



**Л.Г. АНТОШИНА  
С.В. ПАВЛОВ  
Л.А. СКИПЕТРОВА**

# **ОБЩАЯ ФИЗИКА**

## **СБОРНИК ЗАДАЧ**

**Под ред. проф. Б.А. СТРУКОВА**

**УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ**

*Допущено  
Научно-методическим советом по физике  
Министерства образования и науки  
Российской Федерации в качестве учебного пособия  
по физике для студентов высших учебных заведений,  
обучающихся по направлениям 02021 «Биология»,  
020301 «Геология», 020401 «География», 020701 «Почвоведение»*

Москва  
ИНФРА-М  
2008

**УДК 53(075.8)**

**ББК 223я73**

**A72**

**Антошина Л.Г., Павлов С.В., Скипетрова Л.А.** Общая физика:  
**A72** Сб. задач: Учеб. пособие / Под ред. проф. Б.А. Струкова. — М.:  
ИНФРА-М, 2008. — 336 с. — (Высшее образование).

ISBN 5-16-002494-8

Сборник задач по физике предназначен для студентов естественно-научных специальностей университетов, для которых физика не является профилирующей дисциплиной (биологи, геологи, географы и др.). Задачник охватывает последовательно разделы общей физики — механику, молекулярную физику и термодинамику, электромагнетизм и оптику. Каждому разделу предшествует краткое теоретическое введение, по каждой теме вначале предлагаются простые качественные задачи, далее следуют типовые задачи с решениями, затем задачи для самостоятельного решения. В конце сборника приведены ответы ко всем задачам.

**ББК 53(075.8)**

ISBN 5-16-002494-8

© Л.Г. Антошина, С.В. Павлов,  
Л.А.Скипетрова, 2006

---

Оригинал-макет изготовлен в  
Издательском Доме «ИНФРА-М»

ЛР № 070824 от 21.01.93 г.

Сдано в набор 10.09.2005. Подписано в печать 16.03.2006.

Формат 60x90/16. Бумага офсетная. Гарнитура Newton.

Усл. печ. л. 21,0. Уч.-изд. л. 17,75.

Тираж 3000 экз. Заказ № .

Издательский Дом «ИНФРА-М»

127282, Москва, ул. Полярная, д. 31в

Тел.: (495) 380-05-40, 380-05-43. Факс: (495) 363-92-12.

E-mail: books@infra-m.ru <http://www.infra-m.ru>

Отдел «Книга — почтой»:  
(495) 363-42-60 (доб. 246, 247)

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый сборник задач по физике предназначен для студентов естественно-научных специальностей университетов, для которых физика не является профилирующей дисциплиной. Рекомендованная Министерством образования и науки РФ примерная программа дисциплины «Физика» для студентов биологических, геологических, географических и почвенных факультетов охватывает последовательно изучаемые разделы физики — классическую механику, молекулярную физику и термодинамику, электромагнетизм, геометрическую, волновую и квантовую оптику. Этот весьма значительный объем материала изучается, как правило, в течение двух семестров, один из которых (весенний) укорочен в связи с производственной (полевой) практикой студентов. Поэтому семинарские занятия проходят в условиях жесткого лимита времени — 32 часа (16 занятий) в осенний семестр и 16 часов (8 занятий) в весенний семестр. Таким образом, на 21 тему семинаров приходится 24 занятия; с учетом времени, необходимого для контрольных работ, тестов, коллоквиумов, оказывается, что каждая тема может быть рассмотрена не более, чем на одном семинаре, и весьма существенную роль приобретает самостоятельная работа студентов.

Основной упор на семинарских занятиях делается на углублении и закреплении материала, излагаемого на лекциях; практические занятия не ставят целью научить студента решению задач повышенной сложности. Их целью является освоение основных понятий физики, связей между ними в виде фундаментальных физических законов, применение этих законов для моделирования и количественного описания различных конкретных ситуаций. Предлагаются для решения, как правило, типовые задачи, требующие в ряде случаев применения высшей математики.

Каждому разделу предшествует краткое теоретическое введение, позволяющее студенту представить объем необходимого для решения задач раздела теоретического материала. Разделы разбиты по темам; по каждой теме вначале предлагаются простые качественные задачи, не требующие для решения математических выкладок. Далее следуют типовые задачи с решениями, демонстри-

рующие методические приемы, знание которых необходимо для формализации и математического описания предлагаемых моделей. Затем материал по каждой теме закрепляется самостоятельным решением задач. Ответы к задачам приведены в конце сборника.

Мы полагаем, что уже имеющиеся пособия подобного рода, предназначенные, в основном, для специальностей с физической и технической ориентацией, не соответствуют в полной мере программе изучения физики на факультетах естественно-научного профиля в классических университетах. Целью данного издания является создание учебного пособия, соответствующего реально реализуемой программе по физике в той ее части, которую можно считать «инвариантной» и общей для всех указанных факультетов, и достаточно глубокое освоение которой будет являться основой для последующих специальных курсов — биофизики, геофизики, физики почв и т.д.

Материал, содержащийся в сборнике, может быть использован для реализации индивидуальных учебных планов, организации самостоятельной работы студентов, при проведении контрольных работ и коллоквиумов.

Раздел «Механика» написан Л.А. Скипетровой, «Электричество и магнетизм» (кроме темы 3.4) — Л.Г. Антошиной, «Молекулярная физика и термодинамика», тема 3.4 раздела «Электричество и магнетизм» и «Оптика» — С.В. Павловым.

*Б.А. Струков*

# Раздел 1

## МЕХАНИКА

### ТЕМА 1.1

#### КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Кинематика описывает движения тел (материальных точек) независимо от вызвавшей их причины. Основной прием описания движения материальной точки состоит во введении зависящего от времени радиус-вектора  $\vec{r}(t)$ , т.е. вектора, проведенного из начала координат в данную точку. Перемещение  $\Delta\vec{r}$  точки есть вектор, проведенный из ее начального положения в конечное и равный приращению радиус-вектора данной точки. Скорость определяется как производная от радиус-вектора движущейся точки по времени:  $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ . Ускорение находится из соотношения  $\vec{a} = d\vec{v}/dt = d^2\vec{r}/dt^2$ . В случае равномерного движения ( $\vec{v} = \text{const}$ ) выполняется соотношение  $\Delta\vec{r} = \vec{v}\Delta t$ . Формулы движения с постоянным ускорением имеют вид

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t, \quad (1.1.1)$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{v}_0t + \frac{\vec{a}t^2}{2}, \quad (1.1.2)$$

где  $\vec{v}_0$  — начальная скорость.

В криволинейном движении точки полное ускорение  $\vec{a}$  есть векторная сумма тангенциального  $\vec{a}_\tau$  и нормального  $\vec{a}_n$  ускорений. Модуль полного ускорения равен при этом

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}, \quad (1.1.3)$$

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\vec{n}, \quad (1.1.4)$$

$$\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}, \quad \vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{v}, \quad (1.1.5)$$

$R$  — радиус кривизны траектории в данной точке,  $\vec{v}$  — скорость точки,  $\vec{n}$  — единичный вектор, направленный перпендикулярно к скорости.

Если материальная точка движется в одном измерении, то достаточно задать скалярную, зависящую от времени координату

$x(t)$ . По известной зависимости  $x(t)$  легко найти значения скорости  $v_x = dx/dt$  и ускорения  $a_x = dv_x/dt = d^2x/dt^2$ . В соответствии со своими определениями величины  $x(t)$ ,  $v_x(t)$  и  $a_x(t)$  связаны математически следующими соотношениями:

$$x(\tau) = x_0 + \int_0^{\tau} v_x(t) dt, \quad (1.1.6)$$

$$v(\tau) = v_0 + \int_0^{\tau} a_x(t) dt, \quad (1.1.7)$$

где  $x_0$  и  $v_0$  — начальные координата и скорость,  $\tau$  — время.

В случае прямолинейного равнопеременного движения (движения с постоянным ускорением) формулы (1.1.1), (1.1.2) записываются в виде

$$v = \pm v_0 \pm at, \quad (1.1.8)$$

$$x = \pm x_0 \pm v_0 t \pm \frac{at^2}{2}. \quad (1.1.9)$$

Перед  $x_0$ ,  $v_0$  и  $a$  знак «плюс» берется, когда начальная скорость  $v_0$ , координата  $x_0$  и ускорение  $a$  направлены вдоль оси  $X$ , а знак «минус», если их направление противоположно оси.

### Качественные задачи

1.1.1. На рис. 1.1 представлены графики изменения координат трех тел, движущихся прямолинейно. Написать законы движения каждого из тел и определить, какое тело имело бóльшую скорость.

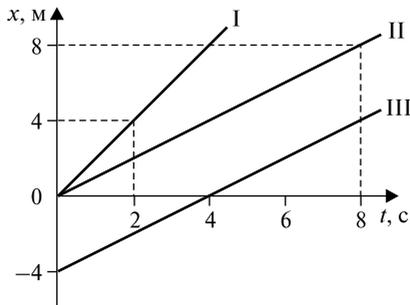


Рис. 1.1

1.1.2. Зависит ли форма траектории от выбора системы отсчета? Свой ответ проиллюстрируйте примерами.

1.1.3. Велосипедист движется со скоростью 10 м/с. Его обгоняет мотоциклист, движущийся со скоростью 54 км/ч. Какова скорость мотоциклиста относительно велосипедиста?

1.1.4. Две материальные точки движутся со скоростями  $v_1 = 4$  м/с и  $v_2 = 3$  м/с, направленными под прямым углом друг к другу. С какой скоростью удаляются материальные точки друг от друга? На сколько переместится первая точка в системе координат, связанной со второй точкой, за время  $\tau = 10$  с?

1.1.5. Какие из приведенных зависимостей описывают равномерное движение?

а)  $s = 2t + 3$ ; б)  $s = 5t^2$ ; в)  $s = 3t$ ; г)  $v = 4 - t$ ; д)  $v = 7$ , где  $s$  — путь,  $v$  — скорость,  $t$  — время\*.

1.1.6. Три тела брошены так: первое — вниз без начальной скорости, второе — вниз с начальной скоростью, третье — вертикально вверх. Тела движутся в поле сил тяжести. Что можно сказать об ускорениях этих тел? Сопротивление воздуха не учитывать.

1.1.7. Из окна железнодорожного вагона свободно падает тело. Будут ли равны между собой времена падения тела, вычисленные для случаев: а) вагон неподвижен, б) вагон движется с постоянной скоростью  $\vec{v}$ , в) вагон движется с постоянным ускорением  $\vec{a}$ ?

1.1.8. Какие из приведенных зависимостей описывают равнопеременное движение?

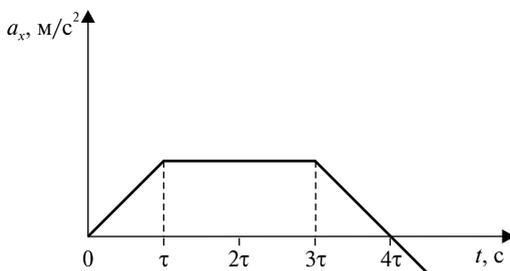


Рис. 1.2

\* В подобных записях, если нет других указаний, числовым и буквенным коэффициентам следует приписывать такие размерности, чтобы при подстановке времени в секундах значения координаты, пройденного пути, перемещения получались в метрах, значение скорости — в метрах в секунду и т.д.

а)  $v = 3 + 2t$ ; б)  $s = 3 + 2t$ ; в)  $s = 5t^2$ ; г)  $s = 4t - t^2$ ; д)  $s = 2 - 3t + 4t^2$ , где  $s$  — путь,  $v$  — скорость,  $t$  — время.

1.1.9. Зависимость скорости движущегося тела от времени  $v = 5 + 4t$ . Какова зависимость от времени пройденного пути  $s(t)$ ?

1.1.10. Материальная точка движется вдоль оси  $x$ . На рис. 1.2 приведена зависимость проекции ускорения  $a_x$  на ось  $x$  от времени  $t$ . В какой момент времени скорость  $v_x$  достигает наибольшего значения? Начальная скорость движения равна нулю.

1.1.11. Каковы направления нормального  $\vec{a}_n$  и тангенциального  $\vec{a}_\tau$  ускорений относительно траектории, чем определяются их абсолютные значения, какова их роль в изменении скорости?

1.1.12. Определить, во сколько раз численное значение нормального ускорения точки, лежащей на ободе вращающегося колеса, больше ее тангенциального ускорения для того момента, когда вектор полного ускорения составляет угол  $\alpha = 30^\circ$  с вектором ее линейной скорости?

1.1.13. Оказалось, что график зависимости скорости тела от времени имеет вид полуокружности. Максимальная скорость тела  $v_{\max}$ , время движения  $\tau$ . Определить путь, пройденный телом.

1.1.14. Модуль скорости  $v$  частицы меняется со временем по закону  $v = kt + b$ , где  $k$  и  $b$  — положительные постоянные. Модуль ускорения равен  $a = 3k$ . Найдите значения тангенциального и нормального ускорений, а также зависимость радиуса кривизны траектории от времени  $R(t)$ .

1.1.15. Зависимость радиус-вектора частицы от времени имеет вид  $\vec{r} = kt\vec{i} - bt^2\vec{j}$ , где  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  — единичные орты вдоль осей  $x$  и  $y$ ;  $k$  и  $b$  — положительные постоянные. Определите а) уравнение траектории; б) скорость  $\vec{v}$  и ускорение  $\vec{a}$  частицы.

1.1.16. Даны уравнения движения точки:  $x = 8 - t^2$ ;  $y = t^2 - \cos t$ . Определите проекцию ускорения  $a_y$  в момент времени, когда координата  $x = 0$ .

1.1.17. Даны графики ускорений  $a_n(t)$  и  $a_\tau(t)$  (рис. 1.3). Определите  $\operatorname{tg} \varphi$ , где  $\varphi$  — угол, который образует полное ускорение с направлением скорости в момент времени  $t = 2$  с.

1.1.18. Тело брошено вертикально вверх. Во сколько раз нужно изменить скорость тела в момент бросания, чтобы максимальная высота подъема изменилась в  $k$  раз? Соппротивлением воздуха пренебречь.

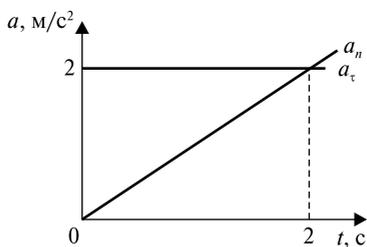


Рис. 1.3

1.1.19. Какую скорость набирает тело в конце первой минуты свободного падения? Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения равно  $g$ .

1.1.20. Под каким углом к горизонту следует бросить тело, чтобы максимальная высота подъема равнялась  $\frac{1}{4}$  дальности его полета? Сопротивлением воздуха пренебречь.

### Задачи с решениями

1.1.21. Материальная точка движется в плоскости согласно уравнениям  $x = A_1 + B_1t + C_1t^2$  и  $y = A_2 + B_2t + C_2t^2$ , где  $B_1 = 7$  м/с,  $C_1 = -2$  м/с<sup>2</sup>,  $B_2 = -1$  м/с,  $C_2 = 0,2$  м/с<sup>2</sup>.

Найти модули скорости  $v$  и ускорения  $a$  точки в момент времени  $t = 5$  с.

*Решение.* Рассмотрим два независимых движения вдоль оси  $x$  и вдоль оси  $y$ . Используя формулы  $v_x = \frac{dx}{dt}$ ,  $v_y = \frac{dy}{dt}$ , получаем  $v_x = B_1 + 2C_1t$ ,  $v_y = B_2 + 2C_2t$ . Так как векторы  $v_x$  и  $v_y$  взаимно перпендикулярны, то модуль скорости  $v$  определяется по теореме Пифагора:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(B_1 + 2C_1t)^2 + (B_2 + 2C_2t)^2} \approx 13 \text{ м/с.}$$

Составляющие  $a_x$  и  $a_y$  ускорения точки найдем по формулам  $a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$ ,  $a_y = \frac{d^2y}{dt^2}$ :  $a_x = 2C_1$ ,  $a_y = 2C_2$ . Соответственно модуль ускорения определяется выражением

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 2\sqrt{C_1^2 + C_2^2} \approx 4 \text{ м/с}^2.$$

*Ответ:*  $|\vec{v}| \approx 13$  м/с,  $|\vec{a}| \approx 4$  м/с<sup>2</sup>.

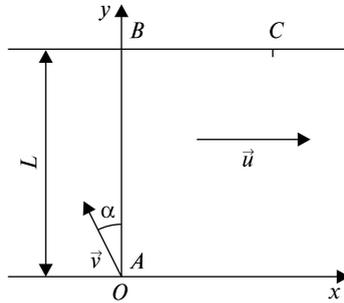


Рис. 1.4

1.1.22. Человек в лодке переплывает реку, отправляясь из точки  $A$  (рис. 1.4). Если он будет держать курс перпендикулярно берегам, то через  $t_{\perp} = 10$  мин после отправления попадет в точку  $C$ , лежащую на расстоянии  $s = 120$  м ниже точки  $B$  по течению реки. Если он будет держать курс под некоторым углом  $\alpha$  к прямой  $AB$  против течения, то через  $t_{\alpha} = 12,5$  мин попадет в точку  $B$ .

Определить ширину реки  $L$ , скорость лодки относительно воды  $v$ , угол  $\alpha$ , под которым плыл лодочник во втором случае, скорость течения реки  $u$ .

*Решение.* Делаем схематический чертеж и вводим обозначения:  $L$  — ширина реки,  $u$  — скорость течения реки,  $v$  — скорость лодки относительно воды. Выбираем систему координат  $xOy$  и рассматриваем движение лодки по  $x$  и  $y$ .

Лодочник держит курс перпендикулярно берегам:

$$x = ut_{\perp} = s;$$

$$y = vt_{\perp} = L.$$

Лодочник держит курс под углом  $\alpha$  к  $AB$ :

$$v_x = u - v \sin \alpha,$$

$$x = (u - v \sin \alpha) t_{\alpha};$$

$$v_y = v \cos \alpha,$$

$$y = v \cos \alpha \cdot t_{\alpha}.$$

Решаем полученную систему уравнений:

$$u = s/t_{\perp} = 0,33 \text{ м/с}; \cos \alpha = t_{\perp}/t_{\alpha} = 0,8;$$

$$v = u/\sin \alpha = u/\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = 0,55 \text{ м/с}; L = vt_{\perp} = 198 \text{ м}.$$

$$\text{Ответ: } u = 0,33 \text{ м/с}; \cos \alpha = 0,8; v = 0,55 \text{ м/с}; L = 198 \text{ м}.$$

1.1.23. Точка движется вдоль оси  $x$  согласно графику, изображенному на рис. 1.5. Построить графики изменения ускорения  $a(t)$  и скорости  $v(t)$  движения. Определить начальную  $v_0$  и среднюю  $v_{\text{ср}}$  скорости движения.

*Решение.* Отметим тот факт, что в момент  $t = 4$  с тело начинает двигаться в обратном направлении, следовательно, меняется характер движения с равнозамедленного на участке  $0-4$  ( $v > 0$ ,  $a < 0$ ) на равноускоренный на участке  $4-8$  ( $v < 0$ ,  $a < 0$ , т.е. знаки ускорения и скорости совпали). Используя формулу (1.1.9), имеем  $x(t) = v_0 t - |\bar{a}|t^2/2$ . По графику получим координаты точки в моменты времени  $t = 0$  с ( $x = 0$  м);  $t = 4$  с ( $x = 16$  м);  $t = 8$  с ( $x = 0$  м). Решая систему

$$\begin{cases} 8v_0 - 32|\bar{a}| = 0, \\ 4v_0 - 8|\bar{a}| = 16, \end{cases}$$

получаем  $|\bar{a}| = 2 \text{ м/с}^2$ ,  $v_0 = 8 \text{ м/с}$ .

Сказанное выше позволяет построить графики  $a(t)$  и  $v(t)$  (см. рис. 1.5).

По определению средней скорости движения имеем  $v_{\text{ср}} = s_{\text{полн}}/t_{\text{полн}} = 4 \text{ м/с}$ .

*Ответ:*  $v_0 = 8 \text{ м/с}$ ,  $v_{\text{ср}} = 4 \text{ м/с}$ .

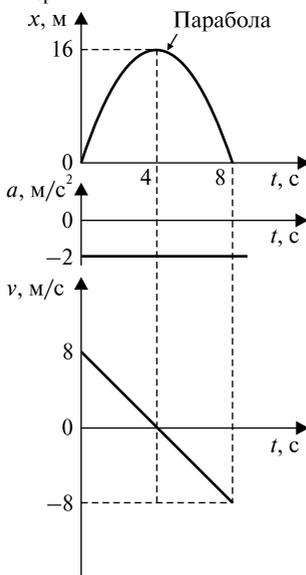


Рис. 1.5

1.1.24. Материальная точка движется прямолинейно с начальной скоростью  $v_0 = 10$  м/с и с постоянным ускорением  $a = -5$  м/с<sup>2</sup> (рис. 1.6). Определить, чему равен путь  $s$ , пройденный точкой, и модуль ее перемещения  $\Delta r$  спустя время  $t = 4$  с после начала отсчета времени.

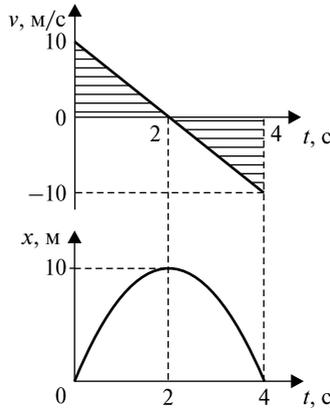


Рис. 1.6

*Решение.* Выберем систему координат, поместив начало отсчета в точку начала движения, и начертим график изменения скорости  $v(t) = v_0 - |\vec{a}|t$ . Путь — это площадь заштрихованной фигуры, ограниченной графиком  $v(t)$  и осью времени  $t$ , таким образом,  $s = 20$  м. Напишем формулу изменения координаты от времени  $x(t) = v_0 t - |\vec{a}|t^2/2$ , подставим  $v_0 = 10$  м/с,  $|\vec{a}| = 5$  м/с<sup>2</sup>,  $t = 4$  с, подсчитаем и получим  $x = 0$  (т.е. точка вернулась в исходное положение), следовательно, перемещение  $\Delta r = 0$ , так как перемещение — это вектор, соединяющий начальное и конечное положения точки и направленный в сторону конечной точки перемещения.

*Ответ:*  $s = 20$  м,  $\Delta r = 0$ .

1.1.25. За время  $\tau$  тело прошло путь  $s$ , причем его начальная скорость увеличилась в  $k$  раз. Определить величину ускорения тела  $a$ .

*Решение.* Обозначим начальную скорость движения  $v_0$ , а ускорение  $a$ . Движение равноускоренное, поэтому можно воспользоваться формулами (1.1.8) и (1.1.9):

$$v = v_0 + a\tau, s = v_0\tau + a\tau^2/2, v = kv_0.$$

Решая эту систему, получаем  $s = \frac{a\tau^2(k+1)}{2(k-1)}$ , отсюда  $a = \frac{2s(k-1)}{\tau^2(k+1)}$ .

Ответ:  $a = \frac{2s(k-1)}{\tau^2(k+1)}$ .

1.1.26. По прямой начинает двигаться материальная точка с постоянным ускорением. Спустя время  $T$  после начала ее движения ускорение меняет знак на противоположный, оставаясь неизменным по величине. Определить, через какое время  $t$  после начала движения точка вернется в исходное положение.

*Решение.* Задачу решим графически: начертим график зависимости скорости материальной точки от времени (рис. 1.7).

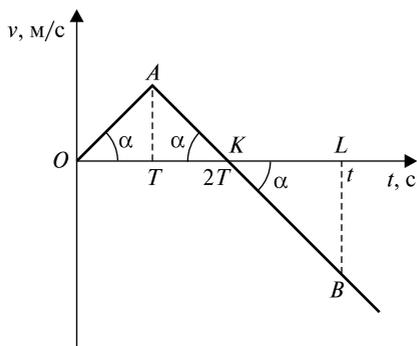


Рис. 1.7

В точке  $A$  знак ускорения материальной точки меняется на противоположный, но она продолжает двигаться в ту же сторону. В точке  $K$  материальная точка стала двигаться в противоположную сторону, так как скорость поменяла свой знак. В точке  $B$  материальная точка приходит в исходное положение. Из графического определения пути и условия, что путь  $s$  из точки  $O$  в точку  $K$  равен пути  $s$  из  $K$  в  $B$ , получаем, что площади фигур  $S_{\Delta OAK}$  и  $S_{\Delta KLB}$  равны.

Из графического определения ускорения  $a = \operatorname{tg} \alpha$  имеем:

$$S_{\Delta OAK} = T^2 \operatorname{tg} \alpha; S_{\Delta KLB} = \frac{1}{2}(t - 2T)^2 \operatorname{tg} \alpha; S_{\Delta OAK} = S_{\Delta KLB},$$

так как по условию задачи  $t > 2T$ , получаем  $\sqrt{2}T = t - 2T$ . Таким образом,  $t = T(\sqrt{2} + 2)$ .

Ответ:  $t = T(\sqrt{2} + 2)$ .

1.1.27. Камень брошен с некоторой высоты горизонтально со скоростью  $v_0 = 10$  м/с. Найти радиус кривизны  $R$  траектории камня через  $\tau = 3$  с после начала движения, а также значения нормального  $a_n$  и тангенциального  $a_\tau$  ускорений в этот момент времени. Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

*Решение.* Выберем систему координат, как показано на рис. 1.8.

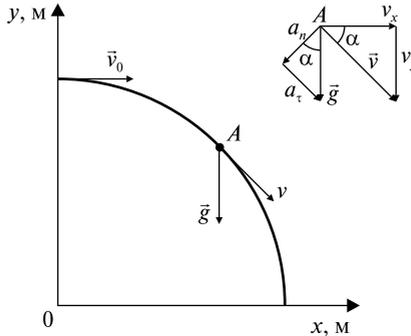


Рис. 1.8

Рассмотрим, какую скорость  $\vec{v}$  и какое ускорение  $\vec{a} = \vec{g}$  имеет камень в момент времени  $\tau$ . Разложим полную скорость по осям, а также полное ускорение — на нормальную и тангенциальную составляющие, т.е. построим треугольники скорости и ускорения. Напишем геометрические соотношения, существующие между ними:

$$v_x = v_0; v_y = gt; \cos \alpha = v_0 / (v_0^2 + (gt)^2)^{1/2}; \sin \alpha = gt / (v_0^2 + (gt)^2)^{1/2},$$

$$a_n = g \cos \alpha \approx 3,16 \text{ м/с}^2, a_\tau = g \sin \alpha \approx 9,49 \text{ м/с}^2.$$

На основе (1.1.4) имеем  $R = v^2 / a_n = (v_0^2 + (gt)^2)^{3/2} / gv_0 = 316,2$  м.  
 Ответ:  $a_n \approx 3,16$  м/с<sup>2</sup>,  $a_\tau \approx 9,49$  м/с<sup>2</sup>,  $R = 316,2$  м.

1.1.28. Тело бросают под углом  $\alpha$  к горизонту с начальной скоростью  $\vec{v}_0$ . Исследовать аналитически движение тела, пренебрегая сопротивлением воздуха. Найти:

- 1) вертикальную и горизонтальную компоненты вектора скорости и абсолютную величину скорости как функцию времени;
- 2) зависимость угла между вектором скорости и горизонтом от времени;

- 3) декартовы координаты  $x$  и  $y$  как функции времени;
- 4) уравнение траектории;
- 5) максимальную высоту полета  $h$ , дальность полета  $s$  и полное время движения  $t$ .

*Решение.* Прямоугольную систему координат выбираем так, чтобы ее начало совпало с точкой бросания, а оси были направлены вдоль поверхности земли и по нормали к ней (рис. 1.9). Движение тела, брошенного под углом к горизонту, можно представить как результат сложения двух прямолинейных движений — по оси  $x$  и по оси  $y$ . Полное ускорение тела в каждый момент времени равно  $\vec{g}$  и направлено вертикально вниз. Следовательно, движение по  $x$  равномерное, а по  $y$  — равнопеременное.

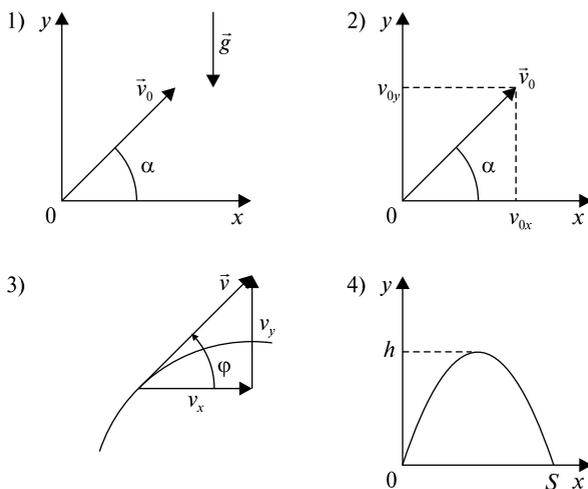


Рис. 1.9

1) Используем выражение (1.1.8):

$$x: v_{0x} = v_0 \cos \alpha = v_x = \text{const};$$

$$y: v_{0y} = v_0 \sin \alpha, v_y = v_0 \sin \alpha - gt.$$

Применяя теорему Пифагора, получаем  $v = (v_x^2 + v_y^2)^{1/2} = [v_0^2 - 2v_0gt \sin \alpha + (gt)^2]^{1/2}$ .

$$2) \operatorname{tg} \varphi = v_y / v_x = (v_0 \sin \alpha - gt) / v_0 \cos \alpha = \operatorname{tg} \alpha - gt / v_0 \cos \alpha.$$

3) Согласно формулам (1.1.6) и (1.1.9):  $x = v_0 \cos \alpha \cdot t$ ;  $y = v_0 \sin \alpha \cdot t - gt^2/2$ .

4) Траекторией движения материальной точки называют линию, описываемую этой точкой в пространстве в процессе движения, т.е. в данном случае следует получить зависимость  $y(x)$ . Используя выражения, полученные в пункте 3), имеем  $t = x/v_0 \cos \alpha$ ,  $y = v_0 \sin \alpha \cdot (x/v_0 \cos \alpha) - (g/2)(x/v_0 \cos \alpha)^2$ . Получаем  $y = x \operatorname{tg} \alpha - x^2 g / 2v_0^2 \cos^2 \alpha$ . Таким образом, мы получили, что тело, брошенное под углом к горизонту, в отсутствие сопротивления воздуха движется по параболе.

5) Решая полученное квадратное уравнение  $y = y(x)$ , находим дальность полета  $s$ :  $y = 0$ ;  $x(\operatorname{tg} \alpha - xg/2(v_0 \cos \alpha)^2) = 0$ ;  $x_1 = 0$  (начало движения),  $x_2 = s = (v_0^2 \sin 2\alpha)/g$ .

Время движения  $t = x/v_0 \cos \alpha = (2v_0 \sin \alpha)/g$ .

Максимальная высота подъема:  $y$  (при  $x = s/2$ )  $= h = (v_0 \sin \alpha)^2 / 2g$ .

*Ответ:* 1)  $v_x = v_0 \cos \alpha$ ,  $v_y = v_0 \sin \alpha - gt$ ,  $v = (v_0^2 - 2v_0 gt \sin \alpha + (gt)^2)^{1/2}$ ; 2)  $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \alpha - gt/v_0 \cos \alpha$ ; 3)  $x = v_0 \cos \alpha \cdot t$ ;  $y = v_0 \sin \alpha \cdot t - gt^2/2$ ; 4)  $y = x \operatorname{tg} \alpha - x^2 g / 2v_0^2 \cos^2 \alpha$ ; 5)  $s = (v_0^2 \sin 2\alpha)/g$ ,  $t = (2v_0 \sin \alpha)/g$ ,  $h = (v_0 \sin \alpha)^2 / 2g$ .

1.1.29. Камень бросают со скоростью  $v_0$  под углом  $\alpha$  к горизонту. Через какое время  $t$  скорость камня будет составлять угол  $\beta$  с горизонтом? Сопротивлением воздуха пренебречь.

*Решение.* Траектория камня  $y(x)$  представляет собой параболу, и вектор скорости в каждой точке касателен к траектории. Возьмем произвольную точку траектории и начертим треугольник скорости. Из тригонометрических соображений получаем:  $\operatorname{tg} \beta = v_y/v_x = (v_0 \sin \alpha - gt)/v_0 \cos \alpha = \operatorname{tg} \alpha - gt/v_0 \cos \alpha$ . Решая это уравнение относительно  $t$ , получаем  $t = (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)(v_0/g) \cos \alpha$ .

*Ответ:*  $t = (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)(v_0/g) \cos \alpha$ .

1.1.30. Материальная точка движется, замедляясь, по прямой с ускорением  $\vec{a}$ , модуль которого зависит от ее скорости  $v$  по закону  $|\vec{a}| = b\sqrt{v}$ , где  $b$  — положительная постоянная. В начальный момент скорость точки равна  $v_0$ . Какой путь она пройдет до остановки? За какое время она пройдет этот путь?

*Решение.* По условию задачи точка движется замедляясь, следовательно, если  $v > 0$ , то  $a < 0$ , получаем зависимость ускорения  $a = -b\sqrt{v}$ . Вспомним определение ускорения  $a = dv/dt = -b\sqrt{v}$ . Таким образом, получаем  $dt = -dv/b\sqrt{v}$ . Обозначим  $t_{\text{п}}$  — время движения точки до остановки, и проинтегрируем обе части по-

следнего равенства:  $\int_0^{t_n} dt = -\int_{v_0}^0 \frac{dv}{b\sqrt{v}}$ . Получаем  $t_n = 2\sqrt{v_0}/b$ . Теперь определим путь, который прошло тело до полной остановки:

$s = \int_0^{t_n} v(t) dt$ . Таким образом, необходимо определить зависимость  $v(t)$ . Для этого мы предыдущий интеграл возьмем, как неопределенный, и получим  $t = 2\sqrt{v}/b$ , откуда  $v = (bt/2)^2$ . Теперь определим

$$s = \int_0^{t_n} \left(\frac{bt}{2}\right)^2 dt = b^2 t_n^3 / 12 = 2v_0^{3/2} / 3b.$$

*Ответ:*  $s = 2v_0^{3/2} / 3b$ ,  $t_n = 2\sqrt{v_0}/b$ .

### Задачи без решения

1.1.31. Уравнение движения материальной точки вдоль оси имеет вид  $x = A + Bt + Ct^3$ , где  $A = 2$  м,  $B = 1$  м/с,  $C = -0,5$  м/с<sup>3</sup>. Найти координату  $x$ , скорость  $v_x$  и ускорение  $a_x$  в момент времени  $\tau = 2$  с.

1.1.32. Города  $A$  и  $B$  расположены на одном берегу реки, причем город  $B$  расположен ниже по течению. Одновременно из города  $A$  в город  $B$  отправляется плот, а из города  $B$  в город  $A$  — лодка, которая встречается с плотом через  $\tau = 5$  ч. Доплыв до города  $A$ , лодка поворачивает обратно и приплывает в город  $B$  одновременно с плотом. Сколько времени  $t$  плот и лодка находились в движении?

1.1.33. По графику зависимости скорости движения тела от времени (рис. 1.10) начертить графики изменения ускорения  $a(t)$  и координаты  $x(t)$ . Определить графически полный путь  $s$ , который прошло тело при своем движении. Считать начальную координату равной нулю.

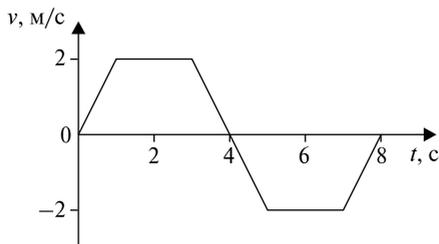


Рис. 1.10

1.1.34. Дана зависимость ускорения  $a(t)$  тела, движущегося прямолинейно (рис. 1.11). Начертить графики изменения скорости  $v(t)$  и координаты  $x(t)$  тела. Считать начальные скорость и координату равными нулю. Определить графически полный путь  $s$ .

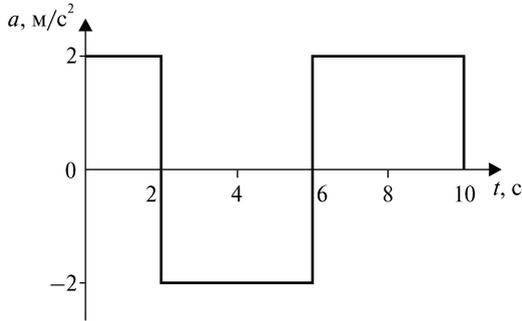


Рис. 1.11

1.1.35. Материальная точка движется в положительном направлении оси  $x$  так, что ее скорость меняется по закону  $v = b\sqrt{x}$ , где  $b$  — положительная постоянная. Найти зависимость от времени скорости и ускорения точки, считая, что в момент времени  $t = 0$  координата  $x = 0$ .

1.1.36. Тело брошено вертикально вверх. Во сколько раз нужно изменить скорость тела в момент бросания, чтобы максимальная высота подъема изменилась в  $k$  раз? Во сколько раз изменится время подъема?

1.1.37. Два тела падают с высоты  $H = 20$  м без начальной скорости, но одно из них встречает на своем пути закрепленную площадку, наклоненную под углом  $\alpha = 45^\circ$  к горизонту. В результате удара о площадку направление скорости становится горизонтальным. Место удара находится на высоте  $h = 10$  м. Определите время падения тел  $t_1$  и  $t_2$ .

1.1.38. Самолет летит по наклонной прямой, составляющей угол  $\alpha$  с горизонтом, неизменно набирая высоту с постоянной скоростью  $\vec{v}_0$ . В момент времени  $t = 0$ , когда самолет находится на высоте  $H$ , с него падает бомба. Определите время  $t$  падения бомбы и дальность  $s$  ее полета.

1.1.39. Определите, чему равно полное ускорение  $\vec{a}$ , а также его нормальная  $\vec{a}_n$  и тангенциальная  $\vec{a}_t$  составляющие и радиус кривизны.

визны  $R$  в высшей точке подъема тела, брошенного под углом  $\alpha$  к горизонту с начальной скоростью  $\vec{v}_0$ .

1.1.40. Тело брошено под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту со скоростью  $v_0 = 30$  м/с. Каковы будут значения нормального и тангенциального ускорений тела через  $\tau = 1$  с после начала движения? Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

1.1.41. На наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha$  к горизонту бросают камень с начальной скоростью  $v_0$  под углом  $\beta$  к наклонной плоскости. На каком расстоянии  $s$  от точки бросания упадет этот камень на наклонную плоскость?

1.1.42. Шарик бросают под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту с начальной скоростью  $v_0 = 14$  м/с. На расстоянии  $L = 11$  м от места бросания шарик упруго ударяется о вертикальную стену. На каком расстоянии  $s$  от стены шарик упадет на землю?

1.1.43. С высокого берега брошен камень со скоростью  $v_0 = 10$  м/с, направленной вниз под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту. Найдите высоту точки  $H$ , с которой был брошен камень, если дальность полета камня  $s = 20$  м.

1.1.44. На наклонной плоскости с углом наклона к горизонту  $\beta$  бросают перпендикулярно плоскости камень с начальной скоростью  $v_0$ . На каком расстоянии  $s$  от точки бросания упадет камень на наклонную плоскость?

## ТЕМА 1.2 ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Решение задач динамики основано на последовательном применении трех законов Ньютона. Первый закон Ньютона гласит, что тело, достаточно удаленное от других тел, сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения. Системы отсчета, в которых выполняется первый закон Ньютона, называются инерциальными системами отсчета.

Уравнение второго закона имеет вид

$$\sum \vec{F}_i = m\vec{a}, \quad (1.2.1)$$

где  $\vec{a}$  — ускорение тела,  $m$  — его масса,  $\sum \vec{F}_i$  — равнодействующая всех сил, действующих на тело. Второй закон Ньютона, который называют также уравнением движения, можно записать в виде

$$\sum \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (1.2.2)$$

где  $\vec{p} = m\vec{v}$  — импульс материальной точки.

Третий закон Ньютона говорит о том, что при взаимодействии двух материальных точек каждая из них действует на другую с одинаковой по значению, но противоположной по направлению силой.

При решении многих задач важно уметь правильно оценить величину силы сухого трения, которая возникает при относительном перемещении двух соприкасающихся твердых тел. В зависимости от характера относительного перемещения соприкасающихся твердых тел различаются два вида трения: а) трение скольжения, возникающее при скольжении одного тела по другому; б) трение качения, возникающее при качении одного тела по другому. Мы рассмотрим только силы трения скольжения. Эти силы направлены вдоль поверхности соприкосновения тел в сторону, противоположную перемещению, и определяются формулой

$$F = kN, \quad (1.2.3)$$

где  $N$  — сила нормального давления одного тела на другое, перпендикулярная поверхности соприкосновения тел,  $k$  — коэффициент трения скольжения. Сила трения возникает не только при скольжении, но и при попытках вызвать такое скольжение у по-

клящегося тела, воздействуя на тело силой  $\vec{F}$ . В этом случае говорят о силе трения покоя. До тех пор пока модуль внешней силы  $F$  не превзойдет значения  $kN$ , скольжения не возникает — сила  $F$  уравновешивается силой трения покоя  $F_{\text{тр.п}}$ , которая автоматически принимает значение, равное модулю силы  $F$ . При достижении силой  $F$  значения  $kN$  возникает скольжение, и сила трения покоя переходит в силу трения скольжения. Если движение тела происходит в жидкости или газе, то возникают силы вязкого трения, т.е. это трение, которое возникает между различными слоями жидкости или газа, скорости которых меняются от слоя к слою. В отличие от сухого трения, в этом случае сила трения покоя отсутствует, а само значение силы вязкого трения зависит от скорости ( $v$ ,  $v^2$ ,  $v^3$  и т.д.) движущегося в среде тела. При малых скоростях  $\vec{F}_{\text{тр}} = -b\vec{v}$ , где  $b = \text{const}$ .

### Качественные задачи

1.2.1. В чем физическое содержание первого закона Ньютона? Какой смысл имеет понятие силы в механике Ньютона?

1.2.2. Может ли подвешенный к нити шарик вращаться по окружности так, чтобы нить и шарик находились в одной горизонтальной плоскости?

1.2.3. Лежащая на столе книга давит вниз на стол с силой  $F$ . Стол действует на книгу с такой же силой вверх. Можно ли найти равнодействующую этих сил?

1.2.4. К чему приложены вес тела, сила тяготения, сила тяжести?

1.2.5. Согласно третьему закону Ньютона при перетягивании каната каждая команда действует на соперника с равной силой. Чем же тогда определяется, какая команда победит?

1.2.6. Может ли коэффициент трения превышать 1,0?

1.2.7. Предложите метод измерения коэффициента трения с помощью наклонной плоскости.

1.2.8. Камень привязан к веревке и движется по окружности в вертикальной плоскости. Одинаковы ли натяжения веревки в верхней и нижней точках?

1.2.9. Тело соскальзывает из точки  $A$  в точку  $B$  (рис. 1.12) один раз по дуге  $AMB$ , другой раз по дуге  $AKB$ . Коэффициент трения один и тот же. В каком случае скорость тела в точке  $B$  больше?

1.2.10. Чему равно численное значение равнодействующей двух сил 4 Н и 3 Н, действующих под углом а)  $90^\circ$ ; б)  $120^\circ$  друг к другу?

1.2.11. Тело покоится при наличии трех действующих на него сил (рис. 1.13). Какова величина равнодействующей сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ ? Численные значения сил равны соответственно  $F_1 = 4$  Н,  $F_2 = 6$  Н,  $F_3 = 5$  Н.

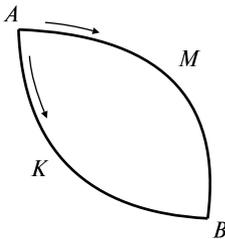


Рис. 1.12

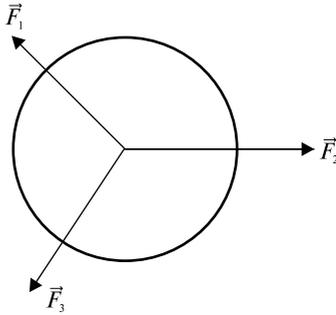


Рис. 1.13

### Задачи с решениями

1.2.12. Два тела, массы которых  $M_1$  и  $M_2$ , связаны нерастяжимой и невесомой нитью и лежат на горизонтальной поверхности. Коэффициенты трения тел о поверхность равны соответственно  $k_1$  и  $k_2$ . К телам приложены силы  $F_1$  и  $F_2$  под углами  $\alpha$  и  $\beta$  к горизонту. Система движется вправо. Определите ускорение движения  $\vec{a}$  системы и силу натяжения нити  $T$ .

*Решение.* Выберем направление координатных осей  $x$  и  $y$  так, как показано на рис. 1.14. На рассматриваемые тела действуют силы: сила тяжести  $M_{1,2}\vec{g}$ , сила нормального давления  $\vec{N}_{1,2}$ , сила трения  $\vec{F}_{\text{тр}1,2}$ , сила натяжения нити  $\vec{T}_{1,2}$  и внешние силы  $\vec{F}_{1,2}$ . Уравнение (1.2.1) для тел  $M_1$  и  $M_2$  в векторном виде имеет вид

$$\vec{F}_{1,2} + \vec{N}_{1,2} + M_{1,2}\vec{g} + \vec{F}_{\text{тр}1,2} + \vec{T}_{1,2} = M_{1,2}\vec{a}.$$

Проекции данных сил на выбранные координатные оси записываются следующим образом:

$$\text{проекция на ось } x: F_1 \cos \alpha - F_{\text{тр}1} - T = M_1 a; \quad (1)$$

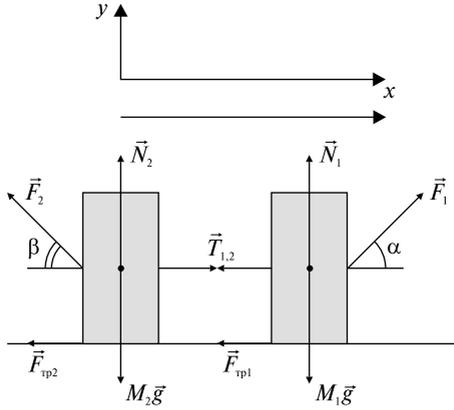


Рис. 1.14

проекция на ось  $y$ :  $F_1 \sin \alpha + N_1 - M_1 g = 0;$  (2)

$$F_{\text{тр}1} = k_1 N_1; \quad (3)$$

проекция на ось  $x$ :  $T - F_2 \cos \beta - F_{\text{тр}2} = M_2 a;$  (4)

проекция на ось  $y$ :  $F_2 \sin \beta + N_2 - M_2 g = 0;$  (5)

$$F_{\text{тр}2} = k_2 N_2. \quad (6)$$

Складывая уравнения (1) и (4), получаем

$$F_1 \cos \alpha - k_1 N_1 - F_2 \cos \beta - k_2 N_2 = (M_1 + M_2) a.$$

Выражая  $N_1$  и  $N_2$  из (2) и (5), имеем

$$a = [F_1 \cos \alpha - F_2 \cos \beta - k_1 (M_1 g - F_1 \sin \alpha) - k_2 (M_2 g - F_2 \sin \beta)] / (M_1 + M_2).$$

Подставляя полученное значение ускорения  $a$  в уравнение (1), находим выражение для натяжения нити

$$T = F_1 \cos \alpha - k_1 (M_1 g - F_1 \sin \alpha) - M_1 a.$$

*Ответ:*  $a = [F_1 \cos \alpha - F_2 \cos \beta - k_1 (M_1 g - F_1 \sin \alpha) - k_2 (M_2 g - F_2 \sin \beta)] / (M_1 + M_2), T = F_1 \cos \alpha - k_1 (M_1 g - F_1 \sin \alpha) - M_1 a.$

1.2.13. Вверх по наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha$  пущена шайба. Через некоторое время она останавливается и соскальзывает вниз. Определите коэффициент трения  $k$  шайбы о плоскость, если время спуска в  $n$  раз больше времени подъема.

*Решение.* Рассмотрим вначале движение шайбы вверх (подъем). Выберем направление координатных осей таким образом, чтобы направление одной из координатных осей совпадало с направлением ускорения (рис. 1.15). Определим все силы, действующие на шайбу, и напишем уравнение движения в векторном виде (1.2.1):

$$M\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} = M\vec{a}_{\text{п}}, \quad (1)$$

а затем в проекциях на оси:

$$x: F_{\text{тр}} + Mg \sin \alpha = Ma_{\text{п}}; \quad (2)$$

$$y: N - Mg \cos \alpha = 0; \quad (3)$$

$$F_{\text{тр}} = kN. \quad (4)$$

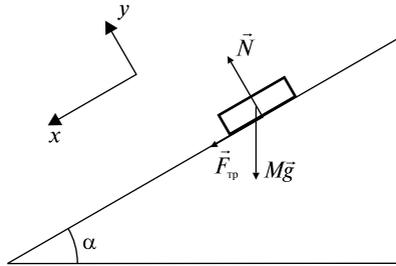


Рис. 1.15

Кинематические уравнения (1.1.13), (1.1.14), описывающие движение шайбы вверх, имеют вид

$$-v_{\text{к}} = -v_0 + a_{\text{п}}t_{\text{п}} = 0; \quad (5)$$

$$-L = -v_0t_{\text{п}} + a_{\text{п}}t_{\text{п}}^2/2. \quad (6)$$

Здесь учитывается тот факт, что шайба в верхней точке подъема по наклонной плоскости останавливается, т.е.  $v_{\text{к}} = 0$ . Прodelываем аналогичные рассуждения для описания движения шайбы вниз, учитывая, что сила трения скольжения всегда противоположна направлению движения и что путь, пройденный шайбой вверх, равен пути спуска:

$$x: -F_{\text{тр}} + Mg \sin \alpha = Ma_{\text{с}}; \quad (7)$$

$$y: N - Mg \cos \alpha = 0; \quad (8)$$

$$F_{\text{тр}} = kN, \quad (9)$$

$$L = a_c t_c^2 / 2. \quad (10)$$

Из уравнения (5) находим  $v_0 = a_{\text{п}} t_{\text{п}}$ , подставляем в (6) и получаем  $L = a_{\text{п}} t_{\text{п}}^2 / 2$ . Следовательно,  $a_{\text{п}} t_{\text{п}}^2 / 2 = a_c t_c^2 / 2$ , откуда, зная соотношение между временем спуска и временем подъема, определим соотношение между ускорениями  $a_{\text{п}} / a_c = n^2$ . Решая уравнения (2)–(4) и (7)–(9), получаем

$$kMg \cos \alpha + Mg \sin \alpha = Ma_{\text{п}},$$

$$Mg \sin \alpha - kMg \cos \alpha = Ma_c.$$

Делим почленно два последних уравнения:

$$(k \cos \alpha + \sin \alpha) / (\sin \alpha - k \cos \alpha) = a_{\text{п}} / a_c = n^2.$$

Решая это уравнение относительно  $k$ , находим

$$k = \text{tg} \alpha (n^2 - 1) / (n^2 + 1).$$

*Ответ:*  $k = \text{tg} \alpha \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$ .

1.2.14. Два груза связаны между собой невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через блок. Плоскости, на которых лежат грузы, составляют с горизонтом углы  $\alpha$  и  $\beta$  (рис. 1.16). Правый груз находится ниже левого на  $h$  м. Через  $\tau$  секунд после начала движения оба груза оказались на одной высоте. Коэффициент трения между грузами и плоскостью  $k$ . Определите отношение масс грузов  $M_1$  и  $M_2$ .

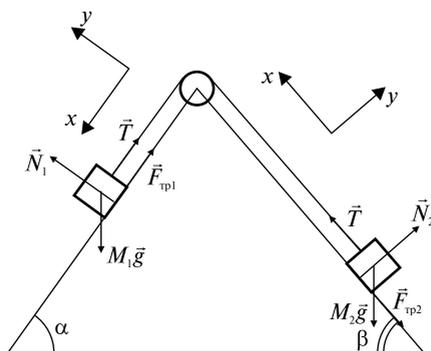


Рис. 1.16

*Решение.* Выберем направление координатных осей для каждого из тел, руководствуясь условием, что положительное направление одной из координатных осей совпадает с направлением ускорения (см. рис. 1.16). Определим силы, действующие на каждое из тел. Так как мы считаем нить, связывающую тела, нерастяжимой, то ускорения тел равны. Напишем уравнения движения тел:

$$\vec{T} + \vec{F}_{\text{тр}1} + M_1 \vec{g} + \vec{N}_1 = M_1 \vec{a}, \quad (1)$$

$$\text{проекция на ось } x: -T + M_1 g \sin \alpha - F_{\text{тр}1} = M_1 a, \quad (2)$$

$$\text{проекция на ось } y: N_1 - M_1 g \cos \alpha = 0, \quad (3)$$

$$F_{\text{тр}1} = kN_1; \quad (4)$$

$$\vec{T} + \vec{F}_{\text{тр}2} + M_2 \vec{g} + \vec{N}_2 = M_2 \vec{a}, \quad (5)$$

$$\text{проекция на ось } x: T - M_2 g \sin \beta - F_{\text{тр}2} = M_2 a, \quad (6)$$

$$\text{проекция на ось } y: N_2 - M_2 g \cos \beta = 0, \quad (7)$$

$$F_{\text{тр}2} = kN_2. \quad (8)$$

Так как нить нерастяжима, тела за время  $\tau$  переместились вдоль поверхностей на одинаковые расстояния:  $s_1 = s_2 = a\tau^2/2$ . Из геометрических построений имеем  $h_1 = s_1 \sin \alpha = \frac{1}{2}a\tau^2 \sin \alpha$  и  $h_2 = \frac{1}{2}a\tau^2 \sin \beta$ . По условию  $h_1 + h_2 = h$ , или

$$\frac{a\tau^2}{2}(\sin \alpha + \sin \beta) = h. \quad (9)$$

Выразим из уравнений (3) и (7)  $N_1$  и  $N_2$  соответственно и подставим их в (4) и (8). Тогда уравнения (2) и (6) примут вид

$$-T + M_1 g \sin \alpha - kM_1 g \cos \alpha = M_1 a,$$

$$T - M_2 g \sin \beta - kM_2 g \cos \beta = M_2 a.$$

Складывая их, найдем ускорение

$$a = \frac{M_1 g \sin \alpha - M_2 g \sin \beta - kg(M_1 \cos \alpha + M_2 \cos \beta)}{M_1 + M_2}. \quad (10)$$

Определяя ускорение из уравнения (9)

$$a = \frac{2h}{\tau^2(\sin \alpha + \sin \beta)} \quad (11)$$

и приравнявая (10) и (11), получаем

$$\frac{2h}{\tau^2(\sin \alpha + \sin \beta)} = \frac{M_1 g \sin \alpha - M_2 g \sin \beta - kg(M_1 \cos \alpha + M_2 \cos \beta)}{M_1 + M_2},$$

откуда 
$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{\tau^2 g (\sin \alpha + \sin \beta) (\sin \beta + k \cos \beta) + 2h}{\tau^2 g (\sin \alpha + \sin \beta) (\sin \alpha - k \cos \alpha) - 2h}.$$

Ответ: 
$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{\tau^2 g (\sin \alpha + \sin \beta) (\sin \beta + k \cos \beta) + 2h}{\tau^2 g (\sin \alpha + \sin \beta) (\sin \alpha - k \cos \alpha) - 2h}.$$

1.2.15. Дана система блоков и тел, показанная на рис. 1.17. К телу массой  $M_2$  приложили силу  $\vec{F}$ , направленную под углом  $\alpha$  к горизонту. Коэффициенты трения между горизонтальной поверхностью и телами массами  $M_1$  и  $M_2$ , равны соответственно  $k_1$  и  $k_2$ . Нить, соединяющая тела, невесома и нерастяжима. Блоки неподвижны и невесома. Определить ускорение  $\vec{a}$  тел и натяжение нити  $T$ .

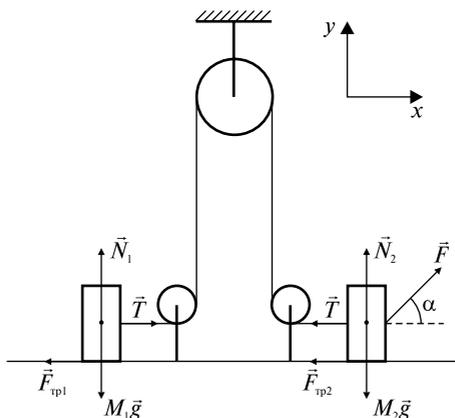


Рис. 1.17

*Решение.* Определим все силы, действующие на каждое из тел. Напишем второй закон Ньютона в векторной форме:

$$\vec{F} + M_2 \vec{g} + \vec{F}_{\text{тр}2} + \vec{N}_2 + \vec{T} = M_2 \vec{a}, \quad (1)$$

$$M_1 \vec{g} + \vec{F}_{\text{тр}1} + \vec{N}_1 + \vec{T} = M_1 \vec{a}. \quad (2)$$

Вводя оси координат и заменяя векторные уравнения (1) и (2) скалярными равенствами, получаем систему уравнений, решение которой позволит определить значение ускорения  $a$  и натяжение нити  $T$ :

$$\left. \begin{aligned} x: F \cos \alpha - F_{\text{тр}2} - T &= M_2 a, \\ y: F \sin \alpha + N_2 - M_2 g &= 0, \\ F_{\text{тр}2} &= k_2 N_2, \end{aligned} \right\}$$

$$N_2 = M_2 g - F \sin \alpha;$$

$$F \cos \alpha - T - k_2(M_2 g - F \sin \alpha) = M_2 a, \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} x: T - F_{\text{тр}1} &= M_1 a, \\ y: N_1 - M_1 g &= 0, \\ F_{\text{тр}1} &= k_1 N_1, \end{aligned} \right\}$$

$$N_1 = M_1 g,$$

$$T - k_1 M_1 g = M_1 a. \quad (4)$$

Складывая (3) и (4), получаем

$$F \cos \alpha - k_2(M_2 g - F \sin \alpha) - k_1 M_1 g = (M_1 + M_2) a,$$

$$a = \frac{F \cos \alpha - k_2(M_2 g - F \sin \alpha) - k_1 M_1 g}{M_1 + M_2},$$

$$T = M_1 a + k_1 M_1 g = M_1(a + k_1 g).$$

$$\text{Ответ: } a = \frac{F \cos \alpha - k_2(M_2 g - F \sin \alpha) - k_1 M_1 g}{M_1 + M_2}, \quad T = M_1(a + k_1 g).$$

1.2.16. На рис. 1.18 показан блок пренебрежимо малой массы, подвешенный к пружинным весам. К концам нити, переброшенной через блок, прикреплены грузы  $M_1 = 1$  кг и  $M_2 = 5$  кг. Грузы движутся с ускорением под действием силы тяжести. Трение в блоке отсутствует. Что покажут весы?

*Решение.* Рассмотрим все силы, приложенные к телам  $M_1$  и  $M_2$ , блоку, пружинным весам. Условие отсутствия трения в блоке позволяет считать равными силы натяжения нити в любом ее сечении. Выберем направления координатной оси  $x$  и запишем уравнения движения каждого из тел:

$$M_2 g - T_1 = M_2 a,$$

$$T_1 - M_1 g = M_1 a,$$

$$2T_1 - T_2 = 0.$$

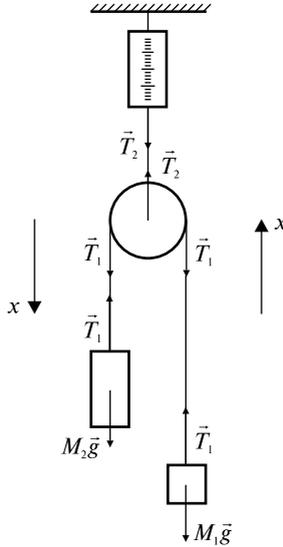


Рис. 1.18

Весом тела называют силу, которая в положении равновесия растягивает пружину, если к ней подвесить тело. В нашем случае это величина, равная  $T_2$ .

Из вышеприведенной системы уравнений находим

$$a = \frac{M_2 - M_1}{M_1 + M_2} g,$$

$$T_1 = M_1 g + M_1 \frac{M_2 - M_1}{M_1 + M_2} g = 16 \text{ Н},$$

$$T_2 = 2T_1 = 32 \text{ Н}.$$

Такая сила соответствует массе тела  $m = 3,2$  кг. Таким образом, пружинные весы показывают 3,2 кг, т.е. меньше, чем сумма масс обоих тел, равная 6 кг.

*Ответ:* 3,2 кг.

1.2.17. На краю наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha$  лежит тело. Плоскость равномерно вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью  $\omega$ . Расстояние от тела до оси вращения  $R$  (рис. 1.19). Определите наименьший коэффициент трения  $k_0$ , при котором тело удерживается на вращающейся наклонной плоско-

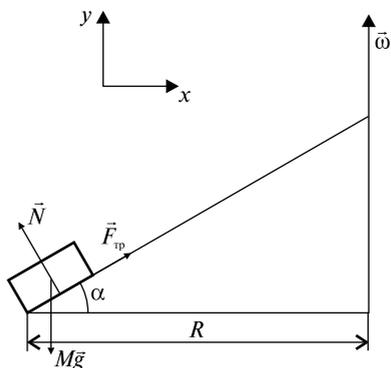


Рис. 1.19

сти. Рассмотреть два предельных случая: 1) тело находится на горизонтальной плоскости, которая равномерно вращается вокруг вертикальной оси; 2) тело лежит на неподвижной наклонной плоскости.

*Решение.* При решении задачи вспомним, что кроме трения скольжения существует также трение покоя, которое характеризует силу сопротивления при любых попытках сдвинуть тело. Рассмотрим тело, например стол, который покоится на горизонтальном полу. Когда на стол в горизонтальном направлении никакого действия не оказывают, отсутствует и сила трения. Предположим теперь, что Вы пытаетесь сдвинуть стол, но он не двигается. Раз Вы прилагаете горизонтальную силу, а стол не двигается, то должна существовать другая действующая на стол сила, препятствующая его движению  $\left( \sum_i \vec{F}_i = 0 \right)$ . Это — сила трения

покоя, действующая на стол со стороны пола. Если Вы толкаете стол с еще большей силой, а он так и не сдвинулся, то это означает, что сила трения покоя также увеличилась. Наконец, Вы приложили достаточно большое усилие, и стол сдвинулся. В это время приложенная Вами сила стала больше максимальной силы трения покоя, определяемой выражением  $F_{\text{тр}} = k_{\text{п}} N$ , где  $k_{\text{п}}$  — коэффициент трения покоя. Поскольку сила трения покоя изменяется от нуля до этого максимального значения, можно записать  $F_{\text{тр}} \leq k_{\text{п}} N$ . Возможно, Вы замечали, что зачастую легче поддерживать состояние движения тяжелого тела, чем впервые сдвинуть его с места. В этом наблюдении отражается тот факт, что  $k_{\text{п}}$  почти всегда пре-

восходит  $k_{\text{ск}}$  (коэффициент трения скольжения) и уж во всяком случае никогда не может быть меньше.

После этих рассуждений приступим к решению задачи. Рассмотрим силы, действующие на тело: сила тяжести  $M\vec{g}$ , сила трения покоя  $\vec{F}_{\text{тр}}$ , так как относительно наклонной плоскости тело покоится, сила реакции опоры  $\vec{N}$ .

Напишем второй закон Ньютона в векторной форме, учитывая тот факт, что тело вращается вместе с наклонной плоскостью:

$$\vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N} + M\vec{g} = M\vec{a}.$$

Выберем направление координатных осей, как показано на рис. 1.19, и напишем уравнение движения нашего тела в скалярной форме:

$$x: F_{\text{тр}} \cos \alpha - N \sin \alpha = M\omega^2 R,$$

$$y: N \cos \alpha + F_{\text{тр}} \sin \alpha - Mg = 0,$$

$$F_{\text{тр}} = k_0 N.$$

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} k_0 N \cos \alpha - N \sin \alpha = M\omega^2 R, \\ N \cos \alpha + F_{\text{тр}} \sin \alpha = Mg, \end{cases}$$

делим правые и левые части:

$$\frac{k_0 \cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + k_0 \sin \alpha} = \frac{\omega^2 R}{g};$$

$$gk_0 \cos \alpha - g \sin \alpha = \omega^2 R \cos \alpha + k_0 \omega^2 R \sin \alpha,$$

$$k_0(g \cos \alpha - \omega^2 R \sin \alpha) = \omega^2 R \cos \alpha + g \sin \alpha,$$

получаем

$$k_0 = \frac{\omega^2 R \cos \alpha + g \sin \alpha}{g \cos \alpha - \omega^2 R \sin \alpha}.$$

Проанализируем ответ:  $k_0 > 0$ , следовательно,  $g \cos \alpha - \omega^2 R \times \sin \alpha > 0$ , т.е.  $\text{tg} \alpha < g/\omega^2 R$ . Если это условие не выполнено, то никакая сила трения не в силах удержать тело на вращающейся наклонной плоскости.

Предельные случаи: 1)  $\alpha = 0$ ,  $k_0 = \omega^2 R/g$ ;  
2)  $\omega = 0$ ,  $k_0 = \text{tg} \alpha$ .

Вам предлагается проверить эти ответы.

Ответ:  $k_0 = \frac{\omega^2 R \cos \alpha + g \sin \alpha}{g \cos \alpha - \omega^2 R \sin \alpha}$ , 1)  $\alpha = 0$ ,  $k_0 = \omega^2 R/g$ , 2)  $\omega = 0$ ,  
 $k_0 = \operatorname{tg} \alpha$ .

1.2.18. Сфера радиусом  $R$  вращается с угловой скоростью  $\vec{\omega}$  вокруг вертикальной оси. При каком минимальном значении коэффициента трения  $k_0$  тело будет удерживаться на поверхности, не скользя по ней? Задачу решить для двух случаев (рис. 1.20):

а) угол равен  $\alpha$ , тело на внешней поверхности сферы;

б) угол равен  $\beta$ , тело на внутренней поверхности сферы (эту часть задачи решить самостоятельно).

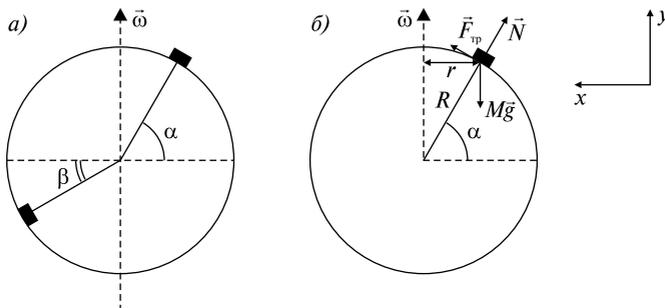


Рис. 1.20

*Решение.* а) Определим силы, действующие на тело. Напишем уравнение движения

$$\vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N} + M\vec{g} = M\vec{a}$$

и определим проекции этих сил на координатные оси  $x$  и  $y$ :

$$x: F_{\text{тр}} \sin \alpha - N \cos \alpha = M\omega^2 r,$$

$$y: N \sin \alpha + F_{\text{тр}} \cos \alpha - Mg = 0,$$

$$F_{\text{тр}} = k_0 N,$$

$$r = R \cos \alpha.$$

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} k_0 N \sin \alpha - N \cos \alpha = M\omega^2 R \cos \alpha, \\ N \sin \alpha + F_{\text{тр}} \cos \alpha = Mg. \end{cases}$$

Поделим уравнения почленно:

$$\frac{k_0 \sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + k_0 \cos \alpha} = \frac{\omega^2 R \cos \alpha}{g};$$

$$gk_0 \sin \alpha - g \cos \alpha = \omega^2 R \cos \alpha \sin \alpha + k_0 \omega^2 R \cos^2 \alpha,$$

$$k_0(g \sin \alpha - \omega^2 R \cos^2 \alpha) = g \cos \alpha + \omega^2 R \cos \alpha \sin \alpha.$$

Получаем

$$k_0 = \frac{g \cos \alpha + 0,5 \omega^2 R \sin 2\alpha}{g \sin \alpha - \omega^2 R \cos^2 \alpha}.$$

Ответ: а)  $k_0 = \frac{g \cos \alpha + 0,5 \omega^2 R \sin 2\alpha}{g \sin \alpha - \omega^2 R \cos^2 \alpha};$

б)  $k_0 = \frac{g \cos \beta - 0,5 \omega^2 R \sin 2\beta}{g \sin \beta + \omega^2 R \cos^2 \beta}$

1.2.19. Две гири, находящиеся на блоках, установлены на высоте  $h = 3$  м друг от друга (рис. 1.21). Предоставленные самим себе гири через  $\tau = 1$  с после начала движения оказались на одной высоте. Какова масса гири  $m_1$ , подвешенной к свободному концу веревки, если масса другой гири  $m_2 = 0,3$  кг?

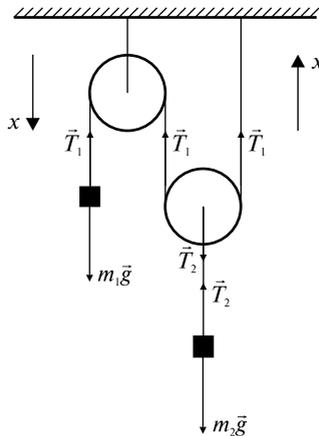


Рис. 1.21

*Решение.* Рассмотрим силы, действующие на каждую гирию и подвижный блок (который мы считаем невесомым). Выберем координатную ось  $x$ , как показано на рис. 1.21:

$$\begin{aligned} m_1 g - T_1 &= m_1 a_1, \\ 2T_1 - T_2 &= m_{\text{бл}} a = 0 \quad (m_{\text{бл}} = 0), \\ T_2 - m_2 g &= m_2 a_2, \\ a_2 &= a_1/2. \end{aligned}$$

Последнее соотношение следует из следующих кинематических соображений: если первое тело опустилось на  $s_1 = a_1 \tau^2/2$ , то за это же время тело, висящее на подвижном блоке, поднялось на  $s_2 = a_2 \tau^2/2$ , причем  $s_2 = s_1/2$ . За время  $\tau$  тела прошли путь  $h$ , который определяется следующим образом:

$$h = a_1 \tau^2/2 + a_2 \tau^2/2 = 3a_1 \tau^2/4.$$

Решаем полученные системы уравнений:

$$\begin{cases} T_2 - m_2 g = m_2 a_1/2, \\ T_2 = 2T_1, \end{cases} \quad \begin{cases} 4T_1 - 2m_2 g = m_2 a_1, \\ m_1 g - T_1 = m_1 a_1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4T_1 - 2m_2 g = m_2 a_1, \\ 4m_1 g - 4T_1 = 4m_1 a_1, \end{cases} \quad a_1 = \frac{4m_1 - 2m_2}{4m_1 + m_2} g.$$

Из  $h = 3a_1 \tau^2/4$  получаем  $a_1 = 4h/3\tau^2$ ; в результате

$$m_1 = \frac{(4h/3\tau^2 + 2g)m_2}{4g - 16h/3\tau^2} = 0,3 \text{ кг.}$$

*Ответ:*  $m_1 = 0,3 \text{ кг.}$

1.2.20. Определить ускорение  $a_3$  тела массой  $M$  в системе, изображенной на рис. 1.22. Массой блоков и силой трения пренебречь. Наклонные плоскости считать закрепленными жестко.

*Решение.* Рассмотрим силы, действующие на каждое из тел системы. Выберем направления координатных осей, как показано на рисунке:

$$\begin{aligned} T_1 - m_1 g \sin \alpha &= m_1 a_1, \\ T_1 - m_2 g \sin \alpha &= m_2 a_2, \end{aligned}$$

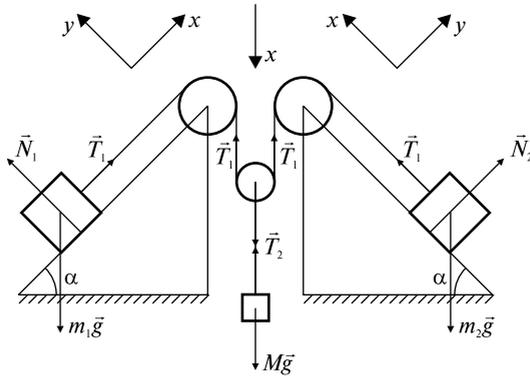


Рис. 1.22

$$2T_1 - T_2 = 0,$$

$$Mg - T_2 = Ma_3,$$

$$a_3 = (a_1 + a_2)/2.$$

Последнее соотношение следует из условий, что нить нерастяжима, следовательно, если тело  $m_1$  продвинулось на расстояние  $s_1 = a_1\tau^2/2$ , а тело  $m_2$  — на расстояние  $s_2 = a_2\tau^2/2$ , то тело  $M$  опустилось на  $s_3 = (s_1 + s_2)/2$ , причем  $s_3 = a_3\tau^2/2$ .

Преобразуя данную систему уравнений, получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными, которая легко решается при помощи определителей:

$$-(m_1 + m_2)a_2 + 2m_1a_3 = (m_2 - m_1)g \sin \alpha,$$

$$(m_2 - m_1)a_2 + (2m_1 + M)a_3 = Mg - (m_1 + m_2)g \sin \alpha;$$

$$a_3 = \frac{\begin{vmatrix} -(m_1 + m_2) & (m_2 - m_1)g \sin \alpha \\ m_2 - m_1 & Mg - (m_1 + m_2)g \sin \alpha \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -(m_1 + m_2) & 2m_1 \\ m_2 - m_1 & 2m_1 + M \end{vmatrix}}.$$

Отсюда

$$a_3 = g \frac{M(m_1 + m_2) - 4m_1m_2 \sin \alpha}{M(m_1 + m_2) + 4m_1m_2}.$$

$$\text{Ответ: } a_3 = g \frac{M(m_1 + m_2) - 4m_1m_2 \sin \alpha}{M(m_1 + m_2) + 4m_1m_2}.$$

1.2.21. Тяжелый шарик подвешен на нити длиной  $l$ . Нить равномерно вращается в пространстве, образуя с вертикалью угол  $\alpha$  (конический маятник). Вся система установлена в ракете, поднимающейся с ускорением  $\vec{a}$  вертикально вверх. Сколько оборотов  $n$  сделает шарик за время  $\tau$ ?

*Решение.* Рассмотрим силы, действующие на шарик, выберем направление координатных осей  $x$  и  $y$  (рис. 1.23) и напишем уравнение движения шарика в системе координат, связанной с Землей. Следует отметить, что шарик участвует в двух движениях: вращается с ускорением  $a_n = \omega^2 R$  и поднимается вместе с ракетой вверх с ускорением  $\vec{a}$ , таким образом, полное ускорение шарика  $\vec{a}_0 = \vec{a}_n + \vec{a}$ .

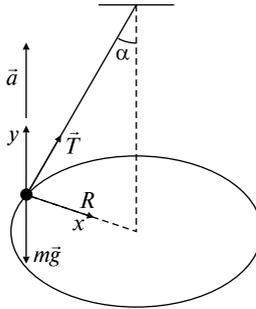


Рис. 1.23

Уравнение движения  $\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}_0$ ,

$$\left. \begin{array}{l} x: T \sin \alpha = m\omega^2 R, \\ y: T \cos \alpha - mg = ma, \\ R = l \sin \alpha, n = \frac{\omega\tau}{2\pi}, \end{array} \right\} \begin{array}{l} T = \frac{m(g+a)}{\cos \alpha}; \\ T \sin \alpha = m\omega^2 l \sin \alpha. \end{array}$$

Получаем

$$n = \frac{\tau}{2\pi} \sqrt{\frac{g+a}{l \cos \alpha}}.$$

$$\text{Ответ: } n = \frac{\tau}{2\pi} \sqrt{\frac{g+a}{l \cos \alpha}}.$$

### Задачи без решений

1.2.22. Определить силу давления  $N$  шарика массой  $m$  на наклонную плоскость и силу натяжения нити  $T$  (рис. 1.24). Угол наклона плоскости  $\alpha$ , угол между нитью и вертикалью  $\beta$ . Трением между шариком и плоскостью пренебречь.

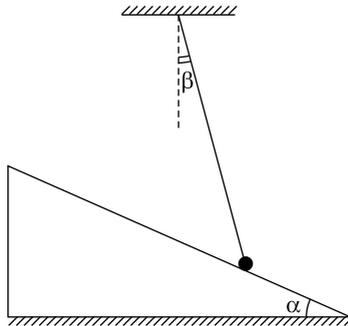


Рис. 1.24

1.2.23. По желобу, изогнутому в виде полуокружности радиусом  $R$ , может без трения скользить тело массой  $M$ . На какой высоте  $h$  будет находиться тело, если желобок равномерно вращать с угловой скоростью  $\bar{\omega}$  (рис. 1.25). С какой силой  $F$  тело давит на желобок?

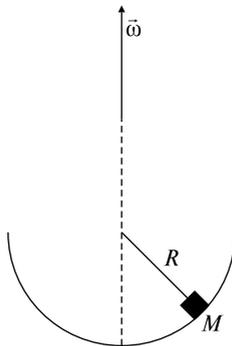


Рис. 1.25

1.2.24. Определить ускорение  $\bar{a}$  грузов в системе, изображенной на рис. 1.26. Массами блоков, нити и трением пренебречь.

1.2.25. Через блок перекинута нерастяжимая и невесомая нить, на концах которой висят грузы массами  $m_1$  и  $m_2$  ( $m_1 > m_2$ ). Блок начали поднимать вверх с ускорением  $\vec{a}_0$  относительно земли (рис. 1.27). Полагая, что нить скользит по блоку без трения, найти силу натяжения нити  $T$  и ускорение  $a_1$  груза  $m_1$  относительно земли. Определить соотношение масс  $m_1/m_2$ , при котором ускорение груза  $m_1$  относительно земли равно нулю?

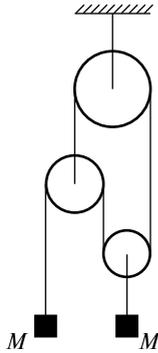


Рис. 1.26

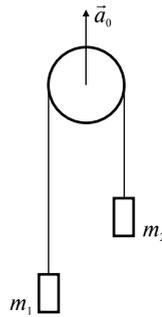


Рис. 1.27

1.2.26. Определить ускорение грузов  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$ ,  $\vec{a}_3$  в системе, изображенной на рис. 1.28. Массами блоков и нити, а также трением можно пренебречь. Массы тел известны.

1.2.27. Груз массой  $M = 45$  кг вращается на канате длиной  $L = 5$  м в горизонтальной плоскости (рис. 1.29), совершая  $n = 16$  об/мин. Какой угол  $\alpha$  с вертикалью образует канат и какова сила его натяжения  $T$ ?

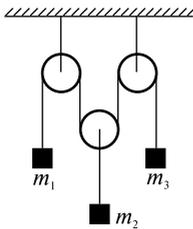


Рис. 1.28

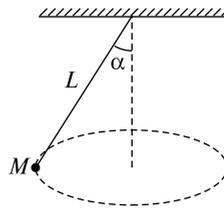


Рис. 1.29

1.2.28. На гладкое проволочное кольцо радиусом  $R$  надет маленький шарик массой  $M$ . Кольцо вместе с шариком вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через диаметр кольца (рис. 1.30) с угловой скоростью  $\vec{\omega}$ . Где находится шарик? (Определить угол  $\alpha$ .)

1.2.29. На сферической поверхности радиусом  $R$  находится тело. Коэффициент трения тела о поверхность сферы  $k$ , угол между вертикалью и радиус-вектором тела  $\alpha$  (рис. 1.31). Какова максимальная угловая скорость вращения сферы  $\vec{\omega}$ , при которой тело удерживается на ее поверхности и не скользит по ней?

1.2.30. Шарик массой  $m$  и радиусом  $r$  удерживается на неподвижном шаре радиусом  $R$  невесомой нитью длиной  $l$ , закрепленной в верхней точке шара  $C$  (рис. 1.32). Других точек соприкосновения между нитью и шаром нет. Пренебрегая трением, найти натяжение нити  $T$ .

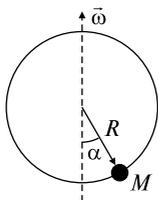


Рис. 1.30

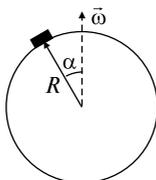


Рис. 1.31

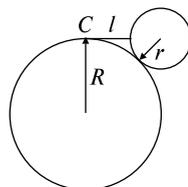


Рис. 1.32

### ТЕМА 1.3 ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА И МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ. РАБОТА

Решение задач в рамках механики Ньютона существенно упрощается, если исходить из анализа изменения (сохранения) таких величин, как полный импульс механической системы

$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i \quad (1.3.1)$$

и полная механическая энергия

$$E = E_{\text{п}} + E_{\text{к}}. \quad (1.3.2)$$

Здесь  $m_i$ ,  $\vec{v}_i$  — соответственно масса и скорость отдельных входящих в систему тел,  $E_{\text{п}}$  и  $E_{\text{к}}$  — потенциальная и кинетическая энергии. При определении последних величин часто используют выражения, согласно которым кинетическая энергия тела, движущегося поступательно со скоростью  $\vec{v}$ ,

$$E_{\text{к}} = mv^2/2; \quad (1.3.3)$$

потенциальная энергия тела, поднятого вблизи поверхности Земли на высоту  $h$ ,

$$E_{\text{п}} = mgh; \quad (1.3.4)$$

потенциальная энергия упругодеформированного тела

$$E_{\text{п}} = kx^2/2, \quad (1.3.5)$$

где  $k$  — коэффициент упругости.

Работа, совершаемая силой  $\vec{F}$  при элементарном перемещении  $\Delta\vec{r}$ , определяется соотношением

$$A = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F\Delta s \cos \alpha, \quad (1.3.6)$$

где  $\Delta s = |\Delta\vec{r}|$  — элементарный путь,  $\alpha$  — угол между векторами  $\vec{F}$  и  $\Delta\vec{r}$ .

Работа переменной силы  $\vec{F}$  на пути  $s$

$$A = \int_0^s F \cos \alpha ds. \quad (1.3.7)$$

Силы, работа которых зависит лишь от начальной и конечной точек траектории, но не зависит от ее формы, называются потенциальными (консервативными). Изменение полной энергии сис-

темы равно работе, совершенной внешними силами, приложенными к системе:

$$E_2 - E_1 = A_{\text{внеш}}. \quad (1.3.8)$$

Систему взаимодействующих тел называют замкнутой, если на нее извне не действуют другие тела. Для такой системы выполняется закон сохранения импульса: импульс замкнутой системы не изменяется при любых процессах, происходящих внутри этой системы, т.е.

$$\vec{p} = \text{const}, \text{ если } \sum \vec{F}_{\text{внеш}} = 0. \quad (1.3.9)$$

Закон сохранения энергии в механике формулируется следующим образом: полная механическая энергия замкнутой системы, в которой действуют только консервативные силы, есть величина постоянная, т.е.

$$E_k + E_{\text{п}} = \text{const}. \quad (1.3.10).$$

### Качественные задачи

1.3.1. Кинетические энергии легкого и тяжелого тела одинаковы. У какого из них больше импульс?

1.3.2. Тело бросают под углом  $\alpha$  к горизонту с начальной скоростью  $\vec{v}_0$ . Используя закон сохранения механической энергии, определить максимальную высоту подъема.

1.3.3. Правильно ли утверждение, что камень, брошенный с некоторой начальной скоростью с вершины скалы в море, войдет в воду со скоростью, которая будет одна и та же как в случае, когда его бросают горизонтально, так и при броске под углом к горизонту? Объясните ответ.

1.3.4. Имеется наклонная плоскость высотой  $H$ . Тело массой  $m$  скользит без начальной скорости из верхней точки. Зависит ли скорость этого тела у основания наклонной плоскости от угла, который она составляет с горизонтом, если: а) трение не учитывать; б) силу трения учитывать?

1.3.5. Сохраняется ли механическая энергия тел при неупругом ударе?

1.3.6. В каком случае закон сохранения импульса можно применить к неизолированной системе?

## Задачи с решениями

1.3.7. Деревянный поршень при движении в цилиндре сжимает невесомую пружину жесткостью  $k$ . Между поршнем и цилиндром при движении возникает постоянная по величине сила трения  $F$ . В поршень попадает и застревает в нем пуля, которая имела скорость  $v_0$ , направленную вдоль оси цилиндра (рис. 1.33). Масса пули  $m$ , масса поршня  $M$ . На какую величину  $x$  сместится поршень? Цилиндр закреплен.

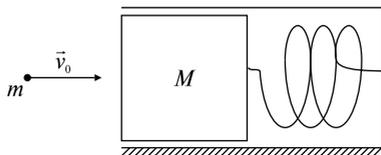


Рис. 1.33

*Решение.* Разобьем процессы, происходящие во времени, в соответствии с условием задачи на два этапа. На первом определяющим будет взаимодействие в системе пуля–поршень. Эту систему можно считать замкнутой (но не консервативной, поскольку на пулю в те мгновения, когда она углубляется в поршень, действуют диссипативные силы сопротивления). Применим к ней закон сохранения импульса. В начальный момент полный импульс был равен  $p_1 = mv_0$ , в конечный —  $p_2 = (m + M)u$ , где  $u$  — скорость пули и поршня как целого. Тогда, следуя (1.3.9), имеем  $mv_0 = (m + M)u$ . На втором этапе все будет определяться взаимодействием в системе поршень (вместе с застрявшей пулей) — пружина — цилиндр. Воспользуемся теперь законом изменения механической энергии системы (1.3.10). Начальная энергия системы определяется кинетической энергией поршня с пулей  $E_{\text{нач}} = (m + M)u^2/2$ , а конечная — потенциальной энергией сжатой пружины  $E_{\text{кон}} = kx^2/2$ , разница между этими энергиями идет на работу против сил трения  $E_{\text{кон}} - E_{\text{нач}} = A = -Fx$ :

$$\frac{m + M}{2}u^2 - \frac{1}{2}kx^2 = Fx,$$

$$x^2 + \frac{2F}{k}x - \frac{(mv_0)^2}{k(m + M)} = 0.$$

Решая полученное уравнение, получаем

$$x_{1,2} = -\frac{F}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{F}{k}\right)^2 + \frac{(mv_0)^2}{k(m+M)}}.$$

Корень со знаком «−» отбрасываем, исходя из физического содержания задачи. Таким образом, получаем, что поршень сместится на величину

$$x = -\frac{F}{k} + \sqrt{\left(\frac{F}{k}\right)^2 + \frac{(mv_0)^2}{k(m+M)}}.$$

Ответ:  $x = -\frac{F}{k} + \sqrt{\left(\frac{F}{k}\right)^2 + \frac{(mv_0)^2}{k(m+M)}}.$

1.3.8. Маятник с грузиком массой  $M$  подняли на высоту  $H$  и отпустили. В нижней точке своей траектории грузик налетает на кусочек пластилина массой  $m$  (рис. 1.34). До какой высоты  $h$  поднимется грузик с налипшим на нем пластилином? Какая часть механической энергия при этом ударе перешла во внутреннюю энергию  $Q$ ?

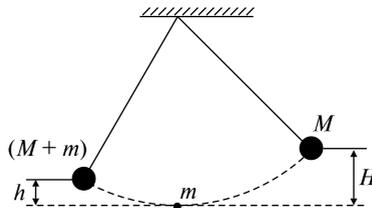


Рис. 1.34

*Решение.* В данном случае мы имеем дело с абсолютно неупругим ударом — так называется столкновение двух тел, в результате которого они соединяются вместе и движутся дальше как одно тело.

