

# МЕТОД ЗОММЕРФЕЛЬДА-МАЛЮЖИНЦА В ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ

В.М.Бабич, М.А.Лялинов, В.Э.Грикуров

Санкт-Петербургский государственный Университет, 2003 г.

УДК 534.26; 517.948.3  
ББК В 161.621  
Б12

**Бабич В.М.**

Б12 МЕТОД ЗОММЕРФЕЛЬДА-МАЛЮЖИНЦА В ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ  
/ Бабич Василий Михайлович / Лялинов Михаил Анатольевич / Грикуров Валерий Эду-  
ардович — СПб: ВВМ, 2004. — 103 с.: ил.

ISBN 5-9651-0003-5

Монография посвящена подробному изложению метода Зоммерфельда-Малюжинца решения задач дифракции в угловых областях; затрагиваются также некоторые связанные с этими задачами математические вопросы. Предназначена для студентов старших курсов, аспирантов и исследователей, интересующихся математической теорией дифракции и распространения волн.

ISBN 5-9651-0003-5

УДК 534.26; 517.948.3

ББК В 161.621

© Бабич В.М., 2003

© Лялинов М.А., 2003

© Грикуров В.Э., 2003

# Оглавление

<b>ВВЕДЕНИЕ</b>	<b>3</b>
Историческая справка . . . . .	4
АРНОЛЬД ЗОММЕРФЕЛЬД . . . . .	5
ГЕОРГИЙ ДАНИЛОВИЧ МАЛЮЖИНЕЦ . . . . .	7
<b>1 ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ В УГЛОВЫХ ОБЛАСТЯХ</b>	<b>9</b>
1.1 Об уравнении Гельмгольца и краевых условиях на сторонах клина . . . . .	9
1.2 Окрестность вершины и условия Мейкснера . . . . .	10
1.3 Падение плоской волны на клин и геометро-оптическая часть решения . . . . .	12
1.4 Условия излучения и завершение постановки задачи . . . . .	14
1.5 Единственность решения задачи дифракции на импедансном клине . . . . .	15
1.6 Единственность решения задачи дифракции на идеальном клине . . . . .	17
1.7 Теорема единственности и принцип предельного поглощения . . . . .	19
<b>2 ИНТЕГРАЛЫ ЗОММЕРФЕЛЬДА</b>	<b>23</b>
2.1 Вводные замечания . . . . .	23
2.2 О преобразовании Лапласа . . . . .	24
2.3 Представление решений уравнения Гельмгольца интегралами . . . . .	25
2.4 Теорема Малюжинца . . . . .	27
2.5 Дальнейшие сведения о функции $\Xi(z, \varphi)$ . . . . .	30
2.6 Асимптотический анализ интеграла . . . . .	32
2.7 О падающей и поверхностных волнах . . . . .	34
2.8 О поведении интегралов Зоммерфельда вблизи вершины . . . . .	35
<b>3 ИДЕАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ</b>	<b>37</b>
3.1 Краевые условия Дирихле . . . . .	37
3.2 О поведении решения в дальней зоне . . . . .	38
3.3 Краевые условия Неймана . . . . .	45
3.4 Задача о клине с излучающей гранью . . . . .	48
<b>4 ИМПЕДАНСНЫЕ КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ</b>	<b>53</b>
4.1 Уравнения Малюжинца . . . . .	53
4.2 Общая теория уравнений Малюжинца . . . . .	55
4.3 Функция Малюжинца и ее основные свойства . . . . .	56
4.4 Решение однородных уравнений . . . . .	59
4.5 Решение неоднородных уравнений . . . . .	59

4.5.1	Модифицированное преобразование Фурье и $\mathcal{S}$ -интегралы . . . . .	60
4.5.2	Непосредственное использование $\mathcal{S}$ -интегралов . . . . .	61
4.6	Решение функциональных уравнений в задаче Малюжинца . . . . .	63
4.7	Дальнее поле . . . . .	64
<b>5</b>	<b>Клин с тонким покрытием</b>	<b>67</b>
5.1	Постановка задачи . . . . .	67
5.2	Построение точного решения . . . . .	70
5.3	Дальнее поле . . . . .	76
5.3.1	Неравномерная асимптотика . . . . .	76
5.3.2	Равномерные формулы . . . . .	78
<b>6</b>	<b>Внешность клина с полупрозрачным слоем</b>	<b>81</b>
6.1	Постановка задачи . . . . .	82
6.2	Редукция к уравнению второго порядка . . . . .	83
6.3	Сведение к интегральному уравнению . . . . .	84
6.4	Равномерная асимптотика дифракционного коэффициента . . . . .	86
6.4.1	Вычисление полюсов и вычетов в них . . . . .	87
6.4.2	Равномерная по углу асимптотика дальнего поля . . . . .	89
6.5	Численная реализация . . . . .	90
6.5.1	Вычисление спектральных функций . . . . .	90
6.5.2	Пример расчета дальнего поля . . . . .	91
<b>ПРИЛОЖЕНИЯ</b>		<b>I</b>
I	О методе перевала . . . . .	I
II	Седловая точка вблизи сингулярности . . . . .	III
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ</b>		<b>IX</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Практически все линейные задачи дифракции, явно решенные до середины 20-го века, были либо автомодельными\*, либо допускали разделение переменных или применение метода Винера-Хопфа. Существенно новый класс задач, решаемых в “квадратурах”, появился в работах Г.Д.Малюжинца [11, 12]) 50-х годов, посвященных рассеянию плоской электромагнитной волны на так называемом “импедансном” клине (см. Рис.1). Изложению метода Малюжинца, некоторым его обобщениям и новым приложениям посвящается эта книга.

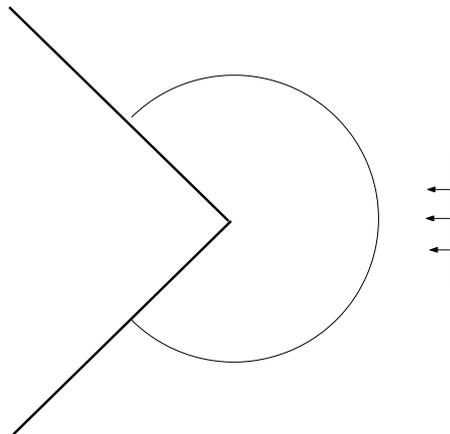


Рис. 1: Падение плоской волны на клин, на гранях которого (помеченных дугой) заданы импедансные граничные условия (точная постановка задачи приведена в главе 1). В этой задаче нет автомодельности, переменные не разделяются, к традиционной для метода Винера-Хопфа краевой задаче Римана данная задача не сводится!

В основе подхода Г.Д.Малюжинца лежит идея о представлении решений в области, ограниченной импедансным клином, в виде контурного интеграла Зоммерфельда. Это представление замечательно тем, что в нем каждой математической “коллизии” соответствует “коллизия” физическая: вычеты подынтегрального выражения описывают падающую волну, волны отраженные от граней клина и поверхностные волны, стационарные (перевальные) точки - волну, рассеянную вершиной клина. Несмотря на то, что метод Зоммерфельда-Малюжинца получил дальнейшее широкое развитие, до сих пор нет достаточно элементарного и идейно понятного его изложения “с самого начала”. Попытка такого изложения предпринята в главах 1–4. Эти главы содержат некоторые методические новшества, частично заимствованные из работы [31] и книги [21]. Главы 5–6, написанные М.А.Лялиновым, посвящены распространению метода Малюжинца на задачи с более сложными краевыми условиями.

---

\*Т.е. сводились к одномерным.

Авторы придерживаются той (известной) точки зрения, что учиться (и научиться) удобнее по “толстым” книгам, т.е. содержащим разъяснения “что к чему”. Для движения вперед эти разъяснения важнее, чем механическое запоминание преобразований, ведущих к соответствующей математической цели. Авторы имели в виду написать толстую (в указанном смысле) книгу по теории Малюжинца. Удалось ли эту цель достичь — судить не им.

Данная публикация подготовлена в процессе выполнения договора № 2261.2003.1 между ПОМИ РАН и механико-математическим факультетом СПбГУ. Авторы благодарны за поддержку РФФИ, гранты 02-02-16560, 01-01-00251.

## Историческая справка

Задача дифракции волн на идеальном клине методом разделения переменных была впервые решена А.Пуанкаре [34] (1892 г.), [35] (1897 г.). Занимаясь математической задачей о распространении “волн” на римановых поверхностях, А.Зоммерфельд [38] (1896 г.) впервые предложил для их описания интегралы, впоследствии получившие его имя. Аппарат интегралов Зоммерфельда позволил ему в той же работе решить задачу дифракции плоской волны на полупрямой с идеальными краевыми условиями. Позднее (в 1901 г., см. [39]) Зоммерфельд решил задачу дифракции плоской волны на углах величины  $\frac{m}{n}\pi$  с целыми положительными  $m, n$ . Там же (стр. 38) имеется замечание, что случай произвольного угла может быть рассмотрен при помощи предельного перехода. Однако соответствующий предельный переход сам Зоммерфельд не осуществил. Это было сделано Карслоу [23] в 1920 г., где уже можно найти классическое “зоммерфельдовское” выражение для решения задачи. Работы Малюжинца оказались революционным прорывом в данной тематике, поскольку благодаря идее о поиске решения в виде интеграла Зоммерфельда стало возможным однотипным образом решать задачи дифракции в угловых областях при разных краевых условиях и вне зависимости от величины угла, сводя дело к функционально-разностным уравнениям. В настоящее время эти уравнения и метод их решения в теории дифракции традиционно носят имя Малюжинца.

## АРНОЛЬД ИОГАННЕС ВИЛЬГЕЛЬМ ЗОММЕРФЕЛЬД (1868—1951)



Родился 5 декабря 1868 г. в Кенигсберге.

1891 г. Защитил в Кенигсберге диссертацию на тему “Искусственные функции в математической физике”.

1893-1894 гг. Переезжает в Геттинген и становится помощником Ф.Клейна.

1896 г. Публикует знаменитую работу “Математическая теория дифракции”.

1897 г. Профессор математики в Клаустале.

1900 г. Профессор кафедры технической механики в Аахене.

**1906 г.** Профессор кафедры теоретической физики в Мюнхене.

**1908-1909 гг.** Публикует основные работы по теории относительности и распространению волн.

**1911-1912 гг.** Занимается физикой рентгеновских лучей

**1913 г.** Публикует совместно с П.Дебаем работу по квантовой теории фотоэлектрического эффекта.

**1915 г.** Появляется статья, объясняющая расщепление спектральных линий атома в электрическом и магнитном полях.

**1916 г.** Публикуется серия работ по релятивистской тонкой структуре спектральных линий.

**1921 г.** Первое издание книги “Строение атома и спектральные линии”.

**1929 г.** Первое издание книги “Волновая механика”.

**1922-1923 гг.** Лекционная работа в США.

**1926 и посл. гг.** Лекционная работа в различных странах Европы, Азии и Америки.

**1945-1951 гг.** Готовит к изданию шеститомник “Лекции по теоретической физике”.

Лауреат многих отличий и почетных званий; действительный и почетный член многих академий и научных обществ.

Умер 26 апреля 1951 г. от ран, полученных в автомобильной катастрофе.

## ГЕОРГИЙ ДАНИЛОВИЧ МАЛЮЖИНЕЦ

### Основные даты жизни и деятельности



Георгий Данилович Малюжинец родился 2 июля 1910 г. в Москве.

**1929-1942 гг.** Студент, аспирант, ассистент, доцент физического факультета МГУ.

**1932-1938 гг.** Старший научный сотрудник Научно-исследовательского института радиовещания, акустической лаборатории Государственной консерватории, акустической лаборатории Грампластреста.

**1938 г.** Защитил кандидатскую диссертацию, посвященную дифракции волн на решетках. Эта работа была удостоена премии ЦК ВЛКСМ на конкурсе работ молодых ученых.

**1938-1941 гг.** Научный руководитель группы звукопоглощения на строительстве Дворца Советов, научный руководитель акустической лаборатории Академии архитектуры

СССР.

**1944-1950 гг.** Старший научный сотрудник, докторант Физического института АН СССР.

**1951 г.** Защитил докторскую диссертацию на тему "Некоторые обобщения метода отражений в теории дифракции синусоидальных волн".

**1948-1954 гг.** Консультант, начальник сектора физико-математических исследований Научно-исследовательского инженерного института.

**1954-1969 гг.** Старший научный сотрудник Акустического института.

**1954-1960 гг.** Заведующий кафедрой акустики Московского физико-технического института

**1957-1965 гг.** Председатель Секции дифракции акустических, электромагнитных и других волн Научного совета по акустике Президиума АН СССР. Организует, ставшие потом традиционными, Всесоюзные симпозиумы по дифракции волн в Одессе (1960 г), Горьком (1962 г.) и Тбилиси (1964 г.)

**1960 г.** Профессор кафедры акустики Московского физико-технического института; \* читает курс лекций по дифракции и распространению волн.

**1962 г.** Заведующий математической лабораторией Акустического института.\*

**1965-1969 гг.** Член Научного совета по акустике Президиума АН СССР, руководит в Акустическом институте семинаром по дифракции и распространению волн.

---

\*В этой должности Г.Д.Малюжинец состоял до дня своей смерти - 14 августа 1969 г.

## Глава 1

# ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ В УГЛОВЫХ ОБЛАСТЯХ

## 1.1 Об уравнении Гельмгольца и краевых условиях на сторонах клина

Мы считаем, что волновой процесс описывается классическим волновым уравнением

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \Delta w = 0, \quad c = \text{const} > 0, \quad w = w(t, x, y), \quad (1.1)$$

и что зависимость от времени гармоническая:

$$w(t, x, y) = e^{-i\omega t} u(x, y), \quad \omega = \text{const} > 0. \quad (1.2)$$

Функция  $u$ , очевидно, удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \right) u(x, y) = 0, \quad k = \frac{\omega}{c}. \quad (1.3)$$

Опишем область задания функции  $u(x, y)$ . С этой целью введем полярные координаты  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  и будем считать, что переменные  $r, \varphi$  меняются в пределах

$$r \geq 0, \quad -\Phi \leq \varphi \leq \Phi, \quad 0 < \Phi \leq \pi, \quad \Phi = \text{const}. \quad (1.4)$$

Удалим из плоскости область  $\{(r, \varphi) : r > 0, -\Phi < \varphi < \Phi\}$ . Оставшийся угол  $\{(r, \varphi) : r \geq 0, \Phi \leq \varphi \leq \pi \cup -\pi \leq \varphi \leq -\Phi\}$  мы и будем называть *клином*, на который падает плоская волна (см. рис. I). Тем самым границей области, в которой рассматриваются колебания, являются *границы клина*, т.е. две полупрямые

$$\varphi = -\Phi \quad \text{и} \quad \varphi = \Phi. \quad (1.5)$$

Заметим, что при  $\Phi \leq \pi/2$  раствор угла  $\Phi \leq \varphi \leq 2\pi - \Phi$  не менее  $\pi$  и называть такой угол “клином” можно лишь условно. Функцию  $u(x, y)$  мы предполагаем дважды непрерывно дифференцируемой при  $-\Phi < \varphi < \Phi$  и  $r > 0$ .

Перейдем к рассмотрению краевых условий. Чтобы можно было говорить о выполнении однородных краевых условий Дирихле на гранях клина, т.е.

$$u|_{\varphi=-\Phi} = u|_{\varphi=\Phi} = 0 \quad \text{при} \quad r > 0, \quad (1.6)$$

потребуем непрерывности  $u$  при  $r > 0$ ,  $-\Phi \leq \varphi \leq \Phi$ . В свою очередь, потребовав однократной непрерывной дифференцируемости  $u$  при  $-\Phi \leq \varphi \leq \Phi$ ,  $r > 0$ , мы можем говорить об условиях Неймана

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\varphi=-\Phi} = \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\varphi=\Phi} = 0, \quad r > 0 \quad (1.7)$$

или об импедансных условиях

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} - ik \sin \theta_{\pm} u \right|_{\varphi=\pm\Phi} = 0, \quad r > 0, \quad \theta_{\pm} = \text{const}, \quad (1.8)$$

где  $\frac{\partial}{\partial n} = \pm \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}$  — дифференцирование в направлении нормали, внешней по отношению к области, в которой рассматриваются колебания (или внутренней по отношению к клину). Постоянные  $\theta_{\pm}$ , вообще говоря, комплексные.

Из общей теории уравнения Гельмгольца следует, что функция, удовлетворяющая уравнению (1.3) и одному из краевых условий (1.6), (1.7) или (1.8), имеет производные всех порядков, непрерывные вплоть до границы, т.е. в области  $-\Phi \leq \varphi \leq \Phi$ ,  $r > 0$ . В следующем параграфе мы обсудим поведение решения в окрестности точки  $r = 0$ .

## 1.2 Окрестность вершины и условия Мейкснера

В окрестности сингулярности границы решение уравнения Гельмгольца, удовлетворяющее классическим краевым условиям, не может быть гладким (за исключением некоторых специальных случаев). В основе анализа поведения решения при  $r \rightarrow 0$  лежит предположение о конечности энергии волнового поля в ограниченной окрестности вершины клина.

Плотность энергии определим выражением

$$E := u_x \bar{u}_x + u_y \bar{u}_y + k^2 u \bar{u} \equiv \frac{\partial u}{\partial r} \bar{\frac{\partial u}{\partial r}} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \bar{\frac{\partial u}{\partial \varphi}} + k^2 u \bar{u} \quad (1.9)$$

(здесь и далее черта означает символ комплексного сопряжения). Поясним происхождение выражения (1.9).

Напомним, что для уравнения (1.1), в котором мы предполагаем  $w$  вещественным, легко выводится аналог классической теоремы Умова-Пойнтинга в электродинамике:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E} + \text{div } \vec{S} = 0, \quad (1.10)$$

где

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \frac{c^2}{2} |\text{grad } w|^2, \quad \vec{S} = -c^2 \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) \text{grad } w. \quad (1.11)$$

Величину  $\mathcal{E}$  естественно трактовать как плотность энергии, а вектор  $\vec{S}$  — как вектор потока энергии (вектор Пойнтинга). Для вывода соотношения (1.10) достаточно умножить обе части уравнения (1.1) на  $w_t$  и выполнить тождественные преобразования.

При рассмотрении комплексных решений волнового уравнения вида  $e^{-i\omega t} u(x, y)$  физический смысл имеет обычно вещественная часть. Подставим  $w = \text{Re} (e^{-i\omega t} u)$  в выражение для плотности энергии в (1.11):

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} \text{Re} (ue^{-i\omega t}) \right)^2 + \frac{c^2}{2} |\text{grad } \text{Re} (ue^{-i\omega t})|^2. \quad (1.12)$$

Выражение (1.12) — периодическая функция времени с периодом  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Усредняя  $\mathcal{E}$  по периоду, т.е. вычисляя интеграл

$$\frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{E} dt,$$

мы приходим к выражению, отличающемуся от (1.9) лишь постоянным множителем  $\frac{c^2}{4}$ .

Итак, условие на поведение решения вблизи вершины клина мы записываем в виде

$$\int_{-\Phi}^{\Phi} \int_0^{r_0} E r dr d\varphi \equiv \int_{-\Phi}^{\Phi} \int_0^{r_0} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 + \frac{1}{r^2} \left| \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right|^2 + k^2 |u|^2 \right) r dr d\varphi < \infty. \quad (1.13)$$

(Здесь  $r_0$ ,  $0 < r_0 < \infty$ , — любая фиксированная постоянная).

Во многих случаях вместо условия (1.13) используют другие, эквивалентные ему условия. Чтобы обсудить их, выясним вначале какие сингулярности в вершине клина может иметь, вообще говоря, решение  $u$ , удовлетворяющее уравнению Гельмгольца, классическим однородным краевым условиям на гранях  $\varphi = \pm\Phi$ ,  $r > 0$  и неравенству (1.13).

Известно [29], что вблизи особой точки такое решение асимптотически представляется в виде ряда однородных функций  $(x, y)$  ( $x = 0$ ,  $y = 0$  — вершина клина) возрастающей степени однородности:

$$u \sim \sum_{m=0}^{\infty} \hat{u}_{p_m}, \quad (1.14)$$

$\hat{u}_{\mu}$  — однородная функция степени однородности  $\mu$ :  $\hat{u}_{\mu}(\alpha x, \alpha y) = \alpha^{\mu} \hat{u}_{\mu}(x, y) \forall \alpha > 0$ . Чем больше  $\mu$ , тем менее сингулярна функция  $\hat{u}_{\mu}(x, y)$  или (если  $\mu \geq 0$  целое) тем выше порядок нуля  $\hat{u}_{\mu}(x, y)$  при  $x = y = 0$ . В полярных координатах условие однородности записывается как  $\hat{u}_{\mu} = r^{\mu} f(\varphi)$ , где  $f$  — некоторая гладкая функция от  $\varphi$ .\* Ряд (1.14) можно дифференцировать и подставлять в краевые условия.

Считая в первом приближении  $u \simeq r^{\mu} f(\varphi)$ , подставим это выражение в уравнение Гельмгольца и приравняем нулю старшие при  $r \rightarrow 0$  члены (порядка  $r^{\mu-2}$ ). В результате получим уравнение для  $f(\varphi)$ :

$$f''(\varphi) + \mu^2 f(\varphi) = 0. \quad (1.15)$$

В случае краевого условия Дирихле функция  $f(\varphi)$  должна удовлетворять условиям

$$f|_{\varphi=-\Phi} = f|_{\varphi=\Phi} = 0. \quad (1.16)$$

Нетривиальным решением (1.15) — (1.16) является

$$f(\varphi) = \text{const} \sin \left( \frac{m\pi}{2\Phi} (\varphi - \Phi) \right), \quad \mu = \pm \frac{m\pi}{2\Phi}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (1.17)$$

Выражение  $u \simeq r^{\mu} f(\varphi)$  удовлетворяет неравенству (1.13) только при  $\mu > 0$ ; при этом “наиболее сингулярный” случай реализуется при  $\mu = \frac{\pi}{2\Phi}$ . Тем самым в случае условия Дирихле мы приходим к следующим следствиям неравенства (1.13):

$$u = O \left( r^{\frac{\pi}{2\Phi}} \right), \quad \frac{\partial u}{\partial r} = O \left( r^{\frac{\pi}{2\Phi}-1} \right), \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = O \left( r^{\frac{\pi}{2\Phi}} \right), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = O \left( r^{\frac{\pi}{2\Phi}} \right) \quad (1.18)$$

\*В некоторых специальных случаях к однородным функциям  $\hat{u}_{p_m}$  следует добавить (не в главном слагаемом!) логарифмические члены вида  $r^{\mu} \ln^n r f(\varphi)$ . Мы не будем рассматривать такие случаи.

(все оценки — равномерные по  $\varphi$  в интервале  $-\Phi \leq \varphi \leq \Phi$ ). Поскольку  $0 < \Phi \leq \pi$ , то, в свою очередь, выполнение условий (1.18) влечет за собой неравенство (1.13) и, тем самым, показана эквивалентность (1.13) и (1.18) для случая условий Дирихле.

Условия (1.18) (обычно пишут только первое из них) или эквивалентное им условие (1.13) называются условиями Мейкснера. В случае краевых условий Неймана или импедансных условий (1.8) условия Мейкснера выглядят аналогично, только вместо оценки  $u = O(r^{\frac{\pi}{2\Phi}})$  следует написать  $u = O(1)$  (равномерно по  $\varphi$ ). В свою очередь, из разложений (1.14) следует  $u = \text{const} + O(r^\delta)$ , где  $\delta$  — положительное число, разное в разных ситуациях.

Заметим, что из (1.18) следует предельное соотношение

$$\int_{-\Phi}^{\Phi} \langle S_r \rangle|_{r=r_0} r_0 d\varphi = \frac{c^2}{2} \omega \int_{-\Phi}^{\Phi} \text{Im} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \bar{u} \right) \Big|_{r=r_0} r_0 d\varphi \xrightarrow{r_0 \rightarrow 0} 0, \quad (1.19)$$

где  $S_r$  есть радиальная составляющая усредненного по периоду вектора Умова-Пойнтинга. Иными словами, поток энергии через дугу  $-\Phi \leq \varphi \leq \Phi$ ,  $r = r_0 > 0$  стремится к нулю вместе с  $r_0 \rightarrow 0$ . (В этом случае говорят, что вершина клина “не излучает” и “не поглощает”, или, что в вершине клина нет ни источников поля, ни стоков энергии.)

### 1.3 Падение плоской волны на клин и геометро-оптическая часть решения

Плоской волной мы называем либо следующее решение уравнения Гельмгольца:

$$u_{pl} = a e^{-ik(\cos \vartheta x + \sin \vartheta y)}, \quad a = \text{const}, \quad \vartheta = \text{const}, \quad (1.20)$$

либо соответствующее ему решение волнового уравнения (1.1):

$$w_{pl} = u_{pl} e^{-i\omega t} = a e^{-i\omega t - i\frac{\omega}{c}(\cos \vartheta x + \sin \vartheta y)}. \quad (1.21)$$

Фаза решения (1.21) постоянна на прямых

$$\mathcal{L} := -\omega t - \frac{\omega}{c}(\cos \vartheta x + \sin \vartheta y) = \text{const}, \quad (1.22)$$

параметрически зависящих от  $t$ . Прямые (1.22) движутся со скоростью \*

$$\vec{v} = \frac{-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}}{|\text{grad } \mathcal{L}|} \cdot \frac{\text{grad } \mathcal{L}}{|\text{grad } \mathcal{L}|} = c(-\cos \vartheta e_x - \sin \vartheta e_y) \quad (1.23)$$

( $e_x, e_y$  — орты осей  $x$  и  $y$ ). В связи с формулой (1.23) говорят, что плоская волна движется со скоростью  $c$  в направлении вектора  $(-\cos \vartheta e_x - \sin \vartheta e_y)$ . Ясно, что скорость (1.23) нормальна к прямым (1.22), которые называют (плоскими) фронтами волны. Прямые, параллельные вектору скорости, называются лучами плоской волны (1.20).

Переходим к обсуждению падения плоской волны на клин. Зададимся величиной  $\varphi_0$  (угол падения),  $-\Phi < \varphi_0 < \Phi$ , и положим  $a = 1$ . Плоскую волну (1.20), в которой  $\vartheta = \varphi_0$ , будем называть падающей волной  $u_i$ . В полярных координатах имеем

$$u_i(r, \varphi) = e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)}. \quad (1.24)$$

\*Вывод формулы для скорости движущейся поверхности  $\mathcal{L}(x, y, t) = \text{const}$  можно найти, например, в [2], гл.1.

Пусть  $\pi - \Phi < \varphi_0 < \Phi$ . В этом случае лучи падающей волны (1.24) встречают только верхнюю грань клина, уравнение которой  $\varphi = \Phi$ . Отразим каждый луч по закону “угол падения равен углу отражения” (см. рис.1.1). При этом все пространство  $-\Phi < \varphi < \Phi$ , где распространяются волны, делится на три области. В области **I**, описываемой неравенством  $2\Phi - \pi - \varphi_0 < \varphi < \Phi$ , в каждую точку приходит два луча — прямой и отраженной волн. Через точки области **II**,  $\varphi_0 - \pi < \varphi < 2\Phi - \pi - \varphi_0$ , проходят лишь лучи падающей волны. Наконец, в область **III**,  $-\Phi < \varphi < \varphi_0 - \pi$ , лучи падающей и отраженных волн не попадают — это область тени.

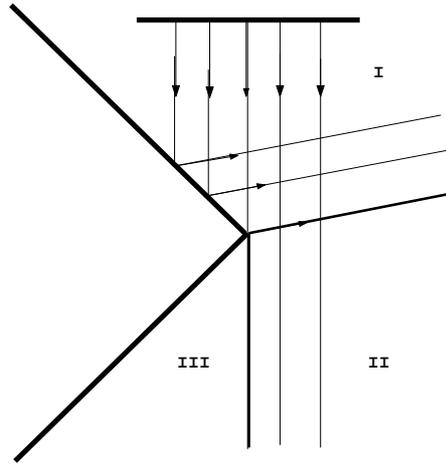


Рис. 1.1: Лучи падающей под углом  $\varphi_0$  из интервала  $\pi - \Phi < \varphi_0 < \Phi$  и отраженной волн; область **I** освещена как лучами падающей, так и отраженной волн, в область **II** попадают только лучи падающей волны, область **III** является областью тени.

Падающая волна не удовлетворяет краевому условию на грани клина  $\varphi = \Phi$ . Введем в рассмотрение “отраженную” волну, т.е. плоскую волну, лучи которой совпадают с построенными. Путем элементарных вычислений убеждаемся, что эта волна описывается формулой

$$u_r(r, \varphi) = a_r e^{-ikr \cos(2\Phi - \varphi - \varphi_0)} \quad (1.25)$$

с некоторым множителем  $a_r$ , который называется “коэффициентом отражения”. Сумма  $u_i + u_r$  будет удовлетворять при  $\varphi = \Phi$  условию Дирихле, Неймана или импедансному условию, если положить

$$a_r = -1, \quad a_r = 1 \quad \text{или} \quad a_r = \frac{\sin(\Phi - \varphi_0) - \sin \theta_+}{\sin(\Phi - \varphi_0) + \sin \theta_+}, \quad * \quad (1.26)$$

соответственно.

Аналогично, в случае  $-\Phi < \varphi_0 < \Phi - \pi$  освещена только нижняя ( $\varphi = -\Phi$ ) грань клина, и возникает только волна, отраженная от этой грани. Наконец, при  $|\varphi_0| < \pi - \Phi$  освещены обе грани клина, и, соответственно, появляются две отраженных волны. Падающая и отраженные плоские волны, в совокупности, называются геометро-оптической частью решения  $u_g$ . Разность  $u_d$  между полным волновым полем  $u$  (удовлетворяющим на

\*При тех ограничениях, которые далее будут наложены на  $\theta_{\pm}$  ( $0 < \text{Re} \theta_{\pm} \leq \frac{\pi}{2}$ ), знаменатель в этом выражении всегда отличен от нуля. В самом деле: условие о том, что лучи падающей волны образуют с гранью  $\varphi = \Phi$  ненулевой угол, имеет, очевидно, вид  $0 < \Phi - \varphi_0 < \pi$  и в первое слагаемое в упомянутом знаменателе положительно, а второе имеет положительную вещественную часть.

сторонах угла краевым условиям) и геометрико-оптической частью решения,  $u = u_g + u_d$ , будем называть дифрагированным полем.

## 1.4 Условия излучения и завершение постановки задачи

Естественно считать, что дифрагированное поле

$$u_d = \begin{cases} u - u_i - u_r & \text{в области I,} \\ u - u_i & \text{в области II,} \\ u & \text{в области III} \end{cases} \quad (1.27)$$

должно описывать волну, уходящую на бесконечность, с той, однако, поправкой, что в окрестности границ этих областей (так называемых зон полутени) ситуация осложняется интерференционными явлениями.

Оформим это соображение следующим образом: потребуем от  $u_d$  выполнения условий излучения в интегральной форме

$$\int_{-\Phi}^{\Phi} \left| \frac{\partial u_d}{\partial r} - iku_d \right|_{r=R}^2 R d\varphi \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. * \quad (1.28)$$

Сравним (1.28) с условиями излучения в классической форме:

$$u \underset{r \rightarrow \infty}{=} O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad (1.29)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} - iku \underset{r \rightarrow \infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right). \quad (1.30)$$

Разумеется, (1.30) влечет за собой (1.28). Однако условие излучения в форме (1.28) является более общим, поскольку оценки (1.29)–(1.30) не выполняются в полутеневых областях. Кроме того, во всех известных к настоящему времени случаях условие (1.29) (которое А.Зоммерфельд называл “условием ограниченности”) оказывается излишним (для внешности ограниченной области это впервые показано И.Н.Векуа [6]).

Теперь мы готовы сформулировать постановку задачи дифракции плоской волны на клине:

1. искомое волновое поле  $u(r, \varphi)$  в области  $\{r > 0, -\Phi < \varphi < \Phi\}$  (вне клина) является дважды непрерывно дифференцируемой функцией и удовлетворяет там уравнению Гельмгольца;
2. при  $r > 0, |\varphi| \leq \Phi$  функция  $u(r, \varphi)$  непрерывно дифференцируема и на гранях клина  $\varphi = \pm\Phi$  выполняется одно из краевых условий (1.6), (1.7) или (1.8);
3. в окрестности вершины клина (т.е. при  $r \rightarrow 0$ ) выполняется условие Мейкснера (1.18);
4. дифрагированное поле (1.27) удовлетворяет условиям излучения в форме (1.28).

\*См. [8], гл.IV. Там же указано, что условие излучения в форме (1.28) предложено Магнусом (W.Magnus) в 1949 году.

**Замечание 1.1.** *Условия излучения и поверхностные волны*

В задаче дифракции на импедансном клине возможны ситуации, для которых предложенная выше (и, казалось бы, — бесспорная) постановка задачи не является удовлетворительной. Дело в том, что при некоторых значениях  $\sin \theta_{\pm}$  могут возникать поверхностные волны. При наличии таких волн условие излучения (1.28) выполняться не будут.

Действительно, допустим, что дифрагированное поле  $u_d$  содержит слагаемые вида

$$\text{const exp} \{ikr \cos(\varphi \mp \Phi \mp \theta_{\pm})\}$$

(которые, очевидно, удовлетворяют уравнению Гельмгольца и импедансным краевым условиям (1.8)). Если считать  $\sin \theta_{\pm}$  отрицательно чисто мнимыми числами, то эти выражения являются поверхностными волнами, т.е. распространяются без затухания вдоль граней клина  $\varphi = \pm \Phi$  и существенно отличны от нуля лишь вблизи соответствующей грани. Однако ясно, что вклад от таких слагаемых в интеграл (1.28) не убывает при  $R \rightarrow \infty$ . \*

Налагаемые ниже условия на числа  $\sin \theta_{\pm}$  ( $\text{Re} \sin \theta_{\pm} > 0$  или, что то же самое,  $0 < \text{Re} \theta_{\pm} \leq \frac{\pi}{2}$ ) исключают возможность появления поверхностных волн, позволяя, тем самым, оставаться в рамках вышеприведенной постановки задачи.

## 1.5 Единственность решения задачи дифракции на импедансном клине (энергетические соображения)

Введем при помощи энергетических соображений (см. пункт 1.3) понятие неактивных границ (клина), для которых (с некоторыми уточнениями) и удастся получить доказательство теоремы единственности.

Подставим в выражения (1.11) для  $\mathcal{E}$  и  $\vec{S}$   $w = \text{Re}(e^{-i\omega t}u)$  и усредним их по периоду  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Получим

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \vec{S} \right\rangle = \frac{c^2}{2} \omega \text{Im} (\bar{u} \text{grad } u)$$

и, в силу (1.10),

$$\text{div} \left\langle \vec{S} \right\rangle = 0. \quad (1.31)$$

Вычисляя средний за период поток энергии через участок границы  $ds$  в область, внешнюю по отношению к клину, получаем

$$\langle S_n \rangle ds = \frac{c^2}{2} \omega \text{Im} \left( \frac{\partial u}{\partial n} \bar{u} \right) ds, \quad (1.32)$$

где  $n$  — нормаль, внешняя по отношению к области, занятой колебаниями (и, следовательно, направленная внутрь клина). Используя граничное условие (1.8), получим

$$\langle S_n \rangle ds = \frac{c^2}{2} \omega k \text{Re} \sin \theta_{\pm} |u|^2 ds. \quad (1.33)$$

---

\*Необходимость изменения условий излучения возникает также и в задаче дифракции на упругом клине в связи с возможностью распространения волны Релея, см. работу [24]. Авторы благодарны В.В.Камоцкому за ценное для них обсуждение вопроса об условиях излучения при наличии поверхностных волн.

В виду соотношения (1.33) границы, для которых  $\operatorname{Re} \sin \theta_{\pm} < 0$ , естественно называть *активными*, т.к. через такие границы (при  $k > 0$ ) происходит подкачка энергии в окружающую клин область, и, соответственно, *неактивными* в случае неравенства  $\operatorname{Re} \sin \theta_{\pm} \geq 0$ . В частности, при  $\operatorname{Re} \sin \theta_{\pm} = 0$  поток энергии через границу равен нулю, и такую границу следует считать *пассивной*. Наконец, в случае  $\operatorname{Re} \sin \theta_{\pm} > 0$  мы имеем дело с *поглощающей* границей.

Теперь мы готовы сформулировать следующую теорему:

**Теорема 1.1.** *Решение задачи дифракции плоской волны на клине в указанной выше постановке и в случае, когда обе границы  $\varphi = \pm\Phi$  неактивны и по крайней мере одна из границ поглощающая, не может иметь двух различных решений.*

Как всегда, в случае линейных задач для доказательства теоремы единственности достаточно показать, что решение  $u$  соответствующей однородной задачи тождественно равно нулю.

Перейдем теперь к доказательству теоремы единственности. Проинтегрируем равенство (1.31) по области  $\mathcal{D}_{r_0 r_1} = \{(r, \varphi) : 0 < r_0 < r < r_1, -\Phi < \varphi < \Phi\}$  и, воспользовавшись формулой Гаусса-Остроградского, перейдем к интегралу по границе области  $\mathcal{D}_{r_0 r_1}$ . Воспользовавшись (1.32) и условиями Мейкснера в форме (1.19), перейдем в этом интеграле к пределу  $r_0 \rightarrow 0$  и получим

$$\int_{\partial \mathcal{D}_{r_0 r_1}} \operatorname{Im} \left( \frac{\partial u}{\partial n} \bar{u} \right) ds = 0. \quad (1.34)$$

Теперь воспользуемся (1.32), (1.33) и перепишем (1.34) в виде

$$k \operatorname{Re} \sin \theta_+ \int_0^{r_1} |u|^2|_{\varphi=\Phi} dr + k \operatorname{Re} \sin \theta_- \int_0^{r_1} |u|^2|_{\varphi=-\Phi} dr + \int_{\Sigma_{r_1}} \operatorname{Im} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \bar{u} \right) d\Sigma_{r_1} = 0, \quad (1.35)$$

где  $\Sigma_{r_1}$  — дуга  $\{(r, \varphi) : r = r_1, -\Phi < \varphi < \Phi\}$ , пробегаемая в положительном направлении.

Преобразуем последний интеграл, во многом следуя книге [8] (стр. 316):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} \bar{u} &= \left( \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) \bar{u} + ik|u|^2 = \left( \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) \left( \frac{1}{ik} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \bar{u} \right) - \frac{1}{ik} \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + ik|u|^2 + u \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \\ &\Rightarrow 2 \int_{\Sigma_{r_1}} \operatorname{Im} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \bar{u} \right) d\Sigma_{r_1} = -\frac{1}{k} \int_{\Sigma_{r_1}} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right|^2 d\Sigma_{r_1} + \int_{\Sigma_{r_1}} \left( k|u|^2 + \frac{1}{k} \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 \right) d\Sigma_{r_1}. \end{aligned}$$

Подставив последнее выражение в (1.35), получим

$$\begin{aligned} k^2 \operatorname{Re} \sin \theta_+ \int_0^{r_1} |u|^2|_{\varphi=\Phi} dr + k^2 \operatorname{Re} \sin \theta_- \int_0^{r_1} |u|^2|_{\varphi=-\Phi} dr + \frac{k}{2} \int_{\Sigma_{r_1}} \left( k|u|^2 + \frac{1}{k} \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 \right) d\Sigma_{r_1} = \\ = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_{r_1}} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right|^2 d\Sigma_{r_1}. \quad (1.36) \end{aligned}$$

Напомним, что мы предполагаем выполнение неравенств  $\operatorname{Re} \sin \theta_{\pm} \geq 0$  (границы неактивные), причем одно из неравенств обязательно строгое (одна из границ поглощающая). Пусть, например,  $\operatorname{Re} \sin \theta_- > 0$ . В левой части (1.36) первое и последнее слагаемые неотрицательные, поэтому

$$k^2 \operatorname{Re} \sin \theta_- \int_0^{r_1} |u|^2|_{\varphi=-\Phi} dr \leq \frac{1}{2} \int_{\Sigma_{r_1}} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right|^2 d\Sigma_{r_1}. \quad (1.37)$$

Перейдем в этом неравенстве к пределу  $r_1 \rightarrow \infty$ . В силу условия излучения (1.28) интеграл справа стремится к нулю, и поэтому

$$k^2 \operatorname{Re} \sin \theta_- \int_0^{\infty} |u|^2|_{\varphi=-\Phi} dr \leq 0, \quad (1.38)$$

но  $\operatorname{Re} \sin \theta_- > 0$ , т.е.  $u|_{\varphi=-\Phi} = 0$ . В силу краевого условия также и  $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\varphi=-\Phi} \equiv 0$ .

