Уравнения Максвелла | 24 |
| 3.2 Условия на контактных границах | 25 |
| 3.3 Уравнение Гельмгольца | 26 |
| 3.4 Вариационная постановка для уравнения Гельмгольца | 27 |
| 4 Векторный МКЭ на прямоугольных элементах | 30 |
| 4.1 Векторные базисные функции на прямоугольниках . . | 30 |
| 4.2 Вычисление локальных матриц | 34 |
| 5 Векторный МКЭ на треугольных элементах | 37 |
| 5.1 Векторные базисные функции на треугольниках | 37 |
| 5.2 Вычисление локальных матриц | 41 |
| 5.3 Связь локального и глобального представлений поля . | 44 |
| 6 Структуры данных и ассемблирование глобальных матриц | 49 |
| 6.1 Треугольные элементы | 49 |
| 6.2 Прямоугольные элементы | 54 |
| Приложение 1. Основные соотношения теории поля | 57 |

| | |
|----------------------------------------------------|-----------|
| Приложение 2. Барицентрические L-координаты | 60 |
| Приложение 3. Тестовая задача | 64 |
| Список литературы | 66 |