Физические явления при неупругом столкновении тел довольно сложны. Сталкивающиеся тела деформируются, возникают упругие силы, силы трения и т.д., иначе говоря, во время столкновения в системе действуют диссипативные силы, уменьшающие кинетическую энергию макроскопического движения. Поэтому

применять закон сохранения механической энергии к процессам, происходящим во время неупругого удара, нельзя. Но после того как удар закончился и сталкивающиеся тела соединились в одно тело, законом сохранения механической энергии пользоваться можно (если, конечно, в дальнейшем не действуют диссипативные силы). Мы считаем, что процесс столкновения происходит настолько быстро, что за время столкновения система не успевает отклониться на заметный угол. Задача заключается в том, чтобы найти скорость этого движения непосредственно после удара. Систему маятник–пластилин во время удара можно считать замкнутой и применять к ней закон сохранения импульса (1.3.9)

$$Mv = (M + m)u, \quad (1)$$

где  $v$  — скорость маятника до удара,  $u$  — скорость системы маятник–пластилин после удара. Чтобы найти скорость  $v$ , воспользуемся законом сохранения механической энергии

$$MgH = Mv^2/2. \quad (2)$$

Для определения потерь кинетической энергии  $Q$  в этом ударе воспользуемся общим законом сохранения энергии

$$MgH = (M + m)u^2/2 + Q. \quad (3)$$

Найдем теперь из уравнения (2) скорость  $v$ , подставим ее значение в (1) и получим скорость нашей системы после удара:

$$v = \sqrt{2gH}; \quad u = \frac{M\sqrt{2gH}}{M + m}. \quad (4)$$

Как было сказано выше, после удара можно опять воспользоваться законом сохранения механической энергии, чтобы найти, на какую высоту  $h$  поднимется грузик с пластилином:

$$\frac{(M + m)u^2}{2} = (M + m)gh, \quad (5)$$

отсюда получаем

$$h = \frac{u^2}{2g} = \frac{M}{M + m}H. \quad (6)$$

Подставляя (4) в (3), определяем

$$Q = MgH \frac{m}{m + M}. \quad (7)$$

Ответ:  $h = \frac{M}{M+m} H$ ;  $Q = MgH \frac{m}{m+M}$ .

1.3.9. Вокруг горизонтальной оси может свободно без трения вращаться легкий рычаг, плечи которого равны  $l_1$  и  $l_2$ . На концах рычага укреплены грузы  $m_1$  и  $m_2$ . Предоставленный самому себе рычаг переходит из горизонтального положения в вертикальное (рис. 1.35). Какую скорость  $v_2$  будет иметь в нижней точке второй груз?

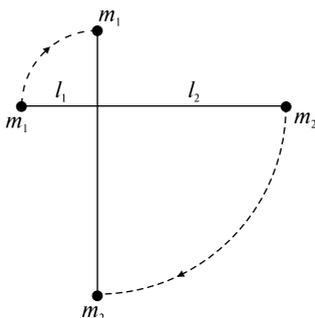


Рис. 1.35

*Решение.* При решении воспользуемся законом сохранения механической энергии (1.3.10) и тем фактом, что угловые скорости первого и второго тел при движении будут равны. За нулевой уровень потенциальной энергии возьмем нижнее положение второго груза. Энергия рычага в горизонтальном положении  $E_{\text{гор}}$  должна быть равна энергии в вертикальном положении  $E_{\text{верт}}$ :

$$E_{\text{гор}} = E_{\text{верт}}$$

причем

$$E_{\text{гор}} = m_1 g l_2 + m_2 g l_2 = g l_2 (m_1 + m_2),$$

$$E_{\text{верт}} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + m_1 g (l_1 + l_2).$$

Так как  $\omega_1 = \omega_2$ , то  $\frac{v_1}{l_1} = \frac{v_2}{l_2}$ . Тем самым, переходим к системе

$$\begin{cases} gl_2(m_1 + m_2) = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + m_1 g(l_1 + l_2), \\ \frac{v_1}{l_1} = \frac{v_2}{l_2}. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем

$$v_2 = l_2 \sqrt{\frac{2(m_2 l_2 - m_1 l_1)g}{m_2 l_2^2 + m_1 l_1^2}}.$$

Ответ:  $v_2 = l_2 \sqrt{\frac{2(m_2 l_2 - m_1 l_1)g}{m_2 l_2^2 + m_1 l_1^2}}.$

1.3.10. На горизонтальной поверхности находится неподвижная, абсолютно гладкая полусфера радиусом  $R = 10$  м. С ее верхней точки без начальной скорости соскальзывает малое тело. В некоторой точке оно отрывается и летит свободно. Определить время  $\tau$  падения с момента отрыва до попадания на горизонтальную поверхность. Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

*Решение.* На тело действуют сила тяжести  $M\vec{g}$  и сила реакции опоры  $\vec{N}$ . Уравнение движения (1.2.1) имеет вид  $\vec{N} + M\vec{g} = M\vec{a}$ . Выберем систему координат  $xOy$  (рис. 1.36) и запишем это уравнение в проекции на ось  $y$ :

$$Mg \cos \alpha - N = Mv_0^2/R. \quad (1)$$

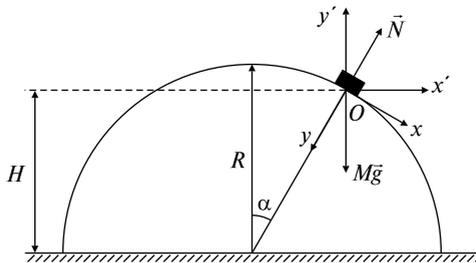


Рис. 1.36

Из физических соображений ясно, что в момент отрыва  $\vec{N} = 0$ . Следовательно, уравнение (1) приобретает вид

$$gR \cos \alpha = v_0^2. \quad (2)$$

Для того чтобы составить второе уравнение, можно применить закон сохранения механической энергии (1.3.10), так как силы трения при движении тела по полусфере отсутствуют:

$$MgR = MgH + Mv_0^2/2. \quad (3)$$

Из геометрических соображений следует

$$H = R \cos \alpha. \quad (4)$$

Решаем совместно уравнения (2)–(4):

$$2gR = 2gR \cos \alpha + gR \cos \alpha$$

и определяем

$$\cos \alpha = 2/3. \quad (5)$$

Подставляем (5) в уравнение (2) и получаем скорость в момент отрыва:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gR}{3}}.$$

Приступим к кинематической части в решении задачи, а именно: определим время  $\tau$ . Выберем новые направления координатных осей  $x'Oy'$  и рассмотрим движение по оси  $y'$ . Согласно формулам для равноускоренного движения получаем

$$v_{0y'} = v_0 \sin \alpha = \sqrt{\frac{10Rg}{27}} \text{ — составляющая начальной скорости вдоль } y'.$$

Высота отрыва от полусферы

$$H = v_{0y'}t + \frac{gt^2}{2} = \frac{2R}{3}.$$

Решаем данную систему уравнений относительно  $t$ :

$$t^2 + \frac{2v_{0y'}}{g}t - \frac{4R}{3g} = 0,$$

$$t_{1,2} = -\frac{v_{0y'}}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_{0y'}}{g}\right)^2 + \frac{4R}{3g}}.$$

Так как  $t$  — время движения, следовательно,  $t \geq 0$ , и решением задачи является корень

$$t_1 = -\frac{v_{0y'}}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_{0y'}}{g}\right)^2 + \frac{4R}{3g}}.$$

Таким образом,

$$\tau = -\sqrt{\frac{10R}{27g}} + \sqrt{\frac{46R}{27g}} \approx 0,7 \text{ с.}$$

Ответ:  $\tau \approx 0,7 \text{ с.}$

1.3.11. Небольшое тело соскальзывает вниз с высоты  $H$  по наклонному желобу, переходящему в «мертвую петлю» радиусом  $R$ . На какой высоте  $h$  тело выпадет из петли? Трение отсутствует.

*Решение.* На тело, движущееся по «мертвой петле», действует сила тяжести  $m\vec{g}$  и сила реакции опоры  $\vec{N}$  (рис. 1.37). Для решения задачи воспользуемся вторым законом Ньютона (1.2.1)

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a} \quad (1)$$

и законом сохранения механической энергии (1.3.10)

$$mgH = mv^2/2 + mgh. \quad (2)$$

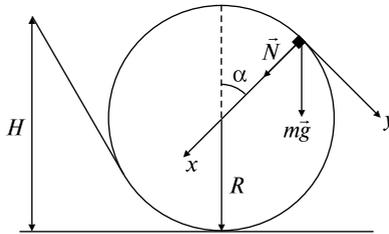


Рис. 1.37

Выберем направления координатных осей  $x$ ,  $y$  и заменим векторное уравнение (1) скалярными равенствами:

$$x: mg \cos \alpha + N = mv^2/R, \quad (3)$$

$$y: mg \sin \alpha = ma_{\tau}.$$

В точке отрыва прекращается взаимодействие между движущимся телом и поверхностью и, следовательно, сила реакции опоры  $N$  обращается в нуль. Таким образом, уравнение (3) приобретает вид

$$g \cos \alpha = v^2/R. \quad (4)$$

Как видно из рисунка,  $\cos \alpha = \frac{h-R}{R}$ , поэтому (4) запишется следующим образом:

$$g(h-R) = v^2. \quad (5)$$

Из уравнения (2) определим

$$v^2 = 2g(H-h). \quad (6)$$

Решая (5) и (6), получим

$$h = (2H + R)/3.$$

*Ответ:*  $h = (2H + R)/3$ .

1.3.12. Сани соскальзывают с ледяной горы высотой  $H = 1,5$  м и длиной  $l = 2,5$  м, плавно переходящей в другую ледяную гору с углом к горизонту  $\beta = 30^\circ$  (рис. 1.38) Сколько времени  $t$  сани будут двигаться по второй горе, если на протяжении всего движения коэффициент трения равен  $k = 0,04$ ?

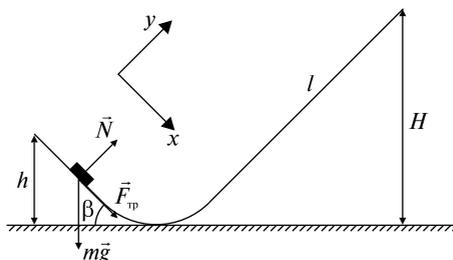


Рис. 1.38

*Решение.* Выберем направление координатных осей  $x$  и  $y$  и рассмотрим движение саней на второй горе, принимая во внимание силы, изображенные на рисунке:

$$\vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{\text{тр}} = m\vec{a}.$$

Проецируя эти силы на  $x$  и  $y$ , получаем

$$x: F_{\text{тр}} + mg \sin \beta = ma,$$

$$y: N - mg \cos \beta = 0,$$

$$F_{\text{тр}} = kN.$$

Решая эту систему, находим значение ускорения

$$a = g(\sin\beta + k \cos\beta).$$

По формуле (1.3.6) получаем

$$A_{2F_{\text{тр}}} = F_{\text{тр}}l = kmg \cos\beta \frac{h}{\sin\beta}.$$

По аналогии работа сил трения на первой горе определяется соотношением

$$A_{1F_{\text{тр}}} = kmg \cos\alpha \frac{H}{\sin\alpha}.$$

Воспользуемся законом изменения механической энергии (1.3.8):

$$mgH - mgh = A_{2F_{\text{тр}}} + A_{1F_{\text{тр}}}.$$

Решаем это уравнение относительно  $h$ :

$$mgH - mgh = kmg h \operatorname{ctg}\beta + kmgH \operatorname{ctg}\alpha,$$

$$h(1 + k \operatorname{ctg}\beta) = H - k\sqrt{l^2 - H^2}.$$

$$h = \frac{H - k\sqrt{l^2 - H^2}}{1 + k \operatorname{ctg}\beta}.$$

Воспользуемся кинематическими выражениями для равнозамедленного движения (1.1.8), (1.1.9):

$$\left. \begin{aligned} l_1 &= v_0 t - \frac{at^2}{2}, \\ v &= v_0 - at = 0, \\ l_1 &= \frac{h}{\sin\beta}; \end{aligned} \right\} \begin{aligned} v_0 &= at, \quad l_1 = \frac{at^2}{2}, \\ t &= \sqrt{\frac{2l_1}{a}} = \sqrt{\frac{2h}{a \sin\beta}}. \end{aligned}$$

Получаем время движения по второй горе

$$t = \sqrt{\frac{2(H - k\sqrt{l^2 - H^2})}{g(1 + k \operatorname{ctg}\beta)(\sin\beta + k \cos\beta)\sin\beta}} \approx 0,72 \text{ с.}$$

Ответ:  $t \approx 0,72 \text{ с.}$

1.3.13. Тело массой  $m_1$  со скоростью  $v_1$  движется навстречу другому телу, масса которого  $m_2$  и скорость  $v_2$ . Происходит неупругое столкновение тел. Сколько времени  $t$  тела будут двигаться после столкновения, если коэффициент трения при их совместном движении равен  $k$ ?

*Решение.* Применим закон сохранения импульса (1.3.9)

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2)u$$

и определим скорость после удара

$$u = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Рассмотрим совместное движение шаров до остановки, используя уравнения

$$F_{\text{тр}} = (m_1 + m_2)a,$$

$$F_{\text{тр}} = kN = k(m_1 + m_2)g.$$

Отсюда  $a = kg$ .

Теперь, исходя из соотношения  $u - at = 0$ , можно определить время  $t$ :

$$t = \frac{u}{a} = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{kg(m_1 + m_2)}.$$

$$\text{Ответ: } t = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{kg(m_1 + m_2)}.$$

1.3.14. Вертикальная гладкая стена движется со скоростью  $u$ . Навстречу стене летит шарик, скорость которого  $v_0$  направлена под углом  $\alpha$  к нормали. Под каким углом  $\beta$  шарик отскочит от стены? Удар считать абсолютно упругим. Масса стены намного больше массы шарика.

*Решение.* Выберем систему координат  $xOy$ , связанную с движущейся стеной (рис. 1.39), и посмотрим, чему равны проекции скорости шарика до удара на выбранные оси:

$$v_x^{\text{до}} = v_0 \cos \alpha + u,$$

$$v_y^{\text{до}} = v_0 \sin \alpha.$$

После отражения от массивной стены при упругом ударе численное значение скорости не меняется, а изменяется только направление, таким образом, проекции скорости шарика на оси  $x$  и  $y$  после отражения равны соответственно

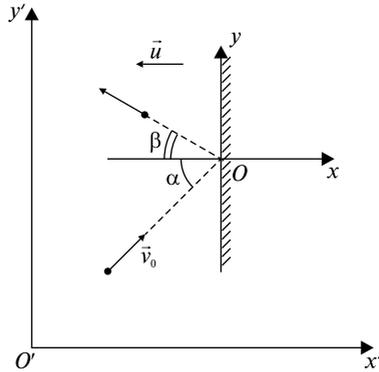


Рис. 1.39

$$v_x^{\text{после}} = -(v_0 \cos \alpha + u),$$

$$v_y^{\text{после}} = v_0 \sin \alpha.$$

Теперь вернемся в неподвижную систему координат  $x'O'y'$ , связанную с землей, и напишем, чему равны проекции скорости шарика после удара в этой системе:

$$v_{x'} = -(v_0 \cos \alpha + u + u) = -(v_0 \cos \alpha + 2u),$$

$$v_{y'} = v_0 \sin \alpha.$$

Чтобы найти искомый угол, определим

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{|v_{x'}|}{|v_{y'}|} = \frac{v_0 \sin \alpha}{v_0 \cos \alpha + 2u},$$

следовательно,

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{v_0 \sin \alpha}{v_0 \cos \alpha + 2u}.$$

$$\text{Ответ: } \beta = \operatorname{arctg} \frac{v_0 \sin \alpha}{v_0 \cos \alpha + 2u}.$$

1.3.15. Небольшое тело массой  $M$  лежит на вершине гладкой полусферы радиусом  $R$ . В тело попадает пуля массой  $m$ , летящая горизонтально со скоростью  $v_0$ , и застревает в нем. Пренебрегая смещением тела во время удара, определить высоту  $h$ , на которой тело оторвется от поверхности полусферы. При какой скорости пули тело сразу оторвется от полусферы?

*Решение.* В задаче происходит неупругое взаимодействие, следовательно, чтобы определить скорость системы пуля–тело после удара, можно применить закон сохранения импульса (1.3.9)

$$mv_0 = (M + m)u. \quad (1)$$

Предположим, что отрыв происходит в точке  $A$  (рис. 1.40). Принимая во внимание изображенные на рисунке силы, запишем уравнение движения

$$\vec{N} + (M + m)\vec{g} = (M + m)\vec{a}. \quad (2)$$

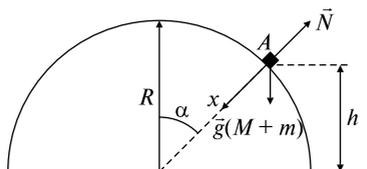


Рис. 1.40

Напишем условие отрыва:  $N = 0$ . Воспользуемся законом сохранения механической энергии (1.3.10): полная механическая энергия системы пуля–тело после удара равна полной механической энергии этой системы в момент отрыва (трение отсутствует):

$$\frac{(M + m)u^2}{2} + (M + m)gR = \frac{(M + m)v^2}{2} + (M + m)gh. \quad (3)$$

Из уравнения (1) определяем  $u = mv_0/(M + m)$ .

Чтобы от векторного уравнения (2) перейти к скалярным соотношениям, введем в соответствии с рисунком ось  $x$  вдоль радиуса полусферы:

$$x: (M + m)g \cos \alpha = (M + m)v^2/R. \quad (4)$$

Как видно из рисунка,  $h = R \cos \alpha$ , следовательно, равенство (4) запишется следующим образом:

$$gh = v^2. \quad (5)$$

Подставим (5) и (1) в (3) и определим высоту отрыва

$$h = \frac{2R}{3} + \frac{1}{3g} \left( \frac{mv_0}{m + M} \right)^2. \quad (6)$$

Чтобы ответить на вторую часть вопроса, т.е. определить скорость пули  $v'_0$ , при которой тело сразу же оторвется от полусферы, достаточно высоту отрыва  $h$  в уравнении (6) приравнять к радиусу  $R$  и решить уравнение

$$R = \frac{2R}{3} + \frac{1}{3g} \left( \frac{mv'_0}{m+M} \right)^2.$$

Получим

$$v'_0 = \frac{M+m}{m} \sqrt{gR}.$$

Ответ:  $h = \frac{2R}{3} + \frac{1}{3g} \left( \frac{mv_0}{m+M} \right)^2$ ,  $v'_0 = \frac{M+m}{m} \sqrt{gR}$ .

1.3.16. Шар массой  $m = 2,6$  кг падает без начальной скорости с высоты  $h = 55$  см на расположенную вертикально пружину, которая при ударе сжимается. Если у пружины коэффициент упругости  $k = 72$  Н/м, то на какую максимальную длину  $y_{\max}$  сожмется пружина? Все расстояния измерять от точки соприкосновения шара с недеформированной пружиной.

*Решение.* Обозначим максимальную величину деформации пружины через  $y_{\max}$  (рис. 1.41). Полная механическая энергия системы шар–пружина в исходном состоянии  $E_1 = mgh$ . При максимальном сжатии пружины полная энергия пружины запишется в виде

$$E_2 = ky_{\max}^2/2 - mgy_{\max}.$$

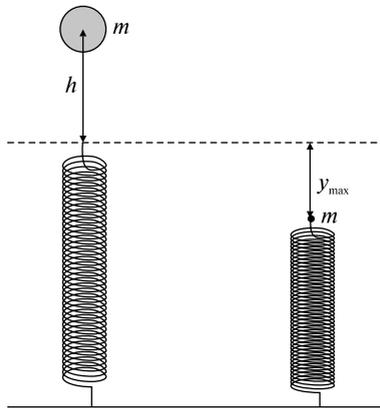


Рис. 1.41

Первое слагаемое представляет собой упругую энергию пружины, а второе — потенциальную энергию. Поскольку полная механическая энергия в рассматриваемой консервативной системе сохраняется, т.е.  $E_1 = E_2$ , можно написать следующее равенство:

$$mgh = ky_{\max}^2/2 - mgy_{\max},$$

откуда  $ky_{\max}^2/2 - mgy_{\max} - mgh = 0$ ,

$$y_{\max} = \frac{mg + \sqrt{(mg)^2 + 2mghk}}{k}.$$

Мы выбираем корень со знаком «+», поскольку по предположению  $y_{\max} > 0$ . Таким образом, получаем  $y_{\max 1} = 1,1$  м. Корень со знаком «-»  $y_{\max 2} = -0,36$  м соответствует тому, что связанные между собой шар и пружина подпрыгнули вверх на расстояние 0,36 м от недеформированного ( $y = 0$ ) положения пружины.

$$\text{Ответ: } y_{\max} = \frac{mg + \sqrt{(mg)^2 + 2mghk}}{k}.$$

1.3.17. Снаряд, летевший на высоте  $H$  горизонтально со скоростью  $v_0$ , разрывается на две равные части. Одна часть снаряда спустя время  $\tau$  падает на землю точно под местом взрыва. Определить скорость  $u$  другой части сразу после взрыва.

*Решение.* В течение времени взрыва снаряд как систему можно считать замкнутой, так как силы, возникающие при взрыве (внутренние силы), настолько велики, что действием сил тяжести, сопротивлением воздуха и др. можно пренебречь. Следовательно, можно применить закон сохранения импульса (1.3.9). Обозначим  $v$  — скорость той части снаряда, которая падает вертикально вниз,  $u$  — скорость другой части.

Выберем систему координат  $x$  и  $y$  и нарисуем векторы импульсов (рис. 1.42). Затем запишем уравнение (1.3.9) и проекции импульсов на оси  $x$  и  $y$ :

$$M\vec{v}_0 = m\vec{u} + m\vec{v}, \quad (1)$$

$$x: Mv_0 = \frac{Mucos\alpha}{2}, \quad (2)$$

$$y: 0 = \frac{Musin\alpha}{2} - \frac{Mv}{2}. \quad (3)$$

Решаем систему (2), (3):

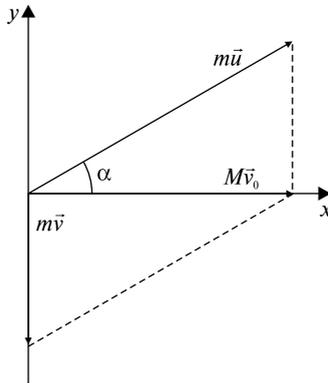


Рис. 1.42

$$\begin{cases} 2v_0 = u \cos \alpha, \\ v = u \sin \alpha, \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{2v_0}. \quad (4)$$

Напишем уравнение движения первой части снаряда:

$$H = v\tau + \frac{g\tau^2}{2}.$$

Определим скорость  $v = \frac{H}{\tau} - \frac{g\tau}{2}$  и подставим это выражение в (4):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2H - g\tau^2}{2\tau \cdot 2v_0}.$$

Вспомним тригонометрическое соотношение  $\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$ .

Из уравнения (2) имеем  $u = \frac{2v_0}{\cos \alpha}$ , подставляем это равенство в (4)

и получаем  $u = 2v_0 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$ .

Таким образом,

$$u = 2v_0 \sqrt{1 + \left( \frac{2H - g\tau^2}{4\tau v_0} \right)^2}.$$

$$\text{Ответ: } u = 2v_0 \sqrt{1 + \left( \frac{2H - g\tau^2}{4\tau v_0} \right)^2}.$$

1.3.18.  $\alpha$ -частица, летящая со скоростью  $v_0$ , испытывает упругое столкновение с неподвижным ядром и летит под углом  $90^\circ$  к первоначальному направлению движения. Определить скорости  $\alpha$ -частицы  $\vec{v}$  и ядра  $\vec{u}$  после столкновения. Определить также угол  $\beta$  между направлением скорости ядра и первоначальным направлением  $\alpha$ -частицы. Масса ядра  $M$ , масса  $\alpha$ -частицы  $m$  ( $M > m$ ).

*Решение.* В данном случае мы имеем дело с абсолютно упругим ударом — так называется столкновение тел, в результате которого их внутренние энергии не меняются. Для описания упругого удара можно применять как закон сохранения импульса (1.3.9), так и закон сохранения механической энергии (1.3.10). Выберем систему координат (рис. 1.43) и применим вышеуказанные законы сохранения:

$$m\vec{v}_0 = m\vec{v} + M\vec{u}, \quad (1)$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2}. \quad (2)$$

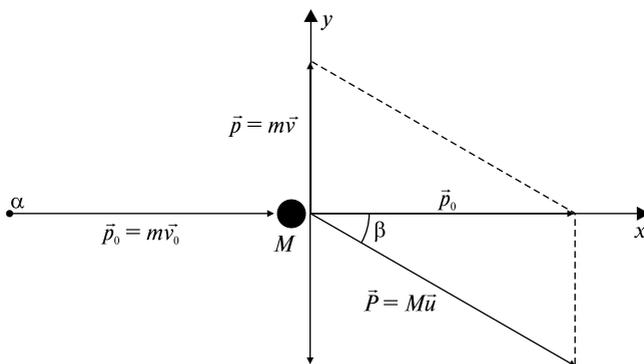


Рис. 1.43

Напишем проекции импульсов тел на каждую ось:

$$x: mv_0 = Mu \cos \beta, \quad mv_0 = Mu \cos \beta, \quad (3)$$

$$y: 0 = mv - Mu \sin \beta, \quad mv = Mu \sin \beta, \quad (4)$$

Так как импульс — величина векторная, сложим импульсы по правилу треугольника и воспользуемся теоремой Пифагора:

$$\begin{aligned}\bar{P}^2 &= \bar{p}_0^2 + \bar{p}^2, \\ (M\bar{u})^2 &= (m\bar{v}_0)^2 + (m\bar{v})^2.\end{aligned}\quad (5)$$

Из (2) и (5) получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} mv_0^2 = mv^2 + Mu^2, \\ (Mu)^2 = (mv_0)^2 + (mv)^2. \end{cases}$$

Решая ее, определяем

$$Mu^2 = \frac{(mv_0)^2 + (mv)^2}{M}, \quad mv_0^2 = mv^2 + \frac{(mv_0)^2 + (mv)^2}{M};$$

$$v = v_0 \sqrt{\frac{M-m}{M+m}}; \quad u = \frac{mv_0}{M} \sqrt{\frac{2M}{M+m}}.$$

Разделив (4) на (3) и используя значение  $v$ , получим

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v}{v_0} = \sqrt{\frac{M-m}{M+m}}, \quad \text{откуда } \beta = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{M-m}{M+m}}.$$

$$\text{Ответ: } v = v_0 \sqrt{\frac{M-m}{M+m}}; \quad u = \frac{mv_0}{M} \sqrt{\frac{2M}{M+m}}; \quad \beta = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{M-m}{M+m}}.$$

1.3.19. Два абсолютно упругих шара движутся навстречу друг другу по идеально гладкой горизонтальной поверхности. Массы шаров  $m_1$  и  $m_2$ , скорости  $v_1$  и  $v_2$  соответственно. Определить скорости шаров  $u_1$  и  $u_2$  после соударения. Рассмотреть частный случай: массы шаров одинаковы и один из них покоится.

*Решение.* Для решения задачи воспользуемся законом сохранения импульса (1.3.9) и законом сохранения механической энергии (1.3.10):

$$\begin{cases} m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 = m_1 \bar{u}_1 + m_2 \bar{u}_2, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}. \end{cases} \quad (2)$$

Выберем положительное направление координатной оси  $x$ , совпадающее с направлением скорости  $\bar{v}_1$ , и запишем уравнение (1) в виде

$$x: m_1 v_1 - m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2, \quad (3)$$

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2. \quad (4)$$

Решаем полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} m_1(v_1 - u_1) = m_2(u_2 + v_2), & (5) \\ m_1(v_1^2 - u_1^2) = m_2(u_2^2 - v_2^2). & (6) \end{cases}$$

Делим почленно уравнение (6) на (5) и запишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} v_1 + u_1 = u_2 - v_2, & (7) \\ m_1 v_1 - m_1 u_1 = m_2 u_2 + m_2 v_2. & (8) \end{cases}$$

Из уравнения (7) получаем  $u_2 = v_1 + u_1 + v_2$  и, подставляя в (8), определяем

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 - 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \quad (9)$$

Подставляя (9) в (7), находим

$$u_2 = \frac{(m_1 - m_2)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}. \quad (10)$$

Рассмотрим частный случай. Массы шаров равны  $m_1 = m_2 = m$ , второй шар покоится (до удара),  $v_2 = 0$ . Подставляя эти условия в (9) и (10), получаем  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = v_1$ , т.е. первый шар остановится, а второй с первоначальной скоростью первого шара начнет движение — шары обменяются скоростями.

$$\text{Ответ: } u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 - 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad u_2 = \frac{(m_1 - m_2)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

### Задачи без решения

1.3.20. Шарик подвешен на нити длиной  $l$ . Какую минимальную скорость  $v_{\min}$  нужно сообщить шарiku, висящему в вертикальном положении, чтобы он начал вращаться в вертикальной плоскости?

1.3.21. Маленькое тело начинает скользить по наклонной плоскости с высоты  $H$ . Наклонная плоскость составляет с горизонтом угол  $\alpha$ . В нижней точке тело ударяется о стенку, поставленную перпендикулярно наклонной плоскости (рис. 1.44). Удар абсолютно упругий. Найти высоту подъема тела по наклонной плоскости  $h$ . Коэффициент трения между наклонной плоскостью и телом  $k$ .

1.3.22. Тяжелый шарик соскальзывает по наклонному гладкому желобу, образующему «мертвую петлю» радиусом  $R$  (рис. 1.45). С какой высоты  $H$  шарик должен начать движение, чтобы не оторваться от желоба в верхней точке траектории?

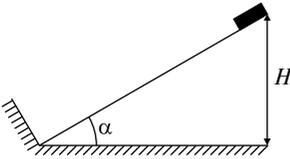


Рис. 1.44

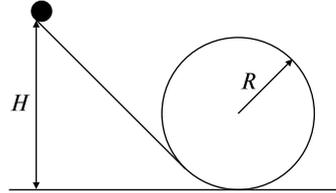


Рис. 1.45

1.3.23. Камень брошен под некоторым углом к горизонту со скоростью  $v_0$ . Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, на какой высоте  $h$  скорость камня уменьшится вдвое?

1.3.24. Брусок массой  $m$  скользит по наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha$  с высоты  $H$ . В начальный момент его скорость на вершине была  $v_0 = 0$ . У основания скорость бруска  $v$ . Определить, какую работу  $A$  совершила сила трения  $F_{\text{тр}}$  и чему она равна. Считать силу трения постоянной.

1.3.25. В баллистический маятник массой  $M$  ударяет пуля массой  $m$  и застревает в нем. После удара маятник поднимается на высоту  $h$  (рис. 1.46). Определить, какую скорость  $v_0$  имела пуля до удара.

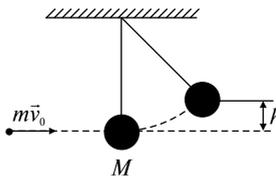


Рис. 1.46

1.3.26. Тело скользит сначала по наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha$ , а затем по горизонтальной поверхности. Определить, чему равен коэффициент трения  $k$ , если известно, что тело проходит по горизонтали такое же расстояние, как и по наклонной плоскости.

1.3.27. Шарик массой  $m_1$  движется без трения по горизонтальной поверхности и сталкивается с покоящимся шариком массой  $m_2$ . Удар считать центральным и абсолютно упругим. При каком соотношении масс шариков  $k$  они разлетятся в противоположные стороны с равными по величине скоростями?

1.3.28. В шар массой  $m_1$ , движущийся со скоростью  $v_1$ , ударяется другой шар массой  $m_2$ , догоняющий первый в том же направлении со скоростью  $v_2$ . Считая удар абсолютно неупругим, найти скорости шаров  $u$  после удара, а также их кинетическую энергию  $E_k$ .

1.3.29. С высоты  $h$  падает маленький шарик, который ударяется о движущуюся вверх со скоростью  $v$  горизонтальную плоскость, принадлежащую массивному телу. Соударение абсолютно упругое и происходит на уровне, от которого отсчитываются все высоты. До какой высоты  $H$  отскочит шарик после соударения?

1.3.30. На наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha$  лежит брусок массой  $M$ , опирающийся на упор (рис. 1.47). Пуля массой  $m$ , летящая параллельно наклонной плоскости со скоростью  $v_0$ , попадает в брусок и застревает в нем. Какой путь  $l$  вдоль наклонной плоскости пройдет брусок до остановки? Трением пренебречь.

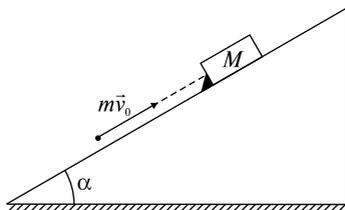


Рис. 1.47

1.3.31. При упругом ударе нейтрона о ядро углерода он движется в направлении, перпендикулярном первоначальному. Считая, что масса ядра углерода в  $n = 12$  раз больше массы нейтрона, определить, во сколько раз  $k$  уменьшается энергия нейтрона в результате удара?

## ТЕМА 1.4

### НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

Существует целый класс задач, которые удобнее решать с использованием неинерциальной системы отсчета. Неинерциальной системой отсчета называется система, движущаяся ускоренно относительно инерциальной. При решении задач в неинерциальных системах предполагается, что в них, так же как и в инерциальных, ускорения вызываются силами, но наряду с «обычными» силами взаимодействия существуют еще силы особой природы, называемые силами инерции. Поэтому второй закон Ньютона в неинерциальной системе имеет вид

$$m\vec{a}_{\text{ин}} = \vec{F} + \vec{F}_{\text{ин}}, \quad (1.4.1)$$

где  $\vec{a}_{\text{ин}}$  — ускорение в неинерциальной системе отсчета (относительное ускорение),  $\vec{F}$  — обычные силы, появляющиеся в результате взаимодействия тел,  $\vec{F}_{\text{ин}}$  — силы инерции.

В неинерциальных системах отсчета, движущихся прямолинейно и поступательно, сила инерции определяется выражением

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}_0, \quad (1.4.2)$$

где  $\vec{a}_0$  — ускорение неинерциальной системы (переносное ускорение). Из (1.4.2) видно, что сила инерции направлена противоположно переносному ускорению.

В неинерциальных вращающихся системах координат следует учитывать две силы инерции: центробежную силу инерции

$$\vec{F}_{\text{цб}} = m\omega^2 \vec{R} \quad (1.4.3)$$

и силу Кориолиса

$$\vec{F}_{\text{К}} = -2m[\vec{\omega}, \vec{v}_{\text{отн}}], \quad (1.4.4)$$

где  $\vec{\omega}$  — угловая скорость вращающейся системы координат,  $\vec{R}$  — перпендикулярная к оси вращения составляющая радиус-вектора рассматриваемого тела,  $\vec{v}_{\text{отн}}$  — относительная скорость, т.е. скорость движения тела в неинерциальной системе отсчета.

#### Качественные задачи

1.4.1. Как объяснить неодинаковое изнашивание рельсов двухколейной железной дороги?

1.4.2. Можете ли Вы указать проявление сил инерции при движении тел вблизи земной поверхности?

1.4.3. Производят ли работу центробежные силы? Силы Кориолиса?

1.4.4. Может ли быть, чтобы центробежная сила инерции совпала с направлением силы тяжести, была ей противоположна?

1.4.5. Возможен ли случай, чтобы сила инерции Кориолиса совпала с направлением силы тяжести, была ей противоположна?

1.4.6. Одинаково ли направление векторов сил инерции и соответствующих им ускорений при сложном движении материальной точки в неинерциальной системе координат? Могут ли быть указаны конкретно тела, которыми обусловлено появление этих ускорений?

### Задачи с решениями

1.4.7. Маятник массой  $m$  подвешен к подставке, укрепленной на тележке, которая свободно скатывается с наклонной плоскости, образующей угол  $\alpha$  с горизонтом (рис. 1.48, а). Определить уравнение движения маятника относительно подставки и направление нити маятника. Трение отсутствует.

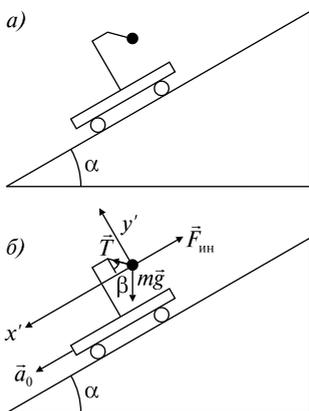


Рис. 1.48

*Решение.* Рассмотрим равновесное состояние маятника в неинерциальной системе координат, свободно движущейся вдоль наклонной плоскости с ускорением  $a_0$ , причем  $a_0 = g \sin \alpha$ . На ма-

ятник в этой системе действуют сила тяжести  $m\vec{g}$ , сила натяжения  $\vec{T}$  и сила инерции  $\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}_0$ . Уравнение движения в векторном виде согласно (1.4.1) имеет вид

$$m\vec{a}_{\text{ин}} = \vec{T} + m\vec{g} + \vec{F}_{\text{ин}}. \quad (1)$$

Так как  $\vec{a}_{\text{ин}} = 0$ , уравнение движения принимает вид

$$\vec{T} + m\vec{g} - m\vec{a}_0 = 0. \quad (2)$$

Выберем координатные оси  $x'y'$  (см. рис. 1.48, б) и напишем проекции сил на каждую из осей:

$$x': T \sin \beta + mg \sin \alpha - mg \sin \alpha = 0, \quad (3)$$

$$y': T \cos \beta - mg \cos \alpha = 0. \quad (4)$$

Из уравнения (3) получаем  $\sin \beta = 0$ , следовательно,  $\beta = 0$ , т.е. нить нормальна к наклонной плоскости.

*Ответ:*  $\vec{T} + m\vec{g} - m\vec{a}_0 = 0$ , нить нормальна к наклонной плоскости.

1.4.8. Тело, находящееся на наклонной плоскости, удерживается силой трения. За какое время  $t$  тело опустится с наклонной плоскости, если она станет двигаться в горизонтальном направлении с ускорением  $\vec{a}_0 = 1 \text{ м/с}^2$ ? Длина плоскости  $L = 1 \text{ м}$ , угол наклона к горизонту  $\alpha = 30^\circ$ , коэффициент трения между телом и плоскостью  $k = 0,6$ . Задачу решить в неинерциальной системе координат, связанной с наклонной плоскостью.

*Решение.* Выберем систему отсчета, связанную с наклонной плоскостью. На тело действуют: сила тяжести  $m\vec{g}$ , сила трения  $\vec{F}_{\text{тр}}$ , сила нормального давления  $\vec{N}$ , сила инерции  $\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}_0$  (рис. 1.49). Напишем уравнение движения в векторном виде:

$$\vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N} + m\vec{g} - m\vec{a}_0 = m\vec{a}_{\text{ин}}. \quad (1)$$

Определим проекции данных сил на оси  $x'$  и  $y'$ :

$$x': ma_0 \cos \alpha + mg \sin \alpha - F_{\text{тр}} = ma_{\text{ин}}, \quad (2)$$

$$y': N + ma_0 \sin \alpha - mg \cos \alpha = 0, \quad (3)$$

$$F_{\text{тр}} = kN. \quad (4)$$

Напишем кинематическое уравнение движения

$$L = a_{\text{ин}} t^2 / 2. \quad (5)$$

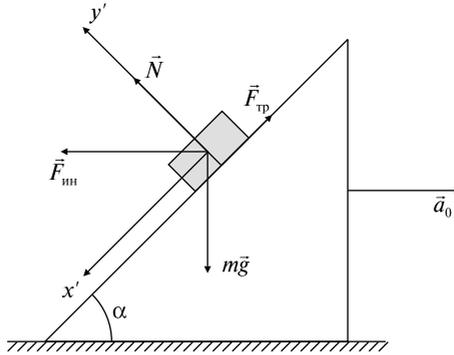


Рис. 1.49

Определяем  $N$  из уравнения (3) и подставляем в уравнения (4) и (2), тогда

$$a_{\text{ин}} = g(\sin \alpha - k \cos \alpha) + a_0(\cos \alpha + k \sin \alpha).$$

Подставляя полученное значение ускорения  $a_{\text{ин}}$  в уравнение (5), получаем время спуска

$$t = \sqrt{2L/[g(\sin \alpha - k \cos \alpha) + a_0(\cos \alpha + k \sin \alpha)]} \approx 0,8 \text{ с.}$$

Ответ:  $t \approx 0,8 \text{ с.}$

1.4.9. На внутренней поверхности конической воронки с углом  $2\alpha$  при вершине на высоте  $h$  от вершины находится малое тело. Коэффициент трения между телом и воронкой равен  $k$ . Найти минимальную угловую скорость вращения конуса вокруг вертикальной оси  $\omega_{\text{мин}}$ , при которой тело будет неподвижно в воронке. Задачу решить в неинерциальной системе координат, связанной с вращающимся конусом.

*Решение.* Выберем систему координат  $x'y'$ , связанную с вращающимся конусом. Относительно этой системы наше тело покоится. Принимая во внимание силы, действующие на тело (рис. 1.50), напишем уравнение движения в векторном виде:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{F}_{\text{ин}} = 0.$$

Вспомним, что во вращающейся системе координат силы инерции определяются соотношениями (1.4.5) и (1.4.4) и  $\vec{F}_{\text{ин}} = \vec{F}_{\text{цб}} + \vec{F}_{\text{К}}$ , где  $\vec{F}_{\text{цб}} = m\omega^2 \vec{R}$  — центробежная сила инерции, направленная вдоль радиуса от оси вращения;  $\vec{F}_{\text{К}} = -2m[\vec{\omega}, \vec{v}']$  — сила Кориолиса. Последняя перпендикулярна плоскости, в которой

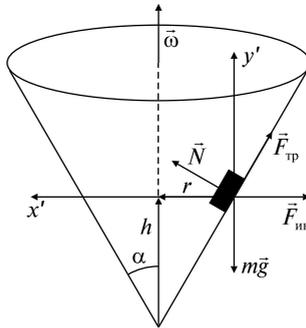


Рис. 1.50

лежат векторы угловой  $\omega$  и относительной  $v'$  скоростей. В данной задаче сила инерции определяется только центробежной силой, поскольку тело в воронке неподвижно.

Напишем проекции сил на оси  $x'$  и  $y'$ :

$$x': N \cos \alpha - F_{\text{тр}} \sin \alpha - m\omega_{\text{мин}}^2 r = 0,$$

$$y': N \sin \alpha + F_{\text{тр}} \cos \alpha - mg = 0,$$

$F_{\text{тр}} = kN$ , так как в нашем случае сила трения имеет максимальное значение.

Из рисунка видно, что  $r = h \operatorname{tg} \alpha$ .

Данную систему уравнений

$$x': N \cos \alpha - kN \sin \alpha = m\omega_{\text{мин}}^2 h \operatorname{tg} \alpha,$$

$$y': N \sin \alpha + kN \cos \alpha = mg$$

можно решить, поделив первое уравнение на второе:

$$\frac{\cos \alpha - k \sin \alpha}{\sin \alpha + k \cos \alpha} = \frac{\omega_{\text{мин}}^2 h \operatorname{tg} \alpha}{g}.$$

Отсюда следует, что

$$\omega_{\text{мин}}^2 = \frac{g(\cos \alpha - k \sin \alpha)}{h \operatorname{tg} \alpha(\sin \alpha + k \cos \alpha)}.$$

$$\text{Ответ: } \omega_{\text{мин}} = \sqrt{\frac{g(\cos \alpha - k \sin \alpha)}{h \operatorname{tg} \alpha(\sin \alpha + k \cos \alpha)}}.$$

1.4.10. На Земле, вращающейся вокруг своей оси с угловой скоростью  $\bar{\omega}$ , по экватору с востока на запад, с относительной

скоростью  $\vec{v}'$  движется поезд массой  $m$ . Не учитывая сил трения, принимая поезд за единое твердое тело, определить силу  $\vec{N}$ , действующую на поезд со стороны рельсов.

*Решение.* В неинерциальной системе координат, кроме обычных сил взаимодействия — силы тяжести поезда  $m\vec{g}$  и силы реакции опоры  $\vec{N}$ , необходимо учитывать центробежную силу инерции  $\vec{F}_{\text{цб}} = m\omega^2\vec{R}$  и силу инерции Кориолиса  $\vec{F}_K = -2m[\vec{\omega}, \vec{v}']$  (рис. 1.51). Так как в данном случае все силы направлены вдоль одной прямой, то уравнение движения имеет вид

$$\frac{mv'^2}{R} = mg - N - m\omega^2 R + 2mv'\omega,$$

где  $R$  — радиус Земли.

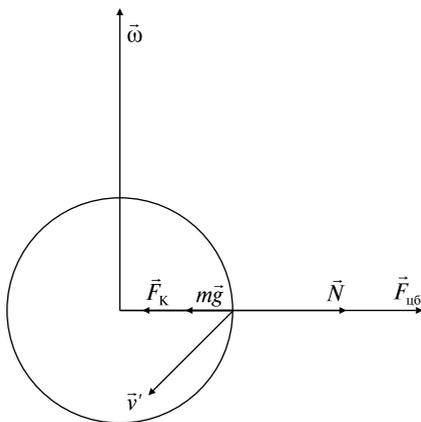


Рис. 1.51

Откуда

$$N = mg - \frac{mv'^2}{R} - m\omega^2 R + 2mv'\omega.$$

*Ответ:* 
$$N = mg - \frac{mv'^2}{R} - m\omega^2 R + 2mv'\omega.$$

1.4.11. Шары центробежного регулятора соединены горизонтальной пружиной, имеющей посередине кольцо, через которое проходит, не касаясь его, ось регулятора (рис. 1.52, а). Масса каж-

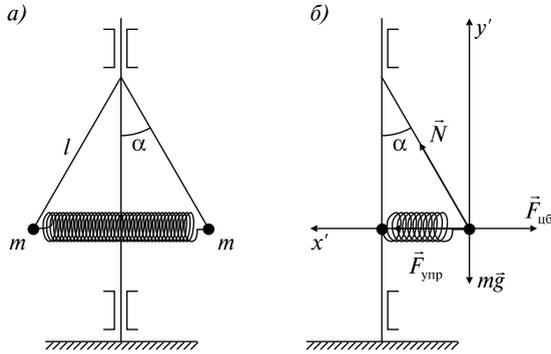


Рис. 1.52

дого шара  $m = 5$  кг, длина стержней, на которых закреплены шары,  $l = 60$  см, длина пружины в ненапряженном состоянии  $l_1 = 40$  см, жесткость пружины  $k = 200$  Н/м. С какой частотой  $n$  вращается регулятор, если угол отклонения его стержней от вертикали  $\alpha = 30^\circ$ ? Массой стержней пренебречь.

*Решение.* Рассмотрим силы, действующие на один из шаров в неинерциальной системе отсчета. В соответствии с рис. 1.52, б на него действуют сила тяжести  $m\vec{g}$ , сила реакции стержня  $\vec{N}$ , сила упругости пружины  $\vec{F}_{\text{упр}}$ , центробежная сила инерции  $\vec{F}_{\text{цб}}$ . Выберем направление осей  $x'$  и  $y'$  и напишем уравнение движения (1.4.1) сначала в векторном виде:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{цб}} + \vec{F}_{\text{упр}} = 0,$$

а затем в проекциях сил на данные оси:

$$x': F_{\text{упр}} + N \sin \alpha - F_{\text{цб}} = 0, \quad (1)$$

$$y': N \cos \alpha - mg = 0. \quad (2)$$

По закону Гука  $F_{\text{упр}} = k(l_2 - l_1)$ , где  $l_2$  — длина растянутой пружины, следовательно,  $F_{\text{упр}} = k(2l \sin \alpha - l_1)$ .

Из выражения (1.4.3) следует, что  $F_{\text{цб}} = m\omega^2 l \sin \alpha$ .

Решаем систему уравнений (1), (2):

$$N = \frac{mg}{\cos \alpha},$$

$$k(2l \sin \alpha - l_1) + mg \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - m\omega^2 l \sin \alpha = 0,$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m} - \frac{kl_1}{ml \sin \alpha} + \frac{g}{l \cos \alpha}} = 6,8 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

и получаем

$$n = \omega/2\pi = 1,08 \text{ об/с.}$$

$$\text{Ответ: } n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{m} - \frac{kl_1}{ml \sin \alpha} + \frac{g}{l \cos \alpha}} = 1,08 \text{ об/с.}$$

1.4.12. Сосуд с жидкостью вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью  $\vec{\omega}$ . Определить форму поверхности жидкости.

*Решение.* Рассмотрим задачу в неинерциальной системе отсчета, связанной с вращающимся сосудом. В ней жидкость будет неподвижной. На частицу  $\Delta m$ , лежащую на расстоянии  $x$  от оси вращения, действуют три силы (рис. 1.53): сила тяжести  $\Delta m \vec{g}$ , центробежная сила инерции  $\vec{F}_{\text{цб}} = -\Delta m \omega^2 x$  и сила реакции  $\vec{N}$  соседних частиц жидкости. Выберем направления осей  $X, Y$  и напишем уравнение движения сначала в векторном, а затем в скалярном виде:

$$\Delta m \vec{g} + \vec{F}_{\text{цб}} + \vec{N} = 0;$$

$$X: N \sin \alpha - \Delta m \omega^2 x = 0,$$

$$Y: N \cos \alpha - \Delta m g = 0.$$

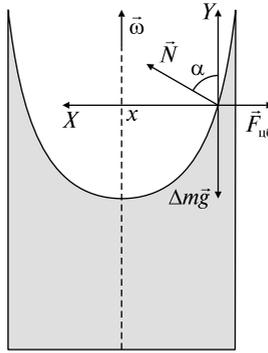


Рис. 1.53

Решаем данную систему уравнений:

$$N = \Delta m g / \cos \alpha,$$

$$\Delta m g \operatorname{tg} \alpha = \Delta m \omega^2 x,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \omega^2 x / g.$$

Учитывая, что  $\operatorname{tg} \alpha = dy/dx$ , получаем дифференциальное уравнение кривой, вращение которой вокруг оси  $Y$  образует поверхность жидкости:

$$dy/dx = \omega^2 x/g.$$

$$\text{Откуда } y(x) = \omega^2 x^2/2g + C.$$

Следует отметить, что при данном выборе оси  $X$  постоянная  $C = 0$ . Из уравнения  $y(x)$  видно, что это уравнение параболы, таким образом, поверхность жидкости является параболоидом вращения.

*Ответ:*  $y(x) = \omega^2 x^2/2g$ , поверхность жидкости является параболоидом вращения.

1.4.13. На центробежной машине укреплен гладкий горизонтальный стержень длиной  $2L_0 = 1$  м, ось вращения вертикальна и проходит через середину стержня (рис. 1.54). На стержень надеты две небольшие муфты массой  $m = 400$  г каждая. Муфты связаны нитью длиной  $2L_1 = 20$  см и расположены симметрично относительно оси вращения. Машина вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega = 2$  рад/с. С какой радиальной скоростью  $v'$  подойдут муфты к концу стержня, если пережечь нить?

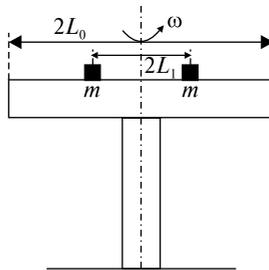


Рис. 1.54

*Решение.* По условию требуется определить скорость муфт относительно вращающегося стержня, поэтому естественно решать задачу в неинерциальной системе отсчета, жестко связанной со стержнем. На каждую муфту действуют сила тяжести  $m\vec{g}$ , сила нормальной реакции стержня  $\vec{N}$ ; центробежная сила инерции  $\vec{F}_{цб} = m\omega^2\vec{r}$ , где  $\vec{r}$  — радиус-вектор муфты (муфта рассматривается как материальная точка), проведенный от оси вращения вдоль

стержня; сила Кориолиса  $\vec{F}_K = -2m[\vec{\omega}, \vec{v}']$ , где  $\vec{v}'$  — относительная радиальная скорость. Эта сила, направленная перпендикулярно вектору  $\vec{v}'$ , изменяет силу нормальной реакции стержня, но вследствие отсутствия трения никак не влияет на характер относительного движения муфты. Сила Кориолиса меняет только режим работы двигателя: чем дальше уйдут муфты от оси вращения, тем больше тормозящий момент сил Кориолиса и тем большую мощность должен развивать двигатель, чтобы поддерживать постоянную угловую скорость вращения.

Таким образом, движение муфты вдоль стержня происходит под действием только центробежной силы инерции, следовательно, скорость этого движения может быть найдена либо с помощью второго закона Ньютона, либо из соотношения между изменением кинетической энергии и работой, которую совершает при радиальном перемещении каждой муфты центробежная сила инерции. Выбрав второй путь, запишем изменение кинетической энергии:

$$\Delta E_k = mv'^2/2 = A_{цб}. \quad (1)$$

Согласно формуле (1.3.7), рассчитаем работу центробежной силы

$$A_{цб} = \int_{L_1}^{L_0} m\omega^2 r dr = \frac{m\omega^2}{2}(L_0^2 - L_1^2). \quad (2)$$

Подставляя выражение (2) в (1), получаем

$$v' = \omega\sqrt{L_0^2 - L_1^2} = 0,98 \text{ м/с}.$$

*Ответ:*  $v' = 0,98 \text{ м/с}$ .

### Задачи без решений

1.4.14. Маятник массой  $m$  подвешен к подставке, укрепленной на тележке (рис. 1.55). Тележка движется горизонтально с ускорением  $\vec{a}_0$ . Найти уравнение движения маятника относительно подставки и угол  $\alpha$ , который составляет нить маятника с вертикалью. Трение отсутствует.

1.4.15. Горизонтально расположенный стержень вращается вокруг оси, проходящей через его конец, с постоянной угловой скоростью  $\omega = 1 \text{ рад/с}$ . Расстояние от оси до другого конца стержня

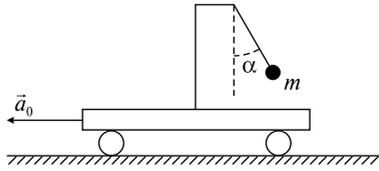


Рис. 1.55

$L = 1$  м. На стержень надета муфта массой  $m = 0,1$  кг. Муфта закреплена с помощью нити на расстоянии  $L_0 = 0,1$  м от оси вращения. В момент  $t = 0$  с нить пережигают, и муфта начинает скользить по стержню практически без трения. Найти: 1) время  $\tau$ , спустя которое муфта слетит со стержня; 2) силу  $F$ , с которой стержень действует на муфту в момент  $\tau$ ; 3) работу  $A$ , которая совершается над муфтой за время  $\tau$ .

1.4.16. Стержни центробежного регулятора, на которых закреплены шары массой  $m = 5$  кг каждый, имеют длину  $L = 60$  см и соединяются посередине горизонтальной пружиной с кольцом в центре, через которое проходит, не касаясь его, ось регулятора (рис. 1.56). Длина пружины в ненапряженном состоянии  $L_0 = 20$  см; жесткость пружины  $k = 200$  Н/м. С какой частотой  $n$  вращается регулятор, если угол отклонения стержней от вертикали  $\alpha = 30^\circ$ ? Массой стержней пренебречь.

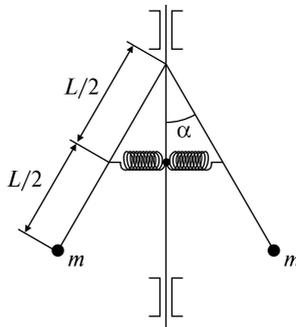


Рис. 1.56

1.4.17. В потолок лифта вмонтирована вертикальная ось, к которой на нити длиной  $L = 40$  см прикреплено тело массой  $m = 800$  г. Ось вращается с частотой  $n = 90$  об/мин. Найти силу на-

тяжения нити  $T$  и угол  $\alpha$  отклонения нити от вертикали, когда лифт движется вверх с ускорением  $a_0 = 3 \text{ м/с}^2$ . Массой нити пренебречь.

1.4.18. Электровоз массой  $m = 184 \text{ т}$  движется вдоль меридиана со скоростью  $v = 72 \text{ км/ч}$  на широте  $\varphi = 45^\circ$ . Определить горизонтальную составляющую силы, с которой электровоз давит на рельсы.

## ТЕМА 1.5 ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

При решении задач движение твердого тела можно рассматривать как сумму двух движений: вращательного относительно какой-либо оси и поступательного со скоростью оси. При этом ось вращения обычно выбирают так, чтобы она проходила через центр масс тела.

**Центром масс** системы материальных точек (твердого тела) называется точка  $C$ , положение которой в пространстве определяется радиус-вектором, имеющим начало в произвольной точке  $O$  и равным

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}, \quad (1.5.1)$$

где  $m_i$  — масса  $i$ -й материальной точки,  $\vec{r}_i$  — ее радиус-вектор с началом в той же точке  $O$ ,  $m$  — масса всей системы (твердого тела). При изучении вращения твердого тела пользуются понятиями момента инерции  $I$ , момента силы  $\vec{M}$  и момента импульса  $\vec{L}$ .

**Моментом инерции системы** (тела)  $I$  относительно оси вращения называется физическая величина, равная сумме произведений масс  $n$  материальных точек системы на квадраты их расстояний до рассматриваемой оси:

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2. \quad (1.5.2)$$

В случае непрерывного распределения масс эта сумма сводится к интегралу

$$I = \int_V r^2 dm, \quad (1.5.3)$$

где интегрирование производится по всему объему тела. Величина  $r$  в этом случае есть функция положения точки с координатами  $x, y, z$ .

**Момент силы**  $\vec{F}$  относительно неподвижной точки  $O$  определяется векторным произведением радиус-вектора  $\vec{r}$ , проведенного из точки  $O$  в точку приложения силы, на силу  $\vec{F}$ :

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]. \quad (1.5.4)$$

Модуль момента силы

$$M = rF \sin \alpha, \quad (1.5.5)$$

где  $\alpha$  — угол между  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$ ,  $r \sin \alpha = l$  — кратчайшее расстояние между линией действия силы и точкой  $O$  (плечо силы).

**Моментом импульса материальной точки  $\vec{L}$**  относительно неподвижной точки называется физическая величина, определяемая векторным произведением:

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{v}], \quad (1.5.6)$$

где  $\vec{r}$  — радиус-вектор,  $\vec{p} = m\vec{v}$  — импульс материальной точки.

**Момент импульса твердого тела  $\vec{L}$**  относительно оси равен сумме моментов импульсов отдельных частиц:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n m_i [\vec{r}_i, \vec{v}_i] = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \vec{\omega} = I \vec{\omega}. \quad (1.5.7)$$

Таким образом, момент импульса твердого тела относительно оси определяется произведением момента инерции тела  $I$  относительно той же оси на угловую скорость  $\vec{\omega}$ .

Уравнения, описывающие движение твердого тела, можно записать следующим образом:

$$m\vec{a}_C = \sum_i \vec{F}_i, \quad (1.5.8)$$

(второй закон Ньютона для движения центра масс твердого тела), где  $\vec{a}_C$  — ускорение центра масс,

$$I_z \beta = \sum_i M_{iz}, \quad (1.5.9)$$

(основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела), где  $\sum_i M_{iz} = M_z$  — результирующий момент всех внешних сил, приложенных к телу, относительно оси  $z$ ,  $I_z$  — момент инерции относительно оси  $z$ ,  $\beta$  — угловое ускорение твердого тела.

### Качественные задачи

1.5.1. Какую линейную скорость относительно земли имеют точки  $A$  и  $B$  (рис. 1.57), находящиеся на ободе катящегося без проскальзывания колеса?

1.5.2. Как движутся кабины в аттракционе «колесо обозрения»: поступательно или вращательно?

1.5.3. В какую сторону вдоль оси вращения направлен вектор угловой скорости Земли при ее суточном вращении?

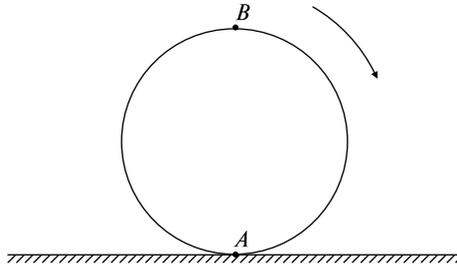


Рис. 1.57

1.5.4. Посмотрите на циферблат часов с секундной стрелкой. Как направлен момент импульса секундной стрелки?

1.5.5. Может ли меньшая сила создать больший момент силы?

1.5.6. Если равнодействующая всех сил, действующих на систему, равна нулю, то равен ли нулю результирующий момент сил? Если результирующий момент сил, действующих на систему, равен нулю, равна ли нулю результирующая сила?

1.5.7. Частица движется с постоянной скоростью вдоль прямой линии. Как изменяется с течением времени момент импульса частицы, вычисленный относительно любой точки, не лежащей на этой прямой?

1.5.8. Два однородных диска одной толщины и одинаковой массы вращаются вокруг осей, проходящих через их центры. Если они изготовлены из материалов с различными плотностями, то у какого из них момент инерции будет больше?

### Задачи с решениями

1.5.9. На рис. 1.58 заштрихованная область представляет собой однородную пластину в форме буквы *L*. Определить координаты  $x_C$  и  $y_C$  ее центра масс.

*Решение.* По определению радиус-вектор центра масс находится по формуле (1.5.1), следовательно, координаты  $x_C$  и  $y_C$  центра масс определяются соотношениями

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{m}, \quad y_C = \frac{\sum m_i y_i}{m}.$$

Разбиваем пластину на квадраты так, как показано на рисунке, и определяем координаты центра масс, исходя из следующих сумм:

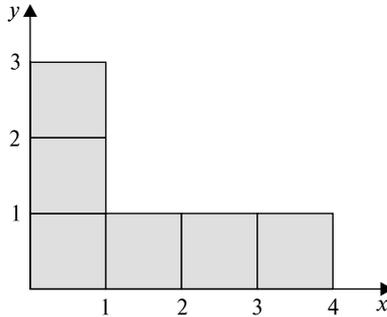


Рис. 1.58

$$x_C = \frac{m \cdot \frac{1}{2} + m \cdot \frac{1}{2} + m \cdot \frac{1}{2} + m \cdot \frac{3}{2} + m \cdot \frac{5}{2} + m \cdot \frac{7}{2}}{6m} = \frac{3}{2},$$

$$y_C = \frac{m \cdot \frac{5}{2} + m \cdot \frac{3}{2} + m \cdot \frac{1}{2} + m \cdot \frac{1}{2} + m \cdot \frac{1}{2} + m \cdot \frac{1}{2}}{6m} = 1.$$

Ответ:  $x_C = \frac{3}{2}, y_C = 1.$

1.5.10. Получить формулу для момента инерции:

- 1) однородного диска массой  $M$  радиусом  $R$  относительно оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через его центр;
- 2) шара относительно его диаметра (масса шара  $M$ , радиус  $R$ );
- 3) тонкого стержня длиной  $l$  относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину;
- 4) тонкого стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец (длина стержня  $l$ ).

*Решение.* Для решения задачи воспользуемся выражением (1.5.3).

1) Рассмотрим диск, выделим кольцо радиусом  $r$  и толщиной  $dr$  (рис. 1.59, а), масса этого кольца  $dm = \rho \cdot 2\pi r dr h$ , плотность  $\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi R^2 h}$ , следовательно,  $dm = \frac{2Mr dr}{R^2}$ .

Момент инерции  $dI$  кольца относительно оси

$$dI = r^2 dm = \frac{2Mr^3 dr}{R^2},$$

отсюда следует

$$I_{\text{д}} = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{MR^2}{2}. \quad (1)$$

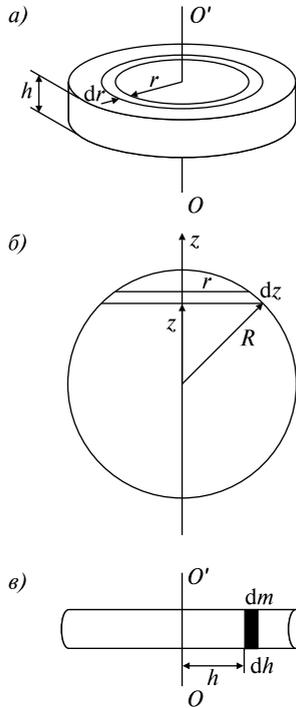


Рис. 1.59

2) Разбиваем шар на тонкие диски, перпендикулярные оси вращения (рис. 1.59, б). Масса диска

$$dm = \rho \pi r^2 dz = \frac{M \pi (R^2 - z^2) dz}{\frac{4}{3} \pi R^3}.$$

Момент инерции такого диска относительно оси  $Z$ , согласно (1)

$$dI = \frac{r^2 dm}{2} = \frac{3M}{4R^3 \cdot 2} (R^2 - z^2)^2 dz.$$

Таким образом, момент инерции шара оказывается равным

$$I_{\text{ш}} = 2 \int_0^R \frac{3M}{8R^3} (R^2 - z^2)^2 dz = \frac{2}{5} MR^2. \quad (2)$$

3) Рассмотрим тонкий стержень. Разбиваем его на элементарные массы  $dm$  толщиной  $dh$  (рис. 1.59, в):

$$dm = \rho \pi R^2 dh = \frac{M}{\pi R^2 l} \pi R^2 dh = \frac{M}{l} dh.$$

Момент инерции этой массы  $dI = h^2 dm$ . Следовательно, момент инерции стержня

$$I_{\text{ст}} = 2 \int_0^{l/2} h^2 dm = \frac{Ml^2}{12}. \quad (3)$$

4) Воспользуемся теоремой Штейнера: если известен момент инерции тела  $I_0$  относительно оси, проходящей через центр масс этого тела, то момент инерции  $I$  относительно любой другой оси, параллельной данной и отстоящей от нее на расстоянии  $a$ , выражается формулой  $I = I_0 + ma^2$ , где  $m$  — масса тела. Опираясь на эту теорему и используя формулу (3), получаем

$$I = \frac{Ml^2}{12} + M \left( \frac{l}{2} \right)^2 = \frac{Ml^2}{3}.$$

Ответ: 1)  $I_{\text{д}} = \frac{MR^2}{2}$ , 2)  $I_{\text{ш}} = \frac{2}{5} MR^2$ , 3)  $I_{\text{ст}} = \frac{Ml^2}{12}$ , 4)  $I = \frac{Ml^2}{3}$ .

1.5.11. В однородном диске массой  $M$  и радиусом  $R$  вырезано круглое отверстие диаметром  $d$ , центр которого находится на расстоянии  $l$  от оси диска (рис. 1.60). Найти момент инерции  $I$  полученного тела относительно оси, проходящей через его центр, перпендикулярно к плоскости диска.

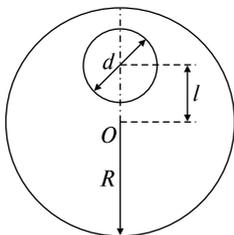


Рис. 1.60

*Решение.* Воспользуемся следующим формальным приемом: будем рассматривать наш диск с радиусом  $R$  и массой  $M$  и диск радиусом  $d/2$  и массой  $-m$ . Таким образом, момент инерции исследуемого тела будет представлять собой сумму моментов инерции этих двух дисков с применением теоремы Штейнера.

Проведем ряд математических преобразований:

$$M = \pi R^2 h \rho, \quad h \rho = \frac{M}{\pi R^2},$$

$$m = \frac{\pi d^2 h \rho}{4} = \frac{\pi d^2 M}{4 \pi R^2} = \frac{d^2 M}{4 R^2};$$

$$I = \frac{M}{2} R^2 - \frac{d^2 M}{4 R^2} \cdot \frac{d}{2 \cdot 4} - \frac{d^2 M}{4 R^2} l^2,$$

получим

$$I = \frac{M}{2} \left( R^2 - \frac{d^4}{16 R^2} - \frac{d^2 l^2}{2 R^2} \right).$$

$$\text{Ответ: } I = \frac{M}{2} \left( R^2 - \frac{d^4}{16 R^2} - \frac{d^2 l^2}{2 R^2} \right).$$

1.5.12. Через неподвижный блок радиусом  $R$  с моментом инерции  $I$  переброшена нить, на которой висят грузы массами  $m_1$  и  $m_2$ . Каковы будут натяжения нити  $T_1$  и  $T_2$  по обе стороны блока и ускорение  $\vec{a}$  движения тел (рис. 1.61)?

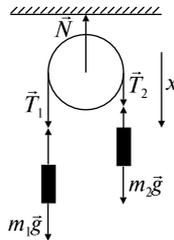


Рис. 1.61

*Решение.* Поскольку блок закреплен, то ускорение центра масс блока  $a_{C \text{ бл}} = 0$  (блок только вращается). Следовательно, уравнения движения (1.5.8) и (1.5.9) запишутся в виде

$$\sum \vec{F}_i = 0, \quad (1)$$

$$\sum \vec{M}_i = I \vec{\beta}. \quad (2)$$

На ось действуют сила тяжести  $m_{\text{бл}} \vec{g}$ , силы натяжения нити  $\vec{T}_1$  и  $\vec{T}_2$ , сила реакции оси  $\vec{N}$ . Так как все вектора коллинеарные, то уравнение (1) можно записать в скалярной форме:

$$-N + m_{\text{бл}}g + T_1 + T_2 = 0.$$

Блок вращается под действием моментов сил натяжения нитей  $T_1$  и  $T_2$ . Следовательно, уравнение (2) дает

$$I\beta = (T_2 - T_1)R. \quad (3)$$

Опишем поступательное движение грузов вдоль оси  $x$ , применив второй закон Ньютона:

$$m_2g - T_2 = m_2a, \quad (4)$$

$$m_1g - T_1 = -m_1a, \quad (5)$$

При решении задач такого рода мы считаем, что нить движется по блоку без проскальзывания, ускорения грузов равны линейному ускорению точек на ободе блока:

$$a = \beta R. \quad (6)$$

Решая систему уравнений (3)–(6), приходим к соотношениям

$$\begin{cases} m_2g - (T_2 - T_1) - m_1g = a(m_1 + m_2), \\ Ia/R = (T_2 - T_1)R, \end{cases}$$

из которых получаем

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + I/R^2},$$

$$T_1 = \left( \frac{2m_2 + I/R^2}{m_1 + m_2 + I/R^2} \right) m_1g, \quad T_2 = \left( \frac{2m_1 + I/R^2}{m_1 + m_2 + I/R^2} \right) m_2g.$$

Следует отметить, что если считать блок невесомым, то его момент инерции будет равен нулю, следовательно, ускорение грузов  $a = \left( \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) g$ . Отсюда мы видим, что наличие у блока момента инерции приводит к замедлению системы.

$$\text{Ответ: } a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + I/R^2}, \quad T_1 = \left( \frac{2m_2 + I/R^2}{m_1 + m_2 + I/R^2} \right) m_1g,$$

$$T_2 = \left( \frac{2m_1 + I/R^2}{m_1 + m_2 + I/R^2} \right) m_2g.$$

1.5.13. Однородный шар массой  $M$  и радиусом  $R$  скатывается (без проскальзывания) с наклонной плоскости. Чему будет равна

скорость  $\vec{v}$  шара у основания наклонной плоскости? Определить величину силы трения покоя  $\vec{F}_{\text{тр.п}}$ . Высота наклонной плоскости  $H$ , угол с горизонтом  $\alpha$ .

*Решение.* Движение шара можно представить как поступательное движение центра масс и вращательное движение относительно центра масс. Рассмотрим силы, действующие на шар (рис. 1.62):  $M\vec{g}$  — сила тяжести,  $\vec{N}$  — сила реакции опоры,  $\vec{F}_{\text{тр.п}}$  — сила трения

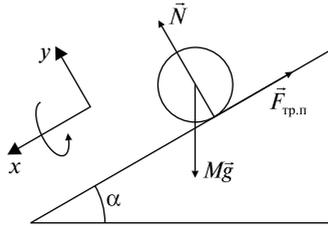


Рис. 1.62

покоя (трение между шаром и наклонной плоскостью возникает в точках их соприкосновения, а так как эти точки в каждый момент времени неподвижны, то сила трения будет силой трения покоя). Выберем положительные направления осей  $x$ ,  $y$  и угла поворота и напишем в проекциях на эти оси уравнения движения шара (1.5.8) и (1.5.9):

$$x: Mg \sin \alpha - F_{\text{тр.п}} = Ma_C, \quad (1)$$

$$y: N - Mg \cos \alpha = 0, \quad (2)$$

$$F_{\text{тр.п}} R = I\beta, \quad (3)$$

$$I = \frac{2}{5} MR^2, \quad (4)$$

$$a_C = \beta R \text{ (из условия отсутствия проскальзывания)}. \quad (5)$$

Решаем систему уравнений (1)–(5):

$$F_{\text{тр.п}} \frac{I\beta}{R} = \frac{2MR^2 a_C}{5R \cdot R} = \frac{2}{5} Ma_C.$$

Подставим в уравнение (1):

$$Mg \sin \alpha - \frac{2}{5} Ma_C = Ma_C,$$

$$a_C = \frac{5}{7} g \sin \alpha. \quad (6)$$

Мы видим, что ускорение центра масс шара  $a_C$ , катящегося по наклонной плоскости, меньше, чем ускорение тела  $a = g \sin \alpha$ , скользящего по этой плоскости.

Для того чтобы найти скорость у основания наклонной плоскости, воспользуемся формулами равноускоренного движения:

$$\begin{cases} x = at^2/2, \\ v = at, \\ x = H/\sin \alpha, \end{cases} \quad x = \frac{av^2}{2a^2}, \quad v = \sqrt{\frac{10gH}{7}}.$$

Найдем силу трения покоя  $F_{\text{тр.п}}$ , используя выражение (6):

$$F_{\text{тр.п}} = \frac{2}{5} M \frac{5}{7} g \sin \alpha = \frac{2}{7} Mg \sin \alpha.$$

Следует отметить, что если коэффициент трения покоя  $k$  достаточно мал или угол  $\alpha$  достаточно велик, так что  $F_{\text{тр.п}} > kN$  (при этом  $\text{tg} \alpha > \frac{7}{2}k$ ), то шар будет не только скатываться с плоскости, но одновременно скользить по ней.

*Ответ:*  $v = \sqrt{\frac{10gH}{7}}, F_{\text{тр.п}} = \frac{2}{7} Mg \sin \alpha.$

1.5.14. Система, состоящая из цилиндрического катка радиусом  $R$  и гири, связанных нитью, перекинутой через блок, под действием силы тяжести гири приходит в движение из состояния покоя. Определить ускорение  $\vec{a}$  центра инерции катка и силу натяжения нити  $\vec{T}$ . Какую скорость  $\vec{v}$  приобретет гиря, если она спустится с высоты  $h$ ? Масса цилиндра  $M$ , масса гири  $m$ , массой блока пренебречь. Считать, что цилиндр катится по горизонтальной поверхности без скольжения. Трением качения пренебречь.

*Решение.* Катящийся цилиндр участвует в двух движениях: вращается вокруг оси и движется поступательно со скоростью оси. На каток действуют четыре силы (рис. 1.63): сила натяжения нити  $\vec{T}$ , сила тяжести  $M\vec{g}$ , сила реакции опоры  $\vec{N}$  и сила трения покоя  $\vec{F}_{\text{тр.п}}$ . Сила трения покоя обусловлена тем, что каток не скользит, а катится по плоскости, в то время как первые три силы, проходящие через ось, не могли бы вызвать вращения тела. Действие силы  $\vec{F}_{\text{тр.п}}$  не связано с трением качения. Она появляется как сила

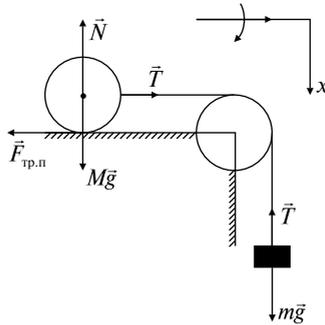


Рис. 1.63

реакции опоры, противодействующая возникновению скольжения катка по плоскости. При исчезновении силы натяжения нити  $\vec{T}$  исчезает и сила  $\vec{F}_{\text{тр.п}}$ . Выберем положительные направления осей  $x$  и угла поворота. Для поступательного движения на основании закона (1.5.8) получим

$$T - F_{\text{тр.п}} = Ma. \quad (1)$$

Так как вращающий момент относительно оси цилиндра создаст лишь сила трения, то согласно (1.5.9) имеем

$$F_{\text{тр.п}} R = I\beta. \quad (2)$$

Поскольку каток катится без проскальзывания,  $\beta = a/R$ . Известно, что момент инерции однородного цилиндра  $I = MR^2/2$ .

Применим второй закон Ньютона для гири, ускорение которой, очевидно, равно ускорению центра инерции катка:

$$mg - T = ma. \quad (3)$$

Решая систему (1)–(3), найдем неизвестные величины  $a$  и  $T$ :

$$a = \frac{2mg}{3M + 2m}, \quad T = \frac{3Mmg}{3M + 2m}.$$

Зная ускорение гири, вычислим искомую скорость  $v$  по формуле скорости равноускоренного движения:

$$v = \sqrt{2ah} = 2\sqrt{\frac{mgh}{3M + 2m}}.$$

$$\text{Ответ: } a = \frac{2mg}{3M + 2m}, \quad T = \frac{3Mmg}{3M + 2m}, \quad v = 2\sqrt{\frac{mgh}{3M + 2m}}.$$

1.5.15. Через какое время  $t$  остановится раскрученный до угловой скорости  $\omega$  диск радиусом  $R$ , если коэффициент трения между диском и плоскостью равен  $k$ ? Диск не участвует в поступательном движении.

*Решение.* Для решения задачи воспользуемся основным уравнением динамики вращательного движения твердого тела (1.5.9). Разобьем диск на кольца, выберем кольцо толщиной  $dr$  на расстоянии  $r$  от центра диска. Получаем массу кольца  $dm = 2\pi r dr h \rho$ . Определим силу трения, действующую на это кольцо:

$$dF_{\text{тр}} = kg dm = kg \cdot 2\pi r dr h \rho.$$

Подсчитаем момент силы трения, действующий на кольцо  $dr$ :  $dM = dF_{\text{тр}} r$ . Определим момент силы трения, действующей на весь диск:

$$M = \int_0^R kg \cdot 2\pi h \rho r^2 dr = kg \cdot 2\pi h \rho \frac{R^3}{3}.$$

Напишем уравнение движения диска и определим угловое ускорение  $\beta$ :

$$I\beta = M, \quad \beta = \frac{M}{I}, \quad I = \frac{MR^2}{2}, \quad \beta = \frac{4kg}{3R}.$$

Найдем, наконец, время, через которое диск остановится:

$$\omega = \omega_0 - \beta t, \quad t = \frac{\omega_0}{\beta} = \frac{3\omega_0 R}{4kg}.$$

$$\text{Ответ: } t = \frac{3\omega_0 R}{4kg}.$$

### Задачи без решений

1.5.16. Найти положение центра масс однородной пластины, изображенной на рис. 1.64.

1.5.17. Найти момент инерции  $I$  и момент импульса  $L$  земного шара относительно оси вращения.

1.5.18. Найти момент инерции  $I$  сплошного цилиндра радиусом  $R$  и массой  $M$  относительно оси, тангенциальной к его краю и параллельной его оси симметрии.

1.5.19. Диск с вырезом имеет массу  $M$  (рис. 1.65). Определить момент инерции  $I$  относительно оси, проходящей через точку  $A$  перпендикулярно плоскости диска.

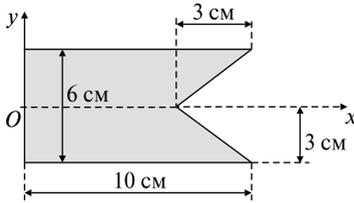


Рис. 1.64

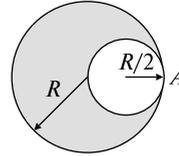


Рис. 1.65

1.5.20. Тело массой  $m$  брошено с начальной скоростью  $v_0$  под углом  $\alpha$  к горизонту. Найти вектор момента импульса  $L$  в верхней точке траектории. Тело считать материальной точкой. Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.5.21. Однородный цилиндр массой  $M$  и радиусом  $R$  без скольжения скатывается по наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha$  с горизонтом. Определить ускорение движения  $a$ .

1.5.22. На горизонтальной плоскости лежит катушка ниток, момент инерции которой относительно оси, проходящей через центр инерции, равен  $I_0$ , масса  $m$ . С каким ускорением  $a$  будет двигаться ось катушки, если тянуть за нитку с силой  $F$  (рис. 1.66). Катушка движется по поверхности стола без проскальзывания. Найти силу трения  $F_{\text{тр}}$  между катушкой и столом.

1.5.23. По горизонтальному столу может катиться без скольжения сплошной цилиндр массой  $m$ , на который намотана нить. К свободному концу нити, переброшенному через легкий блок, подвешен груз той же массы  $m$  (рис. 1.67). Система предоставлена самой себе. Найти ускорение груза  $a$  и силу трения  $F_{\text{тр}}$  между цилиндром и столом.

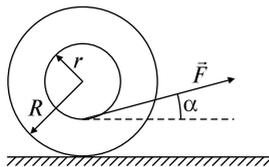


Рис. 1.66

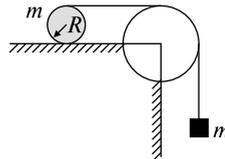


Рис. 1.67

1.5.24. Маховик, массу которого  $m = 5$  кг можно считать распределенной по тонкому ободу радиусом  $r = 20$  см, свободно вращается вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр, с частотой  $n = 720$  мин<sup>-1</sup>. При торможении маховик останавливается через промежуток времени  $\Delta t = 20$  с. Найти тормозящий момент  $M$  и число оборотов  $N$ , которое сделает маховик до полной остановки.

## ТЕМА 1.6 ПРИМЕНЕНИЕ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Кинетическая энергия вращающегося тела определяется формулой

$$E_k = \frac{I_C \omega^2}{2}, \quad (1.6.1)$$

где  $I_C$  — момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс,  $\omega$  — угловая скорость. Момент инерции вращательного движения является мерой инертности тела. Формула (1.6.1) справедлива для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. В случае плоского движения, например цилиндра, скатывающегося по наклонной плоскости без скольжения, энергия движения складывается из энергии поступательного движения и энергии вращения:

$$E_k = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_C \omega^2}{2}, \quad (1.6.2)$$

где  $m$  — масса катящегося тела;  $v_C$  — скорость центра масс тела,  $I_C$  — момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс,  $\omega$  — угловая скорость тела.

Законы изменения и сохранения энергии (1.3.8) и (1.3.10) широко применяются в решении задач на вращательное движение твердого тела. При энергетическом подходе следует помнить, что работа  $A$  постоянного момента  $M$  силы, действующей на тело,

$$A = M\varphi, \quad (1.6.3)$$

где  $\varphi$  — угол поворота тела.

Закон сохранения момента импульса гласит: если результирующий момент внешних сил, приложенных к системе, равен нулю ( $\vec{M} = 0$ ), то момент импульса системы есть величина постоянная:

$$\vec{L} = \text{const}. \quad (1.6.4)$$

Закон сохранения момента импульса во вращательном движении, так же как и закон сохранения импульса в поступательном движении (1.3.9), позволяет исключать из рассмотрения любые

силы, действующие внутри системы, в том числе силы трения. Поэтому закон применяют в тех задачах на вращательное движение твердого тела, где характер изменения со временем сил взаимодействия между частями системы сложен или вообще неизвестен.

### Качественные задачи

1.6.1. Как формулируется закон сохранения момента импульса? Возможно ли применение этого закона сохранения при наличии внешних сил, действующих на систему?

1.6.2. Как определяется кинетическая энергия при плоском движении твердого тела?

1.6.3. Как определяются: 1) работа силы при поступательном движении тела; 2) работа момента силы при вращении тела?

1.6.4. Обладает ли каким-либо преимуществом использование закона сохранения механической энергии при решении задач динамики по сравнению с применением уравнений движения?

1.6.5. Объясните, почему прецессионное движение гироскопа неинерционно, т.е. прецессия прекращается мгновенно, как только прекращается действовать момент внешних сил, вызывающих прецессию?

### Задачи с решениями

1.6.6. Однородный шар радиусом  $r$  начинает скатываться без скольжения с вершины полусферы радиусом  $R$ . Найти угловую скорость  $\omega$  шара в момент отрыва от поверхности сферы.

*Решение.* Решим задачу, используя уравнения движения центра масс шара (1.5.8), закон сохранения механической энергии (1.3.1) и определение кинетической энергии плоского движения (1.6.2). На шар действуют сила тяжести  $m\vec{g}$ , сила реакции опоры  $\vec{N}$  и сила трения покоя  $\vec{F}_{\text{тр.п}}$  (рис. 1.68). Выберем направление координатных осей и напишем проекции всех сил на ось  $x$  в момент отрыва ( $N = 0$ ):

$$mg \cos \alpha = \frac{mv^2}{R + r}. \quad (1)$$

Применим закон сохранения энергии:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}, \quad (2)$$

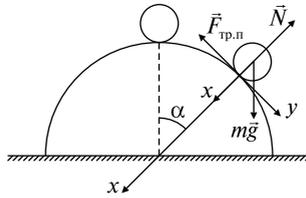


Рис. 1.68

где  $I = \frac{2}{5}mr^2$  — момент инерции шара относительно оси, проходящей через его центр. Вспомним связь между линейной и угловой скоростью  $v = \omega r$ . Из геометрических соображений определим

$$h = (R + r) - (R + r) \cos \alpha = (R + r)(1 - \cos \alpha). \quad (3)$$

Решая уравнения (1)–(3), получаем

$$\omega = \sqrt{\frac{10(R + r)g}{17r^2}}.$$

$$\text{Ответ: } \omega = \sqrt{\frac{10(R + r)g}{17r^2}}.$$

1.6.7. С одного уровня наклонной плоскости одновременно начинают скатываться без проскальзывания сплошные цилиндр и шар одинаковых радиусов. Какое из тел будет иметь большую скорость на одинаковом уровне? Во сколько раз будут отличаться скорости? Трение качения отсутствует.

*Решение.* Воспользуемся законом сохранения механической энергии (1.3.10) и формулой (1.6.2). Полная механическая энергия в начале движения определяется потенциальной энергией

$$E_0 = mgh, \text{ в конце — кинетической } E_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}.$$

Приравняв их друг к другу, получаем

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}. \quad (1)$$

Следует отметить, что в течение этого движения действует сила трения покоя (см. задачу 1.5.13), однако эта сила работы не производит. Вспомним, как определяется момент инерции шара

$$I_{\text{ш}} = \frac{2}{5}mR^2 \quad (2)$$

и цилиндра

$$I_{\text{ц}} = \frac{1}{2} mR^2, \quad (3)$$

а также связь линейной и угловой скорости  $v = \omega R$ .

Решая уравнение (1), получаем

$$v = \sqrt{\frac{2mgh}{m + I/R^2}}. \quad (4)$$

Подставляя (2) и (3) в (4), имеем скорость шара  $v_{\text{ш}} = \sqrt{\frac{10gh}{7}}$ ,  
 скорость цилиндра  $v_{\text{ц}} = \sqrt{\frac{4gh}{3}}$ .

Следовательно,  $v_{\text{ш}}/v_{\text{ц}} = 1,58$ .

$$\text{Ответ: } v_{\text{ш}} = \sqrt{\frac{10gh}{7}}, v_{\text{ц}} = \sqrt{\frac{4gh}{3}}, v_{\text{ш}}/v_{\text{ц}} = 1,58.$$

1.6.8. Круглая платформа радиусом  $R$ , момент инерции которой  $I_0$ , вращается по инерции вокруг вертикальной оси, делая  $n_1$  оборотов в секунду. На краю платформы стоит человек массой  $m$ . Сколько оборотов в секунду  $n_2$  будет совершать платформа, если человек перейдет в ее центр? Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки. Вычислить работу  $A$ , совершенную человеком при перемещении с края платформы на середину.

*Решение.* Согласно условию задачи, платформа с человеком вращается по инерции, следовательно, для системы платформа — человек выполняется закон сохранения импульса (1.6.4). Момент импульса системы в начальный момент  $L_1 = I_1 \omega_1 = (I_0 + mR^2) \times 2\pi n_1$ , а в конечный —  $L_2 = I_2 \omega_2 = I_0 \cdot 2\pi n_2$ .

$$\text{Так как } L_1 = L_2, \text{ получаем } n_2 = \frac{n_1(I_0 + mR^2)}{I_0}.$$

Используя закон изменения механической энергии (1.3.9), имеем

$$A = \frac{I_2 \omega_2^2}{2} - \frac{I_1 \omega_1^2}{2} = \frac{(2\pi n_2)^2 (I_0 + mR^2) mR^2}{2I_0}.$$

$$\text{Ответ: } n_2 = \frac{n_1(I_0 + mR^2)}{I_0},$$

$$A = \frac{(2\pi n_1)^2 (I_0 + mR^2) mR^2}{2I_0}.$$

1.6.9. Шар массой  $M = 1$  кг, лежащий на горизонтальной плоскости, пробивается по диаметру пулей, летящей горизонтально с начальной скоростью  $v_0 = 500$  м/с. После удара шар начинает скользить по плоскости. Спустя некоторое время его движение переходит в чистое качение с постоянной скоростью  $v_{\text{ш}} = 3$  м/с. Определить скорость пули после вылета ее из шара, если масса пули  $m = 10$  г. Трением качения пренебречь.