Возьмем теперь произвольную точку ( $r > 0$ ,  $\varphi = -\Phi$ ). В силу уравнения Гельмгольца и с учетом  $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\varphi=-\Phi} \equiv 0$  имеем  $\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}|_{\varphi=-\Phi} \equiv 0$ . Дифференцируя уравнение Гельмгольца по  $n$  произвольное число раз\* и рассуждая аналогично, приходим к выводу, что производные  $u$  любого порядка при  $\varphi = -\Phi$  равны нулю (тождественно по  $r$ ). Пользуясь тем, что  $u|_{\varphi=-\Phi} = 0$  и тем, что для уравнения Гельмгольца (как и для уравнения Лапласа) имеет место принцип симметрии, продолжим нечетным образом решение через грань  $\varphi = -\Phi$ . В полученной более широкой области, включающей в себя полупрямую  $\varphi = -\Phi$ , функция  $u$  аналитична (как всякое решение уравнения Гельмгольца) и представима рядом Тэйлора. В силу того, что при  $\varphi = -\Phi$  все коэффициенты ряда Тэйлора равны нулю, в окрестности этой полупрямой функция  $u \equiv 0$ . В силу аналитичности аннулирование этой функции в некоторой окрестности влечет за собой равенство  $u \equiv 0$  во всей области. Тем самым теорема единственности доказана. ■

## 1.6 Единственность решения задачи дифракции на идеальном клине

В случае идеальных краевых условий (т.е. либо условий Дирихле, либо условий Неймана) теорема единственности также имеет место.

**Теорема 1.2.** *Решение задачи дифракции плоской волны на идеальном клине в указанной выше постановке единственно.*

Доказательство этой теоремы получается на том же пути, как и в классической теореме единственности для области, внешней к компактному рассеивателю (см. [15], ч.2). В основе его опять же лежит равенство (1.36), которое в случае идеальных краевых условий (впрочем, как и в случае пассивных, т.е.  $\operatorname{Re} \sin \theta_{\pm} = 0$ , импедансных условий) превращается в

\*Здесь мы используем известный факт бесконечной дифференцируемости (вплоть до границы) решения уравнения Гельмгольца, удовлетворяющего импедансному краевому условию.

$$k \int_{\Sigma_{r_1}} \left( k|u|^2 + \frac{1}{k} \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 \right) d\Sigma_{r_1} = \int_{\Sigma_{r_1}} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right|^2 d\Sigma_{r_1}. \quad (1.39)$$

С использованием условий излучения из (1.39), в частности, получаем

$$\int_{\Sigma_r} \left( k^2|u|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 \right) d\Sigma_r \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0. * \quad (1.40)$$

В дальнейшем мы подробно обсудим случай краевого условия Дирихле; краевые условия Неймана рассматриваются аналогично.<sup>†</sup> Доказательство разобьём на несколько этапов.

1<sup>o</sup> Решение уравнения Гельмгольца, удовлетворяющее условиям Дирихле на гранях клина  $\varphi = \pm\Phi$ , может быть разложено в ряд Фурье

$$u(r, \varphi) = \sum_{s=1}^{\infty} u_s(r) \sin \frac{s\pi}{2\Phi} (\varphi + \Phi), \quad (1.41)$$

$$u_s(r) = \frac{1}{\Phi} \int_{-\Phi}^{\Phi} u(r, \varphi) \sin \frac{s\pi}{2\Phi} (\varphi + \Phi) d\varphi.$$

Ряд (1.41) сходится равномерно на любом замкнутом множестве  $\{(r, \varphi) : 0 < r_0 \leq r \leq r_1 < \infty, -\Phi \leq \varphi \leq \Phi\}$ . Для доказательства теоремы достаточно показать, что все  $u_s(r)$  равны нулю.

2<sup>o</sup> Обратимся к уравнению Гельмгольца в полярных координатах:

$$(\Delta + k^2) u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + k^2 u = 0. \quad (1.42)$$

Умножая равенство (1.42) на  $\sin \frac{s\pi}{2\Phi} (\varphi + \Phi)$  и интегрируя по  $\varphi$  в пределах от  $-\Phi$  до  $\Phi$ , получим уравнения для коэффициентов Фурье  $u_s(r)$ :

$$\frac{d^2 u_s}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_s}{dr} + \left( k^2 - \frac{\mu^2}{r^2} \right) u_s = 0, \quad \mu = \frac{s\pi}{2\Phi}. \quad (1.43)$$

Тем самым  $u_s(r)$  выражаются через цилиндрические функции от аргумента  $kr$ .

3<sup>o</sup> Равномерно сходящийся ряд (1.41) можно дифференцировать по  $r$  и  $\varphi$ ; поэтому

$$\frac{\partial u}{\partial r} - iku = \sum_{s=1}^{\infty} \left( \frac{\partial u_s}{\partial r} - iku_s \right) \sin \frac{s\pi}{2\Phi} (\varphi + \Phi), \quad (1.44)$$

\*Соотношение, подобное (1.40), может быть получено и в задаче дифракции на прозрачном клине [А.С.Старков, частное сообщение].

<sup>†</sup>Насколько известно авторам, в случае импедансных, но пассивных границ, теорема единственности в общем случае не доказана. Однако в работе [24] содержатся идеи, позволяющие надеяться на то, что это доказательство можно будет получить (при этом, по-видимому, потребуется некоторый пересмотр условий излучения).

откуда в силу равенства Парсеваля при любом  $r$

$$\int_{-\Phi}^{\Phi} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right|^2 d\varphi = \Phi \sum_{s=1}^{\infty} \left| \frac{\partial u_s}{\partial r} - iku_s \right|^2. \quad (1.45)$$

В силу условий излучения левая часть в (1.45) при  $r \rightarrow \infty$  стремится к 0 как  $o\left(\frac{1}{r}\right)$ . Поэтому при любом  $s = 1, 2, \dots$

$$\left| \frac{\partial u_s}{\partial r} - iku_s \right|^2 r \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0. \quad (1.46)$$

Напомним, что  $u_s$  являются решениями уравнения Бесселя (1.43). Единственным решением этого уравнения, удовлетворяющим (1.46), является функция Ханкеля  $\mathcal{H}_{\mu}^{(1)}(kr)$  (что следует из асимптотического поведения функций Ханкеля при  $r \rightarrow \infty$ , см., например, [14]). Итак,

$$u_s(r) = A_s \mathcal{H}_{\mu}^{(1)}(kr), \quad (1.47)$$

где  $A_s$  — некоторые постоянные.

4° Вернемся к ряду (1.41) и вновь воспользуемся равенством Парсеваля:

$$\int_{-\Phi}^{\Phi} |u(r, \varphi)|^2 d\varphi = \Phi \sum_{s=1}^{\infty} |u_s(r)|^2 \quad (1.48)$$

при любом  $r$ . Ясно, что после домножения на  $r$  интеграл в левой части равенства (1.48) превращается в интеграл по  $\Sigma_r$ . В силу (1.40)

$$\int_{\Sigma_r} |u|^2 d\Sigma_r \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.$$

и поэтому из (1.48) и с учетом (1.47) получаем

$$\left| A_s \mathcal{H}_{\mu}^{(1)}(kr) \right|^2 r \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0. \quad (1.49)$$

Заменяя при больших  $r$  функции Ханкеля их асимптотиками, имеем

$$|A_s|^2 \frac{2\pi}{k} = 0. \quad (1.50)$$

Тем самым при любом  $s$   $A_s = 0$ , откуда  $u_s(r) = 0$  и, следовательно,  $u \equiv 0$ . Единственность доказана. ■

## 1.7 Теорема единственности и принцип предельного поглощения

Альтернативой условию излучения (1.28) является подход, называемый принципом предельного поглощения, который состоит в следующем. Волновое число  $k$  заменяется на

$k' = k + i\varepsilon$ , где  $\varepsilon = \text{const} > 0$  достаточно мало. Задача решается с комплексным волновым числом  $k'$ , при этом в постановке задачи, приведенной в §1.4, пункты 1, 2, 3 остаются прежними, а пункт 4 заменяется требованием экспоненциального убывания как самого дифрагированного поля  $u_d$ , так и его производных при  $r \rightarrow \infty$ :

$$u_d, \text{grad } u_d \underset{r \rightarrow \infty}{=} O(e^{-\varepsilon_1 r}), \quad (1.51)$$

где  $\varepsilon_1 > 0$  — некоторая (зависящая от  $\varepsilon$ ) постоянная. После чего завершает постановку задачи пункт

5. за решение  $u(r, \varphi; k)$  при вещественном  $k > 0$  принимается предел

$$u(r, \varphi; k) := \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} u(r, \varphi; k + i\varepsilon).$$

Предел здесь можно понимать как равномерное стремление  $u(r, \varphi; k + i\varepsilon)$  к  $u(r, \varphi; k)$  в каждом конечном секторе  $-\Phi \leq \varphi \leq \Phi$ ,  $0 \leq r \leq r_0$  ( $0 < r_0 < \infty$ ).

**Замечание 1.2.** Можно показать, что поверхностные волны, распространяющиеся вдоль сторон клина “от вершины клина на бесконечность”, удовлетворяют принципу предельного поглощения. В то же время этот принцип запрещает поверхностные волны, распространяющиеся в обратном направлении.

В случае замены условий излучения принципом предельного поглощения вопрос о единственности решения удается удовлетворительно решить для идеальных, поглощающих границ (а также в некоторых других частных случаях). Имеет место следующая

**Теорема 1.3.** Пусть  $u(r, \varphi)$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta u + (k + i\varepsilon)^2 u = 0 \quad (k > 0, \varepsilon > 0) \quad (1.52)$$

в угловой области  $r > 0$ ,  $-\Phi < \varphi < \Phi$  и дважды непрерывно дифференцируема при  $r > 0$ ,  $-\Phi \leq \varphi \leq \Phi$ , удовлетворяет краевым условиям,

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} - i(k + i\varepsilon) \sin \theta_{\pm} u \right|_{\varphi = \pm \Phi} = 0, \quad r > 0, \quad (1.53)$$

в которых  $\text{Re} \sin \theta_{\pm} > 0$ , или идеальным (т.е. Дирихле или Неймана) краевым условиям, условию Мейкснера (см. §1.2) и при  $r \geq \text{const} > 0$  выполняются оценки

$$u, \frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial \varphi} = O(e^{-\varepsilon_1 r}) \quad (1.54)$$

при некотором (зависящем от  $\varepsilon$ )  $\varepsilon_1 > 0$ . Тогда существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что решение  $u$ , отвечающее любому  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , тождественно равно 0.

Для доказательства рассмотрим интеграл

$$\int_{\mathcal{D}_{r_0 r_1}} (\Delta u + (k + i\varepsilon)^2 u) \bar{u} dx dy$$

по области  $\mathcal{D}_{r_0 r_1} = \{(r, \varphi) : 0 < r_0 < r < r_1, -\Phi < \varphi < \Phi\}$ . Ввиду (1.52) этот интеграл равен нулю. Применяя формулу Грина, получим

$$\int_{\mathcal{D}_{r_0 r_1}} (-|\nabla u|^2 + (k + i\epsilon)^2 |u|^2) dx dy + \int_{\partial \mathcal{D}_{r_0 r_1}} \frac{\partial u}{\partial n} \bar{u} ds = 0. \quad (1.55)$$

Приравняем нулю мнимую часть (1.55):

$$2\epsilon k \int_{\mathcal{D}_{r_0 r_1}} |u|^2 dx dy + \operatorname{Im} \int_{\partial \mathcal{D}_{r_0 r_1}} \frac{\partial u}{\partial n} \bar{u} ds = 0 \quad (1.56)$$

и перейдем в последнем равенстве к пределу  $r_0 \rightarrow 0, r_1 \rightarrow \infty$ . Учтем, что интегралы по дугам  $\{(r, \varphi) : r = r_0, -\Phi < \varphi < \Phi\}$  и  $\{(r, \varphi) : r = r_1, -\Phi < \varphi < \Phi\}$  исчезают в этих пределах, соответственно (первый — в силу условий Мейкснера, а второй — ввиду предположения (1.54)). В случае импедансных краевых условий остается

$$2\epsilon k \int_0^\infty \int_{-\Phi}^\Phi |u|^2 r dr d\varphi + \operatorname{Im} \left[ i(k + i\epsilon) \left( \sin \theta_+ \int_0^\infty |u|^2|_{\varphi=\Phi} dr + \sin \theta_- \int_0^\infty |u|^2|_{\varphi=-\Phi} dr \right) \right] = 0 \quad (1.57)$$

(как и при выводе (1.36), мы воспользовались здесь краевыми условиями). Очевидно, что выражение

$$\operatorname{Im} (i(k + i\epsilon) \sin \theta_\pm) = k \operatorname{Re} \sin \theta_\pm - \epsilon \operatorname{Im} \sin \theta_\pm \quad (1.58)$$

будет положительным при достаточно малых  $\epsilon$  при условии  $\operatorname{Re} \sin \theta_\pm > 0$ . Таким образом, второе слагаемое в (1.57) при таких  $\epsilon$  неотрицательно и, тем, самым, равенство (1.57) возможно только в случае  $u \equiv 0$ , что и доказывает теорему в импедансном случае. Если же краевые условия идеальные, то второе слагаемое ( $\operatorname{Im} [\dots]$ ) в формуле (1.57) следует, очевидно, заменить нулем, и тогда равенство  $u \equiv 0$  — простое следствие (1.57). ■

**Замечание 1.3.** Выше мы видели, что ключевым моментом при доказательстве теоремы единственности являлась положительность выражения (1.58) при достаточно малых  $\epsilon$ . Ясно, что эта положительность будет иметь место также и в случае

$$\operatorname{Re} \sin \theta_\pm = 0, \quad \operatorname{Im} \sin \theta_\pm < 0$$

(т.е. в случае пассивных границ специального вида). Кроме того, теорема останется в силе, если в краевых условиях (1.53) заменить выражения  $k \sin \theta_\pm$  на независящие от  $k$  величины  $g_\pm$  и потребовать выполнения неравенств

$$\operatorname{Re} g_\pm > 0.$$

В заключение отметим одно простое следствие теорем единственности: если существует решение задачи дифракции, описываемой уравнением Гельмгольца и либо идеальными краевыми условиями, либо условиями вида (1.8), то оно зависит лишь от  $\varphi$  и от произведения  $kr$ . Действительно, это решение, вообще говоря, зависит от  $r, \varphi, k, u = u(r, \varphi, k)$ . Но тогда функция  $u(\zeta r, \varphi, k/\zeta)$  при любом положительном  $\zeta > 0$  также будет решением задачи, поскольку постановка задачи не изменится при одновременных заменах  $r \rightsquigarrow \zeta r$  и  $k \rightsquigarrow k/\zeta$ . По теореме единственности  $u(r, \varphi, k) = u(\zeta r, \varphi, k/\zeta) \forall \zeta > 0$ . Положив здесь  $\zeta = 1/r$ , мы получаем искомое утверждение.



## Глава 2

# ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В УГЛОВЫХ ОБЛАСТЯХ ИНТЕГРАЛАМИ ЗОММЕРФЕЛЬДА

## 2.1 Вводные замечания

Решения ряда важных дифракционных задач в угловых областях удается построить явно, если искать их решения в виде так называемых интегралов Зоммерфельда.

Интеграл Зоммерфельда — это контурный интеграл вида

$$u(kr, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+} e^{-ikr \cos z} (s(z + \varphi) - s(\varphi - z)) dz \quad (2.1)$$

(здесь и в дальнейшем мы считаем, если не оговорено дополнительно,  $kr > 0$ ).

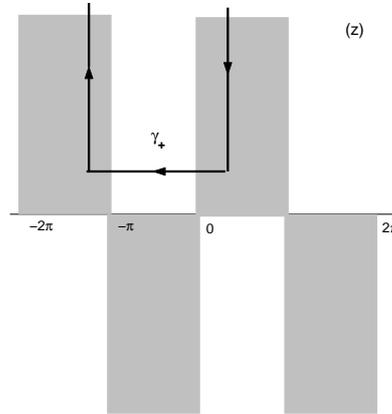


Рис. 2.1: Полулопасы убывания и возрастания  $|e^{-ikr \cos z}|$  (при  $kr > 0$ ) и контур  $\gamma_+$ .

Прежде чем указать, что такое  $\gamma_+$  и  $s(\varphi \pm z)$ , необходимо пояснить поведение на бесконечности функции  $e^{-ikr \cos z}$ . Это целая периодическая функция  $z$ , быстро убывающая (с оценкой  $\text{const} \exp(-\frac{kr}{2} \sin \text{Re } z |\text{Im } z|)$ ) при  $|\text{Im } z| \rightarrow \infty$  в полулопасах  $\{z : 2m\pi < \text{Re } z < (2m+1)\pi; \text{Im } z > 0\}$ ,  $\{z : (2m+1)\pi < \text{Re } z < 2m\pi; \text{Im } z > 0\}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , (они заштрихованы на рис. 2.1) и быстро растущая в остальных полулопасах.

Предполагается, что контур  $\gamma_+$  имеет  $U$ -образную форму и "охватывает", проходя выше вещественной оси, полулопасу  $\{z : -\pi \leq \text{Re } z \leq 0; \text{Im } z \geq \text{const} > 0\}$  (см. рис.2.1). Индекс + здесь подчеркивает, что  $\gamma_+$  целиком находится в полулопасности  $\text{Im } z > 0$ .

Функция  $s(z)$  в (2.1) предполагается мероморфной и удовлетворяющей оценке

$$|s(z)| \leq \text{const} e^{\text{const}|\text{Im} z|}, \quad |\text{Im} z| \rightarrow \infty, \quad (2.2)$$

с некоторыми положительными константами (тем самым гарантируется сходимость интеграла (2.1)).

В связи с представлением (2.1) сразу же возникают вопросы: почему есть основания полагать, что искомые решения можно представить интегралами вида (2.1), и сколь естественны при этом предположения (2.2) о свойствах  $s(z)$ ?

По-существу, ответам на эти вопросы посвящена данная глава. Оказывается, что “неизвестно откуда взявшийся” и на первый взгляд весьма искусственный вид интеграла (2.1) на самом деле довольно естественен для решения задач в угловых областях. Например, можно сразу же заметить, что при подстановке интеграла (2.1) в краевые условия мы опять получаем интегралы близкого вида, в которых вместо выражения  $s(z + \varphi) - s(\varphi - z)$  стоит некоторый оператор от этого выражения с фиксированной  $\varphi = \pm\Phi$ . Исходя из этого наблюдения, удастся краевые условия переформулировать в виде функциональных уравнений относительно функции  $s(z)$ , а также выяснить, какими свойствами должна обладать  $s(z)$ , чтобы удовлетворить остальным условиям задачи. В конце концов, функция  $s(z)$  находится явно как в относительно простом случае идеальных краевых условий (т.е. краевых условий Дирихле или Неймана), так и в случае импедансного клина.

Путь получения этих результатов довольно длинный. Он требует ряда дополнительных рассмотрений, к которым мы и приступаем.

## 2.2 О преобразовании Лапласа

Для объяснения происхождения представления (2.1) существенную роль играет классическое преобразование Лапласа. Цель этого пункта напомнить читателю важные для дальнейшего сведения из теории этого преобразования.

Пусть  $\eta(t)$  — непрерывная функция, заданная на полуоси  $t \geq 0$ , рост которой при  $t \rightarrow +\infty$  не быстрее полиномиального. Преобразованием Лапласа  $\tilde{\eta}(\tau)$  функции  $\eta(t)$  называется интеграл

$$\tilde{\eta}(\tau) = \int_0^{\infty} e^{-\tau t} \eta(t) dt, \quad (2.3)$$

представляющий собой регулярную функцию  $\tau$  в полуплоскости  $\text{Re } \tau > 0$ .<sup>†</sup>

При весьма широких предположениях  $\eta(t)$  восстанавливается по  $\tilde{\eta}(\tau)$  интегралом (который иногда называют интегралом Меллина):

$$\eta(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \tilde{\eta}(\tau) e^{\tau t} d\tau \quad (2.4)$$

( $\sigma$  — любое положительное число). Для справедливости формулы (2.4) достаточно, чтобы, кроме указанного выше ограничения на рост  $\eta(t)$ , на любом отрезке  $[t_1, t_2]$  ( $0 \leq t_1 < t_2 < +\infty$ ) выполнялось условие Гёльдера

$$|\eta(t') - \eta(t'')| \leq H |t' - t''|^\alpha, \quad t_1 \leq t' \leq t'' \leq t_2; \quad 0 < \alpha = \text{const} \leq 1$$

<sup>†</sup>Часто используют следующую терминологию:  $\eta(t)$  — “оригинал”,  $\tilde{\eta}(\tau)$  — его “изображение”.

(постоянная  $H$  не зависит от  $t'$  и  $t''$ ). Отметим также, что при  $t = 0$  интеграл (2.4) понимается в смысле главного значения по Коши и его значение есть не  $\eta(0)$ , а  $\frac{1}{2}\eta(0)$ .

Поведение  $\tilde{\eta}(\tau)$  на бесконечности связано с поведением  $\eta(t)$  в окрестности нуля. Пусть при  $\eta(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} O(t^\beta)$ ,  $\beta > 0$ . Тогда

$$\tilde{\eta}(\tau) = O(|\tau|^{-1-\beta}), \quad |\tau| \rightarrow \infty, \quad |\arg \tau| \leq \text{const} < \frac{\pi}{2}. \quad (2.5)$$

Заметим, что при  $\sigma \rightarrow 0$  интеграл (2.4) переходит в интеграл Фурье от функции  $\tilde{\eta}(\tau i)$ . Сходимость интегралов (2.3) и (2.4) можно строго определить и при  $\text{Re } \tau = 0$  или, что то же самое,  $\sigma = 0$ , если воспользоваться аппаратом обобщенных функций, чем мы заниматься здесь не будем. Отметим только, что поведение при  $t \rightarrow +\infty$  функции  $\eta(t)$ , представляемой интегралом (2.4), вообще говоря, определяется сингулярностями  $\tilde{\eta}(\tau)$  на мнимой оси.

## 2.3 Представление решений уравнения Гельмгольца в угловой области интегралами по $U$ -образному контуру

Пусть  $u = u(R, \varphi)$ ,  $R = kr$ , — решение уравнения Гельмгольца, удовлетворяющее условиям Мейкснера (см. гл.1, формулы (1.13) и (1.18)) и, вместе с производными по  $\varphi$ , растущее при  $R \rightarrow +\infty$  не быстрее полинома по  $R$ . (Поскольку решение задачи дифракции плоской волны на идеальном или импедансном клине должно удовлетворять также и условиям излучения, то такое предположение вполне естественно.) Преобразуем  $u(R, \varphi)$  по Лапласу. Пусть

$$U(\tau, \varphi) = \int_0^\infty e^{-\tau R} u(R, \varphi) dR, \quad (2.6)$$

функция  $U(\tau, \varphi)$  регулярна при  $\text{Re } \tau > 0$ .

Остановимся вначале на краевых условиях Дирихле. В этом случае, в силу условий Мейкснера в форме (1.18),  $u \underset{R \rightarrow 0}{=} O(R^{\frac{\pi}{2\Phi}})$ , откуда, с учетом (2.5), в каждом полусекторе  $|\arg \tau| \leq \text{const} < \frac{\pi}{2}$ ,  $|\tau| \geq \text{const} > 0$

$$|U(\tau, \varphi)| \leq \text{const} |\tau|^{-\frac{\pi}{2\Phi}-1}. \quad (2.7)$$

Аналогично,

$$\left| \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right|, \quad \left| \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right| \leq \text{const} |\tau|^{-\frac{\pi}{2\Phi}-1}. \quad (2.8)$$

В случае краевых условий Неймана или импедансных краевых условий вместо (1.18) имеем  $u \underset{R \rightarrow 0}{=} O(1)$ , что приводит к оценке

$$|U(\tau, \varphi)| \leq \text{const} \quad (2.9)$$

и к оценкам (2.8) для производных.

Решение  $u(R, \varphi)$  восстанавливается интегралом Меллина (см.(2.4)):

$$u(R, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\tau R} U(\tau, \varphi) d\tau \quad \sigma > 0. \quad (2.10)$$

Сделаем замену переменных в интеграле (2.10), полагая  $\tau = -i \cos z$  и считая, что  $z$  меняется в полуполосе  $\{z : -\pi \leq \operatorname{Re} z \leq 0, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ . Получим интеграл

$$u(R, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\cup} e^{-iR \cos z} U(-i \cos z, \varphi) i \sin z dz, \quad (2.11)$$

контур  $\cup$  изображен на рис.2.2.

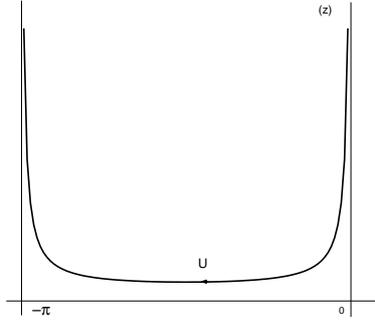


Рис. 2.2: Контур  $\cup$  на комплексной плоскости  $z$ ; бесконечные ветви контура  $\cup$  асимптотически стремятся к полупрямым  $\{z : \operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z \geq 0\}$  и  $\{z : \operatorname{Re} z = -\pi, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ ; вдоль этих границ  $|e^{-iR \cos z}| = 1$  и подынтегральное выражение не имеет сверх-экспоненциального роста.

Интеграл (2.11) перепишем в виде:

$$u(R, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\cup} e^{-iR \cos z} \Xi(z, \varphi) dz, \quad \Xi(z, \varphi) := U(-i \cos z, \varphi) i \sin z. \quad (2.12)$$

Функция  $\Xi$  регулярна внутри полуполосы  $\{z : -\pi < \operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z > 0\}$ , причем в любой более узкой полосе имеют место оценки:

$$|\Xi(z, \varphi)| \leq \operatorname{const} e^{-\frac{\pi}{2\Phi} \operatorname{Im} z}, \quad \left| \frac{\partial \Xi}{\partial \varphi} \right| + \left| \frac{\partial^2 \Xi}{\partial \varphi^2} \right| \leq \operatorname{const} e^{-\frac{\pi}{2\Phi} \operatorname{Im} z} \quad (2.13)$$

в случае краевых условий Дирихле,

$$|\Xi(z, \varphi)| \leq \operatorname{const}, \quad \left| \frac{\partial \Xi}{\partial \varphi} \right| + \left| \frac{\partial^2 \Xi}{\partial \varphi^2} \right| \leq \operatorname{const} e^{-\frac{\pi}{2\Phi} \operatorname{Im} z} \quad (2.14)$$

в случае импедансных краевых условий или условий Неймана.

Мы сделаем существенную экстраполяцию: предположим, что функция  $\Xi$  регулярна в чуть большей полосе, чем следует из наших построений, а именно, в полуполосе

$$-\pi - \varepsilon < \operatorname{Re} z < \varepsilon, \operatorname{Im} z > -\varepsilon_1, \quad \varepsilon, \varepsilon_1 = \operatorname{const} > 0 \quad (2.15)$$

за исключением, быть может, конечного числа полюсов (положение которых зависит от  $\varphi$ ), которые могут располагаться только на линиях

$$\begin{aligned} & \{z : -\pi - \varepsilon < \operatorname{Re} z < \varepsilon, \operatorname{Im} z = 0\}, \\ & \{z : \operatorname{Re} z = \pi, \operatorname{Im} z > 0\}, \quad \{z : \operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z > 0\}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

При  $\text{Im } z \geq \text{const} > 0$  в полуполосе (2.15) постулируются оценки (2.13) или (2.14), в зависимости от вида краевых условий. Производные, входящие в эти оценки, мы считаем функциями, регулярными по  $z$  и непрерывными по совокупности переменных  $\varphi$  и  $z$ , если  $z$  не является полюсом  $\Xi$ .

В силу наших предположений контур  $\cup$  можно продеформировать в контур  $\gamma_+$  (см. рис. 2.2), составленный из полупрямых

$$\begin{aligned} & \{z : \text{Re } z = \varepsilon', \text{ Im } z \geq \text{const} > 0\}, \\ & \{z : -\pi - \varepsilon' < \text{Re } z < \varepsilon', \text{ Im } z = \text{const} > 0\}, \\ & \{z : \text{Re } z = -\pi - \varepsilon', \text{ Im } z \geq \text{const} > 0\}, \\ & 0 < \varepsilon' < \varepsilon. \end{aligned} \tag{2.17}$$

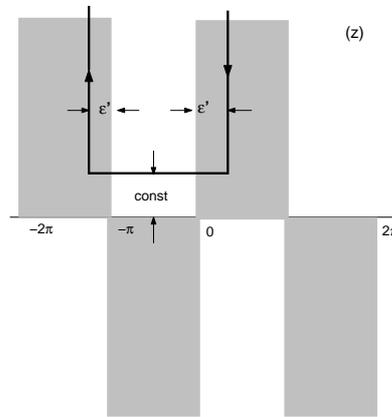


Рис. 2.3: Детали положения контура  $\gamma_+$ .

В результате, от интеграла (2.12) мы приходим к интегралу, во многом схожему с интегралом (2.1):

$$u(R, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+} e^{-iR \cos z} \Xi(z, \varphi) dz. \tag{2.18}$$

## 2.4 Теорема Малюжинца

В наших дальнейших построениях существенную роль будет играть доказанная Г.Д.Малюжинцем теорема (см. также [31, 30]).

### Теорема 2.1.

1. Пусть функция  $\Upsilon(z)$  задана и регулярна в полуполосе  $\{z : -\pi - \varepsilon_1 \leq \text{Re } z \leq \varepsilon_1, \text{ Im } z \geq \varepsilon_2 > 0\}$ ,  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  — некоторые положительные константы. (Под регулярностью в замкнутой полосе подразумевается регулярность и в некоторой окрестности этой полосы.)

2. Пусть при некотором  $D = \text{const}$  и достаточно больших  $\text{Im } z$  в этой полосе

$$|\Upsilon(z)| \leq \text{const } e^{D|\text{Im } z|}. \tag{2.19}$$

3. Пусть при всех  $R > 0$  интеграл

$$\int_{\gamma_+} e^{-iR \cos z} \Upsilon(z) dz = 0. \quad (2.20)$$

Тогда:

1. при  $D < 1$   $\Upsilon(z) \equiv 0$

2. при  $D \geq 1$

$$\Upsilon(z) = \sin z [c_0 + c_1 \cos z + \dots + c_\ell (\cos z)^\ell], \quad (2.21)$$

где  $\ell = [D]$  — целая часть  $D$ ,  $c_0, \dots, c_\ell$  — некоторые постоянные.

### Доказательство

1° Рассмотрим сначала случай  $D < 1$ .

Сделаем в интеграле (2.20) замену переменной  $-i \cos z = \tau$ . Контур  $\gamma_+$  перейдет в контур  $\Gamma$ , изображенный на рис.2.4, \* причем точки, находящиеся внутри петли контура  $\gamma_+$ , оказываются справа от контура  $\Gamma$ .

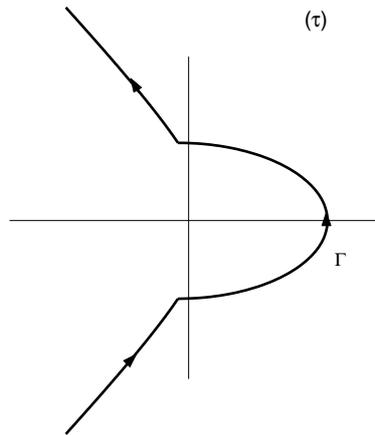


Рис. 2.4: Контур  $\Gamma$  — образ контура  $\gamma_+$ .

Мы приходим к равенству:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\tau R} \tilde{\Upsilon}(\tau) d\tau = 0 \quad (\forall R > 0), \quad (2.22)$$

где

$$\tilde{\Upsilon}(\tau) = -i \frac{\Upsilon(\arccos i\tau)}{\sqrt{\tau^2 + 1}}$$

— функция, регулярная справа от  $\Gamma$  и в окрестности  $\Gamma$ , причем справа от  $\Gamma$  при  $|\tau| \rightarrow \infty$

$$|\tilde{\Upsilon}(\tau)| = O(|\tau|^{D-1}). \quad (2.23)$$

\* Легко показать, что образами вертикальных бесконечных частей контура  $\gamma_+$  являются дуги гипербол, а отрезок, параллельный вещественной оси переходит в дугу эллипса.

Пусть  $\xi$  — точка справа от  $\Gamma$ , т.е.  $\operatorname{Re}(\tau - \xi) < 0$ ,  $\tau \in \Gamma$ . Умножим (2.22) на  $e^{-R\xi}$  и проинтегрируем по  $R$  от 0 до  $\infty$ . Меняя порядок интегрирования (что здесь законно), получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \tilde{\Upsilon}(\tau) \int_0^{\infty} e^{(\tau-\xi)R} dR = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{\Upsilon}(\tau)}{\tau - \xi} d\tau = 0. \quad (2.24)$$

Интеграл в правой части равенства (2.24) очевидно равен вычету в точке  $\xi$ , взятому со знаком "−", т.е. из (2.24) следует

$$\tilde{\Upsilon}(\xi) = 0.$$

Тем самым,  $\Upsilon(z) = 0$  внутри петли контура  $\gamma_+$  и, следовательно,  $\Upsilon(z) \equiv 0$  во всей области регулярности  $\Upsilon(z)$ . Тем самым теорема доказана для случая  $D < 1$ .

2° Докажем несложную, но существенную для доказательства теоремы лемму:\*

**Лемма 2.1.** Пусть функция  $\Upsilon(z)$  удовлетворяет условиям теоремы 2.1. Тогда в любой "суженной" полуполосе

$$\{z : -\pi - \varepsilon'_1 \leq \operatorname{Re} z \leq \varepsilon'_1, \operatorname{Im} z \geq \varepsilon'_2 > 0\}, \quad (2.25)$$

где  $0 < \varepsilon'_1 < \varepsilon_1$ ,  $\varepsilon'_2 > \varepsilon_2$ , и для любого натурального  $m$

$$\left| \frac{d^m \Upsilon(z)}{dz^m} \right| \leq \operatorname{const} e^{D|\operatorname{Im} z|}. \quad (2.26)$$

**Доказательство леммы.** Для любой точки  $z$  из полуполосы (2.25) мы можем указать точку  $z_0$  из той же полуполосы и достаточно малое  $\delta > 0$  так, что  $|z_0 - z| < \frac{\delta}{2}$  и регулярную (в более широкой полосе) функцию  $\Upsilon(z)$  можно представить интегральной формулой Коши

$$\Upsilon(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z'-z_0|=\delta} \frac{\Upsilon(z') dz'}{z' - z}.$$

После  $m$  дифференцирований имеем

$$\frac{d^m}{dz^m} \Upsilon(z) = \frac{m!}{2\pi i} \int_{|z'-z_0|=\delta} \frac{\Upsilon(z') dz'}{(z' - z)^{m+1}}. \quad (2.27)$$

Оценивая интеграл (2.27) по модулю и учитывая, что на контуре интегрирования  $|z' - z| \geq |z' - z_0| - |z_0 - z| > \frac{\delta}{2}$ , получим:

$$\left| \frac{d^m \Upsilon(z)}{dz^m} \right| \leq \frac{m! 2^m}{\delta^m} \max_{|z'-z_0|=\delta} |\Upsilon(z')|,$$

откуда сразу же следует искомая оценка (2.26).

---

\*В.В.Камоцкий, частное сообщение.

3° Завершение доказательства теоремы (случай  $D \geq 1$ ). Пусть вначале  $1 \leq D < 2$ . Интегрируя (2.20) по частям, получим:

$$\int_{\gamma_+} e^{-iR \cos z} \Upsilon(z) dz = \int_{\gamma_+} \frac{\Upsilon(z)}{iR \sin z} d e^{-iR \cos z} = \int_{\gamma_+} e^{-iR \cos z} \left( \frac{i}{R} \frac{d}{dz} \frac{\Upsilon(z)}{\sin z} \right) dz = 0. \quad (2.28)$$

Выражение  $\frac{\Upsilon(z)}{\sin z}$  растёт при  $|\operatorname{Im} z| \rightarrow \infty$  не быстрее, чем  $\operatorname{const} e^{(D-1)|\operatorname{Im} z|}$ . В соответствии с только что доказанной леммой, такой же порядок роста имеет и  $\frac{d}{dz} \left( \frac{\Upsilon(z)}{\sin z} \right)$ . Для  $D - 1 < 1$  мы можем сослаться на уже доказанный частный случай теоремы и заключить, что

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{\Upsilon(z)}{\sin z} \right) = 0.$$

Повторяя это рассуждение по индукции, получим

$$\left( \frac{d}{dz} \frac{1}{\sin z} \right)^\ell \Upsilon(z) = 0, \quad \ell = [D],$$

откуда и следует (2.21). ■

## 2.5 Дальнейшие сведения о функции $\Xi(z, \varphi)$ \*

Подставим интеграл (2.18) в уравнение Гельмгольца. Мы получим:

$$(\Delta + k^2) u(kr, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+} \left( \Xi(z, \varphi) \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + k^2 \right) e^{-ikr \cos z} + \frac{e^{-ikr \cos z}}{r^2} \frac{\partial^2 \Xi}{\partial \varphi^2} \right) dz = 0.$$

Заметим, что

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + k^2 \right) e^{-ikr \cos z} = -\frac{1}{r^2} (-k^2 r^2 \sin^2 z + ikr \cos z) e^{-ikr \cos z} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} e^{-ikr \cos z},$$

и интегрируя по частям, получим:

$$\frac{1}{r^2} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+} e^{-iR \cos z} \left( -\frac{\partial^2 \Xi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Xi}{\partial \varphi^2} \right) dz = 0. \quad (2.29)$$

Применим к уравнению (2.29) теорему 2.1 (в частности, порядок роста производных функции  $\Xi$  оценим с помощью леммы 2.1). Получаем:

$$\frac{\partial^2 \Xi}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2 \Xi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.30)$$

внутри контура  $\gamma_+$ . В силу принципа аналитического продолжения равенство (2.30) имеет место во всей области регулярности  $\Xi$  (как функции  $z$ ) и при всех рассматриваемых углах  $-\Phi \leq \varphi \leq \Phi$ . Как известно, общее решение уравнения (2.30) имеет вид

$$\Xi(z, \varphi) = s_1(\varphi + z) + s_2(\varphi - z). \quad (2.31)$$

\*Материал этого раздела во многом основан на монографии [21].

Напомним, что мы предполагаем мероморфность функции  $\Xi$  в полуполосе (2.15) (причем конечное число полюсов ее может находиться только на линиях (2.16)). Применяя к обеим частям равенствам (2.31) дифференциальный оператор  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$ , получим:

$$s'_1(\varphi + z) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \Xi(z, \varphi). \quad (2.32)$$

Правая часть в этом равенстве мероморфна в области (2.15), поэтому в той же области мероморфна и  $s'_1(\varphi + z)$ . С учетом сдвига на величину  $\varphi$ , которая может меняться от  $-\Phi$  до  $\Phi$ , можно утверждать, что  $s'_1(z)$  мероморфна в полуполосе

$$\{z : -\pi - \Phi - \varepsilon < \operatorname{Re} z < \Phi + \varepsilon, \quad \operatorname{Im} z > -\varepsilon_1\}, \quad \varepsilon, \varepsilon_1 > 0, \quad (2.33)$$

причем в более узкой полуполосе, получаемой из (2.33) при  $\varepsilon = \varepsilon_1 = 0$ , эта функция регулярна.