*Решение.* Пусть время, через которое установилось чистое качение, равно  $\Delta t$ . В течение этого времени на шар действовала сила трения скольжения  $F_{\text{тр.ск}}$  (будем считать, что она не зависит от времени). Применим для решения задачи закон изменения импульса и основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела (1.5.9):

$$mv_0 - Mv_{\text{ш}} - mv_{\text{п}} = F_{\text{тр.ск}}\Delta t,$$

$$I\beta = -F_{\text{тр.ск}}R.$$

Здесь  $v_0$  — скорость пули до удара,  $v_{\text{ш}}$  — скорость шара после удара,  $v_{\text{п}}$  — скорость пули после вылета из шара,  $I$  — момент инерции шара,  $\beta$  — угловое ускорение. Чистое качение наступило, когда стало выполняться условие  $v_{\text{ш}} = \omega'R$ . Напишем кинематическую связь между угловой скоростью шара и угловым ускорением:  $\omega' = \omega_0 + \beta\Delta t$ , где  $\omega'$  — конечная угловая скорость шара,  $\omega_0 = 0$  — начальная угловая скорость шара.

Решаем полученные уравнения и получаем

$$v_{\text{п}} = v_0 - \frac{7}{5} \frac{M}{m} v_{\text{ш}} = 80 \text{ м/с}.$$

$$\text{Ответ: } v_{\text{п}} = v_0 - \frac{7}{5} \frac{M}{m} v_{\text{ш}} = 80 \text{ м/с}.$$

1.6.10. Однородный стержень массой  $M$ , и длиной  $a$  может свободно вращаться в горизонтальной плоскости относительно вертикальной оси, проходящей через его конец. Во второй конец нормально к стержню ударяется шар массой  $m$ , летящий горизонтально со скоростью  $v$ . Удар считать упругим, силы трения между поверхностью плоскости и телами пренебрежимо малы. Найти скорость шара  $u$  и угловую скорость стержня  $\omega$ .

*Решение.* Воспользуемся законами сохранения механической энергии (1.3.10) и момента импульса (1.6.4). Энергия системы шар—стержень до удара определялась кинетической энергией пули

$E_0 = mv^2/2$ , после взаимодействия — кинетической энергией поступательного движения шара  $E_{\text{ш}} = mu^2/2$  и вращательной энергией стержня  $E_{\text{ст}} = I\omega^2/2$ . Таким образом, закон сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mu^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}. \quad (1)$$

Момент импульса данной системы может быть найден из следующего соотношения:

$$\text{(до взаимодействия)} \quad mva = I\omega + mua \quad \text{(после взаимодействия)} \quad (2)$$

Момент инерции стержня относительно оси вращения  $I = Ma^2/3$ .

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{mv^2}{2} = \frac{mu^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}, \\ mva = I\omega + mua, \\ I = \frac{Ma^2}{3}, \end{cases}$$

откуда

$$m(v^2 - u^2) = I\omega^2, \quad (3)$$

$$ma(v - u) = I\omega. \quad (4)$$

Делим уравнение (3) на (4) и получаем  $v + u = \omega a$ , откуда  $u = \omega a - v$ . Подставляем последнее выражение в (2):

$$2mva = \omega(I + ma^2).$$

Следовательно,

$$\omega = \frac{2mva}{I + ma^2} = \frac{6mv}{(M + 3m)a},$$

$$u = \omega a - v = \frac{v(3m - M)}{3m + M}.$$

$$\text{Ответ: } \omega = \frac{6mv}{(M + 3m)a}, \quad u = \frac{v(3m - M)}{3m + M}.$$

1.6.11. Сплошному однородному шару массой  $m$  и радиусом  $R$ , лежащему на горизонтальной плоскости, в момент времени  $t = 0$  сообщена скорость  $\vec{v}_0$  без вращения. Учитывая трение скольжения, но пренебрегая трением качения, найти угловую скорость шара  $\omega$ , когда его движение перейдет в чистое качение. Определить потерю кинетической энергии  $\Delta E$  на трение.

*Решение.* Покажем, что во время качения поступательная  $v$  и вращательная  $\omega$  скорости шара связаны соотношением

$$mRv + I\omega = \text{const},$$

где  $I$  — момент инерции относительно геометрической оси тела. Другими словами, докажем, что в данном случае можно воспользоваться законом сохранения момента импульса (1.6.4).

Движение шара описывается уравнением движения центра масс

$$m \frac{dv}{dt} = \pm F_{\text{тр}} \quad (1)$$

и уравнением моментов

$$I \frac{d\omega}{dt} = \mp RF_{\text{тр}}. \quad (2)$$

Причем верхний знак относится к случаю, когда сила трения направлена вперед (поступательное движение ускоряется, вращение замедляется), нижний — когда  $F_{\text{тр}}$  направлена назад (поступательное движение замедляется, вращение ускоряется).

Решаем уравнения (1) и (2):

$$m dv = \pm F_{\text{тр}} dt,$$

$$I d\omega = \mp RF_{\text{тр}} dt.$$

Делаем простые преобразования:

$$m dv = -\frac{I d\omega}{R},$$

$$mR dv = -I d\omega.$$

Откуда получаем

$$mRv + I\omega = \text{const}, \quad (3)$$

что и требовалось доказать.

Применим выражение (3) для решения нашей задачи:

$$mRv_0 = mRv + I\omega = (mR^2 + I)\omega, \quad (4)$$

где  $v$  — поступательная, а  $\omega$  — вращательная скорости шара после установления чистого качения,  $I = \frac{2}{5}mR^2$  — момент инерции шара относительно центра масс. Решаем уравнение (4) относительно  $\omega$ :

$$\omega = \frac{mRv_0}{I + mR^2} = \frac{5v_0}{7R}.$$

Для определения работы против сил трения воспользуемся законом изменения механической энергии (1.3.8):

$$A = \Delta E = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{(mR^2 + I)\omega^2}{2} = \frac{mv_0^2}{7}.$$

*Ответ:*  $\omega = \frac{5v_0}{7R}$ ,  $A = \frac{mv_0^2}{7}$ .

1.6.12. Шарик массой  $m$  прикреплен к концу веревки и вращается по окружности радиусом  $R_1$  с постоянной угловой скоростью  $\omega_1$ . Во время движения шарика веревка укорачивается до  $R_2 < R_1$ . Как изменится скорость движения шарика?

*Решение.* Для решения задачи воспользуемся законом сохранения момента импульса (1.6.4). Следует отметить, что укорачивание веревки не означает действия какого-либо момента сил, так как приложенная к шарiku сила направлена вдоль линии, соединяющей шарик с центром вращения. Момент импульса в начальный момент  $L_1 = I_1\omega_1$ , а в конечный —  $L_2 = I_2\omega_2$ . Согласно (1.6.4) получаем

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2, \tag{1}$$

где  $I_{1,2} = mR_{1,2}^2$  — момент инерции шарика относительно оси вращения.

Решаем уравнение (1):  $\omega_2 = \omega_1 R_1^2/R_2^2$ . Таким образом, скорость шарика увеличилась.

*Ответ:*  $\omega_2 = \omega_1 R_1^2/R_2^2$ , скорость шарика увеличилась.

1.6.13. Найти угловую скорость прецессии  $\omega'$  наклонного волчка массой  $m$ , вращающегося с угловой скоростью  $\omega$  вокруг своей оси симметрии, относительно которой момент инерции волчка равен  $I$ . Центр инерции волчка находится на расстоянии  $l$  от точки опоры.

*Решение.* В этой задаче на примере волчка рассматривается поведение гироскопа. Гироскопом называется массивное симмет-

ричное тело, вращающееся с большой угловой скоростью вокруг своей оси симметрии (рис. 1.69). Опыт показывает, что если ось вращающегося волчка наклонена к вертикали, то волчок не падает, а совершает так называемое прецессионное движение (прецессию): его ось описывает конус вокруг вертикали с некоторой угловой скоростью  $\omega'$ . Такое поведение волчка-гироскопа можно объяснить с помощью уравнения моментов

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{M}_i = \vec{M}, \quad (1)$$

где  $\vec{L}$  — момент импульсов,  $\vec{M}$  — момент внешних сил, действующих на гироскоп.

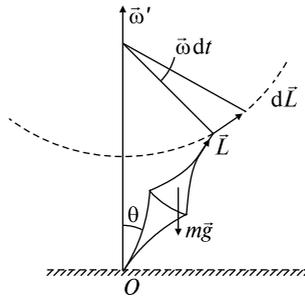


Рис. 1.69

Действительно, момент импульса  $\vec{L}$  прецессирующего волчка относительно точки опоры  $O$  (см. рис. 1.69) можно представить в виде суммы моментов импульса  $\vec{L}_\omega$ , связанного с вращением волчка вокруг своей оси, и момента  $\vec{L}'$ , обусловленного прецессией волчка вокруг вертикальной оси:

$$\vec{L} = \vec{L}_\omega + \vec{L}'. \quad (2)$$

Пусть момент инерции волчка  $I$ , тогда  $\vec{L}_\omega = I\vec{\omega}$ . Кроме того, ясно, что чем меньше угловая скорость прецессии  $\omega'$ , тем меньше и соответствующий момент импульса  $\vec{L}'$ . При  $\omega \gg \omega'$   $\vec{L}_\omega \gg \vec{L}'$ , поэтому результирующий момент импульса  $\vec{L}$  практически равен  $\vec{L}_\omega$  как по величине, так и по направлению. Следовательно, можно считать, что

$$\vec{L} = I\vec{\omega}. \quad (3)$$

Зная поведение вектора  $\vec{L}$ , мы найдем и характер движения оси волчка-гироскопа. Согласно уравнению моментов (1) относительно точки  $O$  имеем:

$$d\vec{L} = \vec{M} dt, \quad (4)$$

где  $\vec{M}$  — момент внешних сил относительно точки  $O$  (в данном случае это момент силы тяжести).

Из рисунка видно, что приращение импульса  $d\vec{L}$  за время  $dt$  перпендикулярно моменту импульса  $\vec{L}$ , т.е.  $d\vec{L} \perp \vec{L}$ , и совпадает по направлению с моментом сил. В результате вектор  $\vec{L}$  (следовательно, и ось волчка) будет поворачиваться с вектором  $\vec{M}$  вокруг вертикали, описывая круговой конус с углом полураствора  $\theta$ . Волчок-гироскоп будет прецессировать вокруг вертикальной оси с некоторой угловой скоростью  $\omega'$ .

Теперь приступим к решению основной задачи и определим угловую скорость прецессии  $\omega'$ . Найдем связь между  $\vec{M}$ ,  $\vec{L}$  и  $\omega'$ . Согласно рисунку

$$|d\vec{L}| = L \sin \theta \omega' dt, \quad (5)$$

или в векторном виде

$$d\vec{L} = [\vec{\omega}', \vec{L}] dt. \quad (6)$$

Теперь подставим (6) в (4):

$$[\vec{\omega}, \vec{L}] = \vec{M}. \quad (7)$$

Из этого уравнения видно, что момент  $\vec{M}$  изменяет угловую скорость прецессии  $\omega'$ , а не ускорение. Поэтому мгновенное ускорение момента  $\vec{M}$  приводит к мгновенному исчезновению и прецессии. Заметим, что момент сил, действующих на гироскоп, может иметь любую природу.

Для обеспечения регулярности прецессии (постоянной угловой скорости  $\omega'$ ) важно, чтобы вектор  $\vec{M}$  не менялся по модулю, поворачивался вместе с осью гироскопа.

Распишем уравнение гироскопа (7) для нашего случая:

$$\omega' I \omega \sin \theta = mgl \sin \theta,$$

Определим угловую скорость прецессии

$$\omega' = mgl / I\omega.$$

Интересно, что величина  $\omega'$  не зависит от угла наклона  $\theta$  оси волчка. Кроме того,  $\omega'$  обратно пропорциональна  $\omega$ , т.е. чем боль-

ше угловая скорость волчка  $\omega$ , тем меньше угловая скорость его прецессии  $\omega'$ .

Ответ:  $\omega' = mgl/I\omega$ .

### Задачи без решения

1.6.14. Одинаковую ли скорость будет иметь центр шара у основания наклонной плоскости, если один раз он соскальзывает (без трения), а другой — скатывается с нее?

1.6.15. Обруч и диск одинаковой массы катятся без скольжения с одинаковой линейной скоростью. Кинетическая энергия обруча  $E_1$ . Найти кинетическую энергию диска  $E_2$ .

1.6.16. Шарик радиусом  $r$  скатывается без начальной скорости и без скольжения по поверхности сферы из самого верхнего положения. Определить точку, определяемую углом  $\alpha$ , в которой он оторвется от сферы и начнет свободно двигаться под действием силы тяжести (рис. 1.70).

1.6.17. Диск  $A$  вращается вокруг гладкой вертикальной оси с угловой скоростью  $\omega_A$  (рис. 1.71). На него падает диск  $B$ , вращающийся с угловой скоростью  $\omega_B$ . Вследствие трения между ними оба диска через некоторое время начинают вращаться как единое целое. Найти изменение кинетической энергии  $\Delta E_k$ , если моменты инерции дисков относительно оси вращения равны  $I_A$  и  $I_B$  соответственно.

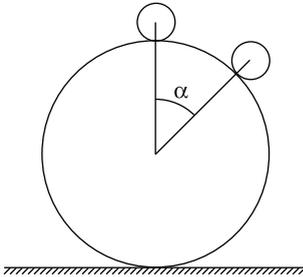


Рис. 1.70

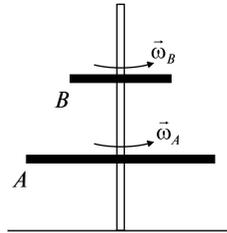


Рис. 1.71

1.6.18. Сплошной однородный шар массой  $m$  и радиусом  $R$ , вращающийся с угловой скоростью  $\omega_0$ , ставится на горизонтальную плоскость без сообщения ему поступательного движения.

Учитывая трение скольжения, но пренебрегая трением качения, найти линейную скорость  $v$  центра шара, когда его движение перейдет в чистое качение. Определить потерю кинетической энергии  $\Delta E_k$  на трение.

1.6.19. Однородный стержень массой  $M$  и длиной  $l$  подвешен на шарнире без трения. Небольшой кусок замазки массой  $m$  прилипает к стержню на уровне его середины. До прилипания скорость куска замазки равнялась  $v$  и была направлена горизонтально. Найти максимальный угол  $\alpha$  отклонения стержня от вертикали.

1.6.20. Тонкий однородный стержень длиной  $l$  может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через конец стержня, перпендикулярно ему. Стержень отклонили на  $90^\circ$  от положения равновесия и отпустили. Определить скорость  $v$  нижнего конца в момент прохождения положения равновесия.

## ТЕМА 1.7 КОЛЕБАНИЯ

Колебаниями называются движения и процессы, обладающие той или иной степенью повторяемости во времени. К гармоническим колебаниям относят колебательные движения, при которых координата тела меняется во времени по закону

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0), \text{ или } x = A \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где величина  $(\omega t + \varphi_0)$ , выраженная в радианах, носит название фазы колебания,  $\varphi_0$  — начальная фаза,  $\omega$  — круговая (или циклическая) частота, связанная с периодом  $T$  (время между двумя последовательными прохождениями тела через одно и то же положение в одном и том же направлении) соотношением  $\omega = 2\pi/T$ ,  $A$  — амплитуда колебания (наибольшее отклонение колеблющегося тела от среднего положения равновесия).

Если колебательная система выведена из положения равновесия и затем предоставлена самой себе, то она совершает колебания, которые называются свободными колебаниями. При наличии сил трения свободные колебания будут затухающими; их амплитуда непрерывно уменьшается вследствие потерь энергии. Если свободные механические колебания происходят без потерь энергии, то они называются собственными колебаниями, а их частота — частотой собственных колебаний. Если система совершает колебания под внешним воздействием, изменяющимся периодически, то такие колебания называются вынужденными.

Периодическая сила, вызывающая механические колебания, называется вынуждающей силой. Частота вынужденных механических колебаний совпадает с частотой вынуждающей силы. У каждой колебательной системы имеется особая частота, называемая резонансной. При совпадении частоты вынуждающей силы с резонансной частотой амплитуда вынужденных колебаний достигает максимального значения. Это явление называется резонансом.

### Качественные задачи

1.7.1. Как между собой связаны амплитуды скорости и отклонения в гармоническом колебании?

1.7.2. По какой траектории будет двигаться шарик математического маятника, если нить маятника пережечь в тот момент, когда шарик проходит положение равновесия?

1.7.3. Как следует передвинуть чечевицу маятника при отставании часов?

1.7.4. Чему равна средняя кинетическая и средняя потенциальная энергии гармонически колеблющегося точечного тела?

1.7.5. Как будет зависеть период колебаний математического маятника от географической широты места? Каким он будет в состоянии невесомости?

1.7.6. Чему равен период колебаний потенциальной энергии груза, подвешенного на пружине, если известна частота колебаний груза?

1.7.7. Как изменится период вертикальных колебаний груза, висящего на двух одинаковых пружинах, если от последовательного соединения пружин перейти к параллельному их соединению?

1.7.8. Каково условие превращения затухающих колебаний в апериодические?

1.7.9. Если частица совершает гармонические колебания с амплитудой  $A$ , то какой путь она проходит за один период?

### Задачи с решениями

1.7.10. Материальная точка совершает гармонические колебания вдоль оси  $x$ . По прошествии времени  $t_1 = 0,1$  с от начала движения смещение точки от положения равновесия  $x_1 = 5$  см, скорость  $v_{1x} = 62$  см/с, ускорение  $a_{1x} = -540$  см/с<sup>2</sup>. Определить: 1) амплитуду  $A$ , круговую частоту  $\omega$  и начальную фазу колебаний  $\alpha_0$ ; 2) смещение  $x$ , скорость  $v_x$  и ускорение  $a_x$  в начальный момент времени  $t = 0$ .

*Решение.* Напишем закон движения материальной точки

$$x = A \sin(\omega t + \alpha_0). \quad (1)$$

Законы изменения скорости  $v_x$  и ускорения  $a_x$  со временем могут быть найдены дифференцированием по времени смещения:

$$\begin{cases} x_1 = A \sin(0,1\omega + \alpha_0), \\ v_{1x} = A\omega \cos(0,1\omega + \alpha_0), \\ a_{1x} = -A\omega^2 \sin(0,1\omega + \alpha_0), \end{cases}$$

откуда

$$\frac{x_1}{A} = \sin(0,1\omega + \alpha_0), \quad a_{1x} = -A\omega^2 \frac{x_1}{A} = -\omega^2 x_1.$$

Таким образом, круговая частота  $\omega = \sqrt{\frac{a_{1x}}{x_1}} = 10,4 \text{ с}^{-1}$ .

Далее

$$\begin{cases} x_1^2 = A^2 \sin^2(0,1\omega + \alpha_0), \\ v_{1x}^2 = (A\omega)^2 \cos^2(0,1\omega + \alpha_0). \end{cases}$$

Складывая эти уравнения, получаем  $x_1^2 + \frac{v_{1x}^2}{\omega^2} = A^2$ .

Отсюда

$$A = \sqrt{x_1^2 + \frac{v_{1x}^2}{\omega^2}} = 7,8 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Период колебаний  $T = 2\pi/\omega = 0,6 \text{ с}$ .

Для того чтобы определить фазовые соотношения, осуществим преобразования. Для начальной фазы  $\alpha_0$  получим

$$\begin{aligned} x_1 &= A \sin(\omega t_1 + \alpha_0) = A \sin((2\pi t_1/T) + \alpha_0) = A \sin(2\pi/6 + \alpha_0), \\ \frac{2\pi}{6} + \alpha_0 &= \arcsin \frac{x_1}{A} = \arcsin 0,64, \quad \text{откуда } \alpha_0 = -\frac{\pi}{9}. \end{aligned}$$

Используя (1), находим теперь смещение  $x(t=0) = -2,7 \text{ см}$ , скорость  $v_x(t=0) = 76 \text{ см/с}$  и ускорение  $a_x(t=0) = 289 \text{ см/с}^2$ .

*Ответ:*  $A = 7,8 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ,  $\omega = 10,4 \text{ с}^{-1}$ ,  $\alpha_0 = -\frac{\pi}{9}$ ,  $x = -2,7 \text{ см}$ ,  $v_x = 76 \text{ см/с}$ ,  $a_x = 289 \text{ см/с}^2$ .

1.7.11. Шарик массой  $m = 20 \text{ г}$  колеблется с периодом  $T = 2 \text{ с}$ . В начальный момент времени шарик обладал энергией  $E = 0,01 \text{ Дж}$  и находился от положения равновесия на расстоянии  $x_1 = 0,25 \text{ м}$ . Написать уравнение гармонического колебания шарика.

*Решение.* Полная энергия колеблющейся точки, независимо от ее положения, определяется выражением

$$E = m\omega^2 A^2/2, \quad (1)$$

где  $A$  — амплитуда колебания,  $\omega = 2\pi/T$  — круговая частота. Уравнение колебаний имеет вид  $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ , в момент  $t = 0$   $x_1 = A \cos \varphi_0$ ,  $\cos \varphi_0 = A/x_1 = 0,78$ ;  $\varphi_0 \approx 51^\circ \approx 0,3\pi$ .

Определив начальную фазу, найдем из (1) амплитуду колебаний:

$$A^2 = \frac{2E}{m\omega^2} = \frac{4ET^2}{m \cdot 4\pi^2},$$

$$A = \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{2E}{m}} = 0,32 \text{ м.}$$

Таким образом, получаем уравнение колебаний точки

$$x = 0,32 \cos \pi(t + 0,3).$$

*Ответ:*  $x = 0,32 \cos \pi(t + 0,3)$  м.

1.7.12. На горизонтальной плоскости лежит цилиндр массой  $m$  и радиусом  $r$ . Момент инерции относительно продольной геометрической оси равен  $I$ . К оси цилиндра прикреплены две одинаковые горизонтально расположенные пружины, другие концы которых закреплены в стене (рис. 1.72, вид сверху). Коэффициент упругости каждой пружины равен  $k$ . Найти период  $T$  малых колебаний цилиндра, которые возникнут, если вывести его из положения равновесия и дать возможность кататься без скольжения по горизонтальной плоскости.

*Решение.* Потенциальная энергия упругой деформации пружи-

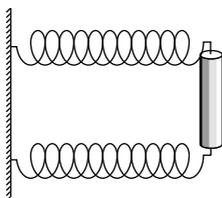


Рис. 1.72

ны определяется выражением  $E_{\text{п}} = \frac{k_0 x^2}{2}$ , где  $k_0$  — общая жесткость системы.

Кинетическая энергия цилиндра связана с поступательным движением центра масс и вращательным движением относительно продольной геометрической оси:  $E_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$ . Закон сохранения энергии для данного колебательного движения дает

$$\frac{k_0 A^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{v^2(m + I/r^2)}{2}.$$

Используя тот факт, что амплитудное значение скорости  $v = \omega A$ , получаем  $\frac{k_0 A^2}{2} = \frac{\omega^2 A^2 (m + I/r^2)}{2}$ , откуда  $\omega = \sqrt{\frac{k_0}{m + I/r^2}}$ .

Пружины соединены параллельно, поэтому общая жесткость системы  $k_0 = 2k$ .

Таким образом, период колебаний будет равен

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{\frac{m + I/r^2}{2k}}.$$

Можно рассмотреть частный случай, считая цилиндр сплошным. Тогда момент инерции  $I = mr^2/2$  и период  $T = \pi\sqrt{\frac{3m}{k}}$ .

Ответ:  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m + I/r^2}{2k}}.$

1.7.13. Тело вращения радиусом  $a$  с моментом инерции  $I$  (относительно геометрической оси) и массой  $m$  катается без скольжения по внутренней поверхности цилиндра радиусом  $R$ , совершая малые колебания около положения равновесия (рис. 1.73). Найти период  $T$  этих малых колебаний.

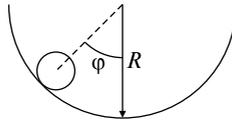


Рис. 1.73

*Решение.* Рассмотрим движение тела как вращение вокруг мгновенной оси с угловой скоростью  $\omega$ . Линейная скорость центра масс определяется выражением  $v = \omega a$ . Эту же скорость можно представить в виде  $v = (R - a)\dot{\varphi}$ . Тем самым,  $\omega = \left(\frac{R - a}{a}\right)\dot{\varphi}$ . Кинетическая энергия нашего тела определяется выражением

$$E_k = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{m(R - a)^2\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{(m + I/a^2)(R - a)^2\dot{\varphi}^2}{2}.$$

Потенциальная энергия

$$E_n = mg(R - a)(1 - \cos\varphi) \approx \frac{mg(R - a)\varphi^2}{2}.$$

Применим закон сохранения энергии:

$$\frac{mg(R - a)\varphi^2}{2} + \frac{(m + I/a^2)(R - a)^2\dot{\varphi}^2}{2} = \text{const.}$$

Решением последнего уравнения является функция  $\varphi = A \cos(\omega t + \alpha)$  при условии, что  $\omega = \sqrt{\frac{mg(R-a)}{(m + I/a^2)(R-a)^2}}$ .

Это следует из следующих рассуждений. Рассмотрим тело, колеблющееся на пружине. Закон сохранения энергии запишется в виде

$$\frac{kx^2}{2} + \frac{m\dot{x}^2}{2} = \text{const.}$$

Продифференцируем это уравнение:

$$\frac{1}{2}k \cdot 2x \cdot \dot{x} + \frac{1}{2}m \cdot 2\dot{x} \cdot \ddot{x} = 0,$$

получаем  $kx + m\ddot{x} = 0$ .

Решением этого уравнения является функция

$$x = A \cos(\omega t + \alpha_0), \text{ где } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Таким образом, получаем для периода колебаний выражение

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(1 + I/ma^2)(R-a)}{g}}.$$

Можно рассмотреть два частных случая:

1) колеблющееся тело — сплошной цилиндр:  $I_{\text{ц}} = \frac{ma^2}{2}$ ;

$$T_{\text{ц}} = 2\pi \sqrt{\frac{3(R-a)}{2g}};$$

2) колеблющееся тело — шар:  $I_{\text{ш}} = \frac{2ma^2}{5}$ ;

$$T_{\text{ш}} = 2\pi \sqrt{\frac{7(R-a)}{5g}}.$$

$$\text{Ответ: } T = 2\pi \sqrt{\frac{(1 + I/ma^2)(R-a)}{g}}.$$

1.7.14. Вывести формулу для определения периода  $T$  колебаний физического маятника.

*Решение.* Физическим маятником называется твердое тело, совершающее колебания вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку подвеса, расположенную выше его центра масс.

Изобразим на чертеже (рис. 1.74) произвольное твердое тело, которое закреплено в точке  $O$ , центр масс тела находится в точке  $O'$  на расстоянии  $l$  от точки закрепления. Момент инерции тела относительно оси, проходящей через точку подвеса точку  $O$ , равен  $I$ .

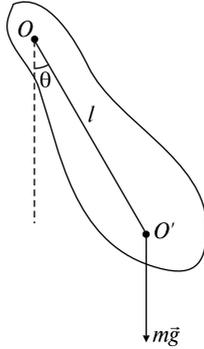


Рис. 1.74

Применим второй закон Ньютона для вращательного движения твердого тела, закрепленного на оси:

$$I\beta = M, \quad (1)$$

где  $I$  — момент инерции твердого тела относительно точки закрепления,  $M$  — сумма моментов сил относительно этой оси,  $\beta$  — угловое ускорение. В нашем случае только сила тяжести  $m\vec{g}$  создает вращательный момент относительно точки  $O$ . Таким образом, используя связь между  $\beta$  и углом поворота  $\theta$  ( $\beta = d^2\theta/dt^2$ ), из (1) получаем

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgl \sin \theta,$$

откуда

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgl \sin \theta}{I}.$$

Для малых колебаний  $\sin \theta \approx \theta$ , поэтому можно считать, что

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgl\theta}{I}. \quad (2)$$

Решением этого уравнения является функция  $\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \alpha)$ . Подставляя ее в (2), имеем

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\theta_0 \omega^2 \cos(\omega t + \alpha) = \theta_0 \left(-\frac{mgl}{I}\right) \cos(\omega t + \alpha),$$

откуда  $\omega = \sqrt{mgl/I}$  и  $T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}$ .

Для математического маятника, вся масса которого сосредоточена в точке  $O'$  на расстоянии  $l$  от оси, получаем  $I = ml^2$ ,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Ответ:  $T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}$ .

1.7.15. На противоположных концах пружины укреплены две массы  $m_1$  и  $m_2$  (рис. 1.75). Если растянуть пружину, а затем отпустить обе массы одновременно, то каким будет период колебаний  $T$ ? Коэффициент упругости пружины  $k$ .



Рис. 1.75

*Решение.* Пусть  $x_1$  — смещение массы  $m_1$  из положения равновесия;  $x_2$  — смещение массы  $m_2$ . Заметим, что центр масс систем должен оставаться на месте, следовательно,  $m_1 x_1 = -m_2 x_2$ ;  
 $x_1 = -\frac{m_2}{m_1} x_2$ .

Применим к массе  $m_2$  второй закон Ньютона:

$$-k(x_2 - x_1) = m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2},$$

$$-k \left( x_2 + \frac{m_2}{m_1} x_2 \right) = m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2},$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} x_2.$$

Введем обозначение  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  (приведенная масса).

Получаем

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = -\frac{k}{\mu}x_2.$$

Таким образом, используя формулу  $T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}}$ , для периода колебаний получим выражение

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1m_2}{(m_1 + m_2)k}}.$$

$$\text{Ответ: } T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1m_2}{(m_1 + m_2)k}}.$$

1.7.16. Математический маятник длиной  $l = 50$  см совершает небольшие колебания в среде, в которой коэффициент затухания  $\beta = 0,9 \text{ с}^{-1}$ . Определить время  $\tau$  и число полных колебаний  $n$ , по истечении которых амплитуда колебаний маятника уменьшится в  $k = 5$  раз. Во сколько раз  $\alpha$  должен возрасти коэффициент трения, чтобы колебания оказались невозможны?

*Решение.* Для решения задачи следует воспользоваться теорией затухающих гармонических колебаний. На рис. 1.76 приведена типичная зависимость затухающих колебаний от времени. Сила, вызывающая затухание, зависит от скорости колебательного движения; она противодействует движению, и во многих случаях ее можно считать прямо пропорциональной скорости:  $F_{\text{зат}} = -rv$ ,  $r$  — коэффициент трения. Уравнение движения математического маятника можно записать в виде

$$m \frac{d^2\theta}{dt^2} + r \frac{d\theta}{dt} + mg\theta = 0. \quad (1)$$

Решением этого уравнения является функция

$$\theta = \theta_0 e^{-\beta t} \sin \omega t \quad (2)$$

(мы выбрали начало отсчета времени таким образом, что при  $t = 0$  маятник проходит через положение равновесия, т.е.  $\varphi_0 = 0$ ), где  $\beta = \frac{r}{2m}$  — коэффициент затухания,  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  — частота колебаний, причем  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$  — собственная частота колебаний математического маятника при отсутствии трения. Видно, что зависимость выглядит как синус, умноженный на некоторую функцию, которая убывает со временем по экспоненциальному закону (эта

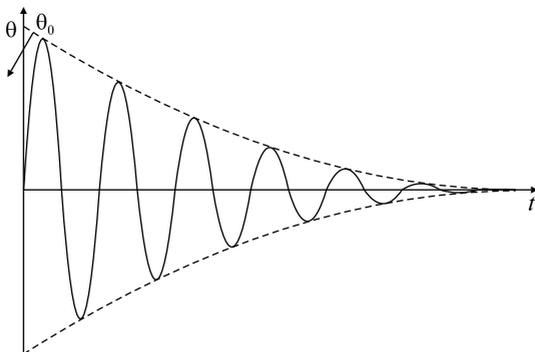


Рис. 1.76

функция на рисунке представлена штриховыми линиями), т.е. амплитудой затухающих колебаний принято считать величину  $A(t) = \theta_0 e^{-\beta t}$ . Определим время  $\tau$ , через которое амплитуда уменьшилась в  $k$  раз от значения  $A_1$  до значения  $A_2$ . Для этого проведем несложный расчет:

$$\begin{cases} A_1 = \theta_0 e^{-\beta t}, & \frac{A_1}{A_2} = e^{\beta \tau} = k, \\ A_2 = \theta_0 e^{-\beta(t+\tau)}, & \end{cases}$$

$$\ln k = \beta \tau; \quad \tau = \frac{\ln k}{\beta} = \frac{\ln 5}{\beta} = 1,79 \text{ с.}$$

Найдем теперь число колебаний, приходящихся на интервал времени  $\tau$ :

$$n = \frac{\tau}{T}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = 1,45 \text{ с.}$$

Так как  $1 < n < 2$ , то по прошествии двух полных колебаний амплитуда уменьшится уже больше, чем в 5 раз. Решение (2) теряет смысл, когда значение  $r$  столь велико, что  $\beta^2 > \omega_0^2$  (частота становится мнимой величиной). В этом случае система просто возвращается в положение равновесия, не совершая колебаний. Когда  $\beta^2 = \omega_0^2$ , система приходит в равновесие за самое короткое время; это явление называется демпфированием. Обозначая коэффициент трения, обеспечивающий переход к демпфированию, через  $r_{\max}$ , определим требуемый коэффициент:

$$\alpha = \frac{r_{\max}}{r} = \frac{\beta_{\max}}{\beta} = \frac{\omega_0}{\beta} = 4,9.$$

*Ответ:*  $\tau = 1,79$  с; два полных колебания;  $\alpha = 4,9$  — колебания невозможны.

1.7.17. Точка участвует одновременно в двух одинаково направленных гармонических колебаниях:

$$x_1 = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1), \quad (1)$$

$$x_2 = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2). \quad (2)$$

Найти амплитуду  $A$  и начальную фазу  $\varphi_0$  гармонического колебания, полученного от сложения одинаково направленных колебаний, определяемых уравнениями (1) и (2). Построить графики зависимости от времени смещений результирующего колебания  $x(t)$  для случаев:

1)  $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi n; n = 0, 1, 2, \dots;$

2)  $\varphi_2 - \varphi_1 = (2n + 1)\pi; n = 0, 1, 2, \dots$

*Решение.* Для получения амплитуды  $A$  и начальной фазы  $\varphi_0$  колебания воспользуемся методом векторных диаграмм. Его иллюстрирует рис. 1.77, а. Результирующее колебание характеризуется смещением  $x = x_1 + x_2$ , происходит в том же направлении и является гармоническим колебанием той же частоты  $\omega$ :

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0),$$

где  $A$  — амплитуда результирующего колебания,  $\varphi_0$  — его начальная фаза. Из векторной диаграммы видно, что  $A$  и  $\varphi_0$  вычисляются по формулам

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)},$$

$$\varphi_0 = \arctg \frac{a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2}{a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2}.$$

Так как  $\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$  не может быть больше  $+1$  и меньше  $-1$ , поэтому возможные значения амплитуды заключены в пределах:

$$|a_2 - a_1| \leq A \leq a_1 + a_2.$$

Последнее соотношение учитывает, что по определению амплитуды она не может быть отрицательной.

Рассмотрим частные случаи:

1)  $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi n; n = 0, 1, 2, \dots$

Суммарное колебание имеет амплитуду  $A = a_1 + a_2$ , так как  $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1$ . Соответствующая этому случаю зависимость  $x(t)$  представлена на рис. 1.77, б.

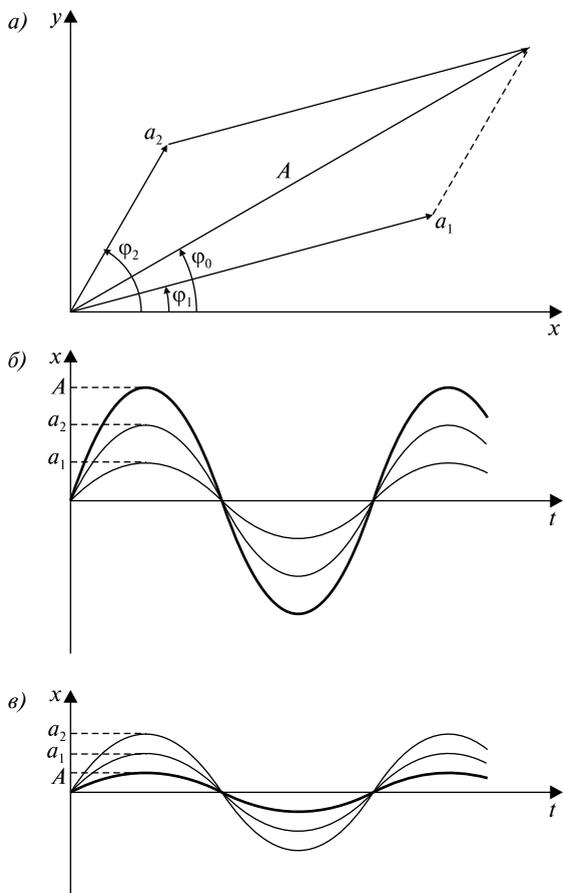


Рис. 1.77

2)  $\varphi_2 - \varphi_1 = (2n + 1)\pi$ ;  $n = 0, 1, 2, \dots$

Следовательно,  $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1$ , а суммарная амплитуда определяется как  $A = |a_2 - a_1|$ ; характер колебаний, соответствующий этому случаю, иллюстрирует рис. 1.77, в.

1.7.18. Точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях:

$$x = a \cos \omega t, \quad (1)$$

$$y = b \cos(\omega t + \varphi). \quad (2)$$

Найти траекторию движения точки для следующих частных случаев:

- 1) разность фаз  $\varphi$  равна нулю;
- 2) разность фаз  $\varphi$  равна  $\pm\pi$ ;
- 3) разность фаз  $\varphi$  равна  $\pm\frac{\pi}{2}$ .

*Решение.* Из (1) следует, что

$$\cos \omega t = x/a. \quad (3)$$

Зная значение косинуса, находим величину синуса:

$$\sin \omega t = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}. \quad (4)$$

Используя формулу косинуса суммы двух углов, получим

$$\frac{y}{b} = \cos(\omega t + \varphi) = \cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi.$$

С учетом (3) и (4) находим

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{a} \cos \varphi - \sin \varphi \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2},$$

отсюда

$$\left( \sin \varphi \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \right)^2 = \left( \frac{x}{a} \cos \varphi - \frac{y}{b} \right)^2.$$

Мы приходим к уравнению

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \frac{2xy}{ab} \cos \varphi = \sin^2 \varphi.$$

Это уравнение эллипса, оси которого ориентированы относительно координатных осей  $x$  и  $y$  произвольным образом.

Исследуем форму траектории для ряда частных случаев:

$$1) \varphi = 0, \quad \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 = 0, \quad y = \frac{b}{a}x.$$

Колеблющаяся точка перемещается по прямой (рис. 1.78, *a*).

$$2) \varphi = \pm\pi, \quad \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = 0, \quad y = -\frac{b}{a}x \text{ — уравнение прямой.}$$

(рис. 1.78, *б*).

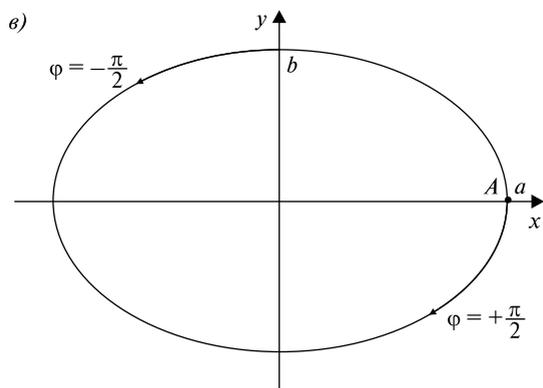
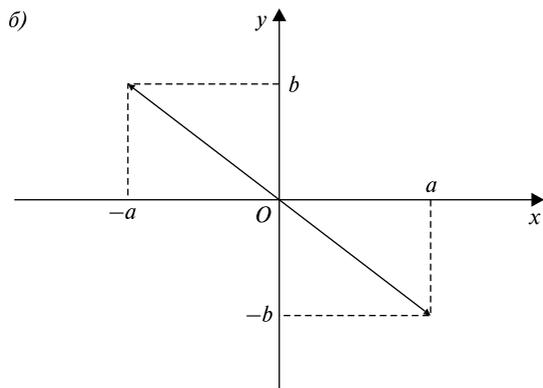
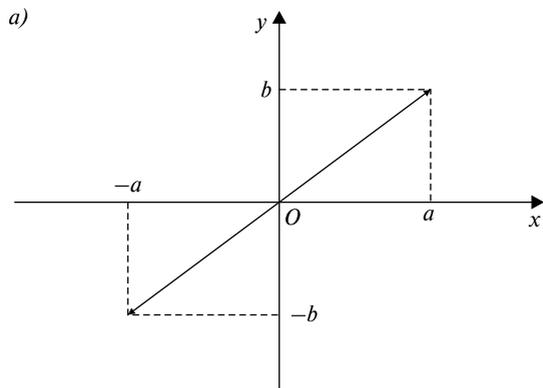


Рис. 1.78

$$3) \varphi = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Это уравнение эллипса, приведенного к координатным осям, причем полуоси эллипса равны соответствующим амплитудам колебаний. При равенстве амплитуд  $a$  и  $b$  эллипс вырождается в окружность. Случаи  $\varphi = +\frac{\pi}{2}$  и  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$  отличаются направлением движения по эллипсу или по окружности. Если  $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ , то  $x = a \cos \omega t$ ,  $y = a \sin \omega t$ , следовательно, в момент времени  $t = 0$  тело находится в точке  $A$ , в последующие моменты времени координата  $x$  уменьшается, а  $y$  становится отрицательной. Таким образом, движение совершается по часовой стрелке. При  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$  движение происходит против часовой стрелки.

### Задачи без решений

1.7.19. Груз массой  $m$  помещен на наклонную плоскость, образующую с горизонтом угол  $\alpha$ , и прикреплен к концу пружины жесткостью  $k$  (рис. 1.79). Определить максимальное растяжение пружины  $x_0$ , если в начальный момент времени пружина была недеформирована, а груз отпущен без начальной скорости. Коэффициент трения тела о плоскость равен  $\mu$ .

1.7.20. Чему равен период  $T$  колебаний однородного стержня массой  $m$  и длиной  $l$ , закрепленного на одном из концов (рис. 1.80).

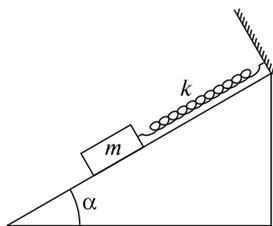


Рис. 1.79

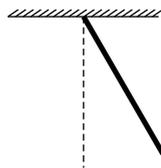


Рис. 1.80

1.7.21. Найти амплитуду  $a$  и начальную фазу  $\varphi$  гармонического колебания, полученного от сложения одинаково направленных колебаний, данных уравнениями

$$x_1 = 4 \sin \pi t, \quad x_2 = 3 \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right), \quad [x] = \text{см.}$$

Получить уравнение результирующего колебания  $x(t)$ .

1.7.22. Точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях  $x = a \cos \pi t$ ,  $y = a \cos \frac{\pi}{2} t$ . Найти траекторию результирующего движения точки.

1.7.23. Точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях  $x = \sin \pi t$ ,  $y = 4 \sin(\pi t + \pi)$ . Найти траекторию движения точки.

1.7.24. Точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях  $x = \sin \pi t$ ,  $y = 2 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ . Найти траекторию движения точки.

1.7.25. Шарик массой  $m$  подвешен на двух последовательно соединенных пружинах с коэффициентами упругости  $k_1$  и  $k_2$  (рис. 1.81). Определить период  $T$  вертикальных колебаний.

1.7.26. Через неподвижный блок с моментом инерции  $I$  и радиусом  $r$  перекинута нить, к одному концу которой подвешен груз массой  $m$ . Другой конец нити привязан к пружине с закрепленным нижним концом (рис. 1.82). Вычислить период колебаний груза  $T$ , если коэффициент упругости пружины равен  $k$ , а нить не может скользить по поверхности блока.

1.7.27. На горизонтальной пружине укреплено тело массой  $M = 10$  кг, лежащее на гладком горизонтальном столе, по которому оно может скользить без трения. В тело попадает и застревает пуля массой  $m = 10$  г, летящая горизонтально со скоростью  $v_0 = 500$  м/с, направленной вдоль оси пружины (рис. 1.83). Тело вместе с застрявшей в ней пулей отклоняется от положения равновесия и начинает колебаться относительно него с амплитудой  $A = 10$  см. Найти период  $T$  колебаний тела.

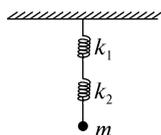


Рис. 1.81

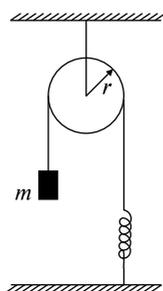


Рис. 1.82

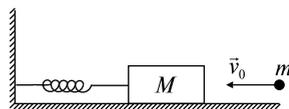


Рис. 1.83

## **РАЗДЕЛ 2**

# **МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА**

Термодинамика — раздел физики, изучающий наиболее общие свойства макроскопических физических систем, находящихся в состоянии термодинамического равновесия, и процессы перехода между равновесными состояниями.

Термодинамическая система — тело или совокупность тел, способных обмениваться с другими телами или между собой энергией и (или) веществом. Термодинамические параметры — совокупность физических величин, характеризующих термодинамическую систему.

Термодинамический процесс — изменение состояния термодинамической системы, характеризующееся изменением ее параметров. Равновесный процесс — это термодинамический процесс, представляющий собой непрерывную последовательность равновесных состояний.

### **ТЕМА 2.1**

## **МОЛЕКУЛЯРНО–КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИДЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСВЕЛЛА. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БОЛЬЦМАНА**

Молекулярно-кинетическая теория (МКТ) — раздел физики, изучающий свойства различных состояний вещества, основывающийся на представлениях о существовании молекул и атомов как мельчайших частиц вещества.

#### **Основные положения МКТ.**

1. Все вещества состоят из мельчайших частиц: атомов, молекул, ионов.
2. Частицы находятся в непрерывном хаотическом движении. Температура вещества зависит от скорости этих частиц.

3. Между частицами существуют силы притяжения и отталкивания, характер которых зависит от расстояний между ними.

**Опытное обоснование МКТ:** существование молекул и атомов доказано экспериментально, молекулы даже сфотографированы с помощью микроскопа. Хаотическое движение молекул доказано с помощью броуновского движения, а также явления диффузии — способности молекул одного вещества проникать в промежутки между молекулами другого. Упругость газов, жидкостей и твердых тел, способность жидкостей к смачиванию, сохранение форм твердыми телами и многое другое говорит о существовании сил между молекулами.

Давление идеального газа пропорционально произведению концентрации молекул  $n$  на среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекулы (основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа)

$$p = \frac{1}{3}nm_0\langle v_{\text{кв}} \rangle^2, \quad (2.1.1)$$

или

$$pV = \frac{2}{3}N\frac{m_0\langle v_{\text{кв}} \rangle^2}{2} = \frac{2}{3}E, \quad (2.1.2)$$

или

$$pV = \frac{1}{3}m\langle v_{\text{кв}} \rangle^2, \quad (2.1.3)$$

где  $m_0$  — масса молекулы,  $\langle v_{\text{кв}} \rangle$  — средняя квадратичная скорость молекул,  $E$  — суммарная кинетическая энергия поступательного движения молекул,  $n$  — концентрация молекул,  $m = Nm_0$  — масса газа,  $N$  — число молекул в объеме газа  $V$ .

Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы идеального газа

$$\langle \varepsilon_0 \rangle = \frac{3}{2}kT, \quad (2.1.4)$$

$k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К — постоянная Больцмана.

Закон Максвелла для распределения молекул идеального газа по скоростям

$$f(v) = \frac{dN(v)}{N dv} = 4\pi \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}, \quad (2.1.5)$$

где функция  $f(v)$  распределения молекул по скоростям определяет относительное число молекул  $dN(v)/N$  из общего числа  $N$  молекул, скорости которых лежат в интервале от  $v$  до  $v + dv$  (рис. 2.1).

Закон Максвелла для распределения молекул идеального газа по энергиям теплового движения

$$f(\epsilon) = \frac{dN(\epsilon)}{N d\epsilon} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \epsilon^{1/2} e^{-\frac{\epsilon}{kT}}, \quad (2.1.6)$$

где функция  $f(\epsilon)$  распределения молекул по энергиям теплового движения определяет относительное число молекул  $dN(\epsilon)/N$  из общего числа  $N$  молекул, которые имеют кинетические энергии  $\epsilon = m_0 v^2/2$ , заключенные в интервале от  $\epsilon$  до  $\epsilon + d\epsilon$ .

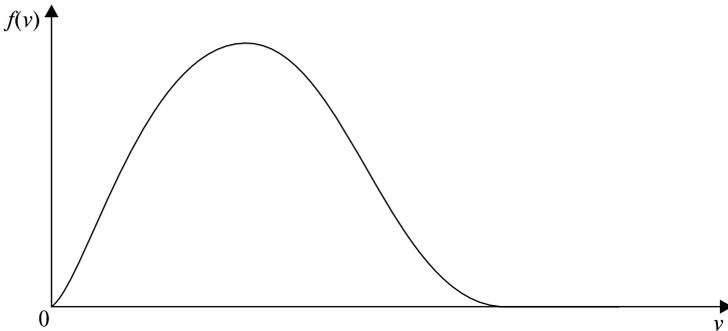


Рис. 2.1

Скорости молекул:  
наиболее вероятная

$$v_B = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}, \quad (2.1.7)$$

средняя квадратичная

$$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}, \quad (2.1.8)$$

средняя арифметическая

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}, \quad (2.1.9)$$

$\mu$  — молярная масса,  $R = 8,31$  Дж/(моль·К) — универсальная газовая постоянная,  $m_0$  — масса молекулы,  $T$  — абсолютная температура.

Барометрическая формула дает закон убывания давления газа с высотой в поле силы тяжести:

$$p = p_0 e^{-\frac{\mu g(h-h_0)}{RT}}, \quad (2.1.10)$$

где  $p_0$  и  $p$  — давление газа на высоте  $h_0$  и  $h$  соответственно.

Распределение Больцмана во внешнем потенциальном поле (поле силы тяжести)

$$n = n_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}} = n_0 e^{-\frac{m_0 g h}{kT}}, \quad (2.1.11)$$

где  $n$  и  $n_0$  — концентрация молекул на высоте  $h$  и  $h = 0$ .

### Качественные задачи

2.1.1. Чему равно число степеней свободы двухатомной молекулы?

2.1.2. Можно ли утверждать, что броуновское движение есть тепловое движение молекул?

2.1.3. На высоте нескольких сотен километров над Землей молекулы атмосферы обладают скоростями, которым соответствуют температуры в несколько тысяч градусов. Почему же не плавятся летающие на таких высотах искусственные спутники Земли?

2.1.4. В каких типах движения могут участвовать молекулы?

2.1.5. В каких слоях атмосферы воздух ближе к идеальному газу: у поверхности Земли или на больших высотах?

2.1.6. Скорости теплового движения многих молекул при комнатной температуре близки к скорости пули. Почему же запаху духов требуется заметное время, чтобы распространиться по комнате?

2.1.7. Молекулы водорода или кислорода при одинаковой температуре движутся быстрее?

### Задачи с решениями

2.1.8. Найти энергию и среднюю квадратичную скорость  $\langle v_{\text{кв}} \rangle$  поступательного движения молекул аммиака  $\text{NH}_3$ , находящихся в сосуде емкостью  $V = 10$  л и давлением  $p = 2800$  Па. Концентрация молекул  $n = 3 \cdot 10^{23} \text{ м}^{-3}$ .

*Решение.* Энергию поступательного движения молекул найдем из формулы (2.1.2):  $E = 1,5pV = 42$  Дж. Для вычисления среднеквадратичной скорости молекул воспользуемся формулой (2.1.1). Массу молекулы аммиака найдем из условия, что один моль вещества содержит  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$  молекул. Таким образом,  $m_0 = \mu / N_A$ , где  $\mu = 0,017$  кг/моль — молярная масса аммиака. Тогда

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3pN_A}{\mu n}} = 996 \text{ м/с.}$$

*Ответ:*  $E = 42$  Дж,  $\langle v_{\text{кв}} \rangle = 996$  м/с.

2.1.9. Используя распределение Максвелла по скоростям (2.1.5), определить среднеквадратичную и наиболее вероятную скорости молекул. При какой температуре эти скорости в азоте  $N_2$  различаются на  $\Delta v = 100$  м/с?

*Решение.* Средний квадрат скорости определяется по формуле

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv,$$

где  $f(v) = 4\pi \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}$  — функция распределения молекул по скоростям. Тогда

$$\langle v^2 \rangle = 4\pi \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} v^4 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} dv = 4\pi \left( \frac{2kT}{\pi^{3/2} m_0} \right) \frac{3}{8} \sqrt{\pi} = \frac{3kT}{m_0},$$

$$\text{откуда } \langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}.$$

Наиболее вероятная скорость определяется из условия

$$\frac{df(v)}{dv} = 0,$$

или

$$4\pi \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} v e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \left( 2 - \frac{m_0 v^2}{kT} \right) = 0,$$

$$\text{откуда } v_{\text{в}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}.$$

Далее, из условия задачи известно, что  $\langle v_{\text{кв}} \rangle - v_{\text{в}} = \Delta v$ .

Подставляя сюда значения среднеквадратичной и наиболее вероятной скоростей, получаем

$$\sqrt{\frac{kT}{m_0}}(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \Delta v,$$

откуда

$$T = \frac{m_0(\Delta v)^2}{k(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} = \frac{m_0(\Delta v)^2}{k(5 - 2\sqrt{6})} = \frac{m_0(\Delta v)^2}{k}(5 + 2\sqrt{6}),$$

где  $m_0 = \frac{\mu_{N_2}}{N_A}$  — масса молекулы азота. Окончательно

$$T = \frac{\mu_{N_2}(\Delta v)^2}{R}(5 + 2\sqrt{6}) = 333 \text{ К.}$$

$$\text{Ответ: } \langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}, v_B = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}, T = 333 \text{ К.}$$

2.1.10. Опыт Перрена. В 1909 г. Перреном проведена серия опытов по определению числа Авогадро на основе распределения Больцмана. В опытах использовалась взвесь шариков гуммигута (сгущенного млечного сока из коры некоторых видов деревьев, растущих в Индии и на Цейлоне) в воде. Плотность гуммигута  $\rho = 1254 \text{ кг/м}^3$ , температура смеси равнялась  $t = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ . Радиус шариков  $r = 0,212 \text{ мкм}$ . При перемещении тубуса микроскопа на  $\Delta h = 30 \text{ мкм}$  число шариков, наблюдавшихся в микроскоп, изменялось в  $j = 2,1$  раза. Исходя из этих данных, найти постоянную Авогадро  $N_A$ .

*Решение.* Число частиц, находящихся на глубине  $h$  и попадающих в поле зрения микроскопа, равно  $\Delta N = n(h)S\Delta h$ , где  $n(h)$  — концентрация частиц на высоте  $h$ ,  $S$  — площадь поля зрения микроскопа,  $\Delta h$  — глубина поля зрения микроскопа.

Применяя к частицам гуммигута формулу распределения Больцмана (2.1.11), можно написать

$$n(h) = n_0 e^{-\frac{ph}{kT}},$$

где  $n_0$  — концентрация частиц при  $h = 0$ ;  $p = m_0 g - \rho_B g V$  — вес частицы с учетом силы Архимеда в воде,  $m_0 = \rho V$  — масса частицы,  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$  — объем частицы.

На высоте  $h_1$  число частиц

$$\Delta N_1 = n_0 e^{-\frac{p h_1}{kT}} S \Delta h,$$

на высоте  $h_2$

$$\Delta N_2 = n_0 e^{-\frac{p h_2}{kT}} S \Delta h,$$

По условию задачи

$$j = \frac{\Delta N_1}{\Delta N_2} = e^{-\frac{p(h_1 - h_2)}{kT}}.$$

Логарифмируя последнее равенство, получаем

$$\ln j = \frac{p(h_2 - h_1)}{kT} = \frac{p \Delta h}{kT},$$

откуда

$$k = \frac{\frac{4}{3} \pi r^3 g(\rho - \rho_B) \Delta h}{T \ln j}$$

или

$$N_A = \frac{R}{k} = \frac{3RT \ln j}{4\pi r^3 g(\rho - \rho_B) \Delta h} = 6,06 \text{ моль}^{-1}.$$

### Задачи без решений

2.1.11. Каково давление, оказываемое идеальным газом на дно и стенки сосуда, объем которого  $V = 3 \text{ м}^3$ , если в нем содержится  $N = 15 \cdot 10^{26}$  молекул и каждая обладает средней кинетической энергией поступательного движения  $E = 6 \cdot 10^{-22} \text{ Дж}$ ?

2.1.12. Дано соединение  $\text{Ca}(\text{NO}_3)_2$ . 1) Какова в граммах масса одной молекулы? 2) Какова в килограммах масса 120 молей? 3) Сколько молекул содержится в 0,7 кг соединения?

2.1.13. В сосуде вместимостью  $V = 0,04 \text{ м}^3$  находится  $\nu = 1,8$  молей газа. Плотность газа  $\rho = 0,9 \text{ кг/м}^3$ . Определить, какой это газ?

2.1.14. Вычислить давление, оказываемое кислородом с концентрацией  $n = 3 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}$ , если средняя квадратичная скорость движения равна  $\langle v_{\text{кв}} \rangle = 500 \text{ м/с}$ .

2.1.15. Найти температуру  $T$ , при которой средняя квадратичная скорость молекул азота ( $\text{N}_2$ ) больше средней арифметической скорости на  $\Delta v = 40,0 \text{ м/с}$ .

2.1.16. При какой температуре  $T$  воздуха средние арифметические скорости молекул азота ( $N_2$ ) и кислорода ( $O_2$ ) отличаются на  $\Delta v = 30,0$  м/с?

2.1.17. Преобразовать функцию распределения Максвелла, перейдя от переменной  $v$  к переменной  $n = v/v_B$ , где  $v_B$  — наиболее вероятная скорость молекул.

2.1.18. В запаянном стеклянном баллоне заключен 1 моль одноатомного идеального газа при температуре  $T = 293$  К. Какое количество теплоты  $Q$  нужно сообщить газу, чтобы средняя арифметическая скорость его молекул увеличилась на 1%?

2.1.19. Вычислить наиболее вероятную, среднюю арифметическую и среднеквадратичную скорости молекул азота ( $N_2$ ) при  $20^\circ\text{C}$ .

2.1.20. Некоторый газ находится в равновесном состоянии. Какой процент молекул газа обладает скоростями, отличными от наиболее вероятной не более чем на 1%?

2.1.21. Используя функцию распределения молекул идеального газа по энергиям, найти среднюю кинетическую энергию молекул  $\langle \epsilon \rangle$  и наиболее вероятное значение энергии  $\epsilon_B$  молекул.

2.1.22. Считая атмосферу изотермической, а ускорение свободного падения не зависящим от высоты, вычислить давление а) на высоте 6 км, б) на высоте 12 км, в) в шахте на глубине 3 км. Расчет произвести для  $T = 300$  К. Давление на уровне моря принять равным  $p_0$ .

2.1.23. Вблизи поверхности Земли отношение объемных концентраций кислорода ( $O_2$ ) и азота ( $N_2$ ) в воздухе равно  $\eta_0 = 20,95/78,08 = 0,268$ . Полагая температуру атмосферы не зависящей от высоты и равной  $0^\circ\text{C}$ , определить это отношение  $\eta$  на высоте  $h = 10$  км.

2.1.24. Полагая температуру воздуха и ускорение свободного падения не зависящими от высоты, определить, на какой высоте  $h$  над уровнем моря плотность воздуха меньше своего значения на уровне моря: а) в 2 раза, б) в  $e$  раз? Температуру воздуха положить равной  $0^\circ\text{C}$ .

2.1.25. На какой высоте давление воздуха составляет  $n = 70\%$  от давления на уровне моря? Считать, что температура везде одинакова и равна  $25^\circ\text{C}$ .

2.1.26. Имеется  $N$  частиц, энергия которых может принимать лишь два значения  $E_1$  и  $E_2$ . Частицы находятся в равновесном состоянии при температуре  $T$ . Чему равна суммарная энергия  $E$  всех частиц в этом состоянии?

## ТЕМА 2.2

### УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА. ИЗОПРОЦЕССЫ

**Идеальный газ** — теоретическая модель газа, в которой не учитывается взаимодействие частиц газа (средняя кинетическая энергия частиц много больше энергии их взаимодействия).

Уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева–Клапейрона)

$$pV = (m/\mu)RT, \quad (2.2.1)$$

где  $p$ ,  $V$  и  $T$  — давление, объем и абсолютная температура газа соответственно,  $m$  и  $\mu$  — масса и молярная масса газа,  $R = 8,31$  Дж/(моль·К) — универсальная газовая постоянная.

Равновесные изопроцессы идеального газа: изотермический, изобарный, изохорный и адиабатический.

**Изотермическим** называют процесс, протекающий при постоянной температуре  $T = \text{const}$ . Он описывается законом Бойля–Мариотта  $pV = \text{const}$ .

**Изохорным** называют процесс, протекающий при постоянном объеме  $V = \text{const}$ . Для него справедлив закон Шарля  $p/T = \text{const}$ .

**Изобарным** называют процесс, протекающий при постоянном давлении  $p = \text{const}$ . Уравнение этого процесса  $V/T = \text{const}$  называется законом Гей–Люссака.

На рис. 2.2 представлено графическое изображение изопроцессов.

#### Качественные задачи

2.2.1. Является ли макроскопическим тело, линейные размеры которого сравнимы с величиной  $10^{-10}$  м?

2.2.2. Выполняется ли универсальный газовый закон для идеального газа, количество которого не сохраняется?

2.2.3. Почему баллоны со сжатым газом взрывоопасны, а трубы с водой под давлением — нет?

2.2.4. При значительном повышении температуры газа, состоящего из многоатомных молекул, может начаться диссоциация. К каким отклонениям от закона Шарля может это привести?

2.2.5. Объем газа уменьшили в 2 раза, а температуру увеличили в 1,5 раза. Как изменилось давление?

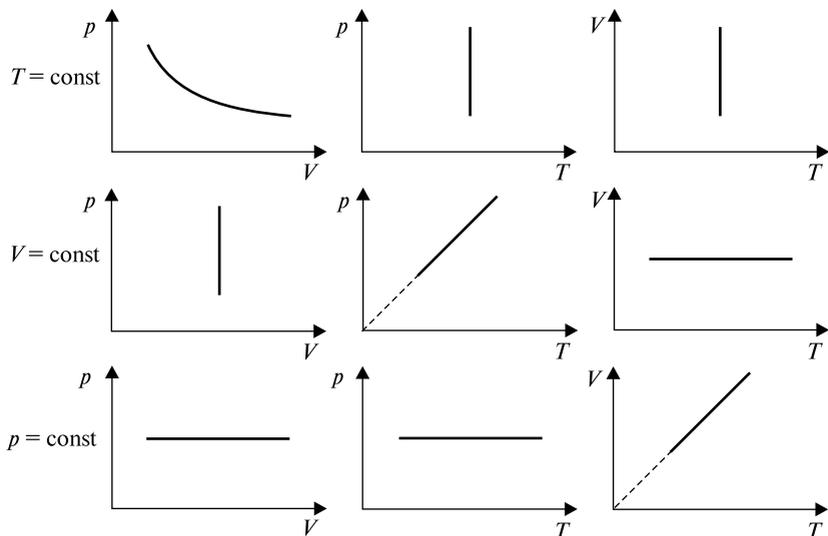


Рис. 2.2

2.2.6. Объем воздушного пузырька удваивается при подъеме со дна озера на поверхность. Какова глубина озера?

2.2.7. Почему электрическая лампочка заполняется инертным газом при давлении, значительно меньшем атмосферного?

2.2.8. Как изменяется сила, выталкивающая из воды воздушный пузырек, во время его подъема со дна на поверхность?

2.2.9. Два сосуда различных объемов, наполненные воздухом, закрывают при нормальных условиях и нагревают до  $100^\circ\text{C}$ . Одинаковы ли давления воздуха в сосудах после нагрева?

### Задачи с решениями

2.2.10. В баллоне находится гелий при температуре  $T = 350\text{ K}$ . Определить температуру гелия после того, как половина газа была выпущена из баллона, а его давление при этом уменьшилось на  $\alpha = 60\%$ .

*Решение.* Уравнение Менделеева–Клапейрона (2.2.1) до выпуска газа имеет вид

$$pV = \frac{m}{\mu} RT.$$

После того как половину газа выпустили, уравнение изменилось следующим образом:

$$\left(1 - \frac{\alpha}{100}\right) pV = \frac{m}{2\mu} RT_x.$$

Подставляя из первого уравнения значение  $pV$ , получаем

$$\left(1 - \frac{\alpha}{100}\right) \frac{m}{\mu} RT = \frac{m}{2\mu} RT_x.$$

Решая последнее относительно  $T_x$ , окончательно имеем

$$T_x = 2\left(1 - \frac{\alpha}{100}\right)T = 0,8T = 280 \text{ К.}$$

*Ответ:*  $T = 280 \text{ К.}$

2.2.11. Объем некоторой массы идеального газа при нагревании на  $\Delta T = 1 \text{ К}$  при постоянном давлении увеличился на  $\alpha = \frac{1}{335}$  часть первоначального объема. Какова исходная температура газа?

*Решение.* Поскольку процесс, описанный в задаче, изобарический, следовательно,  $V/T = \text{const}$ . Тогда

$$\frac{V}{T} = \frac{V + \alpha V}{T + \Delta T}.$$

Решая это уравнение относительно  $T$ , получаем

$$T + \Delta T = T + \alpha T, \quad T = \frac{\Delta T}{\alpha} = 335 \text{ К.}$$

*Ответ:*  $T = 335 \text{ К.}$

2.2.12. Газ при  $t_1 = 107^\circ \text{C}$  находится под давлением  $p_1 = 106 \text{ Па}$ . На сколько уменьшится давление газа при охлаждении его при постоянном объеме до  $t_2 = -13^\circ \text{C}$ ?

*Решение.* Для изохорического процесса  $p/T = \text{const}$ , поэтому

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_1 - \Delta p}{T_2},$$

где  $\Delta p$  — уменьшение давления. Из последнего соотношения следует

$$\Delta p = p_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = 3,16 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Обратим внимание на то, что температура в последней формуле определяется по шкале Кельвина:  $T(\text{K}) = 273 + t(^{\circ}\text{C})$ .

Ответ:  $\Delta p = 3,16 \cdot 10^5$  Па.

2.2.13. Баллон, содержащий объем  $V_1 = 0,035$  м<sup>3</sup> воздуха под давлением  $p_1 = 100$  кПа, соединяют с баллоном объемом  $V_2 = 0,015$  м<sup>3</sup>, из которого выкачан воздух. Найти давление  $p_2$ , установившееся в баллонах после их соединения. Температура постоянна.

*Решение.* Поскольку процесс изотермический, то  $pV = \text{const}$ . Следовательно,  $p_1 V_1 = p_2 (V_1 + V_2)$ , так как сначала газ занимал объем  $V_1$ , а потом к нему добавился объем  $V_2$ . Из последнего уравнения  $p_2 = p_1 V_1 / (V_1 + V_2) = 70$  кПа.

Ответ:  $p_2 = 70$  кПа.

2.2.14. Изобразить на диаграммах  $p-V$  и  $p-T$  процесс, проводимый с идеальным газом, приведенный на рис. 2.3, а.

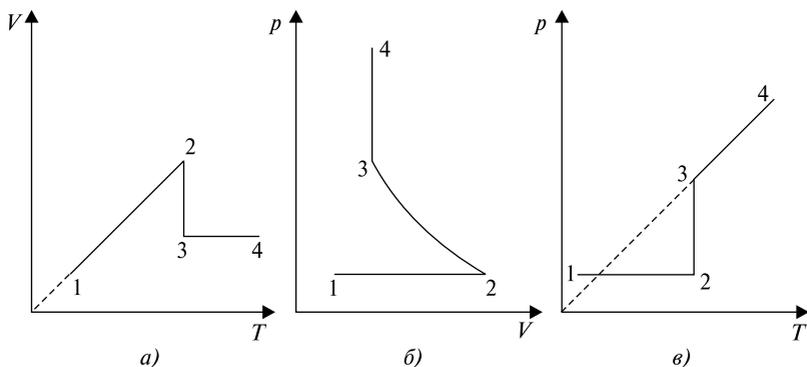


Рис. 2.3

*Решение.* Прежде всего определим, отрезки каких изопроцессов представлены на рис. 2.3, а. Прямая 1–2 представляет собой отрезок изобары ( $p = \text{const}$ ), в процессе перехода 2–3  $T = \text{const}$ , и, наконец, отрезок 3–4 — изохора  $V = \text{const}$ . В теоретическом введении в тему приведены графики всех изопроцессов во всех возможных системах координат:  $p-V$ ,  $V-T$  и  $p-T$ .

В координатах  $p-V$  (рис. 2.3, б) изобарный процесс — отрезок прямой, перпендикулярный оси  $p$ . Поскольку процесс идет с увеличением объема, то цифра 1 на графике будет левее цифры 2.

Процесс 2–3 изотермический, изображается в координатах  $p$ – $V$  отрезком гиперболы. Направление процесса таково, что происходит с уменьшением объема. Изобарический процесс в координатах  $p$ – $V$  представляется отрезком прямой, перпендикулярной оси  $V$ .

Рассуждая аналогичным образом, можно построить график процесса 1–2–3–4 в координатах  $p$ – $T$  (см. рис. 2.3,  $\theta$ ).

### Задачи без решений

2.2.15. Найти молярную массу смеси, состоящей из  $m_1 = 25$  г кислорода и  $m_2 = 75$  г азота.

2.2.16. В баллоне емкостью  $V$  находится идеальный газ, молярная масса которого  $\mu$ , при температуре  $T$ . В результате утечки часть газа улетучилась, и давление снизилось на  $\Delta p$ . Найти массу газа, который улетучился, считая температуру постоянной.

2.2.17. Озеро имеет глубину  $h = 20$  м. На дне температура  $t_1 = 7$  °С, на поверхности  $t_2 = 27$  °С. Атмосферное давление  $p_0 = 10^5$  Па. Пузырек воздуха, имеющий начальный объем  $V = 1$  мм<sup>3</sup>, медленно поднимается со дна. Чему равен его объем на поверхности воды?

2.2.18. Определить плотность воздуха при нормальных условиях ( $p = 101$  кПа,  $t = 0$  °С), если молярная масса воздуха  $\mu = 29$  г/моль.

2.2.19. Какое количество ртути содержится в зараженном ртутью помещении объемом  $V = 50$  м<sup>3</sup> при комнатной температуре  $t = 20$  °С, если давление насыщенного пара ртути при этой температуре  $p = 0,0011$  мм рт.ст.?

2.2.20. Некоторая масса воздуха при  $t_1 = 0$  °С и давлении  $p_1 = 1,33 \cdot 10^5$  Па занимает объем  $V_1 = 2$  л. При какой температуре давление будет равно  $p_2 = 2 \cdot 10^5$  Па, если при той же массе воздуха уменьшить объем до  $V_2 = 1$  л? Воздух считать идеальным газом.

2.2.21. Каков должен быть вес  $P_{об}$  оболочки воздушного шарика диаметром  $d = 18$  см, чтобы результирующая подъемная сила шарика была равна нулю, т.е. чтобы шарик находился во взвешенном состоянии? Давление внутри шарика равно внешнему давлению  $p = 80$  кПа, температура  $t = 42$  °С, молярная масса водорода  $\mu_1 = 0,002$  кг/моль, воздуха —  $\mu_2 = 0,029$  кг/моль.

2.2.22. На рис. 2.4 изображен цикл в координатах  $p$ – $T$ . Изобразить этот цикл в координатах  $V$ – $T$  и  $p$ – $V$ .

2.2.23. На рис. 2.5 изображен цикл в координатах  $V-T$ . Изобразить этот цикл в координатах  $p-V$  и  $p-T$ .

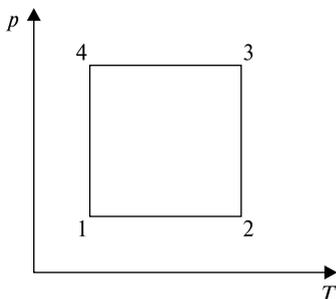


Рис. 2.4

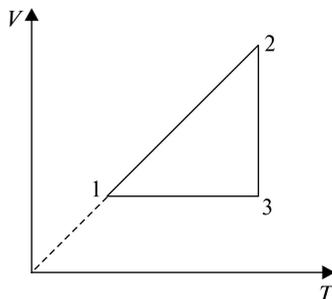


Рис. 2.5

2.2.24. При изохорном нагревании на 6 К давление некоторой массы газа возросло на 2%. Найти начальную температуру газа.

2.2.25. При температуре  $t_1 = 27^\circ\text{C}$  объем воздуха в воздушном шаре  $V_1 = 10\text{ м}^3$ . На сколько изменится объем шара при понижении температуры до  $t_2 = -3^\circ\text{C}$ . Давление окружающего воздуха при этом не меняется.

2.2.26. Газ в закрытом сосуде нагрели от  $t_1 = 10^\circ\text{C}$  до  $t_2 = 50^\circ\text{C}$ . Во сколько раз возросло давление газа?

2.2.27. Манометр на баллоне с газом, находящимся в помещении с температурой  $t_1 = 27^\circ\text{C}$ , показал давление  $p_1 = 2,5 \cdot 10^5\text{ Па}$ . На улице показание манометра стало равным  $p_2 = 2 \cdot 10^5\text{ Па}$ . Какова температура наружного воздуха?

2.2.28. Газ изотермически сжали от первоначального объема  $V_1 = 0,15\text{ м}^3$  до  $V_2 = 0,1\text{ м}^3$ . Давление при этом повысилось на  $\Delta p = 20\text{ Па}$ . Каково было первоначальное давление газа?

2.2.29. В одном баллоне емкостью  $V_1 = 2\text{ л}$  давление газа  $p_1 = 33\text{ кПа}$ , в другом, емкостью  $V_2 = 6\text{ л}$ , давление того же газа  $p_2 = 66\text{ кПа}$ . Баллоны соединяют трубкой, имеющей кран. Какое давление установится в баллонах при открывании крана? Процесс считать изотермическим.

## ТЕМА 2.3 ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ. ТЕПЛОВЫЕ МАШИНЫ. ЭНТРОПИЯ. ВТОРОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

**Первый закон термодинамики.** Изменение внутренней энергии  $dU$  замкнутой системы равно сумме количества теплоты  $dQ$ , переданной системе, и работы внешних сил  $dA = p dV$ , совершенной над системой:  $dU = dQ + dA = dQ + p dV$ . Если  $A'$  — работа, совершаемая системой, то первый закон термодинамики формулируется так:  $dQ = dA' + dU$  — количество теплоты, переданное системе, идет на совершение системой работы и изменение ее внутренней энергии.

Количество теплоты  $dQ = cm dT$ , где  $m$  — масса тела,  $dT$  — изменение температуры,  $c$  — удельная теплоемкость, показывающая, какое количество теплоты получает или отдает 1 кг вещества при изменении температуры на 1 К.

Размерность удельной теплоемкости  $[c] = \text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$ .  $C = cm$  — теплоемкость тела массой  $m$ , которая равна теплоте, необходимой для изменения температуры тела на 1 К;  $C_\mu = c\mu$  — молярная теплоемкость тела, которая равна теплоте, необходимой для изменения температуры одного моля вещества на 1 К.

Изменение внутренней энергии идеального газа

$$dU = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R dT, \quad (2.3.1)$$

где  $m$  — масса газа,  $\mu$  — молярная масса,  $R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль}\cdot\text{К})$  — универсальная газовая постоянная,  $dT$  — изменение температуры,  $i$  — число степеней свободы молекулы. (Для одноатомного газа  $i = 3$ , для двухатомного газа  $i = 5$ , для трехатомного и многоатомного газов  $i = 6$ . Здесь учитываются только поступательные и вращательные степени свободы и не учитываются колебательные. Исключение составляет углекислый газ  $\text{CO}_2$ , для которого  $i = 5$ .)

Работа, совершаемая газом при изменении его объема,

$$dA = p dV. \quad (2.3.2)$$

Полная работа при изменении объема

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV, \quad (2.3.3)$$

где  $V_1$  и  $V_2$  — соответственно начальный и конечный объемы газа.

В изотермическом процессе температура постоянна, следовательно, внутренняя энергия не меняется, тогда уравнение первого закона термодинамики имеет вид  $dQ = dA'$ , т.е. количество теплоты, переданное системе, идет на совершение работы при изотермическом расширении, именно поэтому температура не изменяется.

В изобарном процессе газ расширяется и количество теплоты, переданное газу, идет на увеличение его внутренней энергии и на совершение им работы:  $dQ = dU + dA'$ .

При изохорном процессе газ не меняет своего объема, следовательно, работа им не совершается, т.е.  $A = 0$ , и первый закон термодинамики имеет вид  $dQ = dU$ , и переданное количество теплоты идет на увеличение внутренней энергии газа.

При адиабатическом процессе без теплообмена с окружающей средой  $dQ = 0$ , следовательно, газ при расширении совершает работу за счет уменьшения его внутренней энергии:  $A' = dU$ . Газ при этом охлаждается.

Уравнение Пуассона для адиабатического процесса:

$$pV^\gamma = \text{const}, TV^{\gamma-1} = \text{const}, T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{const}.$$

Здесь  $\gamma = C_p/C_V$  — показатель адиабаты.

Политропическим называется процесс, при котором давление и объем связаны соотношением  $pV^n = \text{const}$ , где  $n$  — показатель политропы, который может принимать любые значения. При  $n = 0$  процесс тождественен изобарическому, при  $n = 1$  — изотермическому, при  $n = \gamma$  процесс адиабатический и при  $n = \pm\infty$  — изохорический.

Равновесное состояние — состояние термодинамической системы, характеризующееся при постоянных внешних условиях неизменностью параметров во времени и отсутствием в системе потоков. Состояние термодинамической системы, не удовлетворяющее этому определению, называется неравновесным состоянием.

Обратимый процесс — термодинамический процесс, после которого система и взаимодействующие с ней системы (окружающая среда) могут возвратиться в начальное состояние без того, чтобы в системе возникли какие-либо остаточные изменения.

Необратимыми называются такие процессы, которые могут самопроизвольно протекать только в одном направлении, в обратном

направлении они могут протекать только как одно из звеньев более сложного процесса. Все макроскопические процессы в природе протекают только в одном определенном направлении. В обратном направлении они самопроизвольно протекать не могут.

Циклический процесс — непрерывная последовательность термодинамических процессов, в результате которых рабочее тело возвращается в исходное состояние.

Второй закон термодинамики в формулировке Клаузиуса: существует функция состояния системы — энтропия  $S$ , приращение которой  $dS$  при обратимом сообщении системе теплоты равно

$$dS = \frac{\delta Q}{T}. \quad (2.3.4)$$

При реальных (необратимых) адиабатических процессах  $dS > 0$ , т.е. энтропия возрастает, достигая максимального значения в состоянии равновесия. Другими словами, невозможно перевести теплоту от более холодной системы к более горячей при отсутствии одновременных изменений в обеих системах или окружающих телах.

Изменение энтропии при равновесном переходе из состояния 1 в состояние 2

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{dU + dA}{T}. \quad (2.3.5)$$

**Физические основы работы тепловых двигателей.** Тепловыми двигателями называют устройства, превращающие внутреннюю энергию топлива в механическую. Для работы теплового двигателя необходимо наличие нагревателя с температурой  $T_1$  и холодильника с температурой  $T_2 < T_1$ . Кроме того, необходимо рабочее тело, которое в процессе работы теплового двигателя забирает у нагревателя некоторое количество теплоты  $Q_1$ , превращает часть его в механическую работу  $A$ , а остальную часть теплоты  $Q_2$  передает холодильнику. Рабочим телом у всех тепловых двигателей является газ. Температура холодильника обычно несколько больше температуры окружающей среды. Таким образом, в двигателе рабочее тело при расширении не может отдавать всю свою внутреннюю энергию на совершение работы. Часть теплоты неизбежно передается холодильнику вместе с отработанным паром или выхлопными газами двигателей внутреннего сгорания и газовых турбин.

Эта часть внутренней энергии теряется. Согласно закону сохранения энергии работа, совершаемая двигателем, равна  $A = Q_1 - Q_2$ .

Коэффициентом полезного действия (КПД) теплового двигателя  $\eta$  называют отношение работы  $A$ , совершаемой двигателем, к количеству теплоты, полученному от нагревателя. Для всех тепловых двигателей  $\eta = A/Q$ . Максимальное значение КПД определяется теоремой Карно: любая реальная тепловая машина, работающая с нагревателем, имеющим температуру  $T_1$ , и холодильником с температурой  $T_2$ , не может иметь КПД, превышающий КПД идеальной тепловой машины, а именно:  $\eta_{\max} = (T_1 - T_2)/T_1$ . Это теоретическая оценка максимального значения КПД тепловых двигателей.

Идеальная тепловая машина работает по циклу Карно, состоящему из двух изотерм и двух адиабат.

### Качественные задачи

2.3.1. Может ли газ нагреться или охладиться без теплообмена с окружающей средой?

2.3.2. Почему при адиабатном расширении газа его давление уменьшается резче, чем при изотермическом расширении?

2.3.3. Можно ли, передавая газу теплоту, поддерживать температуру газа постоянной?

2.3.4. Можно ли увеличить температуру газа, не передавая этому газу теплоты?

2.3.5. Одному моллю идеального газа передали одно и то же количество тепла сначала при изотермическом, затем при изобарическом процессе. В каком случае изменение внутренней энергии газа больше?

2.3.6. Будет ли работать тепловой двигатель, если температура его рабочего тела равна температуре окружающей среды?

2.3.7. Когда лед может быть нагревателем?

2.3.8. С одинаковой высоты упали два тела одинаковой массы — медное и железное. Какое из них при ударе нагреется до более высокой температуры?

2.3.9. Как заставить воду кипеть без нагревания?

2.3.10. Можно ли передать некоторое количество тепла веществу, не вызывая этим повышения его температуры?

2.3.11. Воздух в комнате нагрели от температуры  $T_0$  до  $T$ . При этом давление не изменилось. Изменилась ли внутренняя энергия воздуха внутри комнаты?

2.3.12. Почему при холостых выстрелах ствол пушки нагревается сильнее, чем при стрельбе снарядами?

2.3.13. В цилиндре под поршнем содержится воздух. Его состояние меняется следующим образом: 1) при  $V = \text{const}$  увеличивается давление; 2) при  $p = \text{const}$  увеличивается объем; 3) при  $T = \text{const}$  увеличивается объем; 4) при  $p = \text{const}$  воздух возвращается в исходное состояние. Начертите диаграмму в координатах  $p-V$  и укажите, где воздух получал теплоту, а где отдавал.

2.3.14. Будет ли кипеть вода в кастрюле, которая плавает в баке с кипящей водой?

### Задачи с решениями

2.3.15. Найти удельную и молярную теплоемкости идеального газа при изохорном процессе  $c_V$  и изобарном процессе  $c_p$ , а также их разность  $c_p - c_V$  (теорема Майера).

*Решение.* При изохорном процессе объем газа не меняется, газ не совершает работы и в соответствии с первым законом термодинамики теплота, переданная телу, идет на увеличение внутренней энергии газа:  $dQ = dU$ . С другой стороны,  $dQ = c_V m dT$ , и для идеального газа  $dU = (i/2)(m/\mu)RdT$ , где  $c_V$  — теплоемкость при изохорном процессе,  $m$  — масса газа,  $\mu$  — молярная масса,  $dT$  — изменение температуры,  $R$  — универсальная газовая постоянная. Из условия  $dQ = dU$  следует  $c_V m dT = (i/2)(m/\mu)RdT$ , откуда  $c_V = (i/2)R/\mu$ . Для изобарного процесса первый закон термодинамики имеет вид  $dQ = dU + dA$ . В этом случае  $dQ = c_p m dT$ ,  $c_p$  — теплоемкость при изобарном процессе,  $dU = (i/2)(m/\mu)RdT$  для одноатомного идеального газа,  $dA = (m/\mu)RdT$ . Подставляя эти значения в уравнение для первого закона термодинамики, получаем  $c_p m dT = (i/2)(m/\mu)RdT + (m/\mu)RdT$ , откуда следует  $c_p = [(i + 2)/2]R/\mu$ . Между удельными теплоемкостями при изобарном и изохорном процессами существует связь  $c_p = c_V + R/\mu$ , для молярных теплоемкостей  $C_p = C_V + R$  (теорема Майера).

2.3.16. Сравнить внутреннюю энергию одного моля гелия и одного моля кислорода, если температура кислорода в два раза больше температуры гелия.

*Решение.* Внутренняя энергия идеального газа определяется по формуле

$$U = \frac{i}{2} \nu RT,$$

где  $i$  — число степеней свободы молекулы (для гелия  $i = 3$ , для кислорода  $i = 5$ ),  $\nu$  — число молей газа (по условию данной задачи  $\nu = 1$ ),  $T$  — температура газа (по условию  $T_{\text{O}_2} = 2T_{\text{He}}$ ). Тогда

$$U_{\text{He}} = \frac{3}{2}RT_{\text{He}}, \quad U_{\text{O}_2} = \frac{5}{2}R \cdot 2T_{\text{He}}.$$

$$\text{Окончательно } \frac{U_{\text{He}}}{U_{\text{O}_2}} = \frac{3}{5 \cdot 2} = 0,3.$$

*Ответ:*  $U_{\text{He}}/U_{\text{O}_2} = 0,3$ .

2.3.17. Гелий массой  $m = 4$  г совершает цикл, изображенный на рис. 2.6. Найти работу  $A$ , совершаемую газом за один цикл, а также количество теплоты, принятое от нагревателя  $Q_1$  и переданное холодильнику  $Q_2$  за цикл, если  $p_1 = 200$  кПа,  $p_2 = 600$  кПа,  $V_1 = 1$  л,  $V_2 = 3$  л.

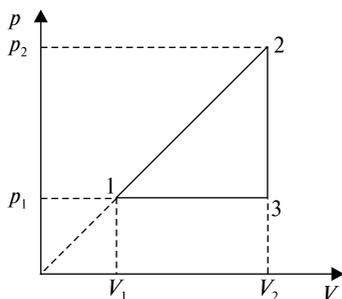


Рис. 2.6

*Решение.* Из условия следует, что количество гелия — 1 моль. На участке 1–2 давление  $p$  пропорционально объему:  $p = kV$ , где  $k = \frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1}$ , а также  $p_1V_2 = p_2V_1$ . Работу на участке 1–2 определим по формуле

$$\begin{aligned} A_{12} &= \int_{V_1}^{V_2} p dV = k \int_{V_1}^{V_2} V dV = k \frac{V^2}{2} \Big|_{V_1}^{V_2} = \\ &= \frac{k}{2}(V_2^2 - V_1^2) = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)(V_2 + V_1) = \frac{1}{2}(p_2V_2 - p_1V_1). \end{aligned}$$

В последнем равенстве учтено, что  $p_1 V_2 = p_2 V_1$ . На участке 2–3  $V = \text{const}$ , следовательно,  $A_{23} = 0$ . На участке 3–1  $p = \text{const}$ , поэтому  $A_{31} = p_1(V_1 - V_2)$ . Работа, совершенная газом за цикл,  $A = A_{12} + A_{31} = \frac{1}{2}(p_2 V_2 - p_1 V_1) - p_1 V_2 = 200$  Дж.

Для нахождения  $Q_1$  и  $Q_2$  определим изменение внутренней энергии по формуле  $\Delta U = \frac{3}{2} R \Delta T$  с учетом того, что  $p_1 V_1 = RT_1$ ,  $p_2 V_2 = RT_2$ ,  $p_1 V_2 = RT_3$ . Тогда

$$\begin{aligned} Q_1 = Q_{12} = A_{12} + \Delta U_{12} &= \frac{1}{2}(p_2 V_2 - p_1 V_1) + \frac{3}{2} R(T_2 - T_1) = \\ &= \frac{1}{2}(p_2 V_2 - p_1 V_1) + \frac{3}{2}(p_2 V_2 - p_1 V_1) = 2(p_2 V_2 - p_1 V_1) = 3200 \text{ Дж.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_2 = Q_{23} + Q_{31} = \Delta U_{23} + \Delta U_{31} + A_{31} &= \frac{3}{2} R(T_3 - T_2) + \\ &+ \frac{3}{2} R(T_1 - T_3) + p_1(V_1 - V_2) = \frac{3}{2} R(T_2 - T_1) + p_1(V_1 - V_2) = \\ &= \frac{3}{2} p_2 V_2 - \frac{3}{2} p_1 V_1 + p_1 V_1 - p_1 V_2 = \frac{3}{2} p_2 V_2 + p_1(V_2 - V_1) = \\ &= 2300 \text{ Дж.} \end{aligned}$$

*Ответ:*  $A = \frac{1}{2}(p_2 V_2 - p_1 V_1) - p_1 V_2 = 200$  Дж,  $Q_1 = 2(p_2 V_2 - p_1 V_1) = 3200$  Дж,  $Q_2 = \frac{3}{2} p_2 V_2 + p_1(V_2 - V_1) = 2300$  Дж.

2.3.18. В результате адиабатического процесса один моль двухатомного идеального газа перешел из состояния 1 с температурой  $T_1$  в состояние 2 с температурой  $T_2$ . Определить изменение энтропии газа при этом процессе.

*Решение.* Изменение энтропии  $\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}$ . По первому закону термодинамики  $\delta Q = dU + dA$ , тогда

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \left( \frac{dU}{T} + \frac{dA}{T} \right).$$

Рассчитаем отдельно оба интеграла.

Изменение внутренней энергии одного моля двухатомного идеального газа  $dU = \frac{5}{2} R dT$ . Следовательно,

$$\int_1^2 \frac{dU}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{5}{2} R \frac{dT}{T} = \frac{5}{2} R \ln T \Big|_{T_1}^{T_2} = \frac{5}{2} R \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

Поскольку работа  $dA = p dV$ , то

$$\int_1^2 \frac{dA}{T} = \int_1^2 \frac{p dV}{T}.$$

Используя формулу адиабатического процесса, выразим  $p$  и  $T$  через  $V$ . Пусть давление и температура в состоянии 1 равны соответственно  $p_1$  и  $T_1$ . Тогда из соотношений  $pV^\gamma = \text{const}$  и  $TV^{\gamma-1} = \text{const}$  получаем  $p_1V_1^\gamma = pV^\gamma$  и  $T_1V_1^{\gamma-1} = TV^{\gamma-1}$ , где  $p$ ,  $V$  и  $T$  — текущие термодинамические параметры системы. Из двух последних равенств следует

$$p = \frac{p_1V_1^\gamma}{V^\gamma} \text{ и } T = \frac{T_1V_1^{\gamma-1}}{V^{\gamma-1}}.$$

Подставляя эти значения в подынтегральное выражение, получаем

$$\int_1^2 \frac{pdV}{T} = \int_1^2 \frac{p_1V_1^\gamma V^{\gamma-1} dV}{V^\gamma T_1 V_1^{\gamma-1}} = \frac{p_1V_1}{T_1} \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = R \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

В последнем преобразовании мы воспользовались уравнением Менделеева–Клапейрона для  $\nu = 1$ :  $p_1V_1 = RT_1$ . Используя соотношение  $T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1}$ , легко получить, что

$$\frac{V_2}{V_1} = \left( \frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

Следовательно,

$$\int_1^2 \frac{pdV}{T} = \frac{R}{\gamma-1} \ln \frac{T_1}{T_2}.$$

Окончательно

$$\Delta S = \frac{5}{2} R \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{R}{\gamma-1} R \ln \frac{T_1}{T_2} = \left( \frac{5}{2} - \frac{1}{\gamma-1} \right) R \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

$$\text{Ответ: } \Delta S = \left( \frac{5}{2} - \frac{1}{\gamma-1} \right) R \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

2.3.19. Двигатель работает как машина Карно и за цикл получает от нагревателя  $Q_1 = 700$  кал. Температура нагревателя  $T_1 = 600$  К, температура холодильника  $T_2 = 300$  К. Найти совершенную за цикл работу и количество теплоты, отдаваемое холодильнику.

*Решение.* Запишем формулу для КПД машины Карно:

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

По определению КПД  $\eta = \frac{A}{Q_1}$ , где  $Q_1$  — тепло, потребляемое от нагревателя. Отсюда

$$A = Q_1 \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 350 \text{ кал.}$$

Количество тепла  $Q_2 = Q_1 - A = 350$  кал.

Ответ:  $A = 350$  кал,  $Q_2 = 350$  кал.

### Задачи без решений

2.3.20. Идеальному газу сообщили теплоту  $Q$ , в результате чего внутренняя энергия газа изменилась на  $\Delta U$ , а газ перешел из состояния 1 в состояние 3 (рис. 2.7). Полагая значения  $V_1$ ,  $V_2$  и  $p_2$  известными, найти давление газа  $p_1$ .

2.3.21. Идеальному газу сообщили теплоту  $Q$ , в результате чего он перешел из состояния 1 в состояние 4 (рис. 2.8). Найти изменение внутренней энергии газа, если  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $V_1$ ,  $V_2$  и  $V_3$  известны.

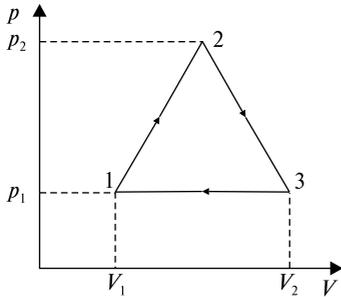


Рис. 2.7

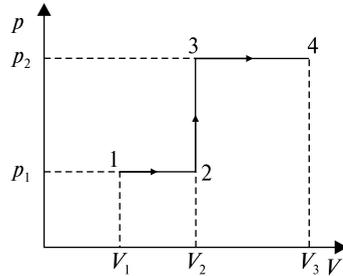


Рис. 2.8

2.3.22. Определить молярную теплоемкость идеального газа при изохорном процессе. Число степеней свободы молекул газа равно  $i$ .

2.3.23. Определить молярную теплоемкость идеального газа при изобарном процессе. Число степеней свободы молекул газа равно  $i$ .

2.3.24. Какое количество теплоты нужно передать трем молям идеального одноатомного газа, чтобы изобарно увеличить его объем в 2 раза? Начальная температура газа  $T_0$ .

2.3.25. Найти КПД теплового цикла Клапейрона, состоящего из двух изотерм и двух изохор, для одного моля идеального газа (рис. 2.9). Значения  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $T_1$  и  $T_2$  считать известными.

2.3.26. При политропическом расширении газ увеличил объем в 2 раза. Найти работу, совершенную газом, если первоначально газ занимал объем  $V_1$  и имел давление  $p_1$ . Показатель политропы  $n$ .

2.3.27. Как изменится при политропическом процессе температура  $T$  идеального газа, если изменить его объем в  $k$  раз? Показатель политропы  $n > 1$ .

2.3.28. Два моля идеального двухатомного газа изменяют свое состояние по циклу, представленному на диаграмме  $p$ – $V$  (рис. 2.10). Найти КПД цикла.

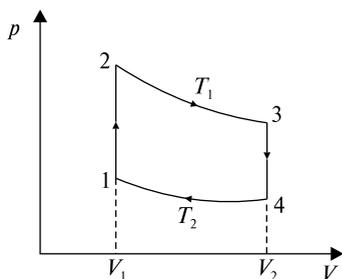


Рис. 2.9

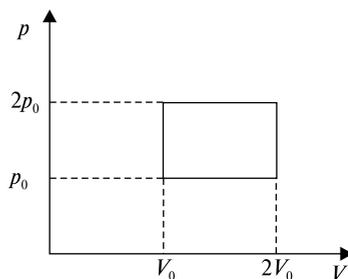


Рис. 2.10

2.3.29. Один моль идеального газа совершает цикл, как показано на рис. 2.11. Считая  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $T_1$  и  $T_2$  известными, определить разность между максимальным и минимальным объемами.

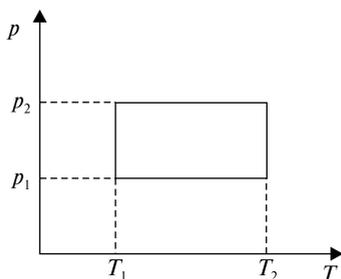


Рис. 2.11

2.3.30. Один моль идеального двухатомного газа совершает цикл, состоящий из изохорического нагрева при объеме  $V_1$ , изобарического нагрева до объема  $V_2$  и охлаждения до первоначального объема по закону  $p = kV^2$  (рис. 2.12). Определить КПД цикла.

2.3.31. Два моля идеального одноатомного газа совершают цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар. Максимальное давление в цикле в 3 раза больше минимального, максимальный объем в 2 раза больше минимального. Определить КПД цикла.

2.3.32. Определить КПД цикла, совершаемого одним молем идеального двухатомного газа, если параметры, указанные на рис. 2.13, известны.

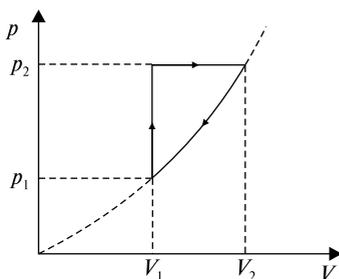


Рис. 2.12

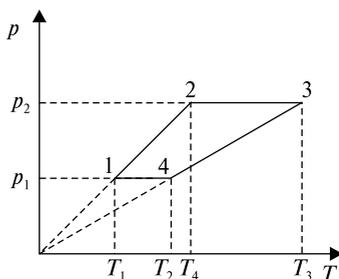


Рис. 2.13

2.3.33. Один моль идеального газа изотермически сжали, уменьшив вдвое объем. Чему равно изменение энтропии?

2.3.34. Один моль идеального одноатомного газа, находящегося в закрытом сосуде, нагрели, увеличив температуру вдвое. Найти изменение энтропии.

2.3.35. Найти изменение  $\Delta S$  энтропии при изобарном расширении двух молей идеального одноатомного газа. Объем газа при расширении увеличивается вдвое.

2.3.36. Найти изменение энтропии при политропическом расширении одного моля идеального двухатомного газа, когда объем увеличивается вдвое. Принять показатель политропы  $n = 2$ .

## ТЕМА 2.4 РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ И ЖИДКОСТИ. КАПИЛЛЯРНЫЕ ЯВЛЕНИЯ. ПОВЕРХНОСТНОЕ НАТЯЖЕНИЕ

Реальный газ — это газ, свойства которого в отличие от идеального газа зависят от взаимодействия молекул. Свойства реального газа описываются уравнением Ван-дер-Ваальса (для одного моля газа)

$$\left( p + \frac{a}{V_m^2} \right) (V_m - b) = RT, \quad (2.4.1)$$

где  $V_m$  — молярный объем,  $a$  и  $b$  — поправки Ван-дер-Ваальса, различные для различных газов.

Внутренняя энергия реального газа

$$U = \nu(c_V - a/V_m), \quad (2.4.2)$$

где  $\nu = \frac{m}{\mu}$  — количество вещества,  $c_V$  — молярная теплоемкость при постоянном объеме.

**Парообразование** — переход вещества из конденсированной среды (жидкой или твердой) в газовую. Различают следующие виды парообразования: испарение, кипение (см. ниже) и сублимацию — парообразование со свободной поверхности твердого тела.

**Испарение** — парообразование, происходящее при любой температуре со свободной поверхности жидкости. Испарение тем интенсивнее, чем больше свободная поверхность жидкости и чем меньше внешнее давление на свободную поверхность жидкости.

**Кипение** — переход жидкости в пар с образованием по всему объему жидкости быстро растущих пузырьков пара, которые всплывают на поверхность. Кипение начинается при температуре, при которой давление насыщенного пара в пузырьках сравнивается с давлением жидкости (следовательно, уменьшение внешнего давления ведет к понижению температуры кипения). В процессе кипения температура жидкости остается постоянной.

**Удельная теплота парообразования** — количество теплоты, необходимое для превращения при постоянной температуре 1 кг жидкости в пар.

**Насыщенный пар** — пар, находящийся в динамическом равновесии со своей жидкостью. Число молекул, переходящих из жид-

кости в пар в единицу времени, равно числу молекул пара, возвращающихся в жидкость за это же время.

**Зависимость давления и плотности насыщенного пара от температуры.** Давление (и плотность) насыщенного пара не зависит от объема, а зависит от температуры:  $p_0 = nkT$ ,  $n$  — концентрация пара,  $k$  — постоянная Больцмана. Давление насыщенного пара растет не только вследствие повышения температуры, но и вследствие увеличения концентрации молекул (плотности) пара.

**Зависимость температуры кипения от давления:** поскольку кипение начинается при температуре, при которой давление насыщенного пара в пузырьках сравнивается с давлением жидкости, то уменьшение внешнего давления ведет к понижению температуры кипения, а увеличение внешнего давления приводит к повышению температуры кипения.

**Критическая температура** — это температура, при которой исчезают различия в физических свойствах между жидкостью и ее насыщенным паром.

**Влажность.** Давление (или плотность) водяного пара, находящегося в воздухе при данной температуре, называют абсолютной влажностью. Вообще, влажность — это содержание водяного пара в воздухе.

**Относительная влажность** — отношение парциального давления  $p$  (или плотность  $\rho$ ) водяного пара, содержащегося в воздухе при данной температуре, к давлению  $p_{н.п}$  (или плотности  $\rho_{н.п}$ ) насыщенного пара при той же температуре, выраженное в процентах:  $\varphi = 100\% \cdot p/p_{н.п}$  (или  $100\% \cdot \rho/\rho_{н.п}$ ). (Парциальное давление водяного пара — это давление, которое производил бы водяной пар, если бы все остальные газы в данном объеме отсутствовали.) В табл. 1 приведены данные о давлении и плотности насыщенных водяных паров при разных температурах.

Таблица 1

**Давление и плотность насыщенных водяных паров**

| $t$ ,<br>°C | $p$ ,<br>мм рт.ст. | $\rho$ ,<br>г/м <sup>3</sup> | $t$ ,<br>°C | $p$ ,<br>мм рт.ст. | $\rho$ ,<br>г/м <sup>3</sup> | $t$ ,<br>°C | $p$ ,<br>мм рт.ст. | $\rho$ ,<br>г/м <sup>3</sup> |
|-------------|--------------------|------------------------------|-------------|--------------------|------------------------------|-------------|--------------------|------------------------------|
| 1           | 2                  | 3                            | 4           | 5                  | 6                            | 7           | 8                  | 9                            |
| -30         | 0,28               | 0,33                         | 0           | 4,58               | 4,84                         | 30          | 31,82              | 30,3                         |
| -29         | 0,31               | 0,37                         | 1           | 4,93               | 5,22                         | 31          | 33,70              | 32,1                         |
| -28         | 0,35               | 0,41                         | 2           | 5,29               | 5,60                         | 32          | 35,66              | 33,9                         |
| -27         | 0,38               | 0,46                         | 3           | 5,69               | 5,98                         | 33          | 37,73              | 35,7                         |
| -26         | 0,43               | 0,51                         | 4           | 6,10               | 6,40                         | 34          | 39,90              | 37,6                         |

| 1   | 2    | 3    | 4  | 5     | 6    | 7   | 8     | 9     |
|-----|------|------|----|-------|------|-----|-------|-------|
| -25 | 0,47 | 0,55 | 5  | 6,54  | 6,84 | 35  | 42,18 | 39,6  |
| -24 | 0,52 | 0,60 | 6  | 7,01  | 7,3  | 36  | 44,56 | 41,8  |
| -23 | 0,58 | 0,66 | 7  | 7,51  | 7,8  | 37  | 47,07 | 44,0  |
| -22 | 0,64 | 0,73 | 8  | 8,05  | 8,3  | 38  | 49,69 | 46,3  |
| -21 | 0,70 | 0,80 | 9  | 8,61  | 8,8  | 39  | 52,44 | 48,7  |
| -20 | 0,77 | 0,88 | 10 | 9,21  | 9,4  | 40  | 55,32 | 51,2  |
| -19 | 0,85 | 0,96 | 11 | 9,84  | 10,0 | 45  | 71,88 | 65,4  |
| -18 | 0,94 | 1,05 | 12 | 10,52 | 10,7 | 50  | 92,5  | 83,0  |
| -17 | 1,03 | 1,15 | 13 | 11,23 | 11,4 | 55  | 118,0 | 104,3 |
| -16 | 1,13 | 1,27 | 14 | 11,99 | 12,1 | 60  | 149,4 | 130   |
| -15 | 1,24 | 1,38 | 15 | 12,79 | 12,8 | 65  | 187,5 | 161   |
| -14 | 1,36 | 1,51 | 16 | 13,63 | 13,6 | 70  | 133,7 | 198   |
| -13 | 1,49 | 1,65 | 17 | 14,53 | 14,5 | 75  | 189,1 | 242   |
| -12 | 1,63 | 1,80 | 18 | 15,48 | 15,4 | 80  | 355,1 | 293   |
| -11 | 1,78 | 1,96 | 19 | 16,48 | 16,3 | 85  | 433,6 | 354   |
| -10 | 1,95 | 2,14 | 20 | 17,54 | 17,3 | 90  | 525,8 | 424   |
| -9  | 2,13 | 2,33 | 21 | 18,65 | 18,3 | 95  | 633,9 | 505   |
| -8  | 2,32 | 2,54 | 22 | 19,83 | 19,4 | 100 | 760,0 | 598   |
| -7  | 2,53 | 2,76 | 23 | 21,07 | 20,6 | 120 | 1489  | 1091  |
| -6  | 2,76 | 2,99 | 24 | 22,38 | 21,8 | 140 | 2710  | 1890  |
| -5  | 3,01 | 3,24 | 25 | 23,76 | 23,0 | 160 | 4636  | 3084  |
| -4  | 3,28 | 3,51 | 26 | 25,21 | 24,4 | 180 | 7521  | 4782  |
| -3  | 3,57 | 3,81 | 27 | 26,74 | 25,8 | 200 | 11664 | 7099  |
| -2  | 3,88 | 4,13 | 28 | 28,35 | 27,2 |     |       |       |
| -1  | 4,22 | 4,47 | 29 | 30,04 |      |     |       |       |

### Поверхностное натяжение

$$\sigma = \frac{F}{l}, \text{ или } \sigma = \frac{\Delta E}{\Delta S}, \quad (2.4.3)$$

где  $F$  — сила поверхностного натяжения, действующая на контур  $l$ , ограничивающий поверхность жидкости,  $\Delta E$  — поверхностная энергия, связанная с площадью поверхности  $\Delta S$  пленки.

При изменении площади пленки на  $\Delta S$  совершается работа  $\Delta A = \sigma \Delta S$ .

Добавочное давление, вызванное кривизной поверхности жидкости, определяется формулой Лапласа

$$\Delta p = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (2.4.4)$$

где  $R_1$  и  $R_2$  — радиусы кривизны двух взаимноперпендикулярных сечений поверхности жидкости. Радиус  $R$  считается положительным, если центр кривизны находится внутри жидкости (выпуклый мениск), и отрицательным, если центр кривизны находится вне жидкости (вогнутый мениск).

**Высота подъема жидкости в капиллярной трубке**

$$h = \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho g r}, \quad (2.4.5)$$

где  $\theta$  — краевой угол,  $r$  — радиус капилляра,  $\rho$  — плотность жидкости,  $g$  — ускорение свободного падения.

Давление внутри сферической поверхности жидкости радиусом  $R$ , обусловленное силами поверхностного натяжения,

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R}, \quad (2.4.6)$$

где  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения.

### Качественные задачи

2.4.1. Чем объясняется, что вечером после жаркого летнего дня в низкой местности наблюдается образование тумана?

2.4.2. Почему зимой заметно выделение тумана и инея при дыхании, а летом нет?

2.4.3. Испаряются ли твердые тела?

2.4.4. Имеют ли температуру плавления аморфные тела?

2.4.5. Перечислите отличительные свойства процессов кипения и испарения. Объясните, почему температура кипения зависит от давления и почему испарение приводит к охлаждению жидкости.

2.4.6. Коэффициент поверхностного натяжения мыльной пленки почти в два раза меньше, чем у чистой воды. Почему же мыльная вода образует такие прочные пузыри и пленки, какие у чистой воды получить нельзя?

2.4.7. За счет какой энергии возможны капиллярные явления?

2.4.8. Чем объясняется гигроскопичность некоторых тел (ваты, тканей, почвы)?

2.4.9. Для чего почву рекомендуется вспахивать и бороновать?

2.4.10. Поверхностный слой жидкости часто уподобляют растянутой резиновой пленке. В каком отношении эта аналогия не соответствует действительности?

2.4.11. Шарообразный стеклянный сосуд, на три четверти заполненный водой, привели в состояние невесомости. Что произойдет с водой? А если вместо воды взять ртуть?

2.4.12. Из нескольких сортов фильтровальной бумаги нужно выбрать тот, в котором поры меньше. Как это сделать, не используя никаких приборов?

2.4.13. В проволочное сито, все проволочки которого покрыты тонким слоем парафина, можно налить воду. Каким образом удерживается вода в сите? Почему вода протекает, если коснуться его снизу пальцем?

2.4.14. При каких условиях рост абсолютной влажности воздуха может сопровождаться уменьшением относительной влажности?

2.4.15. В какое время суток летом относительная влажность воздуха больше при одной и той же абсолютной влажности?

2.4.16. Почему жару переносить труднее при высокой влажности?

2.4.17. Из сильно кипящего чайника выбрасываются видимые клубы пара, которые появляются, однако, не у самого носика. Чем заполнен промежуток?

### Задачи с решениями

2.4.18. Некоторый газ количеством  $\nu = 0,25$  кмоль занимает объем  $V_1 = 1$  м<sup>3</sup>. При расширении газа до объема  $V_2 = 1,2$  м<sup>3</sup> была совершена работа против сил межмолекулярного взаимодействия  $A = 1,42$  кДж. Определить поправку  $a$ , входящую в уравнение Ван-дер-Ваальса.

*Решение.* Работа, совершаемая против сил межмолекулярного взаимодействия, равна

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p' dV,$$

где  $p' = \nu^2 a / V^2$  — внутреннее давление, обусловленное силами взаимодействия молекул. Таким образом,

$$A = \nu^2 a \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^2} = \nu^2 a \left( \frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right) = \frac{\nu^2 a (V_2 - V_1)}{V_1 V_2},$$

откуда

$$a = \frac{AV_1V_2}{v^2(V_2 - V_1)}.$$

Вычисляя, получим  $a = 0,136 \text{ Н} \cdot \text{м}^4 / \text{моль}^2$ .

$$\text{Ответ: } a = \frac{AV_1V_2}{v^2(V_2 - V_1)} = 0,136 \text{ Н} \cdot \text{м}^4 / \text{моль}^2.$$

2.4.19. Определить массу водяного пара  $m_{\text{п}}$ , находящегося в комнате объемом  $V = 30 \text{ м}^3$ , если относительная влажность воздуха равна  $\varphi = 70\%$ , а плотность пара при данной температуре  $\rho_{\text{н.п}} = 0,0048 \text{ кг/м}^3$ .

*Решение.* Из формулы относительной влажности  $\varphi = \frac{\rho_{\text{п}}}{\rho_{\text{н.п}}}$  плотность водяного пара  $\rho_{\text{п}} = \varphi \rho_{\text{н.п}}$ . Тогда масса пара

$$m_{\text{п}} = \rho_{\text{п}} V = \varphi \rho_{\text{н.п}} V = 0,7 \cdot 0,0048 \cdot 40 = 0,1344 \text{ кг.}$$

$$\text{Ответ: } m_{\text{п}} = \varphi \rho_{\text{н.п}} V = 0,1344 \text{ кг.}$$

2.4.20. В сообщающихся капиллярных трубках с диаметрами  $d_1 = 1 \text{ мм}$  и  $d_2 = 1,5 \text{ мм}$  разность уровней ртути  $\Delta h = 5 \text{ мм}$ . Определить поверхностное натяжение ртути. Смачивание считать полным.

*Решение.* Высота поднятия жидкости в капилляре  $h = \frac{2\sigma \cos\theta}{\rho g r}$ .

Тогда для каждой трубки  $h_1 = \frac{2\sigma \cos\theta}{\rho g r_1}$  и  $h_2 = \frac{2\sigma \cos\theta}{\rho g r_2}$ . Так как по условию смачивание полное, то  $\theta = 0$ , следовательно  $\cos\theta = 1$ . Тогда перепад высот в трубках

$$\Delta h = h_1 - h_2 = \frac{2\sigma}{\rho g} \left( \frac{2}{d_1} - \frac{2}{d_2} \right),$$

откуда  $\sigma = \frac{\rho g \Delta h d_1 d_2}{4(d_2 - d_1)} = 0,5 \text{ Н/м}$ .

$$\text{Ответ: } \sigma = \frac{\rho g \Delta h d_1 d_2}{4(d_2 - d_1)} = 0,5 \text{ Н/м.}$$

### Задачи без решений

2.4.21. Определить из уравнения Ван-дер-Ваальса  $(p + v^2 a / V^2) \times (V - vb) = \nu RT$  для одного моля реального газа критические параметры  $p_{\text{кр}}$ ,  $V_{\text{кр}}$ ,  $T_{\text{кр}}$  через поправки  $a$  и  $b$ .

2.4.22. Выразить поправки Ван-дер-Ваальса  $a$  и  $b$ , а также  $V_{кр}$  через критические параметры  $p_{кр}$  и  $T_{кр}$ .

2.4.23. Определить, во сколько раз отличается объем одного моля реального газа кислорода от объема одного моля идеального газа при нормальных условиях  $p = 101\,235$  Па,  $T = 273,15$  К. Для кислорода  $a = 0,136$  Па·м<sup>6</sup>/моль<sup>2</sup>,  $b = 3,16 \cdot 10^{-5}$  м<sup>3</sup>/моль.

2.4.24. Один моль идеального газа при нормальных условиях имеет следующие параметры:  $p_0 = 101\,235$  Па,  $T_0 = 273,15$  К,  $V_0 = 22,42 \cdot 10^{-3}$  м<sup>3</sup>. Пользуясь табл. 2, определить, какие из реальных газов, представленных в таблице, в количестве одного моля при данных давлении и объеме, имеют температуру, наиболее и наименее удаленную от  $T_0$ . (Составить программу для решения данной задачи на любом языке программирования.)

Таблица 2

**Постоянные Ван-дер-Ваальса**

| Вещество         | $a$ , Па·м <sup>6</sup> /моль <sup>2</sup> | $b$ , 10 <sup>-5</sup> м <sup>3</sup> /моль |
|------------------|--|---|
| N <sub>2</sub>   | 1,35                                       | 3,9   |
| Ar               | 1,3  | 3,2   |
| H <sub>2</sub> O | 5,47                                       | 2,7   |
| CO <sub>2</sub>  | 3,6  | 4,3   |
| O <sub>2</sub>   | 1,35                                       | 3,2   |
| H <sub>2</sub>   | 0,24                                       | 2,6   |

2.4.25. Определить максимальное давление  $p_{max}$  насыщающих водяных паров.

2.4.26. Кислород массой  $m = 100$  г расширяется от объема  $V_1 = 5$  л до объема  $V_2 = 10$  л. Определить работу межмолекулярных сил притяжения при этом расширении. Поправку  $a$  принять равной  $0,136$  Н·м<sup>4</sup>/моль<sup>2</sup>.

2.4.27. Вычислить вес водяных паров, содержащихся в сушилке размером  $V = 18 \times 6 \times 2,7$  м, и относительную влажность среды при температуре  $t_1 = 15$  °С и точке росы  $t_2 = 14$  °С.

2.4.28. Определить абсолютную и относительную влажности воздуха в помещении, если температура воздуха в нем  $18$  °С, а точка росы соответствует  $8$  °С.

2.4.29. Относительная влажность  $63\%$ , а температура воздуха  $24$  °С. На сколько градусов должна понизиться температура воздуха на улице, чтобы оконные стекла в помещении запотели?

2.4.30. Относительная влажность воздуха, поступающего от сушильной камеры в кондиционер, при температуре  $16$  °С равна

60%. Температура воздуха, вышедшего из кондиционера, понизилась до  $4\text{ }^{\circ}\text{C}$ , при этом выпала роса. Сколько водяного пара конденсировалось в  $1\text{ м}^3$  воздуха?

2.4.31. Относительная влажность воздуха в камере равна 85%. На сколько градусов должна понизиться температура воздуха, чтобы выпала роса? Температуру в камере считать равной  $5\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

2.4.32. Найти плотность насыщенных паров воды при температуре  $50\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

2.4.33. Какова масса водяных паров в  $V = 1\text{ м}^3$  воздуха в летний день при температуре  $30\text{ }^{\circ}\text{C}$  и относительной влажности  $\eta = 75\%$ ?

2.4.34. Воздух объемом  $V = 1\text{ м}^3$  находится при температуре  $t = 17\text{ }^{\circ}\text{C}$  и относительной влажности  $\eta = 50\%$ . Какова масса выпавшей росы, если, не меняя температуры воздуха, уменьшить его объем в  $n = 3$  раза?

2.4.35. Определить плотность водяного пара при температуре  $T = 300\text{ К}$ , если относительная влажность равна  $\eta = 30\%$ , а плотность насыщающего пара при этой температуре  $\rho_{\text{н.п}} = 0,026\text{ кг/м}^3$ .

2.4.36. Определить парциальное давление водяного пара во влажном воздухе при температуре  $T = 300\text{ К}$ , если относительная влажность воздуха равна  $\eta = 30\%$ , а плотность насыщающего водяного пара при этой температуре  $\rho_{\text{н.п}} = 0,026\text{ кг/м}^3$ .

2.4.37. Определить плотность насыщающего водяного пара при  $t = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$ , если давление насыщающего пара при этой температуре составляет  $p_{\text{н.п}} = 0,63\text{ кПа}$ .

2.4.38. В сосуде объемом  $V = 1\text{ л}$  находится смесь газов метана  $\text{CH}_4$  и кислорода  $\text{O}_2$ , имеющих равные парциальные давления при температуре  $T = 300\text{ К}$ . Масса смеси  $m = 96\text{ мг}$ . Смесь возгорается:  $\text{CH}_4 + 2\text{O}_2 = \text{CO}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$ , после чего охлаждается до первоначальной температуры. Определить установившееся давление в сосуде, если давление насыщенных паров воды при температуре  $300\text{ К}$  равно  $27\text{ мм рт.ст.}$

2.4.39. Найти добавочное давление  $p$  внутри мыльного пузыря диаметром  $d = 10\text{ см}$ . Определить также работу  $A$ , которую нужно совершить, чтобы выдуть этот пузырь. Поверхностное натяжение мыльной воды  $\sigma = 40\text{ мН/м}$ .

2.4.40. Определить изменение свободной энергии  $\Delta U$  поверхности мыльного пузыря при изотермическом увеличении его объема от  $V_1 = 10\text{ см}^3$  до  $V_2 = 2V_1$ . Поверхностное натяжение мыльной воды  $\sigma = 40\text{ мН/м}$ .

2.4.41. Определить работу  $A$ , необходимую для распыления жидкости массой  $m = 1$  г на капельки диаметром  $d = 2$  мкм. Плотность жидкости можно считать равной  $\rho = 980$  кг/м<sup>3</sup>, а поверхностное натяжение  $\sigma = 45$  мН/м.

2.4.42. Из вертикальной трубки внутренним радиусом  $r = 1$  мм вытекают капли воды. Найти радиус капли в момент отрыва. Каплю считать сферической. Диаметр шейки капли в момент отрыва считать равным внутреннему диаметру трубки. Плотность воды  $\rho = 1$  г/см<sup>3</sup>, поверхностное натяжение  $\sigma = 0,073$  Н/м.

2.4.43. На сколько нагреется капля ртути, полученная от слияния двух капель радиусом  $r = 1$  мм каждая? Плотность ртути  $\rho = 13,6$  г/см<sup>3</sup>, поверхностное натяжение  $\sigma = 0,5$  Н/м, удельная теплоемкость  $c = 138$  Дж/(кг·К).

2.4.44. Какую работу против сил поверхностного натяжения надо совершить, чтобы разбить сферическую каплю ртути радиусом  $r = 3$  мм на две одинаковые капли? Поверхностное натяжение ртути принять равным  $\sigma = 0,5$  Н/м.

2.4.45. Какую работу против сил поверхностного натяжения надо совершить, чтобы увеличить вдвое объем мыльного пузыря радиусом  $r = 1$  см? Коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора принять равным  $\sigma = 0,043$  Н/м.

2.4.46. Давление воздуха внутри мыльного пузыря на  $\Delta p = 133,3$  Па больше атмосферного. Чему равен диаметр пузыря? Поверхностное натяжение мыльного раствора принять равным  $\sigma = 0,043$  Н/м.

2.4.47. В сосуд с ртутью опущен открытый капилляр, внутренний диаметр которого  $d = 3$  мм. Разность уровней ртути в сосуде и в капилляре  $\Delta h = 3,7$  мм. Чему равен радиус кривизны ртутного мениска в капилляре? Плотность ртути  $\rho = 13,6$  г/см<sup>3</sup>, поверхностное натяжение  $\sigma = 0,5$  Н/м.

2.4.48. На какую высоту  $h$  поднимется бензол в капилляре, внутренний диаметр которого равен  $d = 1$  мм? Смачивание считать полным. Плотность бензола и его поверхностное натяжение соответственно равны  $\rho = 0,88$  г/см<sup>3</sup> и  $\sigma = 0,03$  Н/м.

2.4.49. Какую силу надо приложить, чтобы оторвать друг от друга (без сдвига) две смоченные фотопластинки размером  $S = 9 \times 12$  см? Толщину водяной прослойки между пластинками считать равной  $d = 0,05$  мм. Смачивание полное. Поверхностное натяжение воды принять равным  $\sigma = 0,073$  Н/м.

2.4.50. Насекомое водомерка бежит по поверхности воды. Найти массу водомерки, если известно, что под каждой из шести лапок насекомого образуется ямка, равная полусфере радиусом  $R = 0,1$  мм. Поверхностное натяжение воды принять равным  $\sigma = 0,073$  Н/м.

2.4.51. После покрытия слоем парафина радиус отверстия решета стал равен  $R = 1,5$  мм. Приняв во внимание, что вода не смачивает парафин, определить высоту  $h$  слоя воды, который можно носить в решете так, чтобы вода не пролилась через отверстия.

2.4.52. Оценить, каким должно быть ускорение свободного падения  $g$  на планете, чтобы человек мог ходить по воде в обуви с несмачиваемыми водой подошвами.

# Раздел 3

## ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

### ТЕМА 3.1

#### СИЛЫ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Метод решения задач по теме 3.1 основан на использовании закона Кулона, а также некоторых его следствий. Согласно закону Кулона сила  $\vec{F}$ , действующая на точечный заряд  $q_0$  со стороны точечного заряда  $q_1$ , равна

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q_1}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_0 - \vec{r}_1), \quad (3.1.1)$$

где  $\vec{r}_0$  и  $\vec{r}_1$  — соответственно радиус-векторы точек расположения зарядов  $q_0$  и  $q_1$ ,  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная, равная  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м. Заметим, что в (3.1.1) разность  $|\vec{r}_0 - \vec{r}_1|$  определяет расстояние между зарядами, а отношение

$$\frac{\vec{r}_0 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_1|}$$

представляет собой единичный вектор, направленный вдоль прямой, соединяющей заряды. Если заряд  $q_0$  находится в поле нескольких точечных зарядов  $q_i$  с радиус-векторами  $\vec{r}_i$ , то действующая на него результирующая сила  $\vec{F}$  может быть найдена прямым суммированием (принцип суперпозиции):

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_0 q_i}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_i|^3} (\vec{r}_0 - \vec{r}_i). \quad (3.1.2)$$

Из (3.1.2) следует, что напряженность поля  $\vec{E}$  в точке  $r_0$ , определяющая силу, которая действует на единичный положительный точечный заряд, равна

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_i|^3} (\vec{r}_0 - \vec{r}_i). \quad (3.1.3)$$

При непрерывном распределении зарядов суммирование в (3.1.2) и (3.1.3) должно быть заменено интегрированием. В частности, результирующая напряженность  $\vec{E}$  будет определяться выражением

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\vec{r}_0 - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_i|^3} dq. \quad (3.1.4)$$

Если имеет место непрерывное распределение зарядов по объему, поверхности или тонкой нити, то  $dq$  следует полагать равным  $\rho dV$ ,  $\sigma dS$ ,  $\tau dl$ , где  $\rho$ ,  $\sigma$ ,  $\tau$  — соответственно объемная, поверхностная и линейная плотности заряда, а  $dV$ ,  $dS$ ,  $dl$  — элементы объема, площади и длины, и интегрирование проводить по объему, поверхности или длине соответственно.

В тех случаях, когда непрерывное распределение зарядов обладает плоской, осевой или центральной симметрией, для нахождения напряженности электростатического поля целесообразно использовать теорему Гаусса, согласно которой поток вектора напряженности через замкнутую поверхность определяется количеством заряда, заключенным внутри этой поверхности:

$$\int_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \int_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V dq, \quad (3.1.5)$$

где  $d\vec{S}$  — векторный элемент поверхности, направленный по внешней нормали к поверхности  $dS$ :  $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$ ,  $\vec{E}$  — вектор напряженности электрического поля в точках площадки  $dS$ ,  $\vec{n}$  — единичный вектор, нормальный к площадке  $dS$ ,  $E_n = E \cos(\vec{E}, \vec{n})$  — проекция вектора  $\vec{E}$  на направление вектора  $\vec{n}$ .

**Поток вектора напряженности электрического поля  $N$  через поверхность  $S$  равен**

$$N = \int_S E_n dS.$$

С помощью теоремы Гаусса легко установить, что напряженность поля бесконечной равномерно заряженной плоскости

$$E = \sigma/2\epsilon_0, \quad (3.1.6)$$

а напряженность поля бесконечной равномерно заряженной нити

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{x}, \quad (3.1.7)$$

где  $x$  — расстояние от нити.

## Качественные задачи

3.1.1. Электрически нейтральная капля разделилась на две. Первая из них обладает положительным зарядом  $+Q$ . Каким зарядом обладает вторая капля?

3.1.2. Почему при определении напряженности электрического поля используется пробный заряд?

3.1.3. Какое направление (из указанных на рис. 3.1) имеет в точке  $A$  вектор напряженности электрического поля двух одинаковых точечных электрических зарядов, расположенных на равном расстоянии относительно точки  $A$ ?

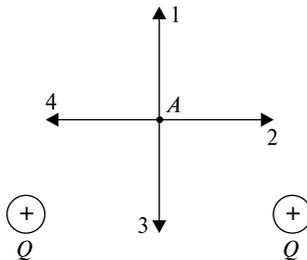


Рис. 3.1

3.1.4. Какое направление (из указанных на рис. 3.1) имеет вектор силы, действующей на отрицательный заряд, помещенный в точку  $A$ , расположенную на равном расстоянии относительно зарядов?

3.1.5. Два маленьких шарика с одноименными зарядами подвешены на изолирующих нитях одинаковой длины  $l$  в одной точке. Что произойдет с шариками в условиях невесомости?

3.1.6. Изменится ли напряженность однородного электрического поля между двумя разноименно заряженными плоскостями, если расстояние между ними увеличить в два раза?

3.1.7. Когда электроскоп заряжают, его листочки отталкиваются друг от друга и располагаются под углом. Какая сила компенсирует электрическое отталкивание, не давая листочкам расходиться еще дальше?

3.1.8. Почему силовые линии никогда не пересекаются?

3.1.9. Объясните, что будет происходить с электрическим диполем в неоднородном электрическом поле?

3.1.10. Отрицательный точечный заряд помещен строго посередине между двумя равными по величине положительными то-

чечными зарядами. Крайние заряды закреплены. Отрицательный заряд может двигаться только вдоль прямой, соединяющей крайние заряды. Как он будет двигаться? Находится ли он в равновесии? Если да, то какого типа это равновесие?

3.1.11. Положительный точечный заряд помещен строго посередине между двумя равными по величине положительными точечными зарядами. Крайние заряды закреплены. Средний заряд может двигаться только вдоль прямой, соединяющей крайние заряды. Как он будет двигаться?

3.1.12. Изменится ли напряженность однородного электрического поля между двумя разноименно заряженными плоскостями, если расстояние между ними увеличить в два раза?

3.1.13. В центре окружности радиусом  $R$  находится заряд  $+Q$ . Как изменится циркуляция вектора электрической напряженности по этой окружности, если заряд сместить на расстояние  $a = R/2$ ?

3.1.14. Между горизонтально расположенными пластинами большого плоского конденсатора подвешен на нити маленький металлический шарик, заряженный положительно. Как изменится период колебаний такого маятника, если верхнюю пластину конденсатора зарядить положительно? отрицательно?

3.1.15. Две бесконечные пластины расположены под прямым углом друг к другу и несут равномерно распределенные по площади положительные заряды с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Начертить картину силовых линий.

3.1.16. Почему птицы слетают с проводов высокого напряжения, когда включают напряжение?

3.1.17. Если поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность равен нулю, означает ли это, что напряженность электрического поля равна нулю во всех точках поверхности? Справедливо ли обратное: если  $E = 0$  во всех точках поверхности, то поток через замкнутую поверхность равен нулю?

3.1.18. Обусловлена ли напряженность электрического поля  $E$ , фигурирующая в теореме Гаусса  $\int E dS = Q/\epsilon_0$ , только зарядом  $Q$ ? А поток?

3.1.19. Точечный заряд окружен сферической поверхностью радиусом  $R$ . Как изменится значение потока вектора напряженности  $N_E$  через поверхность, окружающую заряд, если сферу заменить кубом со стороной  $R/2$ ? Заряд находится в центре куба.

3.1.20. Будут ли равны потоки вектора напряженности электрического поля от точечного заряда  $+Q$  через замкнутую сферическую поверхность радиусом  $R = 0,1$  м и через куб с ребром  $l = 0,1$  м? Почему? Заряд и поверхности расположены так, как изображено на рис. 3.2.

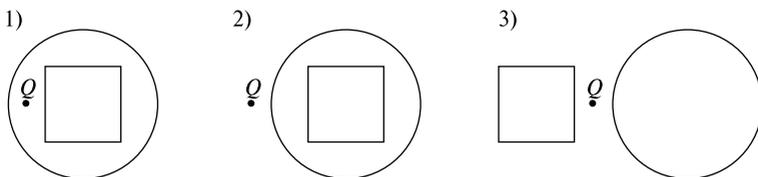


Рис. 3.2

3.1.21. Чему равен поток вектора напряженности электрического поля  $N$  через поверхности, изображенные на рис. 3.3?

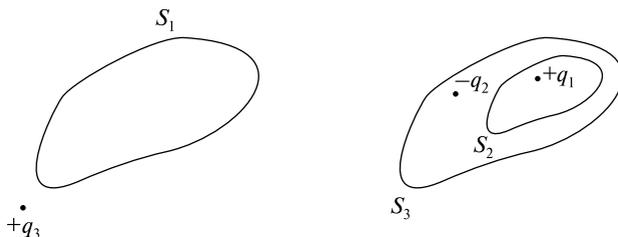


Рис. 3.3

3.1.22. Чему равен поток вектора напряженности электрического поля  $N_E$  через одну грань куба от заряда  $+Q$ , помещенного в центр куба?

3.1.23. В центре замкнутой сферической поверхности радиусом  $R$  расположен заряд  $+q$ . Если заряд сместить на расстояние  $a = R/2$ , то изменятся ли: а) напряженность электрического поля для точек поля, принадлежащих этой поверхности; б) поток вектора напряженности электрического поля через заданную поверхность?

3.1.24. Что Вы можете сказать о величине потока вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность, окружающую электрический диполь?

3.1.25. Можно ли применить теорему Гаусса для вычисления напряженности электрического поля диполя?

3.1.26. Напряженность электрического поля  $E$  равна нулю во всех точках замкнутой поверхности. Значит ли это, что внутри нет зарядов? Ответ обоснуйте или приведите пример.

3.1.27. Напряженность электрического поля  $E$  равна нулю во всех точках замкнутой поверхности. Значит ли это, что внутри нее нет точечных зарядов? Ответ обоснуйте или приведите пример.

3.1.28. Если суммарный заряд внутри замкнутой поверхности равен нулю, то обязательно ли равна нулю напряженность поля во всех точках поверхности?

### Задачи с решениями

3.1.29. Два точечных заряда  $q_1 = 1$  мкКл и  $q_2 = -1$  мкКл расположены на расстоянии  $l = 0,1$  м. Определить силу  $F$ , действующую на точечный заряд  $q_0 = 0,1$  мкКл, удаленный на расстояния  $x_1 = 0,06$  м от первого и  $x_2 = 0,08$  м от второго зарядов.

*Решение.* Согласно (3.1.2) на заряд  $q_0$  будет действовать сила  $\vec{F}$ , определяемая векторной суммой

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \quad (1)$$

где  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  — силы, действующие со стороны зарядов  $q_1$  и  $q_2$ . Направление сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  показано на рис. 3.4. Абсолютная величина сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  определяется выражениями

$$F_1 = q_0 q_1 / 4\pi\epsilon_0 x_1^2, \quad (2)$$

$$F_2 = q_0 q_2 / 4\pi\epsilon_0 x_2^2. \quad (3)$$

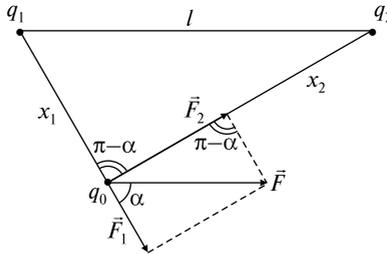


Рис. 3.4

Абсолютная величина силы  $\vec{F}$  может быть найдена по теореме косинусов

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}, \quad (4)$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ .

Из треугольника со сторонами  $l$ ,  $x_1$ ,  $x_2$  находим

$$l^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \cos(\pi - \alpha) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 \cos \alpha.$$

Оценим угол  $\alpha$ :

$$\cos \alpha = \frac{l^2 - x_1^2 - x_2^2}{2x_1x_2} = \frac{0,01 - 0,0036 - 0,0064}{2 \cdot 0,06 \cdot 0,08} = 0,$$

следовательно,  $\alpha = \pi/2$  и

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{\left(\frac{q_0q_1}{4\pi\epsilon_0x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{q_0q_2}{4\pi\epsilon_0x_2^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{q_0\sqrt{q_1^2x_2^4 + q_2^2x_1^4}}{4\pi\epsilon_0x_1^2x_2^2} = 0,286 \text{ Н.}$$

$$\text{Ответ: } F = \frac{q_0\sqrt{q_1^2x_2^4 + q_2^2x_1^4}}{4\pi\epsilon_0x_1^2x_2^2} = 0,286 \text{ Н.}$$

3.1.30. В одной плоскости с бесконечно длинной равномерно заряженной нитью ( $\tau = 2 \text{ мкКл/м}$ ) расположен стержень под углом  $\alpha = 30^\circ$  к нити. Стержень считать заряженным равномерно зарядом  $q = 2,4 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$ , длина стержня  $l_0 = 0,08 \text{ м}$ . Расстояние от нити до ближайшей точки стержня  $x_0 = 0,04 \text{ м}$ . Определить силу  $F$ , действующую на стержень.

*Решение.* Так как стержень имеет конечную длину  $l_0$ , то его необходимо разбить на элементарно малые элементы  $dl$ , к которым можно применить закон Кулона.

Пусть малый элемент  $dl$  находится на расстоянии  $x$  от нити и на расстоянии  $l$  от нижнего конца стержня (рис. 3.5). Сила, действующая на этот элемент,

$$dF = E \cdot dq, \quad (1)$$

где  $E = \tau/(2\pi\epsilon_0x)$  — напряженность поля нити на расстоянии  $x$  от нее, а  $dq = qdl/l_0$  — заряд рассматриваемого элемента, причем элемент  $dl$  настолько мал, что поле в его пределах можно считать постоянным.

Следовательно,

$$dF = \tau q dl / 2\pi\epsilon_0 x l_0. \quad (2)$$

Так как вектор напряженности  $\vec{E}$  перпендикулярен длине нити, то при переходе от одного элемента  $dl$  к другому направление элементарных сил  $d\vec{F}$  меняться не будет и, следовательно, результи-

рующая сила, согласно (3.1.4), может быть найдена непосредственным интегрированием (2) по всей стержню.

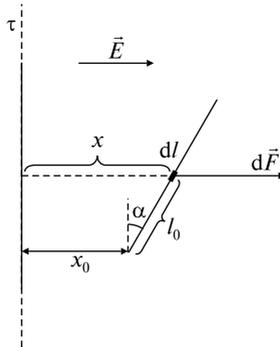


Рис. 3.5

Из рисунка видно, что  $x = x_0 + l \sin \alpha$ ,  $dx = dl / \sin \alpha$ , отсюда  $dl = dx / \sin \alpha$ . (3)

Подставляя (3) в (2) и интегрируя по всей стержню, т.е. в пределах от  $x_0$  до  $x_0 + l_0 \sin \alpha$ , получаем

$$F = \frac{\tau q}{2\pi\epsilon_0 l_0 \sin \alpha} \int_{x_0}^{x_0 + l_0 \sin \alpha} \frac{dx}{x} = \frac{\tau q}{2\pi\epsilon_0 l_0 \sin \alpha} \ln \frac{x_0 + l_0 \sin \alpha}{x_0} = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ Н.}$$

Ответ:  $F = \frac{\tau q}{2\pi\epsilon_0 l_0 \sin \alpha} \ln \frac{x_0 + l_0 \sin \alpha}{x_0} = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ Н.}$

3.1.31. Кольцо радиусом  $R$  равномерно заряжено зарядом  $Q$ . Определить напряженность поля  $E$  в точке, находящейся на перпендикуляре к кольцу, проходящем через его центр, на расстоянии  $h$  от плоскости кольца.

*Решение.* Так как заряд распределен по кольцу, то закон Кулона в виде (3.1.1) использовать нельзя, и кольцо следует разбить на элементарные участки  $dl$ , которые в силу равномерного распределения заряда по кольцу несут на себе элементарный заряд

$$dQ = \frac{Q}{2\pi R} dl. \quad (1)$$

Тогда согласно (3.1.3) напряженность поля  $dE$ , создаваемого элементарным участком  $dl$ ,

$$dE = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r^2}. \quad (2)$$

Однако  $dE$  — это абсолютное значение вектора напряженности поля, создаваемого элементарным зарядом  $dQ$ . Поэтому определим проекции этого вектора  $d\vec{E}$  на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и только после этого проинтегрируем соответствующие проекции элементарных напряженностей  $dE_x$ ,  $dE_y$ ,  $dE_z$ .

Из рис. 3.6 видно, что  $dE_z = dE \cos \beta$ ,  $r^2 = R^2 + h^2$  и, учитывая (1), запишем

$$E_z = \int dE \cos \beta = \int \frac{Q dl}{4\pi\epsilon_0\epsilon \cdot 2\pi R(R^2 + h^2)^{3/2}} \cos \beta. \quad (3)$$

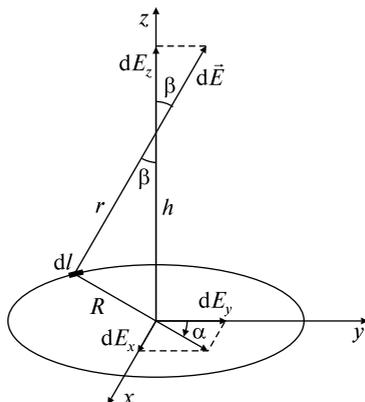


Рис. 3.6

Так как  $\cos \beta = h/r = h/(R^2 + h^2)^{1/2}$ , а элемент дуги  $dl$  связан с поворотом на элементарный угол  $d\alpha$  соотношением  $dl = R d\alpha$ , окончательно получим

$$\begin{aligned} E_z &= \int_0^{2\pi} \frac{QhR d\alpha}{4\pi\epsilon_0\epsilon \cdot 2\pi(R^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{Qh}{4\pi\epsilon_0\epsilon \cdot 2\pi(R^2 + h^2)^{3/2}} \alpha \Big|_0^{2\pi} = \\ &= \frac{Qh}{4\pi\epsilon_0\epsilon(R^2 + h^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\sin \beta = R/(R^2 + h^2)^{1/2}$ , найдем проекцию вектора  $E_x$  на ось  $x$ :

$$E_x = \int_{\text{по кольцу}} dE \sin \beta \sin \alpha = \int_{\text{по кольцу}} \frac{Q dl R \sin \alpha}{4\pi\epsilon_0\epsilon \cdot 2\pi(R^2 + h^2)^{3/2}} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{2\pi} \frac{QR \sin \alpha d\alpha}{4\pi\epsilon_0\epsilon \cdot 2\pi(R^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{QR}{4\pi\epsilon_0\epsilon \cdot 2\pi(R^2 + h^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \sin \alpha d\alpha = \\
 &= \frac{QR}{4\pi\epsilon_0\epsilon \cdot 2\pi(R^2 + h^2)^{3/2}} \cos \alpha \Big|_0^{2\pi} = 0.
 \end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что проекция вектора напряженности на ось  $y$  также равна  $E_y = 0$ .

$$\text{Следовательно, } E_x = E_y = 0; E_z = E = \frac{Qh}{4\pi\epsilon_0\epsilon(R^2 + h^2)^{3/2}}.$$

$$\text{Ответ: } E_x = E_y = 0; E_z = E = \frac{Qh}{4\pi\epsilon_0\epsilon(R^2 + h^2)^{3/2}}.$$

3.1.32. В вакууме образовалось скопление зарядов в форме шара радиусом  $R$  с постоянной объемной плотностью  $\rho$ . Найти напряженность поля  $E$  в точках, лежащих внутри и вне шара.

*Решение.* В данном случае непрерывное распределение зарядов обладает центральной симметрией, поэтому для нахождения напряженности поля  $E$  воспользуемся теоремой Гаусса (3.1.5).

Рассмотрим вначале точки, лежащие внутри заряженного шара. В качестве поверхности интегрирования  $S_1$  выбираем сферу радиусом  $r_1$ , concentрическую заряженному шару (рис. 3.7, а). Тогда

$$\oint_{S_1} \vec{E}_1 d\vec{S} = \int_{S_1} E_1 dS \cos \alpha = E_1 \int_{S_1} dS = E_1 \cdot 4\pi r_1^2.$$

Здесь мы учли, что  $\cos \alpha = 1$  ( $\alpha = 0$ ), так как положительная нормаль  $\vec{n}_1$  к поверхности  $S_1$  совпадает с направлением вектора напряженности  $\vec{E}_1$ .

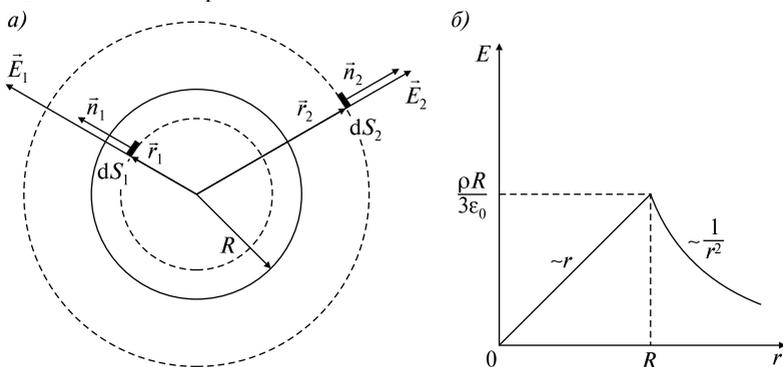


Рис. 3.7

Такая сфера включает в себе заряд  $q_1 = 4\pi r_1^3 \rho / 3$ . Используя (3.1.5), запишем  $E_1 \cdot 4\pi r_1^2 = 4\pi r_1^3 \rho / 3\epsilon_0$ . С учетом того, что  $r_1$  было выбрано произвольно ( $r_1 < R$ ), окончательно получим напряженность  $E_1$  внутри заряженного по объему шара:

$$E_1 = \rho r / 3\epsilon_0.$$

Аналогично поступаем для точек, лежащих на сфере с радиусом  $r_2 > R$ , т.е.

$$\oint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = \int_{S_2} E_2 \, dS \cos 0 = E_2 \int_{S_2} dS = E_2 \cdot 4\pi r_2^2.$$

Однако при  $r_2 > R$  внутрь произвольной сферы попадает весь заряд  $q$ , создающий поле, следовательно,  $E_2 \cdot 4\pi r_2^2 = \rho \cdot 4\pi R^3 / 3\epsilon_0$ . Так как  $r_2$  выбрано произвольно ( $r_2 > R$ ), то

$$E_2 = \rho R^3 / 3\epsilon_0 r^2.$$

При значениях  $r_1 = r_2 = R$  напряженность  $E = \rho R / 3\epsilon_0$ ; следовательно, в точке  $r = R$  вектор напряженности  $E$  не терпит разрыва, а имеет конечное значение.

На рис. 3.7, б изображен график зависимости величины напряженности поля  $E$  заряженного по объему шара от расстояния  $r$ .

*Ответ:*  $E_1 = \rho r / 3\epsilon_0$ ,  $E_2 = \rho R^3 / 3\epsilon_0 r^2$ .

### Задачи без решений

3.1.33. В центр квадрата, в вершинах которого находится по заряду  $q = 2 \cdot 10^{-9}$  Кл, помещен отрицательный заряд. Найти величину этого заряда  $Q$ , если результирующая сила  $F$ , действующая на каждый заряд  $q$ , равна нулю.

3.1.34. Вычислить, чему равна напряженность поля  $E$  равномерно заряженной бесконечной плоскости. Поверхностная плотность заряда  $\sigma$ .

3.1.35. Две бесконечные параллельные пластины равномерно заряжены с поверхностной плотностью заряда  $\sigma_1 = 10^{-2}$  мкКл/м<sup>2</sup> и  $\sigma_2 = -3 \cdot 10^{-2}$  мкКл/м<sup>2</sup>. Какова сила взаимодействия  $F/S$ , приходящаяся на единицу площади пластин?

3.1.36. Две параллельные, бесконечно длинные прямые нити несут заряд, равномерно распределенный по длине с линейной плотностью  $\tau_1 = 0,1$  мкКл/м и  $\tau_2 = 0,2$  мкКл/м. Определить силу

взаимодействия  $F/l$ , приходящуюся на единицу длины нити, если расстояние между нитями  $r = 0,1$  м.

3.1.37. Два точечных заряда  $q_1 = 2q$  и  $q_2 = -q$  находятся на расстоянии  $d$  друг от друга. Найти положение точки на прямой, проходящей через эти заряды, в которой  $E_j = 0$ .

3.1.38. Две бесконечно длинные равномерно заряженные нити расположены параллельно друг к другу на расстоянии  $a = 0,1$  м. Найти геометрическое место точек, где результирующая напряженность поля равна нулю, если нити заряжены с линейными плотностями  $\tau_1 = 4 \cdot 10^{-7}$  Кл/м и  $\tau_2 = 2 \cdot 10^{-7}$  Кл/м.

3.1.39. В плоском горизонтально расположенном конденсаторе заряженная капелька ртути находится в равновесии при напряженности электрического поля  $E = 6 \cdot 10^4$  В/м. Заряд капли  $q = 8 \cdot 10^{-19}$  Кл. Найти радиус  $r$  капли. Плотность ртути  $\rho = 13,6 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

3.1.40. Два одинаковых шарика массой  $m = 5 \cdot 10^{-3}$  кг подвешены на двух нитях так, что их поверхности соприкасаются. Какой заряд  $q_0$  нужно сообщить шарикам, чтобы натяжение нити стало  $T = 0,098$  Н? Расстояние от точки подвеса до центра шарика  $l = 0,1$  м.

3.1.41. Вычислить напряженность электрического поля  $E$  внутри и вне конденсатора, поверхностная плотность заряда пластин которого равна  $\sigma$ .

3.1.42. Вычислить, чему равна напряженность поля  $E$  вблизи поверхности металлического проводника, заряженного с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ ?

3.1.43. Определить напряженность поля  $E$  внутри и вне безграничного плоского слоя толщиной  $d$ , в котором равномерно распределен положительный заряд с объемной плотностью  $\rho$ ?

3.1.44. Плоская квадратная пластина со стороной  $a = 0,1$  м находится на некотором расстоянии от бесконечной, равномерно заряженной плоскости ( $\sigma = 1$  мкКл/м<sup>2</sup>). Плоскость пластины составляет угол  $\beta = 30^\circ$  с линиями поля. Найти поток  $N_E$  вектора напряженности через эту пластину.

3.1.45. К бесконечной вертикальной заряженной плоскости на непроводящей нити прикреплен одноименно заряженный шарик массой  $m = 4 \cdot 10^{-5}$  кг с зарядом  $q = 6,67 \cdot 10^{-10}$  Кл. Натяжение нити, на которой висит шарик, равно  $T = 4,9 \cdot 10^{-4}$  Н. Найти поверхностную плотность заряда  $\sigma$  плоскости.

3.1.46. Диск радиусом  $R$  заряжен равномерно с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Определить силу  $F$ , действующую на заряд  $q_0$ , помещенный в точке, находящейся на перпендикуляре к диску, проходящем через его центр, на расстоянии  $h$  от диска.

3.1.47. Тонкий стержень длиной  $l_0 = 0,1$  м равномерно заряжен положительным зарядом  $Q = 10^{-7}$  Кл. Найти силу  $F$ , действующую на точечный заряд  $q = 2 \cdot 10^{-9}$  Кл, расположенный на продолжении стержня на расстоянии  $x_0 = 0,2$  м от него. Найти напряженность поля  $E(x)$  в точках, лежащих на продолжении стержня, как функции расстояния  $x$  от стержня.

3.1.48. В центре полукольца радиусом  $R = 0,05$  м, по которому равномерно распределен заряд  $Q = 3 \cdot 10^{-7}$  Кл, расположен точечный заряд  $q = 1,5 \cdot 10^{-9}$  Кл. Найти силу  $F$ , действующую на точечный заряд со стороны полукольца.

3.1.49. Две концентрические металлические заряженные сферы радиусом  $R_1 = 0,06$  м и  $R_2 = 0,10$  м несут соответственно заряды  $q_1 = 1$  нКл и  $q_2 = -0,5$  нКл. Найти напряженности поля  $E_1$ ,  $E_2$  и  $E_3$  в точках, отстоящих от центра сфер на расстояниях  $r_1 = 0,05$  м,  $r_2 = 0,09$  м и  $r_3 = 0,15$  м.

3.1.50. Вычислить напряженность электрического поля  $E$  между двумя коаксиальными металлическими цилиндрами. Заряд, приходящийся на каждую единицу длины цилиндра, равняется  $\tau$ .

3.1.51. Заряд с постоянной объемной плотностью  $\rho$  распределен в виде тонкого длинного цилиндра радиусом  $R$ . Найти напряженность поля  $E$  в точках, лежащих внутри и вне цилиндра.

### ТЕМА 3.2. РАБОТА СИЛ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ. ПОТЕНЦИАЛ

Из определения напряженности электростатического поля  $\vec{E}$  следует, что работа сил поля  $A_{12}$  по перемещению заряда  $q$  из точки 1 в точку 2 по контуру  $l$

$$A_{12} = \int_1^2 F_l dl = q \int_1^2 E_l dl. \quad (3.2.1)$$

Интеграл, стоящий в правой части (3.2.1), равен разности потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$  между рассматриваемыми точками

$$\int_1^2 E_l dl = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (3.2.2)$$

Таким образом, работу сил поля  $A_{12}$  можно найти из формулы

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (3.2.1^*)$$

Для точки 2, удаленной на бесконечность, потенциал  $\varphi_2$  будем считать равным нулю. Тогда работа по перемещению единичного положительного заряда из данной точки 1 в бесконечность называется равной  $\varphi_1$ .

Если поле создано одним зарядом  $q_1$ , то потенциал точки поля, удаленной от заряда на расстояние  $|\vec{r}_0 - \vec{r}_1|$ ,

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_1|}, \quad (3.2.3)$$

где  $\vec{r}_0$  — радиус-вектор рассматриваемой точки поля,  $\vec{r}_1$  — радиус-вектор, характеризующий положение заряда  $q_1$ .

Для вычисления потенциала поля нескольких зарядов  $q_i$ , положение которых характеризуется радиус-векторами  $\vec{r}_i$ , полезно использовать свойство аддитивности потенциала. Тогда потенциал в точке  $\vec{r}_0$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_i|}. \quad (3.2.4)$$

При непрерывном распределении зарядов суммирование в (3.2.4) должно быть заменено интегрированием.

В ряде случаев полезным бывает использование дифференциального соотношения, определяющего связь между напряженностью поля и потенциалом:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi \quad (3.2.5)$$

или

$$|\vec{E}| = -d\varphi/dn, \quad (3.2.6)$$

где направление  $\vec{n}$  совпадает с нормалью к эквипотенциальной поверхности.

### Качественные задачи

3.2.1. На рис. 3.8 дана картина расположения эквипотенциальных поверхностей электростатического поля. Известно также, что  $\varphi_1 > \varphi_2$ . Каково примерное направление силовых линий этого поля? Определите, в какой области напряженность поля больше?

3.2.2. Электрическое поле создано точечным зарядом  $+q$  (рис. 3.9). Определите работу  $A$ , совершаемую силами поля при перемещении некоторого заряда из точки  $D$  в точку  $B$ . Сравните работы по перемещению того же заряда на участках  $DC$  и  $BC$ .

3.2.3. В электрическом поле неподвижного точечного заряда  $+Q$  переносят малый заряд  $-q$  из точки  $M$  в точку  $N$  по траекториям 1, 2 и 3. Точки  $M$  и  $N$  находятся на одинаковом расстоянии от заряда  $+Q$  (рис. 3.10). В каком случае работа сил электрического поля будет наибольшей?

3.2.4. На упругий шарик  $A$ , несущий заряд  $+q$  и закрепленный неподвижно (рис. 3.11), начинает падать с высоты  $H$  с начальной скоростью, равной нулю, такой же шарик  $B$  и после упругого удара о шарик  $A$  подскакивает вверх. Как высоко поднимется шарик  $B$ , если он также заряжен зарядом  $+q$ ?

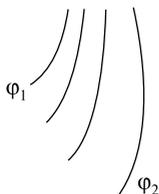


Рис. 3.8

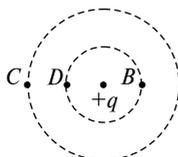


Рис. 3.9

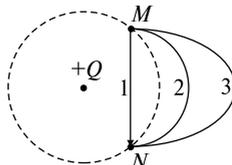


Рис. 3.10

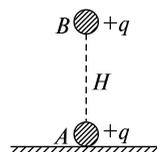


Рис. 3.11

3.2.5. Почему при работе с электрическими схемами рекомендуется работать одной рукой, а другую держать в кармане, а также категорически запрещается касаться заземленных предметов?

3.2.6. Если после аварии провод под высоким напряжением касается земли, то как следует удаляться с места аварии: а) уходить широкими шагами или б) отпрыгивать на одной ноге?

3.2.7. Существует ли в области между двумя равными положительными зарядами точка, в которой напряженность электрического поля равна нулю? Точка с нулевым потенциалом?

3.2.8. Если металлическим шаром, имеющим разные диаметры, сообщить равные отрицательные заряды, то будет ли ток в проводнике, которым соединяются шары после их зарядки?

3.2.9. Маленький металлический шарик заряжен до потенциала  $\phi_1 = 1$  В. Его вносят внутрь большой полый металлической сферы, заряженной до потенциала  $\phi_2 = 1000$  В, и касаются им поверхности большой сферы. Заряд с маленького шарика переходит на большую сферу. Объяснить кажущееся противоречие: переход положительного заряда произошел в направлении от более низкого потенциала к более высокому, тогда как должно происходить как раз обратное.

3.2.10. 1) Если в некоторой точке пространства  $\phi = 0$ , то обязательно ли в этой точке  $E = 0$ ? 2) Если в некоторой точке  $E = 0$ , то всегда ли и  $\phi = 0$  в этой точке? Проиллюстрируйте ответ примерами.

3.2.11. Могут ли эквипотенциальные поверхности пересекаться? Объясните.

3.2.12. Что можно сказать о векторе напряженности электрического поля в области пространства с одним и тем же потенциалом?

3.2.13. Из двух одинаковых проводящих шаров один нейтрален, а другой обладает зарядом  $Q$ . Вначале шары изолированы друг от друга, а затем приводятся в соприкосновение. а) Что можно сказать о потенциале каждого из шаров, когда их соединили? б) Перейдет ли заряд с одного шара на другой? Если да, то в каком количестве?

3.2.14. На шарик  $A$ , несущий заряд  $+q$  и закрепленный неподвижно, начинает падать без начальной скорости с высоты  $H$  такой же шарик  $B$ , заряженный таким же зарядом  $+q$  (рис. 3.12). Не долетая до шарика  $A$ , шарик  $B$  останавливается и начинает под-

ниматься вверх. На какую высоту поднимется шарик  $B$ ? Оба шарика находятся в стеклянной трубке, расположенной вертикально.

3.2.15. Две точки имеют одинаковый потенциал. В каком случае при перемещении пробного заряда из одной точки в другую силами поля не совершается работа? Верно ли, что в этом случае для перемещения заряда не надо прикладывать силу?

3.2.16. Электрическое поле создано двумя положительными зарядами, расположенными на некотором расстоянии друг от друга. Известно, что потенциалы поля в точках  $A$  и  $B$  равны (рис. 3.13). Значит ли это, что при перемещении пробного заряда из точки  $A$  в точку  $B$  силами поля не совершается работа? Верно ли, что для перемещения заряда не надо прикладывать силу?

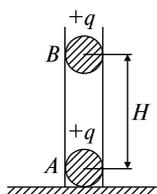


Рис. 3.12

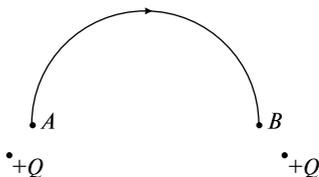


Рис. 3.13

### Задачи с решениями

3.2.17. Электростатическое поле создано двумя разноименно заряженными с поверхностной плотностью  $\sigma = 0,4$  мкКл/м<sup>2</sup> бесконечными параллельными плоскостями. Найти работу  $A$  по перемещению заряда  $q = 1 \cdot 10^{-8}$  Кл из точки 1 в точку 2, если  $l = 0,03$  м (рис. 3.14, а).

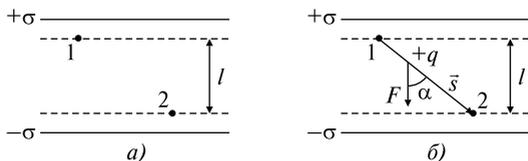


Рис. 3.14

*Решение.* Для нахождения работы сил поля по перемещению заряда воспользуемся формулой (3.2.2). Для определения потенциалов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  проведем через точки 1 и 2 эквипотенциальные

поверхности. Это будут плоскости, так как поле однородно. Для однородного поля

$$\varphi_1 - \varphi_2 = El,$$

где  $E$  — напряженность поля,  $l$  — расстояние между эквипотенциальными поверхностями.

Используя (3.2.5), можно найти напряженность поля  $E$  между параллельными разноименно заряженными плоскостями  $E = \sigma/\epsilon_0$ .

Окончательно работа

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = qEl = ql\sigma/\epsilon_0.$$

Ответ можно получить и другим способом. Так как поле однородно, то сила кулоновского взаимодействия  $F$  постоянна, и работа силы

$$A = Fs \cos\alpha,$$

где  $F = qE = q\sigma/\epsilon_0$ , а  $s$  — перемещение точки приложения силы. Из рис. 3.14, б видно, что  $s \cos\alpha = l$ , и тогда

$$A = ql\sigma/\epsilon_0 = 1,36 \cdot 10^{-5} \text{ Дж.}$$

$$\text{Ответ: } A = ql\sigma/\epsilon_0 = 1,36 \cdot 10^{-5} \text{ Дж.}$$

3.2.18. Электрическое поле создано точечным зарядом. В точке, удаленной от заряда на  $r = 0,12$  м, потенциал поля  $\varphi_1 = 24$  В. Определить величину напряженности поля  $E$  и направление градиента потенциала  $d\varphi/dn$  в этой точке.

*Решение.* Так как эквипотенциальные поверхности точечного заряда представляют собой концентрические заряду сферы, то нормаль  $\vec{n}$  к эквипотенциальной поверхности будет совпадать с направлением вектора  $\vec{r} = \vec{r}_0 - \vec{r}_1$  (рис. 3.15), соединяющего точечный заряд и точку с данным потенциалом  $\varphi_1$ , т.е. нормаль  $\vec{n}$  будет направлена по радиусу. Тогда выражение (3.2.6) можно упростить следующим образом:

$$E = -d\varphi/dn = -d\varphi/dr = -(\varphi_2 - \varphi_1)/|\vec{r}_0 - \vec{r}_1| = -(\varphi_2 - \varphi_1)/|\vec{r}|. \quad (1)$$

Учитывая (3.2.2), запишем  $\varphi_1 = 24$  В,  $\varphi_2 = 0$  В и тогда выражение (1) примет вид  $E = \varphi_1/r = 200$  В/м, т.е.  $E > 0$ .

Мы получили, что работа по перемещению единичного положительного заряда из точки с потенциалом  $\varphi_1$  в бесконечность

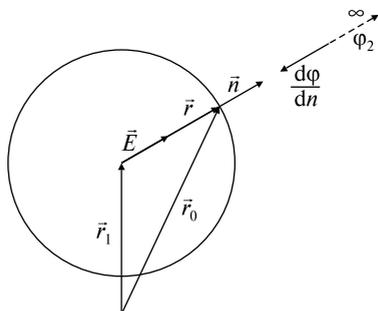


Рис. 3.15

( $\phi_2 = 0$ ) есть величина положительная, т.е. вектор  $\vec{E}$  направлен от заряда.

Тогда согласно (3.2.5) и (3.2.6)  $\text{grad } \phi = d\phi/dn$  направлен по радиусу к заряду. Таким образом, приходим к ответу:

$$E = \phi_1/r = 200 \text{ В/м; вектор } \vec{E} \text{ направлен по радиусу к заряду.}$$

*Ответ:*  $E = \phi_1/r = 200 \text{ В/м; вектор } \vec{E} \text{ направлен по радиусу к заряду.}$

3.2.19. Вычислить потенциал  $\phi$  внутри и вне сферы радиусом  $R$ , равномерно заряженной зарядом  $Q$ , и построить графики зависимостей  $E(r)$  и  $\phi(r)$ .

*Решение.* Используя теорему Гаусса (3.2.5), определим напряженность поля  $E$  внутри и вне сферы: при  $r < R$   $E = 0$ ;

$$\text{при } r > R \quad E = Q/4\pi\epsilon_0 r^2;$$

$$\text{при } r = R \quad E = Q/4\pi\epsilon_0 R^2.$$

Потенциал точки 1, расположенной вне сферы, определяется по формуле (3.2.2):

$$\phi_1 = \int_{r_1}^{\infty} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{r_1}^{\infty} E(r) dr \cos \alpha = \int_{r_1}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \Big|_{r_1}^{\infty} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1}.$$

Здесь мы учли, что нормаль  $\vec{n}$  к эквипотенциальной поверхности направлена по радиусу, т.е.  $\alpha = 0$  и  $\cos \alpha = 1$  (рис. 3.16, а).

Так как точка 1 выбрана произвольно ( $r_1 > R$ ), то для всех точек  $r > R$  можно записать

$$\phi = Q/4\pi\epsilon_0 r.$$

На поверхности сферы ( $r = R$ )

$$\phi = Q/4\pi\epsilon_0 R.$$

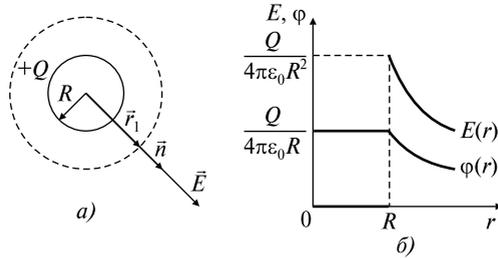


Рис. 3.16

Так как согласно (3.2.6)

$$E = -d\varphi/dn = -d\varphi/dr,$$

то при  $r < R$ , когда  $E = 0$ ,  $\varphi = \text{const}$ , т.е. потенциал внутри сферы равен потенциалу сферы на поверхности:

$$\varphi = Q/4\pi\epsilon_0 R.$$

Следовательно, окончательно можно записать, что

$$\text{при } r \leq R \quad \varphi = Q/4\pi\epsilon_0 R; \quad \text{при } r \geq R \quad \varphi = Q/4\pi\epsilon_0 r.$$

*Ответ:* при  $r \leq R$   $\varphi = Q/4\pi\epsilon_0 R$ ; при  $r \geq R$   $\varphi = Q/4\pi\epsilon_0 r$ .

3.2.20. Металлический шар  $A$  радиусом  $R_1$ , несущий заряд  $+Q$ , окружен расположенным концентрически полым металлическим шаром  $B$  с внутренним радиусом  $R_2$  и внешним —  $R_3$ . Заряд внешнего шара  $B$  равен нулю. Построить график зависимости напряженности поля  $E$  от расстояния  $r$  до центра шаров. Найти потенциалы  $\varphi_A$  и  $\varphi_B$  шаров, если в бесконечности потенциал равен нулю. Изменятся ли потенциалы шаров  $\varphi_A$  и  $\varphi_B$ , если внешний шар заземлить?

*Решение.* Заряд внешнего шара  $B$  равен нулю, но в силу электростатической индукции на внутренней поверхности радиусом  $R_2$  шара  $B$  появится наведенный заряд  $-Q$ , а на внешней поверхности радиусом  $R_3$  — заряд  $+Q$  (рис. 3.17, а). По теореме Гаусса (3.2.5) найдем напряженность поля:

$$\text{при } 0 < r < R_1 \quad E = 0, \tag{1}$$

$$\text{при } R_1 < r < R_2 \quad E = Q/4\pi\epsilon_0 r^2, \tag{2}$$

$$\text{при } R_2 < r < R_3 \quad E = 0, \tag{3}$$

$$\text{при } r > R_3 \quad E = Q/4\pi\epsilon_0 r^2. \tag{4}$$

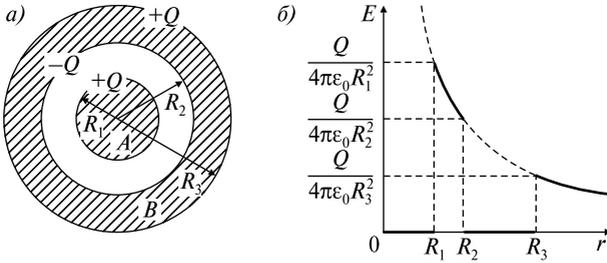


Рис. 3.17

Используя полученные результаты, построим график зависимости  $E(r)$  (рис. 3.17, б).

Из рисунка видно, что внутри металла, т.е. при  $r < R_1$  и  $R_2 < r < R_3$  напряженность  $E = 0$ . На поверхностях шаров напряженность меняется скачком, и в воздухе  $E(r)$  изменяется по закону

$$E(r) = Q/4\pi\epsilon_0 r^2.$$

Используя (3.2.2), найдем сначала потенциал  $\varphi_B$  шара B:

$$\varphi_B = \int_{R_3}^{\infty} \vec{E} d\vec{r} = \int_{R_3}^{\infty} E dr \cos \alpha = \int_{R_3}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \Big|_{R_3}^{\infty} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_3}. \quad (5)$$

Здесь мы учли, что вектор напряженности поля направлен по радиусу, таким образом,  $\alpha = 0$  и  $\cos \alpha = 1$ .

Потенциал  $\varphi_A$  шара A

$$\varphi_A = \int_{R_1}^{\infty} \vec{E} d\vec{r}. \quad (6)$$

Так как для значений  $R_1 < r < \infty$  функция  $E(r)$  терпит разрыв, то интеграл в (6) разобьем на три интеграла, в каждом из которых  $E(r)$  имеет свое значение, т.е.

$$\varphi_A = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} d\vec{r} + \int_{R_2}^{R_3} \vec{E} d\vec{r} + \int_{R_3}^{\infty} \vec{E} d\vec{r}. \quad (7)$$

Учитывая (3), перепишем (7):

$$\begin{aligned} \varphi_A &= \int_{R_1}^{R_2} E dr \cos \alpha + \int_{R_2}^{R_3} E dr \cos \alpha = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_2}^{R_3} \frac{dr}{r^2} = \\ &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \Big|_{R_1}^{R_2} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \Big|_{R_2}^{R_3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Если шар  $B$  заземлить, то заряд с его внешней поверхности стечет, и у этого шара останется только заряд  $-Q$  на внутренней поверхности радиусом  $R_2$ .

Тогда потенциал шара  $B$  будет  $\phi'_B = 0$  (см. вывод формулы (5)), и соответственно потенциал шара  $A$  (формула (8)) станет

$$\phi'_A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Однако, используя свойство аддитивности потенциала (3.2.4), задачу можно решить проще.

В задаче 3.2.19 было получено, что потенциал внутри любой заряженной сферы радиусом  $R_i$  есть величина постоянная, равная

$$\phi_i = Q/4\pi\epsilon_0 R_i.$$

Следовательно, потенциал  $\phi_A$  шара  $A$  будет складываться из потенциалов  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  и  $\phi_3$  окружающих его заряженных сфер: сферы радиусом  $R_1$  с зарядом  $+Q$ , сферы радиусом  $R_2$  с зарядом  $-Q$  и сферы радиусом  $R_3$  с зарядом  $+Q$ , т.е.

$$\phi_A = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q}{R_1} - \frac{Q}{R_2} + \frac{Q}{R_3} \right). \quad (9)$$

Сравните с формулой (8).

Аналогично потенциал шара  $B$  определяется только потенциалом  $\phi_3$  заряженной сферы радиусом  $R_3$ :

$$\phi_B = Q/4\pi\epsilon_0 R_3.$$

$$\text{Ответ: } \phi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q}{R_1} - \frac{Q}{R_2} + \frac{Q}{R_3} \right), \quad \phi_B = Q/4\pi\epsilon_0 R_3.$$

### Задачи без решений

3.2.21. Электрическое поле создано точечным зарядом  $q_1 = 5 \cdot 10^{-8}$  Кл. Точки  $B$  и  $C$  расположены от заряда на расстояниях  $r_B = 0,1$  м и  $r_C = 0,2$  м соответственно. Вычислить работу  $A$  внешних сил по перемещению точечного заряда  $q_2 = -2 \cdot 10^{-9}$  Кл из точки  $B$  в точку  $C$ .

3.2.22. Электрическое поле создано двумя точечными зарядами  $Q_1 = 3 \cdot 10^{-9}$  Кл и  $Q_2 = -2 \cdot 10^{-9}$  Кл, расположенными на рассто-

янии  $2a = 0,12$  м друг от друга (рис. 3.18). Определить работу  $A$  сил поля при перенесении точечного заряда  $q = 1 \cdot 10^{-9}$  Кл из точки  $C$  в точку  $D$ .

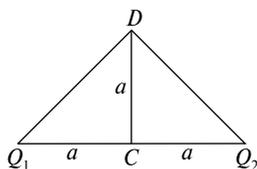


Рис. 3.18

3.2.23. Около заряженной бесконечно протяженной плоскости находится точечный заряд  $q = 5 \cdot 10^{-10}$  Кл. Под действием поля заряд перемещается по силовой линии на расстояние  $\Delta r = 0,02$  м; при этом совершается работа  $A = 5 \cdot 10^{-6}$  Дж. Найти поверхностную плотность заряда  $\sigma$  на плоскости.

3.2.24. В средней части плоского конденсатора, расстояние между пластинами которого  $d = 0,1$  м, расположен вдоль поля диэлектрический стержень длиной  $l = 0,01$  м. На концах стержня имеются два точечных заряда одинаковой величины  $q = 1 \cdot 10^{-11}$  Кл, но противоположного знака. Определить разность потенциалов  $U$  между пластинами конденсатора, если для того чтобы повернуть стержень на  $90^\circ$  вокруг оси, проходящей через его центр (т.е. расположить поперек поля), необходимо против сил поля совершить работу  $A = 3 \cdot 10^{-10}$  Дж.

3.2.25. Напряженность однородного электрического поля в некоторой точке  $E = 600$  В/м. Вычислить разность потенциалов  $\phi_1 - \phi_2$  между этой точкой и другой, лежащей на прямой, составляющей угол  $\alpha = 60^\circ$  с направлением вектора напряженности. Расстояние между точками  $r_{12} = 2 \cdot 10^{-3}$  м.

3.2.26. Бесконечная тонкая прямая нить заряжена с линейной плотностью  $\tau = 1$  нКл/м. Определить напряженность поля  $E$  в точке, удаленной на расстояние  $r = 0,1$  м от нити. Указать направление градиента потенциала  $d\phi/dr$ .

3.2.27. Две пластинки площадью  $S = 2 \cdot 10^{-2}$  м<sup>2</sup> каждая находятся в керосине на расстоянии  $d = 4 \cdot 10^{-3}$  м друг от друга. С какой силой  $F$  они взаимодействуют, если они заряжены до разности потенциалов  $U = 150$  В? Диэлектрическая проницаемость керосина  $\epsilon = 2$ .

3.2.28. Прямой длинный цилиндрический проводник радиусом  $R$  заряжен равномерно с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Найти разность потенциалов  $\varphi_R - \varphi_A$  между поверхностью цилиндра и точкой  $A$ , находящейся на расстоянии  $d > R$  от оси цилиндра.

3.2.29. Тонкий стержень длиной  $l = 0,1$  м заряжен равномерно зарядом  $q = 1$  нКл. Определить потенциал  $\varphi$  электрического поля в точке, лежащей на оси стержня на расстоянии  $a = 0,2$  м от ближайшего его конца.

3.2.30. Заряд  $Q$  равномерно распределен по кольцу радиусом  $R$ . Найти потенциал  $\varphi$  относительно бесконечности и напряженность  $E$  на оси кольца как функции расстояния  $h$  от центра кольца. Построить графики зависимостей  $E(h)$  и  $\varphi(h)$ .

3.2.31. Диск радиусом  $R$  заряжен равномерно с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Определить потенциал поля  $\varphi$  и напряженность электрического поля  $E$  в точке, находящейся на перпендикуляре к диску, проходящем через его центр, на расстоянии  $h$  от диска.

3.2.32. Сфера радиусом  $R_1 = 0,03$  м, равномерно заряженная зарядом  $Q_1 = 7 \cdot 10^{-8}$  Кл, окружена тонкой концентрической сферой радиусом  $R_2 = 0,09$  м. Какой заряд  $Q_2$  надо равномерно распределить по поверхности внешней сферы, чтобы потенциал  $\varphi_1$  внутренней сферы относительно бесконечности обратился в нуль?

3.2.33. Металлический шар радиусом  $R_1 = 0,1$  м, имеющий заряд  $Q_1 = 8 \cdot 10^{-8}$  Кл, окружен диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 2$ . Диэлектрик простирается до сферы радиусом  $R_2 = 0,2$  м, концентрической с шаром. Начертить графики зависимостей напряженности  $E(r)$  и потенциала  $\varphi(r)$  поля, где  $r$  — расстояние от центра шара.

3.2.34. Вычислить потенциал поля  $\varphi$  шара радиусом  $R$ , равномерно заряженного по объему. Объемная плотность заряда  $\rho$ .

3.2.35. Вычислить потенциал поля  $\varphi$  бесконечно длинного цилиндра радиусом  $R$ , равномерно заряженного по объему. Объемная плотность заряда  $\rho$ .