Совершенно аналогично (применяя оператор  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$ ) устанавливаем мероморфность производной  $s'_2(z)$  в полуполосе

$$\{z : -\Phi - \varepsilon < \operatorname{Re} z < \pi + \Phi + \varepsilon, \quad \operatorname{Im} z < \varepsilon_1\}, \quad \varepsilon, \varepsilon_1 > 0, \quad (2.34)$$

и ее регулярность в более узкой полосе (2.34) при  $\varepsilon = \varepsilon_1 = 0$ .

Здесь мы сделаем еще одно существенное предположение: будем считать, что в полуполосах (2.33) и (2.34) мероморфны не только соответственно, производные  $s'_1(z)$ ,  $s'_2(z)$ , но и сами функции  $s_1(z)$ ,  $s_2(z)$ . (Вывод о регулярности в более узких ( $\varepsilon = \varepsilon_1 = 0$ ) полуполосах не нуждается в дополнительных предположениях.)

Ниже мы покажем, что  $s_2(z) = -s_1(z)$ . Этот вывод будет сделан на основе асимптотического анализа интеграла Зоммерфельда при  $R \rightarrow \infty$  в разделе 2.6: равенство  $s_2(z) = -s_1(z)$  будет означать отсутствие в асимптотике цилиндрических волн, приходящих из бесконечности (которые не удовлетворяют условию излучения (1.28)).

Итак, опуская индекс 1 у функции  $s$ ,

$$\Xi(z, \varphi) = s(\varphi + z) - s(\varphi - z) \quad (2.35)$$

и, тем самым, интеграл (2.18) принимает вид (2.1) знаменитого интеграла Зоммерфельда.

Отметим, что на пути к формуле (2.35) мы установили и ряд свойств функции  $s(z)$ . В частности, мы видели, что: для  $\Xi(z)$ , а следовательно, и для  $s(z)$ , должны выполняться оценки (2.13) и (2.14); функция  $s(z)$  регулярна в области

$$\{z : -\pi - \Phi < \operatorname{Re} z < \Phi, \operatorname{Im} z > 0\} \cup \{z : -\Phi < \operatorname{Re} z < \pi + \Phi, \operatorname{Im} z < 0\}, \quad (2.36)$$

изображенной на рис.2.5.

Перепишем интеграл (2.1) в виде

$$u(kr, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+} e^{-ikr \cos z} s(\varphi + z) dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+} e^{-ikr \cos z} s(\varphi - z) dz$$

и сделаем во втором интеграле замену переменной  $z \rightsquigarrow -z$ . Контур  $\gamma_+$  перейдет при этом в контур  $\gamma_-$ , симметричный относительно начала координат контуру  $\gamma_+$  (см. рис.2.5), а интеграл (2.1) переходит в другой (тоже классический) вид интеграла Зоммерфельда:

$$u(kr, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+ \cup \gamma_-} e^{-ikr \cos z} s(\varphi + z) dz. \quad (2.37)$$

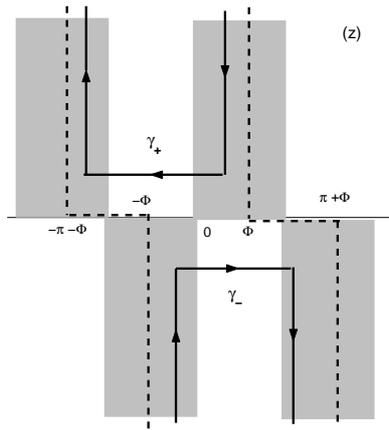


Рис. 2.5: Область (2.36) регулярности функции  $s(z)$  расположена между ломаными пунктирными линиями; сплошными линиями изображены контуры  $\gamma_{\pm}$ .

## 2.6 Асимптотический анализ интеграла Зоммерфельда при $kr \rightarrow \infty$

При изучении волновых явлений одним из главных вопросов является поведение волнового поля в так называемой “дальней зоне”  $kr \gg 1$  (иногда говорят о высокочастотном приближении, что не совсем точно). В применении к интегралу Зоммерфельда (2.37) это означает асимптотическое поведение этого интеграла при  $kr \rightarrow \infty$ .

Хорошо известно, что асимптотическое исследование контурных интегралов вида

$$\int_C e^{pS(z)} F(z) dz$$

$p \rightarrow +\infty$  (интеграл (2.37) именно таков) осуществляется при помощи метода перевала (см. [14], ч.2; для удобства читателя (весьма) краткое изложение метода перевала приведено в приложении I).

При вычислениях по методу перевала одним из ключевых моментов является деформация контура интегрирования, приводящая к его совмещению с *перевальным контуром* (или с одним из перевальных контуров). Перевальным контуром называется множество точек  $\{z : \operatorname{Re} S(z) - \operatorname{Re} S(z_0) \leq 0, \operatorname{Im} S(z) - \operatorname{Im} S(z_0) = 0\}$ , где  $z_0$  — *седловая точка* (одна из таких точек), определяемая как корень уравнения  $S'(z) = 0$ . \* Существенным обстоятельством при этом является то, что глобальной деформации исходного контура в перевальный не требуется: достаточно совместить их только в малой (порядка  $O\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right)$ ) окрестности седловой точки.

В случае интеграла Зоммерфельда  $S(z) = -i \cos z$  и уравнение седловых точек имеет вид  $\sin z = 0$ . Из дальнейшего ясно, что следует ограничиться рассмотрением седловых точек  $-\pi, 0, \pi$  (исходные контуры  $\gamma_+$  или  $\gamma_+ \cup \gamma_-$  могут быть продеформированы только в те перевальные контуры, которые проходят через эти три точки). Обозначим через  $SP_{z_0}$  перевальный контур, проходящий через точку  $z_0$ . Нетрудно получить следующие уравнения

\*Если в процессе деформации контура  $C$  приходится пересекать полюса  $F(z)$ , то соответствующие вычеты, разумеется, вносят свой вклад в асимптотику рассматриваемого интеграла.

для перевальных контуров:

$$SP_{z_0} = \{z : |\operatorname{Re} z - z_0| = \operatorname{gd}(\operatorname{Im} z)\}, \quad (2.38)$$

где  $\operatorname{gd}(x) = \operatorname{sign}(x) \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$  — функция, называемая гудерманианом. Взаимное расположение контуров  $\gamma_{\pm}$  и перевальных контуров показано на рис.2.6.

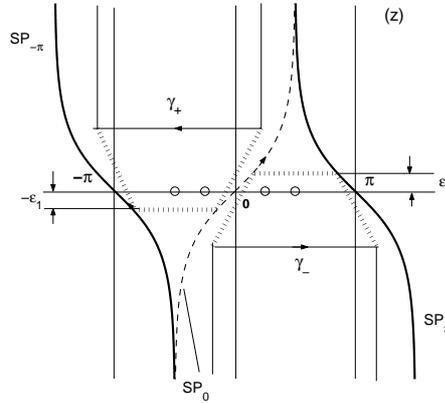


Рис. 2.6: Деформация контуров  $\gamma_{\pm}$  (показана точками): контур  $\gamma_+$  деформируется в часть контура  $SP_{-\pi} + SP_0$ , а контур  $\gamma_-$  — в часть контура  $SP_{-\pi} - SP_0$ ; кружками обозначены полюса подынтегрального выражения.

Рассмотрим вначале интеграл (2.18) с подынтегральной функцией (2.31). Если “взять” за нижнюю точку контура  $\gamma_+$  и “опустить” ее до уровня  $\operatorname{Im} z = -\epsilon_1$ , то контур  $\gamma_+$  можно совместить с частью контура  $SP_{-\pi} + SP_0$ , проходящей через седловые точки  $z = -\pi$  и  $z = 0$ . Возможно, при такой деформации будут пересечены полюса функции  $\Xi(z, \varphi)$ . В каждом таком полюсе  $\varphi'$  ( $\operatorname{Im} \varphi' = 0$ ) вычет равен  $\operatorname{const} e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi')}$ . Таким образом, в случае пересечения каждого полюса выделяется слагаемое, которое представляет собой плоскую волну, распространяющуюся в направлении  $-\pi + \varphi'$ .

Асимптотика интеграла по продеформированному контуру легко находится по методу перевала:

$$u(kr, \varphi) \underset{kr \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{ikr}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{kr}} (s_1(-\pi + \varphi) + s_2(\pi - \varphi)) + \frac{e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-ikr}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{kr}} (s_1(\varphi) + s_2(\varphi)). \quad (2.39)$$

(Здесь мы временно предположили, что точки  $-\pi + \varphi$ ,  $\varphi$  не являются полюсами функции  $s_1(z)$ , а точки  $\pi - \varphi$ ,  $\varphi$  не являются полюсами функции  $s_2(z)$ .)

Физический смысл первого слагаемого в правой части (2.39) — это цилиндрическая волна, рассеянная вершиной клина. Она расходится от вершины как из центра. Аналогично, второе слагаемое описывало бы волну, сходящуюся к вершине. Однако элементарно проверяется, что это второе слагаемое не удовлетворяет условию излучения (1.28)! Поэтому с необходимостью  $s_1(\varphi) = -s_2(\varphi)$ . По принципу аналитического продолжения

$$s_1(z) \equiv -s_2(z). \quad (2.40)$$

Равенство (2.40) было использовано нами в разделе 2.5 — с его помощью возник интеграл (2.37). При деформации суммы контуров  $\gamma_+ \cup \gamma_-$  в контур, частично совпадающий

перевальными контурами оказывается, что вклад от седловой точки  $z = 0$  сокращается (см.рис.2.6). Сумма вкладов от седловых точек  $z = \pm\pi$  приводит к формуле:

$$u(kr, \varphi) \underset{kr \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{ikr}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{kr}} (s(-\pi + \varphi) - s(\pi - \varphi)). \quad (2.41)$$

## 2.7 О падающей и поверхностных волнах

Как следует из наших предыдущих рассуждений (см. (2.33), (2.34)), полоса  $|\operatorname{Re} z| < \Phi$  может содержать особенности функции  $s(z)$  лишь при  $-\Phi < z < \Phi$ ; кроме того, особенности  $s(z)$  могут находиться на полупрямых  $\{z : \operatorname{Re} z = -\Phi, \operatorname{Im} z < 0\}$ ,  $\{z : \operatorname{Re} z = \Phi, \operatorname{Im} z > 0\}$  (см. рис.2.7).

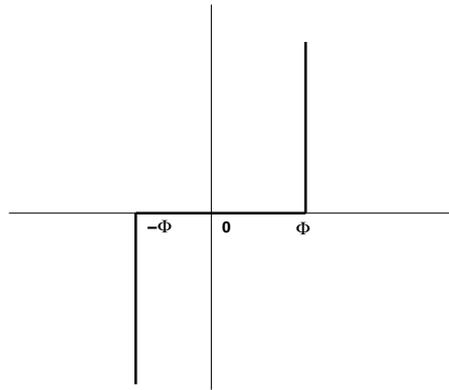


Рис. 2.7: Линии, на которых возможно наличие полюсов у функции  $s(z)$  в полосе  $|\operatorname{Re} z| \leq \Phi$ .

Пусть  $\varphi_0$ ,  $-\Phi < \varphi_0 < \Phi$ , — полюс функции  $s(z)$  с вычетом, равным 1. Тогда вычет подынтегральной функции в (2.37) будет

$$u_i = e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)}. \quad (2.42)$$

Как уже отмечалось, такое выражение описывает плоскую волну, распространяющуюся в направлении  $-\pi + \varphi_0$ .

В дальнейшем будет предполагаться наличие *заданного* полюса  $\varphi_0$  у функции  $s(z)$  на отрезке вещественной оси  $-\Phi < z < \Phi$ . Таким образом в постановку задачи будет введена падающая плоская волна  $u_i$ . При этом, если  $(\varphi_0 - \Phi, \varphi_0 + \Phi) \subseteq (-\pi, \pi)$ , то при любом  $\varphi$ ,  $-\Phi < \varphi < \Phi$ , при деформации контура  $\gamma_+ \cup \gamma_-$  в сумму перевальных контуров будет пересечен полюс функции  $s(\varphi + z)$  и, тем самым, в асимптотике волнового поля будет присутствовать слагаемое (2.42). В этом случае мы говорим, что клин целиком “освещен” падающей волной. Если же часть интервала  $(\varphi_0 - \Phi, \varphi_0 + \Phi)$  выходит за пределы  $(-\pi, \pi)$ , то клин частично “затеняет” падающую на него волну  $e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)}$ : значения  $\varphi$  такие, что  $\varphi_0 - \varphi$  не принадлежит отрезку  $[-\pi, \pi]$ , находятся в области тени (иными словами, полюс функции  $s(\varphi + z)$  не пересекается при деформации исходного контура в перевальные).

Рассмотрим, какой волне мог бы соответствовать полюс  $z_0 = -\Phi - i\zeta$ ,  $\zeta > 0$ , на полупрямой  $\{z : \operatorname{Re} z = -\Phi, \operatorname{Im} z < 0\}$ . Соответствующий вычет, очевидно, будет равен

$$\operatorname{const} e^{-ikr \cos(\varphi - z_0)} = \operatorname{const} e^{-ikr \cos(\varphi + \Phi) \operatorname{ch} \zeta} e^{-kr \sin(\varphi + \Phi) \operatorname{sh} \zeta}. \quad (2.43)$$

Это выражение при  $kr \rightarrow +\infty$  существенно отлично от нуля лишь при малых  $\varphi + \Phi$ , т.е. вблизи стороны  $\varphi = -\Phi$  рассматриваемого клина и соответствует поверхностной волне, распространяющейся вдоль этой стороны по направлению к вершине клина.

Аналогично, полюсу  $z_0 = \Phi + \zeta i$ ,  $\zeta > 0$ , соответствует поверхностная волна

$$\text{const } e^{-ikr \cos(\Phi-\varphi) \text{ch } \zeta} e^{-kr \sin(\Phi-\varphi) \text{sh } \zeta}, \quad (2.44)$$

распространяющаяся вдоль стороны  $\varphi = \Phi$  клина по направлению к его вершине.

Поверхностные волны не могут существовать в случае краевых условий Дирихле или Неймана. В случае импедансного клина поверхностная волна при специальных предположениях об импедансах возможна (см. §1.4). В дальнейшем мы предполагаем отсутствие приходящих поверхностных волн или, в конечном счете, отсутствие полюсов функции  $s(z)$  на прямых  $\text{Re } z = \pm\Phi$ .

## 2.8 О поведении интегралов Зоммерфельда при $kr \rightarrow 0$

В этом параграфе мы изучим поведение интегралов Зоммерфельда

$$u(kr, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+} e^{-ikr \cos z} (s(\varphi + z) - s(\varphi - z)) dz \quad (2.45)$$

в “ближней зоне”  $kr \rightarrow 0$ . Локальными рассмотрениями (см. §1.2) вопрос решается не до конца: коэффициенты при соответствующих выражениях  $r^\mu \sin \frac{m\pi}{2\Phi} \varphi$  (см. формулу (1.17)) зависят от глобального поведения волнового поля (являются его линейными функционалами).

Коротко остановимся на построении соответствующей асимптотики, которая при  $kr \rightarrow 0$  определяется поведением  $\Xi(z, \varphi) := s(\varphi + z) - s(\varphi - z)$  при  $\text{Im } z \rightarrow +\infty$ . При этом каждому члену асимптотического разложения  $\Xi(z, \varphi)$  ( $\text{Im } z \rightarrow +\infty$ ) соответствует некоторое слагаемое в разложении  $u(kr, \varphi)$  при  $kr \rightarrow 0$ . Эти слагаемые удастся выразить через функции Бесселя.

Действительно, при  $kr \rightarrow 0$  основной вклад в интеграл будут давать участки контура  $\gamma_+$ , расположенные в области достаточно больших значений  $\text{Im } z$ . Пусть внутри контура  $\gamma_+$

$$\Xi(z) \underset{\text{Im } z \rightarrow +\infty}{=} O((iz)^p e^{i\mu z}) \quad (2.46)$$

при некоторых  $\mu > 0$  и натуральном  $p$ .<sup>\*</sup> Поэтому (опуская соответствующие оценки) можно написать

$$u(kr, \varphi) \sim \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+} (iz)^p e^{-ikr \cos z + i\mu z} dz. \quad (2.47)$$

Воспользуемся следующим интегральным представлением функции Бесселя (см., например, [14], ч.2):

$$J_\nu(kr) = -\frac{e^{i\nu\frac{\pi}{2}}}{2\pi} \int_{\gamma_+} e^{-ikr \cos z} e^{i\nu z} dz. \quad (2.48)$$

<sup>\*</sup>Как будет следовать из получаемого в дальнейшем явного вида функции  $s(z)$ , в случае идеальных или импедансных краевых условий  $\mu = 0$  или  $\mu = 1$  и  $p = 0$ .

Сравнив (2.47) и (2.48), замечаем, что

$$u(kr, \varphi) \underset{kr \rightarrow 0}{\sim} 2i \frac{\partial^p}{\partial \nu^p} (J_\nu(kr) e^{-i\frac{\pi}{2}\nu}) \Big|_{\nu=\mu}. \quad (2.49)$$

Отсюда уже нетрудно, зная поведение функции Бесселя при малых значениях аргумента, оценить и поведение интеграла Зоммерфельда при  $kr \rightarrow 0$ . В частности, если  $p = 0$ , то

$$u(kr, \varphi) \underset{kr \rightarrow 0}{\sim} \frac{2i}{\Gamma(1 + \mu)} \left( \frac{kr}{2} \right)^\mu. \quad (2.50)$$

## Глава 3

### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ НА КЛИНЕ С ИДЕАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

В этой главе мы, во-первых, покажем, как техника интегралов Зоммерфельда позволяет явно решать задачи дифракции плоской волны на клине при идеальных (Дирихле или Неймана) краевых условиях. Во-вторых, также будет решена задача о распространении акустических колебаний в угловой области, возбуждаемых колебаниями одной из сторон клина. Аналитическое выражение для соответствующего волнового поля не только интересно само по себе, но также возникает при решении задачи Малюжинца.

#### 3.1 Краевые условия Дирихле

В главе 2 было показано, что интеграл Зоммерфельда (2.1) (или (2.37)) удовлетворяет уравнению Гельмгольца, условиям излучения и, при выполнении оценок (2.13)–(2.14) для функции  $\Xi(z, \varphi) := s(\varphi + z) - s(\varphi - z)$ , — условиям Мейкснера. Потребовав выполнение краевых условий и зафиксировав полюс функции  $s(z)$ , соответствующий падающей волне, удастся получить явное выражение этой функции.

Подставим интеграл (2.1) в краевые условия Дирихле (1.6):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+} e^{-ikr \cos z} (s(z \pm \Phi) - s(\pm \Phi - z)) dz = 0. \quad (3.1)$$

С учетом оценок (2.13)–(2.14) теорема 2.1 приводит к паре функциональных уравнений относительно искомой функции  $s(z)$  (подобного рода функциональные системы получили название уравнений Малюжинца):

$$\begin{cases} s(\Phi + z) - s(\Phi - z) = 0 \\ s(-\Phi + z) - s(-\Phi - z) = 0 \end{cases} . \quad (3.2)$$

Как было показано в §2.7 предыдущей главы, падающая плоская волна  $u_i = e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)}$  соответствует полюсу с вычетом единица функции  $s(z)$  точке  $\varphi_0$ ,  $-\Phi < \varphi_0 < \Phi$ . Поэтому мы приходим к следующей задаче на функцию  $s(z)$ : *найти мероморфную функцию  $s(z)$ , имеющую в полосе  $\{z : -\Phi \leq \operatorname{Re} z \leq \Phi\}$  единственный полюс (с вычетом единица) в точке  $\varphi_0 \in (-\Phi, \Phi)$  и удовлетворяющую системе равенств (3.2); функция  $s(z)$  (а в силу леммы 2.1 и ее производная) должна удовлетворять оценке*

$$|s(z)| \leq C e^{-\frac{\pi}{2\Phi} |\operatorname{Im} z|}, \quad |\operatorname{Im} z| \geq \operatorname{const}. \quad (3.3)$$

Заметим, что неравенство (3.3) в силу допущений и построений главы 2 должно иметь место в области, изображенной на рис.2.5. Оно распространяется на внешность горизонтальной полосы  $\{z : |\operatorname{Im} z| \geq \text{const}\}$  в силу равенств (3.2), причем  $C$  в неравенстве (3.3) не зависят от  $z$ .

Перейдем к нахождению функции  $s(z)$ . Заметим, что условия (3.2) — условия симметричности  $s(z)$  относительно точек  $\pm\Phi$  — означают  $4\Phi$ -периодичность  $s(z)$ . Из (3.2) также следует наличие у  $s(z)$  полюса при  $z = \bar{\varphi} = 2\Phi - \varphi_0$  в точке, симметричной полюсу  $\varphi_0$  относительно  $\varphi = \Phi$ . Далее, полюса  $\varphi_0$  и  $\bar{\varphi}$  периодически повторяются в силу  $4\Phi$ -периодичности  $s(z)$ . В полюсах  $\varphi_0 + 4\Phi n$  ( $\bar{\varphi} + 4\Phi n$ ),  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , вычеты  $s(z)$  равны 1 (-1) (функция  $s(z)$  симметрична относительно точки  $\Phi$ , поэтому при замене  $z \rightsquigarrow 2\Phi - z$  главная часть  $\frac{1}{z - \varphi_0}$  переходит в  $\frac{1}{2\Phi - z - \varphi_0} = \frac{-1}{z - \bar{\varphi}}$ ).

Функция, имеющая полюса с вычетами, равными 1 в полюсах  $\varphi_0 + 4\Phi n$  и -1 в полюсах  $\bar{\varphi} + 4\Phi n$ , легко угадываются. Это

$$s(z) = \frac{\pi}{4\Phi} \left( \operatorname{ctg} \frac{(z - \varphi_0)\pi}{4\Phi} - \operatorname{ctg} \frac{(z - \bar{\varphi})\pi}{4\Phi} \right) = \frac{\mu \cos \mu \varphi_0}{\sin \mu z - \sin \mu \varphi_0}, \quad (3.4)$$

где  $\mu = \frac{\pi}{2\Phi}$ . Подставляя (3.4) в интеграл (2.37), получаем

$$u(kr, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+ \cup \gamma_-} \frac{\mu \cos \mu \varphi_0}{\sin \mu(z + \varphi) - \sin \mu \varphi_0} e^{-ikr \cos z} dz. \quad (3.5)$$

Заметим, что из наших построений функция  $s(z)$  определяется однозначно с точностью до постоянного слагаемого. В самом деле: пусть  $\tilde{s}(z)$  имеет те же свойства, и  $s(z)$ . Тогда разность  $\tilde{s}(z) - s(z)$   $4\Phi$ -периодична и не имеет особенностей на плоскости комплексной переменной  $z$ . В силу (3.3) эта разность равна нулю на бесконечности, поэтому (теорема Лиувилля)

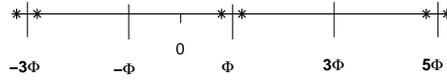
$$\frac{d}{dz}(\tilde{s} - s) \equiv 0, \quad \tilde{s} = s + \text{const}.$$

Добавление постоянной к  $s(z)$  не меняет значения интеграла Зоммерфельда (3.5), чем и заканчивается нахождение решения задачи дифракции плоской волны на клине в случае краевых условий Дирихле.

## 3.2 О поведении решения при $kr \rightarrow \infty$

**Выделение геометро-оптической части решения.** Сначала рассмотрим совокупность полюсов  $\{\varphi_p\}$  функции  $s(z)$ . Они расположены на вещественной оси и порождаются заданным полюсом  $\varphi_0$ ,  $-\Phi < \varphi_0 < \Phi$  как результат его последовательных отражений от точек  $\Phi(2m + 1)$  ( $m$  — целое). Если  $(\pm 1)/(z - \varphi_0)$  — главная часть  $s$  в окрестности полюса  $\varphi_0$ , то после отражений (симметрии) относительно точки  $\Phi(2m + 1)$  возникает новый полюс  $\varphi_p$  с главной частью  $(\mp 1)/(z - \varphi_p)$ . Совокупность полюсов  $s(z)$  схематически изображена на рис.3.1.

При деформации контура  $\gamma = \gamma_+ + \gamma_-$  в перевальный пересекаться некоторые из полюсов  $s(\varphi + z)$ . Соответствующий вычет равен  $\pm \exp(-ik \cos(\varphi - \varphi_p))$  и соответствует плоской волне, движущейся в направлении  $\varphi_p + \pi$ . Если  $\bar{\varphi}$  и  $\bar{\bar{\varphi}}$  — два полюса, симметричных относительно  $\Phi(2m + 1)$  при некотором  $m$ , причем  $|\bar{\varphi} - \bar{\bar{\varphi}}| < 4\Phi$ , то из двух плоских волн,

Рис. 3.1: Полуса функции  $s(z)$  (обозначены звездочками).

соответствующих  $\bar{\varphi}$  и  $\bar{\bar{\varphi}}$ , одну можно рассматривать как падающую на какую-либо сторону угла, а другую — как отраженную.

Полуса по переменной  $z$  функции  $s(z + \varphi)$  — это  $\varphi_p - \varphi$  ( $\varphi_p$  — полюс  $s(z)$ ). При изменении  $\varphi$  от  $-\Phi$  до  $\Phi$  вся совокупность полюсов на рис. 3.1 как лента конвейера движется справа налево. Интервал  $(-\pi, \pi)$  как бы вырезает из всего множества полюсов те, которые порождают геометрико-оптическую часть решения.

Выделим из решения вычеты, которые необходимо пересечь при деформации контура  $\gamma_+ + \gamma_-$  в перевальные. Их количество зависит от взаимного соотношения величин  $\Phi$ ,  $\varphi$  и  $\varphi_0$ . Запишем временно геометрико-оптическую часть решения в следующем виде:

$$u_g = e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} - e^{-ikr \cos(2\Phi - \varphi - \varphi_0)} - e^{-ikr \cos(2\Phi + \varphi + \varphi_0)}. \quad (3.6)$$

Такой вид, однако, геометрико-оптическая часть имеет не всегда, а именно:

- первое слагаемое (падающая волна) присутствует в формуле (3.6), если  $|\varphi - \varphi_0| < \pi$ ;
- второе слагаемое (волна, отраженная от грани  $\varphi = \Phi$ ) присутствует в формуле (3.6), если  $2\Phi - \varphi - \varphi_0 < \pi$ ;
- второе слагаемое (волна, отраженная от грани  $\varphi = -\Phi$ ) присутствует в формуле (3.6), если  $2\Phi + \varphi + \varphi_0 < \pi$

(ср. с рис.1.1).

**Асимптотические формулы вне окрестности полутени.** Рассмотрим оставшуюся часть волнового поля, которую описывают интегралы по перевальным контурам, проходящим через точки  $\pm\pi$  (см. глава 2, §2.6). Применим при  $kr \rightarrow +\infty$  метод перевала. Вне окрестности направлений  $\varphi \approx \varphi_p \pm \pi$  асимптотика этой волны равна (см. §2.6)

$$(s(-\pi + \varphi) - s(\pi + \varphi)) \frac{e^{ikr + i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi kr}}. \quad (3.7)$$

Выражение (3.7) имеет вид волны с круговым фронтом, расходящейся от вершины клина. Множитель  $s(-\pi + \varphi) - s(\pi + \varphi)$  носит название “диаграммы направленности” (или “дифракционного коэффициента”) и описывает интенсивность этой волны в направлении  $\varphi$ . \*

**Окрестность полутени.** По мере приближения к “полутеневым” направлениям  $\varphi = \varphi_p \pm \pi$  применение метода перевала осложняется близостью (одной из) точек перевала  $\pm\pi$  и (одного из) полюсов функции  $s(\varphi + z)$ . В этом состоит математическое проявление эффекта “полутени”: в окрестности указанных направлений (см. рис.3.2) волновое поле носит переходный характер, и его асимптотика описывается формулами несколько более сложными, чем (3.7), выражающимися через интегралы Френеля.

\*Как и следовало ожидать, краевая волна отсутствует (диаграмма направленности равна нулю тождественно по  $\varphi$ ), когда  $\Phi = \pi/2$  (клин вырождается в полупространство): действительно, в этом случае  $\mu = 1$  и с учетом (3.4)  $s(-\pi + \varphi) - s(\pi + \varphi) \equiv 0$ . Нетрудно проследить, что краевая волна отсутствует не только в старшем, но и во всех последующих порядках метода перевала.

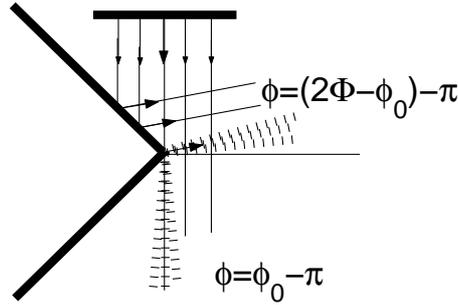


Рис. 3.2: Зоны полутени (показаны штриховкой), образующиеся при дифракции плоской волны на клине (показана ситуация, в которой падающая волна освещает только одну грань клина). Границами свет-тень являются лучи  $\varphi = \varphi_0 - \pi$  (для падающей волны) и  $\varphi = (2\Phi - \varphi_0) - \pi$  (для отраженной волны). Угловая ширина зон полутени имеет порядок (3.10), где  $\varphi_p = \varphi_0$  или  $\varphi_p = 2\Phi - \varphi_0$ , соответственно.

Асимптотическое вычисление интегралов в случае перевальной точки, близкой к полюсу, кратко описано в приложении I. Применяя формулы (II 1.5)-(II 1.6) к интегралу (3.5), для вклада от такой точки получаем следующее выражение:

$$(\pm 1) e^{ikr} \mathcal{F} \left( \sqrt{kr} \frac{\pm(\varphi - \varphi_p) - \pi}{2} \right), \quad (3.8)$$

где

$$\mathcal{F}(\zeta) := \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\zeta} e^{it^2} dt \quad (3.9)$$

— интеграл Френеля (см. также приложение I).

Таким образом, после вычитания из решения его геометро-оптической составляющей, оставшаяся часть при больших  $kr$  ведет себя либо как цилиндрическая волна, расходящаяся из вершины угла как из центра, либо как френелевская волна вида (3.8). Важно отметить, что при больших значениях аргумента интегралы Френеля, в свою очередь, могут быть заменены асимптотическим разложением (II 1.8). Тем самым угловая ширина “полутеневого” зоны имеет порядок

$$\left| \frac{\pm(\varphi - \varphi_p) - \pi}{2} \right| = O \left( \frac{1}{\sqrt{kr}} \right). \quad (3.10)$$

Можно показать, что выражения вида (3.7)-(3.8) удовлетворяют условиям излучения в интегральной форме. Для этого, однако, нужны достаточно кропотливые оценки, которые мы здесь не приводим.

**О равномерных и неравномерных асимптотических формулах.** Формулы (3.7) – (3.8) являются неравномерными в том смысле, что каждая из них применима в некоторой подобласти изменения углов  $\varphi$  (формула (3.7) — вне некоторой окрестности полутеневых направлений, формула (3.8) — напротив, в узкой, порядка (3.10), окрестности таких направлений). Можно показать, что обе формулы имеют некоторую общую подобласть применимости, в которой асимптотически (с точностью до поправочных членов метода перевала) совпадают. Гораздо удобнее, однако, иметь дело с равномерными асимптотическими формулами. Равномерной будем называть асимптотическую (в нашем

случае — при  $kr \rightarrow \infty$ ) формулу, погрешность которой допускает оценку, равномерную относительно положения точки наблюдения. Равномерные асимптотические формулы, как правило, выражаются через специальные функции (в нашем случае — интегралы Френеля), которые, в свою очередь, при определенных положениях точки наблюдения допускают (опять же асимптотические) упрощения.

Ниже мы напишем равномерные асимптотические формулы, следуя методам геометрической теории дифракции [5]. С целью сделать происхождение этих формул более понятным, вначале исследуем формулу (3.5) в частном случае  $\Phi = \pi$  — этот случай соответствует дифракции на полубесконечном экране.

**Дифракция на полуплоскости.** Подставим в (3.5)  $\Phi = \pi$  и продеформируем контур  $\gamma_+ + \gamma_-$  в перевальные контуры  $SP_\pi - SP_{-\pi}$  (см. §2.6). На  $SP_{\pm\pi}$  сделаем замены переменных  $z \rightsquigarrow z \mp \pi$ . В результате получим

$$u = u_g + \frac{1}{4\pi i} \int_C \left[ \frac{\cos \frac{\varphi_0}{2}}{\cos \frac{z+\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi_0}{2}} + \frac{\cos \frac{\varphi_0}{2}}{\cos \frac{z+\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi_0}{2}} \right] e^{ikr \cos z} dz, \quad (3.11)$$

где контур  $C$  параллелен  $SP_\pi$  или  $SP_{-\pi}$  и проходит через начало координат, а  $u_g$  описывается формулой (3.6). \* После элементарных преобразований для оставшегося интеграла имеем

$$u = u_g + \frac{1}{4\pi i} \int_C \frac{e^{ikr \cos z} dz}{\cos \frac{z+\varphi-\varphi_0}{2}} + \frac{1}{4\pi i} \int_C \frac{e^{ikr \cos z} dz}{\cos \frac{z+\varphi+\varphi_0}{2}}. \quad (3.12)$$

Рассмотрим эталонный интеграл

$$I(\lambda; \epsilon) = \frac{1}{4\pi i} \int_C e^{i\lambda(\cos z - \cos \epsilon)} \frac{dz}{\sin \frac{z+\epsilon}{2}}, \quad \lambda \equiv kr. \quad (3.13)$$

Особенностью этого интеграла является близость перевальной точки  $z = 0$  к полюсу при малых  $\epsilon$ . Контур  $C$  в (3.13) можно продеформировать в прямую  $(-i\infty, i\infty)$ . Дифференцируя этот интеграл по  $\lambda$  и используя элементарные тригонометрические соотношения, получаем

$$\frac{\partial I}{\partial \lambda} = \frac{1}{\pi} \sin \frac{\epsilon}{2} e^{2i\lambda \sin^2 \frac{\epsilon}{2}} \int_0^{i\infty} e^{-2i\lambda \sin^2 \frac{z}{2}} \cos(z/2) dz = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi\lambda}} \sin \frac{\epsilon}{2} e^{2i\lambda \sin^2 \frac{\epsilon}{2}}, \quad (3.14)$$

откуда, с учетом начального условия  $I|_{\lambda=\infty} = 0$ ,

$$I(\lambda; \epsilon) = -\frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{2\lambda} \sin(\epsilon/2)}^{\infty \operatorname{sign} \epsilon} e^{it^2} dt. \quad (3.15)$$

Интегралы в (3.12) легко выразить через интеграл (3.13) и, следовательно, через интеграл Френеля (3.15). Рассмотрим, например, первый из интегралов в (3.12). Положим

---

\*Из замечаний, сделанных после формулы (3.6), следует, что при  $\Phi = \pi$  геометро-оптическая часть содержит не более двух слагаемых.

$\varphi - \varphi_0 = \epsilon - \pi$ . Тогда углам  $\varphi$ , для которых  $\epsilon > 0$ , соответствуют точки области, освещенные падающей волной, т.е. присутствует первое слагаемое в формуле (3.6). Объединяя это слагаемое с первым интегралом в (3.12), получаем

$$e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} + \frac{1}{4\pi i} \int_C \frac{e^{ikr \cos z} dz}{\cos \frac{z + \varphi - \varphi_0}{2}} = e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} \mathcal{F} \left( \sqrt{2kr} \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right).$$

В свою очередь, углам  $\varphi$ , отвечающим  $\epsilon < 0$ , соответствуют точки тени, отсутствует первое слагаемое в формуле (3.6), но при этом

$$\frac{1}{4\pi i} \int_C \frac{e^{ikr \cos z} dz}{\cos \frac{z + \varphi - \varphi_0}{2}} = e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} \mathcal{F} \left( \sqrt{2kr} \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right)$$

(здесь аргумент интеграла Френеля отрицателен).

Поступая аналогичным образом со вторым интегралом в (3.12), приходим к окончательной формуле

$$u(kr, \varphi) = e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} \mathcal{F} \left( \sqrt{2kr} \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right) - e^{-ikr \cos(\varphi + \varphi_0)} \mathcal{F} \left( -\sqrt{2kr} \cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2} \right). \quad (3.16)$$

Важно отметить, что формула (3.16) получена из (3.5) путем тождественных преобразований, т.е. в случае дифракции на полубесконечном экране (иными словами, при  $\Phi = \pi$ ) точное решение сводится к интегралам Френеля.

Рис. 3.3 дает представление о поведении полного поля как в случае краевых условий Дирихле, так и Неймана (в последнем случае соответствующая формула отличается от (3.16) лишь знаком между слагаемыми). На рис. 3.4 показана угловая зависимость так называемого “обратного рассеяния” (backscattering).

**Замечание 3.1.** Заметим, что на рис. 3.4 осцилляции (в зависимости от угла  $\varphi$ ) амплитуды поля, рассеянного в обратном направлении, в случае краевых условий Неймана несколько заметнее, чем в случае условий Дирихле, поскольку в первом случае дифракционный коэффициент при волне, расходящейся от вершины клина, имеет несколько большее значение.

Данное замечание в равной мере относится и к рис. 3.7.

**Дифракция на клине: равномерная асимптотическая формула.** Отметим важную геометрическое свойство формулы (3.16): аргументы интегралов Френеля в этой формуле могут быть записаны, соответственно, как

$$\sqrt{k(\tau^e - \tau^i)}, \quad \sqrt{k(\tau^e - \tau^r)}, \quad (3.17)$$

где  $\tau^e = r$  — эйконал (длина пробега) краевой волны,  $\tau^i = -r \cos(\varphi - \varphi_0)$ ,  $\tau^r = -r \cos(\varphi + \varphi_0)$  — соответственно эйконалы падающей и отраженной волн (за начало отсчета длин пробега всех волн принята вершина клина).

Записанная при помощи соотношений (3.17), формула (3.16) подсказывает нам, интегралы Френеля от каких аргументов должны присутствовать в асимптотических формулах при дифракции плоской волны на клине произвольного угла раствора: этими аргументами должны быть

$$\sqrt{k(\tau^e - \tau^i)}, \quad \sqrt{k(\tau^e - \tau^+)}, \quad \sqrt{k(\tau^e - \tau^-)}, \quad (3.18)$$

где  $\tau^\pm = -r \cos(2\Phi \mp (\varphi + \varphi_0))$  — эйконалы волн, отраженных, соответственно, от верхней и нижней граней клина. Не следует, однако, ожидать, что при произвольном угле раствора клина точное решение сведется к сумме интегралов Френеля: последние должны выступать в качестве старшего члена асимптотики.