### ТЕМА 3.3 ЭЛЕКТРОЕМКОСТЬ. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

При расчете энергетических характеристик полей, создаваемых заряженными проводниками, важную роль играет понятие емкости. Емкость проводника определяется из соотношения

$$C = q/\varphi, \quad (3.3.1)$$

где  $q$  — заряд проводника,  $\varphi$  — потенциал, возникающий на проводнике при данном заряде.

Аналогично емкость конденсатора

$$C = q/\Delta\varphi, \quad (3.3.1^*)$$

здесь  $q$  — заряд конденсатора,  $\Delta\varphi$  — возникающая при данном заряде разность потенциалов на обкладках конденсатора. Емкость зависит от геометрических размеров проводника или конденсатора и от диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  среды, окружающей проводник или заполняющей конденсатор. Так, емкость уединенной металлической сферы радиусом  $R$

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon R; \quad (3.3.2)$$

емкость плоского конденсатора

$$C = \epsilon_0\epsilon S/d, \quad (3.3.3)$$

где  $S$  — площадь пластин,  $d$  — расстояние между ними,  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость.

Емкость последовательно соединенных конденсаторов можно найти из формулы

$$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}, \quad (3.3.4)$$

где  $C_i$  — емкость  $i$ -го конденсатора.

Для нахождения емкости параллельно соединенных конденсаторов используют формулу

$$C = \sum_i C_i. \quad (3.3.5)$$

Энергия  $W$  электростатического поля может быть выражена через заряд  $q$ , разность потенциалов  $U$  и емкость  $C$  следующими соотношениями:

$$W = \frac{1}{2}CU^2, \quad (3.3.6)$$

$$W = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}, \quad (3.3.7)$$

$$W = \frac{1}{2}qU. \quad (3.3.8)$$

Объемная плотность энергии, т.е. энергия электрического поля, приходящаяся на единицу объема, выражается формулой

$$w = \epsilon_0 \epsilon E^2 / 2, \quad (3.3.9)$$

где  $E$  — напряженность электрического поля в среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ .

### Качественные задачи

3.3.1. Как изменится разность потенциалов на пластинах заряженного конденсатора, если уменьшить расстояние между ними?

3.3.2. От каких факторов (форма, размеры обкладок, величина зазора между ними, диэлектрические свойства среды) зависит емкость конденсатора?

3.3.3. Изменится ли разность потенциалов между пластинами плоского воздушного конденсатора, если одну из них заземлить?

3.3.4. Три конденсатора, имеющие разные емкости, соединены параллельно и заряжены. Отличаются ли разности потенциалов между обкладками отдельных конденсаторов? Одинаковы ли заряды конденсаторов?

3.3.5. Три конденсатора, имеющие разные емкости, соединены последовательно и заряжены. Отличаются ли разности потенциалов между обкладками отдельных конденсаторов? Одинаковы ли заряды конденсаторов?

3.3.6. Большая плоскопараллельная медная пластина толщиной  $d_1$  помещена между обкладками плоского конденсатора, параллельно им. Как это повлияет на емкость конденсатора?

3.3.7. Параллельные пластины изолированного конденсатора обладают зарядами  $Q$  противоположного знака. Надо ли прикладывать силу, чтобы развести пластины? Изменится ли при этом разность потенциалов? На что затрачивается работа при разведении пластин?

3.3.8. Обкладку плоского конденсатора наклонили так, что расстояние с одной стороны увеличилось до  $2d$ . Как изменится емкость?

3.3.9. Три одинаковых конденсатора подключают к батарее. В каком случае энергия, запасенная конденсаторами, больше: при последовательном или при параллельном соединении конденсаторов?

3.3.10. Как изменится запасенная конденсатором энергия, если а) удвоить напряжение на конденсаторе; б) удвоить заряд на каждой из пластин; в) удвоить расстояние между пластинами при условии, что конденсатор подключен к батарее?

3.3.11. Как изменится энергия электрического поля в плоском воздушном конденсаторе, если расстояние между его пластинами уменьшить в 2 раза? Обкладки конденсатора отключены от источника ЭДС.

3.3.12. Как изменится энергия электрического поля в плоском воздушном конденсаторе, если расстояние между его пластинами уменьшить в 2 раза? Обкладки конденсатора все время подключены к источнику ЭДС.

3.3.13. Двум шарам одинакового радиуса, один из которых сплошной, а другой полый, сообщили одинаковый заряд. Будут ли равны их потенциалы?

3.3.14. Если металлическим шаром, имеющим разные диаметры, сообщить равные отрицательные заряды, то будет ли ток в проводе, которым соединят шары после их зарядки?

3.3.15. Два металлических шара с радиусами  $R$  и  $3R$  соединяют проволокой. Центры шаров расположены на расстоянии  $7R$  друг от друга. Какой вид соединения проводников представляет эта система из двух шаров?

3.3.16. Батарея из последовательно соединенных конденсаторов заряжена и отключена от источника постоянной ЭДС. Один из конденсаторов в результате пробоя разряжается. Как при этом изменяется а) электроемкость батареи, б) напряжение на ней?

3.3.17. Конденсатор подключен к аккумулятору. Как изменяется энергия, запасенная конденсатором, если мы раздвигаем его пластины?

3.3.18. В сосуд с диэлектрической жидкостью опущен конденсатор, соединенный с источником постоянной ЭДС (рис. 3.19).

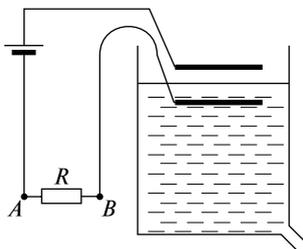


Рис. 3.19

Жидкость медленно выливается. Указать направление тока через резистор  $R$ .

3.3.19. Металлический проводник опустили в керосин и зарядили от электрофорной машины. После зарядки проводник при помощи изоляторов вынули из керосина и перенесли в воду. Изменилась ли емкость проводника?

3.3.20. Металлический проводник опустили в керосин и зарядили от электрофорной машины. После зарядки проводник при помощи изоляторов вынули из керосина и перенесли в воду. Изменился ли потенциал на проводнике?

### Задачи с решениями

3.3.21. Плоский воздушный конденсатор с площадью пластин  $S = 1 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$  и расстоянием между ними  $d_1 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ м}$  заряжен от батареи до разности потенциалов  $U = 100 \text{ В}$ . Затем пластины раздвигают до расстояния  $d_2 = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ . Найти энергию конденсатора до  $W_1$  и после  $W_{2a}$  и  $W_{2б}$  раздвижения пластин, если батарея перед раздвижением а) не отключается; б) отключается.

*Решение.* Так как емкость конденсатора зависит от его геометрических размеров (3.3.3), то

$$C_1 = \epsilon_0 \epsilon S / d_1.$$

Энергию конденсатора до раздвижения пластин можно определить по формуле (3.3.6):

$$W_1 = C_1 U^2 / 2 = \epsilon_0 \epsilon S U^2 / 2 d_1 = 4,43 \cdot 10^{-6} \text{ Дж.}$$

После раздвижения пластин емкость будет

$$C_2 = \epsilon_0 \epsilon S / d_2.$$

В случае а), когда во время раздвижения пластин напряжение на обкладках постоянно, т.е.  $U = \text{const}$ , энергия определится по формуле (3.3.6):

$$W_{2a} = C_2 U^2 / 2 = \epsilon_0 \epsilon S U^2 / 2 d_2 = 1,77 \cdot 10^{-7} \text{ Дж.}$$

В случае б) на пластинках будет неизменным первоначальный заряд  $q = C_1 U$ . Поэтому для нахождения энергии конденсатора следует воспользоваться выражением (3.3.7):

$$W_{2б} = q^2 / 2 C_2 = \epsilon_0 \epsilon S d_2 U^2 / 2 d_1^2 = 1,11 \cdot 10^{-5} \text{ Дж.}$$

*Ответ:*  $W_1 = \epsilon_0 \epsilon S U^2 / 2 d_1 = 4,43 \cdot 10^{-6} \text{ Дж}$ ,  $W_{2a} = \epsilon_0 \epsilon S U^2 / 2 d_2 = 1,77 \cdot 10^{-7} \text{ Дж}$ ,  $W_{2б} = \epsilon_0 \epsilon S d_2 U^2 / 2 d_1^2 = 1,11 \cdot 10^{-5} \text{ Дж}$ .

3.3.22. Конденсатор емкостью  $C_1 = 6 \cdot 10^{-10} \text{ Ф}$  зарядили до разности потенциалов  $U = 1500 \text{ В}$  и отключили от источника напряжения. Затем к конденсатору присоединили параллельно второй, незаряженный конденсатор емкостью  $C_2 = 4 \cdot 10^{-10} \text{ Ф}$ . Какое количество энергии  $\Delta W$ , запасенной в первом конденсаторе, было израсходовано на образование искры, проскочившей при соединении конденсаторов?

*Решение.* Согласно (3.3.5) суммарная емкость двух конденсаторов  $C_0 = C_1 + C_2$ . В связи с тем, что конденсатор отключили от источника, заряд в системе сохранится и будет равен первоначальному  $q = C_1 U$ . Количество энергии, запасенной в первом конденсаторе (формула (3.3.7)),

$$W_1 = q^2 / 2 C_1.$$

Количество энергии, которой будет обладать система из двух конденсаторов, после подключения второго конденсатора

$$W_2 = q^2 / 2 C_0.$$

Изменение энергии

$$\Delta W = W_1 - W_2 = q^2 / 2 C_1 - q^2 / 2 C_0 = C_1 C_2 U^2 / 2 (C_1 + C_2) = 0,27 \text{ мДж}$$

и будет израсходовано на образование искры.

*Ответ:*  $\Delta W = C_1 C_2 U^2 / 2 (C_1 + C_2) = 0,27 \text{ мДж}$ .

3.3.23. Шар радиусом  $R_1 = 0,06 \text{ м}$  заряжен до потенциала  $\phi_1 = 300 \text{ В}$ , а шар радиусом  $R_2 = 0,04 \text{ м}$  — до потенциала  $\phi_2 = 500 \text{ В}$ . Определить потенциал  $\phi$  шаров после того, как их соединили ме-

таллическим проводником. Емкостью соединительного проводника пренебречь.

*Решение.* Емкости шаров зависят от их размеров (см. (3.3.2)):

$$C_1 = 4\pi\epsilon_0\epsilon R_1, \quad (1)$$

$$C_2 = 4\pi\epsilon_0\epsilon R_2. \quad (2)$$

Согласно (3.3.1) можно посчитать заряды, сообщенные шарам:

$$q_1 = C_1\varphi_1, \quad (3)$$

$$q_2 = C_2\varphi_2. \quad (4)$$

После того как шары соединили, общий заряд системы

$$q = q_1 + q_2. \quad (5)$$

После соединения шаров проводником потенциал  $\varphi$  системы стал постоянным, следовательно, для нахождения суммарной емкости следует воспользоваться формулой (3.3.5):

$$C = C_1 + C_2. \quad (6)$$

Используя определение емкости проводника (3.3.1) и учитывая (1)–(6), можно оценить потенциал системы

$$\varphi = q/C = (R_1\varphi_1 + R_2\varphi_2)/(R_1 + R_2) = 380 \text{ В}.$$

*Ответ:*  $\varphi = (R_1\varphi_1 + R_2\varphi_2)/(R_1 + R_2) = 380 \text{ В}.$

3.3.24. Металлический шар радиусом  $R_1 = 0,05 \text{ м}$  окружен шаровым слоем диэлектрика ( $\epsilon = 7$ ) толщиной  $d = 0,01 \text{ м}$  и помещен concentрично в металлической сфере с внутренним радиусом  $R_2 = 0,07 \text{ м}$  (рис. 3.20). Чему равна емкость  $C$  конденсатора?

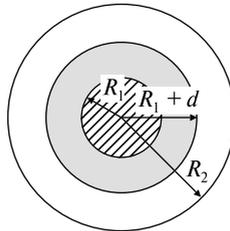


Рис. 3.20

*Решение.* Задачу можно решить двумя способами.

*Первый способ.* Используем определение емкости конденсатора (3.3.1)

$$C = q/(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (1)$$

Для этого нам необходимо рассчитать разность потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$  (3.2.2) между обкладками конденсатора — сферами с радиусами  $R_1$  и  $R_2$ :

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} d\vec{r} = \int_{R_1}^{R_1+d} \vec{E}_1 d\vec{r} + \int_{R_1+d}^{R_2} \vec{E}_2 d\vec{r}, \quad (2)$$

где  $E_1 = q/4\pi\epsilon_0\epsilon r^2$  — напряженность поля в диэлектрике,  $E_2 = q/4\pi\epsilon_0 r^2$  — напряженность поля в воздушном зазоре (получены с помощью теоремы Гаусса (3.1.5)).

С учетом выражений для  $E_1$  и  $E_2$  перепишем (2) в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_2 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \int_{R_1}^{R_1+d} \frac{dr}{\epsilon r^2} + \int_{R_1+d}^{R_2} \frac{dr}{r^2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{\epsilon r} \Big|_{R_1}^{R_1+d} - \frac{1}{r} \Big|_{R_1+d}^{R_2} \right) = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_2 d + \epsilon R_1 [R_2 - (R_1 + d)]}{\epsilon R_1 R_2 (R_1 + d)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Учитывая (1), окончательно получим

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 \epsilon R_1 R_2 (R_1 + d)}{R_2 d + \epsilon R_1 [R_2 - (R_1 + d)]} = 38,9 \text{ пФ}. \quad (4)$$

*Второй способ.* Концентрические сферы можно рассматривать как систему конденсаторов, соединенных последовательно. Тогда суммарная емкость системы рассчитывается по формуле (3.3.4):

$$C = C_1 C_2 / (C_1 + C_2), \quad (5)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — емкости конденсаторов, образованных сферами с радиусами  $R_1$  и  $R_1 + d$  и радиусами  $R_1 + d$  и  $R_2$  соответственно. Для этого, прежде всего, рассчитаем емкость сферического конденсатора  $C_0$ , у которого внутренняя обкладка имеет радиус  $R_a$ , а внешняя —  $R_b$ .

Найдем напряженность поля  $E$  между обкладками конденсатора (см. (3.2.5)):

$$E(r) = q/4\pi\epsilon_0\epsilon r^2.$$

По формуле (3.2.2) найдем разность потенциалов  $\varphi_a - \varphi_b$  между обкладками конденсатора:

$$\varphi_a - \varphi_b = q(R_b - R_a)/4\pi\epsilon_0\epsilon R_a R_b.$$

Используя (3.3.1\*), определим емкость

$$C_0 = 4\pi\epsilon_0\epsilon R_a R_b / (R_b - R_a). \quad (6)$$

Учитывая (6), запишем формулы для  $C_1$  и  $C_2$ :

$$C_1 = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon R_1(R_1 + d)}{d}, \quad (7)$$

$$C_2 = \frac{4\pi\epsilon_0 R_2(R_1 + d)}{R_2 - (R_1 + d)}. \quad (8)$$

Подставим (7) и (8) в (5) и получим емкость  $C$  в виде (4).

$$\text{Ответ: } C = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon R_1 R_2 (R_1 + d)}{R_2 d + \epsilon R_1 [R_2 - (R_1 + d)]} = 38,9 \text{ пФ.}$$

### Задачи без решений

3.3.25. Получить формулы для последовательного и параллельного соединения конденсаторов.

3.3.26. В плоский воздушный конденсатор с площадью обкладок  $S$  и расстоянием  $d$  между ними вставлена параллельно обкладкам металлическая пластинка, площадь которой равна площади обкладок. Определить емкость  $C$  конденсатора после внесения пластинки, если ее толщина много меньше  $d$  и расположена она на расстоянии  $l$  от одной из обкладок конденсатора.

3.3.27. Между обкладками плоского воздушного конденсатора (расстояние между обкладками  $d$ , площадь обкладки  $S$ ) вводится параллельно обкладкам конденсатора металлическая пластинка также площадью  $S$ , толщина которой  $d_1 < d$ . Определить емкость  $C$  конденсатора с введенной проводящей пластиной.

3.3.28. В плоский воздушный конденсатор вводится параллельно обкладкам диэлектрическая пластинка, толщина которой  $d_1$  меньше расстояния между обкладками  $d$ . Определить емкость  $C$  конденсатора с диэлектрической пластинкой. Диэлектрическая проницаемость материала пластинки  $\epsilon$ . Площадь пластинки и каждой обкладки  $S$ .

3.3.29. Плоский воздушный конденсатор емкостью  $C = 1 \text{ нФ}$  заряжен до разности потенциалов  $U_1 = 300 \text{ В}$ . После отключения от источника напряжения расстояние между пластинами конденсатора было увеличено до  $d_2 = 5d_1$ . Определить: 1) разность потенциалов  $U_2$  на обкладках конденсатора после их раздвижения, 2) работу  $A$  внешних сил по раздвижению пластин.

3.3.30. Между обкладками плоского конденсатора емкостью  $C = 1 \cdot 10^{-10} \text{ Ф}$  вставлена фарфоровая пластина. Диэлектрическая проницаемость фарфора  $\epsilon = 5$ . Конденсатор зарядили до разности потенциалов  $U = 600 \text{ В}$  и отключили от источника напряжения. Какую работу  $A$  надо совершить, чтобы вынуть диэлектрик из конденсатора?

3.3.31. Конденсатор емкостью  $C_1 = 0,6 \text{ мкФ}$  был заряжен до напряжения  $U_1 = 300 \text{ В}$  и соединен со вторым конденсатором емкостью  $C_2 = 0,4 \text{ мкФ}$ , заряженным до напряжения  $U_2 = 150 \text{ В}$ . Найти величину заряда  $\Delta q$ , перетекающего с пластин первого конденсатора на второй.

3.3.32. Показать, что при малой толщине изолирующего слоя емкость шарового конденсатора можно рассчитать по формуле емкости плоского конденсатора.

3.3.33. Определить емкость  $C$  конденсатора, состоящего из двух шариков диаметром  $d = 0,01 \text{ м}$ , центры которых находятся в воздухе на расстоянии  $l = 0,20 \text{ м}$  друг от друга, приняв, что заряды на их поверхностях распределены равномерно.

3.3.34. Определить емкости  $C_a$  и  $C_b$  батарей конденсаторов, соединенных по схемам, показанным на рис. 3.21. Показать, что если выполняется условие  $C_1/C_3 = C_2/C_4$ , то емкости этих батарей равны.

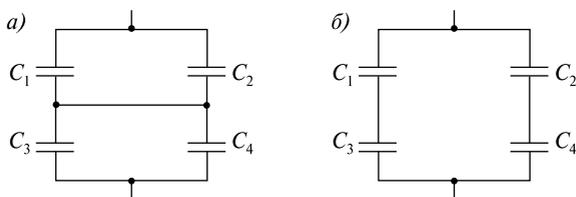


Рис. 3.21

3.3.35. Два одинаковых воздушных конденсатора емкостью  $C = 1 \text{ нФ}$  заряжены до напряжения  $U = 900 \text{ В}$ . Один из конденсаторов погружается в заряженном состоянии в керосин, после чего конденсаторы соединяются параллельно. Определить работу  $A$  происходящего при этом разряда. Диэлектрическая проницаемость керосина  $\epsilon = 2$ .

3.3.36. Определить емкость  $C$  уединенного шарового проводника радиусом  $R_1$ , окруженного прилегающим к нему концентрическим слоем однородного диэлектрика с проницаемостью  $\epsilon$  и наружным радиусом  $R_2$ .

3.3.37. Определить емкость  $C$  цилиндрического конденсатора длиной  $l$ . Внутренний радиус конденсатора  $R_1$ , внешний —  $R_2$ . Показать, что при малой толщине  $d$  изолирующего слоя емкость цилиндрического конденсатора можно рассчитать по формуле емкости плоского конденсатора (считать  $d = R_2 - R_1 \ll R_1$ ).

3.3.38. Определить емкость  $C$  участка единичной длины двухпроводной линии, изображенной на рис. 3.22. Линейная плотность зарядов равна  $\tau$ ,  $r$  — радиус проводов,  $l$  — расстояние между ними (известно, что  $r \ll l$ ).

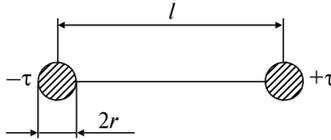


Рис. 3.22

## ТЕМА 3.4

### ПРОВОДНИКИ И ДИЭЛЕКТРИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

**Эквипотенциальные поверхности** — геометрическое место точек, имеющих одинаковый потенциал. Силовые линии перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям. Поверхность проводника в электростатическом поле всегда является эквипотенциальной.

**Условия равновесия зарядов на проводниках.** В металлических проводниках имеются носители тока — электроны проводимости (свободные электроны), которые под действием электрического поля перемещаются по всему проводнику и образуют так называемый электронный газ в металле.

В отсутствие внешнего электрического поля проводник в целом нейтрален, поскольку электрические поля электронов и положительно заряженных ионов в узлах кристаллической решетки взаимно компенсируются.

Перераспределение зарядов как в проводнике, так и в диэлектрике, под влиянием внешнего электростатического поля называется явлением электростатической индукции.

Вектор напряженности поля у поверхности проводника направлен по нормали к ней, так как касательная составляющая вектора  $\vec{E}$  вызвала бы перемещение носителей тока по поверхности, что противоречит условию равновесия зарядов в проводнике. Для проводников в электростатическом поле выполняются следующие условия:

— всюду внутри проводника напряженность поля  $E = 0$ , а у его поверхности  $E = E_n$ ;

— весь объем и поверхность проводника эквипотенциальны, так как в любой точке проводника и для любой линии на его поверхности  $\frac{\partial \varphi}{\partial l} = -E_l = 0$ ;

— некомпенсированные заряды располагаются в проводнике только на его поверхности.

Так как согласно теореме Гаусса заряд  $q$ , охватываемый произвольной замкнутой поверхностью  $S$ , проведенной внутри проводника, равен нулю,  $q = \oint_S \epsilon_0 E dS = 0$ , поэтому во всех точках поверхности  $S$ , проходящей  $S$  внутри проводника,  $E = 0$ .

**Поляризация диэлектриков.** Если полярный диэлектрик не находится во внешнем электрическом поле, то в результате тепло-

вого движения молекул векторы их дипольных электрических моментов ориентированы хаотически. Сумма дипольных моментов всех молекул, находящихся в бесконечно малом объеме  $dV$ , равна нулю. При внесении диэлектрика во внешнее электрическое поле происходит поляризация диэлектрика, т.е. возникают суммарные дипольные моменты, отличные от нуля. Диэлектрик в таком состоянии называется поляризованным.

*Ориентационная поляризация полярных диэлектриков* — внешнее электрическое поле стремится ориентировать дипольные моменты полярных молекул вдоль направления поля. В итоге возникает преимущественная ориентация электрических моментов вдоль векторов  $\vec{E}$ , возрастающая с увеличением напряженности электрического поля и с уменьшением температуры.

*Электронная (деформационная) поляризация неполярных диэлектриков* — под действием внешнего поля в молекулах возникают индуцированные, связанные со смещением электронных оболочек атомов, дипольные моменты, направленные вдоль  $\vec{E}$ . Тепловое движение молекул не оказывает влияния на электронную поляризацию.

*Ионная поляризация в твердых диэлектриках, имеющих ионную кристаллическую решетку* — внешнее электрическое поле вызывает смещение всех положительных ионов в направлении напряженности поля  $E$ , а всех отрицательных — в противоположную сторону.

Количественной мерой поляризации диэлектрика является вектор поляризации  $\vec{P}$ , равный отношению электрического дипольного момента малого объема диэлектрика к величине  $\Delta V$  этого объема:

$$P = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^n P_{ei}, \quad (3.4.1)$$

где  $P_{ei}$  — электрический дипольный момент, создаваемый  $i$ -й молекулой,  $n$  — число молекул в единице объема  $\Delta V$ . Поляризация неполярного диэлектрика в электрическом поле напряженностью  $E$  равна

$$\vec{P} = n_0 \epsilon_0 \alpha \vec{E} = \epsilon_0 \kappa \vec{E}, \quad (3.4.2)$$

где  $n_0$  — концентрация молекул,  $\alpha$  — поляризуемость одной молекулы, а  $\kappa = \alpha n_0$  — безразмерная величина, называемая относительной диэлектрической восприимчивостью вещества.

Электрическим смещением (электрической индукцией) называется векторная величина  $\vec{D}$ , характеризующая электрическое поле и равная

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (3.4.3)$$

или

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}, \quad (3.4.4)$$

где  $\epsilon = \kappa + 1$ . Безразмерная величина  $\epsilon$  называется относительной диэлектрической проницаемостью среды. Из формулы закона Кулона для диэлектриков  $F = k |q_1| |q_2| / 4\pi \epsilon_0 \epsilon r^2$  следует, что диэлектрическая проницаемость показывает, во сколько раз сила кулоновского взаимодействия двух зарядов в диэлектрике меньше, чем в вакууме. Для вакуума  $\kappa = 0$  и  $\epsilon = 1$ .

По теореме Остроградского–Гаусса для электростатического поля в среде  $\oint_S \vec{D}_n dS = q^{\text{своб}}$ , где  $S$  — замкнутая поверхность,  $q^{\text{своб}}$  — заключенный в ней заряд. Таким образом, поток вектора электрического смещения через произвольную замкнутую поверхность, проведенную в поле, пропорционален алгебраической сумме свободных зарядов, охватываемых этой поверхностью.

### Качественные задачи

3.4.1. Незаряженное металлическое тело внесено в электрическое поле положительного заряда  $+Q$ , а затем разделено на части  $M$  и  $N$ , как это представлено на рис. 3.23. Какими электрическими зарядами обладают части тела  $M$  и  $N$  после разделения?

3.4.2. Незаряженное тело, изготовленное из диэлектрика и состоящее из двух частей  $M$  и  $N$ , внесено в электрическое поле положительного заряда  $+Q$  (см. рис. 3.23). Какими электрическими зарядами обладают части тела  $M$  и  $N$  после удаления их друг от друга?

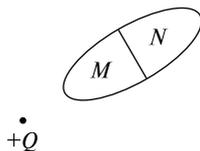


Рис. 3.23

3.4.3. Одинаковые по абсолютной величине заряды находятся на двух парах одинаковых металлических шариков. В первом слу-

чае эти заряды одноименные (рис. 3.24, а), во втором — разноименные (рис. 3.24, б). Расстояния между шариками в обоих случаях равны. Могут ли силы взаимодействия между зарядами в этих случаях быть не равными по модулю?

3.4.4. Как полностью передать электрический заряд, находящийся на одном проводящем теле, другому проводящему незаряженному телу?

3.4.5. Внутри полого (изолированного) металлического шара находится заряд  $Q_1$  (рис. 3.25). Будет ли действовать электрическая сила на точечный заряд  $Q_2$ , находящийся вне шара?

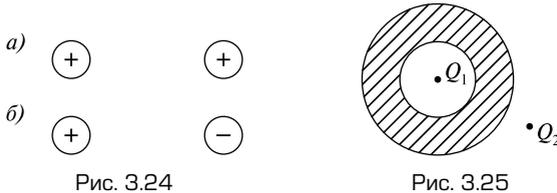


Рис. 3.24

Рис. 3.25

3.4.6. В центре полой изолированной незаряженной металлической сферы находится заряд  $+Q$ . Отклонится ли подвешенный на шелковой нити грузик, заряженный зарядом  $+q_0$ , помещенный вне сферы?

3.4.7. В центре полой изолированной незаряженной металлической сферы находится положительный заряд  $+Q$ . Сфера заземлена. Отклонится ли подвешенный вне сферы на шелковой нити грузик, заряженный пробным зарядом  $+q_0$ ?

3.4.8. Как изменится сила отталкивания двух одноименных точечных зарядов, если между ними поместить незаряженный металлический шар?

3.4.9. Как изменится сила, действующая на разноименные заряды, если между ними поместить незаряженный шарик из металла?

3.4.10. Как изменится сила отталкивания двух одноименных и одинаковых по величине точечных зарядов, если посередине между ними поместить тонкую металлическую пластинку? Плоскость пластинки перпендикулярна оси, соединяющей заряды.

3.4.11. Как изменится сила, действующая на разноименные точечные заряды, если между ними поместить незаряженную, бесконечно большую металлическую пластину?

3.4.12. Два шара, большой и маленький, равномерно заряжены с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Будут ли одинаковы потенциалы шаров?

3.4.13. Заряд проводника равен  $Q$ . В проводнике имеется полость, в центр которой помещается точечный заряд  $q$ . Чему равен заряд: а) на внешней поверхности проводника; б) на внутренней поверхности проводника?

3.4.14. Точечный заряд  $q$  помещен в центре тонкой металлической незаряженной оболочки. Будет ли действовать электрическая сила на заряд  $Q$ , находящийся снаружи?

3.4.15. Точечный заряд  $Q$  окружен сферической проводящей поверхностью радиусом  $r_0$ , центр которой совпадает с  $Q$ . Затем заряд перемещают вправо на расстояние  $r_0/2$ , сфера же остается на месте. Изменится ли поток  $N_E$  через сферу? Изменится ли распределение напряженности электрического поля на поверхности сферы? Если да, то как?

3.4.16. Полый металлический шар с внутренним радиусом  $R_1$  и внешним  $R_2$  заряжен положительным зарядом  $Q$ . Как изменится напряженность поля и потенциал на поверхности шара, если уменьшить толщину стенки полого шара за счет увеличения внутреннего радиуса  $R_1$  полости?

3.4.17. Полый металлический шар с внутренним радиусом  $R_1$  и внешним  $R_2$  заряжен положительным зарядом  $Q$ . Как изменится напряженность поля и потенциал на поверхности шара, если уменьшить толщину стенки полого шара за счет уменьшения внешнего радиуса  $R_2$  шара?

3.4.18. Обкладки плоского заряженного изолированного конденсатора расположены горизонтально. Если между пластинами чуть-чуть вдвинуть лист тонкого диэлектрика и затем отпустить его, как он будет двигаться?

### Задачи с решениями

3.4.19. Точечный заряд  $q$  находится в вакууме на расстоянии  $r$  от бесконечной незаряженной металлической плоскости. Найти силу  $F$ , с которой плоскость притягивает к себе заряд.

*Решение.* При расчете полей и взаимодействий, возникающих в системе «заряженное тело — незаряженная проводящая поверхность», удобно использовать метод зеркального изображения зарядов. Этот метод основан на следующем принципе.

Если в электрическом поле заменить какую-либо эквипотенциальную поверхность проводником, имеющим потенциал и форму этой поверхности, то электрическое поле после такой замены

останется прежним. Отсюда, в частности, следует, что при помещении точечного заряда вблизи бесконечной проводящей плоскости на последней заряды перераспределяются так, что электрическое поле системы оказывается тождественным полю, создаваемому рассматриваемым зарядом и его зеркальным изображением в проводящей плоскости, т.е. полю двух точечных зарядов, равных по модулю и противоположных по знаку (рис. 3.26). Следовательно, сила притяжения заряда к плоскости будет численно равна силе притяжения двух точечных зарядов, находящихся на расстоянии  $2r$  друг от друга:

$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2r)^2}.$$

Ответ:  $F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2r)^2}.$

3.4.20. Металлический шарик радиусом  $r$ , имеющий заряд  $q$ , помещен в центр незаряженного сферического слоя, внутренний и внешний радиусы которого равны  $R_1$  и  $R_2$  (рис. 3.27). Найти напряженность и потенциал электрического поля, создаваемого системой, если: а) слой изготовлен из металла; б) металлический слой заземлен; в) слой изготовлен из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ .

*Решение.*

а) При помещении проводника в электрическое поле на поверхности проводника появляются индуцированные заряды, распределенные таким образом, что результирующее поле внутри проводника равно нулю. На внутренней поверхности металличе-

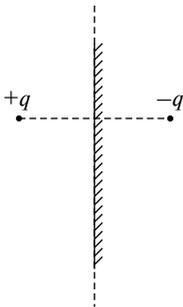


Рис. 3.26

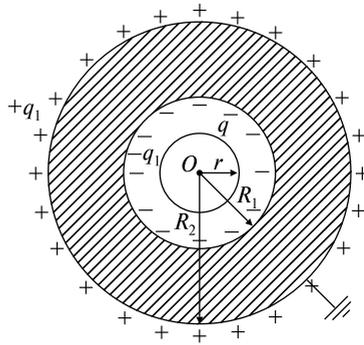


Рис. 3.27

ского слоя появится индуцированный заряд  $-q_1$ , на внешней поверхности возникнет такой же заряд противоположного знака  $+q_1$ . В результате получатся три концентрические заряженные сферы, радиусы которых  $r$ ,  $R_1$  и  $R_2$  с зарядами  $q$ ,  $-q_1$  и  $+q_1$  соответственно. В пространстве между второй и третьей сферой напряженность электрического поля равна нулю, поэтому при  $R_1 \leq x \leq R_2$

$$k \frac{q}{x^2} - k \frac{q_1}{x^2} = 0, \text{ откуда } q_1 = q.$$

Здесь учтено, что вторая сфера создает снаружи такое поле, как если бы ее заряд находился в центре, а поле третьей сферы в ее внутренней области отсутствует.

Тогда внутри шарика ( $0 \leq x \leq r$ )

$$E = 0; \varphi = k \frac{q}{r} - k \frac{q}{R_1} + k \frac{q}{R_2} = kq \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Между шариком и слоем ( $r \leq x \leq R_1$ )

$$E = k \frac{q}{x^2}; \varphi = k \frac{q}{x} - k \frac{q}{R_1} + k \frac{q}{R_2} = kq \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Внутри шарового слоя ( $R_1 \leq x \leq R_2$ )

$$E = 0; \varphi = k \frac{q}{x} - k \frac{q}{x} + k \frac{q}{R_2} = k \frac{q}{R_2}.$$

За пределами слоя ( $R_2 \leq x < \infty$ )

$$E = k \frac{q}{x^2}; \varphi = k \frac{q}{x}.$$

б) У заземленного проводника потенциал равен нулю, и заряды на поверхностях сферического слоя неодинаковые:  $-q_1$  и  $+q_2$ . Соотношение между зарядами можно определить из условия, что результирующий потенциал на поверхности слоя ( $x = R_2$ ) будет равен

$$\varphi = k \frac{q}{R_2} - k \frac{q_1}{R_2} + k \frac{q_2}{R_2} = 0,$$

откуда следует, что

$$q_1 - q_2 = q. \tag{1}$$

Поскольку поле внутри проводника отсутствует, то

$$E = k \frac{q}{x^2} - k \frac{q_1}{x^2} = 0,$$

откуда

$$q_1 = q. \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что  $q_2 = 0$ , т.е. на внешней поверхности заземленного слоя заряда нет, а на внутренней поверхности находится заряд  $q_1 = -q$ . Таким образом, задача свелась к нахождению поля двух заряженных концентрических сфер радиусами  $r$  и  $R_1$ , на которых находятся заряды  $+q$  и  $-q$ . При расчете поля данной системы можно воспользоваться результатами пункта а), положив во всех полученных формулах заряд третьей сферы равным нулю. Получаем:

внутри шарика ( $0 \leq x \leq r$ ):

$$E = 0; \varphi = kq \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} \right);$$

между шариком и слоем ( $r \leq x \leq R_1$ ):

$$E = k \frac{q}{x^2}; \varphi = kq \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{R_1} \right);$$

при  $R_1 \leq x < \infty$  поле отсутствует.

в) Если сферический слой сделан из диэлектрика, то при внесении его в поле заряженного шарика произойдет поляризация слоя, и на внутренней и внешней поверхностях появятся связанные заряды  $-q_{\text{св}}$  и  $+q_{\text{св}}$ . Электрическое поле в диэлектрике ослаблено в  $\epsilon$  раз, поэтому напряженность электрического поля в точке внутри сферического слоя, удаленной от центра шарика на расстояние  $x$ , с одной стороны, будет равна  $E = k \frac{q}{\epsilon x^2}$ , а с другой, ее можно найти как результат наложения поля шарика и поля связанных зарядов внутренней поверхности оболочки:  $E = k \frac{q}{x^2} - k \frac{q_{\text{св}}}{x^2}$ .

Приравнивая оба выражения для  $E$ , найдем модуль связанных зарядов на поверхности диэлектрика:

$$q_{\text{св}} = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} q.$$

После этого задача сводится к нахождению поля трех концентрических сфер радиусами  $r$ ,  $R_1$  и  $R_2$ , на которых находятся заряды  $q$ ,  $-\frac{\epsilon - 1}{\epsilon} q$  и  $+\frac{\epsilon - 1}{\epsilon} q$ . Аналогично результатам пункта а) находим:

внутри шарика ( $0 \leq x \leq r$ )

$$E = 0; \varphi = kq \left[ \frac{1}{r} - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right];$$

между шариком и слоем ( $r \leq x \leq R_1$ )

$$E = k \frac{q}{x^2}; \varphi = kq \left[ \frac{1}{x} - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right];$$

при  $R_1 \leq x \leq R_2$

$$E = k \frac{q}{x^2}; \varphi = kq \left[ \frac{1}{x} - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{R_2} \right) \right];$$

при  $R_2 \leq x \leq \infty$

$$E = k \frac{q}{x^2}; \varphi = k \frac{q}{x}.$$

*Ответ:* а)  $E = 0; \varphi = kq \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) (0 \leq x \leq r),$

$$E = k \frac{q}{x^2}; \varphi = kq \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) (r \leq x \leq R_1),$$

$$E = 0; \varphi = k \frac{q}{R_2} (R_1 \leq x \leq R_2),$$

$$E = k \frac{q}{x^2}; \varphi = k \frac{q}{x} (R_2 \leq x < \infty).$$

б)  $E = 0; \varphi = kq \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} \right) (0 \leq x \leq r);$

$$E = k \frac{q}{x^2}; \varphi = kq \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{R_1} \right) (r \leq x \leq R_1);$$

при  $R_1 \leq x < \infty$  поле отсутствует.

в)  $E = 0; \varphi = kq \left[ \frac{1}{r} - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right] (0 \leq x \leq r);$

$$E = k \frac{q}{x^2}; \varphi = kq \left[ \frac{1}{x} - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right] (r \leq x \leq R_1);$$

$$E = k \frac{q}{x^2}; \varphi = kq \left[ \frac{1}{x} - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{R_2} \right) \right] (R_1 \leq x \leq R_2);$$

$$E = k \frac{q}{x^2}; \varphi = k \frac{q}{x} \quad (R_2 \leq x < \infty).$$

### Задачи без решений

3.4.21. На расстоянии  $a = 10$  см от бесконечной проводящей плоскости находится точечный заряд  $Q = 20$  нКл. Вычислить напряженность  $E$  электрического поля в точке, удаленной от плоскости на расстояние  $a$  и от заряда  $Q$  на расстояние  $2a$ .

3.4.22. Точечный заряд  $Q$  находится на расстоянии  $a = 30$  см от бесконечной проводящей плоскости. Какова напряженность  $E$  электрического поля в точке  $A$  (рис. 3.28)?

3.4.23. Большая металлическая пластина расположена в вертикальной плоскости и соединена с землей (рис. 3.29). На расстоянии  $a = 10$  см от пластины находится неподвижная точка, к которой на нити длиной  $l = 12$  см подвешен маленький шарик массой  $m = 0,1$  г. При сообщении шаруку заряда  $Q$  он притянулся к пластине, в результате чего нить отклонилась от вертикали на угол  $\alpha = 30^\circ$ . Найти заряд  $Q$  шарика.

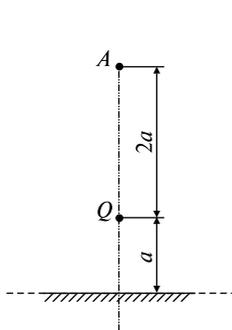


Рис. 3.28

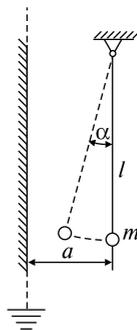


Рис. 3.29

3.4.24. Вблизи заземленной бесконечной металлической плоскости находится на расстоянии  $a$  от нее точечный заряд  $q$ . Определить поверхностную плотность  $\sigma$  зарядов, индуцированных на плоскости, как функцию расстояния  $x$  от основания перпендикуляра, опущенного из заряда на плоскость. Вычислить суммарный индуцированный заряд  $q_{\text{инд}}$  на плоскости.

3.4.25. Первоначально в пространстве между обкладками плоского конденсатора имеется вакуум. В этом случае напряженность электрического поля в зазоре равна  $E$ , а электрическое смеще-

ние  $D$ . Затем половина зазора заполняется так, как показано на рис. 3.30, однородным изотропным диэлектриком с проницаемостью  $\epsilon$ . Найти возникающие после этого значения  $E_1$  и  $D_1$  в части зазора 1, а также значения  $E_2$  и  $D_2$  в части зазора 2. Рассмотреть два случая:

- остается прежним напряжение между обкладками,
- остаются неизменными заряды на обкладках.

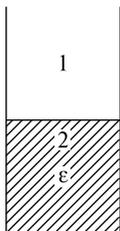


Рис. 3.30

3.4.26. Металлический шар радиусом  $R = 0,03$  м несет заряд  $Q = 2 \cdot 10^{-2}$  мкКл. Шар окружен слоем парафина толщиной  $d = 0,02$  м. Определить энергию  $W$  электрического поля, заключенного в слое диэлектрика. Диэлектрическая проницаемость парафина  $\epsilon = 2$ .

3.4.27. Радиусы обкладок сферического конденсатора  $r_1 = 9$  см и  $r_2 = 11$  см. Зазор между обкладками заполнен диэлектриком, проницаемость которого изменяется с расстоянием  $r$  от центра конденсатора по закону  $\epsilon = \epsilon_1(r_1/r)$ , где  $\epsilon_1 = 2$ . Найти емкость  $C$  конденсатора.

3.4.28. В однородном электрическом поле напряженностью  $E = 10^3$  В/м находится тонкая металлическая пластинка толщиной  $d = 1$  мм и площадью  $S = 40$  см<sup>2</sup>. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы извлечь пластинку из поля? Плоскость пластинки перпендикулярна направлению электрического поля.

3.4.29. Палочка из сегнетоэлектрика, обладающая остаточной поляризацией  $P_r$ , направленной вдоль оси палочки, подвешена за середину в горизонтальном положении на тонкой неупругой нити. Определить частоту  $\omega$  малых колебаний, которые палочка будет совершать в однородном горизонтально направленном поле с напряженностью  $E$  настолько слабым, что оно не оказывает существенного влияния на поляризацию палочки. Длина палочки  $l$ , плотность  $\rho$ .

3.4.30. Расстояние между пластинами плоского конденсатора  $d = 5$  мм. После зарядки конденсатора до разности потенциалов  $U = 500$  В между пластинами конденсатора вдвинули стеклянную пластинку ( $\epsilon = 7$ ). Определите: 1) диэлектрическую восприимчивость стекла; 2) поверхностную плотность связанных зарядов на стеклянной пластинке.

3.4.31. В однородное электростатическое поле напряженностью  $E_0 = 700$  В/м перпендикулярно полю поместили плоскопараллельную стеклянную пластинку ( $\epsilon = 7$ ) толщиной  $d = 1,5$  мм и площадью  $S = 200$  см<sup>2</sup>. Определите: 1) напряженность электростатического поля внутри пластинки; 2) электрическое смещение внутри пластинки; 3) поляризованность стекла; 4) поверхностную плотность зарядов на стекле; 5) энергию электростатического поля, сосредоточенную в пластинке.

3.4.32. Расстояние между пластинами плоского конденсатора  $d = 1$  см, разность потенциалов  $U = 200$  В. Определите поверхностную плотность  $\sigma'$  связанных зарядов эбонитовой пластинки ( $\epsilon = 3$ ), помещенной на нижнюю пластину конденсатора. Толщина пластинки  $d_1 = 8$  мм.

3.4.33. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено стеклом ( $\epsilon = 7$ ). Расстояние между пластинами  $d = 5$  мм, разность потенциалов  $U = 1$  кВ. Определить поверхностную плотность зарядов на пластинах конденсатора и поверхностную плотность связанных зарядов в стекле.

3.4.34. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено стеклом ( $\epsilon = 7$ ). Когда конденсатор подсоединили к источнику напряжения, давление пластин оказалось равным  $p = 1$  Па. Определить поверхностную плотность связанных зарядов на стекле и объемную плотность энергии электростатического поля в стекле.

### ТЕМА 3.5 ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

Основу метода решения задач по определению характеристик цепей постоянного тока составляет закон Ома, который устанавливает для участка цепи, не содержащего ЭДС, связь между напряжением  $U$  и силой тока  $I$ :

$$I = U/R, \quad (3.5.1)$$

где  $R$  — сопротивление участка. Для неоднородного участка цепи, т.е. содержащего источник тока с ЭДС, равной  $\mathcal{E}$ , имеет место соотношение

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}, \quad (3.5.2)$$

где  $\varphi_1 - \varphi_2$  — разность потенциалов на участке  $1 \rightarrow 2$ ,  $IR$  — напряжение. Под разностью потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$  понимают величину, численно равную работе кулоновских сил по перемещению единичного положительного заряда и, следовательно, не зависящую от пути интегрирования, а определяемую только начальной и конечной точками участка цепи. Электродвижущая сила  $\mathcal{E}$  — это скалярная характеристика стороннего поля, численно равная работе сил стороннего поля, отнесенной к единице положительного заряда, в котором работа по перенесению заряда зависит от пути интегрирования. Напряжением  $IR$  называют работу результирующего поля, т.е. кулоновского и стороннего, отнесенную к единице положительного заряда; таким образом, напряжение должно зависеть от пути интегрирования. Для замкнутого контура справедливо выражение

$$I = \mathcal{E}/(R + r), \quad (3.5.3)$$

где  $R$  — сопротивление внешней части контура,  $r$  — внутреннее сопротивление источника.

Во все соотношения (3.5.1)–(3.5.3) входит сопротивление  $R$ . Поэтому при решении задач важно уметь правильно рассчитывать эту величину. При последовательном соединении проводников общее сопротивление цепи определяется по формуле

$$R = \sum_i R_i, \quad (3.5.4)$$

где  $R_i$  — сопротивление каждого проводника, входящего в соединение. Для вычисления общего сопротивления проводников, соединенных параллельно, можно воспользоваться формулой

$$\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i}. \quad (3.5.5)$$

Для нахождения токов, текущих в разветвленной цепи, целесообразно использовать *правила Кирхгофа*.

*Первое правило* утверждает, что алгебраическая сумма токов в каждом узле цепи должна равняться нулю:

$$\sum_i I_i = 0. \quad (3.5.6)$$

*Второе правило*

$$\sum_i I_i R_i = \sum_i \mathcal{E}_i \quad (3.5.7)$$

означает, что сумма падений напряжения в любом замкнутом контуре цепи должна быть равна сумме ЭДС в этом контуре.

При решении задач с помощью правил Кирхгофа желательно придерживаться следующего порядка: 1) обозначить токи на всех участках цепи; 2) выбрать произвольное направление обхода по контуру; 3) записать II правило Кирхгофа для контура, соблюдая правило знаков: произведение  $I_i R_i$  берется со знаком плюс, если выбранное направление тока совпадает с направлением обхода участка; ЭДС  $\mathcal{E}$  берется со знаком плюс, если направление обхода участка совпадает с направлением стороннего поля — от отрицательного полюса элемента к положительному внутри источника; 4) записать правило Кирхгофа для одного из узлов, при этом токи, направленные к узлу, берутся со знаком плюс, а токи, направленные от узла, берутся со знаком минус.

Для определения работы  $A$  электрического тока следует воспользоваться законом Джоуля—Ленца

$$A = Q = IUt = I^2 R t = U^2 t / R, \quad (3.5.8)$$

где  $t$  — время работы источника электрического тока. Если сила тока  $I$  изменяется со временем, то количество тепла  $Q$ , выделяющееся за время  $\tau$ , вычисляется по формуле

$$Q = \int_0^{\tau} I^2 R dt. \quad (3.5.9)$$

Мощность, развиваемая током на рассматриваемом участке цепи, определяется по формуле

$$P = IU. \quad (3.5.10)$$

Мощность  $P$ , развиваемая источником тока с ЭДС  $\mathcal{E}$ , равна

$$P = I\mathcal{E}. \quad (3.5.11)$$

### Качественные задачи

3.5.1. Какой проводник представляет большее сопротивление для постоянного тока — сплошной медный стержень или медная трубка, имеющая внешний диаметр, равный диаметру стержня? Длину обоих проводников считать одинаковой.

3.5.2. Для того чтобы проверить, нет ли в двухпроводной линии электропередачи разрыва, в нее включили вольтметр. Что должен показывать вольтметр, если линия исправна, а напряжение в ней равно 220 В?

3.5.3. В схеме, изображенной на рис. 3.31, сопротивления всех резисторов одинаковы и равны  $R$ . Показание какого вольтметра будет больше? Почему?

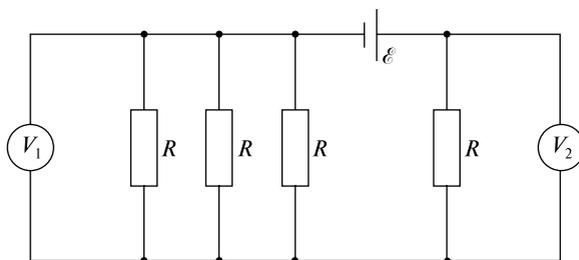


Рис. 3.31

3.5.4. Как следует включать реостат в схему, чтобы он работал а) как сопротивление? б) как потенциометр (делитель напряжения)?

3.5.5. Как связаны между собой удельное сопротивление  $\rho$  и электрическое сопротивление  $R$ ?

3.5.6. От чего зависит сила тока а) для замкнутой цепи; б) для однородного участка цепи; в) для неоднородного участка цепи? Как определяется сила тока в системе СИ?

3.5.7. Чему равно общее сопротивление при последовательном соединении сопротивлений  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$ ? Из каких соображений выводится эта формула?

3.5.8. Чему равно общее сопротивление при параллельном соединении сопротивлений  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$ ? Из каких соображений выводится эта формула?

3.5.9. На рис. 3.32 представлена электрическая цепь. Какие силы совершают работу над зарядом на участках 1-2, 3-4 цепи и в замкнутой цепи 1-2-3-4-1?

3.5.10. Чему равна работа над зарядом на всех участках 1-2, 3-4 цепи и в замкнутой цепи 1-2-3-4-1, представленной на рис. 3.32?

3.5.11. Запишите закон Ома для участка 1-2 цепи, изображенной на рис. 3.32.

3.5.12. Конденсатор  $C$  включен в цепь постоянного тока, как показано на рис. 3.33. Чему равна сила тока через сопротивление  $R_1$  в установившемся режиме?

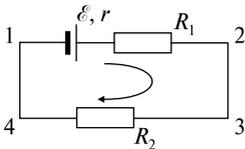


Рис. 3.32

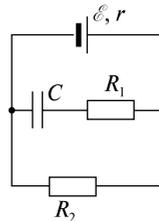


Рис. 3.33

3.5.13. Какая физическая величина численно равна работе сил стороннего поля? Зависит ли эта величина от пути интегрирования?

3.5.14. Какая физическая величина численно равна работе кулоновских сил? Зависит ли эта величина от пути интегрирования?

3.5.15. Какая физическая величина численно равна суммарной работе кулоновских и сторонних сил? Зависит ли эта величина от пути интегрирования?

3.5.16. Чему равно напряжение на зажимах источника при условии, если а) цепь замкнута на внешнее сопротивление  $R$ ; б) цепь разомкнута?

3.5.17. При какой величине внешнего сопротивления  $R$  возникает ток короткого замыкания  $I_k$ ? Чему он равен?

3.5.18. По двум медным проводникам одинаковой длины протекают одинаковые токи. Сечение второго проводника вдвое больше сечения первого:  $S_2 = 2S_1$ . Сравните напряженности электрических полей  $E_2/E_1$  в проводниках.

3.5.19. Разность потенциалов между точками 1 и 2 цепи, изображенной на рис. 3.34, равна  $\varphi_1 - \varphi_2 = 9$  В. ЭДС источника  $\mathcal{E} = 6$  В, его внутреннее сопротивление  $r = 1$  Ом. Внешнее сопро-

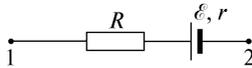


Рис. 3.34

тивление участка  $R = 2$  Ом. Определить величину и направление тока  $I$ .

3.5.20. Что представляет для человека бóльшую опасность: большой ток или высокое напряжение?

3.5.21. Когда дуга трамвайного вагона замыкает цепь, то по верхнему проводу и по рельсу идет одинаковый ток. Почему же, стоя на земле и касаясь проволоки, соединенной с верхним проводом, мы будем поражены током, а прикосновение к рельсу безопасно?

3.5.22. Елочная гирлянда сделана из 30 электрических лампочек, соединенных последовательно и питаемых от городской сети. После того, как одна лампочка перегорела, оставшиеся 29 лампочек снова соединили последовательно и включили в сеть городского тока. В каком случае в комнате было светлее, когда горело 30 лампочек или 29?

### Задачи с решениями

3.5.23. На рис. 3.35 (а — г) приведены участки цепи, содержащие источник. Используя заданное направление тока, определить соотношение между электродвижущей силой  $\mathcal{E}$  каждого из источ-

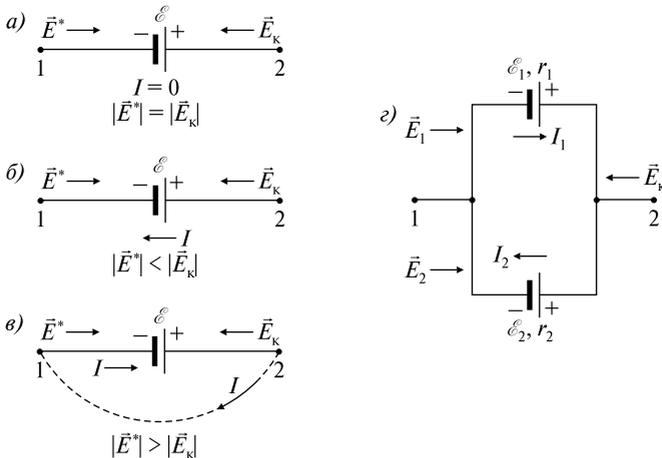


Рис. 3.35

ников и разностью потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$  между крайними точками соответствующего участка.

*Решение.* а) По условию на участке цепи  $1 \rightarrow 2$  ток  $I$  равен нулю. Следовательно, напряжение на участке также равно нулю:  $U = IR = 0$ . Стороннее поле источника  $\vec{E}^*$  (вектор напряженности стороннего поля внутри источника всегда направлен от отрицательного полюса к положительному) скомпенсировано кулоновским полем  $\vec{E}_k$ , направленным навстречу, при этом  $\varphi_2 > \varphi_1$  и, используя (3.5.2), получим  $\mathcal{E} = \varphi_2 - \varphi_1$ .

б) Направление тока, указанное на схеме, свидетельствует о том, что кулоновское поле  $\vec{E}_k$ , направленное навстречу стороннему  $\vec{E}^*$ , оказалось сильнее. Следовательно,  $\varphi_2 - \varphi_1 > \mathcal{E}$ . Такое соотношение может иметь место, если в остальной части цепи существует хотя бы один источник, включенный навстречу данному и обладающий большей ЭДС.

в) Если неизвестна остальная часть цепи (штриховая линия), то по данной схеме нельзя установить, какими силами обусловлено направление тока  $I$ : силами кулоновского поля  $\vec{E}_k$  или стороннего поля  $\vec{E}^*$ . Если предположить, что в остальной части цепи нет источников, то это означает, что  $\varphi_2 > \varphi_1$  (так как во внешней цепи ток идет от точки 2 с большим потенциалом  $\varphi_2$  к точке 1 с меньшим потенциалом  $\varphi_1$ ). Таким образом, на рассматриваемом участке  $1 \rightarrow 2$  кулоновское поле  $\vec{E}_k$  по-прежнему будет направлено навстречу стороннему  $\vec{E}^*$ .

Однако направление тока совпадает с направлением вектора  $\vec{E}^*$ , следовательно, это стороннее поле сильнее кулоновского, и тогда  $\varphi_2 - \varphi_1 < \mathcal{E}$ .

г) Судя по направлению тока  $I_2$ , потенциал точки 2 больше, чем потенциал точки 1, т.е.  $\varphi_2 > \varphi_1$ , причем стороннее поле второго источника  $\vec{E}_2^*$  слабее кулоновского  $\vec{E}_k$ . Направление тока  $I_1$  указывает на то, что внутри первого источника кулоновское поле  $\vec{E}_k$  слабее стороннего  $\vec{E}_1^*$ , следовательно,  $\mathcal{E}_1 > \varphi_2 - \varphi_1 > \mathcal{E}_2$ . Так как  $I_1 r_1 = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_1$  и  $-I_2 r_2 = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_2$ , то напряжения на участках цепи различны, т.е.  $I_1 r_1 \neq I_2 r_2$ .

*Ответ:* а)  $\mathcal{E} = \varphi_2 - \varphi_1$ , б)  $\varphi_2 - \varphi_1 > \mathcal{E}$ , в)  $\varphi_2 - \varphi_1 < \mathcal{E}$ , г)  $\mathcal{E}_1 > \varphi_2 - \varphi_1 > \mathcal{E}_2$ .

3.5.24. Два одинаковых источника с ЭДС  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = 1,2$  В и внутренним сопротивлением  $r = 0,4$  Ом соединены, как показано на

рис. 3.36. Какова сила тока  $I$  в цепи и разность потенциалов  $\varphi_A - \varphi_B$  между точками  $A$  и  $B$  в первом и во втором случаях?

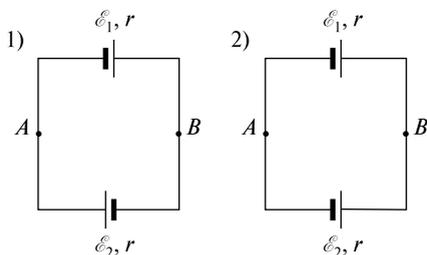


Рис. 3.36

*Решение.* 1) Запишем закон Ома (3.5.3) для замкнутой цепи

$$I = (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)/2r = 3 \text{ А.}$$

Закон Ома (3.5.2) для участка цепи  $A\mathcal{E}_1B$  будет  $Ir = \varphi_A - \varphi_B + \mathcal{E}_1$ , откуда  $\varphi_A - \varphi_B = Ir - \mathcal{E}_1$ ;  $\varphi_A - \varphi_B = 0 \text{ В}$ .

2) В этом случае закон (3.5.3) запишется так:

$$I = (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)/2r = 0 \text{ А,}$$

а для участка цепи  $A\mathcal{E}_1B$  выражение (3.5.2) будет иметь вид  $Ir = \varphi_A - \varphi_B + \mathcal{E}_1$ , откуда  $\varphi_A - \varphi_B = Ir - \mathcal{E}_1$ ;  $\varphi_A - \varphi_B = -1,2 \text{ В}$ .

Следовательно,  $\varphi_B > \varphi_A$ .

*Ответ:* 1)  $I = (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)/2r = 3 \text{ А}$ ,  $\varphi_A - \varphi_B = 0 \text{ В}$ ,  
2)  $I = (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)/2r = 0 \text{ А}$ ,  $\varphi_A - \varphi_B = Ir - \mathcal{E}_1 = -1,2 \text{ В}$ .

3.5.25. Два источника ( $\mathcal{E}_1 = 8 \text{ В}$ ,  $r_1 = 2 \text{ Ом}$ ;  $\mathcal{E}_2 = 6 \text{ В}$ ,  $r_2 = 1,5 \text{ Ом}$ ) и реостат ( $r = 10 \text{ Ом}$ ) соединены, как показано на рис. 3.37. Вычислить силу тока  $I$ , текущего через реостат.

*Решение.* Выберем направления токов  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I$  и направления обходов контуров, как показано на рис. 3.37. Запишем правила Кирхгофа (3.5.6) и (3.5.7)

$$\text{для контура } \mathcal{E}_1\mathcal{E}_2\mathcal{E}_1: \quad I_1 r_1 - I_2 r_2 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2;$$

$$\text{для контура } \mathcal{E}_2 r \mathcal{E}_2: \quad I_2 r_2 + Ir = \mathcal{E}_2, \quad (1)$$

$$\text{для узла } A: \quad I_1 + I_2 - I = 0.$$

Решая систему (1), найдем силу тока  $I$  через реостат  $r$ :

$$I = (\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1)/(r_1 r_2 + r r_1 + r r_2) = 0,63 \text{ А.}$$

*Ответ:*  $I = (\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1)/(r_1 r_2 + r r_1 + r r_2) = 0,63 \text{ А}$ .

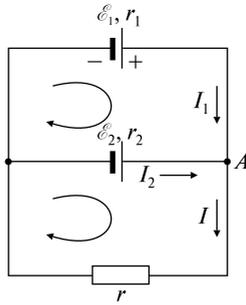


Рис. 3.37

3.5.26. Три гальванических элемента с ЭДС  $\mathcal{E}_1 = 2,5$  В,  $\mathcal{E}_2 = 2,2$  В и  $\mathcal{E}_3 = 3,0$  В и с внутренними сопротивлениями  $r = 0,2$  Ом каждый включены, как показано на рис. 3.38. Внешнее сопротивление  $R = 4,7$  Ом. Найти силы токов  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $I$  во всех участках цепи, разность потенциалов  $\varphi_B - \varphi_A$  между узлами, количество джоулевой теплоты  $Q$ , выделяющееся во всей цепи, и работу каждого элемента  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$  за время  $\tau = 1$  с.

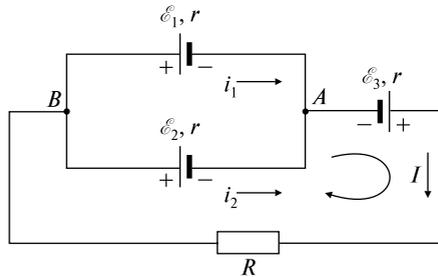


Рис. 3.38

*Решение.* Выберем направления токов, как показано на рисунке. Применим (3.5.7)

$$\text{к контуру } A\mathcal{E}_3RB\mathcal{E}_1A: \quad I(R+r) + i_1r = \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_1,$$

$$\text{к контуру } A\mathcal{E}_3RB\mathcal{E}_2A: \quad I(R+r) + i_2r = \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_2 \quad (1)$$

$$\text{и (3.5.6) к узлу } A: \quad i_1 + i_2 - I = 0.$$

Решая систему уравнений (1), найдем

$$i_1 = [\mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_1 - i_2(R+r)] / (2r+R) = -0,68 \text{ А};$$

$$i_2 = [r(\mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_1) + R(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) - 2r\mathcal{E}_2] / [r(3r+2R)] = 0,81 \text{ А}.$$

Следовательно, в действительности ток  $i_1$  течет от точки  $A$  к точке  $B$ .

Суммарный ток в неразветвленной части цепи  $I = i_1 + i_2 = 0,13$  А.

Разность потенциалов  $\varphi_B - \varphi_A$  можно найти, используя (3.5.2)

$$\begin{aligned} \text{для участка цепи } B\mathcal{E}_2A: \quad i_2 r &= \varphi_B - \varphi_A - \mathcal{E}_2; \\ \varphi_B - \varphi_A &= \mathcal{E}_2 + i_2 r = 2,36 \text{ В} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{или для участка цепи } BR\mathcal{E}_3A: \quad -I(R+r) &= \varphi_B - \varphi_A - \mathcal{E}_3; \\ \varphi_B - \varphi_A &= \mathcal{E}_3 - I(R+r) = 2,36 \text{ В.} \end{aligned}$$

Количество джоулевой теплоты, выделяющееся во всей цепи, определяется по формуле (3.5.8):

$$Q = [I^2(R+r) + i_1^2 r + i_2^2 r] \tau = 0,31 \text{ Дж.}$$

Для нахождения работы, совершаемой каждым элементом, используем формулу (3.5.11). Учитывая, что  $A = P\tau$ , получим

$$A_1 = -i_1 \mathcal{E}_1 \tau = 1,70 \text{ Дж — положительна,}$$

$$A_2 = -i_2 \mathcal{E}_2 \tau = -1,78 \text{ Дж — отрицательна,}$$

$$A_3 = I \mathcal{E}_3 \tau = 0,39 \text{ Дж — положительна.}$$

Следует проверить, что суммарная работа всех источников равна количеству джоулевой теплоты, выделившейся в цепи:

$$+1,70 - 1,78 + 0,39 = 0,31 \text{ Дж, т.е. } A_1 + A_2 + A_3 = Q.$$

Другими словами, суммарная положительная работа, совершаемая первым и третьим элементами, равна сумме количества теплоты, выделяющейся во всей цепи, и работы, совершаемой против стороннего поля второго элемента:

$$A_1 + A_3 = -A_2 + Q \rightarrow 1,70 + 0,39 = -(-1,78) + 0,31.$$

*Ответ:*  $i_1 = -0,68$  А;  $i_2 = 0,81$  А,  $I = i_1 + i_2 = 0,13$  А,  $\varphi_B - \varphi_A = \mathcal{E}_3 - I(R+r) = 2,36$  В,  $A_1 = -i_1 \mathcal{E}_1 \tau = 1,70$  Дж,  $A_2 = -i_2 \mathcal{E}_2 \tau = -1,78$  Дж,  $A_3 = I \mathcal{E}_3 \tau = 0,39$  Дж,  $Q = A_1 + A_2 + A_3 = 0,31$  Дж.

3.5.27. Два конденсатора емкостью  $C_1 = 1$  мкФ и  $C_2 = 2$  мкФ подключены к источнику постоянного напряжения, как показано на рис. 3.39. Сопротивления резисторов  $R_1 = 300$  Ом,  $R_2 = 100$  Ом  $R_3 = 100$  Ом. При разомкнутом ключе конденсатор  $C_2$  имеет заряд

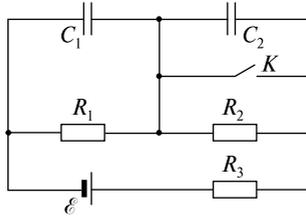


Рис. 3.39

$Q_2 = 4 \cdot 10^{-6}$  Кл. Какой заряд  $Q_1$  установится на конденсаторе  $C_1$ , если ключ замкнуть? Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

*Решение.* При разомкнутом ключе  $K$  ток от источника потечет по цепи, состоящей из последовательно соединенных резисторов  $R_1, R_2, R_3$ . Используя соотношения (3.5.3) и (3.5.4), запишем

$$I_2 = \mathcal{E}/(R_1 + R_2 + R_3). \quad (1)$$

Тогда падение напряжения на резисторе  $R_2$  будет

$$U_2 = I_2 R_2, \quad (2)$$

а на конденсаторе  $C_2$  установится заряд

$$Q_2 = C_2 U_2. \quad (3)$$

Используя (1), (2) и (3), можно записать

$$Q_2 = C_2 \mathcal{E} R_2 / (R_1 + R_2 + R_3). \quad (4)$$

Откуда можно найти ЭДС источника  $\mathcal{E}$ :

$$\mathcal{E} = Q_2 (R_1 + R_2 + R_3) / R_2 C_2. \quad (5)$$

Если ключ  $K$  замкнуть, то весь ток практически потечет через ключ  $K$  ( $R = 100$  Ом), и ток  $I_1$  определим из (3.5.3):

$$I_1 = \mathcal{E}/(R_1 + R_3). \quad (6)$$

В этом случае падение напряжения на конденсаторе  $C_1$  равно  $U_1 = I_1 R_1$ , а искомый заряд  $Q_1$  найдем по формуле

$$Q_1 = C_1 U_1 = C_1 \mathcal{E} R_1 / (R_1 + R_3). \quad (7)$$

Окончательно, используя (5), получим

$$Q_1 = Q_2 R_1 C_1 (R_1 + R_2 + R_3) / R_2 C_2 (R_1 + R_3) = 7,5 \cdot 10^{-6} \text{ Кл.}$$

*Ответ:*  $Q_1 = 7,5 \cdot 10^{-6}$  Кл.

3.5.28. К источнику постоянного напряжения  $\mathcal{E} = 40$  В подключен резистор (рис. 3.40, а). Внутреннее сопротивление источника  $r = 100$  Ом. Определить: 1) при каком сопротивлении  $R$  резистора выделившаяся в нем мощность  $P$  будет наибольшей; 2) максимальную мощность  $P_{\max}$ , выделившуюся на резисторе.

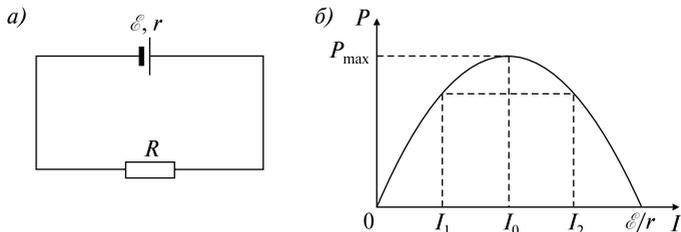


Рис. 3.40

*Решение.* 1) Мощность источника (3.5.11)  $P_{\mathcal{E}} = \mathcal{E}I$  будет складываться из полезной мощности  $P$ , выделяющейся на внешнем резисторе  $R$ , и мощности (джоулевой теплоты), выделяющейся на внутреннем сопротивлении  $r$  источника. Таким образом,

$$\mathcal{E}I = I^2r + P, \text{ или } P = \mathcal{E}I - I^2r. \quad (1)$$

Поскольку мощность  $P \geq 0$ , то  $I(\mathcal{E} - Ir) \geq 0$ . Так как  $I \geq 0$ , то  $\mathcal{E} \geq Ir$ , т.е. получаем, что сила тока может принимать значения, заключенные в пределах  $0 \leq I \leq \mathcal{E}/r$ .

Решая квадратное уравнение  $-I^2r + \mathcal{E}I - P = 0$  относительно  $I$ , найдем

$$I_{1,2} = \frac{\mathcal{E} \pm \sqrt{\mathcal{E}^2 - 4Pr}}{2r}. \quad (2)$$

Построим график зависимости  $P(I)$  (рис. 3.40, б). Очевидно, что мощность  $P$  будет максимальной при токе

$$I_0 = \mathcal{E}/2r, \quad (3)$$

когда

$$(\mathcal{E}^2 - 4Pr)^{1/2} = 0.$$

Запишем закон Ома для полной цепи (3.5.3):

$$I = \mathcal{E}/(R + r). \quad (4)$$

Сравнивая (3) и (4), получим

$$R = r = 100 \text{ Ом.}$$

2) Мощность, выделяющуюся на внешнем резисторе  $R$ , определим, используя (4) и (3.5.10):

$$P = IU = I^2 R = \mathcal{E}^2 R / (R + r)^2 = 0,1 \text{ Вт.}$$

*Ответ:*  $R = r = 100 \text{ Ом, } P = IU = \mathcal{E}^2 R / (R + r)^2 = 0,1 \text{ Вт.}$

3.5.29. По проводнику сопротивлением  $R = 3 \text{ Ом}$  течет равномерно возрастающий ток. Количество теплоты, выделившееся в проводнике за время  $\tau = 8 \text{ с}$ , равно  $Q = 200 \text{ Дж}$ . Определить количество электричества  $q$ , протекшее за это время по проводнику. В начальный момент времени сила тока в проводнике была равна нулю.

*Решение.* По условию задачи сила тока нарастала по линейному закону, т.е.  $I = at$ . Количество теплоты, выделяющееся за элементарно малое время  $dt$ , выражается формулой  $dQ = I^2 R dt$ .

Тогда количество теплоты  $Q$ , выделяющееся за все время  $\tau$ , согласно (3.5.9), будет

$$Q = \int_0^{\tau} I^2(t) R dt = \int_0^{\tau} (at)^2 R dt = a^2 R \int_0^{\tau} t^2 dt = \frac{a^2 R}{3} t^3 \Big|_0^{\tau} = \frac{a^2 R \tau^3}{3}.$$

Отсюда можно определить скорость нарастания тока с течением времени, т.е.

$$a = (3Q/R\tau^3)^{1/2}.$$

Элементарный заряд, протекающий по проводнику за элементарно малый промежуток времени  $dt$ , равен  $dq = Idt$ . Тогда полный заряд  $q$ , протекший по проводнику за все время  $\tau$ , можно посчитать:

$$q = \int_0^{\tau} I(t) dt = \int_0^{\tau} at dt = \frac{at^2}{2} \Big|_0^{\tau} = \frac{a\tau^2}{2} = \sqrt{\frac{3Q}{R\tau^3}} \frac{\tau^2}{2} = \sqrt{\frac{3Q\tau}{4R}} = 20 \text{ Кл.}$$

*Ответ:*  $q = \sqrt{\frac{3Q\tau}{4R}} = 20 \text{ Кл.}$

### Задачи без решений

3.5.30. Получить формулы общего сопротивления для последовательного и параллельного соединений резисторов.

3.5.31. Батарея с ЭДС  $\mathcal{E} = 20 \text{ В}$  последовательно соединена с реостатом  $R_1$ , резистором  $R_2$  и амперметром  $A$  (рис. 3.41). При

выведенном реостате  $R_1$  амперметр показывает силу тока  $I_1 = 8$  А; при введенном реостате  $R_1$  — силу тока  $I_2 = 5$  А. Найти сопротивление реостата  $R_1$ , сопротивление резистора  $R_2$  и падения напряжения  $U_1$  и  $U_2$  на них в том случае, когда реостат  $R_1$  полностью включен. Сопротивлением батареи и амперметра пренебречь.

3.5.32. Два элемента с одинаковым ЭДС  $\mathcal{E}$  и разными внутренними сопротивлениями  $r_1$  и  $r_2$  соединены последовательно и замкнуты на внешнее сопротивление  $R$  (рис. 3.42). Какова должна быть величина внешнего сопротивления  $R$ , чтобы разность потенциалов  $\phi_1 - \phi_2$  на полюсах первого элемента была равна нулю?

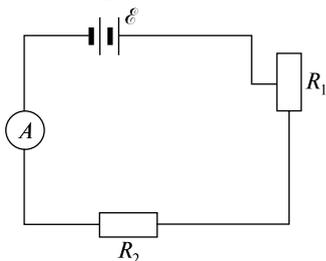


Рис. 3.41

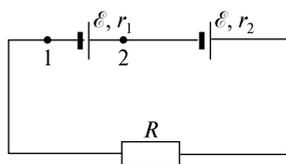


Рис. 3.42

3.5.33. Два последовательно соединенных элемента с ЭДС  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$  и внутренними сопротивлениями  $r_1$  и  $r_2$ , замкнутые на внешнее сопротивление  $R$ , дают в цепи ток  $I_2$ . При включении в цепь одной ЭДС  $\mathcal{E}_1$  с внутренним сопротивлением  $r_1$  в цепи потечет ток  $I_1$ . При каком соотношении между параметрами цепи будет выполняться соотношение  $I_2 < I_1$ ?

3.5.34. Какой заряд  $q$  протечет через резистор  $R$  в схеме, представленной на рис. 3.43, если ключ  $K$  разомкнуть? ЭДС источника  $\mathcal{E} = 3$  В, сопротивления  $R_1 = 30$  Ом и  $R_2 = 70$  Ом, емкость конденсатора  $C = 10$  мкФ. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

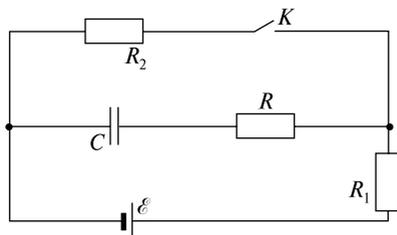


Рис. 3.43

3.5.35. Какую силу тока  $I_2$  показывает амперметр в схеме, изображенной на рис. 3.44, если  $\mathcal{E}_1 = 2$  В,  $\mathcal{E}_2 = 1$  В,  $R_1 = 1 \cdot 10^3$  Ом,  $R_2 = 500$  Ом,  $R_3 = 200$  Ом, и сопротивление амперметра  $R_A = 200$  Ом? Внутренним сопротивлением элементов пренебречь.

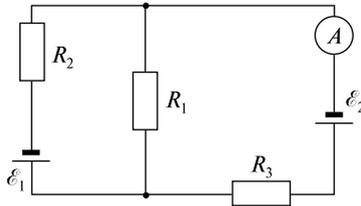


Рис. 3.44

3.5.36. Определить силу тока  $I_3$  в сопротивлении  $R_3$  (рис. 3.45) и напряжение  $U_3$  на концах этого сопротивления, если  $\mathcal{E}_1 = 4$  В,  $\mathcal{E}_2 = 3$  В,  $R_1 = 2$  Ом,  $R_2 = 6$  Ом,  $R_3 = 1$  Ом. Внутренним сопротивлением источников тока пренебречь.

3.5.37. Батарея состоит из  $n = 5$  последовательно соединенных гальванических элементов. ЭДС каждого элемента  $\mathcal{E} = 1,4$  В, внутреннее сопротивление каждого элемента равно  $r = 0,3$  Ом. При какой силе тока  $I$  мощность, выделяемая на подключенном к батарее сопротивлении, будет равна  $P = 8$  Вт?

3.5.38. В цепь, питаемую источником тока с внутренним сопротивлением  $r = 3$  Ом, входят два резистора с одинаковыми сопротивлениями  $R_1 = R_2 = 28$  Ом, включенные параллельно, и резистор с сопротивлением  $R_3 = 40$  Ом (рис. 3.46). Параллельно резистору  $R_3$  подключен конденсатор емкостью  $C = 5$  мкФ, заряд которого  $q = 4,2$  мкКл. Найти ЭДС  $\mathcal{E}$  источника.

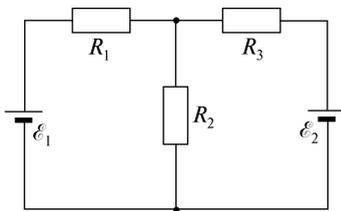


Рис. 3.45

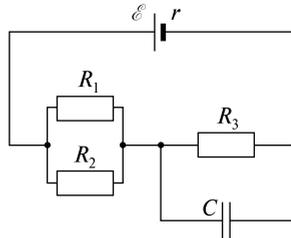


Рис. 3.46

## ТЕМА 3.6 МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ТОКОВ

В основе нахождения магнитного поля, созданного токами, лежит закон Био—Савара—Лапласа, согласно которому индукция магнитного поля  $d\vec{B}$ , созданного элементом тока  $I d\vec{l}$  в произвольной точке  $C$ , дается выражением

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[I d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}, \quad (3.6.1)$$

где  $\vec{r}$  — радиус-вектор, проведенный от элемента  $d\vec{l}$  в точку  $C$ ,  $\mu_0$  — магнитная постоянная, равная  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м. Величина  $dB$  равна

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin \alpha}{4\pi r^2}, \quad (3.6.2)$$

где  $\alpha$  — угол между направлениями векторов  $I d\vec{l}$  и  $\vec{r}$ . Согласно принципу суперпозиции, полная индукция магнитного поля в точке может быть найдена суммированием (или интегрированием) по всем элементам тока:

$$\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i, \quad (3.6.3)$$

$$\vec{B} = \int d\vec{B}. \quad (3.6.4)$$

Используя (3.6.2), можно найти величину индукции магнитного поля  $\vec{B}$ , созданного бесконечно длинным прямым проводником с силой тока  $I$ :

$$B = \mu_0 I / 2\pi r, \quad (3.6.5)$$

где  $r$  — расстояние от прямого тока до рассматриваемой точки.

Однако выражение (3.6.5) значительно проще получить, применяя теорему о полном токе:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i, \quad (3.6.6)$$

в (3.6.6) интегрирование ведется по замкнутому контуру  $L$ ,  $d\vec{l}$  — бесконечно малый (векторный) элемент длины,  $\sum_i I_i$  — алгебраическая сумма токов, охватываемых контуром  $L$ .

Используя (3.6.2), полезно получить величину индукции магнитного поля в центре кругового витка радиусом  $R$ , по которому течет ток  $I$ :

$$B = \mu_0 I / 2R. \quad (3.6.7)$$

Индукция  $B$  магнитного поля, созданного длинным соленоидом, в средней его части (или тороидом на его оси) определяется по формуле

$$B = \mu_0 n I, \quad (3.6.8)$$

где  $n$  — число витков, приходящихся на единицу длины соленоида,  $I$  — сила тока, протекающего по соленоиду.

На элемент проводника  $d\vec{l}$ , по которому течет ток  $I$ , помещенный в магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$ , действует сила  $d\vec{F}$ , определяемая по закону Ампера:

$$d\vec{F} = I[d\vec{l}, \vec{B}]. \quad (3.6.9)$$

Модуль силы  $d\vec{F}$  вычисляется по формуле

$$dF = IB dl \sin \alpha, \quad (3.6.10)$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $d\vec{l}$  и  $\vec{B}$ .

Если в однородное магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$  помещен замкнутый контур, по которому течет ток  $I$ , то на контур действует механический момент  $\vec{M}$ :

$$\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}], \quad (3.6.11)$$

величина которого равна

$$M = p_m B \sin \alpha, \quad (3.6.12)$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $\vec{p}_m$  и  $\vec{B}$ ,  $\vec{p}_m$  — магнитный момент контура с током, равный

$$\vec{p}_m = I\vec{S}. \quad (3.6.13)$$

Здесь модуль вектора  $|\vec{S}|$  численно равен площади  $S$ , охватываемой контуром, а направление  $\vec{S}$  совпадает с направлением положительной нормали  $\vec{n}$  к контуру.

Сила, действующая на положительный заряд  $q$ , движущийся со скоростью  $\vec{v}$  в магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$ , выражается формулой (сила Лоренца)

$$\vec{F} = q[\vec{v}, \vec{B}], \quad (3.6.14)$$

или

$$F = qvB \sin \alpha, \quad (3.6.15)$$

где  $\alpha$  — угол, образованный вектором скорости  $\vec{v}$  движения частицы и вектором индукции магнитного поля  $\vec{B}$ .

Для однородного магнитного поля с индукцией  $\vec{B}$  магнитный поток  $\Phi$ , пронизывающий элементарную площадку  $d\vec{S}$  ( $d\vec{S}$  направлен по направлению положительной нормали  $\vec{n}$  к контуру) определяется как скалярное произведение

$$d\Phi = (\vec{B}, d\vec{S}), \quad (3.6.16)$$

или

$$d\Phi = B dS \cos \alpha, \quad (3.6.17)$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $\vec{B}$  и  $d\vec{S}$ .

В случае неоднородного магнитного поля поток  $\Phi$  вектора индукции выражается интегралом

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}, \quad (3.6.18)$$

где интегрирование ведется по всей площади  $S$ .

Работа, совершаемая силами магнитного поля над контуром, по которому течет ток  $I$ , при перемещении контура в поле равна

$$A = I(\Phi_2 - \Phi_1), \quad (3.6.19)$$

где  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  — значения магнитного потока через контур в начальном и конечном положениях контура соответственно.

Внешние силы совершают над движущимся контуром работу  $A'$ :

$$A' = -A = I(\Phi_1 - \Phi_2). \quad (3.6.20)$$

### Качественные задачи

3.6.1. Что такое электронвольт?

3.6.2. Изобразите положение витка с током в магнитном поле, при котором он будет находиться в состоянии неустойчивого равновесия.

3.6.3. Магнитный момент кругового витка с током сонаправлен с силовыми линиями однородного магнитного поля. Что произойдет с витком, если его немного отклонить от первоначального положения?

3.6.4. Магнитный момент кругового витка с током антипараллелен силовым линиям однородного магнитного поля. Что про-

изойдет с витком, если его немного отклонить от первоначального положения?

3.6.5. Плоскость кругового витка с током расположена перпендикулярно силовым линиям однородного магнитного поля. Что произойдет с витком, если его немного отклонить от первоначального положения?

3.6.6. Каково должно быть расположение прямолинейного проводника с током в однородном магнитном поле, чтобы а) сила Ампера была минимальной; б) сила Ампера была максимальной?

3.6.7. Какое направление имеет вектор силы  $\vec{F}$ , действующей со стороны магнитного поля на движущийся положительный электрический заряд, если направление вектора скорости заряда  $\vec{v}$  совпадает с направлением вектора индукции магнитного поля  $\vec{B}$ ?

3.6.8. Каким образом электрон должен влетать в магнитное поле, чтобы его траектория представляла собой а) прямую линию; б) окружность; в) винтовую линию?

3.6.9. Воображаемая поверхность сферы радиусом  $R$  пересекает проводник с током, расположенный по диаметру сферы. Изменится ли поток вектора магнитной индукции через эту сферу, если проводник с током переместить параллельно себе на расстояние  $a = R/2$ ?

3.6.10. Как расположится магнитная стрелка, помещенная в центре кругового тока  $I_k$  радиусом  $a$ , если на расстоянии  $a$  от центра витка параллельно плоскости витка поместить прямолинейный проводник с током  $I_n$ , причем  $I_n = \pi I_k$ ?

3.6.11. По двум бесконечно длинным прямолинейным проводникам, находящимся на расстоянии  $a$  друг от друга, текут одинаковые токи  $I$  в одном направлении. Определить индукцию магнитного поля  $B$  в точке, лежащей в плоскости токов на равном расстоянии от них.

3.6.12. По двум бесконечно длинным прямолинейным проводникам, находящимся на расстоянии  $a$  друг от друга, текут одинаковые токи  $I$  в противоположных направлениях. Определить индукцию магнитного поля  $B$  в точке, лежащей посередине между проводами.

3.6.13. Два бесконечно длинных прямолинейных проводника лежат в одной плоскости перпендикулярно друг другу. По ним текут токи одинаковой силы  $I$  в направлениях, указанных на

рис. 3.47. Определить индукцию магнитного поля  $B$  вдоль биссектрис, лежащих в I–IV четвертях плоскости.

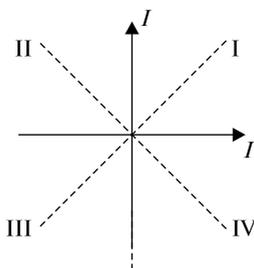


Рис. 3.47

3.6.14. Как изменяется радиус траектории движения заряженной частицы в однородном магнитном поле при увеличении ее энергии в 4 раза?

3.6.15. Протон и электрон, ускоренные одинаковой разностью потенциалов, влетают в однородное магнитное поле перпендикулярно его линиям индукции. Во сколько раз радиус кривизны  $R_1$  траектории протона больше радиуса кривизны  $R_2$  траектории электрона?

3.6.16. Почему два проводника, по которым текут параллельные токи, притягиваются, а два пучка катодных лучей отталкиваются?

3.6.17. Два одинаковых круговых витка с одинаковыми по величине токами  $I$  расположены на одной оси  $OO'$  на некотором расстоянии друг от друга. Плоскости витков параллельны. Направления токов показаны на рис. 3.48. Определить направление магнитного поля в точке  $M$ , расположенной на одинаковом расстоянии от центров витков.

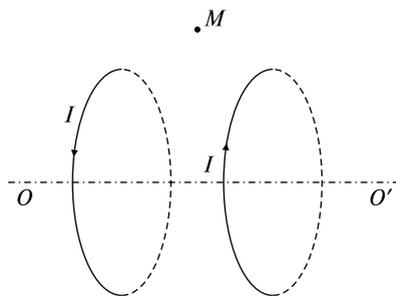


Рис. 3.48

3.6.18. Два одинаковых круговых витка с одинаковыми по величине токами  $I$  расположены на одной оси  $OO'$  на некотором расстоянии друг от друга. Плоскости витков параллельны. Направления токов показаны на рис. 3.49. Определить направление магнитного поля в точке  $M$ , расположенной на одинаковом расстоянии от центров витков.

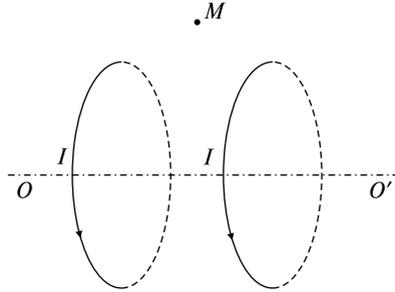


Рис. 3.49

3.6.19. В однородном магнитном поле, вектор индукции которого равен  $\vec{B}$ , расположен прямоугольный контур со сторонами  $a$  и  $b$  (рис. 3.50). Рассчитать циркуляцию вектора  $\vec{B}$  по данному контуру с указанным на рисунке направлением обхода.