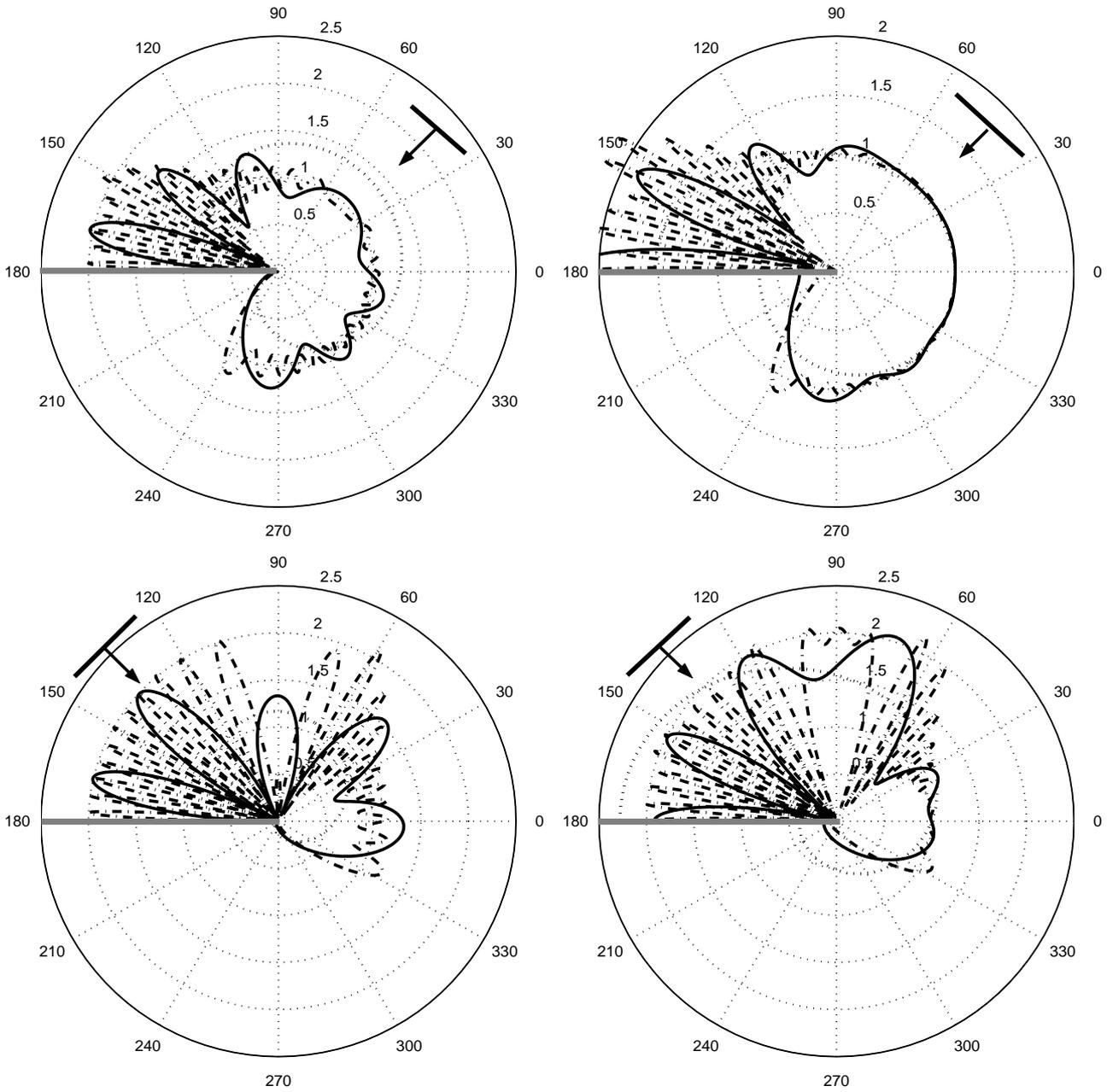


Рис. 3.3: Угловое распределение амплитуды (расстояние от начала координат по направлению  $\varphi$  до точки на кривой равно  $|u(kr, \varphi)|$ ) решения (3.16) при различных фиксированных значениях  $kr$ : штрих-пунктирная линия —  $kr = 50$ , сплошная линия —  $kr = 10$ , точки —  $kr = 1$  при углах падения  $\varphi_0 = \pi/4$  (верхний ряд) и  $\varphi_0 = 3\pi/4$  (нижний ряд); слева — краевое условие Дирихле, справа — краевое условие Неймана.

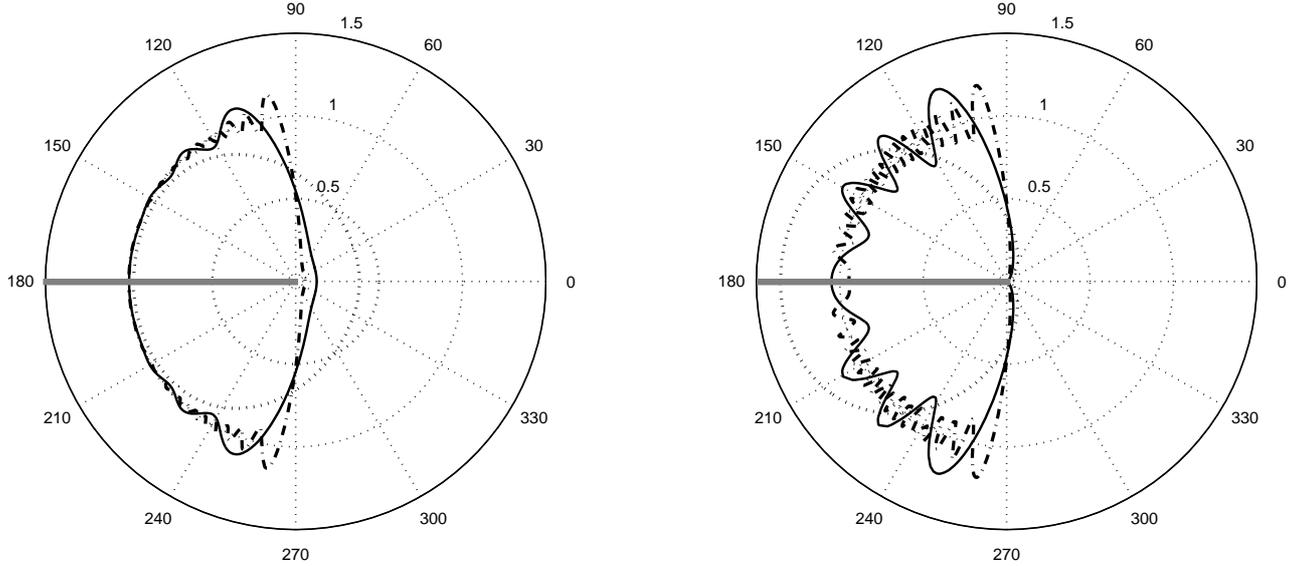


Рис. 3.4: Обратное рассеяние (backscattering) от полубесконечного экрана: расстояние от начала координат по направлению  $\varphi$  до точки на кривой равно модулю разности полного и падающего полей при  $\varphi_0 = \varphi$ . Маркировка кривых та же, что и на рис. 3.3; слева — краевое условие Дирихле, справа — краевое условие Неймана.

Опираясь на вышесказанное, будем искать равномерную асимптотику в виде

$$\begin{aligned}
 u(kr, \varphi) \underset{kr \rightarrow \infty}{\sim} & \exp(-ikr \cos[\varphi - \varphi_0]) \mathcal{F}\left(\sqrt{2kr} \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2}\right) - \\
 & - \exp(-ikr \cos[2\Phi - \varphi - \varphi_0]) \mathcal{F}\left(\sqrt{2kr} \cos \frac{2\Phi - \varphi - \varphi_0}{2}\right) - \\
 & - \exp(-ikr \cos[2\Phi + \varphi + \varphi_0]) \mathcal{F}\left(\sqrt{2kr} \cos \frac{2\Phi + \varphi + \varphi_0}{2}\right) + \\
 & + \frac{e^{ikr + i\pi/4}}{\sqrt{2\pi kr}} \Psi(\varphi, \varphi_0; kr),
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

где

$$\Psi(\varphi, \varphi_0; kr) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Psi_j(\varphi, \varphi_0)}{(kr)^j} \tag{3.20}$$

— асимптотический ряд по обратным степеням  $kr$  с гладкими (в частности, не имеющими сингулярностей на направлениях  $\varphi = \varphi_p$ ) коэффициентами  $\Psi_j(\varphi, \varphi_0)$ .

Функции  $\Psi_j(\varphi, \varphi_0)$  в (3.20) подлежат определению. Их можно получить из требования, состоящего в том, что в направлениях, где интегралы Френеля в (3.19) могут быть заменены асимптотиками, должна получаться неравномерная асимптотическая формула. В частности, ограничиваясь старшим приближением, из сравнения с (3.7) находим

$$\Psi_0(\varphi, \varphi_0) = \frac{1}{2 \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2}} - \frac{1}{2 \cos \frac{2\Phi - \varphi - \varphi_0}{2}} - \frac{1}{2 \cos \frac{2\Phi + \varphi + \varphi_0}{2}} + (s(-\pi + \varphi) - s(\pi + \varphi)) \tag{3.21}$$

(непосредственной проверкой легко убедиться в том, что сингулярности в формуле (3.21) сокращаются).

В вышеприведенных формулах следует вычеркнуть:

- вторую строку в формуле (3.19) и второе слагаемое в формуле (3.21), если освещена только верхняя грань клина, т.е.  $\Phi - \varphi_0 > \pi$ ;
- третью строку в формуле (3.19) и третье слагаемое в формуле (3.21), если освещена только нижняя грань клина, т.е.  $\Phi + \varphi_0 > \pi$ .

Приведенные здесь (по-существу, эвристические) соображения, которые привели нас к формуле-анзацу\* (3.19), базируются на построениях В.А.Боровикова [4, 5]. Аккуратно вывести формулу (3.19) можно, пользуясь результатами Н.Блейстейна [20] (см. также приложение II).

Примеры расчета дальнего поля по формулам (3.19), (3.21) приведены на рис. 3.5.

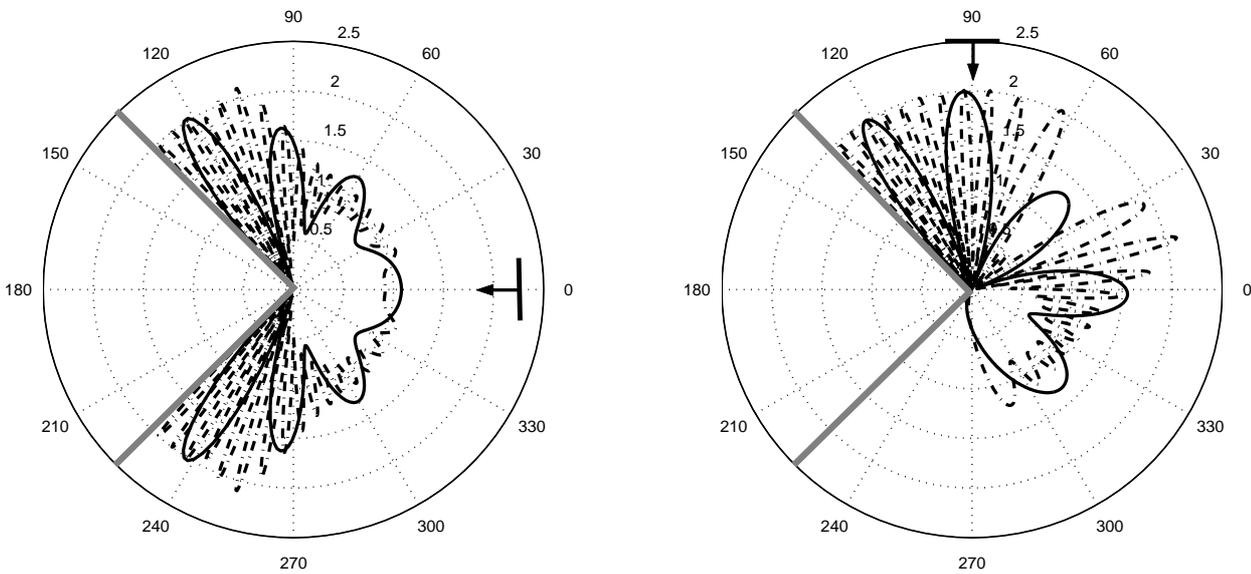


Рис. 3.5: Угловое распределение амплитуды дальнего поля (3.19) – (3.21) (расстояние от начала координат по направлению  $\varphi$  до точки на кривой равно  $|u(kr, \varphi)|$ ) при угле раствора  $\Phi = 3\pi/4$  и значениях  $kr = 50$  (штрих-пунктирная линия)  $kr = 10$  (сплошная линия) при углах падения  $\varphi_0 = 0$  (слева) и  $\varphi_0 = \pi/2$  (справа).

### 3.3 Краевые условия Неймана

Подставим интеграл (2.1) в краевые условия Неймана:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+} e^{-ikr \cos z} (s'(\pm\Phi + z) - s'(\pm\Phi - z)) dz = 0. \quad (3.22)$$

Интегрируя в (3.22) по частям, получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+} e^{-iR \cos z} (s(\pm\Phi + z) + s(\pm\Phi - z)) \sin z dz = 0. \quad (3.23)$$

\*Термин *анзац* (*ansatz*), нередко встречающийся в работах по математической физике, можно расшифровать как “априорный вид асимптотического разложения”.

Учитывая, что при  $|\operatorname{Im} z| \rightarrow +\infty$   $s(z) = O(1)$  (см. (2.14)) и пользуясь теоремой 2.1 (см. (2.21)), получаем

$$\begin{cases} (s(\Phi + z) + s(\Phi - z)) \sin z = c_1 \sin z \\ (s(-\Phi + z) + s(-\Phi - z)) \sin z = c_2 \sin z \end{cases}$$

или, после сокращения на  $\sin z$ ,

$$\begin{cases} s(\Phi + z) + s(\Phi - z) = c_1 \\ s(-\Phi + z) + s(-\Phi - z) = c_2 \end{cases}. \quad (3.24)$$

Обозначим через  $c_{\pm}$  предельные значения  $s(z)$  при  $\operatorname{Im} z \rightarrow \pm\infty$ . Переходя к пределу  $\operatorname{Im} z \rightarrow \infty$  в (3.24) убеждаемся, что  $c_+ + c_- = c_1$  и  $c_+ + c_- = c_2$ , следовательно,  $c_1 = c_2 := c$ . Поскольку добавление константы к функции  $s(z)$  не меняет значения интеграла Зоммерфельда, мы можем заменить  $s(z) \rightsquigarrow s(z) + c/2$ , после чего получим:

$$\begin{cases} s(\Phi + z) + s(\Phi - z) = 0 \\ s(-\Phi + z) + s(-\Phi - z) = 0 \end{cases}. \quad (3.25)$$

Таким образом, как и в случае задачи Дирихле, мы пришли к задаче теории функций комплексного переменного: найти мероморфную функцию  $s(z)$ , удовлетворяющую соотношениям (3.25), имеющую один и только один полюс  $\varphi_0$  ( $-\Phi < \varphi_0 < \Phi$ ) (с вычетом единица) в полосе  $|\operatorname{Re} z| \leq \Phi$ , и равномерно ограниченную вне любой полосы  $|\operatorname{Im} z| \leq \operatorname{const}$ .

Эта задача решается на том же пути, как и в случае краевых условий Дирихле. Вначале устанавливаем  $4\Phi$ -периодичность функции  $s(z)$  и что ее полюса находятся в точках  $\varphi_0 + 4\Phi n$  и  $\bar{\varphi} + 4\Phi n$  ( $\bar{\varphi} = 2\Phi - \varphi_0$ ,  $n = 0, \pm 1, \dots$ ), причем все эти полюсы простые. Однако, в отличие от (3.2), условия (3.25) означают антисимметричность (а не симметричность) функции  $s(z)$  относительно точки  $\Phi$ . Поэтому вычеты во всех полюсах равны 1. Формулу для  $s(z)$  по этим данным найти несложно:

$$s(z) = \frac{\pi}{4\Phi} \left( \operatorname{ctg} \frac{(z - \varphi_0)\pi}{4\Phi} + \operatorname{ctg} \frac{(z - \bar{\varphi})\pi}{4\Phi} \right) = \frac{\mu \cos \mu z}{\sin \mu z - \sin \mu \varphi_0}, \quad (3.26)$$

откуда

$$u(kr, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+ \cup \gamma_-} \frac{\mu \cos \mu(z + \varphi)}{\sin \mu(z + \varphi) - \sin \mu \varphi_0} e^{-ikr \cos z} dz. \quad (3.27)$$

Асимптотика интеграла (3.27) при  $kr \rightarrow +\infty$  находится ровно так же, как и в §3.2; примеры ее вычисления даны на рис. 3.6.

В заключение обсуждения задач дифракции на клине с идеальными краевыми условиями приводим рис. 3.7, на котором показан пример асимптотики обратного рассеяния (ср. с замечанием 3.1).

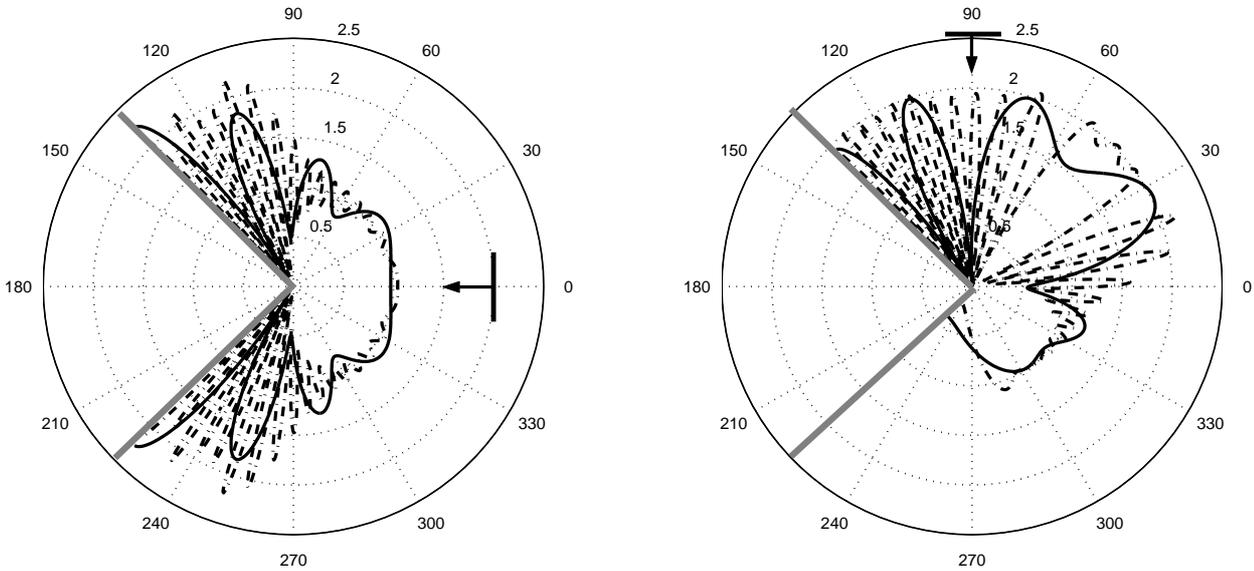


Рис. 3.6: Угловое распределение интенсивности дальнего поля для краевых условий Неймана (расстояние от начала координат по направлению  $\varphi$  до точки на кривой равно  $|u(kr, \varphi)|$ ) при угле раствора  $\Phi = 3\pi/4$  и значениях  $kr = 50$  (штрих-пунктирная линия)  $kr = 10$  (сплошная линия) при углах падения  $\varphi_0 = 0$  (слева) и  $\varphi_0 = \pi/2$  (справа).

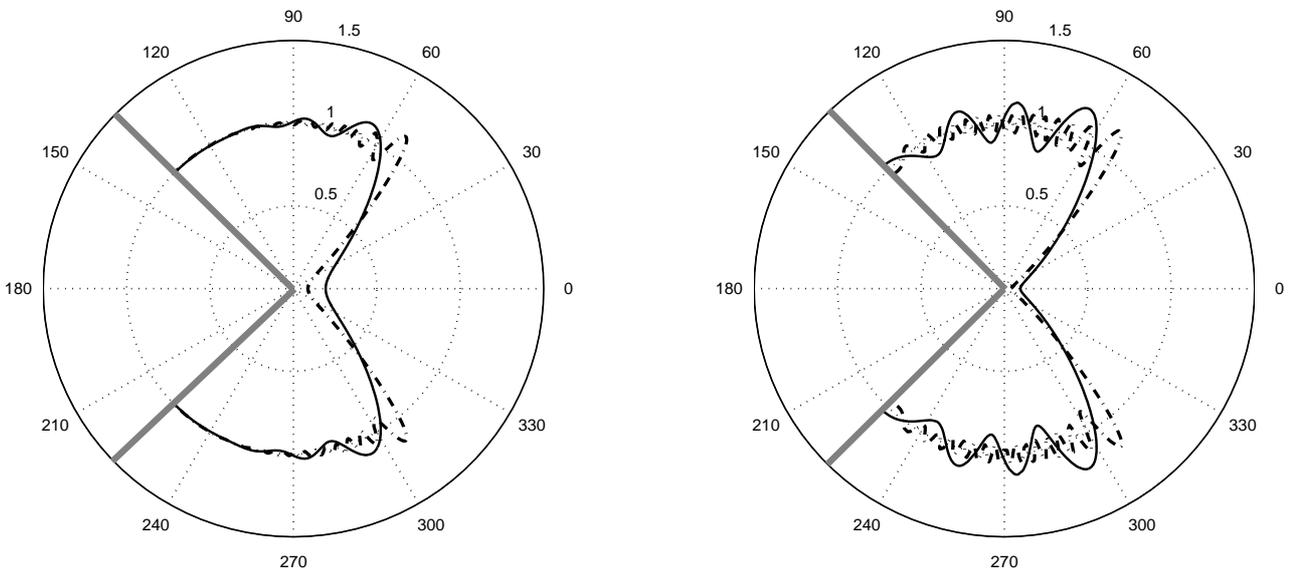


Рис. 3.7: Обратное рассеяние (backscattering) от клина с углом раствора  $\Phi = 3\pi/4$ : расстояние от начала координат по направлению  $\varphi$  до точки на кривой равно модулю асимптотики полного поля за вычетом падающей волны при угле падения  $\varphi_0 = \varphi$ . Маркировка кривых та же, что и на рисунках 3.5 и 3.6 ; слева — краевое условие Дирихле, справа — краевое условие Неймана.

### 3.4 Задача о клине с излучающей гранью

Рассмотрим задачу о волновом акустическом поле, возбуждаемом колебаниями граней клина с заданными на них нормальными составляющими скоростей колебаний. Задача, описывающая такой процесс, состоит в нахождении давления акустического поля  $u(kr, \varphi)$ , удовлетворяющего уравнению Гельмгольца в угловой области  $-\Phi \leq \varphi \leq \Phi$ , окружающей клин, при заданных на бесконечности условиях излучения, условиях Мейкснера в окрестности вершины клина и краевых условиях на гранях:

$$v = \frac{i}{\rho\omega} \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\varphi=\pm\Phi} = \mp \frac{i}{\rho\omega r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\pm\Phi}, \quad (3.28)$$

где  $\rho$  — плотность среды,  $\omega$  — частота колебаний,  $\frac{\partial}{\partial n}$  — производная по нормали, внешней по отношению к клину. Задачу удобно решать в два этапа: сначала считать, что на одной из граней  $\frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0$ , а на другой —  $\frac{i}{kr} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 1$ , а затем поменять грани ролями. Решением исходной задачи будет линейная комбинация двух таких решений.

Итак, вместо (3.28) считаем заданными краевые условия

$$\frac{i}{kr} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\Phi} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=-\Phi} = 0. \quad (3.29)$$

Несмотря на то, что поставленная задача не является задачей дифракции плоской волны, тем не менее метод Малюжинца, идеям работ которого [9, 10] (см. также [30]) мы здесь следуем, позволяет решить и эту проблему. Неожиданным образом данная задача оказывается связанной с задачей дифракции плоской волны на импедансном клине.

Переходя к уточнению постановки задачи, обратимся прежде всего к условиям Мейкснера. Как отмечалось в §1.2, для задачи Неймана эти условия сводятся к

$$u \underset{r \rightarrow 0}{=} \text{const} + O(r^\delta) \quad (3.30)$$

при некотором  $\delta$ . Более детальные рассмотрения позволяют заключить, что  $\delta = 1$  при  $0 < 2\Phi < \pi$ , при  $2\Phi = \pi$  в качестве  $\delta$  можно взять любое число, меньшее 1, а при  $\pi < 2\Phi \leq 2\pi$   $\delta = \frac{\pi}{2\Phi}$ .

Говоря об условиях излучения, следует иметь в виду, что в случае  $0 < 2\Phi < \frac{\pi}{2}$  (который мы не исключаем из рассмотрения) геометро-оптическая часть решения имеет более сложный вид, чем обсуждалось в §1.3: волна, “стартовавшая” со стороны угла  $\varphi = \Phi$ , может несколько раз отразиться от боковых сторон угла  $\varphi = -\Phi$  и  $\varphi = \Phi$ .

**О представлении решения интегралом Зоммерфельда.** Будем, как и раньше, искать решение  $u(kr, \varphi)$  в виде интеграла Зоммерфельда (2.37), в котором  $s(z)$  — мероморфная, с полюсами лишь на вещественной оси, функция, причем

$$s(z) \underset{|\text{Im } z| \rightarrow \infty}{=} c_\pm + O(e^{-\delta|\text{Im } z|}), \quad (3.31)$$

где  $\delta$  — то же, что и в (3.30) (см. §2.8).

Подставляя интеграл (2.37) в краевые условия (3.28), получим:

$$\frac{i}{kr} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+} e^{-ikr \cos z} (s'(\Phi + z) - s'(\Phi - z)) dz = 1 \quad (3.32)$$

и

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+} e^{-ikr \cos z} (s'(-\Phi + z) - s'(-\Phi - z)) dz = 0. \quad (3.33)$$

Учитывая, что \*

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+} e^{-ikr \cos z} \operatorname{tg} z dz = 1 \quad (3.34)$$

и интегрируя по частям, равенства (3.32) и (3.33) можно записать в виде

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+} e^{-ikr \cos z} \left( s(\Phi + z) + s(\Phi - z) + \frac{1}{\cos z} \right) \sin z dz = 0 \quad (3.35)$$

и

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+} e^{-ikr \cos z} (s(-\Phi + z) + s(-\Phi - z)) \sin z dz = 0, \quad (3.36)$$

соответственно.

Рассуждая, как и в §3.3 при выводе формулы (3.25), получаем

$$s(\Phi + z) + s(\Phi - z) = -\frac{1}{\cos z} \quad (3.37)$$

$$s(-\Phi + z) + s(-\Phi - z) = 0. \quad (3.38)$$

Чтобы завершить постановку задачи теории аналитических функций относительно  $s(z)$ , обратимся к анализу расположения полюсов  $s(z)$ . По смыслу задачи все волны должны быть уходящими. Поэтому следует считать полосу  $\{z : -\Phi \leq \operatorname{Re} z \leq \Phi\}$  свободной от полюсов. Волновое поле возбуждается волной, “стартовой” со стороны клина  $\varphi = \Phi$ , которой соответствует полюс  $\varphi_0 = \Phi + \frac{\pi}{2}$  с главной частью  $\frac{1}{z - \varphi_0}$ .

Так как в силу (3.38)  $s(z)$  антисимметрична относительно точки  $-\Phi$ , то при  $-3\Phi \leq \operatorname{Re} z \leq -\Phi$   $s(z)$  также не имеет особенностей. В свою очередь, равенство (3.37) определяет полюса при  $\Phi \leq \operatorname{Re} z \leq 5\Phi$ , затем симметрия  $s(z)$  относительно точки  $-\Phi$  дает возможность найти полюса  $s(z)$  при  $-7\Phi \leq \operatorname{Re} z \leq 3\Phi$  и т.д. Так, шаг за шагом, определяются все полюса  $s(z)$ .

**Построение функции  $s(z)$ .** Уравнения (3.37)–(3.38), которым должна удовлетворять функция  $s(z)$ , — это неоднородная система конечно-разностных уравнений. Такие уравнения часто удается решить с помощью преобразования Фурье. В нашей ситуации, однако, поведение  $s(z)$  при  $|\operatorname{Re} z| \rightarrow \infty$  не поддается четкому описанию, и поэтому применение преобразования Фурье в стандартной форме затруднительно. Напротив, при  $\operatorname{Im} z \rightarrow \pm\infty$  поведение  $s(z)$  нам известно:  $s(z) = \pm c + O(e^{-|\operatorname{Im} z|^\delta})$ , что дает возможность применить преобразование Фурье вдоль мнимой оси. Именно преобразования Фурье такого типа Г.Д. Малюжинец использовал при решении задачи об импедансном клине. Здесь мы следуем его идеям.

Приведем формулы для прямого и обратного преобразований Фурье вдоль мнимой оси:

$$F(w) = \int_{-i\infty}^{i\infty} f(z) e^{-i w z} dz, \quad f(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} F(w) e^{i w z} dw, \quad (3.39)$$

---

\*Равенство (3.34) нетрудно доказать, сделав подстановку  $w = -i \cos z$ , после чего интеграл вычисляется по вычетам (см. §2.4 и, в частности, рис. 2.4).

которое заменой  $z = it$ ,  $w = iw$  сводится к классическим формулам обращения преобразования Фурье.

Будем искать  $s(z)$  в виде такого преобразования:

$$s(z) = \int_{-i\infty}^{i\infty} F(w)e^{-iwz} dz. \quad (3.40)$$

Возникает вопрос — каких свойств естественно ожидать от  $F(w)$ ? Поскольку

$$s'(z) = \int_{-i\infty}^{i\infty} (-iw)F(w)e^{-iwz} dz$$

и  $s'(z)$  — экспоненциально убывающая функция, то функция  $F_1(w) := wF(w)$  является гладкой, тем самым  $F(w) = \frac{F_1(w)}{w}$  имеет простой полюс в нуле и интеграл в (3.40) следует понимать в смысле главного значения. \*

Далее мы собираемся подставить выражение (3.40) в (3.37)–(3.38). Нам в связи с этим потребуется представить  $\frac{1}{\cos z}$  в виде преобразования Фурье. Вычислим для этой цели

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{\cos z} e^{iwz} dz. \quad (3.41)$$

Интеграл (3.41) достаточно стандартный. Он вычисляется с помощью теоремы о вычетах, применяемой к интегралу по границе полосы  $0 \leq \operatorname{Re} z \leq \pi$ , и равен  $\frac{1}{2i \cos \frac{\pi}{2} w}$ . Тем самым

$$\frac{1}{\cos z} = \frac{1}{2i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2} w} e^{-izw} dw. \quad (3.42)$$

Теперь мы подставим (3.40) в (3.37)–(3.38) и учтем (3.42). Мы придем к выводу, что равенства (3.37)–(3.38) будут иметь место, если

$$\begin{cases} F(w)e^{-iw\Phi} + F(-w)e^{iw\Phi} = -\frac{1}{2i \cos \frac{w\pi}{2}} \\ F(w)e^{iw\Phi} + F(-w)e^{-iw\Phi} = 0. \end{cases} \quad (3.43)$$

Из системы (3.43) легко следует

$$F(w) = -\frac{e^{-iw\Phi}}{4 \cos \frac{\pi}{2} w \sin 2w\Phi}, \quad (3.44)$$

---

\*В силу того, что функция  $s(z)$  не является абсолютно интегрируемой при  $z = it$ ,  $-\infty < t < +\infty$  (она может иметь полюс), интеграл Фурье от  $s(z)$  и обратный к нему надо понимать в смысле обобщенных функций. Деление на  $w$  гладкой функции  $F_1(w)$  возможно, но неоднозначно. Оно определяется с точностью до слагаемого вида  $\operatorname{const} \delta(w)$ , где  $\delta(w)$  — дельта-функция Дирака. Однако изменение  $F(w)$  на слагаемое  $\operatorname{const} \delta(w)$  приводит к изменению  $s(z)$  на константу. Как уже неоднократно отмечалось, такое изменение функции  $s(z)$  не влияет на величину волнового поля  $u(kr, \varphi)$ .

и, таким образом, особенность  $F(w)$  при  $w = 0$  имеет ожидаемый характер. Наконец, собирая (3.40) и (3.44), находим

$$s(z) = -\text{V.p.} \frac{1}{4} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{-iw(z+\Phi)} dw}{\cos \frac{\pi w}{2} \sin 2w\Phi} \quad (3.45)$$

Функция (3.45) неожиданным образом встретится нам в §4.3 при решении задачи дифракции на импедансном клине.

**Проверка формулы для  $s(z)$ .** Формула (3.45) для  $s(z)$  нуждается в проверке: мы “искали решение в виде...”, а существует ли решение в этом виде, да и существует ли оно вообще, “на уровне теорем” установлено нами не было.

Выясним прежде всего вопрос о сходимости интеграла (3.45). При  $\text{Im } w \rightarrow \pm\infty$  подынтегральное выражение в (3.45) ведет себя как

$$\exp(-iw(z+\Phi) \pm i \frac{\pi w}{2} \pm 2w\Phi i).$$

Это выражение убывает при  $\text{Im } w \rightarrow \infty$ , если

$$\text{Re } z + \Phi - \frac{\pi}{2} - 2\Phi < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Re } z < \frac{\pi}{2} + \Phi$$

и убывает при  $\text{Im } w \rightarrow -\infty$ , если

$$\text{Re } z + \Phi + \frac{\pi}{2} + 2\Phi > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Re } z > -\frac{\pi}{2} - 3\Phi.$$

Таким образом, в полосе

$$-\frac{\pi}{2} - 3\Phi < \text{Re } z < \frac{\pi}{2} + \Phi, \quad (3.46)$$

в силу экспоненциально быстрого убывания подынтегрального выражения, интеграл (3.45) существует и является регулярной функцией  $z$ .

Крайевые условия выполняются в силу построения функции  $s(z)$ . Коснемся вопроса о поведении  $s(z)$  при  $\text{Im } z \rightarrow \pm\infty$ .

Пусть  $\text{Im } z \rightarrow \infty$ . Сдвинем контур интегрирования в (3.45) со мнимой оси налево, при этом выделяется “полувычет” при  $w = 0$ . Далее, если  $2\Phi < \pi$ , то дальнейшее движение прямой интегрирования налево приводит к выделению вычета в простом полюсе  $w = -1$ . Если же  $2\Phi = \pi$ , то в точке  $w = -1$  полюс будет второго порядка, наконец, при  $2\Phi > \pi$  первым после полувычета в точке  $w = 0$  выделяется вычет в точке  $w = -\frac{\pi}{2\Phi}$ . Перечисленные вычеты и дают первые два члена асимптотики  $s(z)$  при  $\text{Im } z \rightarrow \infty$ ; при  $\text{Im } z \rightarrow -\infty$  следует провести аналогичные рассуждения, но сдвигая контур интегрирования направо.

В результате:

$$s(z) \underset{\text{Im } z \rightarrow \pm\infty}{=} \mp \frac{\pi i}{8\Phi} + \begin{cases} O(e^{-|\text{Im } z|}) & , \quad 2\Phi < \pi \\ O(|\text{Im } z| e^{-|\text{Im } z|}) & , \quad 2\Phi = \pi \\ O(e^{-\frac{\pi}{2\Phi} |\text{Im } z|}) & , \quad 2\Phi > \pi. \end{cases} \quad (3.47)$$

Разумеется, несложно вычислить и вычеты, пересекаемые при дальнейшем сдвигании контура интегрирования, и получить, тем самым, последующие члены в формулах (3.47), однако такого рода расчеты нам не потребуются.

Формулы (3.47) достаточны для выполнения условий Мейкснера (см. гл.1, 2). Проверка условий излучения для функции  $u(kr, \varphi)$  осуществляется, как всегда, путем анализа поведения этой функции при  $kr \rightarrow \infty$ , который здесь ничем не отличается от аналогичных рассмотрений в §3.2.



## Глава 4

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ НА КЛИНЕ С ИМПЕДАНСНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ (ЗАДАЧА МАЛЮЖИНЦА)

Эффективность теории интеграла Зоммерфельда не исчерпывается идеальными краевыми условиями. Г.Д.Малюжинец [11, 12] впервые применил этот подход для задачи дифракции на импедансном клине.

## 4.1 Уравнения Малюжинца в задаче с импедансным КЛИНОМ

Напомним постановку задачи (см. гл.1). Волновое поле в угловой области  $\{(r, \varphi) : r \geq 0, -\Phi < \varphi < \Phi\}$  описывается уравнением Гельмгольца (1.3) и возбуждается падающей плоской волной (1.24); “клином” является область  $\{(r, \varphi) : r \geq 0, \Phi \leq \varphi \leq \pi \cup -\pi \leq \varphi \leq -\Phi\}$ , на границах  $\varphi = \Phi$  и  $\varphi = -\Phi$  которой (называемых гранями клина) предполагаются выполненными импедансные краевые условия (условия третьего рода) (1.8), в которых мы считаем приведенные импедансы граней  $\sin \theta_{\pm}$  подчиненными условиям  $0 < \operatorname{Re} \theta_{\pm} \leq \frac{\pi}{2}$ . Как отмечалось выше (см. §1.5), эти условия обеспечивают поглощение энергии гранями клина (которые, в соответствии с принятой терминологией, мы будем называть поглощающими). Решение задачи с пассивными гранями ( $\operatorname{Re} \theta_{\pm} = 0$ ) получается при этом естественным предельным переходом при стремлении к нулю поглощения в гранях.

Помимо сказанного, волновое поле должно удовлетворять условию Мейкснера на ребре

$$u(kr, \varphi) = \text{const} + O(r^{\delta}), \quad r \rightarrow 0, \quad \delta > 0. \quad (4.1)$$

(напомним, что условия Мейкснера (4.1) эквивалентны ограниченности энергии вблизи вершины угла) и условиям на бесконечности. В качестве последних можно взять либо интегральный вариант условий излучения Зоммерфельда (1.28), либо принцип предельного поглощения (см. §1.7).

Классическое решение поставленной задачи существует и единственно: вопрос о единственности рассмотрен в §§1.5, 1.7, а существование следует из построений данной главы.

В дальнейшем будем также считать, что угол  $\Phi$  удовлетворяет неравенствам

$$\pi/2 < \Phi \leq \pi. \quad (4.2)$$

Решение поставленной задачи ищем в виде интеграла Зоммерфельда (2.37), который автоматически удовлетворяет уравнению Гельмгольца. Подставив этот интеграл в гра-

нические условия (1.8) и применив теорему 2.1, получим так называемые функциональные уравнения Малюжинца

$$\begin{cases} (\sin z + \sin \theta_+)s(z + \Phi) - (-\sin z + \sin \theta_+)s(-z + \Phi) = C_+ \sin z, \\ (\sin z - \sin \theta_-)s(z - \Phi) - (-\sin z - \sin \theta_-)s(-z - \Phi) = C_- \sin z, \end{cases} \quad (4.3)$$

где  $C_{\pm}$  – произвольные постоянные.

Напомним, что: 1) существование конечных пределов  $s(\pm i\infty)$  следует из условий Мейкснера и из поведения интеграла Зоммерфельда при  $kr \rightarrow 0$  (см. §2.8); 2) функцию  $s(z)$  (трансформанту Зоммерфельда) всегда можно считать определенной с точностью до аддитивной постоянной, поскольку интеграл (2.37) аннулирует любую четную функцию. В частности, сдвигом  $s(z) \rightsquigarrow s(z) - \frac{s(i\infty) + s(-i\infty)}{2}$  всегда можно добиться равенства  $s(i\infty) = -s(-i\infty)$ . Тогда в (4.3)  $C_{\pm} = 0$ , что следует из сравнения асимптотик левых и правых частей в уравнениях (4.3) при  $z \rightarrow \pm i\infty$ .

Итак, в дальнейшем рассматриваем однородную систему (4.3). Эта система должна быть дополнена условиями, определяющими класс функций  $s(z)$ , в котором существует единственное решение (4.3). Эти условия естественным образом наследуются из постановки задачи и свойств интеграла Зоммерфельда, которые были изучены в главе 2. Следуя результатам этой главы, мы определим упомянутый класс следующим образом. Во-первых, решение однородной системы (4.3) ищем среди мероморфных \* функций, регулярных в полосе

$$P_{\epsilon} = \{z : |\operatorname{Re} z| < \Phi + \epsilon\}, \quad \epsilon > 0 \quad (\epsilon \text{ малое}),$$

за исключением одной точки  $z = \varphi_0$ , которая есть простой полюс с вычетом единица. Во-вторых, при  $\operatorname{Im} z \rightarrow \pm\infty$ , функция  $s(z)$  должна удовлетворять условию

$$|s(z) - s(\pm i\infty)| \leq \text{const} \exp(-\delta |\operatorname{Im} z|).^{\dagger} \quad (4.4)$$

Перечисленные требования на класс функций, с одной стороны, обеспечивают нужное поведение решения на бесконечности и вблизи вершины угла, а с другой стороны не слишком ограничительны, так что решение действительно существует.

Вместо того, чтобы решать поставленную задачу для однородных уравнений (4.3), мы рассмотрим более общие уравнения и получим искомое решение как частный случай. При этом мы следуем, в основном, работе А.А.Тужилина [16], в которой развиты идеи Г.Д.Малюжинца.

\*Напомним, что функция мероморфна в области, если единственными особенностями в области являются полюсы. Функция мероморфна, если она мероморфна во всей комплексной плоскости.

<sup>†</sup>Напомним, что неравенство (4.4) равносильно условию Мейкснера (см. §2.8 о поведении интеграла Зоммерфельда при  $r \rightarrow 0$ ).

## 4.2 Общая теория уравнений Малюжинца

В задачах дифракции в угловых областях также встречаются более общие, чем (4.3), уравнения вида

$$\left\{ \begin{array}{l} \prod_{q=1}^n (\sin z - (-1)^q \sin \theta_q^1) s(z + \Phi) - \\ - \prod_{q=1}^n (-\sin z - (-1)^q \sin \theta_q^1) s(-z + \Phi) = \sin z \sum_{p=0}^{n-1} a_p \cos^p z, \\ \prod_{q=1}^m (-\sin z - (-1)^q \sin \theta_q^2) s(z - \Phi) - \\ - \prod_{q=1}^m (\sin z - (-1)^q \sin \theta_q^2) s(-z - \Phi) = \sin z \sum_{p=0}^{m-1} b_p \cos^p z, \end{array} \right. \quad (4.5)$$

где  $0 < \Phi \leq \pi$ ,  $a_p, b_p, \theta_q^{1,2}$  ( $0 < \operatorname{Re} \theta_q^{1,2} \leq \pi/2$ ) — комплексные постоянные. Очевидно, что уравнения (4.3) есть их простой частный случай.

Мы построим решения общих уравнений (4.5) в несколько этапов. Сначала обратимся к построению решения  $s(z)$  однородных уравнений (4.5). Будем называть *основным решением* однородных уравнений мероморфную функцию  $s(z)$ , не имеющую ни нулей, ни полюсов в полосе

$$\bar{\Pi} = \{ z : |\operatorname{Re} z| \leq \Phi \}.$$

Из функциональных уравнений следует, что все особенности основного решения находятся в некоторой полосе параллельной вещественной оси. Существование конечных пределов основного решения при  $\operatorname{Im} z \rightarrow \pm\infty$  мы, вообще говоря, не предполагаем. Ясно, что основное решение находится неоднозначно.

Для построения основного решения однородных уравнений воспользуемся следующим простым соображением (справедливым не только для рассматриваемых функциональных уравнений). Пусть  $s_1(z)$  и  $s_2(z)$  — решения соответственно функциональных уравнений

$$s_1(z + \Phi) = a_1(z)s_1(z), \quad s_2(z + \Phi) = a_2(z)s_2(z),$$

тогда произведение  $s(z) = s_1(z)s_2(z)$  есть решение уравнения

$$s(z + \Phi) = a(z)s(z), \quad a(z) = a_1(z)a_2(z).$$

Это простое соображение назовем принципом мультипликативности.

Воспользуемся этим принципом для построения основного решения однородных уравнений (4.5). Рассмотрим следующие вспомогательные системы уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\sin z + \sin \theta)s(z + \Phi) + (\sin z - \sin \theta)s(-z + \Phi) = 0 \\ s(z - \Phi) - s(-z - \Phi) = 0 \end{array} \right\},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\sin z - \sin \theta) s_1(z + \Phi) + (\sin z + \sin \theta) s_1(-z + \Phi) = 0 \\ s_1(z - \Phi) - s_1(-z - \Phi) = 0 \end{array} \right\}, \quad (4.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} s_2(z + \Phi) - s_2(-z + \Phi) = 0 \\ (\sin z - \sin \theta) s_2(z - \Phi) + (\sin z + \sin \theta) s_2(-z - \Phi) = 0 \end{array} \right\},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} s_3(z + \Phi) - s_3(-z + \Phi) = 0 \\ (\sin z + \sin \theta) s_3(z - \Phi) + (\sin z - \sin \theta) s_3(-z - \Phi) = 0 \end{array} \right\},$$

где  $0 < \operatorname{Re} \theta \leq \pi/2$ .

Располагая решениями этих четырех систем, с помощью принципа мультипликативности можно получить и решение системы (4.5) с нулевой правой частью. В свою очередь, основные решения вспомогательных систем (4.6) могут быть получены в терминах специальной функции, носящей название функции Малюжинца. В следующем параграфе мы введем эту функцию и изучим ее основные свойства.

### 4.3 Функция Малюжинца и ее основные свойства

Для решения системы уравнений (4.6) полезно ввести специальную мероморфную функцию  $\psi_{\Phi}(z)$ , удовлетворяющую уравнению

$$\psi_{\Phi}(z + 2\Phi) / \psi_{\Phi}(z - 2\Phi) = \operatorname{ctg}(z/2 + \pi/4). \quad (4.7)$$

Эта функция называется функцией Малюжинца и была введена им в работе [12]. Вначале мы изучим логарифмическую производную этой функции.

**Функция  $\eta_{\Phi}(z)$ .** Обозначим  $\eta_{\Phi}(z) = \frac{d}{dz} \ln \psi_{\Phi}(z)$ . Тогда из (4.7)

$$\eta_{\Phi}(z + 2\Phi) - \eta_{\Phi}(z - 2\Phi) = -\frac{1}{\cos z}. \quad (4.8)$$

Сравним уравнение (4.8) с системой (3.37) — (3.38), которая возникла при решении задачи о клине с излучающей гранью. Заметим, что после замены  $z \rightsquigarrow -z + \Phi$  в этой системе и подстановки второго уравнения в первое мы получаем в точности (4.8). Эта довольно неожиданная аналогия отмечена в работах [12, 30].

Опираясь на отмеченную аналогию и используя формулу (3.45), находим

$$\begin{aligned} \eta_{\Phi}(z) &= -\frac{1}{4} \text{V.p.} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{-iz\zeta}}{\cos\left(\frac{\pi\zeta}{2}\right) \sin(2\Phi\zeta)} d\zeta = \\ &= \frac{i}{4} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\sin(z\zeta)}{\cos\left(\frac{\pi\zeta}{2}\right) \sin(2\Phi\zeta)} d\zeta = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(z\zeta)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi\zeta}{2}\right) \operatorname{sh}(2\Phi\zeta)} d\zeta. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Из рассмотрений §3.4 также следует, что  $\eta_{\Phi}(z)$  — мероморфная функция с (простыми) полюсами

$$z_{mn} = \pm \left( \frac{\pi}{2}(2m - 1) + 2\Phi(2n - 1) \right), \quad m, n = 1, 2, 3, \dots, \quad (4.10)$$

вычеты в которых равны  $(-1)^{m-1}$ . По теореме Миттаг-Лефлера такая функция разлагается в сумму простых дробей с точностью до слагаемого, являющегося целой функцией:

$$\eta_{\Phi}(z) = h(z) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} 2z}{z^2 - \left[ \frac{\pi}{2}(2m - 1) + 2\Phi(2n - 1) \right]^2}. \quad (4.11)$$

Но в силу (4.8)  $\eta_{\Phi}(z)$  остается ограниченной при  $\operatorname{Im} z \rightarrow \pm i\infty$  (см. также (3.47)), поэтому  $h(z)$  может быть только константой. Наконец, из (4.9)  $\eta_{\Phi}(0) = 0$ , так что  $h(z) \equiv 0$ .

Для углов раствора клина  $\Phi$ , соизмеримых с  $\frac{\pi}{4}$ , т.е. при  $\Phi = \frac{p\pi}{4q}$ , где  $p/q$  — рациональное неприводимое число, (4.11) может быть записано в виде конечной суммы тригонометрических функций (см. [12]). В частности:

$$\begin{aligned}\eta_{\pi/4}(z) &= -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{z}{2}, \\ \eta_{\pi/2}(z) &= \frac{2z - \pi \sin z}{4\pi \cos z}, \\ \eta_{3\pi/2}(z) &= -\frac{1}{6} \operatorname{tg} \frac{z}{6} \left( \frac{3 + 2 \cos(z/3)}{1 + 2 \cos(z/3)} \right), \\ \eta_{\pi}(z) &= \frac{(\sqrt{2} - \cos(z/2)) \sin(z/2) - z/\pi}{4 \cos z}.\end{aligned}\tag{4.12}$$

Отметим еще некоторые полезные равенства, которым удовлетворяет  $\eta_{\Phi}(z)$ . В силу известных тождеств

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(z\zeta)}{\operatorname{ch} \zeta} d\zeta = \frac{\pi}{2} \sec \frac{\pi z}{2}, \quad \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(z\zeta)}{\operatorname{sh} \zeta} d\zeta = \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi z}{2},$$

из интегрального представления (4.9) вытекает:

$$\begin{aligned}\eta_{\Phi}(z) \left( z + \frac{\pi}{2} \right) + \eta_{\Phi}(z) \left( z - \frac{\pi}{2} \right) &= -\frac{\pi}{4\Phi} \operatorname{tg} \frac{z\pi}{4\Phi}, \\ \eta_{\Phi}(z + \Phi) + \eta_{\Phi}(z - \Phi) &= \eta_{\frac{\Phi}{2}}(z).\end{aligned}\tag{4.13}$$

**Функция  $\psi_{\Phi}(z)$ .** Из (4.9) немедленно получаем

$$\psi_{\Phi}(z) = \exp \left[ \int_0^z \left( -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(z\zeta)}{\operatorname{ch}(\frac{\pi\zeta}{2}) \operatorname{sh}(2\Phi\zeta)} d\zeta \right) dz \right].\tag{4.14}$$

Выполнив здесь интегрирование по  $z$ , приходим к формуле

$$\psi_{\Phi}(z) = \exp \left[ -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(z\zeta) - 1}{\zeta \operatorname{ch}(\pi\zeta/2) \operatorname{sh}(2\Phi\zeta)} d\zeta \right],\tag{4.15}$$

Все перечисленные выше свойства логарифмической производной  $\eta_{\Phi}(z)$  легко переформулировать в терминах функции  $\psi_{\Phi}(z)$ . Именно, функция Малюжинца регулярна в полосе  $|\operatorname{Re} z| < \pi/2 + 2\Phi$  (где сходится интеграл в (4.15)), является четной и в силу (4.13) удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned}\psi_{\Phi}(z + \pi/2) \psi_{\Phi}(z - \pi/2) &= \psi_{\frac{\Phi}{2}}^2(\pi/2) \cos(\mu z/2), \quad \mu = \pi/(2\Phi), \\ \psi_{\Phi}(z + \Phi) \psi_{\Phi}(z - \Phi) &= \psi_{\frac{\Phi}{2}}^2(\Phi) \psi_{(\Phi/2)}(z).\end{aligned}\tag{4.16}$$

С помощью любого из соотношений (4.16) или (4.7) эта функция продолжается за пределы полосы  $|\operatorname{Re} z| < \pi/2 + 2\Phi$ , тем самым  $\psi_{\Phi}(z)$  — мероморфная функция. Двойной ряд (4.10) переходит в двойное бесконечное произведение

$$\psi_{\Phi}(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{m=1}^{\infty} \left[ 1 - \left( \frac{z}{2\Phi(2n-1) + (\pi/2)(2m-1)} \right)^2 \right]^{(-1)^{m+1}},\tag{4.17}$$

которое определяет её нули и полюса.

Для углов  $\Phi$ , соизмеримых с  $\frac{\pi}{4}$ ,  $\psi_\Phi(z)$  выражается в элементарных функциях, в частности:

$$\begin{aligned}\psi_{\pi/4}(z) &= \cos \frac{z}{2}, \\ \psi_{\pi/2}(z) &= \exp \left( \frac{1}{4\pi} \int_0^z \frac{2\zeta - \pi \sin \zeta}{\cos \zeta} d\zeta \right), \\ \psi_{3\pi/2}(z) &= \frac{4}{3} \cos \frac{z}{6} - \frac{1}{3} \sec \frac{z}{6}, \\ \psi_\pi(z) &= \exp \left( \frac{1}{8\pi} \int_0^z \frac{2\sqrt{2}\pi \sin(\zeta/2) - \pi \sin \zeta - 2\zeta}{\cos \zeta} d\zeta \right).\end{aligned}\tag{4.18}$$

**Асимптотическое поведение  $\psi_\Phi(z)$ .** В работе [13] выведено еще одно представление для функции Малюжинца, удобное для ее асимптотического и численного анализа. Воспроизведем коротко его вывод.

В подынтегральном выражении в (4.15) выделим слагаемое, описывающее главную часть этого выражения при  $\zeta \rightarrow 0$ :

$$\frac{1}{\zeta \operatorname{ch}(\pi\zeta/2) \operatorname{sh}(2\Phi\zeta)} = \frac{B}{2\Phi\zeta \operatorname{sh}(B\zeta)} + \frac{1}{\zeta} \left( \frac{1}{\operatorname{ch}(\pi\zeta/2) \operatorname{sh}(2\Phi\zeta)} - \frac{B}{2\Phi \operatorname{sh}(B\zeta)} \right),$$

где  $B = \frac{\pi}{2} + 2\Phi$ . В результате интеграл в (4.15) представляется в виде суммы трех слагаемых

$$\frac{B}{4\Phi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}(z\zeta) - 1}{\zeta \operatorname{sh}(B\zeta)} d\zeta - I_0 - I_1(z),\tag{4.19}$$

где

$$\begin{aligned}I_0 &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \left[ \frac{1}{\operatorname{ch}(\zeta\pi/2) \operatorname{sh}(2\Phi\zeta)} - \frac{B}{2\Phi \operatorname{sh}(B\zeta)} \right] \frac{d\zeta}{\zeta}, \\ I_1(z) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \operatorname{ch}(z\zeta) \left[ \frac{1}{\operatorname{ch}(\zeta\pi/2) \operatorname{sh}(2\Phi\zeta)} - \frac{B}{2\Phi \operatorname{sh}(B\zeta)} \right] \frac{d\zeta}{\zeta},\end{aligned}$$

Интеграл  $I_0$  является константой (зависящей только от  $\Phi$ ) и может быть вычислен квадратурными формулами. Первый из зависящих от  $z$  интегралов в (4.19) берется явно:

$$\frac{B}{4\Phi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}(z\zeta) - 1}{\zeta \operatorname{sh}(B\zeta)} d\zeta = -\frac{B}{4\Phi} \ln \left[ \cos \left( \frac{\pi z}{2B} \right) \right].$$

Наконец, интеграл  $I_1(z)$  может быть вычислен по вычетам:

$$I_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k} \left( \frac{e^{i\pi k \operatorname{sign}(\operatorname{Im} z)z/(2\Phi)}}{\cos(\pi^2 k/(4\Phi))} + \frac{e^{i \operatorname{sign}(\operatorname{Im} z)z(2k-1)}}{(1 - 1/(2k)) \sin[4\Phi(k - 1/2)]} \right).\tag{4.20}$$

Таким образом,

$$\psi_\Phi(z) = \exp \left[ \frac{B}{4\Phi} \ln \left[ \cos \left( \frac{\pi z}{2B} \right) \right] + I_0 + I_1(z) \right].\tag{4.21}$$

До сих пор все преобразования были точными. При  $\text{Im } z \rightarrow \pm\infty$  интеграл  $I_1(z)$  экспоненциально убывает и может быть отброшен, равно как и одна из экспонент в  $\cos\left(\frac{\pi z}{2B}\right)$ . В результате

$$\psi_\Phi(z) \underset{\text{Im } z \rightarrow \pm\infty}{\sim} \text{const} \exp(\mp i \frac{\pi z}{8\Phi}). \quad (4.22)$$

Можно показать, что постоянный множитель в (4.22) совпадает со значением  $\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)$ .

## 4.4 Решение однородных уравнений

Обратимся теперь к решению первой из простейших систем однородных уравнений (4.6). Убедимся, что

$$s(z) \equiv \Psi(z, \theta) = \psi_\Phi(z + \Phi + \pi/2 - \theta)\psi_\Phi(z + \Phi - \pi/2 + \theta) \quad (4.23)$$

есть основное решение этой системы.

Действительно, из первой системы уравнений в (4.6) получим

$$\frac{s(z + 2\Phi)}{s(z - 2\Phi)} = \frac{-\sin(z + \Phi) + \sin \theta}{\sin(z + \Phi) + \sin \theta}$$

или

$$\frac{s(z + 2\Phi)}{s(z - 2\Phi)} = \frac{\sin\left(\frac{\theta - z - \Phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta + z + \Phi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta + z + \Phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta - z - \Phi}{2}\right)},$$

откуда, используя уравнение для функции Малюжинца (4.7) и принцип мультипликативности, находим выражение (4.23).

Аналогично, решением остальных систем из (4.6) являются, соответственно, функции

$$s_1(z) \equiv 1/\Psi(z, \theta), \quad s_2(z) \equiv \Psi(z - 2\Phi, \theta), \quad s_3(z) \equiv 1/\Psi(z - 2\Phi, \theta). \quad (4.24)$$

С использованием принципа мультипликативности построенные основные решения (4.23) и (4.24) систем (4.6) позволяют найти основное решение однородной системы (4.5) в виде

$$\Psi_0(z) = \frac{\prod_{\nu=0}^{[(n-1)/2]} \Psi(z, \theta_{2\nu+1}^1) \prod_{\nu=0}^{[(m-1)/2]} \Psi(z - 2\Phi, \theta_{2\nu+1}^2)}{\prod_{\nu=1}^{[n/2]} \Psi(z, \theta_{2\nu}^1) \prod_{\nu=1}^{[m/2]} \Psi(z - 2\Phi, \theta_{2\nu}^2)}, \quad (4.25)$$

где  $[p]$  — целая часть числа  $p$ , и по определению считаем  $\prod_{\nu=q}^p (\dots) \equiv 1$  при  $p < q$ .

## 4.5 Решение неоднородных уравнений

Используя решение (4.25), можно упростить систему (4.5), приведя ее к системе с постоянными коэффициентами. С этой целью подставим в (4.5)

$$s(z) = \Psi_0(z)\sigma(z), \quad (4.26)$$

что приводит к следующей системе с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \sigma(z + \Phi) - \sigma(-z + \Phi) = h_1(z), \\ \sigma(z - \Phi) - \sigma(-z - \Phi) = h_2(z). \end{cases} \quad (4.27)$$

Правые части в системе (4.27) даются формулами

$$\begin{cases} h_1(z) = \frac{\sin z \sum_{p=0}^{n-1} a_p \cos^p z}{\prod_{\nu=1}^n (\sin z - (-1)^\nu \sin \theta_\nu^1) \Psi_0(z+\Phi)}, \\ h_2(z) = \frac{\sin z \sum_{p=0}^{m-1} b_p \cos^p z}{\prod_{\nu=1}^m (-\sin z - (-1)^\nu \sin \theta_\nu^2) \Psi_0(z-\Phi)}. \end{cases} \quad (4.28)$$

Очевидно, что любое решение системы (4.27) может быть представлено в виде

$$\sigma(z) = s_0(z) + s_*(z), \quad (4.29)$$

где  $s_0(z)$  — произвольное решение однородной, а  $s_*(z)$  — частное решение неоднородной системы (4.27).

Решение  $s_0(z)$  однородной системы получить нетрудно. <sup>†</sup> Тем самым дальнейшей задачей является построение решения  $s_*(z)$  неоднородной системы (4.27) в замкнутой форме и такого, чтобы сумма (4.29) оказалась в требуемом классе функций.

Решение неоднородных уравнений возможно различными способами. Наиболее естественным является способ, основанный на модифицированном преобразовании Фурье. Будучи формально простым, этот способ требует обоснования, которое связано с правильным пониманием сходимости интегралов типа Фурье. В свою очередь, преобразование Фурье естественным образом приводит к появлению так называемых  $\mathcal{S}$ -интегралов,<sup>†</sup> прямое использование которых также позволяет обосновать процедуру решения. В ближайших разделах мы обсудим мотивировку введения  $\mathcal{S}$ -интегралов и использование их для решения неоднородных уравнений Малюжинца.

### 4.5.1 Модифицированное преобразование Фурье и $\mathcal{S}$ -интегралы

Вычисления в этом параграфе носят формальный характер и служат в основном для мотивировки использования  $\mathcal{S}$ -интегралов при решении неоднородных функциональных уравнений. Мы ограничимся здесь рассмотрением случая специальных правых частей системы (4.27), а именно:

$$\begin{cases} s_1(z + \Phi) - s_1(-z + \Phi) = h_1(z), \\ s_1(z - \Phi) - s_1(-z - \Phi) = 0. \end{cases} \quad (4.30)$$

где мероморфная функция  $h_1(z)$  нечетна. Располагая решением этой специальной системы, мы в дальнейшем легко получим и решение системы (4.27) в общем случае.

Модифицированное преобразование Фурье функции  $s(z)$  описывается формулами (см. также формулы (3.39), (3.40) и следующие за ними комментарии)

$$\tilde{s}(t) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} s(z) e^{izt} dz, \quad s(z) = -\frac{1}{2\pi} \text{V.p.} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \tilde{s}(t) e^{-izt} dt. \quad (4.31)$$

Применив к системе (4.30) преобразование (4.31), получим

$$\begin{cases} \tilde{s}_1(t) e^{-i\Phi t} - \tilde{s}_1(-t) e^{i\Phi t} = \tilde{h}_1(t), \\ \tilde{s}_1(t) e^{i\Phi t} - \tilde{s}_1(-t) e^{-i\Phi t} = 0 \end{cases}$$

<sup>†</sup>В частности, таким решением будет рациональная функция от  $\sin \mu z$ ,  $\cos \mu z$ , или функция (3.4), которая возникла при решении системы (3.2) в задаче дифракции на клине с условиями Дирихле.

<sup>†</sup>Термин, введенный А.А.Тужилиным [16].

и, следовательно,

$$\tilde{s}_1(t) = \frac{i}{2} \frac{e^{-i\Phi t}}{\sin(2\Phi t)} \tilde{h}_1(t).$$

Подставим это выражение в формулу для обратного преобразования Фурье

$$\begin{aligned} s_1(z) &= -\frac{1}{2\pi} \text{V.p.} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \tilde{s}_1(t) e^{-izt} dt = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \text{V.p.} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{-izt} \left( \frac{ie^{-i\Phi t}}{2\sin(2\Phi t)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} h_1(\zeta) e^{i\zeta t} d\zeta \right) dt = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} h_1(\zeta) \left( \text{V.p.} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{-i(z-\zeta)t} \frac{ie^{-i\Phi t}}{2\sin(2\Phi t)} dt \right) d\zeta = \\ &= -\frac{i\mu}{4\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} h_1(\zeta) \operatorname{tg} \frac{\mu(z-\zeta+\Phi)}{2} d\zeta, \end{aligned}$$

где  $\mu = \frac{\pi}{1\Phi}$  и мы воспользовались известным равенством (см. [7], 3.511:2):

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\sin at}{2\sin(2\Phi t)} dt = i \frac{\mu}{2} \operatorname{tg} \frac{a\mu}{2}.$$

Наконец, используя нечетность  $h_1(z)$  и тождество

$$\operatorname{tg} \frac{\mu}{2}(a+b) - \operatorname{tg} \frac{\mu}{2}(a-b) = \frac{2\sin\mu b}{\cos\mu b + \cos\mu a}$$

получаем искомое решение  $s_1(z)$  в виде

$$s_1(z) = \frac{i}{8\Phi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{h_1(t) \sin \mu t}{\cos \mu t - \sin \mu z} dt, \quad (4.32)$$

Интегралы вида (4.32) мы, следуя А.А.Тужилину, называем  $\mathcal{S}$ -интегралами.

## 4.5.2 Непосредственное использование $\mathcal{S}$ -интегралов

Итак, в результате применения преобразования Фурье решение неоднородных уравнений Малюжинца выражается  $\mathcal{S}$ -интегралами вида

$$s(z) = \frac{i}{8\Phi} \int_{iR} d\tau F(\tau) / (\cos \mu\tau - \sin \mu z), \quad \mu = \pi/(2\Phi), \quad (4.33)$$

где  $F(\tau)$  — четная мероморфная функция  $\tau$ , которая регулярна в окрестности  $iR := (-i\infty, +i\infty)$  и

$$F(\tau) \sim O(\exp(\delta|\operatorname{Im} \tau|)), \quad \delta < \mu, \quad |\operatorname{Im} \tau| \rightarrow \infty. \quad (4.34)$$

Условие (4.34) обеспечивает равномерную и абсолютную сходимость интеграла (4.33) в любой полосе

$$(4n+1)\Phi < \operatorname{Re} z < (4n+5)\Phi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.35)$$

и, значит,  $s(z)$  регулярна в любой полосе (4.35), т.е.  $s(z)$  — кусочно-регулярная,  $4\Phi$ -периодическая функция. Заметим, что регулярность подынтегрального выражения (4.33) нарушается в точках обращения в ноль знаменателя, которые лежат как раз на границе полос (4.35). В качестве функции  $F(\tau)$  можно взять любую четную мероморфную функцию, удовлетворяющую (4.34).

В частном случае  $F(\tau) \equiv 1$  в любой полосе (4.35)

$$\frac{i}{8\Phi} \int_{iR} \frac{d\tau}{\cos \mu\tau - \sin \mu z} = \left( n + \frac{3}{4} - \frac{z}{4\Phi} \right) / \cos \mu z. \quad (4.36)$$

Последнее равенство проверяется при помощи замены переменной замены  $\zeta = e^{-i\mu\tau}$ , после чего получившийся интеграл от рациональной дроби легко вычисляется.

Изучим аналитическое продолжение  $s(z)$  из любой полосы регулярности на всю комплексную плоскость. Достаточно рассмотреть полосу  $-3\Phi < \operatorname{Re} z < \Phi$ . Используя (4.36), можно написать

$$s(z) = \frac{i}{8\Phi} \int_{iR} \frac{F(\tau) - F(z - \Phi)}{\cos \mu\tau - \sin \mu z} d\tau - \frac{z + \Phi}{4\Phi \cos \mu z} F(z - \Phi). \quad (4.37)$$

Второй член в (4.37) является мероморфной функцией на всей плоскости. Легко видеть, что для любого мнимого  $\tau$  подынтегральное выражение в первом слагаемом (4.37) может иметь особенности в полюсах  $F(z - \Phi)$  и не имеет сингулярностей на линии  $\operatorname{Re} z = \Phi$ , т.е. точки  $z = \Phi + \tau$  являются точками регулярности. Это означает, что интеграл в (4.37) определяет мероморфную функцию в полосе

$$-3\Phi < \operatorname{Re} z < 5\Phi. \quad (4.38)$$

Таким образом, выражение (4.37) осуществляет мероморфное продолжение  $s(z)$  в полосу (4.38).

Выражение (4.37) позволяет написать

$$\begin{aligned} s(z + \Phi) - s(-z + \Phi) &= F(z) / \sin \mu z, \\ s(z - \Phi) - s(-z - \Phi) &= \\ = -\frac{i}{8\Phi} \int_{iR} \frac{F(z-2\Phi) - F(-z-2\Phi)}{\cos \mu\tau + \cos \mu z} d\tau - z \frac{F(z-2\Phi) - F(-z-2\Phi)}{4\Phi \sin \mu z} &= 0. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Итак, выражение (4.37) является мероморфным продолжением интеграла (4.33) в полосу (4.38) и удовлетворяет уравнениям (4.39).

Обратимся теперь к решению неоднородных уравнений (4.27). Очевидно, что если  $s_1(z)$  и  $s_2(z)$  — соответственно решения систем

$$\begin{cases} s_1(z + \Phi) - s_1(-z + \Phi) = h_1(z), \\ s_1(z - \Phi) - s_1(-z - \Phi) = 0, \end{cases} \quad (4.40)$$

и

$$\begin{cases} s_2(z + \Phi) - s_2(-z + \Phi) = h_2(z), \\ s_2(z - \Phi) - s_2(-z - \Phi) = 0, \end{cases} \quad (4.41)$$

то функция

$$s_*(z) = s_1(z) - s_2(z - 2\Phi) \quad (4.42)$$

удовлетворяет системе уравнений (4.27).

Таким образом, задача сведена к решению “упрощенных” систем (4.40) и (4.41). Решения этих систем в силу (4.33) и (4.39) имеют вид  $\mathcal{S}$ -интегралов

$$s_{1,2}(z) = \frac{i}{8\Phi} \int_{iR} h_{1,2}(\tau) \frac{\sin \mu\tau}{\cos \mu\tau - \sin \mu z} d\tau.$$

Подставляя эти выражения в (4.42), получаем

$$\sigma(z) = \frac{i}{8\Phi} \int_{iR} h_1(\tau) \frac{\sin \mu\tau}{\cos \mu\tau - \sin \mu z} d\tau + \frac{i}{8\Phi} \int_{iR} h_2(\tau) \frac{\sin \mu\tau}{\cos \mu\tau + \sin \mu z} d\tau. * \quad (4.43)$$

Формулы (4.43) получены в предположении о поведении (4.34) функции  $F(\tau)$ , что для функций  $h_{1,2}(z)$  означает их экспоненциальное убывание при  $|\operatorname{Im} z| \rightarrow \infty$ . Однако от этого ограничения можно избавиться: если  $h_{1,2}(z)$  в (4.40), (4.41) не являются экспоненциально убывающими, то следует искать решения (4.40), (4.41) в виде

$$s_{1,2}(z) = \sin^{m_{1,2}}(\mu z) \widehat{s}_{1,2}(z). \quad (4.44)$$

Тогда, например, система (4.40) переписется в виде

$$\begin{cases} \widehat{s}_1(z + \Phi) - \widehat{s}_1(-z + \Phi) = h_1(z) / \cos^{m_1} \mu z, \\ \widehat{s}_1(z - \Phi) - \widehat{s}_1(-z - \Phi) = 0, \end{cases}$$

где при достаточно большом  $m_1$  член  $h_1(z) / \cos^{m_1} \mu z$  справа обладает нужным убыванием и

$$\widehat{s}_1(z) = \sin^{m_1} \mu z \frac{i}{8\Phi} \int_{iR} \frac{h_1(\tau)}{\cos^{m_1} \mu\tau} \frac{\sin \mu\tau}{\cos \mu\tau - \sin \mu z} d\tau. \quad (4.45)$$

Таким образом, мы приходим к утверждению

**Теорема 4.1.** *Общее решение функциональных уравнений Малюжинца (4.5) имеет вид*

$$s(z) = \Psi_0(z) (s_0(z) + \sigma(z)), \quad (4.46)$$

где функции  $\Psi_0(z)$  и  $\sigma(z)$  определены, соответственно, формулами (4.25) и (4.43), (4.28) (см. также (4.45)), а  $s_0(z)$  — решение (3.4) простейших однородных уравнений Малюжинца.

## 4.6 Решение функциональных уравнений в задаче Малюжинца

Теорема 4.1 позволяет, как частный случай, получить решение задачи дифракции на импедансном клине. Действительно, применив формулу (4.46) к однородной системе (4.3), получаем

$$s(z) = c\Psi_0(z)\sigma_{\varphi_0}(z) = c\Psi(z, \theta_+)\Psi(z - 2\Phi, \theta_-)\sigma_{\varphi_0}(z), \quad c = 1/\Psi_0(\varphi_0), \quad (4.47)$$

---

\* Мероморфное продолжение второго интеграла в (4.43) осуществляется не с помощью (4.37), а посредством тождества

$$\frac{i}{8\Phi} \int_{iR} d\tau / (\cos \mu\tau + \sin \mu z) = - \left( n + \frac{1}{4} - \frac{z}{4\Phi} \right) / \cos \mu z,$$

которое справедливо в полосах  $(4n - 1)\Phi < \operatorname{Re} z < (4n + 3)\Phi$ ,  $n = 0, \pm 1, \dots$

где  $\Psi(z, \theta)$  определена формулой (4.23) и

$$\sigma_{\varphi_0}(z) = \mu \cos(\mu\varphi_0) / (\sin \mu z - \sin \mu\varphi_0), \quad \mu = \frac{\pi}{2\Phi}. \quad (4.48)$$

Мероморфная функция  $\sigma_{\varphi_0}(z)$  имеет единственный полюс (с вычетом единица)  $z = \varphi_0$  в основной полосе  $|\operatorname{Re} z| < \Phi$ ; константа  $c$  в (4.47) служит для нормировки вычета *всей* функции  $s(z)$ .

Напомним, что мы предполагали выполнение неравенств  $0 < \operatorname{Re} \theta_{\pm} \leq \pi/2$ . При  $\operatorname{Re} \theta_{\pm} = 0$  спектральная функция  $s(z)$  имеет особенности на границе основной полосы при  $z = -\Phi - \vartheta_+$  и  $z = \Phi - \vartheta_-$ . (Это можно увидеть при сдвиге аргумента на  $\pm\Phi$  в уравнениях (4.3)). Наличие таких особенностей исключалось в гл.2 при изучении интеграла Зоммерфельда. Поэтому случай  $\operatorname{Re} \theta_{\pm} = 0$  требует специального рассмотрения, которое здесь опускается.

Окончательно, решение задачи Малюжинца имеет вид:

$$u(kr, \varphi) = \frac{c}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Psi(z + \varphi, \theta_+) \Psi(z + \varphi - 2\Phi, \theta_-) \mu \cos \mu\varphi_0}{\sin \mu(z + \varphi) - \sin \mu\varphi_0} e^{-ikr \cos z} dz. \quad (4.49)$$

## 4.7 О вычислении асимптотики решения при $kr \rightarrow \infty$

Асимптотическое исследование интеграла (4.49) идеологически ничем не отличается от аналогичного исследования, выполненного в §3.2 в случае идеальных краевых условий. Однако теперь, за счет более сложного подынтегрального выражения, при деформации контура интегрирования в перевальный могут пересекаться и некоторые дополнительные полюса. Здесь мы коротко остановимся на описании вкладов от этих полюсов и их физическом смысле.

Начнем с неравномерной по углу  $\varphi$  формулы. Вне малой окрестности некоторых направлений (которые мы уточним ниже) асимптотика интеграла (4.49) при  $kr \rightarrow \infty$  имеет вид

$$u(kr, \varphi) \sim u_+ + u_- + \sum_n u_n + u_e(kr, \varphi). \quad (4.50)$$

В этой формуле слагаемое

$$u_e(kr, \varphi) = c [\Psi_0(\varphi - \pi) \sigma_{\varphi_0}(\varphi - \pi) - \Psi_0(\varphi + \pi) \sigma_{\varphi_0}(\varphi + \pi)] \times \\ \times \frac{e^{i(kr + \pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{kr}\right) \right] \quad (4.51)$$

описывает цилиндрическую волну (edge wave), расходящуюся от ребра клина. Слагаемые  $u_n$  описывают падающую ( $n = 0$ ) и отраженные волны. Число этих волн конечно. Сумма содержит два или три члена, если  $\pi/2 \leq \Phi \leq \pi$  (при  $0 \leq \Phi < \pi/2$  сумма может содержать и другие члены, отвечающие волнам, многократно отраженным от граней клина). Эти слагаемые имеют вид

$$u_n = (-1)^n \frac{\Psi_0((-1)^n \varphi_0 + 2\Phi n)}{\Psi_0(\varphi_0)} e^{-ikr \cos(\varphi - (-1)^n \varphi_0 - 2\Phi n)}, \\ \text{если } |\varphi - 2\Phi n - (-1)^n \varphi_0| \lesssim \pi, \quad n = 0, \pm 1, \dots, \quad (4.52)$$

$u_n = 0$  в противном случае.

Наконец, слагаемые  $u_{\pm}$ , вычисляемые по формулам

$$u_{\pm} = c_{\pm} e^{ikr \cos(\Phi + \theta_{\pm} \mp \varphi)}, \quad c_{\pm} = \operatorname{res}[s(z)]|_{z=\pm(\pi + \Phi + \theta_{\pm})},^*$$

$$\text{если } 0 \leq \Phi \mp \varphi \lesssim -\operatorname{gd}(\operatorname{Im} \theta_{\pm}) - \operatorname{Re} \theta_{\pm},^{\dagger} \quad (4.53)$$

$$u_{\pm} = 0 \text{ в противном случае,}$$

представляют собой плоские волны с комплексными фазовыми функциями, которые при  $\operatorname{Re} \theta_{\pm} > 0$  экспоненциально убывают с ростом  $kr$  (“поверхностные волны”, см. §1.4).

Использованную в (4.52) и (4.53) запись неравенств в виде  $A \lesssim B$  следует понимать в том смысле, что неравномерная формула (4.50) теряет силу в окрестности направлений  $\varphi$ , для которых  $A \approx B$ . По аналогии с рассуждениями, приведенными в §3.2, можно написать равномерную асимптотическую формулу с использованием интегралов Френеля. Она выглядит так:

$$u(kr, \varphi) \sim U_+ + U_- + \sum_n U_n + S(\varphi, \varphi_0) \frac{e^{i(kr + \pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}}, \quad (4.54)$$

где

$$U_n = (-1)^n \frac{\Psi_0((-1)^n \varphi_0 + 2\Phi n)}{\Psi_0(\varphi_0)} e^{-ikr \cos(\varphi - (-1)^n \varphi_0 - 2\Phi n)} \mathcal{F} \left( \sqrt{2kr} \cos \frac{\varphi - (-1)^n \varphi_0 - 2\Phi n}{2} \right),$$

$$U_{\pm} = c_{\pm} e^{ikr \cos(\Phi + \theta_{\pm} \mp \varphi)} \mathcal{F} \left( -\sqrt{2kr} \sin \frac{\Phi + \theta_{\pm} \mp \varphi}{2} \right),$$

$$S(\varphi, \varphi_0) = \sum_n (-1)^n \frac{\Psi_0((-1)^n \varphi_0 + 2\Phi n)}{2 \cos \frac{\varphi - (-1)^n \varphi_0 - 2\Phi n}{2}} - \frac{c_+}{2 \sin \frac{\Phi + \theta_+ - \varphi}{2}} - \frac{c_-}{2 \sin \frac{\Phi + \theta_- + \varphi}{2}} +$$

$$+ \frac{\Psi_0(\varphi - \pi) \sigma_{\varphi_0}(\varphi - \pi) - \Psi_0(\varphi + \pi) \sigma_{\varphi_0}(\varphi + \pi)}{\Psi_0(\varphi_0)}.$$

Появление дополнительных, по сравнению со случаем идеальных краевых условий, интегралов Френеля в выражении для  $U_{\pm}$  объясняется возможным сближением перевальных точек с полюсами функции Малюжинца. Разумеется, при замене интегралов Френеля асимптотиками формула (4.54) переходит в (4.50). Примеры расчетов по формулам (4.54) приведены на рис. 4.1, 4.2.

\*При вычислении этих вычетов полезно учесть, что в силу определяющего функцию Малюжинца уравнения (4.7)

$$\operatorname{res}|_{z=\pm(\pi + \Phi + \theta_{\pm})} \psi_{\Phi} \left( z + \Phi \pm \frac{\pi}{2} \mp \theta_{\pm} \right) = \pm 2\psi_{\Phi} \left( \pm \frac{3\pi}{2} \mp 2\Phi \right) \Rightarrow$$

$$\operatorname{res}|_{z=\pm(\pi + \Phi + \theta_{\pm})} \Psi_0(z) = \pm 2\psi_{\Phi} \left( \pm \frac{3\pi}{2} \mp 2\Phi \right) \Psi \left( \pm(\pi + \theta_{\pm}) - \Phi \right) \psi_{\Phi} \left( \pm \left( \frac{\pi}{2} + 2\Phi + 2\theta_{\pm} \right) \right).$$

†Напомним, что функция *гудерманиан*  $\operatorname{gd}(x)$  встречалась в связи с перевальными контурами, см. (2.38).