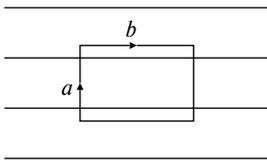


Рис. 3.50

3.6.20. Рассчитать полный ток  $I$ , охватываемый контуром  $l$  (рис. 3.51). Катушка содержит  $N$  витков с током  $I_1$ . Направление обхода контура указано на рисунке.

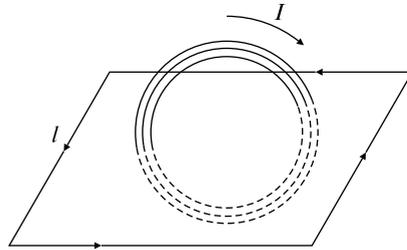


Рис. 3.51

3.6.21. Рассчитать полный ток  $I$ , охватываемый контуром  $L$ . Направление обхода контура показано стрелкой на рис. 3.52.

3.6.22. По тонкостенной цилиндрической трубе радиусом  $R$  протекает ток  $I$ . Нарисуйте график зависимости индукции магнитного поля  $B$  от расстояния  $r$  до оси проводника.

3.6.23. По цилиндрическому проводнику радиусом  $R$  протекает постоянный ток  $I$ , равномерно распределенный по сечению

проводника. Изобразите качественно графически зависимость индукции магнитного поля  $B$  от расстояния  $r$  до оси проводника.

3.6.24. По толстостенной трубе с внутренним радиусом  $R_1$  и внешним  $R_2$  течет ток  $I$ , равномерно распределенный по сечению трубы. Изобразите качественно графически зависимость индукции магнитного поля  $B$  от расстояния  $r$  до оси проводника.

3.6.25. Определите силу, действующую на проводник с током  $I_1$  в форме окружности радиусом  $R$ , через центр которой проходит бесконечно длинный проводник с током  $I_2$  (рис. 3.53).

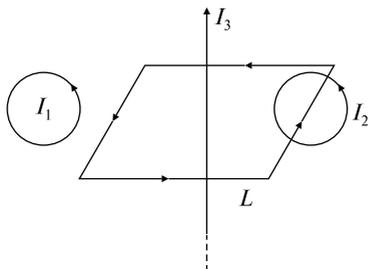


Рис. 3.52

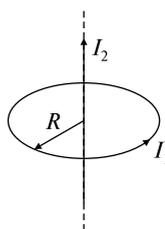


Рис. 3.53

3.6.26.  $\alpha$ -частица, летящая со скоростью  $\vec{v}$ , попадает в плоский заряженный конденсатор так, что скорость ее движения параллельна пластинам (рис. 3.54). Одновременно в пространстве между пластинами создано магнитное поле  $\vec{B}$ . Каким должно быть его направление, чтобы траектория  $\alpha$ -частицы в полях могла остаться прямолинейной?

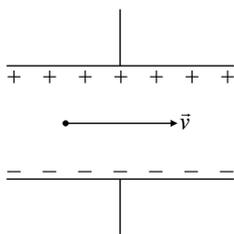


Рис. 3.54

3.6.27. Известно, что магнитное поле тока в электропроводке квартиры может отклонять стрелку компаса. а) В случае какого тока (постоянного или переменного) имеет место это явление? Как этот эффект зависит от б) увеличения силы тока; в) увеличения расстояния от проводника?

3.6.28. Пусть длинный цилиндрический проводник, по которому течет ток, имеет полость в виде концентрического цилиндра, т.е. имеет вид трубы. Чему равна индукция магнитного поля  $\vec{B}$  внутри полости?

3.6.29. Два длинных проводника, по которым текут токи одинаковой силы  $I$ , пересекаются, не соприкасаясь, под прямым углом. Чему равна сила, с которой один проводник действует на элемент тока другого проводника, расположенный на линии кратчайшего расстояния между проводниками?

3.6.30. Два длинных проводника, по которым текут токи одинаковой силы  $I$ , пересекаются, не соприкасаясь, под прямым углом. а) Чему равна сила, с которой один проводник действует на другой? б) Как изменится эта сила, если по одному из проводников пустить ток силой  $2I$ ?

3.6.31. По горизонтальному проводнику течет большой ток. Ниже подвешен второй проводник, по которому также течет ток. В каком направлении должен идти ток в нижнем проводнике, чтобы верхний проводник удерживал нижний во взвешенном состоянии?

3.6.32. Горизонтальный проводник с током может свободно передвигаться и находиться во взвешенном состоянии непосредственно над другим, параллельным проводником с током. а) Как направлен ток в нижнем проводнике? б) Может ли верхний проводник находиться в устойчивом равновесии благодаря магнитным силам со стороны нижнего? Объясните.

3.6.33. Ток силой  $I$  течет по полой тонкостенной трубе радиусом  $R_2$  и возвращается по тонкому сплошному проводнику радиусом  $R_1$ , проложенному по оси трубы (рис. 3.55). Чему равен магнитный поток  $\Phi$ , пронизывающий площадь, ограниченную контуром

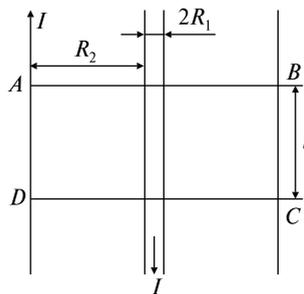


Рис. 3.55

$ABCD$ , причем  $AD = BC = l$  — единичная длина всей системы. Всю систему считать бесконечно длинной. Полем внутри металла пренебречь.

3.6.34. Изобразите силовые линии постоянного магнита.

### Задачи с решениями

3.6.35. По плоскому контуру, изображенному на рис. 3.56, течет ток силой  $I = 1$  А. Угол между прямолинейными участками контура прямой. Радиусы  $r_1 = 0,1$  м,  $r_2 = 0,2$  м. Найти магнитную индукцию  $B_C$  в точке  $C$ .

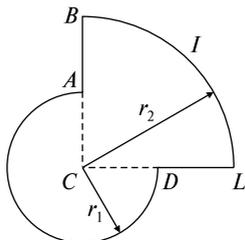


Рис. 3.56

*Решение.* Разобьем контур, изображенный на рисунке, на следующие участки:  $DA$ ,  $AB$ ,  $BL$  и  $LD$ . Тогда согласно (3.6.3) индукция  $\vec{B}_C$  магнитного поля в точке  $C$  будет складываться из индукций магнитного поля, создаваемого каждым участком тока, т.е.

$$\vec{B}_C = \vec{B}_{DA} + \vec{B}_{AB} + \vec{B}_{BL} + \vec{B}_{LD}.$$

Так как для участка  $AB$  элемент тока  $I d\vec{l}$  сонаправлен с радиус-вектором  $\vec{r}$ , а для участка  $LD$  вектор  $I d\vec{l}$  антипараллелен  $\vec{r}$ , то  $I[d\vec{l}, \vec{r}] = 0$  в этих случаях и согласно (3.6.2) получим

$$\vec{B}_{AB} = \vec{B}_{LD} = 0.$$

Таким образом, вычислим  $\vec{B}_C = \vec{B}_{DA} + \vec{B}_{BL}$ .

Используя правило правого винта или определяя направление векторного произведения в (3.6.1), найдем, что в точке  $C$  вектор  $\vec{B}_{DA}$  направлен «от нас» за чертеж и сонаправлен с  $\vec{B}_{BL}$ , т.е.

$$\vec{B}_C = \vec{B}_{DA} + \vec{B}_{BL}.$$

Найдем величину  $B_{DA}$ :

$$B_{DA} = \int_0^{3\pi/2} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I r_1 dl}{r_1^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r_1^2} \int_0^{3\pi/2} dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_1^2} \frac{3\pi}{2} l \Big|_0^{r_1} = \frac{3\mu_0 I}{8r_1}.$$

Аналогично

$$B_{BL} = \int_0^{\pi r_2/2} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I r_2 dl}{r_2^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_2^2} \frac{\pi}{2} l \Big|_0^{r_2} = \frac{\mu_0 I}{8r_2}.$$

Окончательно

$$B_C = \frac{3\mu_0 I}{8r_1} + \frac{\mu_0 I}{8r_2} = \frac{\mu_0 I(r_1 + 3r_2)}{8r_1 r_2} = 5,5 \text{ мкТл.}$$

$$\text{Ответ: } B_C = \frac{\mu_0 I(r_1 + 3r_2)}{8r_1 r_2} = 5,5 \text{ мкТл.}$$

3.6.36. Рамка гальванометра длиной  $a = 0,04$  м и шириной  $b = 0,015$  м, содержащая  $N = 200$  витков тонкой проволоки, находится в магнитном поле с индукцией  $B = 0,1$  Тл. Плоскость рамки параллельна линиям индукции. Найти вращающий момент  $M$ , действующий на рамку, когда по ней течет ток силой  $I = 1$  мА.

*Решение.* Так как в начальный момент времени плоскость рамки параллельна линиям индукции, то величина вращающего момента  $\vec{M}$ , согласно (3.6.11) и (3.6.12), будет равна  $M = p_m B$ , где  $p_m$  — магнитный момент рамки. В данном случае угол между направлением векторов положительной нормали  $\vec{n}$  к площади рамки и индукции  $\vec{B}$  равен  $\alpha = 90^\circ$ .

С учетом того, что рамка содержит  $N$  витков, запишем (3.6.13) в виде  $p_m = ISN$ , где  $S = ab$  — площадь рамки.

Окончательно

$$M = IabNB = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ Н} \cdot \text{м.}$$

$$\text{Ответ: } M = IabNB = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ Н} \cdot \text{м.}$$

3.6.37. В одной плоскости с бесконечно длинным прямым током  $I = 5$  А расположена прямоугольная рамка, обтекаемая током  $i = 1$  А. Длинная сторона  $b = 0,2$  м параллельна прямому току и находится от него на расстоянии  $x_0 = 0,05$  м, короткая сторона  $a = 0,1$  м (рис. 3.57). а) Найти силы  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ ,  $\vec{F}_3$  и  $\vec{F}_4$ , действующие на каждую сторону рамки со стороны поля, создаваемого прямым током; б) найти работу  $A'_1$  и  $A'_2$ , которую надо совершить, чтобы: 1) перенести рамку параллельно самой себе вправо на расстояние  $a$ ; 2) повернуть рамку на  $180^\circ$  вокруг стороны 3. Токи в рамке и в прямом проводнике считать постоянными.

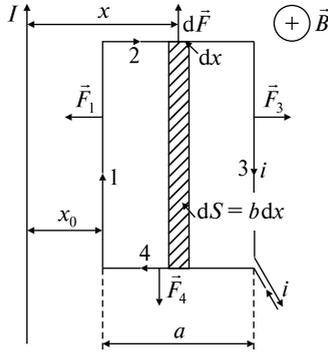


Рис. 3.57

*Решение.* а) Индукция поля бесконечно длинного прямого тока (см. формулу (3.6.5)) равна

$$B = \mu_0 I / 2\pi x, \quad (1)$$

где  $x$  — расстояние от прямого тока до точки, в которой рассматривается поле.

Вектор индукции  $\vec{B}$  магнитного поля, действующего на рамку, направлен везде перпендикулярно плоскости рисунка — «от нас», поэтому для всех сторон рамки угол  $\alpha$  между элементами тока  $I d\vec{l}$  и  $\vec{B}$  равен  $90^\circ$ .

Длинные стороны рамки параллельны току, поэтому в любой точке сторон 1 и 3 индукция магнитного поля  $\vec{B}_1$  и  $\vec{B}_3$ , создаваемого током  $I$ , постоянна. Таким образом, силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_3$ , действующие на прямые проводники 1 и 3 с током  $i$ , согласно (3.6.10) можно записать в виде

$$F_1 = B_1 i b, \quad F_3 = B_3 i b, \quad (2)$$

где  $B_1 = \mu_0 I / 2\pi x_0$ ,  $B_3 = \mu_0 I / 2\pi(x_0 + a)$ .

Тогда

$$F_1 = \mu_0 I i b / 2\pi x_0 = 4,0 \cdot 10^{-6} \text{ Н};$$

$$F_3 = \mu_0 I i b / 2\pi(x_0 + a) = 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ Н}.$$

Направления сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_3$ , определенные по правилу левой руки, показаны на рисунке.

Вдоль второй стороны рамки величина индукции магнитного поля  $B_2$  тока  $I$  непрерывно меняется.

Рассмотрим элемент  $dx$  стороны 2, находящийся на расстоянии  $x$  от прямого тока  $I$ . Сила  $d\vec{F}$ , действующая на этот элемент, направлена вверх и равна по величине

$$dF = Bi dx, \quad (3)$$

здесь  $B$  — текущее значение индукции, определяемое по формуле (1).

При переходе от одного элемента стороны 2 к другому направление элементарных сил остается неизменным, поэтому

$$\begin{aligned} F_2 &= \int_{x_0}^{x_0+a} dF = \int_{x_0}^{x_0+a} Bi dx = \int_{x_0}^{x_0+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} i dx = \frac{\mu_0 I i}{2\pi} \int_{x_0}^{x_0+a} \frac{dx}{x} = \\ &= \frac{\mu_0 I i}{2\pi} \ln \frac{x_0 + a}{x_0} = 1,1 \cdot 10^{-6} \text{ Н.} \end{aligned}$$

Очевидно, что сила  $\vec{F}_4$ , действующая на сторону 4, равна вычисленному значению силы  $\vec{F}_2$  и направлена в противоположную сторону, т.е.  $|F_4| = |F_2| = 1,1 \cdot 10^{-6} \text{ Н}$ .

б) Работа, совершаемая внешними силами при перемещении рамки (см. формулу (5.20)), равна

$$A' = I(\Phi_1 - \Phi_2), \quad (4)$$

где  $\Phi_1, \Phi_2$  — потоки, пронизывающие рамку в начальном и конечном положениях.

Так как индукция магнитного поля  $B$  прямого тока зависит от расстояния  $x$ , то согласно (3.6.18) для вычисления потока  $\Phi$  рамку следует разбивать на элементарные площадки  $dS$ , в пределах которых поле прямого тока можно считать постоянным. Поэтому элементарную площадку следует выбирать в виде узкой прямоугольной полоски длиной  $b$  и толщиной  $dx$ , т.е.  $dS = b dx$ .

В начальном положении вектор  $\vec{B}$  и положительная нормаль  $\vec{n}_1$  к площади рамки направлены в одну сторону, поэтому

$$\vec{B} d\vec{S} = B dS \cos(\widehat{\vec{B}, \vec{n}_1}) = B dS.$$

Тогда

$$\Phi_1 = \int_S B dS = \int_{x_0}^{x_0+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} b dx = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \int_{x_0}^{x_0+a} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{x_0 + a}{x_0} > 0.$$

1 случай. При перенесении рамки параллельно самой себе поток  $\Phi_2$  в конечном положении вычисляется аналогично потоку  $\Phi_1$  (изменяются только пределы интегрирования):

$$\begin{aligned}\Phi_2 &= \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S B dS \cos \alpha = \int_S B dS = \int_{x_0+a}^{x_0+2a} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} b dx = \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{x_0+a}^{x_0+2a} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{x_0 + 2a}{x_0 + a} > 0.\end{aligned}$$

Работа  $A'_1$ , согласно (4), будет

$$\begin{aligned}A'_1 &= i(\Phi_1 - \Phi_2) = \frac{\mu_0 I i b}{2\pi} \left( \ln \frac{x_0 + a}{x_0} - \ln \frac{x_0 + 2a}{x_0 + a} \right) = \\ &= \frac{\mu_0 I i b}{2\pi} \ln \frac{(x_0 + a)^2}{x_0(x_0 + 2a)} = 1,2 \cdot 10^{-7} \text{ Дж}.\end{aligned}$$

Таким образом, работа  $A'_1$ , совершаемая внешними силами, положительна.

2 случай. После поворота рамки на  $180^\circ$  положительная нормаль  $\vec{n}_2$  к площади рамки становится антипараллельна вектору магнитной индукции  $\vec{B}$ , поэтому  $\vec{B} d\vec{S} = B dS \cos(\vec{B}, \vec{n}_2) = -B dS$ , и магнитный поток

$$\begin{aligned}\Phi_2 &= \int_S B dS \cos \alpha = \int_S B dS \cos(\vec{B}, \vec{n}_2) = - \int_S B dS = \\ &= - \int_{x_0+a}^{x_0+2a} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} b dx = - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{x_0 + 2a}{x_0 + a}\end{aligned}$$

будет отрицательным.

Работа внешних сил

$$\begin{aligned}A'_2 &= i(\Phi_1 - \Phi_2) = \frac{\mu_0 I i b}{2\pi} \left[ \ln \frac{x_0 + a}{x_0} - \left( - \ln \frac{x_0 + 2a}{x_0 + a} \right) \right] = \\ &= \frac{\mu_0 I i b}{2\pi} \left[ \ln \frac{x_0 + a}{x_0} + \ln \frac{x_0 + 2a}{x_0 + a} \right] = \frac{\mu_0 I i b}{2\pi} \ln \frac{x_0 + 2a}{x_0}\end{aligned}$$

оказалась также положительной.

Однако во втором случае работа  $A'_2$  больше, чем работа  $A'_1$ .

Ответ:  $F_1 = \mu_0 I i b / 2\pi x_0 = 4,0 \cdot 10^{-6} \text{ Н}$ ;

$$F_3 = \mu_0 I i b / 2\pi(x_0 + a) = 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ Н},$$

$$F_4 = F_2 = \frac{\mu_0 I i}{2\pi} \ln \frac{x_0 + a}{x_0} = 1,1 \cdot 10^{-6} \text{ Н},$$

$$A_1' = \frac{\mu_0 I i b}{2\pi} \ln \frac{(x_0 + a)^2}{x_0(x_0 + 2a)} = 1,2 \cdot 10^{-7} \text{ Дж},$$

$$A_2' = \frac{\mu_0 I i b}{2\pi} \ln \frac{x_0 + 2a}{x_0}.$$

3.6.38. Электрон движется в магнитном поле, индукция которого  $\vec{B}$ , по винтовой линии с радиусом  $r$  и шагом «винта»  $h$ . Определить энергию  $W$  электрона и направление вектора скорости  $\vec{v}$  в начальный момент.

*Решение.* Сила Лоренца (3.6.14), действующая на электрон, движущийся в магнитном поле,  $\vec{F}_L = e[\vec{v}, \vec{B}]$ .

Скорость  $\vec{v}$  можно разложить на две составляющие:  $\vec{v}_{\parallel} \parallel \vec{B}$  и  $\vec{v}_{\perp} \perp \vec{B}$  (рис. 3.58).

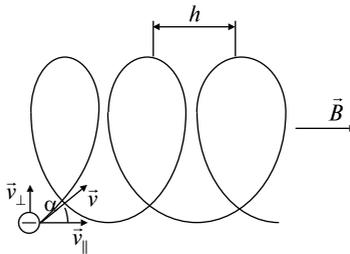


Рис. 3.58

Тогда

$$F_{L\parallel} = ev_{\parallel} B \sin(\widehat{\vec{v}_{\parallel}, \vec{B}}) = 0, F_{L\perp} = ev_{\perp} B \sin(\widehat{\vec{v}_{\perp}, \vec{B}}) = ev_{\perp} B.$$

Следовательно, под действием силы Лоренца движущийся заряд может приобретать только нормальное ускорение  $a_n$ . При этом следует отметить, что при движении по винтовой линии вектор результирующей скорости электрона  $\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$  изменяет свое направление в пространстве, но не меняется по величине, следовательно, и кинетическая энергия электрона остается постоянной. Это значит, что сила Лоренца не совершает работы.

Величину составляющей скорости  $v_{\perp}$  можно определить из второго закона Ньютона, которому подчиняется движение электрона:

$$m a_n = F_{L\perp},$$

где  $a_n = v_{\perp}^2/r$ ,  $m$  — масса электрона.

Отсюда

$$mv_{\perp}^2/r = ev_{\perp}B \text{ или } v_{\perp} = rBe/m. \quad (1)$$

Шаг винта определяется соотношением  $h = v_{\parallel}T$ , где  $T$  — период обращения электрона, равный  $T = 2\pi r/v_{\perp} = 2\pi m/Be$ .

Следовательно,

$$v_{\parallel} = h/T = hBe/2\pi m. \quad (2)$$

Кинетическая энергия электрона с учетом (1) и (2) равна

$$W = mv^2/2 = e^2B^2(r^2 + h^2/4\pi^2)/2m.$$

Угол  $\alpha$  может быть определен из отношения скоростей:

$$\alpha = \text{arctg}(v_{\perp}/v_{\parallel}) = \text{arctg}(2\pi r/h).$$

$$\text{Ответ: } W = e^2B^2(r^2 + h^2/4\pi^2)/2m, \alpha = \text{arctg}(2\pi r/h).$$

### Задачи без решений

3.6.39. Определить индукцию магнитного поля  $B$  на расстоянии  $b$  от прямолинейного бесконечного проводника, по которому течет ток  $I$ .

3.6.40. Замкнутая цепь с током силой  $I$  включает в себя прямолинейный участок длиной  $2a$ . Точка  $A$  лежит на расстоянии  $b$  от этого участка на перпендикуляре, проходящем через его середину. Найти ту часть магнитной индукции  $B$  в точке  $A$ , которая создается данным участком. Исследовать случай  $a \rightarrow \infty$ .

3.6.41. Определить индукцию магнитного поля  $B$  в центре кругового витка, по которому течет ток  $I$ . Радиус витка  $R$ .

3.6.42. Определить индукцию магнитного поля  $B$  в точке, лежащей на оси кругового витка на расстоянии  $r$  от его центра. По витку течет ток  $I$ , радиус витка  $R$ .

3.6.43. К тонкому однородному проволочному кольцу радиусом  $r$  подводят ток  $I$ . Найти индукцию магнитного поля  $B$  в центре кольца, если подводящие провода, делящие кольцо на две дуги длиной  $l_1$  и  $l_2$ , расположены радиально и бесконечно длинны.

3.6.44. Два витка радиусом  $r_0 = 0,1$  м каждый расположены параллельно друг другу на расстоянии  $a = 0,2$  м. Найти индукции магнитного поля  $B_1$  и  $B_2$  в центре каждого витка и на середине прямой, соединяющей их центры, и построить график зависимо-

сти индукций  $B_1(x)$  и  $B_2(x)$  от расстояния  $x$  вдоль этой прямой для двух случаев: 1) витки обтекаются равными токами одного направления; 2) витки обтекаются равными токами противоположного направления. Сила тока в каждом витке  $I = 3$  А. Прямая, соединяющая центры витков, перпендикулярна их плоскости.

3.6.45. В однородном магнитном поле в плоскости, перпендикулярной линиям индукции, расположена круглая плоская рамка, состоящая из  $N = 10$  витков площадью  $S = 0,01$  м<sup>2</sup> каждый. В обмотке рамки течет ток  $I = 3$  А. Каково должно быть направление тока в рамке, чтобы при повороте ее на  $180^\circ$  вокруг одного из диаметров силы поля совершили положительную работу  $A$ ? Какова величина этой работы  $A$ ? Индукция поля  $B = 1,8 \cdot 10^{-5}$  Тл.

3.6.46. Каковы нормальное  $a_n$  и тангенциальное  $a_t$  ускорения электрона, движущегося в совпадающих по направлению электрическом  $\vec{E}$  и магнитном  $\vec{B}$  полях? а) Скорость электрона  $\vec{v}$  направлена вдоль полей. б) Скорость электрона  $\vec{v}$  направлена перпендикулярно к ним.

3.6.47. Электрон, обладающий энергией  $W$ , влетает в однородное электрическое поле  $\vec{E}$  перпендикулярно силовым линиям поля. Каковы должны быть направление и величина индукции магнитного поля  $\vec{B}$ , чтобы электрон не испытывал отклонений?

3.6.48. Бесконечно длинный прямой проводник, обтекаемый током  $I = 5$  А, согнут под прямым углом (рис. 3.59). Найти индукцию магнитного поля  $\vec{B}$  в точках  $A$  и  $C$ , находящихся на биссектрисе угла, и в точке  $D$  на продолжении одной из его сторон. Расстояние от вершины угла до каждой из точек  $r = 0,1$  м.

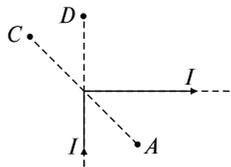


Рис. 3.59

3.6.49. По проволочному радиусом  $R$  течет ток силой  $I_1$ . Точка  $A$  находится на оси кольца на расстоянии  $l_1$  от его центра. На расстоянии  $l_2$  от точки  $A$  параллельно плоскости кольца расположен бесконечный проводник, по которому течет ток силой  $I_2$ . Определить величину и направление индукции магнитного поля  $\vec{B}$  в точке  $A$ .

3.6.50. В однородном магнитном поле, индукция которого  $\vec{B}$ , в плоскости, перпендикулярной линиям индукции, расположены два

проводника длиной  $l$  каждый, обтекаемые током  $i$ . Первый проводник прямой, второй — согнут в форме полукольца. Найти силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ , действующие на каждый проводник со стороны магнитного поля. Поле направлено перпендикулярно плоскости полукольца.

3.6.51. Ток силой  $I = 10$  А течет по полой тонкостенной трубе радиусом  $R_2 = 0,05$  м и возвращается по сплошному проводнику радиусом  $R_1 = 1 \cdot 10^{-3}$  м, проложенному по оси трубы. Найти индукции магнитного поля  $B_1$  и  $B_2$  в точках, лежащих соответственно на расстояниях  $r_1 = 0,06$  м и  $r_2 = 0,02$  м от оси трубы. Чему равен магнитный поток  $\Phi$ , пронизывающий  $l = 1$  м длины такой системы? Всю систему считать бесконечно длинной. Поле внутри металла пренебречь.

3.6.52. По медному проводу, сечение которого является кругом радиусом  $R = 0,02$  м, течет ток силой  $I = 500$  А. Определить индукцию магнитного поля  $B$  внутри провода в точке, отстоящей на расстоянии  $r = 0,005$  м от оси провода, а также магнитный поток  $\Phi$  внутри провода, если длина его равна  $l = 3$  м.

3.6.53. На изображенный на рис. 3.60 соленоид с полым картонным сердечником в виде тора с прямоугольным поперечным сечением навита обмотка из  $N = 500$  витков, обтекаемая током силой  $I = 2,4$  А. Определить максимальное  $B_{\max}$  и минимальное  $B_{\min}$  значения индукции магнитного поля внутри тороида и магнитный поток  $\Phi$  системы. Известно, что  $R_1 = 0,05$  м,  $R_2 = 0,08$  м,  $b = 0,05$  м.

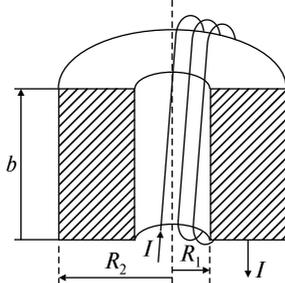


Рис. 3.60

3.6.54. Первоначально  $\alpha$ -частица движется свободно со скоростью  $\vec{v} = 3,5 \cdot 10^6$  м/с. В некоторый момент времени в окрестности частицы создается перпендикулярное к направлению скорости однородное магнитное поле с индукцией  $\vec{B} = 1$  Тл. Найти: а) радиус  $r$  траектории  $\alpha$ -частицы; б) величину и направление ее магнитного момента  $p_m$ . Заряд частицы  $q = 2e$ , масса  $m = 6,65 \cdot 10^{-27}$  кг.

### ТЕМА 3.7

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ. САМОИНДУКЦИЯ. ВЗАИМОИНДУКЦИЯ

Для нахождения ЭДС индукции  $\mathcal{E}_{\text{инд}}$  используется основной закон электромагнитной индукции (закон Фарадея):

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -d\Phi/dt, \quad (3.7.1)$$

где  $d\Phi$  — изменение магнитного потока через замкнутый контур за время  $dt$ . Знак « $-$ » отражает правило Ленца, согласно которому индукционный ток имеет такое направление, чтобы противодействовать причине, его вызывающей.

Если контур, в котором индуцируется ЭДС, состоит не из одного витка, а из  $N$  одинаковых витков, то формула (3.7.1) запишется в виде

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -d\Psi/dt, \quad (3.7.2)$$

где величина  $\Psi = NS$  называется потокосцеплением, или полным магнитным потоком.

Из определения магнитного потока (3.6.17) видно, что его изменение может быть осуществлено, по крайней мере, тремя независимыми способами, а именно:

$$\Delta\Phi = \Delta BS \cos\alpha, \quad (3.7.3)$$

$$\Delta\Phi = B\Delta S \cos\alpha, \quad (3.7.4)$$

$$\Delta\Phi = BS\Delta(\cos\alpha). \quad (3.7.5)$$

Так, в первом случае (3.7.3)  $\Delta\Phi$  обусловлено изменением величины магнитного поля, пронизывающего неподвижный контур с постоянным сечением. Во втором (3.7.4) —  $\Delta\Phi$  связано с изменением площади контура в постоянном магнитном поле, при этом направление  $\vec{B}$  остается неизменным по отношению к  $\vec{S}$ . В третьем (3.7.5) —  $\Delta\Phi$  возникает при вращении контура неизменного сечения в постоянном магнитном поле.

Индукционный ток  $I$  в контуре определяется по формуле

$$I_{\text{инд}} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}, \quad (3.7.6)$$

где  $R$  — сопротивление контура.

ЭДС индукции  $\mathcal{E}_{\text{инд}}$ , возникающая на концах проводника длиной  $l$ , движущегося в однородном магнитном поле  $\vec{B}$  со скоростью  $\vec{v}$ , выражается формулой

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = \int_l [\vec{v}, \vec{B}] d\vec{l}. \quad (3.7.7)$$

При изменениях силы тока  $I$ , текущего через контур, изменяется также и полный магнитный поток  $\Psi$ , вследствие чего в контуре индуцируется ЭДС самоиндукции  $\mathcal{E}_{\text{с.инд}}$ , при этом

$$\Psi = LI. \quad (3.7.8)$$

Коэффициент пропорциональности  $L$  между силой тока  $I$  и полным магнитным потоком  $\Psi$  называется индуктивностью (коэффициентом самоиндукции) контура.

Индуктивность  $L$  зависит от геометрических размеров контура и среды, его заполняющей. Так, индуктивность соленоида (тороида) равна

$$L = \mu_0 \mu n^2 l S = \mu_0 \mu n^2 V, \quad (3.7.9)$$

где  $\mu_0$  — магнитная постоянная,  $\mu$  — магнитная проницаемость сердечника соленоида,  $n$  — число витков на единицу длины,  $V = lS$  — объем соленоида.

С учетом (3.7.8) при постоянной индуктивности контура ЭДС самоиндукции определяется выражением

$$\mathcal{E}_{\text{с.инд}} = -\frac{d\Psi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (3.7.10)$$

В тех случаях, когда необходимо рассчитать энергию магнитного поля, заключенного в контуре, следует использовать формулу

$$W = LI^2/2. \quad (3.7.11)$$

### Качественные задачи

3.7.1. На рис. 3.61 изображен плоский контур, помещенный в однородное магнитное поле  $\vec{B}$ , линии индукции которого направлены «на нас». Укажите направление индукционного тока  $I$ , возникающего в контуре, если величина индукции магнитного поля а) возрастает; б) убывает.

3.7.2. На рис. 3.61 изображен плоский контур, помещенный в однородное магнитное поле  $\vec{B}$ , линии индукции которого направлены «на нас». Укажите направление индукционного тока  $I$ , возникающего в контуре в случае, если: а) контур растягивается; б) контур сжимается.

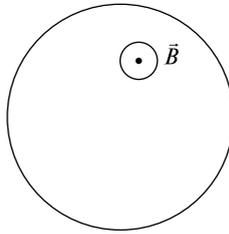


Рис. 3.61

3.7.3. Проводящий стержень, двигаясь вправо (рис. 3.62) со скоростью  $\vec{v}$ , замыкает контакт между рельсами  $ad$  и  $bc$ , отстоящими друг от друга на расстоянии  $l$ . Однородное магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$  направлено перпендикулярно плоскости чертежа («от нас»). Укажите направление тока, протекающего через сопротивление  $R$ .

3.7.4. Квадратная проволочная рамка с длиной стороны  $a$  падает между полюсами магнита, при этом плоскость рамки перпендикулярна силовым линиям магнитного поля, создаваемого магнитом (рис. 3.63). Будем считать, что положение I соответствует моменту, когда рамка входит в магнитное поле; II — рамка находится в области однородного поля; III — рамка выходит из магнитного поля. Укажите направление индукционного тока для I, II и III положений рамки.

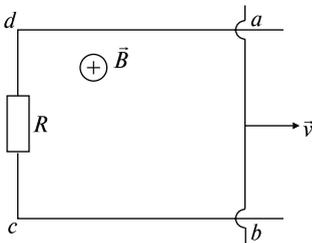


Рис. 3.62

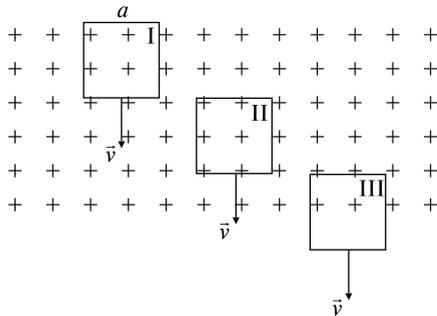


Рис. 3.63

3.7.5. Держа в руке замкнутое проволочное кольцо в вертикальной плоскости, Вы резко вводите южный полюс магнита в центр кольца перпендикулярно его плоскости. а) Возбуждается ли в кольце электрический ток? б) Будет ли возбуждаться ток, если магнит держать неподвижно внутри кольца? в) Возбуждается ли ток при выведении магнита из кольца? г) Изменяются ли ответы, если магнит вводить северным полюсом?

3.7.6. Представьте, что прямо перед Вами один за другим расположены два проволочных витка (не соединенные между собой), так что Вы смотрите вдоль линии, соединяющей их центры. В какой-то момент к первому витку подключается батарея и по нему в направлении по часовой стрелке течет ток. а) Возникнет ли ток во втором витке? б) Если да, то в какой момент он возникнет? в) Когда он прекратится? г) В каком направлении будет течь ток во втором витке? д) Действует ли между двумя витками сила взаимодействия? е) Если да, то в каком направлении?

3.7.7. Представьте, что прямо перед Вами один за другим расположены два проволочных витка (не соединенные между собой), так что Вы смотрите вдоль линии, соединяющей их центры. В какой-то момент к первому витку подключается батарея и по нему в направлении по часовой стрелке течет ток. Затем батарею отсоединяют от витка. а) Возникнет ли ток во втором витке? б) Если да, то в какой момент он возникнет? в) Когда он прекратится? г) В каком направлении будет течь ток во втором витке? д) Действует ли между двумя витками сила взаимодействия? е) Если да, то в каком направлении?

3.7.8. Прямоугольную рамку (рис. 3.64) двигают влево, выводя ее из магнитного поля, которое направлено «от нас». В каком направлении по рамке течет ток?

3.7.9. В каком случае ЭДС индукции, возникающая между концами крыльев самолета, будет больше: когда самолет летит вдоль меридиана или вдоль параллели?

3.7.10. Определите направление индуцируемого тока  $I$  и знак  $\mathcal{E}_{\text{инд}}$  (рис. 3.65) в случае, если в плоскости, перпендикулярной линиям индукции однородного магнитного поля  $\vec{B}$  (вектор  $\vec{B}$  направлен «от нас»), находится сплошной медный диск, вращающийся вокруг своей оси по часовой стрелке с постоянной скоростью  $\omega$ . Скользящие контакты, подведенные к центру и ободу диска, замкнуты на внешнее сопротивление  $R$ .

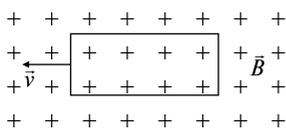


Рис. 3.64

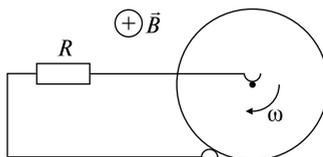


Рис. 3.65

3.7.11. Как изменится индуктивность  $L$  соленоида при внесении в него магнитного сердечника?

3.7.12. В соленоид, по которому течет постоянный ток, вдвигают магнитный сердечник. Изменится ли показание амперметра, подключенного последовательно к этому соленоиду, при движении сердечника? Почему?

3.7.13. Из соленоида, по которому течет постоянный ток, вынимают магнитный сердечник. Изменится ли показание амперметра, подключенного последовательно к этому соленоиду, при движении сердечника? Почему?

3.7.14. Какую форму следует придать отрезку провода заданной длины, чтобы его индуктивность была а) максимальной; б) минимальной?

3.7.15. Из двух проволок одинаковой длины свернули два контура: окружность и эллипс. Индуктивность  $L$  какого контура будет больше?

3.7.16. Почему два провода, по которым течет переменный ток, стараются располагать близко друг к другу?

3.7.17. Как следует расположить две круглые плоские катушки, не разнося их на большое расстояние, чтобы их взаимная индуктивность была а) максимальной; б) минимальна?

3.7.18. Если бы две катушки, расположенные как показано на рис. 3.66, были соединены проводом, обладали бы они взаимной индуктивностью?

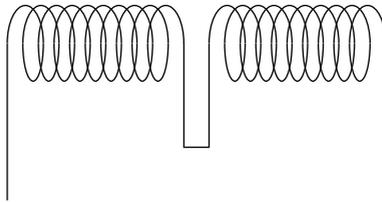


Рис. 3.66

3.7.19. Для передачи слабого сигнала на расстояние используют экранированный кабель, в котором токонесущая жила закрыта изоляцией, а затем цилиндрическим проводником. Для чего необходим этот экран?

## Задачи с решениями

3.7.20. В вертикальной плоскости, перпендикулярной линиям магнитной индукции однородного магнитного поля  $\vec{B}$ , расположены две параллельные вертикальные шины, по которым соскальзывает проводник. Определить направление индукционного тока  $I$  и знак ЭДС индукции  $\mathcal{E}_{\text{инд}}$ .

*Решение.* Пусть магнитное поле  $\vec{B}$  направлено «от нас» (рис. 3.67). При перемещении проводника вниз со скоростью  $\vec{v}$  вниз с такой же скоростью движутся и свободные электроны, находящиеся в проводнике. На электроны, движущиеся в магнитном поле, действует сила Лоренца  $\vec{F}_L = e[\vec{v}, \vec{B}]$ , направление которой определяем по правилу левой руки. При данном направлении магнитного поля электроны будут накапливаться у левого конца движущегося проводника (электрон заряжен отрицательно), а на правом окажется избыток положительного заряда. Таким образом, будут образованы два полюса ЭДС индукции  $\mathcal{E}_{\text{инд}}$ .

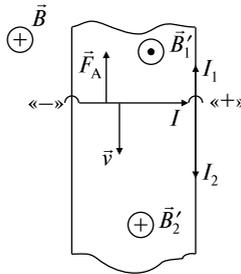


Рис. 3.67

Если шины замкнуть, то по верхней части шин ток  $I_1$  пойдет против часовой стрелки, а по нижней — ток  $I_2$  по часовой стрелке.

Проверим решение задачи по правилу Ленца.

С одной стороны, ток  $I$  в движущемся проводнике пойдет от отрицательного полюса источника к положительному (как в любой ЭДС). Такой движущийся со скоростью  $\vec{v}$  ток  $I$  вызывает, согласно закону Ампера (3.6.9), появление силы  $\vec{F}_A$ , которая будет направлена вверх, т.е. навстречу скорости  $\vec{v}$ , противодействуя движению проводника.

С другой стороны, при движении проводника вниз площадь, захватываемая верхним контуром, увеличивается. Следовательно, увеличивается и магнитный поток  $\Phi_1$ , пронизывающий этот кон-

тур. Поэтому индукционный ток  $I_1$  должен иметь такое направление, чтобы создаваемое им магнитное поле  $\vec{B}'_1$  было направлено навстречу полю  $\vec{B}$ , вызвавшему появление индукционного тока, т.е. «на нас». Рассматривая аналогично нижний контур, найдем, что ток  $I_2$  направлен так, чтобы создать магнитное поле  $\vec{B}'_2$  по направлению магнитного поля  $\vec{B}$ , с тем чтобы поддержать убывающий магнитный поток  $\Phi_2$  через нижний контур.

3.7.21. Имеется круговой проводящий контур радиусом  $a$  с сопротивлением  $R$ . Первоначально ток в нем отсутствует. Затем включается перпендикулярное к плоскости контура однородное магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$ , направленное за плоскость чертежа. Определить: а) в каком направлении будет течь возникший при этом ток; б) какой заряд  $q$  протечет по контуру.

*Решение.* Выберем направление положительной нормали к контуру «на нас», т.е.  $\vec{n} \updownarrow \vec{B}$  (рис. 3.68). Тогда в начальный момент времени поток  $\Phi_0$ , пронизывающий контур, будет равен  $\Phi_0 = B_0 S \cos \alpha = 0$ , так как  $B_0 = 0$ .

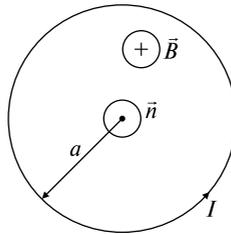


Рис. 3.68

После включения магнитного поля, когда магнитная индукция достигнет своего максимального значения  $B$ , конечное значение магнитного потока будет  $\Phi = BS \cos \alpha < 0$ , так как угол  $\alpha$  между направлением нормали к контуру и вектором  $\vec{B}$  равен  $180^\circ$ .

Затем по формуле (3.7.3) определяем знак изменения магнитного потока

$$\Delta\Phi = \Phi - \Phi_0 = (B - B_0) S \cos \alpha = BS \cos \alpha < 0.$$

Из закона Фарадея (3.7.1) ЭДС индукции  $\mathcal{E}_{\text{инд}}$ , возникающая в контуре за время  $\Delta t$ :

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\Delta\Phi/\Delta t = -BS \cos \alpha/\Delta t = -B\pi a^2(-1)/\Delta t = \pi a^2 B/\Delta t > 0.$$

Так как  $\mathcal{E}_{\text{инд}} > 0$ , то, следовательно, направление положительной нормали  $\vec{n}$  выбрано верно, и ток  $I$  в соответствии с данной  $\vec{n}$  потечет против часовой стрелки.

В случае, если бы  $\mathcal{E}_{\text{инд}}$  оказалась отрицательной, это бы означало, что мы неправильно выбрали направление нормали к контуру, т.е. положительная нормаль должна бы быть  $\vec{n}^* \uparrow \uparrow \vec{B}$ , и ток тек бы в противоположную сторону.

б) Для определения заряда  $q$  найдем, прежде всего, силу тока  $I$ , который потечет по контуру. По закону Ома (3.5.3) запишем

$$I = \mathcal{E}_{\text{инд}}/R = \pi a^2 B/R \Delta t.$$

Тогда заряд  $q$  будет равен

$$q = I \Delta t = \pi a^2 B/R.$$

*Ответ:*  $q = \pi a^2 B/R$ .

3.7.22. В магнитном поле, величина индукции которого изменяется по закону  $B = \alpha + \beta t^2$ , где  $\alpha = 1 \cdot 10^{-1}$  Тл,  $\beta = 1 \cdot 10^{-2}$  Тл/с<sup>2</sup>, расположена квадратная рамка со стороной  $a = 0,2$  м, причем плоскость рамки перпендикулярна  $\vec{B}$ . Определить: а) величину ЭДС индукции  $\mathcal{E}_{\text{инд}}$  в рамке в момент времени  $t = 5$  с; б) количество теплоты  $Q$ , которое выделится в рамке за первые 5 секунд, если сопротивление рамки  $R = 0,5$  Ом.

*Решение.* а) Определим магнитный поток  $\Phi$  через рамку. Так как плоскость рамки перпендикулярна линиям магнитной индукции  $\vec{B}$ , то

$$\Phi = (\vec{B}, \vec{S}) = (\alpha + \beta t^2)a^2.$$

Используя закон электромагнитной индукции (3.7.1), найдем величину ЭДС индукции  $\mathcal{E}_{\text{инд}}$  в момент времени  $t = 5$  с:

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = | -d\Phi/dt | = 2\beta a^2 t = 4 \cdot 10^{-3} \text{ В}.$$

б) По закону Ома (3.5.3) сила индукционного тока в рамке будет

$$I_{\text{инд}} = \mathcal{E}_{\text{инд}}/R = 2\beta a^2 t/R.$$

Так как сила тока  $I_{\text{инд}}$  не постоянна во времени, то для нахождения количества теплоты  $Q$  воспользуемся формулой (3.5.9):

$$\begin{aligned} Q &= \int_{t=0}^{t=5} I_{\text{инд}}^2 R dt = \int_{t=0}^{t=5} \frac{4\beta^2 a^4 t^2}{R} dt = \frac{4\beta^2 a^4 t^3}{3R} \Big|_{t=0}^{t=5} = \\ &= \frac{4\beta^2 a^4 t^3}{3R} \approx 5,3 \cdot 10^{-5} \text{ Дж}. \end{aligned}$$

Ответ:  $Q = \frac{4\beta^2 a^4 t^3}{3R} \approx 5,3 \cdot 10^{-5}$  Дж.

3.7.23. В плоскости квадратной рамки с омическим сопротивлением  $R = 7$  Ом и стороной  $a = 0,2$  м расположен на расстоянии  $r_0 = 0,2$  м от рамки прямой бесконечный проводник (рис. 3.69). Сила тока в проводнике изменяется по закону  $I = \alpha t^3$ , где  $\alpha = 2$  А/с<sup>3</sup>. Проводник параллелен одной из сторон рамки. Определить силу индукционного тока  $I_{\text{инд}}$  в рамке в момент времени  $t = 10$  с.

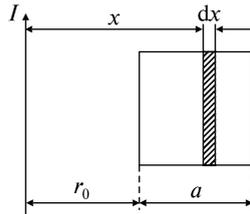


Рис. 3.69

*Решение.* В силу зависимости силы тока  $I$  в проводнике от времени, от времени зависит также и величина магнитной индукции  $B$ , создаваемой прямым током (3.6.5), а именно:

$$B = \mu_0 I / 2\pi x = \mu_0 \alpha t^3 / 2\pi x. \quad (1)$$

Следовательно, с течением времени изменяется и магнитный поток  $\Phi$ , пронизывающий рамку, что вызывает появление индукционного тока  $I_{\text{инд}}$  в ней. Кроме того, рамка находится в неоднородном магнитном поле, поэтому для вычисления суммарного потока надо разбить рамку на элементарные площадки (см. рис. 3.69)

$$dS = a dx, \quad (2)$$

где  $a$  — сторона рамки,  $dx$  — ширина элементарной площадки, расположенной на расстоянии  $x$  от проводника, в пределах которой величину индукции  $B$  можно считать постоянной (см. формулу (1)).

Тогда поток  $\Phi$ , учитывая (3.6.18), (1) и (2), будет

$$\Phi = \int_{r_0}^{r_0+a} d\Phi = \int_{r_0}^{r_0+a} B dS \cos \alpha = \int_{r_0}^{r_0+a} \frac{\mu_0 \alpha t^3}{2\pi x} a dx = \frac{\mu_0 \alpha a}{2\pi x} \ln \left( \frac{r_0 + a}{r_0} \right) t^3. \quad (3)$$

При получении выражения (3)  $\cos \alpha = 1$ , так как угол  $\alpha$  между нормалью  $\vec{n}$  к рамке и вектором  $\vec{B}$  справа от прямого тока  $I$  (см. рис. 3.69) равен нулю.

По закону Фарадея (3.7.1) величина ЭДС индукции  $\mathcal{E}_{\text{инд}}$  равна

$$|\mathcal{E}_{\text{инд}}| = \left| -\frac{d\Phi}{dt} \right| = \frac{3\mu_0 a \alpha}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{a}{r_0} \right) t^2.$$

Окончательно сила тока  $I_{\text{инд}}$  определяется из закона Ома (3.5.3):

$$I_{\text{инд}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{инд}}}{R} = \frac{3\mu_0 a \alpha \ln \left( 1 + \frac{a}{r_0} \right)}{2\pi R} t^2 = 2,4 \cdot 10^{-6} \text{ А.}$$

$$\text{Ответ: } I_{\text{инд}} = \frac{3\mu_0 a \alpha \ln \left( 1 + \frac{a}{r_0} \right)}{2\pi R} t^2 = 2,4 \cdot 10^{-6} \text{ А.}$$

3.7.24. Тонкий металлический стержень длиной  $l = 1,2$  м вращается в однородном магнитном поле вокруг перпендикулярной к стержню оси, отстоящей от одного из его концов на расстоянии  $l_1 = 0,25$  м, делая  $n = 2$  об/с (рис. 3.70). Вектор  $\vec{B}$  параллелен оси вращения и имеет величину  $B = 1$  Тл. Найти разность потенциалов  $U$ , возникающую между концами стержня.

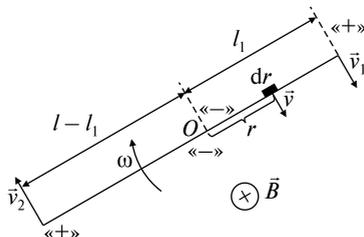


Рис. 3.70

*Решение.* Вместе с проводником в магнитном поле вращаются и свободные электроны, находящиеся в металле. На заряды, движущиеся в магнитном поле, будет действовать сила Лоренца (3.6.14), направление которой можно определить по правилу левой руки. Используя это правило, найдем, что около оси вращения будут скапливаться отрицательные заряды, а на концах стержня — положительные.

Таким образом, в точке  $O$ , лежащей на оси вращения, стержень разбивается на две части длиной  $l_1$  и  $l - l_1$ , в которых будут возникать ЭДС индукций  $\mathcal{E}_{\text{инд}_1}$  и  $\mathcal{E}_{\text{инд}_2}$ , направленные навстречу друг другу, и разность потенциалов  $U$  на концах стержня тогда будет равна

$$U = \mathcal{E}_{\text{инд}_2} - \mathcal{E}_{\text{инд}_1}. \quad (1)$$

Используя (3.7.7) и учитывая, что согласно условию задачи  $\vec{B} \perp \vec{v} \perp d\vec{r}$ , найдем ЭДС индукции  $\mathcal{E}_{\text{инд}_1}$ , возникающую в части стержня длиной  $l_1$ :

$$\mathcal{E}_{\text{инд}_1} = \int_0^{l_1} vB dr = \int_0^{l_1} \omega r B dr = \omega B \int_0^{l_1} r dr = 2\pi n B r^2 / 2 \Big|_0^{l_1} = \pi n B l_1^2. \quad (2)$$

Здесь мы учли, что  $v = \omega r$  и  $\omega = 2\pi n$ .

Аналогично ЭДС индукции  $\mathcal{E}_{\text{инд}_2}$ , возникающая в остальной части стержня  $l - l_1$ , будет

$$\mathcal{E}_{\text{инд}_2} = \int_0^{l-l_1} vB dr = \pi n B (l - l_1)^2.$$

Окончательно, с учетом (1)–(3) определим разность потенциалов  $U$ :

$$U = \mathcal{E}_{\text{инд}_2} - \mathcal{E}_{\text{инд}_1} = \pi n B l (l - 2l_1) = 5,3 \text{ мВ}.$$

*Ответ:*  $U = \pi n B l (l - 2l_1) = 5,3 \text{ мВ}.$

### Задачи без решений

3.7.25. Прямой проводник  $AC$  длиной  $l = 0,2$  м и массой  $m = 5 \cdot 10^{-3}$  кг подвешен горизонтально на двух невесомых нитях  $OA$  и  $O'C$  в однородном магнитном поле. Магнитная индукция  $B = 49$  мТл и перпендикулярна к проводнику (рис. 3.71). Какой силы ток  $I$  и в каком направлении надо пропустить через проводник, чтобы одна из нитей разорвалась, если нить разрывается при нагрузке, равной или превышающей  $T = 39,2$  мН?

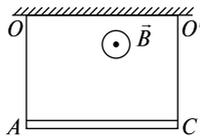


Рис. 3.71

3.7.26. В однородном магнитном поле, индукция которого  $B = 1$  Тл, находится прямой проводник длиной  $l = 0,2$  м. Концы проводника замкнуты проводом, находящимся вне поля. Сопротивление всей цепи  $R = 0,1$  Ом. Найти силу  $F$ , которую нужно приложить к проводнику, чтобы перемещать его перпендикулярно линиям индукции со скоростью  $v = 2,5$  м/с.

3.7.27. По П-образному проводу перемещается с постоянной скоростью  $v$  под действием силы  $F$  замыкающая провод перемычка (рис. 3.72). Контур находится в перпендикулярном к его плоскости однородном магнитном поле. Чему равна сила  $F$ , если за каждую секунду в контуре выделяется количество тепла, равное  $N$ ?

3.7.28. В однородном магнитном поле в горизонтальной плоскости расположена рамка, сопротивление которой  $R = 0,01$  Ом (рис. 3.73). Линии индукции магнитного поля  $B = 10^{-2}$  Тл направлены по вертикали. Какой заряд  $q$  протечет в рамке, если ее повернуть на  $180^\circ$  вокруг горизонтальной оси  $OO'$ ? Площадь рамки  $S = 10^{-4}$  м<sup>2</sup>.

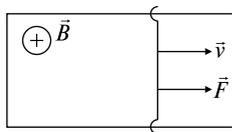


Рис. 3.72

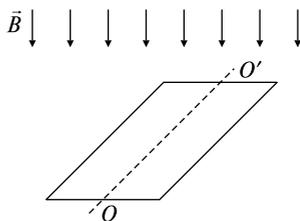


рис. 3.73

3.7.29. Индукция магнитного поля между полюсами двухполюсного генератора  $B = 0,8$  Тл. Ротор имеет  $N = 100$  витков площадью  $S = 0,04$  м<sup>2</sup>. Сколько оборотов в секунду  $n$  делает якорь, если максимальное значение ЭДС индукции  $\mathcal{E}_{\text{инд}}^{\text{max}} = 200$  В?

3.7.30. В однородном магнитном поле с индукцией  $B = 0,1$  Тл равномерно вращается рамка, содержащая  $N = 1000$  витков. Площадь рамки  $S = 0,015$  м<sup>2</sup>. Рамка делает  $n = 10$  об/с. Определить мгновенное значение ЭДС индукции  $\mathcal{E}_{\text{инд}}$ , соответствующее повороту рамки на угол  $\alpha = 30^\circ$ .

3.7.31. Плоская прямоугольная рамка вращается с угловой скоростью  $\omega$  в однородном магнитном поле, индукция которого равна  $B$ . Сторона рамки длиной  $l$  расположена вдоль линий магнитной индукции. Ось вращения, параллельная стороне  $a$  и перпендику-

лярная линиям индукции, расположена так (рис. 3.74), что 1) делит сторону  $l$  пополам; 2) проходит вдоль одной из сторон; 3) отстоит на некотором расстоянии  $x_0$  от рамки. Определить ЭДС индукции  $\mathcal{E}_{\text{инд}_1}$ ,  $\mathcal{E}_{\text{инд}_2}$  и  $\mathcal{E}_{\text{инд}_3}$  во всех трех случаях.

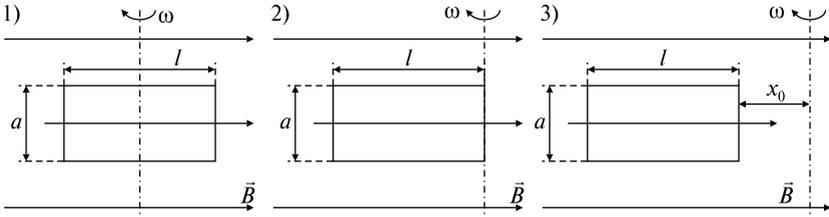


Рис. 3.74

3.7.32. Два проволочных кольца радиусами  $R$  и  $r$  расположены в параллельных плоскостях на расстоянии  $h$  так, что их центры находятся на одной оси. По большому кольцу течет ток, величина которого изменяется по линейному закону  $I = I_0(1 + \alpha t)$ , где  $\alpha > 0$ . Определить величину и направление ЭДС индукции  $\mathcal{E}_{\text{инд}}$ , наводимой в кольце меньшего радиуса. Считать  $R$  значительно больше  $r$ .

3.7.33. В однородном магнитном поле с индукцией  $B = 0,4$  Тл вращается стержень длиной  $l = 0,1$  м. Ось вращения параллельна линиям индукции и проходит через один из концов стержня перпендикулярно к его длине. Чему равна разность потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$  на концах стержня, если он делает  $n = 16$  об/с?

3.7.34. По соленоиду, имеющему  $N = 800$  витков, течет ток силой  $I = 2$  А. Поперечное сечение соленоида пронизывает магнитный поток  $\Phi = 4 \cdot 10^{-6}$  Вб. Определить индуктивность  $L$  соленоида.

3.7.35. Сила тока, проходящего в соленоиде, изменяется на  $\Delta I = 50$  А за время  $\Delta t = 1$  с. При этом на концах соленоида возникает среднее значение ЭДС самоиндукции  $\langle \mathcal{E}_{\text{инд}} \rangle = 0,08$  В. Определить индуктивность  $L$  соленоида.

3.7.36. В центре плоской круглой рамки, состоящей из  $N_1 = 50$  витков радиусом  $r = 0,2$  м каждый, расположена маленькая рамочка, состоящая из  $N_2 = 100$  витков площадью  $S = 1 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup> каждый. Маленькая рамочка вращается вокруг одного из диаметров большой рамки с постоянной скоростью  $\omega = 300$  с<sup>-1</sup>. Найти максимальное значение возникающей ЭДС индукции  $\mathcal{E}_{\text{инд}}^{\text{max}}$ , если в об-

мотке первой рамки идет ток силой  $I = 10$  А. Плоскости обеих рамок в начальный момент времени совпадают.

3.7.37. В плоскости квадратной рамки со стороной  $a = 0,2$  м и омическим сопротивлением  $R = 7$  Ом расположен прямой бесконечный проводник (рис. 3.75). Проводник параллелен одной из сторон рамки. По проводнику течет постоянный ток силой  $I = 10$  А. Рамка удаляется от бесконечного проводника со скоростью  $v = 100$  м/с в направлении, перпендикулярном проводнику. Определить ЭДС индукции  $\mathcal{E}_{\text{инд}}$  в рамке через  $t = 10$  с от начала движения, если в начальный момент времени рамка находилась на расстоянии  $r_0 = 0,2$  м от проводника.

3.7.38. В плоскости прямоугольной рамки расположен прямой бесконечный проводник, по которому течет постоянный ток  $I$  (рис. 3.76). Проводник параллелен одной из сторон рамки. Боковая сторона рамки длиной  $a$  удаляется от бесконечного проводника с постоянной скоростью  $v$  в направлении, перпендикулярном проводнику. Сопротивление рамки  $R$  известно. Сопротивление подводящих проводов и подвижной стороны  $a$  равно нулю. Определить силу тока  $I$  в контуре в произвольный момент времени  $t$ , если в начальный момент времени рамка находилась на расстоянии  $r_0$  от проводника.

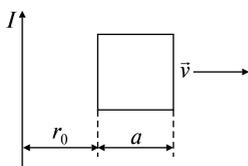


Рис. 3.75

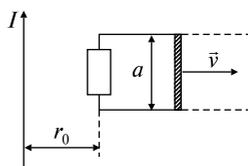


Рис. 3.76

3.7.39. Рамка площадью  $S = 0,02$  м равномерно вращается, делая  $n = 10$  об/с, относительно оси, лежащей в плоскости рамки перпендикулярно линиям индукции однородного магнитного поля  $B = 0,2$  Тл. Каково среднее значение ЭДС индукции  $\langle \mathcal{E}_{\text{инд}} \rangle$  за время, в течение которого магнитный поток, пронизывающий рамку, изменится от нуля до максимального значения?

3.7.40. В однородном постоянном магнитном поле  $B$  расположена замкнутая рамка в форме квадрата, согнутая из тонкой медной проволоки массой  $m$  так, что направление магнитного поля перпендикулярно плоскости квадрата. Найти заряд  $q$ , протекающий по проводнику, при растяжении квадратной рамки за два

противоположных угла в линию. Удельная плотность меди  $\rho$  и удельное сопротивление меди  $\eta$  известны.

3.7.41. В одной плоскости с бесконечно длинным прямым током силой  $I = 20$  А на расстоянии  $x_0 = 0,01$  м находятся две шины, параллельные току  $I$ . По шинам поступательно перемещается проводник длиной  $l = 5 \cdot 10^{-3}$  м. Скорость его  $v = 3$  м/с постоянна и направлена вдоль шин. Найти разность потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$ , возникающую на концах проводника.

3.7.42. По двум бесконечным проводникам радиусом  $r_0 = 2 \cdot 10^{-3}$  м, лежащим в одной плоскости, текут в противоположных направлениях токи одинаковой силы  $I = 3$  А. Расстояние между осями проводников  $a = 0,03$  м. Пренебрегая полем внутри проводника, рассчитать индуктивность системы  $L$  и ее энергию  $W$  на каждый метр длины ( $l = 1$  м).

3.7.43. Тороидальная катушка (без сердечника) состоит из двух обмоток, навитых одна поверх другой, содержащих  $N = 1000$  витков каждая. Обмотки соединены последовательно, магнитные поля их направлены в одну сторону. Найти магнитную энергию  $W$  такой катушки. Как изменится эта энергия, если одну из обмоток отключить? Сила тока в обмотке  $I = 5$  А, средняя длина тороида  $l = 0,25$  м, поперечное сечение  $S = 1 \cdot 10^{-4}$  м.

3.7.44. Рамка со сторонами  $a$  и  $b$  помещена в магнитное поле индукции  $B$ , причем в начальный момент времени плоскость рамки перпендикулярна силовым линиям поля. Рамка вращается с угловой скоростью  $\omega$ . а) Построить график зависимости силы тока, текущего в рамке, от времени. Сопротивление рамки  $R$ . б) Определить, как зависит от времени момент сил, необходимый для поддержания постоянной скорости вращения рамки?

### ТЕМА 3.8

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ.

## ПЕРЕМЕННЫЙ ТОК. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ.

## УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

В колебательном контуре, содержащем катушку индуктивности  $L$ , емкость  $C$  и активное сопротивление  $R$ , возможны три типа колебаний.

1. Если активное сопротивление  $R$  пренебрежимо мало, в контуре имеют место свободные незатухающие колебания

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (3.8.1)$$

где  $q$  — величина заряда на обкладках конденсатора в момент времени  $t$ ,  $q_m$  — амплитудное значение заряда,  $\omega_0 = 1/(LC)^{1/2}$  — собственная частота колебательного контура, зависящая только от параметров контура,  $\varphi_0$  — начальная фаза колебаний.

Для нахождения периода  $T$  незатухающих колебаний используется формула Томсона:

$$T = 2\pi(LC)^{1/2}. \quad (3.8.2)$$

2. Если сопротивление  $R$  имеет значительную величину, то в контуре происходят свободные затухающие колебания, изменяющиеся по закону

$$q = q_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0); \quad (3.8.3)$$

здесь  $\omega = (\omega_0^2 - \beta^2)^{1/2}$  — частота колебаний в контуре,  $\beta = R/2L$  — коэффициент затухания.

Логарифмический декремент затухания  $\lambda$  и добротность контура  $Q$  определяются по формулам

$$\lambda = \beta T, \quad Q = \pi/\lambda, \quad (3.8.4)$$

где  $T = 2\pi/\omega$  — период затухающих колебаний. При слабом затухании можно воспользоваться выражениями

$$\lambda = \pi R(C/L)^{1/2}; \quad Q = (1/R)(L/C)^{1/2}. \quad (3.8.5)$$

3. При *последовательном* включении источников напряжения в контур установившиеся вынужденные колебания напряжения  $U$  и силы тока  $I$  изменяются по законам

$$U = U_m \cos \omega t; \quad I = I_m \cos(\omega t - \varphi); \quad (3.8.6)$$

здесь  $\omega$  — частота вынуждающей силы,  $U_m$  и  $I_m$  — амплитудные значения напряжения и силы тока, которые связаны между собой (закон Ома для переменного тока):

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}. \quad (3.8.7)$$

Ток отстает по фазе от напряжения на угол  $\varphi$ , зависящий от параметров цепи и частоты:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}. \quad (3.8.8)$$

Соответствующая векторная диаграмма напряжения показана на рис. 3.77.

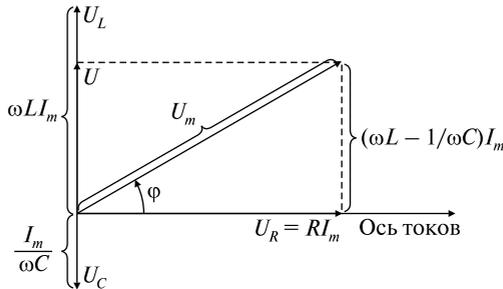


Рис. 3.77

Для расчета *параллельных* соединений в методе векторных диаграмм горизонтальной осью является ось напряжений (см. ниже задачи 3.8.46; 3.8.57).

Резонансная частота для заряда  $q$  и напряжения на конденсаторе  $U_C$  равна

$$\omega_{q\text{рез}} = \omega_{U\text{рез}} = (\omega_0^2 - 2\beta^2)^{1/2}. \quad (3.8.9)$$

Резонансная частота для силы тока совпадает с собственной частотой контура  $\omega_0$ :

$$\omega_{I\text{рез}} = \omega_0 = 1/(LC)^{1/2}. \quad (3.8.10)$$

Полное сопротивление контура (импеданс) определяется по формуле

$$Z = (R^2 + X^2)^{1/2}, \quad (3.8.11)$$

где  $X = X_L - X_C$  — реактивное сопротивление ( $X_L = \omega L$ ;  $X_C = 1/\omega C$ ).

Средняя мощность  $P$ , выделяющаяся в цепи переменного тока:

$$P = UI \cos \varphi, \quad (3.8.12)$$

где  $U$  и  $I$  — действующие (эффективные) значения напряжения и тока:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}, \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \quad (3.8.13)$$

Входящий в выражение (3.8.12) множитель  $\cos \varphi$  называют коэффициентом мощности.

### Качественные задачи

3.8.1. Записать уравнение свободных незатухающих колебаний и изобразить график его решения.

3.8.2. Записать уравнение свободных затухающих колебаний и изобразить график его решения.

3.8.3. Написать условие, при котором в контуре, содержащем индуктивность, емкость и активное сопротивление, возникает аperiodический режим.

3.8.4. Записать уравнение вынужденных колебаний и изобразить график его решения при установившихся колебаниях.

3.8.5. Нарисовать графики для резонанса токов и резонанса напряжений в колебательном контуре.

3.8.6. Можно ли записать соотношение между силой тока и напряжением на конденсаторе  $U = IX_C$  для а) амплитудных значений; б) эффективных значений; в) мгновенных значений силы тока и напряжения?

3.8.7. Можно ли записать соотношение между силой тока и напряжением на катушке индуктивности  $U = IX_L$  для а) амплитудных значений; б) эффективных значений; в) мгновенных значений силы тока и напряжения?

3.8.8. Можно ли записать соотношение между силой тока и напряжением на активном сопротивлении  $U = IR$  для а) амплитудных значений; б) эффективных значений; в) мгновенных значений силы тока и напряжения?

3.8.9. Какое из утверждений верно для последовательной  $RLC$ -цепочки: а) если сила тока изменяется по закону  $I = I_0 \sin \omega t$ , то мгновенное значение ЭДС —  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t + \varphi)$  или б) если значе-

ние ЭДС изменяется по закону  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$ , то сила тока —  $I = I_0 \sin(\omega t - \varphi)$ ?

3.8.10. Можно ли, зная коэффициент мощности  $\cos \varphi$ , определить, опережает по фазе ток в  $RLC$ -цепочке или отстает?

3.8.11. Если бы  $\cos \varphi$  в последовательной  $RLC$ -цепочке оказался меньше нуля, то и средняя мощность  $P < 0$ . а) Может ли так быть? б) Может ли  $\cos \varphi$  принимать отрицательные значения? Объясните.

3.8.12. Зависит ли коэффициент мощности  $\cos \varphi$  от частоты?

3.8.13. Зависит ли от частоты мощность, рассеиваемая в  $RLC$ -цепочке?

3.8.14. Для какой цепочки, состоящей из активного, емкостного и индуктивного сопротивлений, коэффициент мощности  $\cos \varphi$  может принимать нулевое значение?

3.8.15. От каких факторов зависит емкостное сопротивление контура?

3.8.16. От каких факторов зависит индуктивное сопротивление катушки?

3.8.17. Какое значение напряжения (мгновенное, амплитудное, эффективное) измеряет вольтметр переменного тока в последовательной  $RLC$ -цепочке?

3.8.18. Равно ли амплитудное значение напряжения источника  $\mathcal{E}_m$  сумме амплитудных значений напряжений на активном сопротивлении  $U_{mR}$ , катушке индуктивности  $U_{mL}$  и емкости  $U_{mC}$  в последовательной  $RLC$ -цепочке?

3.8.19. Для последовательной  $RLC$ -цепочки мгновенное значение ЭДС  $\mathcal{E}$ , т.е. проекция  $\mathcal{E}_0$  на ось  $y$  векторной диаграммы, равно сумме проекций амплитудных значений  $U_{mR}$ ,  $U_{mL}$  и  $U_{mC}$  на ось  $y$ . Верно ли это утверждение?

3.8.20. На рис. 3.78 изображена емкостная связь между цепями  $A$  и  $B$ . В чем состоит назначение конденсатора?

3.8.21. На рис. 3.79 изображена связь между цепями  $A$  и  $B$ . Какую роль играет конденсатор в этой схеме?

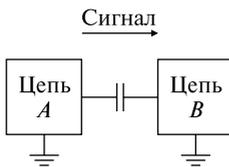


Рис. 3.78

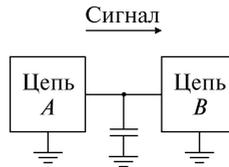


Рис. 3.79

3.8.22. В случае, когда напряжение постоянного тока равно эффективному значению напряжения переменного тока, какой из них представляет бóльшую опасность для человека? Как Вы считаете, зависит ли эта опасность от частоты переменного тока?

3.8.23. От каких факторов зависит тяжесть поражения электрическим током?

3.8.24. Что является источником электромагнитных волн?

3.8.25. Объясните тот факт, что поток вектора магнитной индукции через замкнутую поверхность равен нулю.

3.8.26. Чем отличаются силовые линии напряженности электростатического поля от силовых линий индукции магнитного поля?

3.8.27. Объясните, что представляют собой гром и молния во время грозы. Какими физическими явлениями можно объяснить возникновение молнии и происхождение грома?

3.8.28. Изобразите плоскую монохроматическую электромагнитную волну в пространстве в фиксированный момент времени.

3.8.29. Известно, что подобно распространяющимся волнам на воде или в натянутом шнуре, электромагнитные волны являются поперечными. Что «колеблется» в этих волнах?

3.8.30. По бесконечному прямолинейному проводнику, расположенному на расстоянии  $d$  от наблюдателя, течет постоянный ток силой  $I$ . Какое поле, по мнению этого наблюдателя, возникает вокруг проводника (электрическое, магнитное или электромагнитное)?

3.8.31. По бесконечному прямолинейному проводнику течет переменный ток  $I$ . Какое поле распространяется вокруг проводника (электрическое, магнитное или электромагнитное)?

3.8.32. Положительный заряд  $q$  движется к наблюдателю с постоянной скоростью  $v$ . Какое поле, по мнению этого наблюдателя, распространяется вокруг заряда (электрическое, магнитное или электромагнитное)?

3.8.33. По прямолинейному бесконечному проводнику, расположенному на расстоянии  $d$  от наблюдателя, течет постоянный ток силой  $I$ . На таком же расстоянии  $d$  от наблюдателя по прямой линии пролетает положительный заряд  $q$  с постоянной скоростью  $\vec{v}$  (рис. 3.80). Какие поля (электрическое, магнитное или электромагнитное), по мнению наблюдателя, распространяются в пространстве от постоянного тока, текущего по проводнику, и от летящего заряда? В чем разница? Объясните.

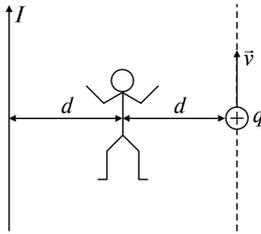


Рис. 3.80

3.8.34. Под стеклянным колпаком находится колокольчик. Наблюдателю видно, как дрожит язычок колокольчика и слышен его звон. Что произойдет, если из-под колпака откачать воздух?

3.8.35. От чего зависит скорость распространения электромагнитной волны в вакууме?

3.8.36. От антенны, расположенной, как указано на рис. 3.81, распространяются электромагнитные волны. Укажите, в какой плоскости происходят колебания векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ ?

3.8.37. От антенны, изображенной на рис. 3.81, электромагнитные волны распространяются во все стороны. Укажите, в каком направлении напряженность электрического поля и индукция магнитного поля а) максимальны; б) равны нулю?

3.8.38. Может ли различие в длине проводов, соединяющих звуковые колонки со стереоусилителем, привести к запаздыванию звука, излучаемого одной из колонок? Объясните.

3.8.39. Загораются ли лампочки в люстре одновременно с поворотом выключателя?

3.8.40. Как направлен ток смещения в конденсаторе (рис. 3.82) при условии, что конденсатор разряжается?

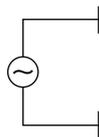


Рис. 3.81

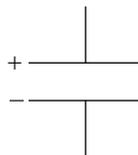


Рис. 3.82

3.8.41. Представьте, что Вы смотрите вдоль вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}$  в момент, когда напряженность возрастает. Как направлены силовые линии индукции магнитного поля: по часовой стрелке или против?

3.8.42. Представьте, что Вы смотрите вдоль вектора индукции магнитного поля  $\vec{B}$  в момент, когда индукция возрастает. Как на-

правлены силовые линии напряженности вихревого электрического поля: по часовой стрелке или против?

### Задачи с решениями

3.8.43. Колебательный контур радиоприемника состоит из катушки с индуктивностью  $L = 1,00$  мГн и переменного конденсатора, емкость которого может изменяться в пределах от  $C_{\min} = 9,7$  пФ до  $C_{\max} = 92$  пФ. В каком диапазоне длин волн  $\lambda_{\min} \dots \lambda_{\max}$  может принимать радиостанции этот приемник?

*Решение.* Длина электромагнитной волны  $\lambda$  связана с ее периодом  $T$  и скоростью света  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с следующим соотношением:  $\lambda = cT$ .

Период  $T$ , согласно формуле Томсона (3.8.2), равен

$$T = 2\pi(LC)^{1/2}.$$

Учитывая минимальное  $C_{\min}$  и максимальное  $C_{\max}$  значения емкости переменного конденсатора, оценим диапазон принимаемых волн:

$$\lambda_{\min} = c \cdot 2\pi(LC_{\min})^{1/2} = 186 \text{ м}; \quad \lambda_{\max} = c \cdot 2\pi(LC_{\max})^{1/2} = 571 \text{ м}.$$

*Ответ:*  $\lambda_{\min} = 186$  м;  $\lambda_{\max} = 571$  м.

3.8.44. Активное сопротивление колебательного контура  $R = 0,33$  Ом. Какую мощность  $P$  потребляет контур при поддержании в нем незатухающих колебаний с амплитудой силы тока  $I_m = 30$  мА?

*Решение.* Для поддержания незатухающих колебаний контур должен потреблять мощность, равную выделяемой им в цепи переменного тока, т.е.

$$P = UI \cos \varphi; \tag{1}$$

с учетом (3.8.13) перепишем (1) в виде

$$P = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi. \tag{2}$$

Применяя метод векторных диаграмм (рис. 3.83), определим коэффициент мощности  $\cos \varphi$ :

$$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} = \frac{R}{Z}, \tag{3}$$

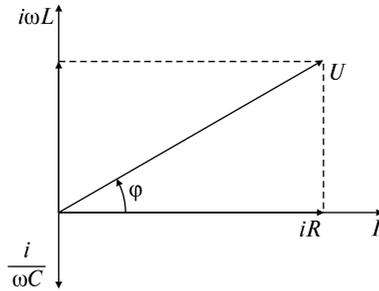


Рис. 3.83

где  $Z$  определяется по формуле (3.8.11). Используя закон Ома для переменного тока (3.8.7)

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} = \frac{U_m}{Z},$$

а также формулы (2), (3), выразим мощность  $P$  в виде

$$P = I_m^2 R/2 = 0,15 \text{ мВт.}$$

*Ответ:*  $P = I_m^2 R/2 = 0,15 \text{ мВт.}$

3.8.45. На зажимы цепи, изображенной на рис. 3.84, а, подается переменное напряжение с действующим значением  $U = 220 \text{ В}$  и частотой  $\nu = 50 \text{ Гц}$ . Активное сопротивление цепи  $R = 22 \text{ Ом}$ , индуктивность  $L = 318 \text{ мГн}$ . Переменная емкость в цепи подбирается так, чтобы показание вольтметра, включенного параллельно индуктивности, стало максимальным. Найти показания  $U$  вольтметра и  $I$  амперметра в этих условиях. Полным сопротивлением амперметра и ответвлением тока в цепь вольтметра можно пренебречь.

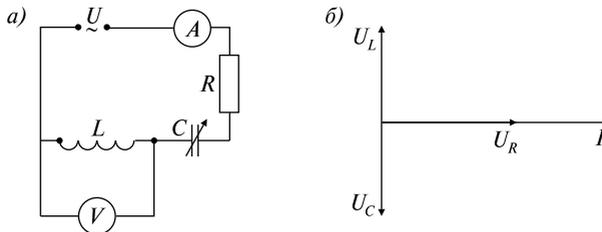


Рис. 3.84

*Решение.* Применим второе правило Кирхгофа (3.5.7) к этой задаче: сумма падений напряжений на всех участках цепи равна напряжению, подаваемому в цепь, т.е.

$$U_L + U_C + U_R = U. \quad (1)$$

Из условия задачи, согласно которому напряжение на катушке индуктивности  $U_L \equiv U_1$  является максимальным, следует, что переменная емкость  $C$  подобрана так, что контур настроен на резонансную частоту, при которой  $\operatorname{tg} \varphi = 0$ . Следовательно,  $\varphi = \pi$ .

Из векторной диаграммы (рис. 3.84, б) видно, что сдвигу фаз  $\varphi = \pi$  соответствует падение напряжения на катушке  $U_L$ , равное по величине падению напряжения на конденсаторе  $U_C$ , но находящееся в противофазе, т.е.  $U_L = -U_C$  или  $U_L + U_C = 0$ .

Таким образом, выражение (1) упростится:

$$U = U_R = IR. \quad (2)$$

Откуда  $I = U/R = 10$  А.

В последовательно соединенном контуре  $I_L = I_R$ , т.е.

$$U_L/\omega L = U_R/R.$$

Следовательно, с учетом (2) максимальное напряжение  $U_1$  будет

$$U_1 \equiv U_L = U_R \omega L/R = U \omega L/R = 1 \text{ кВ}.$$

*Ответ:*  $I = U/R = 10$  А,  $U_1 \equiv U_L = U \omega L/R = 1$  кВ.

3.8.46. Определить действующие значения силы тока  $I_C$ ,  $I_{RL}$  и  $I$  на всех участках цепи, изображенной на рис. 3.85, а, если  $R = 1$  Ом,  $L = 1,00$  мГн,  $C = 0,111$  мкФ,  $\mathcal{E} = 30$  В,  $\omega = 1,00 \cdot 10^5$  рад/с.

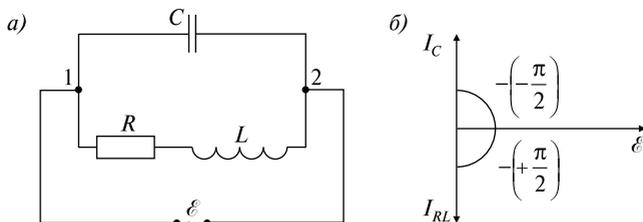


Рис. 3.85

*Решение.* Известно, что при последовательном включении в контур действующие значения напряжения  $U$  и силы тока  $I$  изменяются по закону (3.8.6). При этом для амплитудных значений силы тока  $I_m$  и напряжения  $U_m$  выполняется соотношение (3.8.7).

Применим формулу (3.8.7) для последовательно соединенного контура  $\mathcal{E}1C2\mathcal{E}$ :

$$I_C = \mathcal{E}/(1/\omega C) = \mathcal{E}\omega C = 0,33 \text{ А.} \quad (1)$$

Для последовательно соединенного контура  $\mathcal{E}1RL2\mathcal{E}$  с учетом того, что

$$R^2 \ll L^2\omega^2 \quad [1 \ll (10^{-3} \cdot 10^5)^2], \quad (2)$$

можно записать

$$I_{RL} = \mathcal{E}/(R^2 + L^2\omega^2)^{1/2} \approx \mathcal{E}/L\omega = 0,30 \text{ А.} \quad (3)$$

Так как колебательный контур  $\mathcal{E}1C2\mathcal{E}$  содержит только емкостное сопротивление ( $R = 0$ ,  $L = 0$  в этом контуре), то сдвиг фаз  $\varphi_C$  между током  $I_C$  через конденсатор и напряжением  $\mathcal{E}$  будет

$$\varphi_C = -\pi/2. \quad (4)$$

Используя формулу (3.8.8) для колебательного контура  $\mathcal{E}1RL2\mathcal{E}$  (при условии, что он не содержит емкости), получим выражение для сдвига фаз  $\varphi_{RL}$  между током  $I_{RL}$  и напряжением  $\mathcal{E}$ :

$$\operatorname{tg} \varphi_{RL} = \omega L/R = 100, \text{ т.е. } \varphi_{RL} \approx \pi/2. \quad (5)$$

Для параллельно соединенного контура  $1C2LR1$  построим векторную диаграмму (рис. 3.85, б), отложив напряжение  $\mathcal{E}$  по горизонтальной оси.

Перепишем (3.8.6) для данной задачи:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \cos \omega t; \quad I = I_m \cos(\omega t - \varphi).$$

Учитывая (4), запишем закон изменения тока  $I_C$  на конденсаторе:

$$I_C = I_m \cos[\omega t - (-\pi/2)] = I_m \cos(\omega t + \pi/2),$$

т.е. ток  $I_C$  на конденсаторе как всегда будет опережать напряжение  $\mathcal{E}$  на  $\pi/2$ .

Аналогично, используя (5), запишем закон изменения тока  $I_{RL}$  через катушку индуктивности  $L$  и активное сопротивление  $R$ :

$$I_{RL} = I_m \cos(\omega t - \pi/2),$$

т.е. ток через катушку индуктивности  $I_{RL}$ , как обычно, будет отставать от напряжения  $\mathcal{E}$  на  $\pi/2$  (при данном соотношении параметров, оцененных в (2)).

Сравните векторную диаграмму в этой задаче с диаграммой для последовательного контура, изображенной в теоретическом введении на рис. 3.77.

Таким образом, мы получили, что токи  $I_C$  и  $I_{RL}$  находятся в противофазе, и в неразветвленной части контура ток  $I$  будет равен

$$I = I_C - I_{RL} = 0,33 - 0,30 = 0,03 \text{ А.}$$

*Ответ:*  $I_C = \mathcal{E}\omega C = 0,33 \text{ А}$ ,  $I_{RL} = \mathcal{E}/(R^2 + L^2\omega^2)^{1/2} \approx \mathcal{E}/L\omega = 0,30 \text{ А}$ ,  $I = I_C - I_{RL} = 0,03 \text{ А}$ .

3.8.47. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью  $C = 5,0 \text{ мкФ}$  и катушки индуктивности  $L = 0,2 \text{ Гн}$ . Определить максимальную силу тока  $I_m$  в контуре, если максимальная разность потенциалов на обкладках конденсатора  $U_m = 90 \text{ В}$ . Сопротивлением контура  $R$  пренебречь.

*Решение. 1 способ.* Так как сопротивлением контура  $R$  можно пренебречь, то, следовательно, в контуре возникнут свободные незатухающие колебания по закону

$$q = q_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

По определению сила тока  $I = dq/dt$ , т.е.  $I = \omega_0 q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ .

Значение  $I_m = \omega_0 q_m$  является амплитудным, или максимальным значением силы тока в контуре.

Так как собственная частота колебательного контура  $\omega_0 = 1/(LC)^{1/2}$ , а заряд на конденсаторе равен  $q_m = CU_m$ , найдем

$$I_m = \omega_0 q_m = U_m (C/L)^{1/2} = 0,45 \text{ А.}$$

*2 способ.* Запишем закон сохранения энергии для свободных незатухающих колебаний:

$$CU^2/2 + LI^2/2 = \text{const}, \quad (1)$$

при этом, когда конденсатор имеет максимальное напряжение  $U_m$ , сила тока в контуре  $I = 0$ . Следовательно, в этот момент времени полная энергия контура запасена в конденсаторе:

$$W = CU_m^2/2. \quad (2)$$

В случае, когда конденсатор разряжен, т.е.  $U = 0$ , сила тока достигает максимального значения  $I_m$ , и тогда полная энергия контура запасена в катушке индуктивности:

$$W = LI_m^2/2. \quad (3)$$

Учитывая (1)–(3), можно записать  $CU_m^2/2 = LI_m^2/2$ , откуда  $I_m = U_m(C/L)^{1/2} = 0,45$  А.

Ответ:  $I_m = U_m(C/L)^{1/2} = 0,45$  А.

### Задачи без решений

3.8.48. Индуктивность колебательного контура  $L = 0,5$  мГн. Какова должна быть емкость контура  $C$ , чтобы он резонировал на длину волны  $\lambda = 300$  м?

3.8.49. В колебательном контуре (рис. 3.86) индуктивность катушки  $L = 2,5$  мГн, емкости конденсаторов  $C_1 = 2,0$  мкФ и  $C_2 = 3,0$  мкФ. Конденсаторы зарядили до напряжения  $U = 180$  В и замкнули ключ  $K$ . Найти: а) период  $T$  собственных колебаний; б) амплитудное значение силы тока  $I_m$  через катушку.

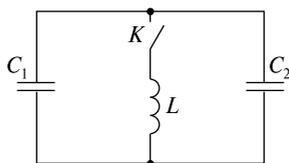


Рис. 3.86

3.8.50. Замкнутый контур в виде рамки площадью  $S = 6 \cdot 10^{-3}$  м<sup>2</sup> равномерно вращается в однородном магнитном поле с индукцией  $B = 20$  мТл, делая  $n = 20$  об/с. Ось вращения и направление поля перпендикулярны. Определить амплитудное  $\mathcal{E}_m$  и действующее  $\mathcal{E}_{\text{инд}}$  значения ЭДС индукции в контуре.

3.8.51. Параметры колебательного контура имеют значения:  $C = 1,0$  нФ,  $L = 6,0$  мкГн,  $R = 0,5$  Ом. Какую мощность нужно подводить к контуру, чтобы поддерживать в нем незатухающие колебания с амплитудой напряжения на конденсаторе  $U_m = 10,0$  В?

3.8.52. В цепи, состоящей из последовательно соединенных резистора сопротивлением  $R = 20$  Ом, катушки индуктивностью  $L = 1,0$  мГн и конденсатора емкостью  $C = 0,10$  мкФ, действует синусоидальная ЭДС (рис. 3.87). Определить частоту  $\omega$  электродвижущей силы, при которой в цепи наступает резонанс. Найти также действующие значения силы тока  $I$  и напряжений  $U_R$ ,  $U_L$ ,  $U_C$  на всех элементах цепи при резонансе, если при этом действующее значение ЭДС  $\mathcal{E} = 30$  В.

3.8.53. На точки  $A$  и  $B$  схемы, изображенной на рис. 3.88, подается переменное напряжение с действующим значением  $\mathcal{E} = 220$  В.