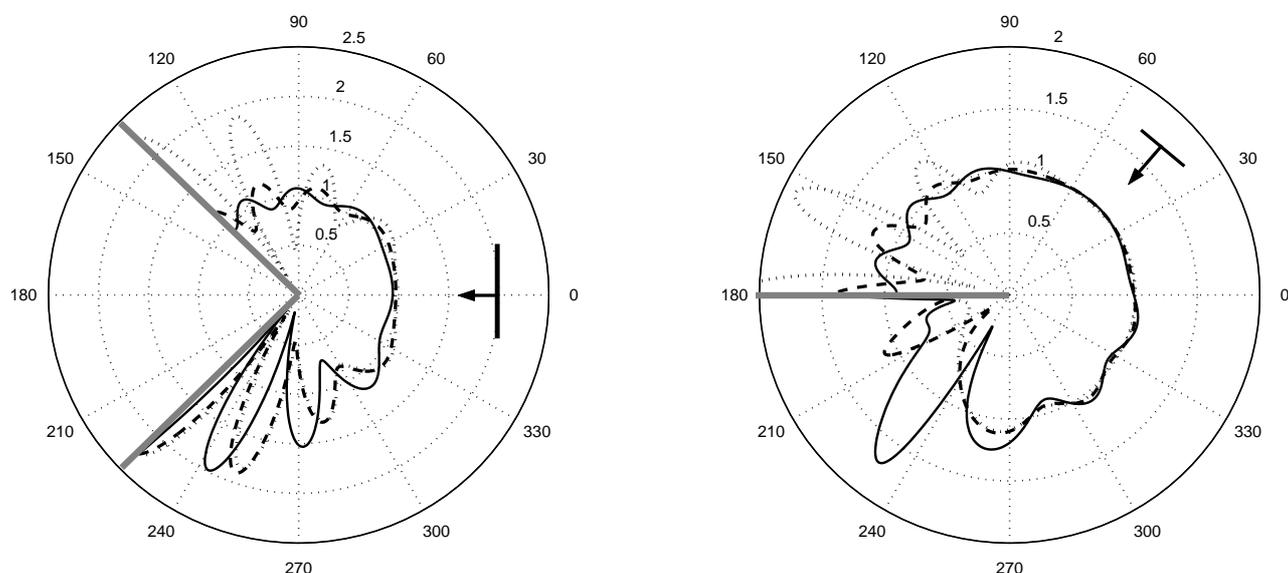


Рис. 4.1: Асимптотика дальнего поля ( $kr = 10$ ) при дифракции падающей под углом  $\varphi_0 = 0$  плоской волны на импедансный клин с углом раствора  $\Phi = 3\pi/4$  (слева) и при дифракции на полубесконечном экране падающей под углом  $\varphi_0 = \pi/4$  волны. Нижняя грань пассивна ( $\text{Re } \theta_- = 0$ ), различные кривые соответствуют различным значениям  $\text{Im } \theta_-$ : сплошная линия —  $\text{Im } \theta_- = -1$ , пунктир —  $\text{Im } \theta_- = -0.1$ , точечная линия —  $\text{Im } \theta_- = -0.01$ ; напротив, на верхней грани для всех кривых  $\text{Im } \theta_+ = -0.1$ , но различные кривые соответствуют различным поглощениям: сплошная линия —  $\text{Re } \theta_+ = 1$ , пунктир —  $\text{Re } \theta_+ = 0.5$ , точечная линия —  $\text{Re } \theta_+ = 0$ .

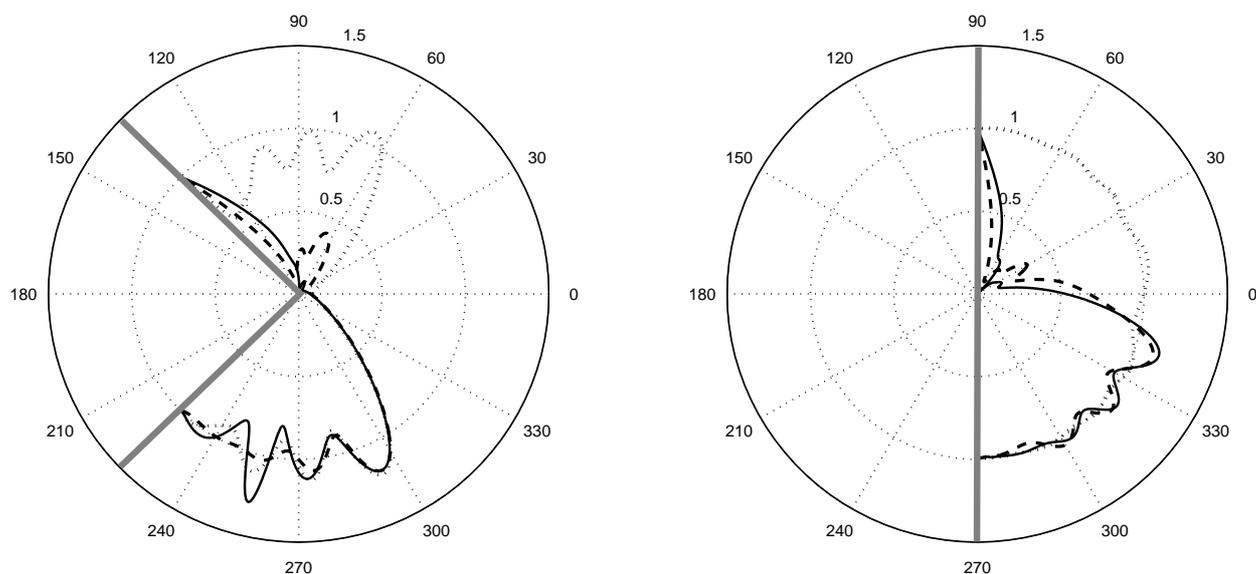


Рис. 4.2: Обратное рассеяние (backscattering) от импедансного клина с углом раствора  $\Phi = 3\pi/4$  (слева) и от полупространства  $\Phi = \pi/2$  со скачком импеданса (справа) при  $kr = 10$ : Способ изображения интенсивности поля тот же, что и в гл. 3; маркировка кривых та же, что и на рис.4.1.

## Дифракция плоской волны на клине с тонким покрытием

Предыдущие главы были посвящены основным идеям метода Зоммерфельда-Малюжинца решения задач дифракции во внешности клина. При этом мы ориентировались на приложения метода к задачам рассеяния акустических волн. Универсальность излагаемого математического аппарата состоит еще и в том, что он позволяет единообразно описывать волновые процессы различной физической природы. Так, в данной и последующей главах мы рассматриваем примеры задач, возникающих в теории дифракции электромагнитных волн. Для мотивированной постановки задачи нам придется кратко напомнить некоторые соотношения, вытекающие из анализа уравнений Максвелла, однако, реально будет изучаться скалярная краевая задача для уравнения Гельмгольца в угловой области. Подробности и дополнительные пояснения могут быть найдены, например, в [22].

В данной главе рассматривается электромагнитная задача дифракции плоской волны, наклонно или нормально падающей на клин, обе стороны которого покрыты тонким диэлектрическим слоем. Показано, что для нормального падения векторная задача может быть расщеплена на две скалярные задачи для двух поляризаций. Именно эти (во многом аналогичные) задачи и являются основным предметом дальнейших рассмотрений (однако вначале обсуждается и формулировка задачи дифракции произвольно падающей плоской волны). Новым, ранее отсутствующим обстоятельством, является включение в постановку задач(и) так называемых “контактных условий”. Как и в предыдущих главах, с помощью интегралов Зоммерфельда задача редуцируется к системе функциональных уравнений Малюжинца; класс, в котором ищутся решения, наследуется из постановки задачи. Решение этих уравнений осуществляется при помощи техники, описанной в гл.4. Как всегда, анализ задачи завершается асимптотическим упрощением полученного точного решения в дальней зоне.

### 5.1 Постановка задачи, моделирующей дифракцию плоской электромагнитной волны на клине с тонким покрытием

В области  $\{(r, \varphi, z) : r > 0, -\Phi < \varphi < \Phi\}$  ( $(r, \varphi, z)$  — цилиндрические координаты,  $\Phi > \pi/2$ ) рассмотрим задачу дифракции плоской электромагнитной волны, задаваемой

$z$ -компонентами векторов  $E$  и  $H^*$  (см. рис. 5.1):

$$\begin{cases} E_z^i = D_1 \exp(-i(k \sin \beta) r \cos(\varphi - \varphi_0) + ik \cos \beta z) \\ H_z^i = D_2/Z_0 \exp(-i(k \sin \beta) r \cos(\varphi - \varphi_0) + ik \cos \beta z), \end{cases} \quad (5.1)$$

где  $k$  – волновое число,  $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$  – импеданс свободного пространства и  $D_1, D_2$  – некоторые постоянные.

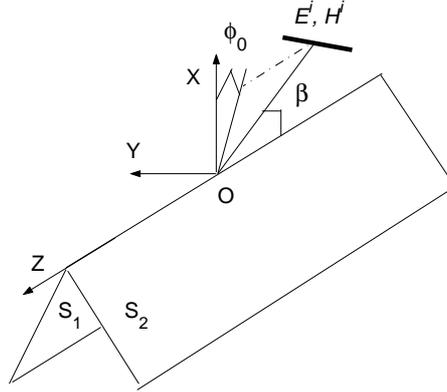


Рис. 5.1: Дифракция плоской волны на клине

Сформулируем граничные условия (так называемые обобщенные импедансные граничные условия, ОБИГУ), которые моделируют тонкие диэлектрические покрытия на гранях клина  $S_j$  ( $j = 1, 2$  соответствует  $\varphi = \pm\Phi$ ). Вывод этих условий можно найти, например, в [22], гл. 1, или в [19].

Введем, в дополнение к цилиндрическим координатам, локальные декартовы координаты на гранях клина

$$x = -r \cos(\Phi - \varphi), \quad y = r \sin(\Phi - \varphi) \quad \text{вблизи грани } S_1,$$

$$x = r \cos(\Phi + \varphi), \quad y = r \sin(\Phi + \varphi) \quad \text{вблизи грани } S_2$$

и следующие обозначения ( $j = 1, 2$ ):

$$\begin{aligned} \alpha_{1j} &= \frac{i\omega\mu_0}{k^2 + \gamma_0^2} \left( 1 - \frac{d_j^2}{2} (k_j^2 + \gamma_0^2) \right), & \alpha_{2j} &= \frac{-i\omega\epsilon_0}{k^2 + \gamma_0^2} d_j \left( 1 - \frac{d_j^2}{6} (k_j^2 + \gamma_0^2) \right), \\ \beta_{1j} &= -\frac{d_j^2}{2} \frac{i\omega\mu_0}{k^2 + \gamma_0^2}, & \beta_{2j} &= \frac{d_j^3}{6} \frac{i\omega\epsilon_0}{k^2 + \gamma_0^2}, \\ \gamma_{1j} &= i\omega\mu_j d_j, & \gamma_{2j} &= \frac{i\omega\epsilon_j}{k^2 + \gamma_0^2} \left( 1 - \frac{d_j^2}{2} (k_j^2 + \gamma_0^2) \right), \\ \delta_{1j} &= d_j \frac{i\omega\mu_j}{k_j^2 + \gamma_0^2}, & \delta_{2j} &= (-d_j^2/2) \frac{i\omega\epsilon_j}{k_j^2 + \gamma_0^2}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

$\gamma_0 = ik \cos \beta$ ,  $\epsilon_j, \mu_j$  – материальные постоянные слоев на гранях клина,  $j = 1, 2$ ,  $k_j = \omega\sqrt{\epsilon_j\mu_j}$ ,  $\omega$  – круговая частота,  $\epsilon_j, \mu_j$  – материальные постоянные окружающей

\*Остальные компоненты электромагнитного поля выражаются через  $z$ -составляющие, временной фактор  $\exp(-i\omega t)$  опущен.

клин области. В формулах (5.2) постоянные  $d_j$  моделируют толщины диэлектрических покрытий клина.

Во введенных обозначениях ОБИГУ имеют вид

$$\begin{aligned} (\alpha_{1j} + \beta_{1j} \partial_{x^2}^2) \frac{k^2 + \gamma_0^2}{i\omega\mu_0} \left( E_x - \frac{\gamma_0}{k_j^2 + \gamma_0^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + (\gamma_{1j} + \delta_{1j} \partial_{x^2}^2) H_z|_{S_j} &= 0, \\ (\alpha_{2j} + \beta_{2j} \partial_{x^2}^2) \frac{k^2 + \gamma_0^2}{-i\omega\epsilon_0} \left( H_x - \frac{\gamma_0}{k_j^2 + \gamma_0^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + (\gamma_{2j} + \delta_{2j} \partial_{x^2}^2) E_z|_{S_j} &= 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

В (5.3) следует также подставить следующие выражения  $x$ -компонент электромагнитного поля через  $z$ -составляющие:

$$E_x = \frac{\gamma_0}{k_j^2 + \gamma_0^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{i\omega\mu_j}{k_j^2 + \gamma_0^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}, \quad H_x = \frac{\gamma_0}{k_j^2 + \gamma_0^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{i\omega\epsilon_j}{k_j^2 + \gamma_0^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}. \quad (5.4)$$

В силу уравнений Максвелла  $z$ -компоненты волнового поля удовлетворяют уравнениям Гельмгольца вне клина

$$\begin{aligned} \Delta H_z + k^2 H_z &= 0 \\ \Delta E_z + k^2 E_z &= 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Как обычно, потребуем выполнение условий Мейкснера на ребре ( $r \rightarrow 0$ )

$$E_z = O(1), \quad H_z = O(1), \quad \lim_{r \rightarrow 0} (|\nabla E_z| + |\nabla H_z|) r = 0. \quad (5.6)$$

Условия на бесконечности (см. главу 1) удобно использовать в следующей форме: потребуем, чтобы при  $\text{Im } k > 0$  разности между полным полем и его геометро-оптической частью

$$\begin{aligned} *E_z &= E_z - E_z^i - E_z^r, \\ *H_z &= H_z - H_z^i - H_z^r, \end{aligned} \quad (5.7)$$

( $E_z^r, H_z^r$  — отраженные от граней по законам геометрической оптики волны), экспоненциально стремились к нулю, когда  $r \rightarrow \infty$ . В дальнейшем мы кратко обсудим условия (5.6) и (5.7).

Известно (см. [22], гл.17), что в задачах для уравнения Гельмгольца с граничными условиями, содержащими производные порядка выше первого (каковыми являются ОБИГУ), для обеспечения единственности решения необходимо поставить дополнительные контактные условия (КУ). В рассматриваемой задаче (5.5), (5.3)—(5.4), (5.6) — (5.7) эти условия имеют вид (см. [22], гл.6):

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\beta_1}{\delta_1} \left( \frac{k^2 + \gamma_0^2}{i\omega\mu_0} \right) \left( E_x - \frac{\gamma_0}{k^2 + \gamma_0^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \right]_{-\Phi}^{\Phi} &= 0, \\ \left[ \frac{\beta_1 \bar{\delta}_1}{\Delta_1} \left( \frac{k^2 + \gamma_0^2}{i\omega\mu_0} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left( E_x - \frac{\gamma_0}{k^2 + \gamma_0^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \frac{|\delta_1|^2}{\Delta_1} \frac{\partial}{\partial x} H_z \right]_{-\Phi}^{\Phi} &= 0, \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\beta_2}{\delta_2} \left( -\frac{k^2 + \gamma_0^2}{i\omega\epsilon_0} \right) \left( H_x - \frac{\gamma_0}{k^2 + \gamma_0^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \right]_{-\Phi}^{\Phi} &= 0, \\ \left[ \frac{\beta_2 \bar{\delta}_2}{\Delta_2} \left( -\frac{k^2 + \gamma_0^2}{i\omega\epsilon_0} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left( H_x - \frac{\gamma_0}{k^2 + \gamma_0^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \frac{|\delta_2|^2}{\Delta_2} \frac{\partial}{\partial x} E_z \right]_{-\Phi}^{\Phi} &= 0, \end{aligned} \quad (5.9)$$

где

$$[f_n]_{-\Phi}^{\Phi} = \lim_{r \rightarrow 0} (f_{n1}(r, +\Phi) - f_{n2}(r, -\Phi)), \quad \Delta_{nj} = \alpha_{nj} \bar{\delta}_{nj} - \beta_{nj} \bar{\gamma}_{nj}, \quad n = 1, 2,$$

и  $j = 1, 2$  для граней  $\varphi = +\Phi$  и  $\varphi = -\Phi$ , соответственно.

В некоторых случаях КУ могут быть интерпретированы с физической точки зрения и выражают непрерывность эффективных токов на ребре. В общем случае этот вопрос не исследован с достаточной степенью подробности.

В случае нормально падающей плоской волны ( $\beta = \pi/2$ ) векторная задача (5.5), (5.3)—(5.4), (5.6), (5.7), (5.8) и (5.9) для пары  $(E_z, H_z)$  может быть расщеплена на две независимых задачи для  $E_z$  и  $H_z$  компонент по-отдельности. Действительно, если  $\beta = \pi/2$ , то  $\gamma_0 = 0$ , и в результате ОБИГУ и КУ сводятся к:

$$(\alpha_{2j}^0 + \beta_{2j}^0 \partial_{x^2}^2) \frac{\partial E_z}{\partial y} + (\gamma_{2j}^0 + \delta_{2j}^0 \partial_{x^2}^2) E_z \Big|_{S_j} = 0, \quad j = 1, 2, \quad (5.10)$$

$$\left[ \frac{\beta_2^0}{\delta_2^0} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right]_{-\Phi}^{\Phi} = 0,$$

$$\left[ \frac{\beta_2^0 \bar{\delta}_2^0}{\Delta_2^0} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{|\delta_2^0|^2}{\Delta_2^0} \frac{\partial E_z}{\partial x} \right]_{-\Phi}^{\Phi} = 0, \quad (5.11)$$

где  $\alpha_{2j}^0 = \alpha_{2j}|_{\gamma_0=0}$ ,  $\beta_{2j}^0 = \beta_{2j}|_{\gamma_0=0}$ ,  $\gamma_{2j}^0 = \gamma_{2j}|_{\gamma_0=0}$ ,  $\delta_{2j}^0 = \delta_{2j}|_{\gamma_0=0}$ ,  $j = 1, 2$ . Гранично-контактные условия для  $H_z$ -компоненты аналогичны (5.10) — (5.11).

Заметим, что рассматриваемая задача сложнее изучавшихся в предыдущих главах, так как содержит граничное условие порядка, превышающего порядок уравнения (именно в связи с этим в постановке задачи и появились дополнительные контактные условия в особых точках границы). Однако, доказательство теоремы единственности возможно и в этом случае, на чем мы не останавливаемся, поскольку нашей целью является продемонстрировать применимость метода Зоммерфельда-Малюжинца к построению точного решения задачи.

## 5.2 Построение точного решения

Ограничимся построением  $z$ -компоненты электрического поля, т.е. решения задачи, состоящей из уравнения Гельмгольца на функцию  $E_z(r, \varphi)$ , удовлетворяющего граничным и контактными условиям (5.10)—(5.11), условиям на ребре (5.6), условиям на бесконечности (5.7), и возбуждаемого нормально падающей плоской волной

$$E_z^i = D_1 \exp(-ik_0 r \cos(\varphi - \varphi_0)). \quad (5.12)$$

Ищем решение в виде интеграла Зоммерфельда (2.37)

$$E_z(kr, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} s(\alpha + \varphi) e^{-ikr \cos \alpha} d\alpha. \quad (5.13)$$

Подставим интеграл (5.13) в ОБИГУ (5.10) и используем теорему Малюжинца из главы 2. Это приводит к системе функциональных уравнений Малюжинца для неизвестной спектральной функции  $s(\alpha)$

$$\begin{aligned} P_j(\alpha, \chi) s(\alpha - (-1)^j \Phi) - P_j(-\alpha, \chi) s(-\alpha - (-1)^j \Phi) = \\ = \sin \alpha (D_0^j + E_0^j \cos \alpha + F_0^j \cos^2 \alpha), \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (5.14)$$

где  $P_j(\alpha, \chi)$  — полиномы по  $\sin \alpha$ ,

$$P_j(\alpha, \chi) = \prod_{\nu=1}^3 ((-1)^{j+1} \sin \alpha - (-1)^\nu \sin \chi_\nu^j), \quad * \quad (5.15)$$

или

$$\begin{aligned} P_j(\alpha, \chi) = (-1)^{j+1} (\sin^3 \alpha + (-1)^j i \delta_{2j}^0 / (k \beta_{2j}^0) \sin^2 \alpha + \\ + (\alpha_{2j}^0 - \beta_{2j}^0 k^2) / (k \beta_{2j}^0) \sin \alpha + (-1)^j i (\gamma_{2j}^0 - \delta_{2j}^0 k^2) / (k^3 \beta_{2j}^0)). \end{aligned}$$

Значения  $\sin \chi_\nu^j$  выражаются через корни полиномов  $P_j(\alpha, \chi)$ ,  $j = 1, 2$ . Если коэффициенты полинома третьей степени вещественны, то имеется один вещественный корень и два комплексно сопряженных. С технической точки зрения оказывается удобным записать полином от  $\sin \alpha$  в виде разложения на множители, причем вещественные и мнимые части корней удовлетворяют неравенствам, выписанным ниже. Произвольные константы  $D_0^j, E_0^j, F_0^j$  должны быть определены в процессе решения.

Как обсуждалось в предыдущей главе, решение  $s(\alpha)$  функциональных уравнений следует искать в специальном классе мероморфных функций. А именно, выражение

$$s(\alpha) - D_1 / (\alpha - \varphi_0)$$

должно быть регулярно в полосе  $\Pi_\epsilon = \{ \alpha : |\operatorname{Re} \alpha| < \Phi + \epsilon \}$  для любых малых  $\epsilon > 0$ . Как отмечалось, это позволяет удовлетворить условиям на бесконечности. Для удовлетворения условию Мейкснера следует считать, что

$$|s(\alpha) - s(i\infty)| \leq \text{const} \exp(-\delta |\operatorname{Im} \alpha|), \quad \delta > 0, \quad |\operatorname{Im} \alpha| \rightarrow \infty, \quad (5.16)$$

где без ограничения общности (см. §4.1) можно считать, что  $s(i\infty) = -s(-i\infty)$ . Это условие позволяет получить

$$F_0^j \equiv 0, \quad j = 1, 2. \quad (5.17)$$

Действительно, устремляя  $\operatorname{Im} \alpha \rightarrow \infty$  в (5.14) и приравнявая старшие члены, легко получить равенство (5.17).

Мы считаем, что

$$0 < \operatorname{Re} \chi_1^j \leq \pi/2, \quad 0 \leq \operatorname{Re} \chi_2^j \leq \pi/2, \quad 0 < \operatorname{Re} \chi_3^j \leq \pi/2, \quad (5.18)$$

$$\operatorname{Im} \chi_1^j > 0, \quad \operatorname{Im} \chi_2^j < 0, \quad \operatorname{Im} \chi_3^j > 0.$$

---

\*При выводе уравнений (5.14) и (5.15) мы приняли во внимание, что применение оператора  $(-1)^j \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi = (-1)^{j+1} \Phi}$  к интегралу Зоммерфельда (5.13) соответствует умножению спектральной функции на  $(-1)^j (-ik \sin \alpha)$ , и, таким же образом, оператор  $\frac{\partial}{\partial r}$  генерирует дополнительный множитель  $(-ik \cos \alpha)$  для  $s(\alpha)$  в (5.13).

Когда контур  $\gamma$  в (5.13) деформируется в перевальные контура  $SP_{\pm\pi}$ , несколько полюсов функции  $s(\alpha)$  могут быть захвачены. Среди них, помимо полюсов, относящихся к падающей и отраженной волнам, имеются полюсы, которым в силу теоремы о вычетах отвечают плоские волны с комплексной фазовой функцией. Некоторые из этих волн экспоненциально растут при  $kr \rightarrow \infty$ , и, следовательно, нарушают условие на бесконечности.

Из уравнения (5.14) для  $j = 1$  имеем

$$s(z + 2\Phi) = \frac{\prod_{\nu=1}^3 (-\sin(z + \Phi) - (-1)^\nu \sin \chi_\nu^1)}{\prod_{\nu=1}^3 (\sin(z + \Phi) - (-1)^\nu \sin \chi_\nu^1)} s(-z) + \\ + \frac{\sin(z + \Phi) (D_0^1 + E_0^1 \cos(z + \Phi))}{\prod_{\nu=1}^3 (\sin(z + \Phi) - (-1)^\nu \sin \chi_\nu^1)}.$$

Так как разность  $s(-z) - D_1/(-z - \varphi_0)$  регулярна в полосе  $\operatorname{Re} z \in [-\Phi, \pi - \Phi]$ , из последнего уравнения заключаем, что полюс

$$\alpha_1 = \Phi + \chi_2^1 \in [\Phi, \pi + \Phi]$$

захватывается (см. (5.18)) при деформации контура интегрирования  $\gamma$  в  $SP_{\pm\pi}$ . Эти вклады дают экспоненциальный рост, упомянутый выше. Анализ уравнения (5.14) для  $j = 2$  приводит к определению второго “паразитного” полюса

$$\alpha_2 = -\Phi - \chi_2^2 \in [-\pi - \Phi, -\Phi].$$

Приравнивая нулю вклады от вычетов в этих полюсах, мы приходим к необходимым условиям

$$\operatorname{res}_{\alpha=\alpha_1} s(\alpha) = 0, \quad \operatorname{res}_{\alpha=\alpha_2} s(\alpha) = 0. \quad (5.19)$$

Равенства (5.19) представляют собой дополнительные условия для определения постоянных  $D_0^j, E_0^j$ , в правой части (5.14). Мы уже вычислили постоянные  $F_0^j$  в (5.17). Для получения двух других условий мы обратимся к КУ (5.11).

Введем величины

$$M_j(r, \phi) = \beta_{2j}^0 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \right) + (-1)^j \delta_{2j}^0 \frac{\partial E_z}{\partial r} \\ N_j(r, \phi) = \beta_{2j}^0 \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi}. \quad (5.20)$$

Тогда контактные условия (5.11) запишутся в виде

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{N_1(r, \Phi)}{\delta_{21}^0} + \frac{N_2(r, -\Phi)}{\delta_{22}^0} \right) = 0 \quad (5.21) \\ \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{\overline{\delta_{21}^0}}{\overline{\Delta_{21}^0}} M_1(r, \Phi) - \frac{\overline{\delta_{22}^0}}{\overline{\Delta_{22}^0}} M_2(r, -\Phi) \right) = 0.$$

Выражения (5.20) для  $M_j, N_j$  – это линейные формы волнового поля  $E_z$ . Операторы, определенные в (5.20), могут быть интерпретированы как эффективные электромагнитные моменты по аналогии с теми, которые появляются в теории пластин и оболочек. Тем

самым, соотношения (5.21) интерпретируются как условия непрерывности эффективных токов.

В свою очередь, ОБИГУ (5.10) также могут быть записаны в терминах  $M_j, N_j$

$$(-1)^j \left( \frac{\partial}{\partial r} M_j + \alpha_{2j}^0 \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} + (-1)^j \gamma_{2j}^0 E_z \right)_{\varphi=(-1)^{j+1}\Phi} = 0 \quad (5.22)$$

$$(-1)^j \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} N_j + \alpha_{2j}^0 \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} + (-1)^j \delta_{2j}^0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + (-1)^j \gamma_{2j}^0 E_z \right)_{\varphi=(-1)^{j+1}\Phi} = 0.$$

Представим моменты  $M_j, N_j$  в виде интегралов Зоммерфельда:

$$M_j(kr, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} m(\alpha + \varphi) e^{-ikr \cos \alpha} d\alpha, \quad (5.23)$$

$$N_j(kr, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} n(\alpha + \varphi) e^{-ikr \cos \alpha} d\alpha.$$

Подставляя (5.23) в (5.22) и используя теорему Малюжинца, получим

$$\begin{aligned} m_j(\alpha - (-1)^j \Phi) - m_j(-\alpha - (-1)^j \Phi) &= -\alpha_{2j}^0 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} (s(\alpha - (-1)^j \Phi) + \\ &+ s(-\alpha - (-1)^j \Phi)) + (-1)^j \gamma_{2j}^0 \frac{1}{i k \cos \alpha} (s(\alpha - (-1)^j \Phi) - \\ &- s(-\alpha - (-1)^j \Phi)) + 2k^2 \beta_{2j}^0 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} (D_0^j + E_0^j \cos \alpha). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Используя симметрию  $\gamma$  в (5.23), проведем интегрирование по  $\gamma_+$  и подставим выражение (5.24) в (5.23). Затем, полагая  $r \rightarrow 0$  в интеграле Зоммерфельда и принимая во внимание (5.16), вычислим  $M_j(0, (-1)^{j+1}\Phi)$ :

$$M_j(0, (-1)^{j+1}\Phi) = (-2) \beta_{2j}^0 k_0^2 D_0^j, \quad j = 1, 2. * \quad (5.25)$$

Аналогично, моменты  $N_j, j = 1, 2$ , вычисляются в виде

$$N_j(0, (-1)^{j+1}\Phi) = 2i \beta_{2j}^0 k_0 E_0^j + (-1)^{j+1} 2i \delta_{2j}^0 s(i\infty). \quad (5.26)$$

Мы подставим равенства (5.25) и (5.26) в КУ (5.21) и получим два линейных уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\beta_{21}^0}{\delta_{21}^0} E_0^1 + \frac{\beta_{22}^0}{\delta_{22}^0} E_0^2 &= 0, \\ \frac{\bar{\delta}_{21}^0 \beta_{21}^0}{\Delta_{21}^0} D_0^1 - \frac{\bar{\delta}_{22}^0 \beta_{22}^0}{\Delta_{22}^0} D_0^2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Функциональные уравнения (5.14), дополненные условиями (5.20), (5.27), позволяют найти  $s(\alpha)$  в замкнутой форме.

\*При выводе (5.25) мы воспользовались очевидным тождеством

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+} e^{-ikr \cos \alpha} \sin \alpha / \cos \alpha d\alpha = -1.$$

Используя результаты §4.5.2, естественно искать решения уравнений (5.14), сделав подстановку

$$s(\alpha) = \Psi_s(\alpha) \sigma_{\varphi_0}(\alpha) U(\alpha), \quad (5.28)$$

где использованы следующие обозначения (из того же параграфа):

$$\Psi_s(\alpha) = \frac{\Psi(\alpha, \chi_1^1) \Psi(\alpha, \chi_3^1) \Psi(\alpha - 2\Phi, \chi_1^2) \Psi(\alpha - 2\Phi, \chi_3^2)}{\Psi(\alpha, \chi_2^1) \Psi(\alpha - 2\Phi, \chi_2^2)}, \quad (5.29)$$

$$\Psi(z, \chi) = \psi_\Phi(z + \Phi + \pi/2 - \chi) \psi_\Phi(z + \Phi - \pi/2 + \chi),$$

$\psi_\Phi(z)$  – функция Малюжинца,

$$\sigma_{\varphi_0}(\alpha) = \mu \cos \mu \varphi_0 / (\sin \mu \alpha - \sin \mu \varphi_0). \quad (5.30)$$

Мероморфная функция  $\Psi_s(\alpha)$  является решением однородных уравнений (5.14) с тривиальной правой частью

$$P_j(\alpha, \chi) \Psi_s(\alpha - (-1)^j \Phi) - P_j(-\alpha - (-1)^j \Phi) \Psi_s(-\alpha - (-1)^j \Phi) = 0$$

и не имеет нулей и полюсов в полосе  $\Pi_\epsilon$ , то есть является основным решением однородных уравнений.

Выражение (5.30) для  $\sigma_{\varphi_0}(\alpha)$  показывает, что  $\alpha = \varphi_0$  есть единственный полюс  $\sigma_{\varphi_0}(\alpha)$  в полосе  $\Pi_\epsilon$ . Вычет подынтегрального выражения в (5.13) воспроизводит падающую плоскую волну (5.12). Подставив (5.28) в (5.14), получим систему функциональных уравнений с постоянными коэффициентами, которой удовлетворяет функция  $U(\alpha)$ :

$$U(\alpha - (-1)^j \Phi) - U(-\alpha - (-1)^j \Phi) = h_0^j(\alpha), \quad j = 1, 2, \quad (5.31)$$

где

$$h_0^j(\alpha) = \frac{\sin \alpha (D_0^j + E_0^j \cos \alpha)}{\Psi_s(\alpha - (-1)^j \Phi) \sigma_{\varphi_0}(-\alpha - (-1)^j \Phi) P_j(\alpha, \chi)}.$$

Постоянные в  $h_0^j(\alpha)$  являются решениями линейных уравнений (5.27). Как следует из (5.19) и (5.28), мероморфная функция  $U(\alpha)$  должна иметь нули в точках  $\alpha_j = (-1)^{j+1}(\Phi + \chi_2^j)$ , то есть,

$$U(\alpha_j) = 0, \quad j = 1, 2. \quad (5.32)$$

Решение уравнений (5.31) строится посредством техники, описанной в предыдущей главе. Принимая во внимание равенство

$$\lim_{\text{Im } \alpha \rightarrow +\infty} \Psi_s(\alpha) \sigma_{\varphi_0}(\alpha) = (-i) (\mu/2) |\psi_\Phi(\pi/2)|^4 \cos(\mu \varphi_0)$$

мы заключаем, что

$$h_0^j(\alpha) = O(1/\sin \alpha), \quad |\text{Im } \alpha| \rightarrow +\infty.$$

Решение ищется в классе мероморфных функций, которые регулярны в полосе  $\bar{\Pi}_\epsilon$  и имеют асимптотику (см. (5.16))

$$U(\alpha) = U(i\infty) + O(\exp(-\delta |\text{Im } \alpha|)), \quad \delta > 0, \quad |\text{Re } \alpha| \leq \pi + \Phi.$$

Введем выражение

$$\sigma^{(0)}(\alpha; h_0^j) = \frac{i}{8\Phi} \int_{iR} d\tau \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} h_0^j(\tau) \sigma_j(\tau, \alpha), \quad (5.33)$$

где  $h_0^j(\alpha)$  определены в (5.31)

$$\sigma_j(\tau, z) = \frac{\sin \mu \tau}{\cos \mu \tau + (-1)^j \sin \mu \alpha}.$$

Как следует из результатов главы 4, в полосе  $\bar{\Pi}$  решение  $U$  (5.31) принимает вид

$$U(\alpha) = \sigma^{(0)}(\alpha; h) - \sigma^{(0)}(\varphi_0; h) - G_g, \quad \alpha \in \bar{\Pi}, \quad (5.34)$$

где  $G_g = -D_1 / \Psi_s(\varphi_0)$  постоянная. Вторым аргументом  $h$  в  $\sigma^{(0)}(\alpha; h)$  показывает, что решение (5.34) есть линейный функционал от постоянных  $D_0^j$ ,  $E_0^j$ . Эти постоянные определяются как решения системы линейных уравнений (5.27), которые дополнены условиями (5.32). Так как  $\alpha_j$  в (5.32) не принадлежит  $\bar{\Pi}$ , для преобразования (5.32) к более удобной форме, мы используем мероморфное продолжение  $U(\alpha)$  посредством функциональных уравнений (5.31). Принимая во внимание функциональные уравнения для  $\Psi_s(\varphi_0)$ , из (5.32) нетрудно получить

$$U((-1)^{j+1}(\Phi + \chi_2^j)) = U((-1)^{j+1}(-\chi_2^j + \Phi)) + \frac{(-1)^{j+1} \sin \chi_2^j (D_0^j + E_0^j \cos \alpha)}{\Psi_s((-1)^{j+1}(-\chi_2^j + \Phi)) \sigma_{\varphi_0}((-1)^{j+1}(\chi_2^j + \Phi)) P_j((-1)^j \chi_2^j, \chi)}, \quad j = 1, 2. \quad (5.35)$$

Затем мы используем выражение (5.35) для  $U((-1)^{j+1}(-\chi_2^j + \Phi))$  и, вместе с уравнениями (5.27), получим систему линейных уравнений для неизвестных постоянных  $E_0^j$ ,  $D_0^j$

$$Z(\chi) X_0 = Y_0, \quad (5.36)$$

где

$$X_0 = \begin{Bmatrix} D_0^1 \\ E_0^1 \\ D_0^2 \\ E_0^2 \end{Bmatrix}, \quad Y_0 = \begin{Bmatrix} G_g \\ G_g \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (5.37)$$

$$Z(\chi) = \begin{Bmatrix} \zeta_{11}(\chi) & \xi_{11}(\chi) & \zeta_{12}(\chi) & \xi_{12}(\chi) \\ \zeta_{21}(\chi) & \xi_{21}(\chi) & \zeta_{22}(\chi) & \xi_{22}(\chi) \\ 0 & \beta_{21}^0 / \delta_{21}^0 & 0 & \beta_{22}^0 / \delta_{22}^0 \\ \frac{\delta_{21}^0 \beta_{21}^0}{\Delta_{21}^0} & 0 & -\frac{\delta_{22}^0 \beta_{22}^0}{\Delta_{22}^0} & 0 \end{Bmatrix}, \quad (5.38)$$

и

$$\zeta_{11}(\chi) = \frac{i}{8\Phi} \int_{iR} \frac{\sin \tau (\sigma_1(\tau, -\chi_2^1 + \Phi) - \sigma_1(\tau, \varphi_0))}{\Psi_s(\tau + \Phi) \sigma_{\varphi_0}(\tau + \Phi) P_1(\tau, \chi)} d\tau + \frac{\sin \chi_2^1}{\Psi_s(-\chi_2^1 + \Phi) \sigma_{\varphi_0}(\chi_2^1 + \Phi) P_1(-\chi_2^1, \chi)},$$

$$\begin{aligned}
\xi_{11}(\chi) &= \frac{i}{8\Phi} \int_{iR} \frac{\sin \tau \cos \tau (\sigma_1(\tau, -\chi_2^1 + \Phi) - \sigma_1(\tau, \varphi_0))}{\Psi_s(\tau + \Phi) \sigma_{\varphi_0}(\tau + \Phi) P_1(\tau, \chi)} d\tau + \\
&\quad + \frac{\sin \chi_2^1 \cos \chi_2^1}{\Psi_s(-\chi_2^1 + \Phi) \sigma_{\varphi_0}(\chi_2^1 + \Phi) P_1(-\chi_2^1, \chi)}, \quad (5.39) \\
\zeta_{12}(\chi) &= -\frac{i}{8\Phi} \int_{iR} \frac{\sin \tau (\sigma_2(\tau, -\chi_2^1 + \Phi) - \sigma_2(\tau, \varphi_0))}{\Psi_s(\tau - \Phi) \sigma_{\varphi_0}(\tau - \Phi) P_2(\tau, \chi)} d\tau, \\
\xi_{12}(\chi) &= -\frac{i}{8\Phi} \int_{iR} \frac{\sin \tau \cos \tau (\sigma_2(\tau, -\chi_2^1 + \Phi) - \sigma_2(\tau, \varphi_0))}{\Psi_s(\tau - \Phi) \sigma_{\varphi_0}(\tau - \Phi) P_2(\tau, \chi)} d\tau.
\end{aligned}$$

Интегралы в (5.39) называются контактными интегралами.

Чтобы получить выражения для  $\zeta_{22}(\chi)$ ,  $\xi_{22}(\chi)$ , необходимо сделать замены  $\Phi \rightarrow -\Phi$ ,  $\chi_2^1 \rightarrow -\chi_2^1$ ,  $P_1 \rightarrow P_2$ ,  $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2$  в формулах (5.39) для  $\zeta_{11}$ ,  $\xi_{11}$ , соответственно. Аналогично, для определения  $\zeta_{21}$  и  $\xi_{21}$  необходимо выполнить замены  $\Phi \rightarrow -\Phi$ ,  $\chi_2^1 \rightarrow -\chi_2^1$ ,  $P_2 \rightarrow P_1$ ,  $\sigma_2 \rightarrow \sigma_1$  в выражениях (5.39) для  $\zeta_{12}$ ,  $\xi_{12}$ , соответственно. Интегралы в (5.39) экспоненциально сходятся.

Детерминант матрицы (5.38) не равен нулю, и система уравнений (5.36) однозначно разрешима. Действительно, пусть  $\det Z(\chi) = 0$ , тогда система (5.36) с нулевой правой частью  $Y_0 = 0$  ( $G_g = 0$ ) имеет нетривиальное решение. Как следствие, мы построим ненулевое решение  $E_z$  в виде интеграла Зоммерфельда, удовлетворяющее всем условиям задачи дифракции при  $G_g \equiv 0$  и  $E_z^i = 0$ . Это противоречит единственности решения. Очевидно, что решение  $X_0$  в (5.37) находится в явной форме

$$X_0 = Z^{-1}(\chi) Y_0. \quad (5.40)$$

Громоздкие формулы для  $D_0^j$ ,  $E_0^j$  мы опускаем. Функция  $s(z)$  принимает вид

$$s(z) = \Psi_s(z) \sigma_{\varphi_0}(z) (\sigma^{(0)}(z; h) - \sigma^{(0)}(\varphi_0; h) - G_g), \quad (5.41)$$

где  $\sigma^{(0)}$ ,  $h_0^j$  определены в (5.31), (5.33), и постоянные  $D_0^j$ ,  $E_0^j$  в  $h_0^j$  заданы формулой (5.40).

## 5.3 Дальнее поле

### 5.3.1 Неравномерная асимптотика

Построения неравномерной и равномерной асимптотики решения идеологически близки вычислениям дальнего поля в предыдущих главах, что неудивительно, так как в любом случае мы используем равномерный или локальный вариант метода перевала. Тем не менее, в данной главе исследуется более сложная задача, поэтому мы продемонстрируем уже известные читателю приемы вычисления асимптотики в новых условиях, опуская, однако, некоторые технические детали.

Напомним, что мы считаем  $\Phi > \pi/2$  и что при деформации контура интегрирования  $\gamma$  в перевальные контура  $SP_{\pm}$  несколько полюсов подынтегрального выражения (5.13) могут быть пересечены. Полюс  $\alpha_0 = \varphi_0$  отвечает вкладу падающей волны,  $\text{res}_{\alpha_0} s(\alpha) = D_1$ ; полюса  $\alpha_n = (-1)^n 2\Phi - \varphi_0$ ,  $n = 1, 2$ , пересекаются при  $|\varphi - (-1)^n 2\Phi + \varphi_0| < \pi$  и определяет волны, отраженные от граней  $\pm\Phi$ ; полюса  $\alpha_n^k = (-1)^{n+k}(\pi + \Phi + (-1)^{n+1}\chi_n^k)$  пересекаются при  $(-1)^{n+1}\text{Re } \chi_n^k < (-1)^n \text{gd}(\text{Im } \chi_n^k)$ ,  $n = 1, 2, 3$ ,  $k = 1, 2$ . Эти полюса определяют неоднородные волны с комплексной фазовой функцией. Среди этих волн есть

поверхностные волны, распространяющиеся вдоль граней клина и затухающие с увеличением расстояния от ребра. Принимая во внимание упомянутые полюса, которые находятся в полосе

$$-\Phi - \pi - \text{gd}(\text{Im } \alpha) \leq \text{Re } \alpha \leq \pi + \Phi - \text{gd}(\text{Im } \alpha),$$

и применяя теорему о вычетах к интегралу (5.13), мы получим неравномерную асимптотику дальнего поля ( $kr \rightarrow \infty$ ) вне клина:

$$\begin{aligned} E_z(kr, \varphi) &= D_1 e^{-i kr \cos(\varphi - \varphi_0)} \theta(\pi - |\varphi - \varphi_0|) + \\ &+ \sum_{n=1}^2 R_n e^{-i kr \cos(\varphi + \varphi_0 + (-1)^n 2\Phi)} \theta(\pi - 2\Phi - (-1)^n |\varphi + \varphi_0|) + \\ &+ \sum_{j=1}^2 \sum_{n=1}^2 r_n^j e^{i kr \cos(\Phi + (-1)^{n+1} \chi_n^j + (-1)^j \varphi)} \times \theta((-1)^n [\text{Re } \chi_n^j + \text{gd}(\text{Im } \chi_n^j)] - \Phi - (-1)^j \varphi) + \\ &+ E_z^{sp}(kr, \varphi) \end{aligned} \quad (5.42)$$

где  $\theta(\zeta)$  – функция Хевисайда,

$$R_n = \text{res}_{\alpha_n} s(\alpha) = -D_1 \frac{P_n(\varphi_0 + (-1)^n \Phi, \chi)}{P_n(-(\varphi_0 + (-1)^n \Phi), \chi)}, \quad n = 1, 2$$

– коэффициенты отражения от граней клина,

$$\begin{aligned} r_n^1 &= \text{res}_{\alpha_n^1} s(\alpha) = \\ &= \frac{(-1)^{n+1} \sin \chi_n^1 (D_0^1 - E_0^1 \cos \chi_n^1) - P_1(-\pi + (-1)^n \chi_n^1, \chi) s(-\pi + \Phi + (-1)^n \chi_n^1)}{\cos \chi_n^1 \prod_{\nu=1, \nu \neq n}^3 ((-1)^n \sin \chi_n^1 - (-1)^\nu \sin \chi_n^1)}, \\ r_n^2 &= \text{res}_{\alpha_n^2} s(\alpha) = \\ &= \frac{(-1)^{n+1} \sin \chi_n^2 (D_0^2 - E_0^2 \cos \chi_n^2) + P_2(\pi - (-1)^n \chi_n^2, \chi) s(\pi - \Phi - (-1)^n \chi_n^2)}{\cos \chi_n^2 \prod_{\nu=1, \nu \neq n}^3 ((-1)^n \sin \chi_n^2 - (-1)^\nu \sin \chi_n^2)}, \\ &n = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

– коэффициенты возбуждения неоднородных плоских волн, затухающих на бесконечности экспоненциально,

$$E_z^{sp}(kr, \varphi) = \frac{s(-\pi + \varphi) - s(\pi + \varphi)}{\sqrt{2\pi kr}} e^{i(kr + \pi/4)} \left( 1 + O\left(\frac{1}{kr}\right) \right)$$

– вклад от седловых точек  $\pm\pi$ , который описывает цилиндрическую волну от ребра клина.

Как упоминалось в §3.2, величину

$$D_E(\varphi, \varphi_0) = s(-\pi + \varphi) - s(\pi + \varphi) \quad (5.43)$$

называют диаграммой направленности или дифракционным коэффициентом, имеющим важное значение в различных приложениях. \*

\*Используются также термины диаграмма рассеяния, амплитуда рассеяния, реже – коэффициент возбуждения цилиндрической волны.

### 5.3.2 Равномерные формулы

Асимптотика (5.42) неравномерна по углу наблюдения  $\varphi$ : диаграмма направленности (5.43) имеет сингулярности на границах свет/тень падающих и отраженных волн. Пусть (для простоты)  $\varphi_0 \in (\pi - \Phi, \Phi)$ , т.е. только одна из граней клина, а именно  $\varphi = \Phi$ , освещается падающей волной. Тогда границы света-тени для падающей и отраженной волн есть, соответственно,  $\varphi = \varphi_0 - \pi$  и  $\varphi = 2\Phi - \varphi_0 - \pi$ . Пренебрегая на фоне степенной погрешности  $O\left(\frac{1}{(kr)^{3/2}}\right)$  ( $kr \rightarrow \infty$ ) неоднородными волнами, убывающими на бесконечности экспоненциально, перепишем неравномерную асимптотику (5.42):

$$\begin{aligned} E_z(kr, \varphi) = & D_1 e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} \theta(\pi - |\varphi - \varphi_0|) + \frac{s(\varphi - \pi) e^{ikr + i\pi/4}}{\sqrt{2\pi kr}} + \\ & + R_1 e^{-ikr \cos(\varphi + \varphi_0 - 2\Phi)} \theta(\pi - 2\Phi + \varphi + \varphi_0) - \frac{s(\pi + \varphi)}{\sqrt{2\pi kr}} e^{ikr + i\pi/4} + \\ & + O\left(\frac{1}{(kr)^{3/2}}\right). \end{aligned} \quad (5.44)$$

Обратимся теперь к выводу равномерной асимптотики  $E_z$ . Волновое поле в переходной зоне на больших расстояниях описывается интегралом Френеля (см. гл.3 и приложение I)

$$\mathcal{F}(x) = \frac{1}{\sqrt{i\pi}} \int_{-\infty}^x e^{it^2} dt,$$

асимптотика которого различна при  $x \rightarrow \infty$  и  $x \rightarrow -\infty$ .

Начнем с равномерной формулы, заменяющей сумму третьего и четвертого слагаемых в (5.44) (последнее имеет особенность на границе свет/тень отраженной волны,  $\pi + \varphi = 2\Phi - \varphi_0$ ). Используя эвристические соображения (см. §3.2), напишем вместо этой суммы

$$R_1 e^{-ikr \cos(2\Phi - \varphi - \varphi_0)} \mathcal{F}\left(\sqrt{2kr} \cos \frac{2\Phi - \varphi - \varphi_0}{2}\right) + \frac{e^{ikr + i\pi/4}}{\sqrt{2\pi kr}} C_0(\varphi, \varphi_0). \quad (5.45)$$

Неизвестный коэффициент  $C_0$  найдем посредством асимптотического “сшивания” (5.45) с (5.44), когда точка наблюдения в (5.45) переходит в “глубокую тень” по отношению к отраженной волне, т.е. когда  $\sqrt{2kr} \cos[(2\Phi - \varphi - \varphi_0)/2] \rightarrow -\infty$ .<sup>\*</sup> При замене интеграла Френеля асимптотикой (II 1.8) сумма (5.45) переходит в

$$\left(\frac{(-R_1)}{2 \cos\left(\frac{2\Phi - \varphi - \varphi_0}{2}\right)} + C_0(\varphi, \varphi_0)\right) \frac{e^{ikr + i\pi/4}}{\sqrt{2\pi kr}} + O\left(\frac{1}{(kr)^{3/2}}\right). \quad (5.46)$$

Из сравнения (5.46) с (5.44) и учитывая, что

$$s(\pi + \varphi) = \mu \frac{\cos \mu \varphi_0 \Psi_s(\varphi + \pi) U(\varphi + \pi)}{\sin \mu(\varphi + \pi) - \sin \mu \varphi_0}, \quad R_1 = -D_1 \frac{P_1(\varphi_0 - \Phi, \chi)}{P_1(\Phi - \varphi_0, \chi)},$$

<sup>\*</sup>Заметим, что

$$\sqrt{2kr} \left| \cos\left(\frac{2\Phi - \varphi - \varphi_0}{2}\right) \right| = \sqrt{kr[1 + \cos(2\Phi - \varphi - \varphi_0)]} = \sqrt{k(S_c - S_i)},$$

где  $S_c = r$  и  $S_i = -r \cos(2\Phi - \varphi - \varphi_0)$  — соответственно фазовые функции (эйконалы) цилиндрической и отраженной волн.

находим

$$\begin{aligned} C_0(\varphi, \varphi_0) &= \frac{R_1}{2 \cos\left(\frac{2\Phi - \varphi - \varphi_0}{2}\right)} - s(\pi + \varphi) = \\ &= -\frac{D_1}{2 \cos\left(\frac{2\Phi - \varphi - \varphi_0}{2}\right)} \frac{P_1(\varphi_0 - \Phi, \chi)}{P_1(\Phi - \varphi_0, \chi)} - \frac{\mu \cos \mu\varphi_0 \Psi_s(\varphi + \pi) U(\varphi + \pi)}{\sin \mu(\varphi + \pi) - \sin \mu\varphi_0}. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Дробные выражения в (5.47) имеют особенность при  $\pi + \varphi = 2\Phi - \varphi_0$ , однако сингулярности сокращаются. Это обстоятельство легко проверяется посредством равенства

$$\Psi_s(2\Phi - \varphi_0) U(2\Phi - \varphi_0) = D_1 P_1(\varphi_0 - \Phi, \chi) / P_1(\Phi - \varphi_0, \chi).$$

В области, освещенной отраженной волной (т.е. при  $kr \cos[(2\Phi - \varphi - \varphi_0)/2] \rightarrow +\infty$ ), замена в (5.45) интеграла Френеля асимптотикой также согласуется с суммой третьего и четвертого слагаемых в (5.44). Иными словами, в переходной зоне интеграл Френеля играет роль функции пограничного слоя.

Рассуждая совершенно аналогично, выводим равномерную по углу  $\varphi$  формулу, заменяющую сумму первых двух слагаемых в (5.44) (во втором из которых функция  $s(\varphi - \pi)$  имеет сингулярность в направлении границы свет-тень падающей волны,  $\varphi + \pi = \varphi_0$ ). Окончательно, равномерная асимптотическая при  $kr \rightarrow \infty$  формула выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} E_z(kr, \varphi) &= D_1 e^{-i kr \cos(\varphi - \varphi_0)} \mathcal{F}\left(\sqrt{2kr} \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2}\right) + \\ &+ R_1 e^{-i kr \cos(2\Phi - \varphi - \varphi_0)} \mathcal{F}\left(\sqrt{2kr} \cos \frac{2\Phi - \varphi - \varphi_0}{2}\right) + \\ &+ \left(\frac{R_1}{2 \cos\left(\frac{2\Phi - \varphi - \varphi_0}{2}\right)} - \frac{\mu \cos \mu\varphi_0 \Psi_s(\varphi + \pi) U(\varphi + \pi)}{\sin \mu(\varphi + \pi) - \sin \mu\varphi_0}\right) \frac{e^{i kr + i\pi/4}}{\sqrt{2\pi k r}} + \\ &+ \left(\frac{D_1}{2 \cos\left(\frac{\varphi - \varphi_0}{2}\right)} + \frac{\mu \cos \mu\varphi_0 \Psi_s(\varphi - \pi) U(\varphi - \pi)}{\sin \mu(\varphi - \pi) - \sin \mu\varphi_0}\right) \frac{e^{i kr + i\pi/4}}{\sqrt{2\pi k r}} + \\ &+ O\left(\frac{1}{(kr)^{3/2}}\right), \quad \pi - \Phi < \varphi_0 \leq \Phi. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Применение формулы (5.48) для численного анализа элементарно, некоторые трудности могут возникнуть лишь в связи с интегралом Френеля и функциями  $\Psi_s(\alpha)$ ,  $U(\alpha)$  (определенными формулами (5.29) и (5.34)). В настоящее время алгоритмы вычисления этих специальных функций хорошо разработаны.



## Глава 6

# Дифракция волн во внешности клина, разделенной тонким полупрозрачным слоем

Как и в предыдущей главе, рассматриваемая задача возникает из приложений электромагнитной теории. Однако, в отличие от задач, рассмотренных ранее, теперь уравнения Малюжинца будут иметь векторный характер. Хотя явное решение в квадратурах для спаренных уравнений Малюжинца найти не удастся, излагаемый в настоящей главе\* подход является относительно простым с аналитической точки зрения, самосогласованным, может быть эффективно использован для получения численных результатов и имеет более общее значение, так как может быть применен и к другим аналогичным задачам дифракции в угловой области. Рассматриваемая задача занимает промежуточное положение в относительной шкале сложности между точно решаемыми (типа задачи Малюжинца) и более трудными, с двумя скоростями распространения (например, дифракция на прозрачном или упругом клине).

Именно, рассматривается задача дифракции на клине, внешность которого разделена пополам тонкой диэлектрической полуплоскостью. Применяя технику Зоммерфельда-Малюжинца, сводим решение к определению пары спектральных функций, удовлетворяющих системе уравнений Малюжинца. Исключая одну из неизвестных функций, для второй получаем разностное функциональное уравнение второго порядка. Затем, уравнение преобразуется к интегральному уравнению второго рода. Для этого, в частности, используется обобщение функции Малюжинца  $\chi_f(\alpha)$ , а также развитая ранее теория  $\mathcal{S}$ -интегралов. Получаемое интегральное уравнение имеет фредгольмов тип, т.е. легко может быть решено численно. На основе решений этого интегрального уравнения выписывается равномерная по углу асимптотика дальнего поля, и, в частности, представляющий наибольший интерес с точки зрения приложений дифракционный коэффициент.

Изложение материала ведется без подробного пояснения некоторых технических деталей, так как мы считаем, что читатель уже достаточно освоился с основными идеями метода Зоммерфельда-Малюжинца, изложенными в предыдущих главах.

---

\*Глава написана по результатам работы [27]; там же (Appendix A) можно найти и доказательство теоремы единственности, на чем в тексте данной главы мы не останавливаемся.

## 6.1 Постановка задачи и сведение к разностным уравнениям

Пусть электрическая компонента  $E_z$  электромагнитного поля удовлетворяет уравнению Гельмгольца в угловой области  $|\varphi| < \Phi$ ,  $0 < r$  (рис.6.1), граничному условию на абсолютно проводящей грани клина  $\varphi = \Phi$

$$E_z(r, \Phi) = 0, \quad (6.1)$$

так называемым условиям полупрозрачности \* на линии  $\varphi = 0$ :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} E_z \right]^+ - \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} E_z \right]^- + i k \frac{y_s}{2} [E_z^+ + E_z^-] &= 0, \\ [E_z^+ - E_z^-] &= 0, \end{aligned} \quad (6.2)$$

где  $y_s$  – нормированный на  $1/Z_0$  поверхностный адмитанс,  $Z_0$  – импеданс свободного пространства,  $E_z^\pm$  предельные значения сверху и снизу от линии  $\varphi = 0$ ,  $r > 0$ , и импедансному граничному условию на второй грани клина  $\varphi = -\Phi$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} E_z + i \frac{k}{\eta} E_z = 0, \quad (6.3)$$

$\eta$  – нормированный (на  $Z_0$ ) поверхностный импеданс. Считаем также выполненными усло-

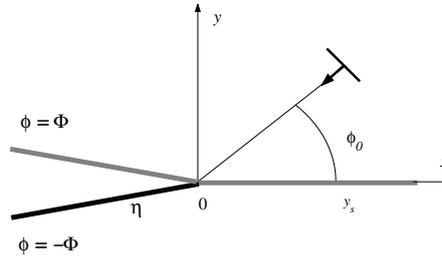


Рис. 6.1: Дифракция на тонкой диэлектрической полуплоскости, разделяющей внешность импедансного клина

вия Мейкснера  $E_z = O(r^\delta)$ ,  $\delta \geq 1/2$  и условия на бесконечности в виде принципа предельного поглощения (см. §1.7). При малой положительной мнимой части волнового числа и поглощающих гранях клина несложно доказать теорему единственности; при естественных предположениях, обсуждаемых в главе 1, теорема единственности справедлива и при вещественных  $k$ .

Решение задачи ищем в виде интегралов Зоммерфельда

$$E_z(kr, \varphi) = \frac{E_0}{2\pi i} \int_{\gamma} S_l(\alpha + \varphi) \exp(-i kr \cos \alpha) d\alpha, \quad \varphi \in [(1-l)\Phi, (2-l)\Phi], \quad l = 1, 2. \quad (6.4)$$

Здесь  $E_0$  – амплитуда падающей волны,  $\gamma$  обозначает стандартный контур Зоммерфельда.

\*Известно [22, 37], что тонкий диэлектрический слой может быть моделирован двусторонними граничными условиями, которые получаются в результате стандартной процедуры асимптотического разложения волнового поля по соответствующему малому параметру.

Подставляя (6.4) в граничные условия (6.1)-(6.3) и используя теорему Малюжинца 2.1, приходим к спаренным функциональным уравнениям

$$S_1(\alpha + \Phi) = S_1(-\alpha + \Phi), \quad (6.5)$$

$$(\sin \alpha - \sin \vartheta)[S_1(\alpha) - S_2(-\alpha)] = (\sin \alpha + \sin \vartheta)[S_2(\alpha) - S_1(-\alpha)], \quad (6.6)$$

$$S_1(\alpha) - S_2(\alpha) = S_1(-\alpha) - S_2(-\alpha), \quad (6.7)$$

$$(\sin \alpha - \sin \vartheta_1)S_2(\alpha - \Phi) = (-\sin \alpha - \sin \vartheta_1)S_2(-\alpha - \Phi), \quad (6.8)$$

где  $\sin \vartheta = y_s/2$ ,  $0 \leq \operatorname{Re} \vartheta \leq \pi/2$ ,  $\sin \vartheta_1 = \eta^{-1}$ ,  $0 \leq \operatorname{Re} \vartheta_1 \leq \pi/2$  (случаи чисто мнимого  $\vartheta$  и/или  $\vartheta_1$  будем понимать как соответствующие предельные переходы).

Как уже неоднократно указывалось, условия на бесконечности на волновое поле эквивалентны условиям регулярности в полосе на спектральные функции. Именно, необходимо считать, что

$$S_1(\alpha) - 1/(\alpha - \varphi_0) \text{ регулярна в } \Pi(0, \Phi), \quad (6.9)$$

$$S_2(\alpha) \text{ регулярна в } \Pi(-\Phi, 0)$$

(вместе с регулярностью в полосе  $\Pi(a, b) = \{\alpha \in C : a < \operatorname{Re} \alpha < b\}$  мы подразумеваем также и непрерывность вплоть до границы этой полосы). Полюс в точке  $\alpha = \varphi_0$  у функции  $S_1$  описывает падающую под углом  $\varphi_0 > 0$  плоскую волну.

В свою очередь, условие Мейкснера равносильно следующим оценкам для спектральных функций:

$$S_l(\alpha) = O(e^{\pm i\delta\alpha}), \quad \alpha \rightarrow \pm i\infty, \quad l = 1, 2. \quad (6.10)$$

## 6.2 Редукция к разностному уравнению второго порядка

Из уравнений (6.6), (6.7) имеем

$$S_1(-\alpha) = [(-\sin \alpha + \sin \vartheta)S_1(\alpha) + \sin \alpha S_2(\alpha)]/\sin \vartheta, \quad (6.11)$$

$$S_2(-\alpha) = [-\sin \alpha S_1(\alpha) + (\sin \alpha + \sin \vartheta)S_2(\alpha)]/\sin \vartheta.$$

Принимая во внимание, что граничное условие (6.5) влечет за собой  $S_1(-\alpha) = S_1(\alpha + 2\Phi)$ , из первого уравнения в (6.11) получаем

$$S_2(\alpha) = (1 - \sin \vartheta/\sin \alpha)S_1(\alpha) + (\sin \vartheta/\sin \alpha)S_1(\alpha + 2\Phi). \quad (6.12)$$

Во второе из уравнений (6.11) подставим (6.8), записанное в виде

$$S_2(-\alpha) = -\frac{\sin(\alpha - \Phi) - \sin \vartheta_1}{\sin(\alpha - \Phi) + \sin \vartheta_1} S_2(\alpha - 2\Phi),$$

и уравнение (6.12). После элементарных преобразований мы приходим к следующему разностному уравнению второго порядка:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\sin \vartheta}{\sin \alpha}\right) S_1(\alpha + 2\Phi) + \left[1 - \frac{\sin \vartheta}{\sin(\alpha - 2\Phi)}\right] \frac{\sin(\alpha - \Phi) - \sin \vartheta_1}{\sin(\alpha - \Phi) + \sin \vartheta_1} S_1(\alpha - 2\Phi) = \\ = \left[\frac{\sin \vartheta}{\sin \alpha} - \frac{\sin \vartheta}{\sin(\alpha - 2\Phi)} \frac{\sin(\alpha - \Phi) - \sin \vartheta_1}{\sin(\alpha - \Phi) + \sin \vartheta_1}\right] S_1(\alpha). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Решение исходной задачи теперь сведено к определению единственной неизвестной функции  $S_1$ , вторая неизвестная функция  $S_2$  восстанавливается при помощи (6.12).

Мы хотим преобразовать разностное уравнение (6.13) на функцию  $S_1$  в интегральное. Для этого вначале выясним вопрос о полюсах функции  $S_1(\alpha)$  в полосе  $\Pi(-\Phi, \Phi)$ . Главная часть в полюсе  $\alpha = \varphi_0 \in \Pi(0, \Phi)$  определяется падающей волной и имеет вид

$$S_1(\alpha) = \frac{1}{\alpha - \varphi_0} + \dots$$

Найдем особенности  $S_1$  в полосе  $\Pi(-\Phi, 0)$ . Из первого уравнения в (6.11) мы заключаем, что единственный полюс расположен в точке  $\alpha = -\varphi_0$ , так как  $S_2(\alpha)$  регулярна в этой полосе. Главная часть имеет вид

$$S_1(\alpha) = \frac{R}{\alpha + \varphi_0} + \dots,$$

где  $R$  — коэффициент отражения от полупрозрачной грани  $\varphi = 0$ ,

$$R = -\frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta + \sin \varphi_0}.$$

Итак, искомая функция  $S_1(\alpha)$  является решением уравнения (6.13) в классе мероморфных функций с заданными главными частями в полосе  $\Pi(-\Phi, \Phi)$ , удовлетворяющих оценке (6.10). Ниже показано, что такая функция находится однозначно.

### 6.3 Сведение задачи к фредгольмову интегральному уравнению второго рода

Для дальнейшего удобно ввести новую неизвестную функцию  $\psi(\alpha)$ :

$$\psi(\alpha) = S_1(\alpha + \Phi), \quad (6.14)$$

которая является четной, что следует из (6.5), и в полосе  $\Pi(-2\Phi, 0)$  имеет известные главные части в полюсах  $\alpha = -\Phi - \varphi_0$  и  $\alpha = -\Phi + \varphi_0$ :

$$\psi(\alpha) = \frac{R}{\alpha + \Phi + \varphi_0} + \dots, \quad \psi(\alpha) = \frac{1}{\alpha + \Phi - \varphi_0} + \dots \quad (6.15)$$

Ввиду четности  $\psi(\alpha)$ , полюса в полосе  $\Pi(-2\Phi, 2\Phi)$  и их главные части тоже известны.

Уравнение для  $\psi(\alpha)$  наследуется из (6.13) и имеет вид

$$\begin{aligned} \left[1 + \frac{\sin \vartheta}{\sin(\alpha + \Phi)}\right] \psi(\alpha + 2\Phi) + \left[1 - \frac{\sin \vartheta}{\sin(\alpha - \Phi)}\right] \frac{\sin \alpha - \sin \vartheta_1}{\sin \alpha + \sin \vartheta_1} \psi(\alpha - 2\Phi) = \\ = \left[ \frac{\sin \vartheta}{\sin(\alpha + \Phi)} - \frac{\sin \vartheta}{\sin(\alpha - \Phi)} \frac{\sin \alpha - \sin \vartheta_1}{\sin \alpha + \sin \vartheta_1} \right] \psi(\alpha). \end{aligned} \quad (6.16)$$

Разумно из (6.16) получить разностное уравнение с постоянными коэффициентами в левой части. Для этого мы представим  $\psi(\alpha)$  в виде произведения

$$\psi(\alpha) = \chi(\alpha)F(\alpha), \quad (6.17)$$

в котором функцию  $\chi(\alpha)$  будем считать мероморфным в полосе  $\Pi(-2\Phi, 2\Phi)$  решением уравнения

$$\frac{\chi(\alpha + 2\Phi)}{\chi(\alpha - 2\Phi)} = -\frac{\sin(\alpha - \Phi) - \sin \vartheta \sin \alpha - \sin \vartheta_1 \sin(\alpha + \Phi)}{\sin(\alpha + \Phi) + \sin \vartheta \sin \alpha + \sin \vartheta_1 \sin(\alpha - \Phi)}. \quad (6.18)$$

Замечательно, что решение последнего уравнения может быть найдено в терминах новой специальной функции  $\chi_\Phi(\alpha)$ , которая определяется как решение разностного уравнения первого порядка

$$\chi_\Phi(\alpha + 2\Phi)/\chi_\Phi(\alpha - 2\Phi) = \cos(\alpha/2). \quad (6.19)$$

Эта функция является обобщением функции Малюжинца  $\psi_\Phi$  см. [3, 1, 28] (а также §4.3). Прочитав из упомянутых работ некоторые используемые в дальнейшем свойства этой функции.

Во-первых, справедливо следующее соотношение между функциями  $\chi_\Phi$  и  $\psi_\Phi$ :

$$\psi_\Phi(\alpha) = \frac{1}{[\chi_\Phi(\pi/2)]^2} \frac{\chi_\Phi(\alpha + \pi/2)}{\chi_\Phi(\alpha - \pi/2)}, \quad (6.20)$$

а также формулы

$$\chi_\Phi(\alpha)\chi_\Phi(-\alpha) = 1, \quad (6.21)$$

$$\frac{\chi_\Phi(\alpha + \pi)}{\chi_\Phi(\alpha - \pi)} = 2^{1-\mu} \cos\left(\frac{\mu\alpha}{2}\right), \quad (6.22)$$

$\mu = \pi/(2\Phi)$ . Во-вторых, при  $\text{Im } \alpha \rightarrow \pm\infty$  имеет место асимптотическое соотношение

$$\chi_\Phi(\alpha) = \exp\left[\mp \frac{i\alpha^2}{16\Phi} - \frac{\ln 2}{4\Phi}\alpha \pm i\left(\Phi + \frac{\pi^2}{4\Phi}\right)\frac{1}{12} + O(e^{\pm i\mu\alpha}) + O(e^{\pm i\alpha})\right]. \quad (6.23)$$

Введенная в (6.18) функция  $\chi(\alpha)$  выражается (используя определение (6.19)) через функцию  $\chi_\Phi(\alpha)$  следующим образом: \*

$$\chi(\alpha) = \frac{\chi_\Phi(\alpha - \Phi - \vartheta + \pi)\chi_\Phi(\alpha - \Phi + \vartheta)\chi_\Phi(\alpha + \Phi - \pi)}{\chi_\Phi(\alpha + \Phi + \vartheta - \pi)\chi_\Phi(\alpha + \Phi - \vartheta)\chi_\Phi(\alpha - \Phi + \pi)} \frac{\chi_\Phi(\alpha + \Phi)\chi_\Phi(\alpha - \vartheta_1 + \pi)\chi_\Phi(\alpha + \vartheta_1)}{\chi_\Phi(\alpha - \Phi)\chi_\Phi(\alpha + \vartheta_1 - \pi)\chi_\Phi(\alpha - \vartheta_1)}$$

или, с учетом (6.20),

$$\begin{aligned} \chi(\alpha) &= \frac{\chi_\Phi(\alpha - \Phi - \vartheta + \pi)\chi_\Phi(\alpha - \Phi + \vartheta)\chi_\Phi(\alpha + \Phi - \pi)\chi_\Phi(\alpha + \Phi)}{\chi_\Phi(\alpha + \Phi + \vartheta - \pi)\chi_\Phi(\alpha + \Phi - \vartheta)\chi_\Phi(\alpha - \Phi + \pi)\chi_\Phi(\alpha - \Phi)} \times \\ &\times \psi_\Phi(\alpha - \vartheta_1 + \pi/2)\psi_\Phi(\alpha + \vartheta_1 - \pi/2) \end{aligned} \quad (6.24)$$

(в (6.24) опущен постоянный множитель, который не влияет на окончательную форму решения). Из (6.23)  $\chi(\alpha) = O(e^{\mp i\mu\alpha/2})$  при  $\text{Im } \alpha \rightarrow \pm\infty$ .

\*Для углов раствора клина  $2\Phi = \pi$  и  $2\Phi = 2\pi$  функция  $\chi$  может быть вычислена в терминах лишь функции Малюжинца

$$\chi(\alpha) = \begin{cases} \psi_{\pi/2}(\alpha - \vartheta_1 + \pi/2)\psi_{\pi/2}(\alpha + \vartheta_1 - \pi/2), & \Phi = \pi/2 \\ \frac{\psi_\pi(\alpha + \vartheta_1 - \pi/2)\psi_\pi(\alpha - \vartheta_1 + \pi/2)}{\psi_\pi(\alpha + \vartheta - \pi/2)\psi_\pi(\alpha - \vartheta + \pi/2)} \cos(\alpha/4), & \Phi = \pi \end{cases}$$

(при выводе использовано (6.22)).

Вернемся к подстановке (6.17) в уравнение (6.16). Уравнение для  $F(\alpha)$  вытекает из (6.16) и имеет вид

$$F(\alpha + 2\Phi) - F(\alpha - 2\Phi) = Q(\alpha)F(\alpha), \quad (6.25)$$

$$Q(\alpha) = \frac{\chi(\alpha) \sin \vartheta}{\chi(\alpha + 2\Phi) [\sin(\alpha + \Phi) + \sin \vartheta]} \left[ 1 - \frac{\sin(\alpha + \Phi)}{\sin(\alpha - \Phi)} \frac{\sin \alpha - \sin \vartheta_1}{\sin \alpha + \sin \vartheta_1} \right].$$

Видно, что  $Q(\alpha) = O(e^{\pm i\alpha})$  при  $\text{Im } \alpha \rightarrow \pm\infty$ . Кроме того,  $Q(\alpha)$  нечетна, что легко проверяется с помощью (6.18), функционального уравнения для  $\chi(\alpha)$  и ее четности.

Сравнивая (6.17) с асимптотиками  $\chi(\alpha)$  и  $S_1(\alpha)$ , получаем, что  $F(\alpha) = O(e^{\pm i(\mu/2+\delta)\alpha})$  при  $\text{Im } \alpha \rightarrow \pm\infty$ . Уравнение (6.25) на  $F(\alpha)$  следует также дополнить указанием главных частей этой функции в известных полюсах, расположенных в основной полосе:

$$\psi(\alpha) = \frac{R}{\alpha + \Phi + \varphi_0} + \dots, \quad \psi(\alpha) = \frac{1}{\alpha + \Phi - \varphi_0} + \dots. \quad (6.26)$$

С учетом четности  $F(\alpha)$  разностное уравнение (6.25) можно записать как

$$F(\alpha \pm 2\Phi) - F(-\alpha \pm 2\Phi) = \pm Q(\alpha)F(\alpha). \quad (6.27)$$

Если бы правая часть (6.25), являющаяся нечетной функцией с поведением  $e^{\pm i\alpha(1+\mu/2+\delta)}$  при  $\text{Im } \alpha \rightarrow \pm\infty$ , была известна, то решение системы (6.27) состояло бы из общего решения однородной и частного решения неоднородной систем. Мы можем, однако, выразить частное решение неоднородной системы с помощью техники  $\mathcal{S}$ -интегралов (см. §4.5.2) и, следовательно, написать

$$F(\alpha) = C_1 \frac{\mu \cos(\mu\varphi_0)}{\cos(\mu\alpha) - \sin(\mu\varphi_0)} + C_2 \frac{\mu \cos(\mu\varphi_0)}{\cos(\mu\alpha) + \sin(\mu\varphi_0)} + \frac{i}{4\Phi} \int_0^{i\infty} \frac{Q(t) \sin(\mu t) F(t) dt}{\cos(\mu t) + \cos(\mu\alpha)}, \quad (6.28)$$

где первые два слагаемые – решения однородных уравнений, имеющие предписанные полюсы в точках  $\pm(\Phi - \varphi_0)$ ,  $\pm(\Phi + \varphi_0)$  в основной полосе  $\Pi(-2\Phi, 2\Phi)$ . Поскольку главные части в этих полюсах заданы, то

$$C_1 = \frac{1}{\chi(\Phi - \varphi_0)}, \quad C_2 = \frac{R}{\chi(\Phi + \varphi_0)}.$$

Формулу (6.28) можно рассматривать как представление  $F(\alpha)$  в основной полосе, если эта функция известна на мнимой оси. В свою очередь, полагая  $\alpha$  чисто мнимым в (6.28), превращаем (6.28) во фредгольмово интегральное уравнение второго рода для определения  $F(\alpha)$  на мнимой оси. Ввиду асимптотического поведения  $Q(\alpha)$  ядро этого интегрального уравнения квадратично интегрируемо, т.е. принадлежит классу Гильберта-Шмидта, тогда его разрешимость в  $L_2(-i\infty, i\infty)$  следует из единственности решения.

## 6.4 Равномерная асимптотика дифракционного коэффициента

Обратимся теперь к вычислению дальнего поля,  $kr \rightarrow \infty$ . В частности, интерес представляет равномерная по углу формула для дифракционного коэффициента, ввиду использования ее в различных версиях геометрической теории дифракции. Как и ранее, в целях некоторого упрощения ограничимся случаем  $\Phi \geq \pi/2$ .

### 6.4.1 Вычисление полюсов и вычетов в них

Как известно, контур Зоммерфельда  $\gamma$  лежит в полосе  $\alpha \in \Pi(-3\pi/2, 3\pi/2)$ . Учтем, что, если точка наблюдения лежит в верхней полуплоскости,  $0 \leq \varphi \leq \Phi$ , то необходимо вычислить значения  $S_1(\alpha)$  в полосе  $\alpha \in \Pi(-3\pi/2, 3\pi/2 + \Phi)$ . Формула (6.14) дает нам  $S_1(\alpha)$  в полосе  $\alpha \in \Pi(-\Phi, 3\Phi)$ . Аналитическое продолжение вправо от этой полосы производится с помощью переформулировки (6.13) для  $\alpha \in \Pi(\Phi, 3\Phi)$ :

$$S_1(\alpha + 2\Phi) = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + \sin \vartheta} \left\{ \left[ 1 - \frac{\sin \vartheta}{\sin(\alpha - 2\Phi)} \right] \frac{\sin(\alpha - \Phi) - \sin \vartheta_1}{\sin(\alpha - \Phi) + \sin \vartheta_1} S_1(\alpha - 2\Phi) + \right. \\ \left. + \left[ \frac{\sin \vartheta}{\sin \alpha} - \frac{\sin \vartheta}{\sin(\alpha - 2\Phi)} \frac{\sin(\alpha - \Phi) - \sin \vartheta_1}{\sin(\alpha - \Phi) + \sin \vartheta_1} \right] S_1(\alpha) \right\}. \quad (6.29)$$

Аналогично, из (6.13) следует аналитическое продолжение влево от основной полосы,  $\alpha \in \Pi(-\Phi, \Phi)$ :

$$S_1(\alpha - 2\Phi) = \frac{\sin(\alpha - 2\Phi) [\sin(\alpha - \Phi) + \sin \vartheta_1]}{[\sin(\alpha - 2\Phi) - \sin \vartheta] [\sin(\alpha - \Phi) - \sin \vartheta_1]} \left\{ - \left( 1 + \frac{\sin \vartheta}{\sin \alpha} \right) S_1(\alpha + 2\Phi) + \right. \\ \left. + \left[ \frac{\sin \vartheta}{\sin \alpha} - \frac{\sin \vartheta}{\sin(\alpha - 2\Phi)} \frac{\sin(\alpha - \Phi) - \sin \vartheta_1}{\sin(\alpha - \Phi) + \sin \vartheta_1} \right] S_1(\alpha) \right\}. \quad (6.30)$$

В таблице 6.1 сведены формулы для вычисления  $S_1(\alpha)$  в полосе  $\alpha \in \Pi(-3\pi/2, 3\pi/2 + \Phi)$ :

$\alpha \in$	$\Pi(-3\Phi, -\Phi)$	$\Pi(-\Phi, 3\Phi)$	$\Pi(3\Phi, 5\Phi)$
формула(ы)	(6.30), (6.14)	(6.14)	(6.29), (6.14)

Таблица 6.1: Выражения для  $S_1(\alpha)$  в полосе  $\alpha \in \Pi(-3\pi/2, 3\pi/2 + \Phi)$ .

Соответствующие полюса и вычеты  $S_1(\alpha + \varphi)$  сведены в таблице 6.2:

$n$	полюс $\alpha_{1,n}$	вычет $R_{1,n}$	аргумент $A_{1,n}$	тип волны
1	$\varphi_0 - \varphi$	1	1	падающая
2	$2\Phi - \varphi_0 - \varphi$	-1	$\pi + \varphi + \varphi_0 - 2\Phi$	отр. от ид. грани $\varphi = \Phi$
3	$-\varphi_0 - \varphi$	$R$	$\pi - \varphi - \varphi_0$	отр. от слоя
4	$2\Phi + \varphi_0 - \varphi$	$-R$	$\pi + \varphi - \varphi_0 - 2\Phi$	отр. от слоя, затем от ид. грани
5	$-2\Phi + \varphi_0 - \varphi$	$-R_1$	$\pi - \varphi + \varphi_0 - 2\Phi$	отр от ид. грани, затем от слоя
6	$-\pi - \vartheta - \varphi$	$R_{gs}$	$-\text{gd}(\text{Im}\vartheta) - \text{Re}\vartheta - \varphi$	пов. волна вдоль слоя

Таблица 6.2: Полюса и вычеты  $S_1(\alpha + \varphi)$ .

В таблице 6.2 использованы обозначения:

$$R_1 = \frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta + \sin(\pi + \varphi_0 - 2\Phi)}$$

— коэффициент отражения от тонкого диэлектрического слоя,

$$R_{gs} = -\operatorname{tg} \vartheta \frac{\sin(\Phi - \vartheta) - \sin \vartheta_1}{\sin(\Phi - \vartheta) + \sin \vartheta_1} \left\{ - \left[ 1 + \frac{\sin \vartheta}{\sin(2\Phi - \theta - \pi)} \right] S_1(4\Phi - \vartheta - \pi) + \right. \\ \left. + \left[ \frac{\sin \vartheta}{\sin(2\Phi - \theta - \pi)} - \frac{\sin(\Phi - \vartheta) + \sin \vartheta_1}{\sin(\Phi - \theta) - \sin \vartheta_1} \right] S_1(2\Phi - \vartheta - \pi) \right\}$$

— коэффициент возбуждения поверхностной волны, бегущей вдоль тонкого диэлектрического слоя.