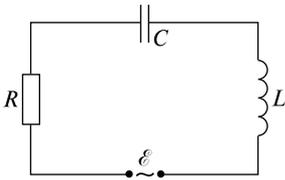


Рис. 3.87

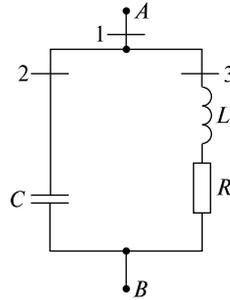


Рис. 3.88

Емкость конденсатора  $C = 1,00 \text{ мкФ}$ , индуктивность  $L = 1,00 \text{ мГн}$ , активное сопротивление  $R = 100 \text{ мОм}$ . Определить: а) при каком значении частоты  $\omega$  сила тока через сечение 1 будет минимальной  $I_{1\min}$ ; б) чему равны при этой частоте действующие значения силы токов  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$ , текущих через сечения 1, 2 и 3?

3.8.54. Катушка, имеющая индуктивность  $L = 0,3 \text{ Гн}$  и сопротивление  $R = 100 \text{ Ом}$ , включается в цепь переменного тока частотой  $50 \text{ Гц}$  с эффективным напряжением  $U_{\text{эфф}} = 120 \text{ В}$ . Определить амплитуду силы тока  $I_m$ , сдвиг фазы  $\varphi$  между током и напряжением в цепи и выделяемую в цепи мощность  $P$ .

3.8.55. Сопротивление  $R = 10 \text{ Ом}$  и катушка с индуктивностью  $L = 0,1 \text{ Гн}$  соединены последовательно. Какую емкость  $C$  необходимо включить последовательно в цепь, чтобы уменьшить сдвиг фазы между ЭДС и силой тока на  $\Delta\varphi = 27^\circ$ ? Частота изменения гармонической ЭДС  $\nu = 50 \text{ Гц}$ .

3.8.56. В цепи переменного тока частотой  $50 \text{ Гц}$  находятся реостат и катушка с индуктивностью  $L = 0,1 \text{ Гн}$ . Между напряжением и силой тока наблюдается сдвиг фазы  $\varphi = 30^\circ$ . Чему равно сопротивление реостата  $R$  и какую емкость  $C$  нужно включить последовательно в цепь, чтобы устранить сдвиг фазы?

3.8.57. Участок цепи состоит из конденсатора емкостью  $C = 200 \text{ мкФ}$  и сопротивления  $R = 10^2 \text{ Ом}$ , соединенных параллельно. Определить полное сопротивление  $Z$  участка. Частота изменения гармонической ЭДС составляет  $\nu = 50 \text{ Гц}$ .

3.8.58. Два параллельных провода, погруженные в глицерин, индуктивно соединены с генератором электромагнитных колебаний частотой  $\nu = 4,2 \cdot 10^8 \text{ Гц}$ . Расстояние между пучностями стоячих волн на проводах  $l = 0,07 \text{ м}$ . Найти диэлектрическую прони-

цаемость  $\epsilon$  глицерина. Магнитную проницаемость его принять равной  $\mu = 1$ .

3.8.59. Катушка (без сердечника) длиной  $l = 0,5$  м и сечением  $S_1 = 3 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>, имеющая  $N = 1000$  витков, соединена параллельно с конденсатором. Конденсатор состоит из двух пластин площадью  $S_2 = 7,5 \cdot 10^{-3}$  м<sup>2</sup> каждая. Расстояние между пластинами  $d = 5 \cdot 10^{-3}$  м, диэлектрик — воздух. Определить период  $T$  колебаний контура.

3.8.60. Цепь переменного тока образована последовательно включенным активным сопротивлением  $R = 800$  Ом, индуктивностью  $L = 1,27$  Гн и емкостью  $C = 1,59$  мкФ. На зажимы цепи подано переменное напряжение, действующее значение которого  $U = 127$  В, а частота  $\nu = 50$  Гц. Найти: а) действующее значение силы тока  $I$  в цепи; б) сдвиг фазы  $\phi$  между током и напряжением; в) действующие значения напряжений  $U_R$ ,  $U_L$  и  $U_C$  на зажимах каждого из элементов цепи; г) мощность  $P$ , выделяющуюся в цепи.

3.8.61. Переменное напряжение, действующее значение которого  $U = 220$  В, а частота  $\nu = 50$  Гц, подано на катушку без сердечника с индуктивностью  $L = 31,8$  мГн и активным сопротивлением  $R = 10,0$  Ом. а) Найти количество тепла  $Q$ , выделяющееся в катушке за время  $t = 1$  с. б) Чему будет равно отношение  $Q_1/Q$ , если последовательно с катушкой включить конденсатор емкостью  $C = 319$  мкФ ( $Q_1$  — количество теплоты, выделяющееся в катушке при наличии в контуре конденсатора)?

3.8.62. Параметры колебательного контура имеют значения:  $C = 4,00$  мкФ,  $L = 0,100$  мГн,  $R = 1,00$  Ом. Чему равна добротность контура  $Q_0$ ? Какую относительную ошибку  $\Delta Q/Q = (Q - Q_0)/Q$  мы сделаем, вычислив добротность контура по приближенной формуле  $Q = (L/C)^{1/2}/R$ ?

3.8.63. Максимальное напряжение в колебательном контуре, состоящем из катушки с индуктивностью  $L = 5 \cdot 10^{-6}$  Гн и конденсатора емкостью  $C = 2 \cdot 10^{-8}$  Ф, равно  $U_m = 120$  В. Сопротивление  $R$  ничтожно мало. Определить максимальное значение магнитного потока  $\Phi_m$ , если число витков катушки  $N = 30$ .

3.8.64. Батарея, состоящая из двух конденсаторов емкостью  $C = 2$  мкФ каждый, разряжается через катушку с индуктивностью  $L = 1$  мГн и активным сопротивлением  $R = 5$  Ом. Возникнут ли колебания, если конденсаторы соединены: 1) параллельно, 2) последовательно?

# Раздел 4

## ОПТИКА

### ТЕМА 4.1

#### ЭЛЕМЕНТЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

**Законы отражения света.** 1. Падающий и отраженный лучи и нормаль к отражающей поверхности, восстановленная в точке падения, лежат в одной плоскости. 2. Угол падения  $\alpha$  равен углу отражения  $\beta$ , где  $\alpha$  — угол между падающим лучом и нормалью,  $\beta$  — угол между отраженным лучом и нормалью:  $\alpha = \beta$ .

**Законы преломления света.** 1. Падающий и преломленный лучи и нормаль к границе раздела сред в точке падения лежат в одной плоскости. 2. Отношение синуса угла падения к синусу угла преломления равно относительному показателю преломления второй среды относительно первой  $n_{21}$ :

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}, \quad (4.1.1)$$

где  $\alpha$  — угол между падающим лучом и нормалью,  $\beta$  — угол между преломленным лучом и нормалью,  $n_1$  и  $n_2$  — абсолютные показатели преломления двух сред, равные отношению скорости распространения света в вакууме к скорости распространения света в среде:  $n_1 = c/v_1$ ,  $n_2 = c/v_2$ .

**Ход лучей в призме.** Закон преломления света позволяет рассчитать ход лучей в различных оптических устройствах, в частности, в треугольной призме. В призме световой луч дважды испытывает преломление на преломляющих гранях и изменяет свое направление. Полное отклонение луча зависит от угла падения света на призму и от преломляющего угла  $\theta$  (рис. 4.1):

если  $\delta$  — угол отклонения лучей, то

$$\delta = \alpha_1 + \beta_2 - \theta, \quad (4.1.2)$$

$$\theta = \beta_1 + \alpha_2. \quad (4.1.3)$$

Если  $\theta$  мал, то

$$\delta = (n - 1)\theta, \quad (4.1.4)$$

где  $n$  — показатель преломления материала призмы по отношению к окружающей среде.

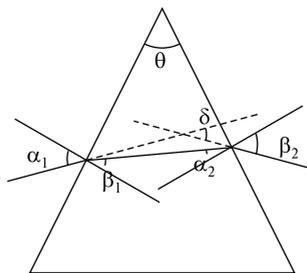


Рис. 4.1

**Явление полного внутреннего отражения.** Если луч идет из среды, оптически более плотной (с бóльшим показателем преломления), в среду, оптически менее плотную, то в формуле

$$\sin \alpha / \sin \beta = n_2 / n_1 \quad \alpha < \beta. \quad (4.1.5)$$

При определенном значении угла падения  $\alpha_0$  преломленный луч скользит вдоль границы раздела сред и  $\beta = \pi/2$ , тогда  $\sin \alpha_0 = n_2/n_1$ .

При  $\alpha > \alpha_0$  луч полностью отражается от границы раздела сред, поэтому  $\alpha_0$  называется предельным углом полного внутреннего отражения.

**Тонкие линзы.** Линза — прозрачное тело, ограниченное двумя сферическими поверхностями. У тонкой линзы максимальная толщина значительно меньше радиусов кривизны сферических поверхностей. Центр линзы называется ее оптическим центром. Линия, проходящая через центр линзы, перпендикулярно плоскости линзы, называется главной оптической осью линзы. Фокус (главный фокус) линзы — точка  $F$  пересечения преломленных линзой лучей, падающих параллельно главной оптической оси. Расстояние между оптическим центром линзы и фокусом называется фокусным расстоянием. Оптической силой линзы называется величина, обратная фокусному расстоянию, выраженному в метрах. Она измеряется в диоптриях (дптр). Фокусное расстояние и оптическая сила линзы определяются радиусами кривизны ее сферических поверхностей:

$$D = \pm 1/F = (n - 1)(1/R_1 + 1/R_2). \quad (4.1.6)$$

**Построение изображения в собирающих и рассеивающих линзах.** Изображение точки называется действительным, если является центром сходящегося пучка света, прошедшего через оптическую

систему. Изображение называется мнимым, если является центром расходящегося пучка, т. е. строится на продолжении лучей.

Чтобы получить изображение светящейся точки  $S$ , следует построить ход двух исходящих из точки  $S$  лучей. Точка пересечения лучей (или их продолжений) дает действительное (или мнимое) изображение  $S'$ .

#### *Основные правила построения изображений в тонких линзах*

1. Луч, параллельный главной оптической оси, после преломления проходит через главный фокус в собирающей линзе или продолжение луча проходит через главный фокус в рассеивающей линзе (рис. 4.2).

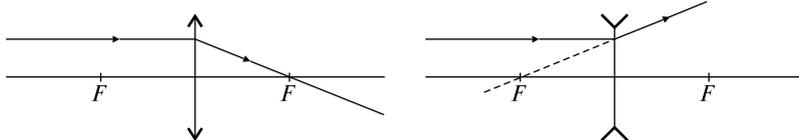


Рис. 4.2

2. Луч, проходящий через оптический центр линзы, не преломляется (рис. 4.3).

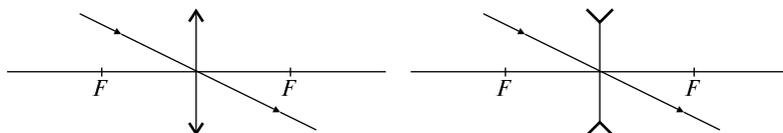


Рис. 4.3

3. Луч, проходящий через главный фокус собирающей линзы, и луч, продолжение которого проходит через главный фокус в рассеивающей линзе, после преломления идут параллельно оптической оси (рис. 4.4).

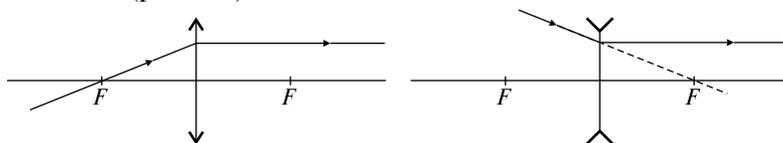


Рис. 4.4

#### **Формула линзы**

$$\pm \frac{1}{F} = \pm \frac{1}{d} \pm \frac{1}{f}, \quad (4.1.7)$$

где  $F$  — фокусное расстояние,  $d$  — расстояние от предмета до линзы,  $f$  — расстояние от изображения до линзы. Слева в формуле

ставится знак «+» для собирающей, «-» для рассеивающей линзы. Перед первым слагаемым в правой части «+» для действительного источника и «-» для мнимого источника, когда на линзу падает сходящийся поток лучей. Перед вторым слагаемым «+» для действительного изображения и знак «-» для мнимого изображения.

Линейным увеличением  $\Gamma$  называют отношение линейного размера изображения  $H$  к линейному размеру предмета  $h$ :  $\Gamma = H/h = |f|/|d|$ .

### Оптические приборы

**Луна** — короткофокусная двояковыпуклая линза из стекла или пластмассы. Это простейший прибор, увеличивающий угол зрения (рис. 4.5).

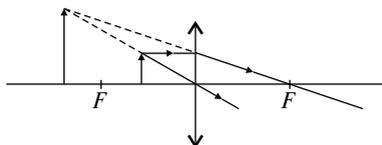


Рис. 4.5

Создает прямое мнимое увеличенное изображение.

**Фотоаппарат** — закрытая светонепроницаемая камера с системой линз (объективом) для получения фотографических изображений. Дает изображение действительное, уменьшенное, перевернутое (рис. 4.6).

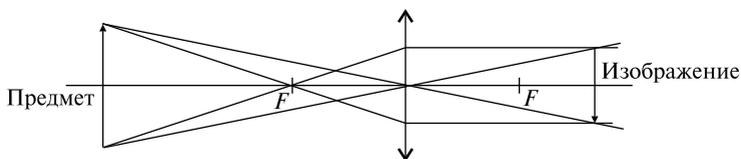


Рис. 4.6

**Проекционный аппарат** — устройство для проектирования изображения на экран. Дает изображение действительное, увеличенное, перевернутое (рис. 4.7).

**Микроскоп** — оптический прибор для наблюдения объектов, невидимых невооруженным глазом. Состоит из двух собирающих линзовых систем: объектива и окуляра. Промежуточное изображение увеличенное, действительное. Окончательное изображение увеличенное, мнимое, перевернутое (рис. 4.8).

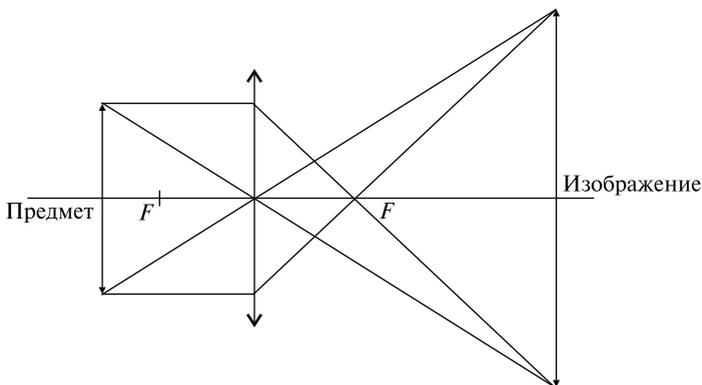


Рис. 4.7

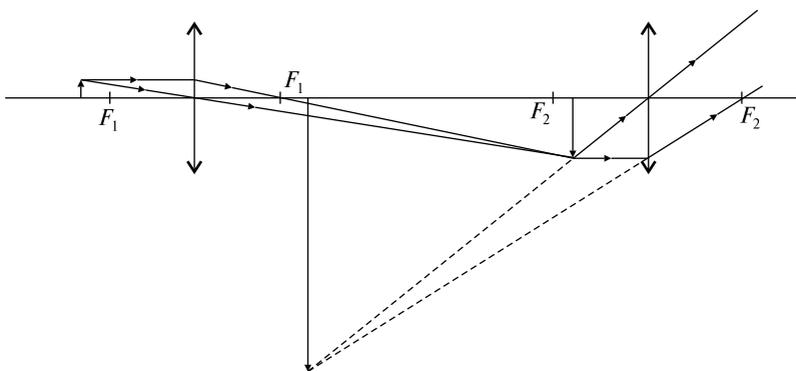


Рис. 4.8

**Глаз.** Ход лучей в глазу аналогичен ходу лучей в фотоаппарате, причем роль объектива играет выпуклая линза — хрусталик. Однако в отличие от фотоаппарата установка на резкость производится не за счет перемещения объектива, а за счет изменения фокусного расстояния хрусталика. Такой процесс проходит рефлекторно и называется аккомодацией. Минимальное расстояние, на которое глаз может аккомодироваться без утомления, называется расстоянием наилучшего зрения  $S$ . Для нормального глаза  $S = 25$  см.

### Качественные задачи

4.1.1. Какое время потребуется световому лучу на прохождение расстояния от Солнца до Земли (150 млрд км)?

4.1.2. Может ли рассеивающая линза создавать действительное изображение? Почему?

4.1.3. На какой угол повернется луч от плоского зеркала при повороте последнего на угол  $60^\circ$ ?

4.1.4. Человек, стоящий на берегу озера, видит на гладкой поверхности воды изображение солнца. Как будет перемещаться это изображение при удалении человека от озера?

4.1.5. Может ли угол преломления светового луча быть больше угла падения? Если да, то в каких случаях?

4.1.6. Может ли луч света иметь криволинейную форму?

4.1.7. Как идет после преломления в линзе луч, падающий параллельно главной оптической оси линзы?

4.1.8. Чем отличается построение изображений в рассеивающей и собирающей линзах?

4.1.9. Построить изображения в собирающей и рассеивающей линзах, представленных на рис. 4.9. Указать, в каких случаях изображения будут действительными, а в каких — мнимыми.

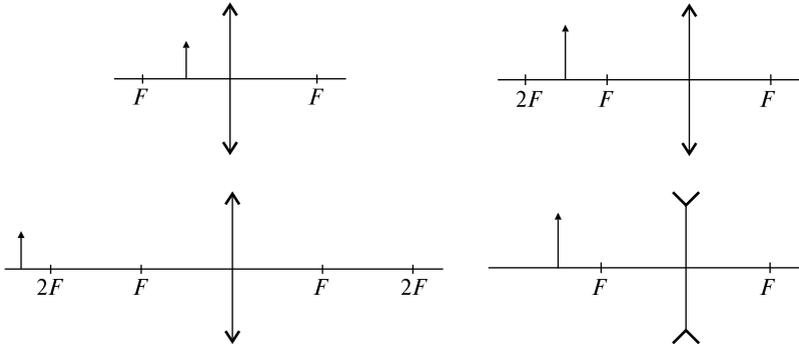


Рис. 4.9

4.1.10. В каком случае собирающая линза дает мнимое, прямое и увеличенное изображение?

4.1.11. Постройте изображение предмета, приведенного на рис. 4.10.

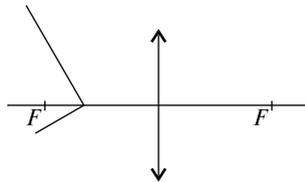


Рис. 4.10

4.1.12. С помощью линзы на экране получили изображение предмета. Что произойдет с изображением, если половину линзы закрыть ширмой?

4.1.13. Получится ли изображение предмета  $AB$ , если в линзе области  $C$  и  $D$  непрозрачны (рис. 4.11)?

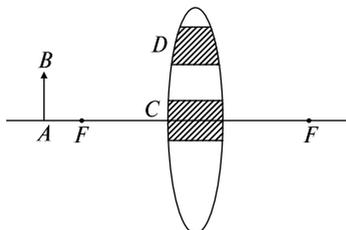


Рис. 4.11

4.1.14. Луч света падает на однородный прозрачный шар и проникает в него. Проходя внутри шара, он достигает поверхности раздела шар–воздух. Может ли в этой точке произойти полное внутреннее отражение?

### Задачи с решениями

4.1.15. В комнате длиной  $L = 5$  м и высотой  $H = 3$  м на стене висит плоское зеркало. Человек смотрит в него, находясь на расстоянии  $h = 1$  м от стены, на которой оно висит. Какова должна быть наименьшая высота  $l$  зеркала, чтобы человек мог видеть стену, находящуюся за его спиной, во всю высоту?

*Решение.* Из рис. 4.12 видно, что треугольники  $ABO$  и  $A'B'O$  подобны. Из подобия этих треугольников следует, что  $\frac{l}{h} = \frac{H}{L+h}$ , откуда  $l = \frac{hH}{L+h} = 0,5$  м.

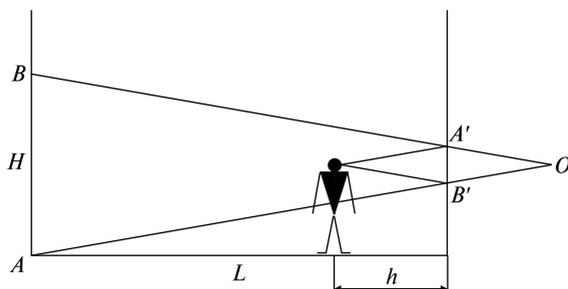


Рис. 4.12

4.1.16. На горизонтальном дне водоема глубиной  $h = 1,2$  м лежит плоское зеркало. Луч света падает на поверхность воды под углом  $\alpha = 30^\circ$ . На каком расстоянии от места падения этот луч снова выйдет на поверхность воды после отражения от зеркала? Показатель преломления воды  $n = 1,33$ .

*Решение.* Из закона преломления света (4.1.1)  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$ .

Из рис. 4.13 следует, что искомое расстояние  $x$  определяется как  $x = 2h \operatorname{tg} \beta$ .

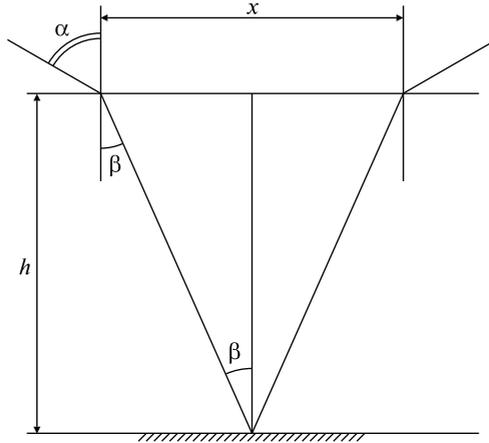


Рис. 4.13

Решая совместно оба уравнения, получаем

$$x = \frac{2h \sin \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} = 0,97 \text{ м.}$$

4.1.17. Выйдет ли луч света из воды в воздух, если угол падения равен  $\alpha = 50^\circ$ ? Абсолютный показатель преломления воды  $n = 1,33$ .

*Решение.* Как следует из (4.1.5), предельный угол полного внутреннего отражения для воды  $\beta = \arcsin(1/n) = 48^\circ 35'$ . Следовательно, луч не выйдет на воздух из воды при угле падения  $\alpha = 50^\circ$ .

4.1.18. Угол отклонения луча в равнобедренной призме равен  $\delta$ . Чему равен относительный показатель преломления призмы, если луч в призме проходит параллельно основанию, а преломляющий угол призмы равен  $\theta$  (рис. 4.14)?

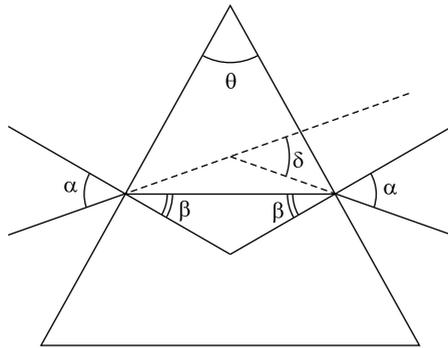


Рис. 4.14

*Решение.* Относительный показатель преломления призмы определяется из формулы (4.1.1):  $n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ . Из рисунка видно, что угол падения луча на левую грань призмы равен углу выхода луча из призмы, следовательно,  $\delta = \alpha + \alpha - \theta$ , откуда  $\alpha = (\delta + \theta)/2$ . Из условия (4.1.3) следует, что  $\theta = 2\beta$ , таким образом,  $\beta = \theta/2$ . Выражая значения  $\alpha$  и  $\beta$  через  $\delta$  и  $\theta$  и подставляя в формулу для показателя преломления, получаем

$$n = \frac{\sin[(\theta + \delta)/2]}{\sin(\theta/2)}.$$

*Ответ:*  $n = \frac{\sin[(\theta + \delta)/2]}{\sin(\theta/2)}.$

4.1.19. Определите построением положение линзы и ее фокусов. Положение предмета  $AB$  и его изображения  $A'B'$  приведены на рис. 4.15, а.

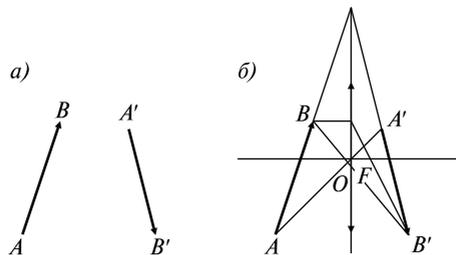


Рис. 4.15

*Решение.* Точка пересечения отрезков  $AA'$  и  $BB'$  (см. рис. 4.15, б) определяет оптический центр линзы. Пересечение продолжения отрезков  $AB$  и  $A'B'$  определяет положение линзы. Главная оптическая ось проходит через центр линзы  $O$  перпендикулярно плоскости линзы. Правый фокус можно определить, проведя из точки  $B$  луч, параллельный оптической оси. После преломления в линзе этот луч пройдет через точку  $B'$ . Точка пересечения луча с главной оптической осью будет правым фокусом линзы. Аналогично определяется левый фокус.

### Задачи без решений

4.1.20. Солнце стоит над горизонтом под углом  $\alpha$ . Под каким углом  $\beta$  к горизонту нужно поставить плоское зеркало, чтобы отраженный луч был направлен вертикально вверх?

4.1.21. Источник света диаметром  $D$  освещает круглый шар диаметром  $d < D$ , находящийся на расстоянии  $L$  от источника света. На каком расстоянии от источника нужно поместить экран, чтобы на экране отсутствовала геометрическая тень от предмета?

4.1.22. На водной поверхности бассейна глубиной  $H = 2$  м плавает круглый плот радиусом  $r = 1,5$  м. В центре пловта укреплена вертикальная мачта, на вершине которой подвешен фонарь. Определить высоту мачты  $h$ , если известно, что радиус тени от пловта на дне бассейна  $R = 2,1$  м. Показатель преломления воды  $n = 1,3$ . Фонарь считать точечным источником света.

4.1.23. Две стеклянных пластины одинаковой толщины  $d$  с показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$  ( $n_2 > n_1$ ) сложили вместе так, что показатель преломления верхней пластины  $n_1$ . На верхнюю пластину падает луч света под углом  $\alpha$ . Найти смещение луча, вышедшего из второй пластины.

4.1.24. Найти расстояние между лучом, отраженным от передней поверхности плоскопараллельной пластины, и лучом, дважды отраженным внутри пластины (рис. 4.16). Угол падения луча  $\alpha$ , толщина пластины  $d$ , коэффициент преломления вещества пластины  $n$ .

4.1.25. Луч света падает под углом  $\alpha = 30^\circ$  на проскопараллельную пластину и выходит из нее параллельно первоначальному лучу. Какова толщина пластины, если расстояние между лучами  $\Delta h = 1,94$  см? Показатель преломления стекла  $n = 1,5$ .

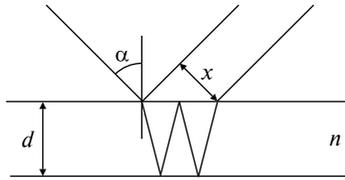


Рис. 4.16

4.1.26. Определить показатель преломления скипидара и скорость распространения света в скипидаре, если известно, что при угле падения  $\alpha = 45^\circ$  угол преломления  $\beta = 30^\circ$ . Скорость света в вакууме  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с.

4.1.27. Как изменится скорость распространения света при переходе из вакуума в прозрачную среду с абсолютным показателем преломления  $n = 2$ ?

4.1.28. На стеклянной пластине толщиной  $d$  находится чернильное пятно. На какой глубине  $h$  увидит изображение пятна человек, смотрящий прямо с противоположной стороны пластины? Показатель преломления стекла  $n$ .

4.1.29. Предельный угол полного внутреннего отражения для луча, выходящего из некоторой жидкости, равен  $\alpha = 55^\circ$ . Найти скорость распространения света в этой жидкости.

4.1.30. Каким должен быть внешний радиус изгиба световода, сделанного из прозрачного вещества с показателем преломления  $n = 4/3$ , чтобы при диаметре световода  $d = 2$  мм свет, вошедший в световод перпендикулярно плоскости сечения (рис. 4.17), не выходил наружу через боковую поверхность?

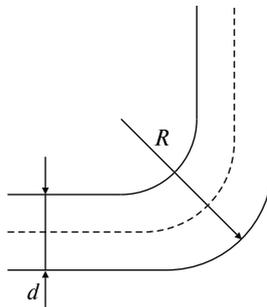


Рис. 4.17

4.1.31. В водоем на некоторую глубину помещен источник белого света. Показатель преломления для красных лучей  $n_1 = 1,328$ , для фиолетовых  $n_2 = 1,335$ . Вычислить отношение радиусов кругов,

в пределах которых возможен выход красных и фиолетовых лучей в воздух.

4.1.32. Определить предельный угол полного внутреннего отражения для среды с показателем преломления  $n = 2$ .

4.1.33. На каком расстоянии от стеклянного шара радиусом  $R$  следует поместить точечный источник света, чтобы его изображение оказалось с другой стороны шара на таком же расстоянии? Показатель преломления стекла  $n$ . Изображение создается узким пучком лучей, близких к оптической оси.

4.1.34. Линза с фокусным расстоянием  $F = 30$  см дает уменьшенное в  $k = 1,5$  раза мнимое изображение предмета. На каком расстоянии находится предмет от изображения?

4.1.35. Изображение предмета наблюдают на экране, расположенном на расстоянии  $f = 5$  см от тонкой линзы, фокусное расстояние которой  $F = 3,5$  см. Линзу смещают в направлении, перпендикулярном ее главной оптической оси, на расстояние  $\Delta u = 7$  мм. На какое расстояние  $\Delta x$  сместится при этом изображение предмета?

4.1.36. Собирающая линза дает на экране действительное изображение предмета, увеличенное в  $k = 4$  раза. Найти фокусное расстояние  $F$  линзы, если расстояние между предметом и экраном  $L = 0,5$  м.

4.1.37. Точечный источник света расположен на двойном фокусном расстоянии от собирающей линзы с фокусным расстоянием  $F = 30$  см. На каком расстоянии  $x$  от линзы нужно поместить плоское зеркало, для того чтобы лучи, отраженные от зеркала, вторично пройдя через линзу, стали параллельными?

4.1.38. За ширмой, в которой имеется отверстие диаметром  $D$ , установлен экран на расстоянии  $l$  от ширмы. Перед ширмой имеется точечный источник света. Когда в отверстие в ширме вставили собирающую линзу, на экране наблюдалось круглое пятно диаметром  $D$ . Если линзу убрать, пятно увеличивается до диаметра  $D_1$ . Определить фокусное расстояние линзы.

4.1.39. Траектория свободно падающей материальной точки проходит через горизонтально расположенную оптическую ось линзы на расстоянии  $d$  от центра линзы. С каким ускорением движется изображение материальной точки, если оптическая сила линзы  $D$ ?

4.1.40. Во сколько раз изменится фокусное расстояние линзы при перемещении ее из воздуха в воду? Показатель преломления

вещества линзы  $n_1 = 1,5$ , показатель преломления воды  $n_2 = 1,33$ , показатель преломления воздуха равен 1.

4.1.41. Из плоскопараллельной пластинки изготовили три линзы (рис. 4.18). Оптическая сила линз 1 и 2, сложенных вместе, равна  $D_1$ , оптическая сила линз 1 и 3 равна  $-D_2$ . Определите фокусное расстояние каждой линзы.

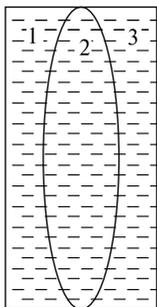


Рис. 4.18

4.1.42. Луч падает на стеклянный клин с преломляющим углом  $\theta = 4^\circ$  нормально к грани. Найти угол отклонения луча от первоначального направления после выхода из клина, если показатель преломления стекла  $n = 1,5$ .

4.1.43. На стеклянную призму, представляющую собой в сечении равнобедренный треугольник с углом при вершине  $\theta = 30^\circ$ , перпендикулярно боковой грани падает луч света. При каком показателе преломления света луч не пройдет через противоположную грань призмы?

4.1.44. Сечение стеклянной призмы имеет форму равностороннего треугольника. Луч падает на одну из граней перпендикулярно к ней. Вычислите угол между этим лучом и лучом, вышедшим из призмы. Показатель преломления стекла  $n = 1,5$ .

4.1.45. Найти минимальный угол падения луча на левую грань стеклянной призмы, когда выход луча из правой грани уже станет невозможным. Показатель преломления стекла  $n = \sqrt{2}$ . Преломляющий угол призмы  $\theta = 30^\circ$ . Ответ округлить до сотых.

4.1.46. Луч света входит в стеклянную призму под углом  $\alpha = 30^\circ$  и выходит из призмы в воздух под углом  $\beta = 60^\circ$ , причем, пройдя призму, отклоняется от своего первоначального направления на угол  $\delta = 45^\circ$ . Найти преломляющий угол  $\theta$  призмы. Ответ записать в градусах.

4.1.47. Сечение стеклянной призмы имеет форму равнобедренного треугольника. Одна из граней посеребрена. Луч света падает нормально на другую, не посеребренную грань и после двух отражений выходит через основание призмы перпендикулярно ему. Найдите углы призмы.

## ТЕМА 4.2 ВОЛНОВАЯ ОПТИКА

**Волновые свойства света.** Свет — это электромагнитные волны в интервале частот  $3 \cdot 10^{14} \dots 8 \cdot 10^{14}$  Гц, воспринимаемых человеческим глазом, т.е. длин волн 380...770 нм. Свету присущи все свойства электромагнитных волн: отражение, преломление, интерференция, дифракция, поляризация.

**Скорость света в однородной среде.** Скорость света определяется электрическими и магнитными свойствами среды. Подтверждением этого служит совпадение скорости света в вакууме с электродинамической постоянной:  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$  ( $\epsilon_0$  — электрическая постоянная,  $\mu_0$  — магнитная постоянная). Скорость света в однородной среде, как известно, определяется показателем преломления среды  $n$ . Скорость света в веществе  $v = c/n$ , где  $c$  — скорость света в вакууме. Из теории Максвелла следует  $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ , т.е. показатель преломления, а следовательно, и скорость в среде, определяются диэлектрической и магнитной проницаемостями среды:  $v = c/\sqrt{\epsilon\mu}$ .

Разность фаз двух когерентных волн

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}(L_2 - L_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta L, \quad (4.2.1)$$

где  $L_i = s_i n$  — оптическая длина пути,  $s_i$  — геометрическая длина пути световой волны в среде,  $n$  — показатель преломления среды,  $\Delta L = L_2 - L_1$  — оптическая разность хода двух световых волн,  $\lambda_0$  — длина волны в вакууме.

**Когерентные колебания** — колебания, имеющие одинаковые частоты, одинаковые направления поляризации и разность фаз, постоянную во времени.

**Интерференция света** — пространственное перераспределение светового потока при наложении двух или нескольких когерентных световых волн, т.е. волн, имеющих одинаковую частоту и постоянную разность фаз их колебаний, в результате чего в одних местах возникают максимумы, а в других — минимумы интенсивности, так называемая интерференционная картина.

Амплитуда колебаний среды в данной точке максимальна, если разность хода двух волн, возбуждающих колебания в этой точке, равна целому числу длин волн (условие интерференционных максимумов):

$$\Delta d = \pm k\lambda, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.2.2)$$

Амплитуда колебаний среды в данной точке минимальна, если разность хода двух волн, возбуждающих колебания в этой точке, равна нечетному числу полуволен (условие интерференционных минимумов):

$$\Delta d = \pm(2k + 1)\lambda/2, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.2.3)$$

Ширина интерференционной полосы  $\Delta x = l\lambda/d$ ,  $d$  — расстояние между двумя когерентными источниками, находящимися на расстоянии  $l$  от экрана, параллельного обоим источникам, причем  $l \gg d$ .

Условия максимумов и минимумов при интерференции света, отраженного от верхней и нижней поверхностей тонкой плоскопараллельной пластинки, находящейся в воздухе ( $n_0 = 1$ ):

$$2dncosr \pm \frac{\lambda_0}{2} = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2} = m\lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (4.2.4)$$

$$2dncosr \pm \frac{\lambda_0}{2} = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2} = (2m + 1)\frac{\lambda_0}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (4.2.5)$$

где  $d$  — толщина пластинки,  $n$  — показатель преломления,  $i$  — угол падения,  $r$  — угол преломления,  $\lambda_0$  — длина волны света. В общем случае член  $\pm\lambda_0/2$  обусловлен потерей полуволены при отражении света от границы раздела: если  $n > n_0$ , то необходимо употреблять знак «плюс», если  $n < n_0$  — знак «минус».

**Кольца Ньютона** наблюдаются в том случае, когда выпуклая поверхность линзы малой кривизны соприкасается с плоской поверхностью хорошо отполированной пластинки, так что остающаяся между ними прослойка постепенно утолщается от центра к краям (рис. 4.19). Если на линзу падает пучок монохроматического света, то световые волны, отраженные от верхней и нижней границ этой воздушной прослойки, будут интерферировать между собой. При этом в центре наблюдается черное пятно, окруженное рядом концентрических светлых и темных колец убывающей тол-

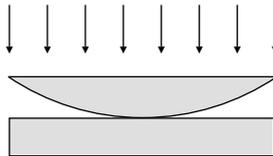


Рис. 4.19

щины. При наблюдении в проходящем свете будет обратная картина: пятно в центре будет светлым, все светлые кольца заменятся на темные и наоборот.

Радиусы светлых колец Ньютона в проходящем свете определяются формулой

$$r_m = \sqrt{m\lambda_0 R} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (4.2.6)$$

Радиусы темных колец Ньютона в проходящем свете

$$r_m = \sqrt{(m + \frac{1}{2})\lambda_0 R} \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (4.2.7)$$

где  $m$  — номер кольца,  $R$  — радиус кривизны линзы.

В отраженном свете расположение светлых и темных колец обратно их расположению в проходящем свете.

Если показатель преломления материала прослойки  $n$  меньше показателей преломления материалов, из которых изготовлены линза и пластинка, то в отраженном свете радиусы светлых колец Ньютона (или темных в проходящем)

$$r_m = \sqrt{\frac{R\lambda_0(2m-1)}{2n}}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (4.2.8)$$

Радиусы темных колец Ньютона в отраженном свете (или светлых в проходящем)

$$r_m = \sqrt{\frac{R\lambda_0 m}{n}}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (4.2.9)$$

**Дифракция света** — явление отклонения света от прямолинейного направления при прохождении у края преграды. Дифракция волн — совокупность явлений, наблюдаемых при прохождении волн в неоднородных средах, приводящих к отклонению волн от первоначального прямолинейного распространения.

**Принцип Гюйгенса—Френеля.** Каждая точка поверхности, которой достигла в данный момент волна, является точечным источником вторичных волн: волновая поверхность в любой момент времени представляет собой не просто огибающую вторичных волн, а результат их интерференции.

**Дифракция Френеля** (дифракция сферических волн).

Радиус внешней границы  $m$ -й зоны Френеля для сферической волны

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m\lambda}, \quad (4.2.10)$$

где  $m$  — номер зоны Френеля,  $\lambda$  — длина волны,  $a$  и  $b$  — соответственно расстояния диафрагмы с круглым отверстием от точечного источника и от экрана, на котором дифракционная картина наблюдается.

**Дифракция Фраунгофера** на щели.

Положения максимумов и минимумов освещенности при дифракции на щели, на которую нормально падает пучок параллельных лучей, определяются соответственно условиями

$$a \sin \varphi = \pm(2k + 1)(\lambda/2), k = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{и } a \sin \varphi = \pm 2k(\lambda/2), k = 1, 2, 3, \dots, \quad (4.2.11)$$

где  $a$  — ширина щели,  $\varphi$  — угол дифракции,  $\lambda$  — длина волны падающего света.

**Дифракционная решетка** представляет собой прозрачную пластинку с нанесенной на ней системой непрозрачных параллельных полос, расположенных на одинаковых расстояниях друг от друга. Если на решетку падает монохроматический свет длиной волны  $\lambda$ , то в результате дифракции на каждой щели свет распространяется не только в первоначальном направлении, но и по всем другим направлениям. Если за решеткой поставить собирающую линзу, то на экране в фокальной плоскости все лучи будут собираться в одну полосу.

Параллельные лучи, идущие от краев соседних щелей, имеют разность хода  $\Delta l = d \sin \varphi$ , где  $d$  — постоянная решетки, т.е. расстояние между соответствующими краями соседних щелей, называемое иначе периодом решетки,  $\varphi$  — угол отклонения световых лучей от перпендикуляра к плоскости решетки.

При разности хода, равной целому числу длин волн:

$$d \sin \varphi = \pm k \lambda \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (4.2.12)$$

наблюдается дифракционный максимум для данной длины волны. В результате при прохождении через дифракционную решетку пучок белого света разлагается в спектр. Угол дифракции имеет наибольшее значение для красного света, наименьшее значение — для фиолетового света.

Разрешающая сила дифракционной решетки

$$R = \frac{\lambda}{\delta \lambda} m N, \quad (4.2.13)$$

где  $\lambda$ ,  $\lambda + \delta\lambda$  — длины волн двух соседних спектральных линий, разрешаемых решеткой,  $m$  — порядок спектра,  $N$  — общее число штрихов решетки.

Угловая дисперсия дифракционной решетки

$$D_{\varphi} = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{m}{d \cos\varphi}. \quad (4.2.13)$$

**Поляризация света.** Свет представляет собой поперечные электромагнитные волны. Поляризация света — упорядочение в ориентации векторов напряженностей электрического и магнитного полей световой волны в плоскости, перпендикулярной световому лучу. Естественный свет (солнечный, ламп накаливания) неполяризован, т.е. все направления колебаний электрического и магнитного векторов, перпендикулярные световым лучам, равноправны. Естественный свет, проходя через поляризатор, становится плоскополяризованным, при этом интенсивность его будет составлять половину интенсивности естественного света.

Степень поляризации света

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad (4.2.14)$$

где  $I_{\max}$  и  $I_{\min}$  — соответственно максимальная и минимальная интенсивности частично поляризованного света, пропускаемого анализатором.

Закон Малюса

$$I = I_0 \cos^2 \alpha, \quad (4.2.15)$$

где  $I$  — интенсивность плоскополяризованного света, прошедшего через анализатор,  $I_0$  — интенсивность плоскополяризованного света, падающего на анализатор,  $\alpha$  — угол между главными плоскостями поляризатора и анализатора.

Закон Брюстера

$$\operatorname{tg} i_{\text{Б}} = n_{21}, \quad (4.2.16)$$

где  $i_{\text{Б}}$  — угол падения, при котором отраженный от диэлектрика луч является плоскополяризованным,  $n_{21}$  — относительный показатель преломления.

**Двойным лучепреломлением** называется способность некоторых веществ, в частности кристаллов, расщеплять падающий световой луч на два луча — обыкновенный ( $o$ ) и необыкновенный ( $e$ ), ко-

торые распространяются в различных направлениях с различной фазовой скоростью и поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях. Кристаллы, в которых существует выделенное направление, называемое оптической осью, и вдоль которого луч света не испытывает двойного преломления, называются оптически одноосными. При этом, если показатель преломления необыкновенного луча  $n_e$  больше показателя преломления обыкновенного  $n_o$  ( $n_e > n_o$ ,  $v_e < v_o$ ), то такие кристаллы называются оптически положительными, если же  $n_e < n_o$ , т.е.  $v_e > v_o$ , такие кристаллы называются оптически отрицательными. Волновая поверхность обыкновенного луча всегда сферическая, волновая поверхность необыкновенного луча представляет собой эллипсоид.

### Качественные задачи

4.2.1. Могут ли интерферировать между собой лучи, посланные двумя различными лампочками накаливания?

4.2.2. Чем объясняется расцветка крыльев стрекоз?

4.2.3. Почему частицы размером менее 0,3 мкм в оптическом микроскопе не видны?

4.2.4. При помощи зеркал Френеля получили интерференционные полосы, пользуясь красным светом. Как изменится картина интерференционных полос, если воспользоваться фиолетовым светом?

4.2.5. Имеются две интерференционные схемы (рис. 4.20): а) когерентные источники на расстоянии  $d$  друг от друга и экран, на котором наблюдается интерференционная картина на рассто-

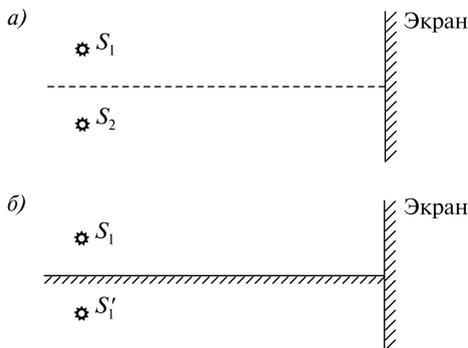


Рис. 4.20

янии  $L$ . б) Зеркало Ллойда: источник и его изображение в зеркале интерферируют между собой. Расстояние между источником и изображением  $d$ , расстояние до экрана  $L$ . Будут ли различаться интерференционные картины? Почему?

4.2.6. Каким волновым свойством обладают поперечные волны и не обладают продольные волны?

4.2.7. Какое явление света доказывает, что напряженность электрического поля и вектор индукции магнитного поля совершают колебания в направлении, перпендикулярном скорости распространения электромагнитных волн и, в частности, света, т.е. электромагнитные волны поперечные?

4.2.8. Как изменится количество максимумов, наблюдаемых от дифракционной решетки, если уменьшить число штрихов решетки на 1 мм?

4.2.9. Пучок белого света разлагается в спектр с помощью дифракционной решетки и призмы. В каком из спектров красные лучи отклоняются больше, чем фиолетовые?

### Задачи с решениями

4.2.10. В опыте Юнга отверстия освещались монохроматическим светом с длиной волны  $\lambda = 600$  нм, расстояние между отверстиями  $d = 1$  мм, расстояние от отверстий до экрана  $l = 3$  м. Найти положение третьей и четвертой светлых полос.

*Решение.* Ширина интерференционной полосы  $\Delta x = l\lambda/d$ , где  $d$  — расстояние между двумя когерентными источниками, находящимися на расстоянии  $l$  от экрана, параллельного обоим источникам, причем  $l \gg d$ . Первая светлая полоса находится на расстоянии  $y_1 = l\lambda/d$ , третья полоса находится на расстоянии  $y_3 = 3y_1$ ,  $n$ -я полоса — на расстоянии  $y_n = ny_1$ . Таким образом,  $y_3 = 5,4$  мм,  $y_4 = 7,2$  мм.

4.2.11. Параллельный пучок света с длиной волны  $\lambda$  нормально падает на основание бипризмы с малыми преломляющими углами  $\theta$ . Показатель преломления стекла призмы равен  $n$ . За призмой параллельно ее основанию расположен экран, на котором видна интерференционная картина. Найти ширину интерференционных полос.

*Решение.* Ширина интерференционных полос определяется по формуле  $\Delta x = l\lambda/d$ , где  $d$  — расстояние между двумя когерентными

ми источниками. В данном случае когерентные источники получаются расщеплением исходного пучка лучей бипризмой. Угол отклонения каждого луча в силу малости преломляющего угла призмы (см. формулы призмы в теме 4.1)  $\delta = (n - 1)\theta$ . Следовательно, можно считать  $d/2l = \text{tg } \delta \approx \sin \delta \approx \delta$ , откуда  $\Delta x \approx \frac{\lambda}{2(n - 1)\theta}$ .

4.2.12. В просветленной оптике для устранения отражения света на поверхность линзы, сделанной из стекла с показателем преломления  $n_1 = 1,5$ , наносится тонкая пленка с показателем преломления  $n = 1,26$ . При какой толщине  $d$  пленки отражение света от линзы не будет наблюдаться? Длина волны падающего света  $\lambda = 550$  нм, угол падения  $i = 30^\circ$ .

*Решение.* Свет, падая на систему пленка — стекло под углом  $i$ , отражается как от верхней, так и от нижней поверхности пленки. Отраженные лучи когерентны, поскольку образованы от одного падающего луча. Результат интерференции этих лучей зависит от оптической разности хода. Лучи отражаются от среды с большим показателем преломления, поэтому как на верхней, так и на нижней поверхности пленки происходит потеря полуволны и, следовательно, условие интерференционного минимума (4.2.4)

$$2d_m \sqrt{n^2 - \sin^2 i} = (2m + 1) \frac{\lambda}{2},$$

откуда

$$d_m = \frac{\lambda(2m + 1)}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}.$$

Полагая  $m = 0, 1, 2, \dots$ , получим ряд возможных значений толщины пленки:

$$d_0 = \frac{\lambda}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} = 120 \text{ нм}, \quad d_1 = \frac{3\lambda}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} = 350 \text{ нм},$$

$$d_2 = \frac{5\lambda}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} = 590 \text{ нм и т.д.}$$

4.2.13. В установке для наблюдения колец Ньютона свет с длиной волны  $\lambda = 0,5$  мкм падает нормально на плосковыпуклую линзу с радиусом кривизны  $R_1 = 1$  м, положенную выпуклой стороной на вогнутую поверхность плосковогнутой линзы с радиусом

кривизны  $R_2 = 2$  м. Определить радиус пятого темного кольца Ньютона, наблюдаемого в отраженном свете.

*Решение.* Определим величину  $x_1$  воздушного зазора между плосковыпуклой и вогнутой линзами на расстоянии  $r$  от точки их соприкосновения — центра линз. Из рис. 4.21 видно, что

$$x_2 = R_2 - \sqrt{R_2^2 - r^2},$$

$$x_1 = R_1 - x_2 - \sqrt{R_1^2 - r^2} = R_1 - R_2 + \sqrt{R_2^2 - r^2} - \sqrt{R_1^2 - r^2}.$$

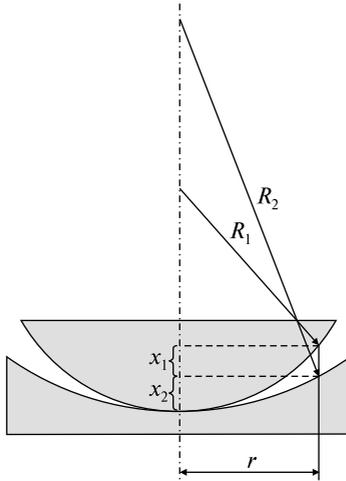


Рис. 4.21

В дальнейших вычислениях будем полагать  $x_1 \ll R_1$  и  $x_1 \ll R_2$ . Записывая последнее равенство в виде

$$x_1 + (R_2 - R_1) = \sqrt{R_2^2 - r^2} - \sqrt{R_1^2 - r^2},$$

возводя его в квадрат и пренебрегая слагаемым  $x_1^2$ , получаем

$$R_1 R_2 - r^2 - x_1 (R_2 - R_1) = \sqrt{(R_2^2 - r^2)(R_1^2 - r^2)}.$$

Второй раз возводя в квадрат данное равенство и учитывая малость  $x_1$ , получаем

$$r = \sqrt{\frac{x_1 R_1 R_2}{R_2 - R_1}}.$$

Разность хода  $\Delta d$  в отраженном свете  $\Delta d = 2x_1 + \frac{\lambda}{2}$ . С другой стороны, условие наблюдения темного кольца  $\Delta d = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}$ , от-

куда  $x_1 = k\lambda$ . Следовательно, радиус  $k$ -го темного кольца в отраженном свете определяется формулой

$$r_k = \sqrt{\frac{k\lambda R_1 R_2}{R_2 - R_1}}.$$

Подставляя  $k = 5$ ,  $R_1 = 1$  м,  $R_2 = 2$  м,  $\lambda = 0,5$  мкм, получаем  $r_5 = 2,24$  мм.

4.2.14. Найти радиус  $r_4$  четвертой зоны Френеля для случая плоской волны. Расстояние от волновой поверхности до точки наблюдения  $b = 1$  м. Длина волны света  $\lambda = 500$  нм.

*Решение.* Для плоской волны в формуле (4.2.10) для радиуса  $m$ -й зоны Френеля  $r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b}} m\lambda$  следует положить  $a \rightarrow \infty$ , поскольку плоский фронт волны дает бесконечно удаленный источник. Тогда

$$r_m = \lim_{a \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{ab}{a+b}} m\lambda = \lim_{a \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{b}{1+b/a}} m\lambda = \sqrt{bm\lambda}.$$

Следовательно,  $r_4 = \sqrt{4 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 10^{-7}} = 1,4$  мм.

4.2.15. На щель падает нормально плоская монохроматическая световая волна. Угол отклонения лучей, соответствующих второму дифракционному максимуму, равен  $\alpha = 30^\circ$ . Определить ширину щели, если длина волны падающего света  $\lambda = 0,6$  мкм.

*Решение.* Положение максимумов освещенности при дифракции от щели определяется по формуле (4.2.11)  $a \sin \alpha = (2k + 1)(\lambda/2)$ , откуда ширина щели

$$a = \frac{(2k + 1)\lambda}{2 \sin \alpha}.$$

Подставляя в последнюю формулу  $k = 2$ ,  $\alpha = 30^\circ$  и  $\lambda = 0,6$  мкм, получаем  $a = 5\lambda = 3$  мкм.

4.2.16. Какое число штрихов  $N$  на единицу длины имеет дифракционная решетка, если зеленая линия ртути ( $\lambda = 546,1$  нм) в спектре первого порядка наблюдается под углом  $\varphi = 19^\circ 8'$ ?

*Решение.* Число штрихов  $N$  дифракционной решетки на 1 мм вычисляется по формуле  $N = \frac{10^{-3}}{d}$ , где  $d$  — период решетки в мет-

рах. Период  $d$  определяется из формулы (4.2.12)  $d \sin \varphi = k\lambda$ , откуда  $d = \frac{k\lambda}{\sin \varphi}$ . По условию  $k = 1$ , тогда  $N = \frac{10^{-3} \sin \varphi}{\lambda} = 600$  штр/мм.

4.2.17. Построить ход лучей в одноосном положительном кристалле, если оптическая ось лежит в плоскости падения под косым углом к преломляющей грани. Параллельный пучок света падает под углом к поверхности кристалла.

*Решение.* Очевидно, что за время, в течение которого правый край  $B$  (рис. 4.22) фронта волны  $AB$  достигает точки  $D$  на поверхности кристалла, вокруг каждой из точек на поверхности кристалла между  $A$  и  $D$  возникают две лучевые поверхности — сферическая и эллипсоидальная. Эти две поверхности соприкасаются друг с другом вдоль оптической оси. Так как кристалл положительный, то эллипсоид будет вписан в сферу. Для нахождения фронтов обыкновенной и необыкновенной волн проводим (по принципу Гюйгенса) касательные плоскости  $DF$  и  $DE$  соответственно к сферам и эллипсоидам. Линии, соединяющие точку  $A$  (а также точку  $C$  и др.) с точками касания сферической и эллипсоидальной поверх-

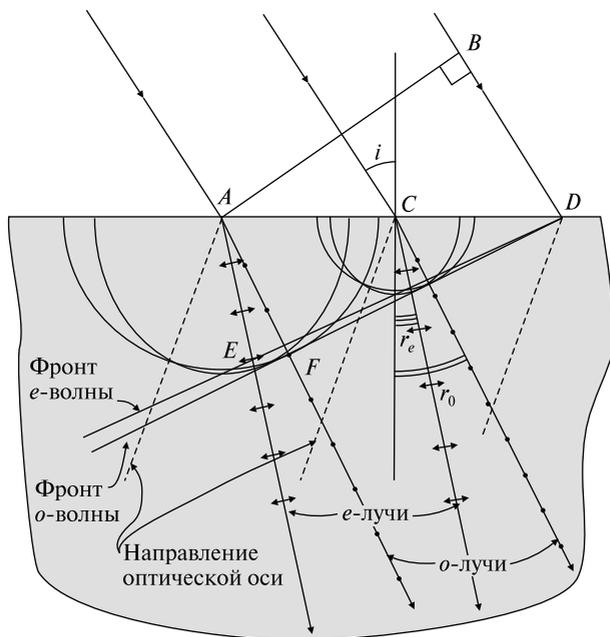


Рис. 4.22

ностей с касательными плоскостями  $DF$  и  $DE$ , дают нам соответственно обыкновенный и необыкновенный лучи. Так как главное сечение кристалла в данном случае совпадает с плоскостью чертежа, то электрический вектор необыкновенного луча колеблется в этой плоскости (стрелки), а электрический вектор обыкновенного луча колеблется перпендикулярно ей (точки). Как видно из рисунка, необыкновенные лучи не перпендикулярны волновому фронту. В данном случае угол преломления  $r_e < r_o$ .

### Задачи без решений

4.2.18. Две когерентные световые волны достигают некоторой точки с разностью хода  $\Delta d = 2,0$  мкм. Что произойдет в этой точке: усиление или ослабление волн? Рассмотреть три случая, когда свет: 1) красного цвета ( $\lambda_1 = 760$  нм), 2) желтого цвета ( $\lambda_2 = 600$  нм), 3) фиолетового цвета ( $\lambda_3 = 400$  нм).

4.2.19. На стеклянную пластинку ( $n_1 = 1,5$ ) нанесена прозрачная пленка ( $n_2 = 1,4$ ). На пленку нормально к поверхности падает монохроматический свет с длиной волны  $\lambda = 600$  нм. Какова наименьшая толщина  $d_{\min}$  пленки, если в результате интерференции отраженные лучи максимально ослабляются?

4.2.20. Два когерентных источника  $S_1$  и  $S_2$  испускают монохроматический свет с длиной волны  $\lambda = 600$  нм. Определить, на каком расстоянии от точки  $O$  будет первый максимум освещенности, если  $l = 4$  м,  $d = 1$  мм (рис. 4.23).

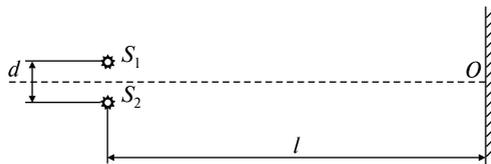


Рис. 4.23

4.2.21. Расстояние на экране между двумя соседними максимумами освещенности составляет  $\Delta x = 1,2$  мм. Определить длину волны света, испускаемого когерентными источниками  $S_1$  и  $S_2$ , если  $l = 2$  м,  $d = 1$  мм (см. рис. 4.23).

4.2.22. На стеклянный клин нормально к его грани падает монохроматический свет с длиной волны  $\lambda = 600$  нм. Число интерференционных полос, приходящихся на  $l = 1$  см, равно  $N = 10$ . Определить преломляющий угол клина, если показатель преломления стекла  $n = 1,5$ .

4.2.23. Для получения колец Ньютона использовали плоско-выпуклую линзу с радиусом кривизны  $R = 12,5$  м. Освещая линзу монохроматическим светом, определили, что расстояние между четвертым и пятым светлыми кольцами равно  $\Delta r = 0,5$  мм. Найти длину волны падающего света.

4.2.24. Кольца Ньютона наблюдаются в отраженном свете на системе, состоящей из плосковыпуклой линзы из крона ( $n = 1,55$ ) с фокусным расстоянием  $F = 2$  м и вогнутого зеркала с радиусом кривизны  $R = 3$  м. Найти расстояние между третьим и пятым темными кольцами, если длина волны  $\lambda = 0,56$  мкм.

4.2.25. Каков период решетки, если при нормальном падении на нее лучей с длиной волны  $\lambda = 0,75$  мкм на экране, отстоящем от решетки на расстоянии  $L = 1$  м, максимумы первого порядка расположены на расстоянии  $D = 30,3$  см друг от друга? Какое количество максимумов дает эта дифракционная решетка?

4.2.26. На дифракционную решетку с периодом  $d = 2$  мкм падает свет с длиной волны  $\lambda = 500$  нм. Определить угол между максимумами первого порядка.

4.2.27. Дифракционная решетка имеет  $N = 100$  штрихов на  $l = 1$  мм длины. Определить длину волны  $\lambda$  монохроматического света, падающего на решетку нормально, если угол между максимумами первого порядка равен  $\varphi = 8^\circ$ .

4.2.28. Каков наибольший порядок максимума для волны с  $\lambda = 600$  нм в дифракционной решетке, имеющей  $N = 300$  штрихов на  $l = 1$  мм?

4.2.29. Найти радиус  $r_3$  третьей зоны Френеля ( $m = 3$ ), если расстояние от источника света до волновой поверхности  $a = 1$  м, расстояние от волновой поверхности до точки наблюдения  $b = 0,5$  м. Длина волны света  $\lambda = 550$  нм.

4.2.30. На щель шириной  $a = 5\lambda$  падает нормально параллельный пучок монохроматического света с длиной волны  $\lambda$ . Под каким углом  $\varphi$  будет наблюдаться четвертый ( $m = 4$ ) дифракционный минимум света?

4.2.31. На дифракционную решетку с периодом  $d = 14$  мкм падает нормально монохроматическая световая волна. При этом расстояние между максимумами второго и третьего порядков равно  $h = 8,7$  см. Какова длина волны  $\lambda$  падающего света, если расстояние от решетки до экрана равно  $L = 2$  м?

4.2.32. Спектр получен с помощью дифракционной решетки с  $d = 1,9$  мкм. Дифракционный максимум второго порядка удален

от центрального максимума на расстояние  $h = 7,3$  см, а от решетки — на расстояние  $L = 1,13$  м. Определите частоту падающего на решетку света.

4.2.33. Чему равен угол между главными плоскостями поляризатора и анализатора, если интенсивность естественного света, прошедшего через поляризатор и анализатор, уменьшается в 4 раза?

4.2.34. Предельный угол полного отражения пучка света на границе жидкости с воздухом равен  $\alpha = 43^\circ$ . Определить угол Брюстера для падения луча из воздуха на поверхность жидкости.

4.2.35. Луч света, отраженный от поверхности воды, оказался полностью поляризованным. Под каким углом  $\alpha$  к поверхности воды находилась лампочка? Показатель преломления воды принять равным  $n = 1,33$ .

4.2.36. Отраженный свет максимально поляризован, когда угол преломления равен  $\alpha = 38^\circ$ . Найти показатель преломления  $n$  вещества.

4.2.37. Во сколько раз ослабляется естественный свет, проходя через два николя, главные плоскости которых составляют угол  $\alpha = 30^\circ$ , если в каждом из николей теряется 10% падающего на него светового потока?

4.2.38. Естественный свет проходит через поляризатор и анализатор, поставленные так, что угол между их главными плоскостями равен  $\alpha$ . Как поляризатор, так и анализатор поглощают и отражают 8% падающего на них света. Оказалось, что интенсивность луча, вышедшего из анализатора, равна 9% интенсивности естественного света, падающего на поляризатор. Найти угол  $\alpha$ .

4.2.39. Пучок плоскополяризованного света, длина волны которого равна  $\lambda = 650$  нм, падает нормально на пластинку исландского шпата, вырезанную параллельно его оптической оси. Найти длины волн обыкновенного и необыкновенного лучей в кристалле, если показатели преломления исландского шпата для обыкновенного и необыкновенного лучей равны соответственно  $n_o = 1,66$  и  $n_e = 1,49$ .

4.2.40. Параллельный пучок света падает нормально на пластинку исландского шпата, вырезанную параллельно оптической оси кристалла. Толщина пластинки равна  $d = 0,2$  мм. Показатели преломления для обыкновенного и необыкновенного лучей равны соответственно  $n_o = 1,66$  и  $n_e = 1,49$ . Найти разность хода  $\Delta d$  обоих лучей при выходе из пластинки.

4.2.41. Пучок монохроматического света с длиной волны  $\lambda = 0,6$  мкм падает нормально на пластинку кристаллического кварца, вырезанного параллельно оптической оси. Определить толщину  $d$  пластинки, при которой произойдет сдвиг фаз обыкновенной и необыкновенной волн на  $\Delta\varphi = 90^\circ$ . Для данной длины волны показатели преломления обыкновенного и необыкновенного лучей равны соответственно  $n_o = 1,544$  и  $n_e = 1,553$ .

4.2.42. Построить ход лучей в одноосном положительном кристалле, если оптическая ось параллельна преломляющей грани и лежит в плоскости падения. Луч света падает нормально к поверхности кристалла (рис. 4.24).

4.2.43. Построить ход лучей в одноосном положительном кристалле, если оптическая ось параллельна преломляющей грани и перпендикулярна плоскости падения. Луч света падает нормально к поверхности кристалла (рис. 4.25).

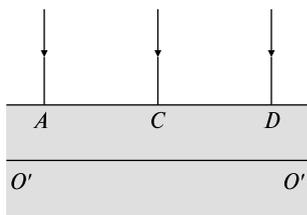


Рис. 4.24

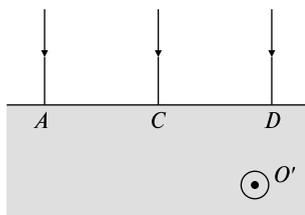


Рис. 4.25

4.2.44. Построить ход лучей в одноосном положительном кристалле, если оптическая ось лежит в плоскости падения под косым углом к преломляющей грани, а параллельный пучок света падает перпендикулярно к преломляющей поверхности кристалла (рис. 4.26).

4.2.45. Построить ход лучей в одноосном отрицательном кристалле, если оптическая ось перпендикулярна преломляющей грани. Луч света направлен вдоль оптической оси (рис. 4.27).

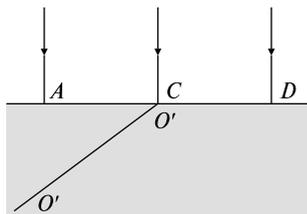


Рис. 4.26

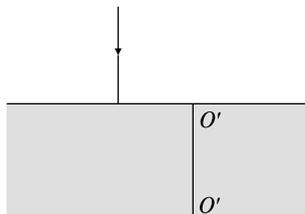


Рис. 4.27

4.2.46. Построить ход лучей в одноосном отрицательном кристалле, если оптическая ось перпендикулярна преломляющей грани, а луч света падает наклонно к оптической оси (рис. 4.28).

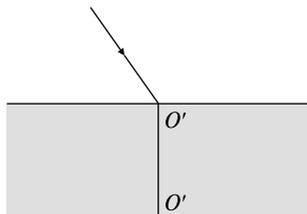


Рис. 4.28

## ТЕМА 4.3 КВАНТОВАЯ ОПТИКА

**Корпускулярные свойства света. Постоянная Планка.** Для разрешения противоречия между теорией и опытом, возникшего в физике в начале XX века (тепловое излучение, строение атома, спектры испускания и поглощения), немецкий физик Макс Планк предположил, что атомы испускают электромагнитную энергию отдельными порциями — квантами. Энергия каждой порции прямо пропорциональна частоте  $\nu$  излучения:

$$E = h\nu, \quad (4.3.1)$$

где  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж·с — постоянная Планка.

При испускании и поглощении свет ведет себя подобно потоку частиц с энергией  $E = h\nu$ . Световая частица называется фотон, или квант электромагнитного излучения.

Масса и импульс фотона

$$m_\gamma = E/c^2 = h\nu/c^2, \quad p_\gamma = h\nu/c. \quad (4.3.2)$$

Здесь  $c$  — скорость света.

**Фотоэффект** — это эффект испускания электронов веществом под действием света.

**Законы фотоэффекта.** 1. Сила тока насыщения прямо пропорциональна интенсивности светового излучения, падающего на поверхность тела. 2. Максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов возрастает с частотой света и не зависит от его интенсивности. 3. Если частота света меньше некоторой определенной для данного вещества минимальной частоты, то фотоэффект не происходит.

**Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта.** По теории Эйнштейна фотоэффект имеет следующее объяснение: поглощая квант света, электрон приобретает энергию  $h\nu$ . При вылете из металла энергия каждого электрона уменьшается на величину  $A_{\text{вых}}$  — работу выхода — работу, которую необходимо затратить для удаления электрона из металла. Максимальная энергия электрона после вылета

$$mv^2/2 = h\nu - A_{\text{вых}}. \quad (4.3.3)$$

Это уравнение носит название уравнения Эйнштейна. Если  $h\nu < A_{\text{вых}}$ , фотоэффект не происходит, частота  $\nu_{\text{min}} = A_{\text{вых}}/h$  называется красной границей фотоэффекта.

Изменение длины волны рентгеновского излучения при комптоновском рассеянии

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\theta) = \frac{2h}{m_0c} \sin^2 \frac{\theta}{2} = 2\lambda_C \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (4.3.4)$$

где  $\lambda$  и  $\lambda'$  — длины волн падающего и рассеянного излучения,  $m_0$  — масса электрона,  $\theta$  — угол рассеяния,  $\lambda_C = h/m_0c$  — комптоновская длина волны.

### Качественные задачи

- 4.3.1. Зависит ли энергия фотона от длины волны света?
- 4.3.2. Металлическая пластинка под действием рентгеновских лучей зарядилась. Каков знак заряда?
- 4.3.3. Чему равно отношение давления света, производимого на идеально белую поверхность, к давлению света, производимому на идеально черную поверхность? Все прочие условия в обоих случаях одинаковы.
- 4.3.4. Свободный атом излучает фотон. Выполняется ли при этом закон сохранения энергии? Выполняется ли при этом закон сохранения импульса? Выполняется ли при этом закон сохранения массы?
- 4.3.5. Во что преобразуется при внешнем фотоэффекте энергия падающего на тело света?
- 4.3.6. Способен ли свободный электрон поглотить квант света?
- 4.3.7. Фотон и электрон обладают одинаковой кинетической энергией. Который из них имеет большую длину волны?
- 4.3.8. Освещают две нейтральные пластинки, одну — металлическую, другую — полупроводниковую. Останутся ли пластинки нейтральными при возникновении фотоэффекта?

### Задачи с решениями

4.3.9. Определить длину волны фотона, импульс которого равен импульсу электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов  $U = 10$  В.

*Решение.* Скорость электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов  $U$ , определяется из соотношения

$$eU = \frac{m_e v^2}{2},$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}.$$

Импульс электрона

$$p_e = m_e v = \sqrt{2m_e eU}.$$

По условию этот импульс равен импульсу фотона  $p = h/\lambda$ .

Тогда

$$\frac{h}{\lambda} = \sqrt{2m_e eU},$$

откуда

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e eU}} = 388 \text{ пм.}$$

4.3.10. Фотон с длиной волны  $\lambda = 0,2 \text{ мкм}$  вырывает с поверхности натрия фотоэлектрон, кинетическая энергия которого  $E_k = 2 \text{ эВ}$ . Определить работу выхода и красную границу фотоэффекта.

*Решение.* Энергия фотона  $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}$ . Из уравнения фотоэффекта (4.3.3) следует

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda} = A + E_k,$$

откуда работа выхода  $A = \frac{hc}{\lambda} - E_k = 6,73 \text{ эВ}$ . Красная граница фотоэффекта определяется из условия  $A = \frac{hc}{\lambda_{\text{кр}}}$ , следовательно,

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{hc}{A} = 0,295 \text{ мкм.}$$

4.3.11. Фотон с энергией  $\varepsilon = 1,025 \text{ МэВ}$  рассеялся на первоначально покоившемся свободном электроны. Определите угол рассеяния фотона, если длина волны рассеянного фотона оказалась равной комптоновской длине волны  $\lambda_C = 2,43 \text{ пм}$ .

*Решение.* Энергия фотона  $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}$ , откуда  $\lambda = \frac{hc}{\varepsilon}$ . Длина волны рассеянного фотона  $\lambda' = \lambda + \lambda_C(1 - \cos\theta)$ . Поскольку  $\lambda' = \lambda_C$ , то

$$\lambda_C = \frac{hc}{\epsilon} + \lambda_C(1 - \cos\theta), \quad \text{откуда} \quad \cos\theta = \frac{hc}{\lambda_C\epsilon}, \quad \text{следовательно,}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{hc}{\lambda_C\epsilon}\right) = 60^\circ.$$

### Задачи без решения

4.3.12. При какой длине электромагнитной волны энергия фотона равна  $E = 3,3 \cdot 10^{-20}$  Дж? Ответ дать в ангстремах.

4.3.13. Сколько фотонов попадает за  $t = 1$  с в глаз человека, если глаз воспринимает свет с длиной волны 0,44 мкм при мощности светового потока  $P = 0,45 \cdot 10^{-19}$  Вт? Постоянная Планка  $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$  Дж · с, скорость света  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с.

4.3.14. Источник света мощностью  $N = 100$  Вт испускает в одну секунду  $n = 5 \cdot 10^{20}$  фотонов. Найти среднюю длину волны излучения  $\lambda$ . Ответ дать в микрометрах, округлив его до целого числа.

4.3.15. Определите массу и импульс фотона для излучения с длиной волны  $\lambda = 1$  мкм. Постоянная Планка  $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$  Дж · с.

4.3.16. Вычислите в электронвольтах энергию фотона с длиной волны  $\lambda = 207$  нм ( $1 \text{ нм} = 10^{-9}$  м,  $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Дж,  $h = 4,14 \cdot 10^{-15}$  эВ · с,  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с).

4.3.17. Определите энергию фотона для света с длиной волны  $\lambda = 4 \cdot 10^{-7}$  м, распространяющегося в среде с абсолютным показателем преломления  $n = 1,5$ . Постоянная Планка  $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$  Дж · с.

4.3.18. Источник монохроматического света мощностью  $P = 66$  Вт испускает за  $t = 10$  с  $N = 1,8 \cdot 10^{21}$  фотонов. Определить длину волны источника.

4.3.19. Рубиновый лазер излучает импульс, состоящий из  $n = 2$  миллиарда фотонов с длиной волны  $\lambda = 694$  нм. Найти среднюю мощность импульса лазера, если его длительность равна  $\tau = 2$  мс.

4.3.20. Мощность излучения лазера  $P = 100$  Вт, длина волны излучения  $\lambda = 1,2 \cdot 10^{-8}$  м. Определите число фотонов, испускаемых лазером в единицу времени. Постоянная Планка  $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$  Дж · с, скорость света  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с.

4.3.21. Энергия фотона равна кинетической энергии электрона, имевшего начальную скорость  $v_0 = 10^6$  м/с и ускоренного разностью потенциалов  $U = 4$  В. Найти длину волны  $\lambda$  фотона.

4.3.22. С какой скоростью должен двигаться электрон, чтобы его импульс был равен импульсу фотона с длиной волны  $\lambda = 550$  нм?

4.3.23. Катод фотоэлемента освещается ультрафиолетовыми лучами с длиной волны  $\lambda = 350$  нм. Для того чтобы фотоэлектроны не достигали анода, между катодом и анодом нужно приложить напряжение  $U > 1,55$  В. Найти работу выхода электронов из материала катода.

4.3.24. Какую скорость получают вырванные из калиевого фотокатода электроны при облучении его фиолетовым светом с длиной волны  $\lambda = 420$  нм? Работа выхода  $A = 2$  эВ. Определите массу фотона падающего света.

4.3.25. Чему равен запирающий потенциал для калиевого фотокатода при облучении его фиолетовым светом с длиной волны  $\lambda = 420$  нм? Работа выхода  $A = 2$  эВ. Определите массу фотона падающего света.

4.3.26. Для прекращения фотоэффекта, вызванного облучением ультрафиолетовым светом платиновой пластинки, нужно приложить задерживающую разность потенциалов  $U_1 = 3,7$  В. Если платиновую пластинку заменить другой пластинкой, то задерживающую разность потенциалов придется увеличить до  $U_2 = 6$  В. Определить работу выхода  $A_2$  электронов с поверхности этой пластины, если работа выхода электронов из платиновой пластины  $A_1 = 6,3$  эВ.

4.3.27. Красная граница фотоэффекта для некоторого металла соответствует длине волны  $\lambda_0 = 275$  нм. Найти максимальную скорость электронов, вызываемых светом с длиной волны  $\lambda = 180$  нм. Масса электрона  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг.

4.3.28. Фотон с энергией  $\epsilon = 0,25$  МэВ рассеялся на первоначально покоившемся свободном электроне. Определите кинетическую энергию электрона отдачи, если длина волны рассеянного фотона изменилась на 20%.

4.3.29. Фотон с энергией  $\epsilon = 0,3$  МэВ рассеялся под углом  $\theta = 180^\circ$  на свободном электроне. Определите долю энергии фотона, приходящуюся на рассеянный электрон.

4.3.30. Какова была длина волны  $\lambda_0$  рентгеновского излучения, если при комптоновском рассеянии этого излучения графитом под углом  $\varphi = 60^\circ$  длина волны рассеянного излучения оказалась равной  $\lambda = 25,4$  пм?

4.3.31. При комптоновском рассеянии энергия падающего фотона распределяется поровну между рассеянным фотоном и электроном отдачи. Угол рассеяния  $\varphi = \pi/2$ . Найти энергию  $W$  и импульс  $p$  рассеянного фотона.

# ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

## Раздел 1 МЕХАНИКА

1.1.1.  $x_1 = 2t; x_2 = t; x_3 = -4 + t$ .

1.1.2. Да.

1.1.3.  $v_{\text{отн}} = 5 \text{ м/с}$ .

1.1.4.  $v_{\text{отн}} = 5 \text{ м/с}, s = 50 \text{ м}$ .

1.1.5. а), в), д).

1.1.6.  $\vec{a} = \vec{g}$ .

1.1.7. Да.

1.1.8. а), в), г), д).

1.1.9.  $s(t) = 5t + 2t^2$ .

1.1.10.  $t = 4$ .

1.1.11. Вектор ускорения  $\vec{a}_n$  направлен перпендикулярно вектору скорости к центру кривизны траектории, определяет изменение скорости по направлению; вектор  $\vec{a}_\tau$  направлен вдоль скорости (или противоположно направлению скорости) и определяет изменение численного значения скорости.

1.1.12.  $\frac{a_n}{a_\tau} = \text{tg } 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

1.1.13. Пройденный путь  $s$  — это площадь фигуры, ограниченной графиком скорости и осью  $t$  (рис. 1):

$$s = \frac{\pi v_{\text{max}}^2}{2} = \frac{\pi \left(\frac{\tau}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi \tau^2}{8}.$$

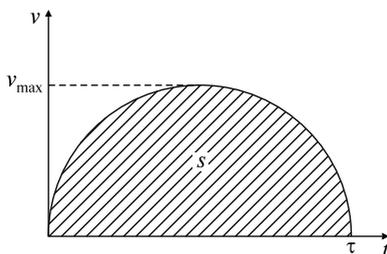


Рис. 1

1.1.14.  $a = k$ ,  $a_n = k\sqrt{8}$ ,  $R = \frac{(kt+b)^2}{k\sqrt{8}}$ .

1.1.15. а)  $y = -b\frac{x^2}{k^2}$ , б)  $\vec{v} = k\vec{i} - 2bt\vec{j}$ ,  $\vec{a} = -2b\vec{j}$ .

1.1.16.  $a_y = 2 + \cos\sqrt{8}$ .

1.1.17.  $\text{tg} = 1$ .

1.1.18. В  $\sqrt{k}$  раз.

1.1.19.  $= 60$ .

1.1.20.  $= 45^\circ$ .

1.1.31.  $= 0$ ,  $= -5$  м/с;  $= -6$  м/с<sup>2</sup>.

1.1.32.  $t = \tau(\sqrt{2} + 1) = 12$  ч.

1.1.33.  $= 12$  м (рис. 2).

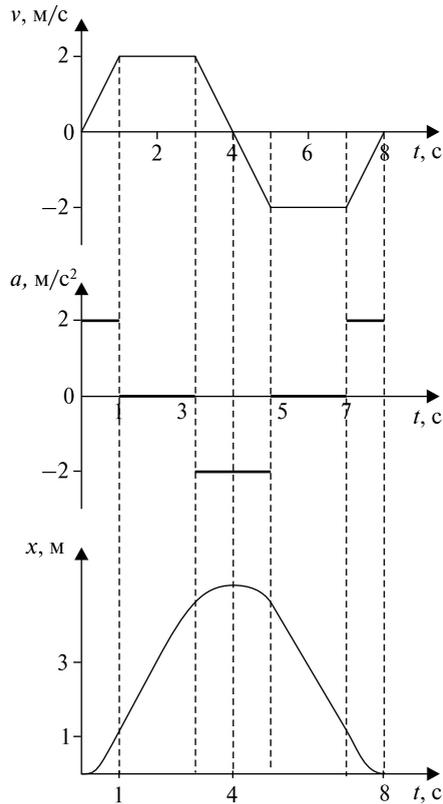


Рис. 2

1.1.34.  $s = 20$  м (рис. 3).

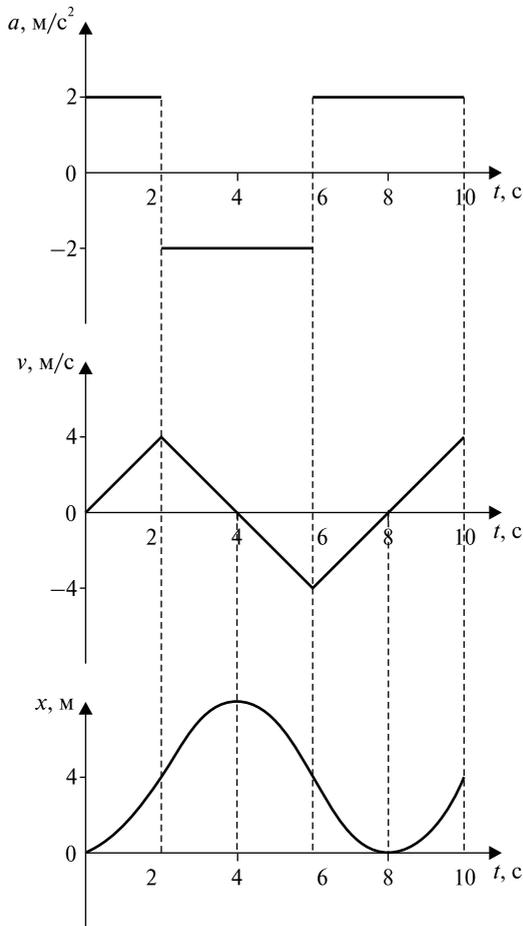


Рис. 3

$$1.1.35. v = \frac{bt^2}{4}, a = \frac{b^2}{2}.$$

1.1.36. Скорость и время подъема изменились в  $\sqrt{k}$  раз.

$$1.1.37. t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}} = 2 \text{ с}; t_2 = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} + \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2,82 \text{ с}.$$

$$1.1.38. t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g}\right)^2 + \frac{2H}{g}};$$

$$s = v_0 \cos \alpha \left( \frac{v_0 \sin \alpha}{g} + \sqrt{\left( \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)^2 + \frac{2H}{g}} \right).$$

$$1.1.39. \quad a = a_n = g; \quad a = 0; \quad R = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g}.$$

$$1.1.40. \quad a_n = \frac{g v_0 \cos \alpha}{\sqrt{(v_0 \cos \alpha)^2 + (v_0 \sin \alpha - g\tau)^2}} \approx 9,81 \text{ м/с}^2;$$

$$a_\tau = \frac{g(v_0 \sin \alpha - g\tau)}{\sqrt{(v_0 \cos \alpha)^2 + (v_0 \sin \alpha - g\tau)^2}} \approx 1,89 \text{ м/с}^2.$$

$$1.1.41. \quad s = \frac{2v_0^2 \cos^2(\alpha + \beta)[\text{tg}(\alpha + \beta) - \text{tg} \alpha]}{g \cos \alpha}.$$

$$1.1.42. \quad s = 6 \text{ м.}$$

$$1.1.43. \quad H = 37,7 \text{ м.}$$

$$1.1.44. \quad s = \frac{2v_0^2 \sin \beta}{g \cos^2 \beta}.$$

1.2.1. В определении инерциальной системы отсчета. Сила — векторная мера воздействия одного тела на другое.

1.2.2. Нет.

1.2.3. Нет.

1.2.4. Вес тела — к опоре или нити, сила тяжести — к центру тяжести тела.

1.2.5. Силой трения.

1.2.6. Да.

1.2.7.  $k = \text{tg}$  при равномерном движении по наклонной плоскости.

1.2.8. Нет.

1.2.9. Скорость тела в точке  $B$  зависит от силы трения. Так как поверхность  $AMB$  выпуклая, а  $AKB$  — вогнутая, сила нормального давления на  $AMB$  меньше, чем на  $AKB$ . Следовательно, и сила трения на  $AMB$  меньше, чем на  $AKB$ . Поэтому скорость тела в точке  $B$  больше в том случае, когда тело скользит по кривой  $AMB$ .

$$1.2.10. \quad \text{а) } 5 \text{ Н; б) } \sqrt{13} \text{ Н.}$$

$$1.2.11. \quad F = 5 \text{ Н.}$$

$$1.2.22. N = \frac{mg \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}; T = \frac{mg \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

$$1.2.23. h = R - \frac{g}{\omega^2}; F = M\omega^2 R.$$

$$1.2.24. a = g.$$

$$1.2.25. a_1 = \frac{2m_2 a_0 + (m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2}; T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} (g + a_0); \frac{m_1}{m_2} = 1 + 2 \frac{a_0}{g}.$$

$$1.2.26. a_1 = \frac{4m_1 m_3 - 3m_2 m_3 + m_1 m_2}{4m_1 m_3 + m_2 m_3 + m_1 m_2} g;$$

$$a_2 = \frac{m_1 m_2 - 4m_1 m_3 + m_2 m_3}{4m_1 m_3 + m_2 m_3 + m_1 m_2} g;$$

$$a_3 = \frac{4m_1 m_2 - 3m_1 m_3 + m_2 m_3}{4m_1 m_3 + m_2 m_3 + m_1 m_2} g.$$

$$1.2.27. \alpha = \arccos\left(\frac{g}{4\pi^2 n^2 L}\right) = 45^\circ; T = M(2\pi n)^2 L = 630 \text{ Н}.$$

$$1.2.28. \cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 R} \text{ при } \frac{g}{\omega^2 R} < 1; \alpha = 0 \text{ при } \frac{g}{\omega^2 R} \geq 1.$$

$$1.2.29. \omega = \sqrt{\frac{g(k \operatorname{ctg} \alpha - 1)}{R(k \sin \alpha + \cos \alpha)}}.$$

$$1.2.30. T = \frac{mg(l+r)}{R}.$$

1.3.1. У тяжелого.

$$1.3.2. H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

1.3.3. Да.

1.3.4. а) Нет; б) да.

1.3.5. Нет.

1.3.6. Если  $\sum F_{x \text{ внеш}} = 0$ , то  $p_x = \text{const}$ .

$$1.3.20. v_{\min} = \sqrt{5gl}.$$

$$1.3.21. h = H \frac{1 - k \operatorname{ctg} \alpha}{1 + k \operatorname{ctg} \alpha}.$$

$$1.3.22. H = 2,5R.$$

$$1.3.23. h = \frac{3v_0^2}{8g}.$$

$$1.3.24. A = mgH - \frac{mv^2}{2}; F_{\text{тр}} = \frac{m(gH - v^2/2)}{H} \sin \alpha.$$

$$1.3.25. v_0 = \frac{m+M}{m} \sqrt{2gh}.$$

$$1.3.26. k = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

$$1.3.27. k = \frac{m_2}{m_1} = 3.$$

$$1.3.28. u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}; E_{\text{к}} = \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

$$1.3.29. H = \frac{(\sqrt{2gh} + 2v)^2}{2g}.$$

$$1.3.30. l = \frac{m^2 v_0^2}{2g(M+m)^2 \sin \alpha}.$$

$$1.3.31. k = \frac{n+1}{n-1} = 1, 2.$$

1.4.1. Действием силы Кориолиса.

1.4.2. Если пристрелять прицел пушки в северном полушарии, а потом этой пушкой стрелять в южном, то в цель попасть не удастся.

1.4.3. Да. Нет.

1.4.4. Нет. Да.

1.4.5. Да. Нет.

1.4.6. Нет. Нет.

$$1.4.14. \vec{T} + m\vec{g} - m\vec{a}_0 = 0; \operatorname{tg} \alpha = \frac{a_0}{g}.$$

$$1.4.15. 1) \tau = \frac{1}{\omega} \ln \left\{ \frac{L}{L_0} + \sqrt{\left( \frac{L}{L_0} \right)^2 - 1} \right\} = 3 \text{ с};$$

$$2) F = 2m\omega^2 \sqrt{L^2 - L_0^2} = 0,2 \text{ Н};$$

$$3) A = \frac{m\omega^2(L^2 - L_0^2)}{2} = 0,1 \text{ Дж}.$$

1.4.16.  $n = 0,83$  об/с.

1.4.17.  $\alpha = \arccos\{(g + a_0)/4\pi^2 n^2 L\} = \arccos 0,36; T = 28,4 \text{ Н}.$

1.4.18.  $F_{\text{гор}} = 3,8 \cdot 10^2 \text{ Н}$ .