**Замечание 6.1.** Традиционно для метода Зоммерфельда-Малюжинца полюсные особенности спектральных функций однозначно определяют отраженные, преломленные и поверхностные волны, что и показано в таблице 6.2. Так как мы допускаем наличие малой мнимой части у волнового числа, то поверхностные волны, вообще говоря, убывают по  $kr$ , что несколько расходится с терминологией главы 1.

Аналогично, значения  $S_2(\alpha)$  необходимо вычислить в полосе  $\alpha \in \Pi(-3\pi/2 - \Phi, 3\pi/2)$ . Согласно (6.12),  $S_2(\alpha)$  может быть выражено в через  $S_1$ , причем формула используется в основной полосе  $\alpha \in \Pi(-\Phi, \Phi)$ . Для полосы, примыкающей к основной слева,  $\alpha \in \Pi(-3\Phi, -\Phi)$  выражение (6.8) может быть переписано в виде:

$$S_2(\alpha) = -\frac{\sin(\alpha + \Phi) + \sin \vartheta_1}{\sin(\alpha + \Phi) - \sin \vartheta_1} S_2(-\alpha - 2\Phi). \quad (6.31)$$

Для полосы справа от основной, т.е.  $\alpha \in \Pi(\Phi, 3\Phi)$ , мы подставим  $S_1(\alpha + 2\Phi)$  в (6.12) и, с учетом (6.29), получим

$$S_2(\alpha) = \left\{ 1 - \frac{\sin \vartheta}{\sin \alpha} + \frac{\sin \vartheta}{\sin \alpha + \sin \vartheta} \left[ \frac{\sin \vartheta}{\sin \alpha} - \frac{\sin \vartheta}{\sin(\alpha - 2\Phi)} \frac{\sin(\alpha - \Phi) - \sin \vartheta_1}{\sin(\alpha - \Phi) + \sin \vartheta_1} \right] \right\} S_1(\alpha) - \\ - \frac{\sin \vartheta}{\sin \alpha + \sin \vartheta} \left[ 1 - \frac{\sin \vartheta}{\sin(\alpha - 2\Phi)} \right] \frac{\sin(\alpha - \Phi) - \sin \vartheta_1}{\sin(\alpha - \Phi) + \sin \vartheta_1} S_1(\alpha - 2\Phi). \quad (6.32)$$

Для следующей полосы слева, т.е.  $\alpha \in \Pi(-5\Phi, -3\Phi)$ , мы используем соотношения (6.31) и (6.32).

Информация о формулах для  $S_2(\alpha)$  в полосе  $\alpha \in \Pi(-5\Phi, 3\Phi)$  сведена в таблице 6.3, а таблица 6.4 описывает полюсы и вычеты функции  $S_2(\alpha + \Phi)$  и в этой таблице обозначено:

$$R_2 = \frac{\sin(\Phi + \varphi_0) - \sin \vartheta_1}{\sin(\Phi + \varphi_0) + \sin \vartheta_1}$$

— коэффициент отражения от нижней грани клина  $\varphi = -\Phi$ , коэффициенты  $T$  и  $T_1$  выражаются через коэффициенты отражения  $R$  и  $R_1$ :  $T = 1 + R$ ,  $T_1 = 1 + R_1$ ,

$$R_{s2} = 2 \operatorname{tg} \vartheta_1 S_2(\pi - \Phi + \vartheta_1)$$

— коэффициент возбуждения поверхностной волны, которая возникает на нижней грани клина.

$\alpha \in$	$\Pi(-5\Phi, -3\Phi)$	$\Pi(-3\Phi, -\Phi)$	$\Pi(-\Phi, \Phi)$	$\Pi(\Phi, 3\Phi)$
формула(ы)	(6.31), (6.32)	(6.31), (6.12)	(6.12)	(6.32)

Таблица 6.3: Выражения для  $S_2(\alpha)$  в полосе  $\alpha \in \Pi(-5\Phi, 3\Phi)$ .

$n$	полюс $\alpha_{2,n}$	вычет $R_{2,n}$	аргумент $A_{2,n}$	тип волны
1	$\varphi_0 - \varphi$	$T$	$\pi - \varphi_0 + \varphi$	прошедшая слой
2	$-2\Phi - \varphi_0 - \varphi$	$R_2T$	$\pi - \varphi_0 - \varphi - 2\Phi$	прошедшая-отраж.
3	$2\Phi - \varphi_0 - \varphi$	$-T_1$	$\pi + \varphi_0 + \varphi - 2\Phi$	отраженная-прошед.
4	$\pi + \vartheta - \varphi$	$R_{gs}$	$-\text{gd}(\text{Im}\vartheta) - \text{Re}\vartheta + \varphi$	поверхн. вдоль слоя
5	$-\Phi - \pi - \vartheta_1 - \varphi$	$R_{s2}$	$-\Phi - \text{Re}\vartheta_1 - \text{gd}(\text{Im}\vartheta_1) - \varphi$	поверхн. вдоль грани

Таблица 6.4: Полоса и вычеты для  $S_2(\alpha + \varphi)$ .

### 6.4.2 Равномерная по углу асимптотика дальнего поля

Для нахождения равномерной асимптотики в дальней зоне,  $kr \rightarrow \infty$ , необходимо применить метод перевала, для чего, в частности, деформировать  $\gamma$  в линии наибоыстрейшего спуска. После такой деформации получаем следующее представление для электрического поля  $E_z(kr, \varphi)$ :

$$E_z(kr, \varphi) = \frac{E_0}{2\pi i} \int_{SP_{-\pi}-SP_{\pi}} e^{-ikr \cos \alpha} S_l(\alpha + \varphi) d\alpha + \sum_{n=1}^{7-l} r_{l,n}, \quad (1-l)\Phi \leq \varphi \leq (2-l)\Phi \quad (6.33)$$

Слагаемые  $r_{l,n}$  представляют собой вклады от полюсов спектральных функций  $S_l$  и могут быть выписаны при помощи таблиц 6.1–6.4. При  $0 \leq \varphi \leq \Phi$  сумма  $\sum_{n=1}^5 r_{l,n}$  является геометро-оптической частью поля, а слагаемое  $r_{l,6}$  — поверхностной волной; при  $-\Phi \leq \varphi \leq 0$   $\sum_{n=1}^3 r_{l,n}$  и  $r_{l,4} + r_{l,5}$  — геометро-оптическая часть и поверхностные волны, соответственно.

Остановимся на асимптотическом вычислении интеграла в (6.33) по методу перевала (именно эта процедура приведет нас к формулам для дифракционного коэффициента). Обозначая результат вычисления через  $E_z^d$ , находим

$$E_z^d(kr, \varphi) = \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} Q_l(kr, \varphi) E_0 + O((kr)^{-3/2}), \quad (1-l)\Phi \leq \varphi \leq (2-l)\Phi, \quad (6.34)$$

где

$$Q_l(kr, \varphi) = \sqrt{\frac{i}{2\pi k}} [S_l(\varphi - \pi) - S_l(\varphi + \pi)] - \frac{i}{\sqrt{4\pi k}} \sum_{n=1}^{7-l} R_{l,n} \frac{1 - F_{KP} [ikr (s_{l,n})^2]}{s_{l,n}},$$

$$F_{KP}(z^2) = \pm 2iz e^{iz^2} \int_{\pm z}^{\infty} e^{-i\tau^2} d\tau, \quad \text{нижний знак для } \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{5\pi}{4},$$

$$s_{l,n} = -\sqrt{2i} \cos\left(\frac{\tilde{\alpha}_{l,n}}{2}\right)$$

$$\tilde{\alpha}_{l,n} = \begin{cases} \alpha_{l,n} & |\text{Re } \alpha_{l,n}| \leq 2\pi \\ 2\pi \text{ sign}(\text{Re } \alpha_{l,n}) + i \text{Im } \alpha_{l,n}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Появление интеграла френелевского типа  $F_{KP}^*$ , как мы видели в предыдущих главах, совершенно естественно. Выражение  $Q_l$  и, значит,  $E_z^d$  оказывается равномерным по углу наблюдения  $\varphi$ , поскольку сингулярности (возникающие на терминаторных направлениях) сокращаются.

## 6.5 Численная реализация полученного решения

### 6.5.1 Вычисление спектральных функций

Асимптотическое поведение  $F(\alpha)$  при  $\text{Im } \alpha \rightarrow +\infty$  подсказывает, что для вычислений удобно ввести новую неизвестную функцию  $g$  так, что

$$F(\alpha) = g(\alpha) \exp(i\mu\alpha).$$

Кроме того, для формальных упрощений сведем сделаем замену переменной в интегральном уравнении (6.28)

$$\alpha = \frac{1}{\mu} \arctan(i\tau) = \frac{i}{2\mu} \ln \frac{1+\tau}{1-\tau}, \quad 0 \leq \tau \leq 1.$$

В новых обозначениях уравнение (6.28) перепишется в виде

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= C_1 \frac{\mu \cos(\mu\varphi_0)}{\cos(\mu\alpha) - \sin(\mu\varphi_0)} + C_2 \frac{\mu \cos(\mu\varphi_0)}{\cos(\mu\alpha) + \sin(\mu\varphi_0)} - \\ &- \frac{i}{2\pi} \int_0^1 \frac{Q[t(\tau)]}{1 + \cos(\mu\alpha)\sqrt{1-\tau^2}} \frac{g[t(\tau)]}{1+\tau} \frac{\tau dt}{\sqrt{1-\tau^2}}. \end{aligned}$$

или, более компактно,

$$h(\beta) + \int_0^1 K(\beta, \tau) h(\tau) d\tau = q(\beta), \quad (6.35)$$

где  $h(\tau) = g[\alpha(\tau)]/(1+\tau)$ , ядро  $K(\beta, \tau)$  определяется выражением

$$K(\beta, \tau) = \frac{P(\tau)}{\sqrt{1-\beta^2} + \sqrt{1-\tau^2}}, \quad P(\tau) = \frac{i}{2\pi} \frac{Q[t(\tau)]\tau}{\sqrt{1-\tau^2}},$$

а правая часть  $q(\beta)$  имеет вид

$$q(\beta) = C_1 \frac{\mu \cos(\mu\varphi_0)}{1 - \sin(\mu\varphi_0)\sqrt{1-\beta^2}} + C_2 \frac{\mu \cos(\mu\varphi_0)}{1 + \sin(\mu\varphi_0)\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Приняв теперь какую-либо приближенную квадратурную формулу, например,  $N$ -точечную схему Гаусса-Лежандра,

$$\int_0^1 y(x) dx \approx \sum_{n=1}^N w_n y(x_n),$$

---

\*Мы используем несколько отличную от форму интеграла френелевского типа  $F_{KP}$ , которая, конечно же, легко выражается через  $\mathcal{F}(\zeta)$  гл. 3 и приложения I.

к интегралу в левой части уравнения (6.35), где  $w_n$  – веса и  $x_n$  – соответствующие точки разбиения, имеем

$$h(\beta) + \sum_{n=1}^N w_n K(\beta, x_n) h(x_n) = q(\beta).$$

Полагая  $\beta = x_m, m = 1, \dots, N$ , получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$h(x_m) + \sum_{n=1}^N w_n K(x_m, x_n) h(x_n) = q(x_m), \quad m = 1, \dots, N. \quad (6.36)$$

После того, как значения  $h(x_n), n = 1, \dots, N$ , найдены, функция  $F(\alpha)$  в полосе  $\alpha \in \Pi(-2\Phi, 2\Phi)$  легко находится при помощи интерполяционной квадратурной формулы

$$F(\alpha) = C_1 \frac{\mu \cos \mu \varphi_0}{\cos(\mu \alpha) - \sin(\mu \varphi_0)} + C_2 \frac{\mu \cos(\mu \varphi_0)}{\cos(\mu \alpha) + \sin(\mu \varphi_0)} - \sum_{n=1}^N \frac{p(x_n)}{1 + \cos(\mu \alpha) \sqrt{1 - x_n^2}}, \quad (6.37)$$

где  $p(x_n)$  обозначает  $w_n P(x_n) h(x_n)$ . В результате, с использованием аналитического продолжения, если это необходимо, спектральная функция  $S_1(\alpha)$  может быть найдена в любой комплексной точке  $\alpha$ ;  $S_2(\alpha)$  определяется из (6.12).

### 6.5.2 Пример расчета дальнего поля

Для вычисления\* решения интегрального уравнения использовалась схема Гаусса-Лежандра с 40 точками разбиения. При вычислении обобщенной функции Малюжинца  $\chi_\Phi(\alpha)$  мы следовали процедуре, описанной в работе [27].

В приводимом примере  $\Phi = 3\pi/4$ ,  $\text{Im } \vartheta < 0$ , т.е. возбуждается поверхностная волна вдоль слоя  $\varphi = 0$ , симметричная относительно этой линии. Кроме того,  $\text{Im } \vartheta_1 < 0$ , т.е. возбуждается также поверхностная волна на нижней грани клина. Можно увидеть, однако (рис. 6.2), что вклад поверхностных волн в полное поле относительно слабый. Несколько более значительный вклад в окрестностях определенных направлений  $\varphi$  дает поле, дифрагированное от кромки клина.

Как следует из численных экспериментов, вклад дифрагированного поля становится слабее при угле раскрыва  $\Phi = \pi/2$  (случай дифракции на тонкой диэлектрической полуплоскости, присоединенной ортогонально к плоскости в точке скачка краевого условия с идеального на импедансное). В свою очередь, наиболее ярко выраженная интерференционная картина геометро-оптических волн наблюдается при угле раскрыва  $\Phi = \pi$  (тонкая диэлектрическая полуплоскость, продолженная полуплоскостью с комбинированными условиями на сторонах). Мы не приводим здесь соответствующих графиков.

---

\*Вычисления проведены Dr. N.Y.Zhu из университета Штутгарта, и авторы благодарны за возможность использования его результатов.

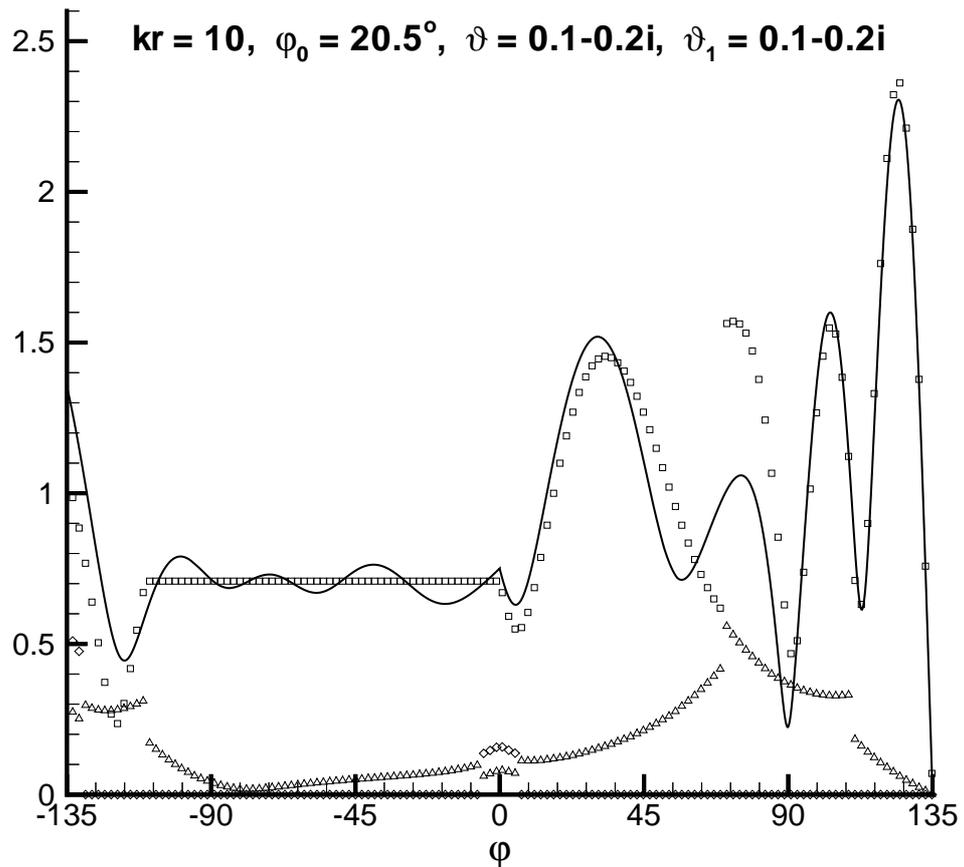


Рис. 6.2: Амплитуда полного поля и вкладов геометро-оптических, краевой и поверхностных волн в зависимости от направления  $\varphi$  (в градусах) на точку наблюдения при фиксированном  $kr$  при дифракции падающей под углом  $\varphi_0$  плоской волны; раскрыт угловой области  $2\Phi = 3\pi/2$ ; значения импедансов  $\theta$  и  $\theta_1$  выбраны так, что на нижней грани клина и на импедансной полуплоскости возникают поверхностные волны. Маркировка кривых: *сплошная линия* — полное поле, *“ромбы”* — вклад поверхностных волн, *“треугольники”* — вклад дифрагированной поля, *“квадраты”* — вклад геометро-оптических волн.

# ПРИЛОЖЕНИЯ

## I О методе перевала

Метод перевала — это метод нахождения асимптотики интегралов вида

$$\int_C e^{pS(z)} F(z) dz, \quad p \rightarrow +\infty. \quad (\text{П } 1.1)$$

Здесь  $S(z)$  и  $F(z)$  регулярные функции комплексного переменного  $z$ ,  $C$  — контур на плоскости  $z$ . При асимптотическом исследовании интегралов вида (П 1.1) прежде всего находят так называемые стационарные (седловые) точки — т.е. точки, в которых обращается в ноль производная  $S'(z)$ , затем деформируют контур  $C$  так, чтобы он проходил через стационарную точку (или точки) вдоль так называемого контура наибо́льшего убывания или перевального контура. Асимптотику интеграла типа (П 1.1), в котором  $C$  — перевальный контур, найти уже несложно.

Рассмотрим вопрос о перевальном контуре несколько подробнее. Пусть  $S'(z_0) = 0$ ,  $S''(z_0) \neq 0$  (только этим невырожденным случаем мы и займемся). Рассмотрим кривые  $\{z : \text{Im}(S(z) - S(z_0)) = 0\}$ , проходящие через точку  $z_0$ . Разлагая  $S(z) - S(z_0)$  по степеням  $z - z_0$  в окрестности точки  $z_0$ , нетрудно убедиться, что множество точек, для которых  $\text{Im}(S(z) - S(z_0)) = 0$ , вблизи точки  $z_0$  состоит из двух гладких кривых, пересекающихся под прямым углом в этой точке и разбивающих окрестность точки  $z_0$  на четыре сектора (см. рис. 7.1, где плюсами (минусами) обозначены сектора, в которых  $\text{Re}(S(z) - S(z_0)) > 0$  ( $< 0$ ), соответственно).

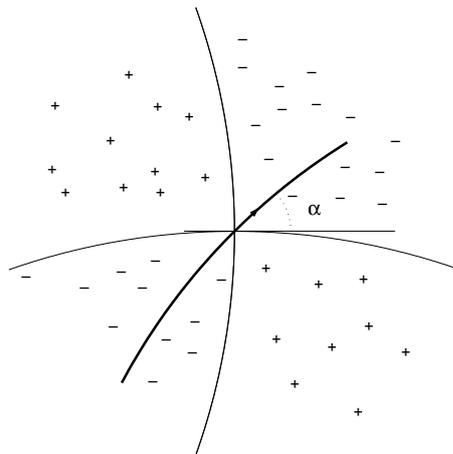


Рис. 7.1: Линии, разделяющие сектора, в которых  $\text{Re}(S(z) - S(z_0)) > 0$  ( $< 0$ ); жирной линией показан перевальный контур.

Нетрудно показать, что линии, на которых  $\text{Im}(S(z) - S(z_0)) = 0$ , делят пополам угол между кривыми  $\text{Re}(S(z) - S(z_0)) = 0$ . Контур  $\{z : \text{Im}(S(z) - S(z_0)) = 0\}$ , проходящий через сектор

с отрицательным значением  $\operatorname{Re}(S(z) - S(z_0))$ , и есть перевальный контур. Вдоль него функция  $e^{p(S(z) - S(z_0))}$  не осциллирует, вещественна и имеет максимум в точке  $z_0$ , при  $p \rightarrow +\infty$  этот максимум “острый”. Поэтому для нахождения главного (при  $p \rightarrow +\infty$ ) члена интеграла

$$\int e^{p(S(z) - S(z_0))} F(z) dz \quad (\text{П 1.2})$$

вдоль перевального контура существенна только окрестность точки  $z_0$ . Разлагая  $S(z) - S(z_0)$  и  $F(z)$  в ряды Тейлора в окрестности точки  $z_0$  и ограничиваясь только главным членом, получим

$$\int_C e^{p(S(z) - S(z_0))} F(z) dz \sim \int_C e^{\frac{1}{2}(z - z_0)^2 S''(z_0)} F(z_0) dz.$$

Напомним, что разность  $S(z) - S(z_0)$ , а значит, и  $(z - z_0)^2 S''(z_0)/2$ , на контуре  $C$  вещественна и отрицательна. Заменяя переменную по формуле  $-\tau^2 = (z - z_0)^2 S''(z_0)/2$ , получаем стандартный интеграл Пуассона.

Возвращаясь к исходному интегралу (П 1.1), приходим к следующей асимптотической оценке:

$$\int_C e^{pS(z)} F(z) dz \sim e^{pS(z_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{p|S''(z_0)|}} e^{i\alpha} F(z_0), \quad * \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arg S''(z_0). \quad (\text{П 1.3})$$

Заметим, что геометрический смысл величины  $\alpha$  — это угол наклона перевального контура к горизонтальной оси (см. рис.7.1).

Формулы метода перевала несколько усложняются, если функция  $F(z)$  имеет полюс, близкий к седловой точке (в этом случае первый член тэйлоровского ряда, разумеется, непригоден для аппроксимации этой функции в окрестности точки перевала). Поскольку вопрос достаточно подробно изучен (см., например, [14], ч.2.; [18], [17]), мы в справочных целях приводим лишь основной результат. †

Итак, пусть в интеграле (П 1.1)

$$F(z) = \frac{f(z)}{z_0 - z + \epsilon}, \quad (\text{П 1.4})$$

где  $z_0$  — седловая точка,  $f(z)$  — регулярная в окрестности  $z_0$  функция. Относительно точки  $\epsilon$  будем предполагать, что полюс  $z_0 + \epsilon$  не лежит на перевальном контуре. В этих предположениях асимптотическая при  $p \rightarrow +\infty$  и равномерная по  $\epsilon \rightarrow 0$  асимптотическая формула для интеграла (П 1.1) выглядит следующим образом:

$$\int_C e^{pS(z)} F(z) dz \sim e^{pS(z_0)} Q(\epsilon\sigma, p) \left[ f(z_0) + O\left(p^{-1/2}\right) \right], \quad (\text{П 1.5})$$

где  $\sigma = \left| \frac{S''(z_0)}{2} \right|^{1/2} e^{\frac{i}{2}(\arg S''(z_0) - \pi)}$  (при наших предположениях  $\operatorname{Im}(\epsilon\sigma) \neq 0$ ) и функция  $Q(\tau, p)$  выражается через интеграл Френеля:

$$Q(\tau, p) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-pt^2}}{\tau - t} dt = 2\pi i e^{-p\tau^2} \left( 1 - \mathcal{F}\left(e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{p} \tau\right) \right), \quad (\text{П 1.6})$$

\*Более аккуратные рассуждения позволяют оценить погрешность формулы (П 1.3):

$$\int_C e^{pS(z)} F(z) dz \sim e^{pS(z_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{p|S''(z_0)|}} e^{i\alpha} \left[ F(z_0) + O\left(\frac{1}{p}\right) \right],$$

где  $O\left(\frac{1}{p}\right)$  — асимптотический ряд по степеням  $\frac{1}{p}$  (см. [14], ч.2.)

†В приложении II мы обсудим равномерные формулы метода перевала в этой и более общей ситуации.

$$\mathcal{F}(\zeta) := \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\zeta} e^{it^2} dt. \quad (\text{II 1.7})$$

В свою очередь, при больших значениях  $\zeta$  интеграл Френеля допускает асимптотическое разложение. Так, например, при вещественных  $\zeta$

$$\mathcal{F}(\zeta) \underset{|\zeta| \rightarrow \infty}{\sim} \theta(\zeta) - \frac{e^{i\zeta^2}}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-i\frac{\pi}{2}(m-\frac{1}{2})} \frac{\Gamma(m+1/2)}{\zeta^{2m+1}}, \quad (\text{II 1.8})$$

где  $\theta(\zeta)$  — функция Хевисайда.

## II Равномерные формулы метода перевала при седловой точке, близкой к сингулярности алгебраического характера

Здесь мы кратко воспроизводим результаты работы [20] (частично придерживаясь также и обозначений автора). В ней рассматриваются интегралы вида

$$I(\lambda; \alpha) = \int_C t^r g(t) e^{-\lambda f(t; \alpha)} dt \quad (\text{II 2.9})$$

при следующих предположениях:

- i)  $f(t; \alpha)$  и  $g(t)$  — аналитические функции  $t$ , причем  $\text{Re } f \rightarrow +\infty$  при  $|t| \rightarrow \infty$  вдоль контура  $C$ ,  $g(0) \neq 0$  и  $g(t)$  ведет себя на бесконечности достаточно хорошо для того, чтобы все необходимые деформации контура были допустимыми;
- ii) комплексный параметр  $\alpha$  меняется на множестве, содержащем точку  $\alpha = 0$ ;
- iii) точка  $t = \alpha$  является невырожденной седловой точкой, т.е.  $f_t(\alpha; \alpha) = 0$ ,  $f_{tt}(\alpha; \alpha) \neq 0$ ;

Целью является получение асимптотической при  $\lambda \rightarrow +\infty$  и равномерной по  $\alpha$  формулы для  $I(\lambda; \alpha)$ .

Совместим контур  $C$  в интеграле (II 2.9) с перевальным и заменим переменную по формуле

$$f(t; \alpha) - f(0; \alpha) = \frac{1}{2} z^2 + bz, \quad (\text{II 2.10})$$

потребовав дополнительно соответствия седловых точек в новой и старой переменных:  $t = \alpha \rightsquigarrow z = -b$ . Тем самым

$$b(\alpha) = \sqrt{2(f(0; \alpha) - f(\alpha; \alpha))}, \quad (\text{II 2.11})$$

где ветвь корня фиксирована таким образом, что  $\arg(-b) = \frac{1}{2} \arg f_{tt}(\alpha, \alpha) + \arg \alpha$ .

В новой переменной интеграл (II 2.9) принимает вид

$$I(\lambda; \alpha) = e^{-\lambda f(0; \alpha)} \int_{C'} G(z) z^r e^{-\lambda(\frac{z^2}{2} + bz)} dz, \quad (\text{II 2.12})$$

где

$$z^r G(z) = t^r g(t) \frac{dt}{dz} \quad (\text{II 2.13})$$

и контур  $C'$  есть образ перевального контура на плоскости переменной  $z$  (который в окрестности седловой точки  $z = -b$  проходит параллельно вещественной оси).

Положим

$$G(z) = \gamma_0 - \gamma_1 z + z(z+b)G_1(z). \quad (\text{П 2.14})$$

Основная идея такого представления заключается в том, что последнее слагаемое в (П 2.13) аннулируется как в седловой точке  $z = -b$ , так и в полюсе  $z = 0$ , и поэтому интеграл от последнего слагаемого должен носить поправочный характер при  $\lambda \rightarrow \infty$  по сравнению с исходным интегралом. Из (П 2.13) и (П 2.14) нетрудно получить

$$\begin{aligned} \gamma_0(\alpha) = G(0) &= g(0) \left( \frac{dt}{dz} \Big|_{z=0} \right)^{r+1} \\ \gamma_1(\alpha) = \frac{G(-b) - G(0)}{b} &= \frac{1}{-b} \left[ g(0) \left( \frac{dt}{dz} \Big|_{z=0} \right)^{r+1} - g(\alpha) \left( \frac{\alpha}{-b} \right)^r \frac{dt}{dz} \Big|_{z=-b} \right]. \end{aligned} \quad (\text{П 2.15})$$

Ясно, что  $\gamma_{0,1}$  являются гладкими функциями  $\alpha$  (не имеют сингулярностей при  $\alpha \rightarrow 0$ ).

Введем определяемые контурными интегралами функции

$$W_r(\zeta) = \int_{C'} z^r e^{-\frac{z^2}{2} - \zeta z} dz, \quad (\text{П 2.16})$$

которые лишь множителем отличаются от известных функций параболического цилиндра:\*

$$W_r(\zeta) = \sqrt{2\pi} e^{i\frac{\pi r}{2} + \frac{\zeta^2}{4}} \mathcal{D}_r(i\zeta). \quad (\text{П 2.17})$$

В частности, при  $r = -1$  интеграл (П 2.16) стандартным образом (см. §3.4 и приложение I) может быть сведен к интегралу Френеля:

$$W_{-1}(\zeta) = 2\pi i \left[ 1 - \mathcal{F} \left( e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\zeta}{\sqrt{2}} \right) \right]. \quad (\text{П 2.18})$$

Подставим (П 2.14) в интеграл (П 2.12) и используем (П 2.16). Получим

$$I(\lambda; \alpha) = e^{-\lambda f(0; \alpha)} \left[ \gamma_0 \frac{W_r(\sqrt{\lambda} b)}{\lambda^{(r+1)/2}} + \gamma_1 \frac{W'_r(\sqrt{\lambda} b)}{\lambda^{(r+2)/2}} \right] + I_1(\lambda; \alpha). \quad (\text{П 2.19})$$

Интеграл  $I_1(\lambda; \alpha)$  здесь того же вида, что и (П 2.12), но с заменой  $G(z)$  на  $z(z+b)G_1(z)$ . Проинтегрировав по частям, получим

$$\lambda I_1(\lambda; \alpha) = e^{-\lambda f(0; \alpha)} \int_{C'} z^r [(r+1)G_1(z) + zG'_1(z)] e^{-\lambda \left( \frac{z^2}{2} + bz \right)} dz.$$

Представив  $(r+1)G_1(z) + zG'_1(z) = \gamma_2 - \gamma_3 z + z(z+b)G_2(z)$ , мы можем повторить проведенные выше рассуждения для интеграла  $\lambda I_1(\lambda; \alpha)$  и т.д. После многократного применения этой процедуры, приходим к следующему результату:

$$I(\lambda; \alpha) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} e^{-\lambda f(0; \alpha)} \left[ A(\lambda; \alpha) \frac{W_r(\sqrt{\lambda} b)}{\lambda^{(r+1)/2}} + B(\lambda; \alpha) \frac{W'_r(\sqrt{\lambda} b)}{\lambda^{(r+2)/2}} \right], \quad (\text{П 2.20})$$

\*Напомним, что функции параболического цилиндра  $\mathcal{D}_\nu(z)$  — это решения уравнения

$$\mathcal{D}''_\nu(z) + \left( \nu + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4} \right) \mathcal{D}_\nu(z) = 0$$

с нормировкой  $\mathcal{D}_\nu(0) = \sqrt{\pi} \frac{2^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma(\frac{1-\nu}{2})}$ ,  $\mathcal{D}'_\nu(0) = -\sqrt{\pi} \frac{2^{\frac{\nu+1}{2}}}{\Gamma(-\frac{\nu}{2})}$ .

где  $A(\lambda; \alpha)$ ,  $B(\lambda; \alpha)$  — асимптотические ряды по обратным степеням  $\lambda$  с гладко зависящими от  $\alpha$  коэффициентами.

Применим вышеприведенный анализ для асимптотического вычисления интеграла Зоммерфельда

$$u(kr, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_C s(z + \varphi) e^{-ikr \cos z} dz,$$

где  $C$  — один из перевальных контуров  $SP_{\pm\pi}$  (см. рис. 2.6). Нас будет интересовать тот случай, когда один из полюсов  $\varphi_p$  подынтегрального выражения (см. §3.2) близок к одной из седловых точек  $\pm\pi$ .

После очевидных замен

$$t = z + \varphi - \varphi_p, \quad \alpha = (\varphi - \varphi_p) \mp \pi, \quad \lambda = kr,$$

$$f(t; \alpha) = -i \cos(t - \alpha), \quad g(t) = s(t + \varphi_p) t, \quad r = -1$$

мы получаем интеграл (II 2.9). Из формулы (II 2.11) (и с учетом замечания, сделанного после этой формулы), находим  $b = -e^{-i\pi/4} 2 \cos \frac{\varphi - \varphi_p}{2}$ , а из (первой из) формул (II 2.15) находим  $\gamma_0 = \operatorname{res}_{z=-(\varphi-\varphi_p)} s(z)$ . \* Подставляя найденные величины в (II 2.18) и (II 2.19), в старшем приближении получаем

$$u(kr, \varphi) \underset{kr \rightarrow \infty}{\sim} \gamma_0 e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_p)} \left[ 1 - \mathcal{F} \left( -\sqrt{2kr} \cos \frac{\varphi - \varphi_p}{2} \right) \right] = \gamma_0 e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_p)} \mathcal{F} \left( \sqrt{2kr} \cos \frac{\varphi - \varphi_p}{2} \right).$$

---

\*Этот вычет равен единице для падающей волны или коэффициенту отражения от грани клина.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Авдеев, А.Д. О специальной функции в задаче дифракции на клине в анизотропной плазме, *Радиотехника и Электроника*, **39**, 1994, сс.885-892
- [2] Бабич В.М., Буддырев В.С., Молотков И.А. *Пространственно-временной лучевой метод. (Линейные и нелинейные волны)*. Изд-во ЛГУ, Ленинград, 1985
- [3] Бобровников М.С., Фисанов В.В. *Дифракция волн в угловых областях*. Томск, 1988
- [4] Боровиков В.А. *Дифракция на многоугольниках и многогранниках*. Москва, "Наука", 1966
- [5] Боровиков В.А., Кинбер Б.Е. *Геометрическая теория дифракции*. Москва, "Связь", 1978
- [6] Векуа, И.Н. О метагармонических функциях *Труды Тбилисского Математического Института*, **12**, 1943, сс.105-174
- [7] Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*. Изд. 5-е, Москва, "Наука", 1971
- [8] Курант Р. *Уравнения с частными производными*. "Мир", Москва, 1964
- [9] Малюжинец, Г.Д. Излучение звука вибрирующими границами произвольного клина, часть 1 *Ак. жс.*, **1**, 1955, сс. 152-174
- [10] Малюжинец, Г.Д. Излучение звука вибрирующими гранями произвольного клина, часть 2 *Ак. жс.*, **1**, 1955, сс. 240-248
- [11] Малюжинец, Г.Д. Формула обращения для интеграла Зоммерфельда *ДАН СССР*, **3**, 1958, сс.52-56
- [12] Малюжинец, Г.Д. Возбуждение, отражение и излучение поверхностных волн от клина с заданными поверхностными импедансами *ДАН СССР*, **3**, 1958, сс.752-755
- [13] Осипов, А.В. Вычисление функции Малюжинца в комплексной области *Акустический жс.*, **36**, 1990, сс. 116-121
- [14] Смирнов В.И. *Курс высшей математики, том III*. "Наука", Москва, 1974
- [15] Смирнов В.И. *Курс высшей математики, том IV*. "Наука", Москва, 1974
- [16] Тужилин, А.А. Теория неоднородных уравнений Малюжинца *Диффер. уравн.*, **9**, 1973, сс.2058-2064
- [17] Федорюк, М.В. *Асимптотика. Интегралы и ряды*. "Наука", Москва, 1987
- [18] Фок, В.А. *Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн*. "Связь", Москва, 1970

- [19] Bernard, J.M.L. On the diffraction of an electromagnetic skew incident wave by a nonperfectly conducting wedge *Ann. Telecom.*, **45**, 1990, pp.30–39
- [20] Bleistain, N. *Uniform asymptotic expansion of integrals with stationary point near algebraic singularity* *Comm. Pure and Appl. Math.*, **XIX**, 1966, pp. 353–370
- [21] Budaev, B.V. *Diffraction by wedges*. Pitman Research Notes in Mathematical Series, Vol.322, Longman, Essex, 1995
- [22] Buldyrev, V.S. and Lyalinov, M.A. *Mathematical Methods in Modern Electromagnetic Diffraction Theory*. Intern. series of monographs on advanced electromagnetics, vol.1, Science House, Tokyo, 2001
- [23] Carslaw H.S. Diffraction of waves by a wedge of any angle *Proc. of the London Math. Soc.*, **18**, 1920, pp.291–306
- [24] Kamotski, V. and Lebeau, G. Diffraction by an Elastic Wedge with Stress Free Boundary: Existence and Uniqueness *Proceedings of the Royal society, London*, 2004 (to appear); препринт ИОММ РАН 08/2003
- [25] Lyalinov, M.A. Diffraction by a wedge with anisotropic face impedances, *Annals Telecom.*, **49**,1994, pp.667–672
- [26] Lyalinov, M.A. Diffraction of a plane wave by a wedge with thin material coatings *Radio Sci.*, **31**, 1996, pp.1721–1731
- [27] Lyalinov, M.A. and Zhu, N.Y. Diffraction of a skewly incident plane wave by an anisotropic impedance wedge — a class of exactly solvable cases, *Wave Motion*, **30**, 1999, pp.275-288
- [28] Lyalinov, M.A. and Zhu, N.Y. A solution procedure for second order difference equations and its application to electromagnetic wave diffraction in a wave shaped region *Proc. R. Soc. London*,**459**, 2003, pp.3159-3180
- [29] Nazarov, S.A. and Plamenevskii B.A. *Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries*. Walter de Gruyter, Berlin, 1994
- [30] Osipov, A.V. and Norris, A.N. The Malyuzhinets Theory for Scattering from Wedge Boundaries: a Review *Wave Motion*, **29**, 1999, pp.313–340
- [31] Norris, A.N. and Osipov, A.V. Far-field analysis of the Malyuzhinets solution for plane and surface waves diffraction by an impedance wedge *Wave Motion*, **30**, 1999, pp.69–89
- [32] Osipov, A.V. General solution of a class of diffraction problems *J. Phys. A: Math. Gen.*, **27**, 1994, pp.L27–L32
- [33] Osipov, A.V. Diffraction by a wedge with higher-order boundary conditions *Radio Sci.*, **30**, 1996, pp.1705–1720
- [34] Poincaré J.H. Sur la polarization par diffraction *Acta Math.*, **16**, 1892, pp.297-339
- [35] Poincaré J.H. Sur la polarization par diffraction *Acta Math.*, **20**, 1897, pp.313-355
- [36] Senior, T.B.A. Diffraction by a right-angled second order impedance wedge *Electromagnetics*, **9**, 1989, pp.313–330
- [37] Senior, T.B.A. and Volakis, J.L. *Approximate boundary conditions in electromagnetics*. Inst. of Electr. Eng., London, 1995

- [38] Sommerfeld, A. Mathematische Theorie der Diffraction *Math. Ann.*, **47**, 1896, pp.317–374
- [39] Sommerfeld, A. Theoretisches über die Beugung der Röntgenstrahlen *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, Leipzig, 1901, pp.11–97

**Бабич** Василий Михайлович  
**Лялинов** Михаил Анатольевич  
**Грикуров** Валерий Эдуардович

МЕТОД ЗОММЕРФЕЛЬДА-МАЛЮЖИНЦА В ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ

ЛР №040815 от 22.05.97

Подписано к печати 03.02.2004 г. Формат бумаги 60x84 1.16. Бумага офсетная.

Печать ризографическая. Объем 6.4 п.л. Тираж 200 экз. Заказ 3145.

Отпечатано в отделе оперативной полиграфии НИИХ СПбГУ  
с оригинал-макета заказчика.

198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., 26.