1.5.1.  $v_B = 2v_C; v_A = 0$ .

1.5.2. Поступательно.

1.5.3. См. рис. 4.

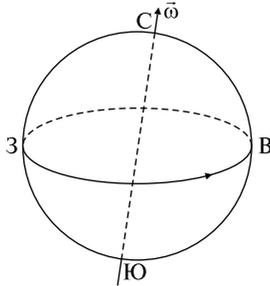


Рис. 4

1.5.4. Момент импульса секундной стрелки перпендикулярен плоскости часов и направлен «от нас».

1.5.5. Да.

1.5.6. В общем случае нет.

1.5.7.  $L = mvd$ ,  $d$  — перпендикуляр, опущенный из точки на прямую.

1.5.8.  $\frac{I_1}{I_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$ .

1.5.16.  $x_c = 4,3 \text{ см}; y_c = 0$ .

1.5.17.  $I_c = 9,7 \cdot 10^{37} \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$   
 $\dot{L} = 7 \cdot 10^{33} \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}.$

1.5.18.  $I = 3MR^2/2$ .

1.5.19.  $I = 15MR^2/8$ .

1.5.20.  $\vec{L} = -\vec{k} \left( \frac{mv_0^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha}{2g} \right)$ .

1.5.21.  $a = \frac{2}{3} g \sin \alpha$ .

1.5.22.  $a = \frac{F \cos \alpha (R-r) R}{(I_0 + mR^2)}$ ;

$$F_{\text{тр.п}} = F \cos \alpha - \frac{mF \cos \alpha (R-r) R}{(I_0 + mR^2)}.$$

1.5.23.  $a = 8g/11; F_{\text{тр}} = mg/11$ .

$$1.5.24. \quad M = 2 n m r^2 / t = 0,75 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$N = n t / 2 = 120 \text{ об.}$$

1.6.1. См. теоретическое введение.

1.6.2. См. теоретическое введение.

$$1.6.3. \quad 1) A = F s \cos(\widehat{\vec{F}, \vec{s}}); \quad 2) A = M.$$

1.6.4. Да, упрощает решение задач.

1.6.5. См. задачу 1.6.13, формула (7).

$$1.6.14. \quad v_{\text{скол}} > v_{\text{скат}};$$

$$v_{\text{скол}} = \sqrt{2gh};$$

$$v_{\text{скат}} = \sqrt{10gh/7}.$$

$$1.6.15. \quad E_2 = 3E_1/4.$$

$$1.6.16. \quad \cos = 10/17.$$

$$1.6.17. \quad \Delta E_k = \frac{I_A I_B}{2(I_A + I_B)} (\omega_A - \omega_B)^2.$$

$$1.6.18. \quad v = 2R_0/7;$$

$$E_k = m_0^2 R_0^2 / 7.$$

$$1.6.19. \quad \cos \alpha = 1 - \frac{3m^2 v^2}{gl(4M + 3m)(M + m)}.$$

$$1.6.20. \quad v = \sqrt{3gl}.$$

$$1.7.1. \quad v_0 = -x_0.$$

1.7.2. По параболе.

1.7.3. Чечевицу маятника надо передвинуть вверх.

$$1.7.4. \quad \langle E_k \rangle = \langle E_{\text{п}} \rangle = \frac{mA^2 \omega^2}{4}.$$

1.7.5. Так же, как зависит ускорение свободного падения от широты. Если часы с секундным маятником, установленным для Москвы, поместить на полюс, то часы будут спешить, на экваторе — отставать. В состоянии невесомости колебаний маятника нет.

$$1.7.6. \quad T = /_0.$$

1.7.7. Уменьшится вдвое.

1.7.8.  $>_0$ , где  $_0$  — собственная частота свободных колебаний, — коэффициент затухания.

$$1.7.9. \quad 4A.$$

$$1.7.19. \quad x_0 = [2mg(\sin - \cos)]/k.$$

$$1.7.20. \quad T = 2\pi\sqrt{2l/3g}.$$

- 1.7.21.  $a = 5$  см;  
 $= \arctg 0,75 = 0,2$  ;  
 $x = 5 \sin ( t + 0,2 )$  см.
- 1.7.22.  $2y^2 - x - 1 = 0$  — уравнение параболы.
- 1.7.23.  $y = -4x$  — уравнение прямой.
- 1.7.24.  $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$  — уравнение эллипса.
- 1.7.25.  $T = 2\pi \sqrt{m \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)}$ .
- 1.7.26.  $T = 2\pi \sqrt{\left( \frac{I}{r^2} + m \right) / k}$ .
- 1.7.27.  $T = 2 A(M + m) / m v_0 = 1,26$  с.

## РАЗДЕЛ 2 МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

2.1.1. Жесткая двухатомная молекула имеет три поступательных степени свободы и две вращательных степени свободы. Нежесткая молекула имеет дополнительно две колебательных степени свободы.

2.1.2. Нет, броуновское движение — это движение отдельных частиц вещества под воздействием ударов молекул, совершающих тепловое движение.

2.1.3. Из-за большой разреженности атмосферы числа молекул в единице объема оказывается недостаточно для того, чтобы передать при соударениях со спутником достаточное количество энергии.

2.1.4. В поступательном, вращательном и колебательном (когда атомы внутри молекулы колеблются друг относительно друга или молекулы колеблются в поле соседних молекул).

2.1.5. На больших высотах, так как там воздух разрежен.

2.1.6. Частые соударения молекул приводят к тому, что пути, пройденные ими, намного протяженнее перемещений — движение происходит по зигзагообразным траекториям.

2.1.7. Молекулы водорода, поскольку у них меньшая масса.

2.1.11.  $p = 2NE/3V = 200$  кПа.

2.1.12. 1)  $m_0 = /N_A = 27,3 \cdot 10^{-23}$  г; 2)  $m = 120 / 1000 = 19,68$  кг;  
3)  $N = 1000 \cdot 0,7N_A / = 25,6 \cdot 10^{23}$ .

2.1.13.  $= 0,02$  кг/моль — это неон.

2.1.14.  $p = nm \langle v_{\text{KB}} \rangle^2 / 3 = 13,4$  Па.

2.1.15.  $T = \mu(\Delta v)^2 / R(\sqrt{3} - \sqrt{8/\pi})^2 = 290$  К.

2.1.16.  $T = \pi\mu_1\mu_2(\Delta v)^2 / 8R(\sqrt{\mu_2} - \sqrt{\mu_1})^2$ .

2.1.17.  $f(n) = \frac{4}{\pi} n^2 e^{-n^2}$ .

2.1.18.  $Q = \frac{3}{2} RT(1,01^2 - 1) = 73$  Дж.

2.1.19. 417 м/с, 470 м/с, 511 м/с.

2.1.20. 1,66%.

2.1.21.  $\langle \epsilon \rangle = \frac{3}{2} kT$ ,  $\epsilon_B = \frac{1}{2} kT$ .

2.1.22. а)  $0,5p_0$ ; б)  $0,25p_0$ ; в)  $1,41p_0$ .

2.1.23.  $\eta = \eta_0 \exp\{(\mu_{N_2} - \mu_{O_2})gh / RT\} = 0,226$ .

2.1.24. а)  $h = 5,5$  км; б)  $h = 8,0$  км.

2.1.25.  $h = -\frac{\ln \frac{n}{100} RT}{\mu g} = 3,1$  км.

2.1.26.  $E = N \frac{E_1 \exp(-E_1 / kT) + E_2 \exp(-E_2 / kT)}{\exp(-E_1 / kT) + \exp(-E_2 / kT)}$ .

2.2.1. Размер атома сравним с величиной  $10^{-10}$  м. Тело, размеры которого сравнимы с размером атома, не является макроскопическим.

2.2.2. Не выполняется, поскольку величина давления, умноженного на объем и деленного на температуру, пропорциональна количеству газа.

2.2.3. Вода по сравнению с газом практически несжимаема.

2.2.4. Рост давления по мере повышения температуры ускорится по сравнению с ростом, предсказываемым законом Шарля.

2.2.5 Увеличилось в три раза.

2.2.6. Если считать, что температура пузырька не менялась при подъеме, то глубина озера порядка 10,3 м.

2.2.7. При работе лампы газ внутри нее сильно нагревается, что приводит к увеличению давления. Поэтому, если бы первоначальное давление не было бы низким, баллон лампы мог бы взорваться.

2.2.8. Возрастает, так как объем пузырька увеличивается, а вода практически несжимаема.

2.2.9. Одинаковы.

$$2.2.15. = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)/(m_{1,2} + m_{2,1}) = 29 \text{ г/моль.}$$

$$2.2.16. m = pV/RT.$$

$$2.2.17. V_x = (p_0 + gh)VT_2/T_1p_0 = 3 \text{ мм}^3.$$

$$2.2.18. = p/RT = 1,29 \text{ кг/м}^3.$$

$$2.2.19. m = pV/RT = 0,6 \text{ г.}$$

$$2.2.20. T_2 = p_2V_2T_1/p_1V_1 = 205 \text{ К.}$$

$$2.2.21. P_{об} = d^3pg(2 - 1)/6RT = 0,025 \text{ Н.}$$

2.2.22. См. рис. 5.

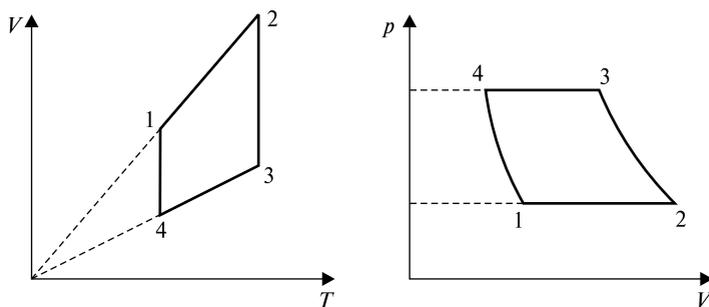


Рис. 5

2.2.23. См. рис. 6.

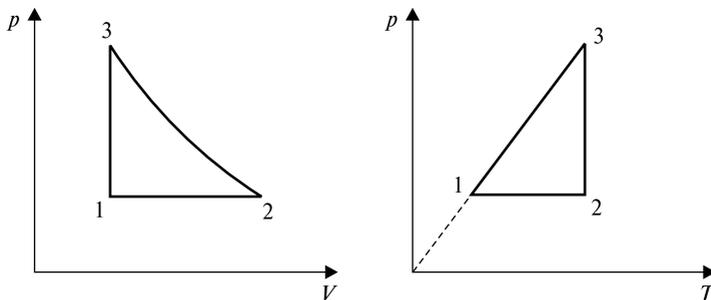


Рис. 6

$$2.2.24. T = 300 \text{ К.}$$

$$2.2.25. V = V_1(1 - T_2/T_1) = 1 \text{ м}^3.$$

$$2.2.26. p_2/p_1 = T_2/T_1 = 1,14.$$

$$2.2.27. \quad t_2 = p_2 T_1 / p_1 - 273 = -33 \text{ }^\circ\text{C}.$$

$$2.2.28. \quad p = p V_2 / (V_1 - V_2) = 40 \text{ Па}.$$

$$2.2.29. \quad p = (p_1 V_1 + p_2 V_2) / (V_1 + V_2) = 57,75 \text{ кПа}.$$

2.3.1. Согласно первому закону термодинамики без теплообмена с окружающей средой  $Q = 0$  и  $U = -A$ . Следовательно, газ может нагреться без теплообмена за счет совершения работы.

2.3.2. При адиабатном расширении газа его температура уменьшается за счет внутренней энергии, так как в соответствии с первым законом термодинамики  $U + A = 0$ . При изотермическом расширении  $T = \text{const}$ , поэтому по формуле  $p = nkT$  видно, что давление при адиабатическом расширении уменьшается быстрее. Концентрация газа при этом изменяется одинаково, так как не зависит от объема.

2.3.3. Согласно первому закону термодинамики  $Q = A + U$ . Изменение внутренней энергии зависит от изменения температуры. Если температура газа постоянна, то  $U = 0$ . Тогда теплоту газа можно передать за счет совершения работы  $A$ :  $Q = A$ .

2.3.4. Согласно первому закону термодинамики  $Q = A + U$ . Если теплота газу не передается, то  $Q = 0$ . Значит, температуру газа можно увеличить за счет совершения работы  $A$ :  $A = -U$ .

2.3.5. Изменение внутренней энергии одного моля идеального газа  $U = \frac{3}{2} R T$ . При изотермическом процессе  $T = \text{const}$ , поэтому  $U = 0$ . Значит, изменение внутренней энергии газа больше при изобарическом процессе.

2.3.6. Для теплового двигателя работа  $A = Q_1 - Q_2$ , где  $Q_1$  — количество теплоты, полученное от нагревателя,  $Q_2$  — количество теплоты, отданное холодильнику. При равенстве температур рабочего тела и окружающей среды  $Q_1 = Q_2$  и  $A = 0$ . Тепловой двигатель работать не будет.

2.3.7. Когда температура нагреваемого льдом тела меньше температуры самого льда.

2.3.8. Изменения температур меди и железа обратно пропорциональны их удельным теплоемкостям, поэтому сильнее нагревается медное тело.

2.3.9. Понижать давление в сосуде с водой до давления насыщенного пара при данной температуре.

2.3.10. Да, если тело будет совершать работу или переходить в иное агрегатное состояние.

2.3.11. Изменение внутренней энергии равно  $\Delta U = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{\mu} R \Delta T$ .

Значит, при изменении температуры внутренняя энергия воздуха изменится.

2.3.12. При стрельбе снарядами часть тепла отдается снаряду, и ствол пушки греется меньше, чем при холостых выстрелах, где нет отдачи тепла снаряду.

2.3.13. См. рис. 7.

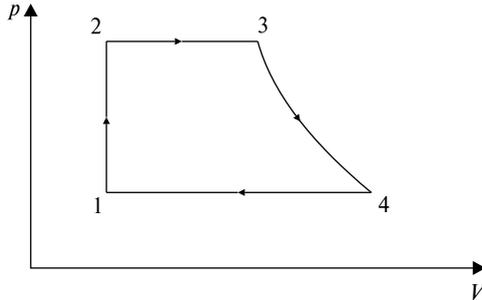


Рис. 7

2.3.14. Из-за потерь тепла в окружающую среду температура воды в кастрюле не достигнет температуры кипения, поэтому вода кипеть не будет.

2.3.20.  $p_1 = 2(Q - U)/(V_2 - V_1) - p_2$ .

2.3.21.  $U = Q - p_1(V_2 - V_1) - p_2(V_3 - V_2)$ .

2.3.22.  $c_V = iR/2$ .

2.3.23.  $c_p = (i + 2)R/2$ .

2.3.24.  $Q = 15RT_0/2$ .

2.3.25.  $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1 + c_V(T_1 - T_2)/R \ln(V_2/V_1)}$ ,  $c_V$  — теплоемкость рабо-

чего тела.

2.3.26.  $A = p_1 V_1 \frac{1 - 2^{1-n}}{n - 1}$ ,  $n > 1$ .

2.3.27.  $T_2/T_1 = k^{n-1}$ .

2.3.28.  $= 2/19$ .

2.3.29.  $V = R(T_2/p_1 - T_1/p_2)$ .

2.3.30.  $= 2(2V_2^2 - V_1V_2 - V_1^2)/(3(5V_1^2 + 5V_1V_2 + 7V_2^2))$ .

2.3.31.  $= 14\%$ .

2.3.32.  $= (T_1 - T_2 + T_3 - T_4)/(4,5T_3 - 3,5T_1 - T_2)$ .

2.3.33.  $S = -R \ln 2 = -5,76$  Дж/К.

$$2.3.34. \Delta S = \frac{1}{2} i R \ln 2 = 8,64 \text{ Дж/К.}$$

$$2.3.35. \Delta S = \frac{i+2}{2} \nu R \ln \frac{V_2}{V_1} = 28,8 \text{ Дж/К.}$$

$$2.3.36. S = \left[ \frac{1}{2}(n-1) + 1 \right] R \ln(V_2/V_1) = 20,16 \text{ Дж/К.}$$

2.4.1. Вечером после жаркого дня температура воздуха понижается. Водяной пар, находящийся в воздухе, становится насыщенным и частично превращается в воду в виде тумана.

2.4.2. Температура выдыхаемого воздуха  $36^\circ\text{C}$ . Водяной пар, находящийся в нем, зимой охлаждается ниже точки росы и частично конденсируется в виде тумана и инея. Летом температура окружающего воздуха выше точки росы.

2.4.3. Твердые тела испаряются (возгонка или сублимация).

2.4.4. Нет.

2.4.5. Кипение происходит во всем объеме жидкости и при определенной температуре. Испарение происходит при любой температуре и только с поверхности жидкости. Испарение жидкости приводит к ее охлаждению потому, что молекулы с большей кинетической энергией покидают жидкость, понижая тем самым ее температуру.

2.4.6. Устойчивость мыльной пленки обусловлена большей вязкостью мыльного раствора.

2.4.7. За счет энергии взаимодействия молекул.

2.4.8. Эти тела имеют пористую структуру. Жидкость легко проникает в них по капиллярам (порам).

2.4.9. Со временем в верхнем слое почвы образуются мелкие капилляры, по которым влага проникает в воздух, обезвоживая почву. Чтобы этого не происходило, капилляры нужно разрушать. Это достигается вспахиванием верхнего слоя почвы.

2.4.10. При растяжении упругой резиновой пленки сила натяжения зависит от величины деформации пленки. Сила же поверхностного натяжения жидкости определяется только свойствами самой жидкости и не меняется с увеличением ее поверхности.

2.4.11. Вода растечется по всей внутренней поверхности сосуда, а в центре образуется пузырек воздуха. Ртуть же образует в центре большую сферическую каплю.

2.4.12. Вырезав из всех сортов бумаги узкие полоски, следует погрузить их концы в воду. В той полоске, где поры меньше, вода поднимается на бóльшую высоту.

2.4.13. Парафин не смачивается водой, поэтому отверстия в сите, которые являются капиллярами, не пропускают воду. Прикосновение пальцем приводит к нарушению несмачиваемости пор и проникновению через них воды.

2.4.14. При повышении температуры.

2.4.15. Когда температура воздуха наименьшая — обычно около 5 часов утра.

2.4.16. При высокой влажности затруднен отвод тепла за счет испарения влаги, поэтому возможен перегрев тела, нарушающий жизнедеятельность организма.

2.4.17. Ненасыщенным паром.

$$2.4.21. V_{кр} = 3b, T_{кр} = 8a/27bR, p_{кр} = a/27b^2.$$

$$2.4.22. a = 27R^2 T_{кр}^2 / 64p_{кр}, b = RT_{кр} / 8p_{кр}, V_{кр} = 3RT_{кр} / 8p_{кр}.$$

$$2.4.23. V_p / V_{ид} = 0,9987.$$

2.4.24. Наименее удаленная критическая температура  $T_{кр} = 274,1$  К у  $H_2$ , наиболее удаленная — у паров воды,  $T_{кр} = 302,12$  К.

$$2.4.25. p_{max} = p_{кр} = a/27b^2 = 21,8 \text{ МПа.}$$

$$2.4.26. A = \frac{m^2 a (V_2 - V_1)}{\mu^2 V_1 V_2} = 133 \text{ Дж.}$$

2.4.27.  $P = gV = 34,6$  Н, где — плотность насыщающих паров при  $t = 14$  °С;  $= 94,5\%$ .

2.4.28. 8,25 г; 54%. Указание: использовать таблицу влажности.

2.4.29. На 8 °С. Указание: см. таблицу влажности.

$$2.4.30. 1,77 \text{ г/см}^3.$$

2.4.31. На 2,5 °С. Указание: см. таблицу влажности.

2.4.32. 0,083 кг/см<sup>3</sup>. Указание: см. таблицу влажности водяных паров.

$$2.4.33. m = \rho_{н.п} \frac{\eta}{100} V = 22,5 \text{ г.}$$

$$2.4.34. m = \frac{\rho_{н.п} V}{n} \left( 1 - \frac{\eta}{100} \right) = 2,5 \text{ г.}$$

$$2.4.35. = \frac{\rho_{н.п}}{100} = 7,8 \text{ г/м}^3.$$

$$2.4.36. p = \frac{\eta}{100} \cdot \frac{\rho_{н.п} RT}{\mu_{H_2O}} = 1,08 \text{ кПа.}$$

$$2.4.37. \rho_{н.п} = \frac{P_{н.п} \mu_{H_2O}}{RT} = 5 \text{ г/м}^3.$$

$$2.4.38. p = 8,56 \text{ кПа.}$$

$$2.4.39. p = 8/d = 3,2 \text{ Па; } A = 2 d^2 = 2,5 \text{ мДж.}$$

$$2.4.40. \Delta U = 2\sqrt[3]{36\pi V_1^2} \sigma (\sqrt[3]{4} - 1) = 105,5 \text{ мкДж.}$$

$$2.4.41. A = 4\pi\sigma \left( \frac{3m}{2\pi r d} - \sqrt[3]{\left(\frac{3m}{4\pi r}\right)^2} \right) = 0,138 \text{ Дж.}$$

$$2.4.42. R = \sqrt[3]{\frac{3\sigma r}{2\rho g}} = 2,2 \text{ мм.}$$

$$2.4.43. \Delta T = \frac{3\sigma(2 - \sqrt[3]{4})}{2c\rho r} = 1,65 \cdot 10^{-4} \text{ К.}$$

$$2.4.44. A = 4\pi\sigma r^2 \left( \frac{2}{\sqrt[3]{4}} - 1 \right) = 14,7 \text{ мкДж.}$$

$$2.4.45. A = 8\pi\sigma r^2 (\sqrt[3]{4} - 1) = 63,5 \text{ мкДж.}$$

$$2.4.46. D = \frac{8\sigma}{\Delta p} = 2,58 \text{ мм.}$$

$$2.4.47. R = \frac{2\sigma}{\rho g \Delta h} = 2 \text{ мм.}$$

$$2.4.48. h = \frac{4\sigma}{\rho g d} = 13,9 \text{ мм.}$$

$$2.4.49. F = \frac{2\sigma S}{d} = 31,5 \text{ Н.}$$

$$2.4.50. m = 12 R/g = 28 \text{ мг.}$$

$$2.4.51. h = 2/gR = 1 \text{ см.}$$

2.4.52.  $g \leq \frac{\sigma d}{m}$ , — коэффициент поверхностного натяжения воды,  $d$  — длина периметра ботинок,  $m$  — масса человека. Для человека массой  $m = 90$  кг с сорок пятым размером обуви ( $d = 1,5$  м)  $g \leq 1,17 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}^2$ .

## РАЗДЕЛ 3 ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

3.1.1. Зарядом  $-Q$ .

3.1.2. Чтобы не исказить картину силовых линий поля, создаваемого основными зарядами.

3.1.3. Вектор  $\vec{E}$  направлен вверх.

3.1.4. Вектор  $\vec{F}$  направлен вниз.

3.1.5. Шарики разойдутся на расстояние, равное  $2l$ .

3.1.6. Не изменится.

3.1.7. Сила натяжения, сила тяжести.

3.1.8. Касательная к силовой линии совпадает с направлением вектора напряженности  $\vec{E}$ . Каждая точка поля характеризуется только одним вектором напряженности. Поэтому не может быть пересечения силовых линий, т.е. двух касательных для данной точки пространства.

3.1.9. В неоднородном поле сила  $\vec{F}_1 = Q\vec{E}_1$  действует на положительный заряд диполя, а сила  $\vec{F}_2 = -Q\vec{E}_2$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 \neq 0$$

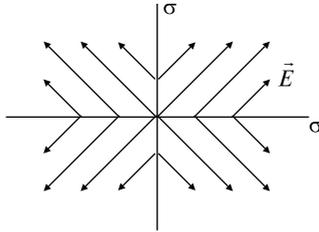


Рис. 8

3.1.18. Нет. Да.

3.1.19. Не изменится.

3.1.20.  $N_{1\text{сф}} \neq 0$ ,  $N_{1\text{к}} = 0$ ;  $N_{2\text{сф}} = N_{2\text{к}} = 0$ ;  $N_{3\text{сф}} = N_{3\text{к}} = 0$ .

3.1.21.  $N_1 = 0$ ;  $N_2 = q_1/\epsilon_0$ ;  $N_3 = (q_1 - q_2)/\epsilon_0$ .

3.1.22.  $N_E = Q/6\epsilon_0$ .

3.1.23. а) Напряженность для точек поля, принадлежащих заданной сфере, изменится; б) поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность не изменится.

3.1.24. Поток напряженности электрического поля через поверхность, окружающую диполь, равен нулю.

3.1.25. Нет, нельзя.

3.1.26. Нет, не обязательно, см. рис. 9.

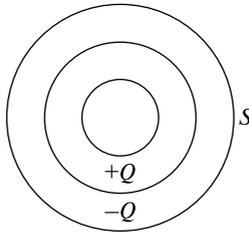


Рис. 9

3.1.27. Да, значит, внутри нет точечных зарядов.

3.1.28. Нет, не обязательно. Пример: диполь.

3.1.33.  $Q = q(2\sqrt{2} + 1)/4 = 1,91 \cdot 10^{-9}$  Кл.

3.1.34.  $E = \sqrt{2}\epsilon_0$ .

3.1.35.  $F/S = \sqrt{2}/2\epsilon_0 = 1,7 \cdot 10^{-5}$  Н/м<sup>2</sup>.

3.1.36.  $F/l = \sqrt{2}/2\epsilon_0 r = 3,6 \cdot 10^{-3}$  Н/м.

3.1.37. На расстоянии  $l = (\sqrt{2} + 1)d$  от второго заряда.

3.1.38. На расстоянии  $x = \sqrt{2}a/(\sqrt{2} + 1) = 0,07$  м от первой нити.

$$3.1.39. r = \sqrt[3]{\frac{3Eq}{4\pi\rho g}} = 4,4 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

$$3.1.40. q = 4l\sqrt{4\pi\varepsilon_0 T[1 - (mg/T)^2]^{3/2}} = 1,06 \cdot 10^{-6} \text{ Кл.}$$

$$3.1.41. E_{\text{внутри}} = /_0; E_{\text{вн}} = 0.$$

$$3.1.42. E = /_0.$$

$$3.1.43. E_{\text{внутри}} = x/_0; E_{\text{вн}} = d/2_0.$$

$$3.1.44. N_E = \sin a^2/2_0 = 2,82 \cdot 10^2 \text{ В}\cdot\text{м.}$$

$$3.1.45. \sigma = 2\varepsilon_0\varepsilon\sqrt{F^2 - (mg)^2}/q = 7,8 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2.$$

$$3.1.46. F = \frac{\sigma q_0}{2\varepsilon_0\varepsilon} \left( 1 - \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right).$$

$$3.1.47. F = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 l_0} \left( \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0 + l_0} \right) = 3 \cdot 10^{-5} \text{ Н, } E(x) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 l_0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x + l_0} \right).$$

$$3.1.48. F = qQ/2^2_0 R^2 \approx 1,03 \text{ Н.}$$

$$3.1.49. E_1 = 0, E_2 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2^2} = 6,66 \cdot 10^2 \text{ В/м,}$$

$$E_3 = \frac{q_1 - |q_2|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_3^2} = 2 \cdot 10^2 \text{ В/м.}$$

$$3.1.50. E = /2_0 r.$$

$$3.1.51. E_{\text{внутри}} = r/2_0; E_{\text{вн}} = R^2/2_0 r.$$

3.2.1. Силовые линии проходят перпендикулярно эквипотенциальным поверхностям и направлены в сторону убывания потенциала (рис. 10). Напряженность больше там, где эквипотенциальные поверхности располагаются ближе друг к другу.

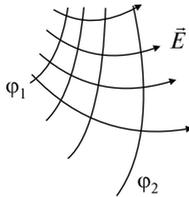


Рис. 10

3.2.2. В первом случае работа равна нулю. Во втором случае работы равны.

3.2.3. Работа по всем траекториям одинакова и равна нулю.

3.2.4. Так как поле силы тяжести и поле электрическое являются потенциальными, то по закону сохранения энергии шарик должен подняться на ту же высоту  $H$ .

3.2.5. Потому что не следует допускать возникновения разности потенциалов между руками.

3.2.6. Отпрыгивать на одной ноге.

3.2.7. В области между двумя равными положительными зарядами существует точка, в которой напряженность электрического поля равна нулю, а точки с нулевым потенциалом нет.

3.2.8. Ток будет направлен от большего шара к меньшему.

3.2.9. При внесении внутрь большой сферы маленького шарика совершается работа, в результате которой маленький шарик заряжается до потенциала  $\varphi_1 + \varphi_2 = 1001 \text{ В}$ .

3.2.10. 1) Нет, не обязательно. Пример: в середине отрезка, соединяющего одинаковые по величине положительный и отрицательный заряды, потенциал поля равен нулю, а напряженность электрического поля — нет. 2) Нет, не всегда, так как

$\varphi_A = \int_A^{\infty} \vec{E} d\vec{r} + \text{const}$ . Пример: напряженность внутри металлического шара равна нулю, а потенциал постоянен и не равен нулю.

3.2.11. Нет, не могут.

3.2.12. Напряженность электрического поля в этой области равна нулю.

3.2.13. а) Потенциалы шаров станут равны. б) Половина заряда с заряженного шара перейдет на незаряженный шар.

3.2.14. Так как поле силы тяжести и электрическое поле являются потенциальными, то по закону сохранения энергии шарик должен подняться на ту же высоту.

3.2.15. В случае перемещения по эквипотенциальной поверхности. Неверно, так как надо приложить силы, чтобы, во-первых, заряду сообщить скорость, а, во-вторых, затормозить его.

3.2.16. Совершается работа внешними силами и силами поля. Надо прикладывать внешние силы на одном участке пути, а силы электрического поля совершают работу на другом участке.

$$3.2.21. A = q_2 q_1 (r_B - r_C) / 4 \pi \epsilon_0 r_B r_C = 4,5 \cdot 10^{-8} \text{ Дж.}$$

$$3.2.22. A = \frac{q(Q_1 + Q_2)}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{a\sqrt{2}} \right) = 4,4 \cdot 10^{-8} \text{ Дж.}$$

$$3.2.23. = 2A_0 / q r = 8,85 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2.$$

$$3.2.24. U = Ad/ql = 300 \text{ В.}$$

3.2.25.  $\varphi_1 - \varphi_2 = Er_{12} \cos \alpha = 0,6 \text{ В.}$

3.2.26.  $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} r = 180 \text{ В/м; } d/dn \text{ направлен к нити вдоль СИЛОВОЙ ЛИНИИ.}$

3.2.27.  $F = U^2 \epsilon_0 S/2d^2 = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ Н.}$

3.2.28.  $\varphi_R - \varphi_A = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln \frac{d}{R}.$

3.2.29.  $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{a+l}{l} \approx 99 \text{ В.}$

3.2.30.  $\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + h^2}}; E = \frac{Qh}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + h^2)^{3/2}}$  (рис.11).

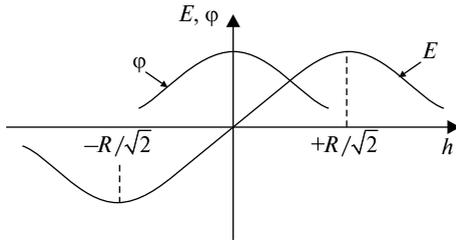


Рис. 11

3.2.31.  $\varphi = \frac{\sigma(\sqrt{R^2 + h^2} - h)}{2\epsilon_0}; E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right).$

3.2.32.  $Q_2 = -Q_1 R_2/R_1 = -21 \cdot 10^{-8} \text{ Кл.}$

3.2.33. См. рис. 12.

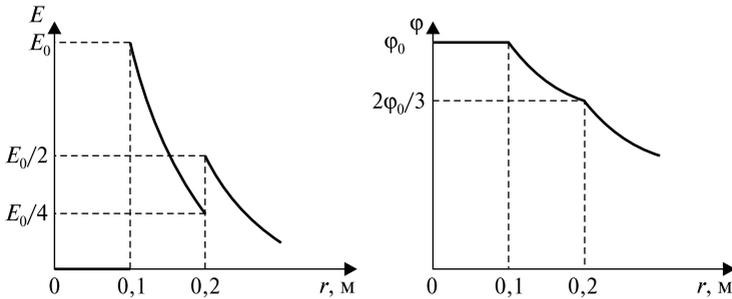


Рис. 12

3.2.34. При  $r < R$   $E = (3R^2 - r^2)/6\epsilon_0$ ; при  $r > R$   $E = R^3/3\epsilon_0 r^2.$

3.2.35. При  $r \leq R_1 = (R^2 - r^2)/4_0 + C$ ; при  $r \geq R_2 = -(R^2/2_0) \ln(r/R) + C$ .

3.3.1. Уменьшится.

3.3.2. От формы, размеров обкладок, величины зазора между ними и от диэлектрических свойств среды.

3.3.3. Не изменится.

3.3.4. Разности потенциалов одинаковы. Заряды различны.

3.3.5. Разности потенциалов отличаются. Заряды одинаковы.

3.3.6. Емкость конденсатора возрастет, так как «уменьшится» расстояние между обкладками:  $C' = {}_0S/(d - d_1)$ .

3.3.7. Чтобы развести пластины, надо приложить силу. При этом возрастает разность потенциалов между пластинами. Затраченная работа пойдет на увеличение энергии электрического поля, запасенной конденсатором.

3.3.8. Емкость уменьшится.

3.3.9. При параллельном соединении конденсаторы запасают больше энергии.

3.3.10. а) Увеличится в 4 раза; б) увеличится в 4 раза; в) уменьшится в 2 раза.

3.3.11. Уменьшится в 2 раза.

3.3.12. Увеличится в 2 раза.

3.3.13. Потенциалы будут равны.

3.3.14. Ток будет направлен от большего шара к меньшему.

3.3.15. Параллельное соединение.

3.3.16. а) Емкость не изменится, б) напряжение увеличится.

3.3.17. Уменьшается.

3.3.18. От точки  $A$  к точке  $B$  — конденсатор разряжается.

3.3.19. Изменилась.

3.3.20. Изменился.

3.3.25.  $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots$ ,  $C = C_1 + C_2 + C_3 + \dots$

3.3.26.  $C = C_0$ . Емкость конденсатора не изменилась.

3.3.27.  $C = {}_0S/(d - d_1)$ . При введении металлической пластины вне зависимости от ее положения емкость конденсатора возрастает.

3.3.28.  $C = {}_0S/[d + d_1(1 - )]$ .

3.3.29.  $U_2 = 5U_1 = 1500$  В,  $A = 2C_1U_1^2 = 1,8 \cdot 10^{-4}$  Дж.

3.3.30.  $A = CU^2(-1)/2 = 7,2 \cdot 10^{-5}$  Дж.

3.3.31.  $q = C_1C_2(U_1 - U_2)/(C_1 + C_2) = 36$  мкКл.

3.3.32.  $C = 4 \int_0^d R_1 R_2 / (R_2 - R_1)$ ; если  $d = R_2 - R_1 \ll R_1$ , то  $C \approx \int_0^d S/d$ .

3.3.33.  $C = \int_0^d d(2l - d)/2(l - d) \approx 0,29 \text{ пФ}$ .

3.3.34.  $C_a = \frac{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}$ ;  $C_6 = \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3} + \frac{C_2 C_4}{C_2 + C_4}$ .

3.3.35.  $A = CU^2(-1)^2/2(1) = 6,75 \cdot 10^{-5} \text{ Дж}$ .

3.3.36.  $C = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon R_1}{1 + R_1(\epsilon - 1)/R_2}$ .

3.3.37.  $C = 2 \int_0^l l/\ln(R_2/R_1)$ ; если  $d = R_2 - R_1 \ll R_1$ , то  $C \approx \int_0^l S/d$ .

3.3.38.  $C = \int_0^l l/\ln(l/r)$ .

3.4.1.  $M$  — отрицательным,  $N$  — положительным.

3.4.2.  $M$  и  $N$  — нейтральны.

3.4.3. Это возможно, если имеет место отступление от точности взаимодействующих тел, т.е. если размеры шариков соизмеримы с расстоянием между ними. Одноименные заряды, отталкиваясь, располагаются на внешних частях шариков, и расстояние между ними оказывается больше, чем между разноименными, которые, притягиваясь, располагаются на их внутренних частях. В случае *a* сила взаимодействия по модулю меньше, чем в случае *б*.

3.4.4. Если просто привести тела в соприкосновение, заряды начнут переходить с одного тела на другое до тех пор, пока на них действуют электрические силы. После выравнивания потенциалов тел переход зарядов прекратится. При этом как первое, так и второе тело будут заряженными.

Для полного перехода заряда с одного тела на другое можно воспользоваться тем обстоятельством, что внутри проводника нет электрического поля. Если внутри незаряженного тела имеется полость с отверстием, то в эту полость нужно внести заряженное тело. Внутри полости напряженность электрического поля равна нулю, и после прикосновения заряженного тела к стенке полости весь заряд беспрепятственно стечет с этого тела и расположится на внешней поверхности ранее незаряженного тела.

3.4.5. Будет. Заряд  $Q_1$  индуцирует на поверхности шара электрические заряды, которые, воздействуя на заряд  $Q_2$ , будут создавать электрическую силу.

3.4.6. Грузик отклонится.

3.4.7. Грузик не отклонится.

3.4.8. Сила отталкивания уменьшается за счет притяжения к зарядам, индуцированным на металлическом шаре.

3.4.9. Сила взаимодействия увеличится за счет зарядов, индуцированных на металлическом шаре.

3.4.10. Сила станет равной нулю. По методу зеркального изображения зарядов на металлической пластинке заряды перераспределятся так, что поле системы окажется тождественным полю, создаваемому данными зарядами и их зеркальным изображением в проводящей плоскости — равными по модулю и противоположными по знаку зарядами, которые скомпенсируют действие данных зарядов (о методе зеркального изображения зарядов см. задачу 3.4.19).

3.4.11. Сила взаимодействия возрастет в 4 раза. Указание: воспользоваться методом зеркального изображения зарядов (см. задачу 3.4.19).

3.4.12.  $U = kq/r = 4kr$ . Потенциал большего шара больше.

3.4.13. На внешней поверхности проводника заряд  $Q + q$ ; на внутренней поверхности проводника заряд  $-q$ .

3.4.14. Будет действовать сила.

3.4.15. Поток  $N_E$  через сферу не изменится. На внутренней поверхности сферы произойдет перераспределение зарядов. Внутри металлической сферы напряженность равна нулю, а на внешней поверхности сферы расположение зарядов останется неизменным, следовательно, и напряженность поля не изменится.

3.4.16. Напряженность и потенциал не изменятся.

3.4.17. Напряженность и потенциал увеличатся.

3.4.18. Диэлектрик будет вдвигаться в конденсатор.

$$3.4.21. E = \frac{Q\sqrt{5-2\sqrt{2}}}{32\pi\epsilon_0 a^2} = 3,32 \text{ кВ/м.}$$

$$3.4.22. E = \frac{3Q}{64\pi\epsilon_0 a^2} = 750 \text{ В/м.}$$

$$3.4.23. Q = 2(a - l \sin \alpha) \sqrt{4\pi\epsilon_0 mg \operatorname{tg} \alpha} = 20 \text{ нКл.}$$

$$3.4.24. = -qa/2 (a^2 + x^2)^{3/2}, q_{\text{инд}} = -q.$$

3.4.25. а)  $E_1 = E_2 = E$ ,  $D_1 = D$ ,  $D_2 = D$ ; б)  $E_1 = E_2 = 2E/(1 + )$ ,  $D_1 = 2D/(1 + )$ ,  $D_2 = 2D/(1 + )$ .

$$3.4.26. W = q^2 d / 8 \epsilon_0 R(R + d) = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ Дж.}$$

$$3.4.27. C = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_1 r_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = 100 \text{ пФ.}$$

$$3.4.28. A = W_{\text{эл}} = 0,5 {}_0 E^2 S d = 17,7 \cdot 10^{-11} \text{ Дж.}$$

$$3.4.29. \omega = \sqrt{\frac{3P_r E}{l^2 \rho}}.$$

$$3.4.30. 1) = -1 = 6; 2) \sigma' = \frac{\kappa\epsilon_0 U}{\epsilon d} = 190 \text{ мКл/м}^2.$$

$$3.4.31. 1) E = \frac{E_0}{\epsilon} = 100 \text{ В/м}; 2) D = {}_0 E = 6,2 \text{ нКл/м}^2; 3) P =$$

$$= D - {}_0 E = 5,31 \text{ нКл/м}^2; 4) ' = P; 5) W = \frac{\epsilon_0 E_0^2 S d}{2\epsilon} = 9,29 \text{ пДж.}$$

$$3.4.32. \sigma' = \frac{(\epsilon - 1)\epsilon_0 U}{\epsilon(d - d_1) + d_1} = 253 \text{ нКл/м}^2.$$

$$3.4.33. = {}_0 E = 12,4 \text{ мкКл/м}^2; ' = (-1) {}_0 \frac{U}{d} = 10,6 \text{ мкКл/м}^2.$$

$$3.4.34. \sigma' = \sqrt{\frac{2\epsilon_0 P}{\epsilon}} (\epsilon - 1) = 9,5 \text{ мкКл/м}^2; w = p = 1 \text{ Дж/м}^3.$$

Указание: сила притяжения между двумя разноименно заряженными обкладками конденсатора  $F = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 \epsilon S} = \frac{\sigma^2 S}{2\epsilon_0 \epsilon} = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2 S}{2}$ .

3.5.1. Медная трубка.

3.5.2. 220 В.

3.5.3. Больше напряжение будет показывать вольтметр  $V_2$ .

3.5.4. См. рис. 13.

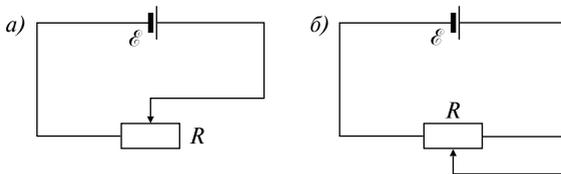


Рис. 13

$$3.5.5. R = l/S.$$

$$3.5.6. \text{ а) } I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}; \text{ б) } I = \frac{U}{R}; \text{ в) } I = \frac{\Phi_1 - \Phi_2 + \mathcal{E}}{R}, I = \frac{q}{t}.$$

$$3.5.7. R = R_1 + R_2 + R_3, I_1 = I_2 = I_3, U = U_1 + U_2 + U_3.$$

$$3.5.8. \quad 1/R = 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3, \quad I = I_1 + I_2 + I_3, \quad U_1 = U_2 = U_3.$$

3.5.9. 1-2 — электрические и сторонние, 3-4 — электрические, 1-2-3-4-1 — сторонние.

$$3.5.10. \quad A_{12} = e(E + \dots); \quad A_{34} = e(\dots); \quad A_{12341} = eE.$$

$$3.5.11. \quad I = (E + \dots)/(r + R_1).$$

3.5.12. Сила тока равна нулю.

3.5.13. Электродвижущая сила  $E$ . Зависит.

3.5.14. Разность потенциалов  $\dots$ . Зависит.

3.5.15. Напряжение  $U$ . Зависит.

$$3.5.16. \quad \text{а) } U = IR; \quad \text{б) } U = E.$$

$$3.5.17. \quad R = 0. \quad I_k = E/r.$$

$$3.5.18. \quad E_2 = E_1/2.$$

3.5.19. Ток течет от точки 2 к точке 1, величина силы тока  $I = 1 \text{ A}$ .

3.5.20. Большой ток.

3.5.21. Между телом человека, который стоит на земле, и верхним проводом имеется высокое напряжение, а между телом и рельсом почти нет напряжения, так как оба они находятся на одном и том же проводнике — земле.

3.5.22. При заданном напряжении на концах цепи выделяемая в ней мощность равна  $U^2/R$ , т.е. она тем больше, чем меньше сопротивление  $R$ . Следовательно, в цепи из 29 лампочек, общее сопротивление которой меньше, будет выделяться большая мощность. Поэтому при 29 лампочках в комнате будет светлее, чем при 30.

$$3.5.30. \quad R = \sum_i R_i; \quad \frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i}.$$

$$3.5.31. \quad R_1 = E/I_2 - E/I_1 = 1,5 \text{ Ом}; \quad R_2 = E/I_1 = 2,5 \text{ Ом}; \quad U_1 = R_1 I_2 = 7,5 \text{ В}; \quad U_2 = R_2 I_2 = 12,5 \text{ В}.$$

$$3.5.32. \quad R = r_1 - r_2.$$

$$3.5.33. \quad E_2/E_1 < r_2/(r_1 + R).$$

$$3.5.34. \quad q = CER_1/(R_1 + R_2) = 9 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}.$$

$$3.5.35. \quad I_2 = (E_1 R_1 - E_2 R_1 - E_2 R_2)/(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3 + R_A R_1 + R_A R_2) = 0,45 \text{ mA}.$$

$$3.5.36. \quad I_3 = 0 \text{ A}; \quad U_3 = 0 \text{ В}.$$

$$3.5.37. \quad I_1 = 2 \text{ A}; \quad I_2 = 2,66 \text{ A}.$$

$$3.5.38. \quad \mathcal{E} = \frac{q}{CR_3} \left( \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 + r \right) = 1,2 \text{ В}.$$

3.6.1. Под электронвольтом подразумевается работа, совершаемая силами поля над зарядом, равным заряду электрона, при прохождении им разности потенциалов в 1 В.

3.6.2. См. рис. 14.

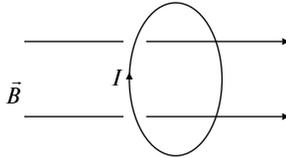


Рис. 14

3.6.3. Виток вернется в первоначальное положение.

3.6.4. Виток продолжит движение до тех пор, пока его магнитный момент не станет параллелен вектору магнитной индукции поля.

3.6.5. Движение витка зависит от направления его магнитного момента: см. задачи 3.6.3 и 3.6.4.

3.6.6. Проводник должен быть расположен по отношению к линиям индукции магнитного поля: а) параллельно; б) перпендикулярно.

3.6.7. Сила отсутствует,  $\vec{F} = 0$ .

3.6.8. а) Скорость электрона должна быть параллельна или антипараллельна линиям индукции магнитного поля; б) скорость электрона должна быть перпендикулярна линиям индукции магнитного поля; в) электрон должен влетать в магнитное поле со скоростью  $v$ , при этом скорость не должна быть параллельна, антипараллельна или перпендикулярна линиям индукции магнитного поля  $\vec{B}$ .

3.6.9. Не изменится: поток останется равен нулю.

3.6.10. Стрелка расположится под углом  $45^\circ$  относительно плоскости витка.

3.6.11.  $B = 0$ .

3.6.12.  $B = 2 \mu_0 I / a$ .

3.6.13. Во II и IV  $B = \mu_0 I / a$ , в I и III  $B = 0$ .

3.6.14. Увеличивается в 2 раза.

3.6.15.  $R_1/R_2 = (m_1/m_2)^{1/2}$ .

3.6.16. Сила электростатического отталкивания между зарядами в двух катодных пучках больше силы притяжения, действующей со стороны магнитного поля первого луча на движущиеся заряды

второго луча. В проводниках сила электростатического отталкивания отсутствует, так как суммарный заряд каждого равен нулю.

3.6.17. Вектор индукции магнитного поля  $\vec{B}$  направлен вверх.

3.6.18. Вектор индукции магнитного поля  $\vec{B}$  направлен вправо.

3.6.19. Циркуляция вектора  $\vec{B}$  равна нулю.

3.6.20. Полный ток  $I$  равен нулю.

3.6.21.  $I = I_3 - I_2$ .

3.6.22. См. рис. 15.

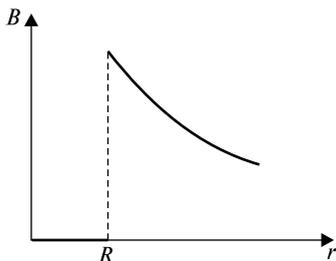


Рис. 15

3.6.23. См. рис. 16.

3.6.24. См. рис. 17.

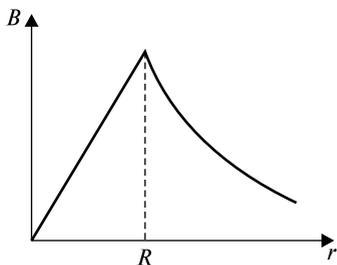


Рис. 16

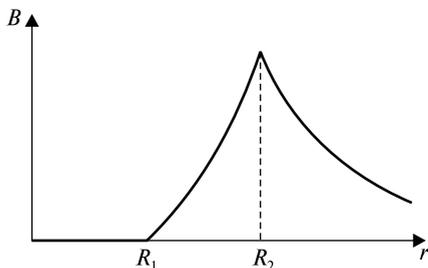


Рис. 17

3.6.25.  $F = 0$ .

3.6.26. Вектор  $\vec{B}$  направлен «от нас».

3.6.27. а) Для постоянного тока; б) возрастает с увеличением силы тока; в) уменьшается.

3.6.28. Индукция  $\vec{B}$  равна нулю.

3.6.29. Сила равна нулю.

3.6.30. а) Сила равна нулю; б) останется равной нулю.

3.6.31. Ток по нижнему проводнику должен течь в том же направлении, что и в верхнем.

3.6.32. а) Токи в нижнем и верхнем проводниках направлены в противоположные стороны. б) Не может, так как сила тяжести постоянна, а сила магнитного взаимодействия уменьшается при удалении верхнего проводника от нижнего.

3.6.33. Поток равен нулю.

3.6.34. См. рис. 18.

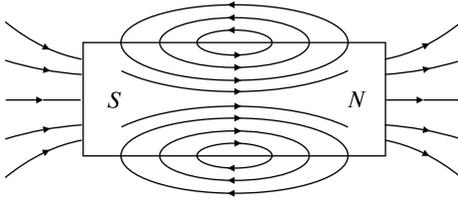


Рис. 18

3.6.39.  $B = \mu_0 I / 2b$ .

3.6.40.  $B = \mu_0 I / 2\pi b \sqrt{1 + (b/a)^2}$ .

3.6.41.  $B = \mu_0 I / 2R$ .

3.6.42.  $B = \mu_0 I R^2 / 2(R^2 + r^2)^{3/2}$ .

3.6.43.  $B = \mu_0 (i_1 l_1 - i_2 l_2) / 4r^2 = 0$ .

3.6.44. 1)  $B_1(0) = B_1(a) = \frac{\mu_0 I}{2} \left[ \frac{1}{r_0} - \frac{r_0^2}{(r_0^2 + a^2)^{3/2}} \right] = 2,1 \cdot 10^{-5} \text{ Тл};$

$B_1\left(\frac{a}{2}\right) = 1,35 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}.$

2)  $B_2(0) = -B_2(a) = \frac{\mu_0 I}{2} \left[ \frac{r_0^2}{(r_0^2 + a^2)^{3/2}} - \frac{1}{r_0} \right] = -1,7 \cdot 10^{-3} \text{ Тл};$

$B_2\left(\frac{a}{2}\right) = 0.$

3.6.45.  $A = 2iBSN = 1,08 \cdot 10^{-5} \text{ Дж}.$

3.6.46. а)  $a = eE/m; a_n = 0;$  б)  $a_n = (e/m)(B^2 v^2 + E^2)^{1/2}; a = 0.$

3.6.47.  $B = E(m/2W)^{1/2}.$

3.6.48.  $B_A = \frac{\mu_0 I}{\pi r \sqrt{2}} \left( 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2,4 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}; B_C = \frac{\mu_0 I}{\pi r \sqrt{2}} \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0,4 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}; B_D = \mu_0 I / 4r = 0,5 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}.$

$$3.6.49. B = \frac{\mu_0}{2} \sqrt{\frac{I_1^2 R^4}{(R_1^2 + l_1^2)^3} + \frac{I_2^2}{\pi^2 l_2^2}}.$$

$$3.6.50. F_1 = iBl; F_2 = 2iBl/.$$

$$3.6.51. B_1 = 0; B_2 = \frac{I}{2} r_2 = 10^{-4} \text{ Тл}; \quad = (\frac{I}{2}) \ln(R_2/R_1) = 7,8 \cdot 10^{-6} \text{ Вб}.$$

$$3.6.52. B = \frac{I}{2} r_2 R^2 = 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ Тл}; \quad = \frac{I}{4} = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}.$$

$$3.6.53. B_{\max} = \frac{IN}{2} R_1 = 4,8 \cdot 10^{-3} \text{ Тл}; B_{\min} = \frac{IN}{2} R_2 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ Тл}; \quad = (\frac{INb}{2}) \ln(R_2/R_1) = 5,6 \cdot 10^{-6} \text{ Вб}.$$

$$3.6.54. R = mv/qB = 7,3 \cdot 10^{-2} \text{ м}; p_m = 0,041 \text{ пДж/Тл}.$$

3.7.1. Ток  $I$  пойдет а) по часовой стрелке; б) против часовой стрелки.

3.7.2. Ток  $I$  пойдет а) по часовой стрелке; б) против часовой стрелки.

3.7.3. Ток через сопротивление  $R$  протекает от  $d$  к  $c$ .

3.7.4. I — ток течет против часовой стрелки, II — ток равен нулю, III — ток течет по часовой стрелке.

3.7.5. а) Да, по часовой стрелке; б) нет; в) да, против часовой стрелки; г) в случае положительных ответов изменится направление токов.

3.7.6. а) Ток возникнет; б) в момент подключения батареи; в) когда сила тока станет постоянной; г) против часовой стрелки; д) да; е) между витками возникнет сила отталкивания.

3.7.7. а) Да; б) в момент отключения батареи; в) когда прекратится ток в первом витке; г) в том же направлении, по часовой стрелке; д) да; е) между витками возникнет сила притяжения.

3.7.8. По часовой стрелке.

3.7.9. ЭДС будет больше, когда самолет летит вдоль параллели.

3.7.10. Индуцируемый ток  $I$  потечет по часовой стрелке. В центре диска будет отрицательный полюс ЭДС.

3.7.11. Увеличится.

3.7.12. Изменится.

3.7.13. Изменится.

3.7.14. а) Свернуть в кольцо; б) вытянуть вдоль прямой линии.

3.7.15. Индуктивность контура в форме окружности будет больше.

3.7.16. Чтобы уменьшить коэффициент взаимной индукции между проводниками.

3.7.17. а) Плоскости катушек должны быть параллельны;  
 б) плоскости катушек должны быть перпендикулярны.

3.7.18. Да, так как ток будет зависеть как от самоиндукции в катушке, так и от расстояния между катушками.

3.7.19. Чтобы исключить индуктивные наводки со стороны окружающих кабель проводов.

3.7.25.  $I \geq (2T - mg)/Bl = 3 \text{ А}$ . Ток течет в направлении от  $A$  к  $C$ .

3.7.26.  $F = B^2 l^2 v / R = 1 \text{ Н}$ .

3.7.27.  $F = N/v$ .

3.7.28.  $q = 2BS/R = 2 \cdot 10^{-4} \text{ Кл}$ .

3.7.29.  $n = E_{\text{инд}}^{\text{max}} / 2 NBS = 10 \text{ об/с}$ .

3.7.30.  $E_{\text{инд}} = 2 n NBS \sin = 47,1 \text{ В}$ .

3.7.31.  $E_{\text{инд}1} = E_{\text{инд}2} = E_{\text{инд}3} = lab$ .

3.7.32.  $E_{\text{инд}} = - \int_0^R r^2 I_0 / 2(R^2 + h^2)^{3/2}$ .

3.7.33.  $I_1 - I_2 = Bn l^2 = 0,2 \text{ В}$ .

3.7.34.  $L = N/I = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$ .

3.7.35.  $L = \langle E_{\text{инд}} \rangle t / I = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$ .

3.7.36.  $E_{\text{инд}}^{\text{max}} = \int_0^R I S N_1 N_2 / 2r = 4,7 \cdot 10^{-3} \text{ В}$ .

3.7.37.  $\epsilon_{\text{инд}}^e = \frac{\mu_0 I a^2 v}{2\pi(vt + r_0 + a)(vt + r_0)} = 8 \cdot 10^{-13} \text{ В}$ .

3.7.38.  $I = - \int_0^R I_1 a / 2 R t$ .

3.7.39.  $\langle E_{\text{инд}} \rangle = 4BSn = 0,16 \text{ В}$ .

3.7.40.  $q = Bm/16$ .

3.7.41.  $I_1 - I_2 = (I_0 l / 2) \ln[(x_0 + l)/x_0] = 4,7 \cdot 10^{-5} \text{ В}$ .

3.7.42.  $L = (I_0 l / 2) \ln[(a - r_0)/r_0] = 1,05 \cdot 10^{-6} \text{ Гн}$ ;

$W = (I_0^2 l / 2) \ln[(a - r_0)/r_0] = 4,7 \cdot 10^{-6} \text{ Дж}$ .

3.7.43.  $W = \int_0^R I^2 N^2 S / 2l = 25 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}$ , энергия магнитного поля уменьшится вчетверо.

3.7.44.  $I = (Bab/R) \sin t$  (рис. 19),  $M = (B^2 a^2 b^2 / R) \sin^2 t$ .

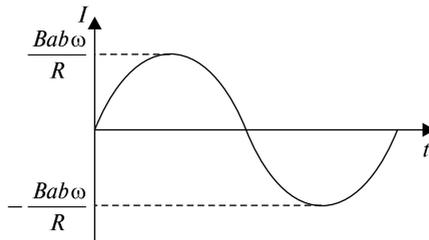


Рис. 19

3.8.1.  $q'' + \frac{2}{0}q = 0$  (рис. 20).

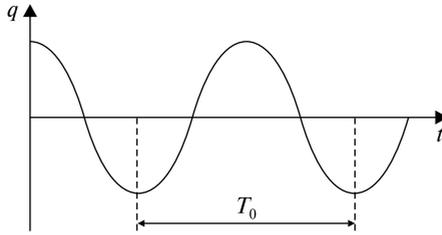


Рис. 20

3.8.2.  $q'' + 2q' + \frac{2}{0}q = 0$  (рис. 21).

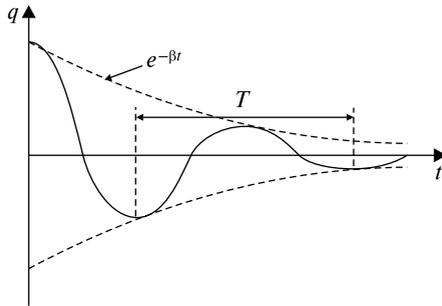


Рис. 21

3.8.3.  $\frac{2}{0} - \frac{2}{0} < 0$  (рис. 22).

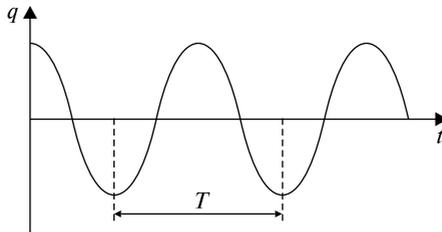


Рис. 22.

3.8.4.  $q'' + 2q' + \frac{2}{0}q = q_0 \cos t$ , где  $T = \frac{2\pi}{\Omega}$

3.8.5. См. рис. 23.

3.8.6. а) Да; б) да; в) нет, так как сила тока и напряжение расходятся по фазе и их амплитудные значения достигаются не одновременно.

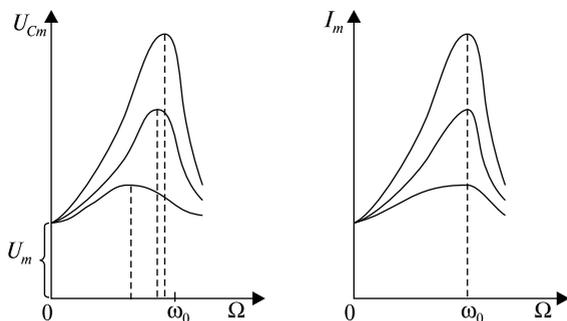


Рис. 23

3.8.7. а) Да; б) да; в) нет, так как сила тока и напряжение расходятся по фазе и их амплитудные значения достигаются не одновременно.

3.8.8. а) Да; б) да; в) да.

3.8.9. Оба утверждения верны: важна не начальная фаза, а разность фаз между силой тока и напряжением.

3.8.10. Нет, нельзя, так как  $\cos = \cos(-)$ .

3.8.11. а) Нет. б) Нет, так как  $U_R$  совпадает с  $I$ , то угол может принимать значения от  $-\pi/2$  до  $\pi/2$ .

3.8.12. Да.

3.8.13. Да.

3.8.14. Для LC-цепочки, когда  $R = 0$ .

3.8.15.  $X_C$  уменьшается с повышением частоты:  $X_C = 1/C$ .

3.8.16.  $X_L$  увеличивается с повышением частоты:  $X_L = L$ .

3.8.17. Эффективное.

3.8.18. Нет, не равно.

3.8.19. Да, верно.

3.8.20. Назначение конденсатора состоит в том, чтобы препятствовать передаче постоянного напряжения из цепи  $A$  в цепь  $B$ .

3.8.21. Конденсатор служит фильтром, ослабляющим переменную составляющую напряжения, передаваемую от  $A$  к  $B$ .

3.8.22. Постоянный ток идет только через активное сопротивление человека электрическому току. Переменный же ток идет через активное и емкостное сопротивления; поскольку они параллельны, то полный импеданс меньше только активного сопротивления, и сила тока при данном  $U_{\text{эфф}}$  будет больше, чем в случае постоянного тока. Сопротивление человеческого тела переменному току с частотой 50 Гц может быть вдвое меньше, чем постоянному току. Поэтому переменный ток более опасен.

3.8.23. От силы тока, продолжительности его воздействия и от того, по какому пути ток протекает в теле человека.

3.8.24. Движущийся с ускорением электрический заряд.

3.8.25. Магнитных зарядов не существует.

3.8.26. Силовые линии индукции магнитного поля могут быть только замкнутыми. Силовые линии электрического поля начинаются и заканчиваются на зарядах или приходят из бесконечности и уходят в бесконечность.

3.8.27. Из-за разного потенциала между облаками возникает электрический разряд молнии. Возникший электрический ток порождает звуковую волну, распространение энергии которой в упругой среде (воздухе) и воспринимается в виде грома.

3.8.28. См. рис. 24.

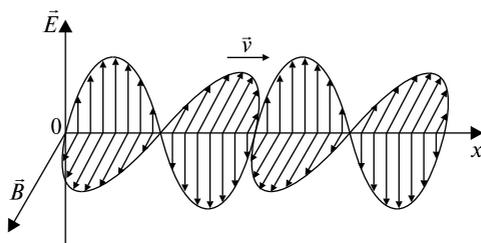


Рис. 24

3.8.29. В электромагнитной волне происходят колебания векторов напряженности полей, а не вещества, как у волн на воде или в шнуре.

3.8.30. Магнитное.

3.8.31. Электромагнитное.

3.8.32. Электромагнитное.

3.8.33. От постоянного тока — магнитное, от заряда — электромагнитное. Для возникновения электромагнитного поля необходимо, чтобы  $E \neq 0$ , тогда появится  $B \neq 0$ , т.е. возникает электромагнитная волна, так как только изменяющееся электрическое поле порождает в пустом пространстве магнитное поле.

3.8.34. Звона колокольчика не будет слышно, так как в вакууме звук не распространяется, а электромагнитная волна распространяется, поэтому видно, как дрожит язычок колокольчика.

3.8.35.  $v = 1/(\epsilon_0 \mu_0)^{1/2}$  — постоянна и, в частности, не зависит от частоты.

3.8.36. Вектор  $\vec{E}$  колеблется в плоскости рисунка, вектор  $\vec{B}$  — перпендикулярно плоскости рисунка.

3.8.37. а) Напряженность электрического поля и индукция магнитного поля максимальны в направлениях, перпендикулярных направлению колебаний заряда в антенне; б) поля обращаются в нуль вдоль направления колебаний заряда над и под антенной.

3.8.38. Нет, так как длина проводов невелика и время  $t = (l_1 - l_2)/c \sim 10^{-8}$  с очень мало, чтобы это запаздывание можно было заметить.

3.8.39. Да, так как  $t = l/c \sim 10^{-8}$  с мало, чтобы его можно было заметить.

3.8.40. Ток смещения направлен вверх.

3.8.41. По часовой стрелке.

3.8.42. Против часовой стрелки.

3.8.48.  $C = 2c^2 \cdot 4^2 L = 51$  пФ.

3.8.49.  $T = 2\pi\sqrt{(C_1 + C_2)L} = 0,7$  мс;  $I_m = U\sqrt{(C_1 + C_2)/L} = 8$  А.

3.8.50.  $E_m = 2 nBS = 15,1$  мВ;  $\epsilon_{\text{инд}}^e = \epsilon_m^e / \sqrt{2} = 10,7$  мВ

3.8.51.  $P = U_m^2 CR/2L = 4,2$  мВт.

3.8.52.  $\omega = 1/(LC)^{1/2} = 1,0 \cdot 10^5$  рад/с;  $I_{\text{рез}} = E/R = 1,5$  А;  $U_R = I_{\text{рез}}R = E = 30$  В;  $U_L = I_{\text{рез}}L = E L/R = 150$  В;  $U_C = I_{\text{рез}}/C = 150$  В.

3.8.53.  $\omega = 1/(LC)^{1/2} = 3,16 \cdot 10^4$  рад/с;  $I_2 = EC = 6,952$  А;  $I_3 \approx E/L = 6,962$  А;  $I_1 = I_3 - I_2 = 10$  мА.

3.8.54.  $\varphi = \arctg \frac{L\omega}{R} = 43^\circ$ ;  $I_m = \frac{U_{\text{эфф}}\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \approx 1,2$  А;

$P = \frac{U_{\text{эфф}} \cos \varphi}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \approx 76$  Вт.

3.8.55.  $C = 1/[2 (2L - R)] \approx 1,5 \cdot 10^2$  мкФ.

3.8.56.  $R = \sqrt{3}L\omega = 54,4$  Ом;  $C = 1/(L^2) = 100$  мкФ.

3.8.57.  $Z = R/\sqrt{1 + (2\pi\nu CR)^2} \approx 15,6$  Ом.

3.8.58.  $= c^2/4l^2 = 26$ .

3.8.59.  $T = 2\pi\sqrt{\epsilon_0\mu_0 N^2 S_1 S_2 / dl} = 6,28 \cdot 10^{-7}$  с.

3.8.60.  $I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} = 0,07$  А;  $\varphi = \arctg \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} = -63^\circ$ ;

$U_R = IR = 57 \text{ В}$ ;  $U_L = IL = 28 \text{ В}$ ;  $U_C = I/C = 142 \text{ В}$ ;  $P = IU \cos = 4 \text{ Вт}$ .

3.8.61.  $Q = U^2 R t / (R^2 + 4 L^2) = 2,424 \text{ Дж}$ ;  $Q_1 / Q_2 = 2$ .

3.8.62.  $Q_0 = \sqrt{\frac{L}{CR^2} - \frac{1}{4}} = 4,975$ ;  $\frac{\Delta Q}{Q} \approx \frac{R^2 C}{8L} = 0,5\%$ .

3.8.63.  $\Phi_m = U_m \sqrt{LC} / N = 12,5 \cdot 10^{-7} \text{ Вб}$ .

3.8.64. 1)  $1/LC_1 < R^2/4L^2$  — возникает апериодический разряд;

2)  $1/LC_2 > R^2/4L^2$  — возникнут затухающие колебания.

## Раздел 4 ОПТИКА

4.1.1. Около 8 мин.

4.1.2. Нет. Поскольку после прохождения рассеивающей линзы лучи всегда рассеиваются, то изображение получается на пересечении продолжения этих лучей, т.е. изображение всегда мнимое.

4.1.3.  $120^\circ$ .

4.1.4. Изображение будет перемещаться в ту же сторону, куда удаляется человек.

4.1.5. Да, при переходе из среды оптически более плотной в оптически менее плотную.

4.1.6. Может, если свет распространяется в среде с неоднородным показателем преломления.

4.1.7. Луч проходит через фокус линзы.

4.1.8. Луч, параллельный оптической оси собирающей линзы, после преломления пройдет через фокус, в рассеивающей линзе луч рассеится так, что его продолжение будет проходить через фокус линзы.

4.1.9. См. рис. 25.

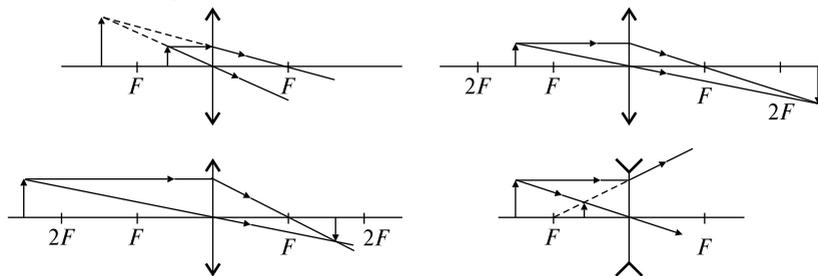


Рис. 25

4.1.10. Когда предмет находится между фокусом и линзой.

4.1.11. См. рис. 26.

4.1.12. Несмотря на то, что закрыта половина линзы, изображение существует, только яркость его уменьшается.

4.1.13. Получится, только яркость изображения уменьшится.

4.1.14. Не может (рис. 27). Луч света, упав на шар под углом  $\alpha$ , преломляется под углом  $\beta$ , и вследствие обратимости световых лучей, выходит из шара под тем же углом  $\alpha$ .

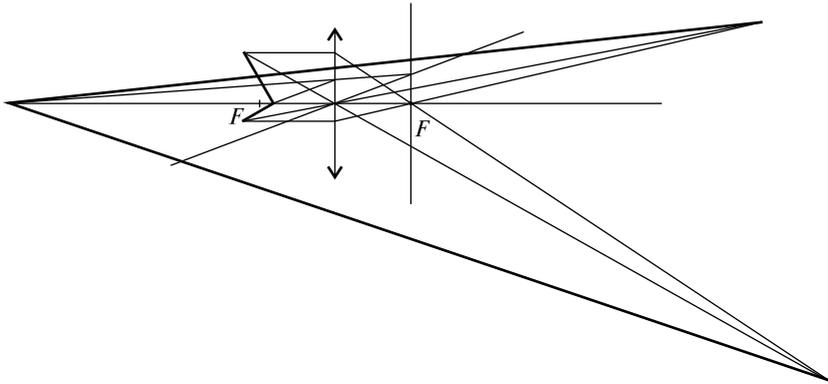


Рис. 26

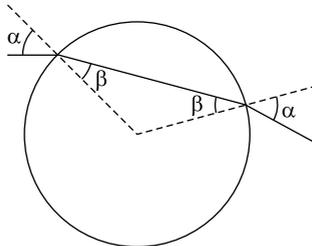


Рис. 27

$$4.1.20. \beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}.$$

$$4.1.21. x \geq \frac{LD}{D-d}.$$

$$4.1.22. h = \frac{r}{(R-r)n} \sqrt{H^2 - (n^2 - 1)(R-r)^2} = 3,63 \text{ м.}$$

$$4.1.23. \Delta h = d \sin \alpha \left[ 2\sqrt{n_1^2 - \sin^2 \alpha} \sqrt{n_2^2 - \sin^2 \alpha} - \right. \\ \left. - \cos \alpha \left( \sqrt{n_1^2 - \sin^2 \alpha} + \sqrt{n_2^2 - \sin^2 \alpha} \right) \right] : \\ \left( \sqrt{n_1^2 - \sin^2 \alpha} \sqrt{n_2^2 - \sin^2 \alpha} \right).$$

$$4.1.24. x = 2d \sin 2\alpha / \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}.$$

$$4.1.25. d = \frac{\Delta h \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha (\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \cos \alpha)} = 10 \text{ см.}$$

$$4.1.26. n = \sin \theta / \sin \theta' = 1,41; v = c \sin \theta / \sin \theta' = 2,12 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

$$4.1.27. c/v = n = 2, \text{ скорость уменьшается вдвое.}$$

$$4.1.28. h = d/n.$$

$$4.1.29. v = c \sin \theta = 2,46 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

$$4.1.30. R = dn/(n - 1) = 8 \text{ мм.}$$

$$4.1.31. \frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{n_1^2 - 1}{n_2^2 - 1}} = 0,988.$$

$$4.1.32. \theta = \arcsin(1/n) = 30^\circ.$$

$$4.1.33. d = R/(n - 1).$$

$$4.1.34. d - f = (k - 1)^2 F/k = 0,05 \text{ м.}$$

$$4.1.35. x = (f - F) y/F = 3 \text{ мм.}$$

$$4.1.36. F = kL/(k + 1)^2 = 0,08 \text{ м.}$$

$$4.1.37. x = 1,5F = 45 \text{ см.}$$

$$4.1.38. F = Dl/(D_1 - D).$$

$$4.1.39. a = \frac{g}{Dd - 1}.$$

$$4.1.40. F_2/F_1 = n_2(n_1 - 1)/(n_1 - n_2) = 2,46.$$

$$4.1.41. F_2 = 1/D_2, F_1 = 1/(D_1 - D_2), F_3 = -1/D_1.$$

$$4.1.42. \theta = (n - 1) \theta' = 2^\circ.$$

$$4.1.43. n \geq 1/\sin \theta = 2.$$

4.1.44.  $\theta = 60^\circ$ . Угол падения на смежную грань больше предельного угла полного внутреннего отражения.

$$4.1.45. \alpha_1 \leq \arcsin(\cos \theta \sqrt{n^2 - 1} - \sin \theta) = 21,5^\circ.$$

$$4.1.46. \theta = \theta' - \theta'' = 45^\circ.$$

$$4.1.47. \text{ Угол при вершине } \theta = 36^\circ, \text{ при основании } \theta' = 72^\circ.$$

4.2.1. Не могут, поскольку не выполняются условия когерентности, в первую очередь, постоянство разности фаз световых лучей, приходящих от лампочек.

4.2.2. Крылья насекомых покрыты прозрачной тонкой пленкой, имеющей различную толщину, и при падении на пленку солнечных лучей образуются цветные интерференционные полосы.

4.2.3. Начинают сказываться дифракционные явления.

4.2.4. Расстояние между интерференционными полосами уменьшится.

4.2.5. При отражении света от зеркала теряется полволны, поэтому интерференционные картины будут инвертированы: там, где в первой схеме были максимумы, во второй будут минимумы, и наоборот.

4.2.6. Поляризацией.

4.2.7. Поляризация.

4.2.8. Количество максимумов увеличится.

4.2.9. В спектре от дифракционной решетки.

4.2.18. 1)  $d/\lambda_1 = 2,6$  — ослабление, 2)  $d/\lambda_2 = 3,33$  — ослабление, 3)  $d/\lambda_3 = 5$  — усиление.

4.2.19.  $d_{\min} = \lambda/2n_2 = 107$  нм.

4.2.20.  $x = l/d = 2,4$  мм.

4.2.21.  $x = \lambda d/l = 600$  нм.

4.2.22.  $\theta = \frac{N\lambda}{nl} = 4 \cdot 10^{-4}$  рад.

4.2.23.  $\lambda = \frac{(\Delta r)^2}{R(\sqrt{4,5} - \sqrt{3,5})^2} = 0,319$  мкм.

4.2.24.  $\Delta r = \sqrt{\frac{\lambda R F(n-1)}{R - F(n-1)}}(\sqrt{5} - \sqrt{3}) = 0,28$  мм.

4.2.25.  $d = \frac{2\lambda\sqrt{L^2 + D^2/4}}{D} = 5$  мкм,  $k = \frac{2d}{\lambda} + 1 = 14$ .

4.2.26.  $\theta = 2 \arcsin(\lambda/d) \approx 29^\circ$ .

4.2.27.  $\theta = (l/N) \sin(\theta/2) = 697$  нм.

4.2.28.  $m_{\max} = l/N = 5$ .

4.2.29.  $r_3 = \sqrt{\frac{ab}{a+b}} m\lambda = 741$  мкм.

4.2.30.  $\theta = \arcsin 0,8 = 53^\circ 8'$ .

4.2.31.  $\theta = hd/L = 609$  нм.

4.2.32.  $\theta = 4 cL/dh = 30,7$  ПГц (П — пета,  $10^{15}$ ).

4.2.33.  $45^\circ$ .

$$4.2.34. \varphi_B = \arctg\left(\frac{1}{\sin \alpha}\right) = 55^\circ 42'.$$

$$4.2.35. = 90^\circ - \arctg n = 37^\circ.$$

$$4.2.36. n = \text{ctg} = 1,28.$$

$$4.2.37. k = 1/(0,405 \cos^2) = 3,3.$$

$$4.2.38. \alpha = \arccos \sqrt{\frac{0,09}{0,4232}} = 62^\circ 32'.$$

$$4.2.39. o = /n_o = 391 \text{ нм}; e = /n_e = 436 \text{ нм}.$$

$$4.2.40. d = d(n_o - n_e) = 0,034 \text{ мм}.$$

$$4.2.41. d = /2(n_e - n_o) = 0,0167 \text{ мм}.$$

4.2.42. Обыкновенный и необыкновенный лучи распространяются, не преломляясь, в направлении падения, но с разными скоростями ( $v_o > v_e$ ). Для отрицательного кристалла получится тот же результат с той лишь разницей, что  $v_o < v_e$  (рис. 28).

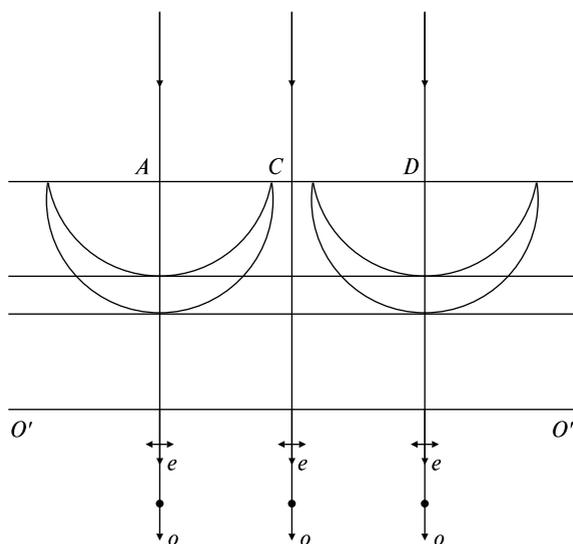


Рис. 28

4.2.43. Луч света падает нормально к поверхности кристалла, оптическая ось (показана точкой внутри кружка) параллельна преломляющей грани и перпендикулярна плоскости падения (рис. 29). Так как эллипсоид и сфера должны соприкасаться вдоль оптической оси, то их сечения плоскостью чертежа представляют собой

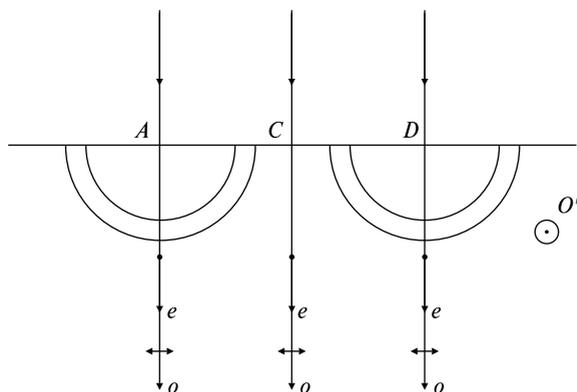


Рис. 29

концентрические окружности разных радиусов. В этом случае оба луча распространяются по направлению падающего луча с разными скоростями. Электрический вектор обыкновенного луча (изображен стрелкой) расположен в плоскости чертежа, в то время как электрический вектор необыкновенного луча направлен перпендикулярно плоскости чертежа (изображен точкой).

4.2.44. Вследствие параллельности плоского фронта падающей волны к поверхности кристалла вокруг всех точек (от  $A$  до  $D$ ) возникнут сферические волновые поверхности одинакового радиуса и эллипсоидальные волновые поверхности (рис. 30). В результате этого волновой фронт обыкновенной волны внутри кристалла будет параллелен падающему, и обыкновенные лучи  $AO$ ,  $DO$  и др.

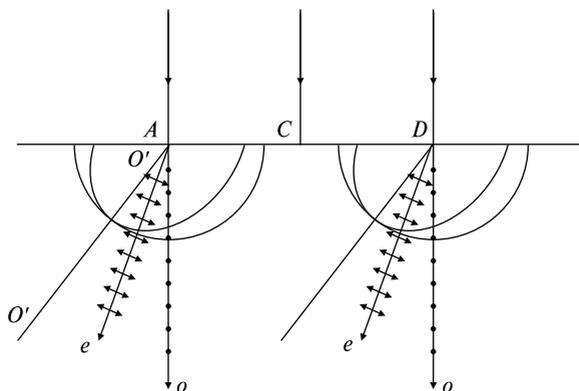


Рис. 30

будут распространяться, не преломившись. Как следует из рисунка, необыкновенные лучи отклоняются влево от обыкновенных при своем преломлении.

4.2.45. В данном случае двойного лучепреломления нет, и луч выходит из пластинки, не меняя своего направления (рис. 31). Нетрудно видеть, что луч при этом должен оставаться естественным. Действительно, при данном расположении положение главной плоскости, проходящей через луч, остается неопределенным, а следовательно, неопределенным остается и направление колебаний обоих лучей, которые в этом случае неотличимы друг от друга.

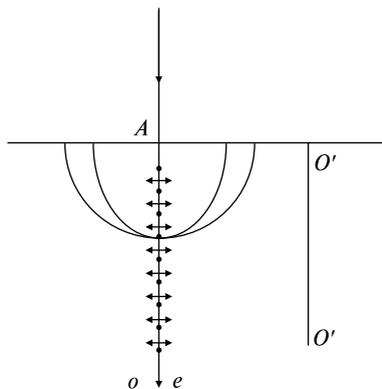


Рис. 31

4.2.46. См. рис. 32.

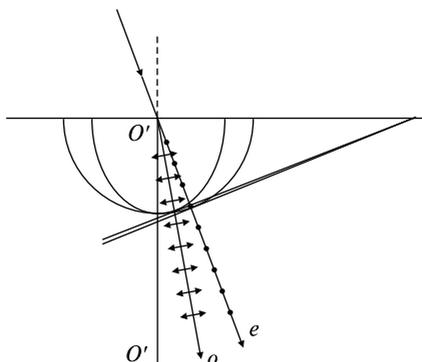


Рис. 32

4.3.1. Да,  $E = h = hc/$ .

4.3.2. Положительный, так как из пластинки выбиваются фотоэлектроны вследствие фотоэффекта.

4.3.3. Давление на белую поверхность в 2 раза больше, чем на черную.

4.3.4. При излучении свободным атомом фотона выполняются закон сохранения энергии, закон сохранения импульса и закон сохранения массы.

4.3.5. В электростатическую энергию системы «тело—электроны» и в кинетическую энергию электронов.

4.3.6. Нет, так как в этом случае не могут одновременно выполняться законы сохранения импульса и энергии.

4.3.7. Фотон.

4.3.8. Металлическая пластинка зарядится отрицательно, полупроводниковая останется нейтральной.

$$4.3.12. \quad = hc/E = 60\,000 \text{ \AA}.$$

$$4.3.13. \quad n = Pt/hc = 100.$$

$$4.3.14. \quad = nhc/N = 1 \text{ мкм}.$$

$$4.3.15. \quad m = h/c = 2,2 \cdot 10^{-36} \text{ кг}, p = h/\lambda = 6,62 \cdot 10^{-28} \text{ Н} \cdot \text{с}.$$

$$4.3.16. \quad E = hc/\lambda = 6 \text{ эВ}.$$

$$4.3.17. \quad E = hc/n = 3,31 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$$

$$4.3.18. \quad = Nhcn/Pt = 541 \text{ нм}.$$

$$4.3.19. \quad P = nhcn/\lambda = 3 \text{ мкВт}.$$

$$4.3.20. \quad n = P/hc = 6 \cdot 10^{20} \text{ с}^{-1}.$$

$$4.3.21. \quad = hc/(m_e v_0^2/2 + eU) = 181 \text{ нм}.$$

$$4.3.22. \quad v = h/m_e \lambda = 1,32 \cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

$$4.3.23. \quad A_{\text{вых}} = hc/\lambda - |e|U = 3,2 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$$

$$4.3.24. \quad v = \sqrt{\frac{2}{m_e} \left( h \frac{c}{\lambda} - A \right)} = 6 \cdot 10^5 \text{ м/с}, m_{\text{ф}} = h/\lambda c = 5 \cdot 10^{-36} \text{ кг}.$$

$$4.3.25. \quad U = (hc/\lambda - A)/e = 0,96 \text{ В}, m = h/c \lambda = 5 \cdot 10^{-36} \text{ кг}.$$

$$4.3.26. \quad A_2 = A_1 + e(U_1 - U_2) = 4 \text{ эВ}.$$

$$4.3.27. \quad v = \sqrt{\frac{2hc}{m} \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right)} = 915 \text{ км/с}.$$

$$4.3.28. \quad E_k = eU = 42 \text{ кэВ}.$$

$$4.3.29. \quad \beta = m_0 c^2 / (m_0 c^2 + 2) = 0,46.$$

$$4.3.30. \quad \lambda_0 = \lambda - \frac{h}{mc} (1 - \cos \varphi) = 24,2 \text{ пм}.$$

$$4.3.31. \quad W = mc^2/2 = 0,26 \text{ МэВ}, p = W/c = 13,7 \cdot 10^{-23} \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

# СОДЕРЖАНИЕ

|   |            |
|---|------------|
| <b>ПРЕДИСЛОВИЕ</b> .....  | <b>3</b>   |
| <b>Раздел 1. МЕХАНИКА</b> .....   | <b>5</b>   |
| Тема 1.1. Кинематика материальной точки .....   | <b>5</b>   |
| Тема 1.2. Динамика материальной точки .....   | <b>20</b>  |
| Тема 1.3. Законы сохранения импульса и механической энергии. Работа .....   | <b>40</b>  |
| Тема 1.4. Неинерциальные системы отсчета .....  | <b>62</b>  |
| Тема 1.5. Движение твердого тела .....  | <b>74</b>  |
| Тема 1.6. Применение законов сохранения для описания вращательного движения твердого тела .....                   | <b>88</b>  |
| Тема 1.7. Колебания .....   | <b>100</b> |
| <b>Раздел 2. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА</b> .....  | <b>116</b> |
| Тема 2.1. Молекулярно кинетическая теория идеальных газов. Распределение Максвелла. Распределение Больцмана ..... | <b>116</b> |
| Тема 2.2. Уравнение состояния идеального газа. Изопроцессы .....  | <b>124</b> |
| Тема 2.3. Первое начало термодинамики. Тепловые машины. Энтропия. Второе начало термодинамики .....               | <b>130</b> |
| Тема 2.4. Реальные газы и жидкости. Капиллярные явления. Поверхностное натяжение .....                            | <b>141</b> |
| <b>Раздел 3. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ</b> .....  | <b>151</b> |
| Тема 3.1. Силы в электростатическом поле .....  | <b>151</b> |
| Тема 3.2. Работа сил электростатического поля. Потенциал ..   | <b>164</b> |
| Тема 3.3. Емкость. Энергия электрического поля .....  | <b>175</b> |
| Тема 3.4. Проводники и диэлектрики в электрическом поле ..  | <b>185</b> |
| Тема 3.5. Постоянный электрический ток .....  | <b>197</b> |
| Тема 3.6. Магнитное поле токов .....  | <b>211</b> |
| Тема 3.7. Электромагнитная индукция. Самоиндукция. Взаимоиндукция .....   | <b>228</b> |
| Тема 3.8. Электромагнитные колебания. Переменный ток. Электромагнитные волны. Уравнения Максвелла ..              | <b>243</b> |
| <b>Раздел 4. ОПТИКА</b> .....   | <b>257</b> |

|   |            |
|---|------------|
| Тема 4.1. Элементы геометрической оптики .....      | 257        |
| Тема 4.2. Волновая оптика.....                      | 271        |
| Тема 4.3. Квантовая оптика.....                     | 287        |
| <b>ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ.....</b>                        | <b>292</b> |
| Раздел 1. Механика .....                            | 292        |
| Раздел 2. Молекулярная физика и термодинамика ..... | 300        |
| Раздел 3. Электричество и магнетизм .....           | 308        |
| Раздел 4. Оптика.....                               | 327        |